UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Inclusiones sumantes entre espacios de sucesiones

Martín Diego Mazzitelli

Director: Dr. Daniel Carando

Marzo de 2010

Introducción

La teoría de operadores p-sumantes tiene sus inicios en la década de 1950, a partir de algunos trabajos realizados por Grothendieck. Sin embargo, fue recién en el año 1966 que Pietsch publicó un artículo en el cual se consideraba por primera vez a la clase de estos operadores. Asimismo, Mityagin y Pełczyński definen, ese mismo año, el concepto de operador (q,p)-sumante. Un resultado debido a Orlicz relacionado con estos temas (aunque probado en el año 1933, mucho antes de que naciera la teoría de operadores sumantes) afirma que las inclusiones $id : \ell_p \hookrightarrow \ell_p$ son $(2,1)$-sumantes para $1 \leq p \leq 2$. En 1973/74, Bennett y (independientemente) Carl prueban que si $1 \leq p \leq 2$ entonces la inclusión $id : \ell_p \hookrightarrow \ell_2$ resulta $(p,1)$-sumante. Finalmente, Defant, Mastyło y Michels definen en [9, año 2002] el concepto de operador (E,p)-sumante para un cierto espacio de Banach de sucesiones $\ell_p \hookrightarrow E$ (generalizando así la definición de operador (q,p)-sumante) y demuestran que para los espacios de sucesiones E que resultan 2-cóncavos y simétricos, se verifica que la inclusión $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(E,1)$-sumante. Este resultado será el objeto de estudio de esta tesis, que está dividida en dos capítulos.

El primer capítulo está dedicado al estudio de los espacios de Banach de sucesiones, cuyos ejemplos más conocidos son los espacios ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ y c_0. Dado que la teoría de estos espacios puede ser vista dentro del estudio de los Banach lattice (reticulados de Banach), incluimos en el **Apéndice A** las principales definiciones y propiedades de estos últimos. Los conceptos en los cuales se centrará nuestra atención serán: el dual de Köthe, las propiedades de minimalidad y maximalidad y las potencias de los espacio de sucesiones (este último tema, estrechamente relacionado con la convexificación y concavificación de los Banach lattice). Hacia el final del capítulo, dedicamos una sección a los espacios de sucesiones de Orlicz y de Lorentz.

En el segundo capítulo, el objetivo principal será el de probar el resultado antes mencionado acerca de las inclusiones $(E,1)$-sumantes. En ese sentido, comenzaremos definiendo y estudiando a la clase de operadores (E,p)-sumantes que, como ya mencionamos, generaliza a la clase de operadores (q,p)-sumantes. Algunos de los resultados que probaremos en el capítulo son, a su vez, generalizaciones de resultados conocidos en la teoría de operadores sumantes. En el **Apéndice B** enunciamos algunos de los resultados clásicos de la teoría de estos operadores. En lo que se refiere al resultado principal de este capítulo, será necesario para su demostración contar con algunas herramientas de la teoría de interpolación. Por tal motivo, dedicamos el **Apéndice C** a los fines de dejar en claro los conceptos relacionados a los espacios de interpolación que son de utilidad en esta parte. Por último veremos que como aplicación de este resultado, se puede estudiar el comportamiento asintótico de los números de aproximación de las inclusiones $id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n$ (para ciertos espacios de sucesiones E). En el **Apéndice D** se puede ver la definición de los números de aproximación (así como las definiciones de otros números asociados a operadores) dentro del marco de los s-numbers. Cabe mencionar la inclusión de un último apéndice (el **Apéndice E**), en el cual se enuncian algunos resultados auxiliares que son de gran utilidad a lo largo de este capítulo.

Notación

En lo que sigue, nos referiremos a las principales notaciones y terminología que utilizaremos a lo largo del texto. El conjunto de los números naturales será denotado por $\mathbb{N}$, mientras que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán, respectivamente, los cuerpos de escalares reales y complejos.

Dado que trabajaremos con espacios de Banach de sucesiones, nos reservaremos las letras E y F para estos espacios, mientras que X, Y, Z,... representarán espacios de Banach cualesquiera. La norma de un espacio X será denotada por $\|\cdot\|_X$ (o $\|\cdot\|$ en caso de que se sobreentienda qué espacio estamos considerando) y $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ será la bola unidad cerrada del espacio.

Por lo general, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$,... serán sucesiones de números reales, o eventualmente, sucesiones de elementos en un espacio de Banach (dado que trabajaremos con espacios de sucesiones, en ocasiones se considerarán sucesiones de sucesiones). Cuando se preste a confusión, se notará $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a las sucesiones de elementos en un espacio de Banach. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio X, notaremos $span\{x_n : n \geq 1\}$ al conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de la sucesión y $\overline{[x_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_X}$ a la clausura de este conjunto.

Dado $t \in \mathbb{R}$, escribiremos $sg(t)$ para representar el signo del escalar t.

Cuando hablemos de un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach, nos estaremos refiriendo a una aplicación lineal y acotada. El espacio de Banach de los operadores de X en Y se denota $\mathcal{L}(X,Y)$ y la norma de cada operador está dada por $\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\|_Y$. Diremos que un operador $T : X \longrightarrow Y$ es isométrico si verifica $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$.

El dual de un espacio X será denotado por X' y utilizaremos las letras φ, ψ, ϕ,... para representar los elementos del mismo (las funcionales lineales y continuas). Si X e Y son dos espacios de Banach y se consideran $\varphi \in X'$, $y \in Y$, entonces $\varphi \otimes y : X \longrightarrow Y$ representa al operador dado por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x) \cdot y$, cuya norma es $\|\varphi \otimes y\| = \|\varphi\|_{X'}.\|y\|_Y$.

Dados dos espacios de Banach X e Y, diremos que $X = Y$ isométricamente si son iguales como conjuntos y sus normas coinciden. Mientras tanto, se dirá que $X = Y$ con normas equivalentes si son iguales como conjuntos y existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1.\|x\|_Y \leq \|x\|_X \leq C_2.\|x\|_Y$ para cualquier elemento x en el espacio. De la misma forma, diremos que $X \subseteq Y$ con inclusión continua (y en ciertos casos notaremos $X \hookrightarrow Y$), si se verifica la inclusión entre conjuntos y existe una constante $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C.\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Si E es un espacio de sucesiones y $n \in \mathbb{N}$, entonces E_n será el espacio de las n-uplas $(x_1, ..., x_n)$ con la norma dada por $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{E_n} = \|(x_1, ..., x_n, 0, ...)\|_E$. En el caso de los espacios ℓ_p, utilizaremos la notación ℓ_p^n en lugar de escribir $(\ell_p)_n$. Notaremos $P_n : E \longrightarrow E$ a la proyección sobre las primeras n-cordenadas, es decir, $P_n((x_i)_i) = (x_1, ..., x_n, 0, ...)$. Eventualmente, se puede pensar $P_n : E \longrightarrow E_n$.

Si $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son dos sucesiones de números reales, diremos que tienen el mismo comportamiento asintótico, y notaremos $a_n \asymp b_n$, si existen constantes $K_1, K_2 > 0$ tales que $K_1.b_n \leq a_n \leq K_2.b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Índice general

Capítulo 1

Espacios de Sucesiones

A lo largo de este capítulo estudiaremos algunas cuestiones básicas sobre los espacios de sucesiones. Comenzaremos con algunas definiciones y propiedades sencillas de estos espacios y veremos que bajo ciertas hipótesis pueden verse como Banach lattices. Luego se estudiarán los conceptos de maximalidad, minimalidad, concavidad y convexidad que serán de gran utilidad en los capítulos que siguen. Para terminar veremos algunos ejemplos de espacios de sucesiones, como son los espacios de Orlicz y de Lorentz.

1.1. Preliminares

1.1.1. Definiciones y propiedades

Denotamos ω a la familia de todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo de escalares). Bajo las operaciones usuales (coordenada a coordenada) de suma y multiplicación por escalares

$$(x_n)_n + (y_n)_n \;=\; (x_n + y_n)_n$$

$$\lambda \cdot (x_n)_n \;=\; (\lambda . x_n)_n \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

tenemos un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares. Un *espacio de sucesiones* es un subespacio de ω.

A lo largo de todo el texto, trabajaremos con espacios de sucesiones reales, esto es, serán espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

Notaremos c_{00} al espacio de sucesiones con finitas coordenadas no nulas. Es decir $c_{00} = span\{e_n : n \geq 1\}$ donde e_n es el n-ésimo vector canónico. Todos los espacios de sucesiones que consideremos serán espacios que contengan a c_{00}.

Por otra parte nos interesan aquellos espacios de sucesiones que sean normados y, más aún, los que resulten completos con dicha norma. Los llamaremos (como no podía ser de otra manera) *espacios de Banach de sucesiones*. Mencionemos algunos de los ejemplos más conocidos de espacios de sucesiones, con sus respectivas normas:

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &= \{(x_n)_n : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\} \quad \text{con} \quad \|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \\
c_0 &= \{(x_n)_n : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\} \quad \text{con} \quad \|\cdot\|_\infty \\
c &= \{(x_n)_n : \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \quad \text{con} \quad \|\cdot\|_\infty \\
\ell_p &= \left\{(x_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\} \quad \text{con} \quad \|(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \quad \text{donde } 1 \le p < \infty.
\end{aligned}$$

Si $0 < p < 1$, ℓ_p es un espacio de sucesiones, pero $\|\cdot\|_p$ no define una norma (falla la desigualdad triangular).

$$\begin{aligned}
bv &= \left\{(x_n)_n : \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i|\right\} \quad \text{con} \quad \|(x_n)_n\|_{bv} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| + \lim_{n\to\infty} |x_n| \\
bs &= \left\{(x_n)_n : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| < \infty\right\} \quad \text{con} \quad \|(x_n)_n\|_{bs} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \\
m_0 &= \mathit{span}\{A\} \quad \text{con} \quad \|\cdot\|_\infty \quad \text{donde } A \text{ es el conjunto de todas las sucesiones de 0 y 1.}
\end{aligned}$$

Todos estos son ejemplos de espacios de Banach de sucesiones, excepto el espacio $(m_0, \|\cdot\|_\infty)$, que es normado pero no resulta completo. Pueden verse más ejemplos en [13].

A continuación definimos los conceptos de simetría y normalidad en espacios de sucesiones normados.

Definición 1.1.1. Sea E un espacio de sucesiones normado y sea Π el conjunto de todas las permutaciones de los naturales. Diremos que:

a) E es *simétrico* si $x_\sigma = (x_{\sigma(i)})_{i\in\mathbb{N}} \in E$ con $\|x_\sigma\|_E = \|x\|_E$ siempre que $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E$ y $\sigma \in \Pi$.

b) E es *normal* si dados $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E$ e $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \omega$ tales que $|y_i| \le |x_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $y \in E$ con $\|y\|_E \le \|x\|_E$.

Ejemplos 1.1.2. *i*) Son claramente simétricos los espacios $\ell_\infty, c_0, c, \ell_p, m_0$.

Por otro lado, bs es un ejemplo de espacio de sucesiones que no es simétrico; esto se debe a la existencia de series condicionalmente convergentes (esto es, series convergentes cuyos reordenamientos pueden converger al número que se desee).

ii) Son normales los espacios ℓ_∞, c_0, ℓ_p.

El espacio c no es normal puesto que, por ejemplo, $(1,1,1,1,.....) \in c$ pero $(1,0,1,0,.....) \notin c$. Tampoco lo es bv, ya que $(1,1,1,1,.....) \in bv$ pero $(1,-1,1,-1,.....) \notin bv$ (intercambiando las sucesiones se ve que bs no es normal). Por último, m_0 no es normal pues $(1,1,1,.....) \in m_0$ pero $(1/i)_{i\in\mathbb{N}} \notin m_0$.

Siguiendo la notación de la definición anterior, utilizaremos en general las letras E y F para denotar los espacios de sucesiones y $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$) para sus normas. Por otra parte, si decimos $x \in E$ nos referimos a la sucesión $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Observación 1.1.3. *Sea E un espacio de sucesiones normado y normal. Si $x \in E$ y $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_i^n)_i)_n$ es una sucesión de elementos en E (es decir, una sucesión de sucesiones!) tal que $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ en E, entonces $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos $\|x^n - x\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, y dado que E es normal se verifica $|x_i^n - x_i|.\|e_i\|_E \leq \|x^n - x\|_E$. En consecuencia se tendrá $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$. □

Observación 1.1.4. *Sea E un espacio de sucesiones normado, normal y simétrico. Sea $P = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, \sigma$ es inyectiva$\}$. Entonces si $x \in E$ y $\sigma \in P$, se tiene $x_\sigma = (x_{\sigma(i)})_{i\in\mathbb{N}} \in E$.*

Demostración. Dado un $\sigma \in P$ nos construimos un $\rho \in \Pi$ tal que $\rho(i) = \sigma(i)$ para todo i impar. Luego $x_\rho = (x_{\rho(i)})_i = (x_{\sigma(1)}, x_{\rho(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\rho(4)}, ...)$ y como E es simétrico se tiene $x_\rho \in E$. Pero como E es normal y $x_\rho \in E$, se tendrá que $(x_{\sigma(1)}, 0, x_{\sigma(3)}, 0, ...) \in E$. De forma análoga obtenemos que $(0, x_{\sigma(2)}, 0, x_{\sigma(4)}, ...) \in E$.

Luego, la suma de estos dos últimos está en E (pues E es un espacio vectorial), es decir, $x_\sigma = (x_{\sigma(i)})_i \in E$ como se quería probar. □

Proposición 1.1.5. *Sea $E \subsetneq \omega$ un espacio de sucesiones normado, normal y simétrico. Entonces $E \subseteq c_0$ ó $E = \ell_\infty$ (donde $\subseteq$ significa inclusión continua y la igualdad es con normas equivalentes).*

Demostración. Supongamos que $E \nsubseteq c_0$ y probemos que $E = \ell_\infty$. Consideremos $x \in E$ tal que $x \notin c_0$. Luego para algún $\varepsilon > 0$ existe una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_{n_k}| \geq \varepsilon$ para todo $k \geq 1$. Definimos $\sigma \in P$ tal que $\sigma(k) = n_k$. Por la observación anterior $x_\sigma = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \in E$; pero E es normal y $\varepsilon \leq |x_{n_k}|$, de forma que $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ...) \in E$ y como consecuencia $(1, 1, 1, 1, ...) \in E$. Veamos que eso basta para probar que $\ell_\infty \subseteq E$. Consideremos $x \in \ell_\infty$ (cualquiera), y sea $y = \|x\|_\infty.(1, 1, 1, 1, ...)$ perteneciente al espacio E (por las consideraciones anteriores). Claramente $|x_i| \leq |y_i|$ para todo i y en consecuencia $x \in E$ con $\|x\|_E \leq \|y\|_E = \|x\|_\infty.\|(1, 1, 1, 1, ...)\|_E$ (nuevamente por normalidad de E).

Hasta aquí hemos probado que si $x \in \ell_\infty$ entonces $x \in E$ con $\|x\|_E \leq C_1.\|x\|_\infty$ (donde $C_1 = \|(1, 1, 1, 1, ...)\|_E$); es decir $\ell_\infty \subseteq E$. Veamos ahora que $E \subseteq \ell_\infty$. Para eso supongamos que hay un $x \in E$ tal que $x \notin \ell_\infty$ y veamos que en ese caso debe ser $E = \omega$ (lo cual contradice una de nuestras hipótesis). Sea $y \in \omega$. Como $x \notin \ell_\infty$ hay una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_{n_k}| > |y_k|$ para todo $k \geq 1$. Como antes, definimos $\sigma \in P$ tal que $\sigma(k) = n_k$ y por la observación anterior tenemos $x_\sigma \in E$. Pero entonces, como E es normal obtenemos $y \in E$, y esto nos muestra que $E = \omega$. Luego si $x \in E$ entonces $x \in \ell_\infty$. Veamos que la inclusión es continua. Para eso consideremos $x \in E$ (y en consecuencia en ℓ_∞) y notemos que por la propiedad de normalidad del espacio E, se verifica $|x_k|.\|e_k\|_E = \|x_k \cdot e_k\|_E \leq \|x\|_E$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como E es simétrico entonces $C_2 = \|e_k\|_E$ es una constante que no depende de k, de manera que tomando supremo sobre todos los $k \in \mathbb{N}$ en la desigualdad anterior, obtenemos $C_2.\|x\|_\infty \leq \|x\|_E$. Esto nos muestra que la inclusión $E \subseteq \ell_\infty$ es continua.

En definitiva, probamos que si $E \nsubseteq c_0$ entonces $E = \ell_\infty$ con $C_2.\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_E \leq C_1.\|\cdot\|_\infty$. Si fuese $E \subseteq c_0$, al igual que antes se prueba que $C_2.\|x\|_\infty \leq \|x\|_E$ para cada $x \in E$ y en consecuencia la inclusión resulta continua. □

Proposición 1.1.6. *Sea E un espacio de Banach de sucesiones tal que existe una constante $C > 0$ que verifica $\|e_k\|_E \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\ell_1 \subseteq E$ con inclusión continua.*

Demostración. Consideremos $x \in \ell_1$ y veamos que $x \in E$. Para eso basta probar que $\left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot e_i\right)_{N\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E, ya que en ese caso resulta convergente en E (que por hipótesis es un espacio de Banach) y debe converger entonces a x. Sean $N > M \in \mathbb{N}$; por la desigualdad triangular resulta claro que $\left\|\sum_{i=1}^N x_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^M x_i \cdot e_i\right\|_E = \left\|\sum_{i=M+1}^N x_i \cdot e_i\right\|_E \leq \sum_{i=M+1}^N |x_i|.\|e_i\|_E$. Ahora bien, teniendo en cuenta la hipótesis de que $\|e_k\|_E \leq C$ y dado que x pertenece a ℓ_1, obtenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^N x_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^M x_i \cdot e_i\right\|_E \leq C. \sum_{i=M+1}^N |x_i| \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0,$$

de forma que $\left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot e_i\right)_{N\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E como se quería ver.

Para ver que la inclusión es continua, notar que con argumentos análogos a los de antes se prueban las desigualdades: $\|x\|_E \leq \sum_{i=1}^\infty |x_i|.\|e_i\|_E \leq C.\|x\|_1$. Luego $\ell_1 \subseteq E$. □

Proposición 1.1.7. *Sea E un espacio de sucesiones normado y normal tal que existe una constante $C > 0$ que verifica $C \leq \|e_k\|_E$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $E \subseteq \ell_\infty$ con inclusión continua.*

Demostración. Consideremos un $x \in E$ y notemos que $|x_k|.C \leq \|x_k \cdot e_k\|_E \leq \|x\|_E$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (por las hipótesis de normalidad del espacio y la existencia de la constante C). Luego, es claro que $x \in \ell_\infty$ y que $C.\|x\|_\infty \leq \|x\|_E$ lo cual demuestra la inclusión. □

En general, los espacios de sucesiones con los que trabajemos serán espacios que verifiquen $\ell_1 \subseteq E \subseteq \ell_\infty$. Las proposiciones anteriores nos muestran que, bajo ciertas hipótesis, un espacio de sucesiones verifica estas inclusiones. En efecto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.8. *Sea E un espacio de Banach de sucesiones.*

a) Si $E \subsetneq \omega$ es normal y simétrico, entonces $\ell_1 \subseteq E \subseteq \ell_\infty$.

b) Si E es normal y existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1 \leq \|e_k\|_E \leq C_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\ell_1 \subseteq E \subseteq \ell_\infty$.

En ambos casos, las inclusiones son continuas.

Demostración. a) La inclusión $E \subseteq \ell_\infty$ se deduce de la **Proposición 1.1.5**. Por otro lado, notando que si E es simétrico entonces estamos en las hipótesis de la **Proposición 1.1.6**, obtenemos la inclusión $\ell_1 \subseteq E$. Ambas inclusiones resultan continuas según los resultados mencionados.

b) Se deduce inmediatamente de las **Proposiciones 1.1.6** y **1.1.7**. □

1.1.2. Relación con los Banach Lattice

Nos interesa mostrar que, bajo la hipótesis de normalidad, un espacio de Banach de sucesiones E es un Banach lattice. Esto resultará de gran interés, ya que en lo que sigue consideraremos solamente aquellos espacios de sucesiones que verifiquen ser lattice. La definición, así como las principales propiedades de los Banach lattice pueden verse en el **Apéndice A**.

Para empezar, dado un espacio de sucesiones E normado y normal, debemos definir un orden en el mismo. La definición es la natural : dados $x, y \in E$, diremos que $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto define claramente un orden en E. Para que $(E, \leq)$ sea lattice, debemos probar que si $x, y \in E$, entonces existen $x \vee y$, $x \wedge y$ en E. Veamos que sirven

$$\begin{aligned} x \vee y &= (\sup\{x_i, y_i\})_{i \in \mathbb{N}} \\ x \wedge y &= (\text{ínf}\{x_i, y_i\})_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

En primer lugar veamos que $x \vee y$, $x \wedge y$ pertenecen a E. Por un lado tenemos $|(x \wedge y)_i| = |\text{ínf}\{x_i, y_i\}| \leq |x_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y dado que $x \in E$ y que E es normal, se tiene $x \wedge y \in E$. Por otro lado $|(x \vee y)_i| = |\sup\{x_i, y_i\}| \leq |x_i| + |y_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $x, y \in E$ (y E es normal) entonces $|x| + |y| = (|x_i| + |y_i|)_{i \in \mathbb{N}} \in E$ y (nuevamente) por la hipótesis de normalidad, $x \vee y \in E$. Ahora probemos que $x \wedge y$ es la mayor de las cotas inferiores de x e y, y que $x \vee y$ es la menor de las cotas superiores. Es claro por la definición del orden en E, que $x \wedge y \leq x$ y $x \wedge y \leq y$ (es decir que $x \wedge y$ es cota inferior) y que $x \vee y \geq x$ y $x \vee y \geq y$ (o sea, $x \vee y$ es cota superior). Para terminar, veamos que si $z \in E$ es tal que $z \leq x$ y $z \leq y$ entonces $z \leq x \wedge y$. Como $z \leq x$ entonces $z_i \leq x_i$ para todo i. Análogamente $z_i \leq y_i$ para todo i, de forma que $z_i \leq \text{ínf}\{x_i, y_i\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $z \leq x \wedge y$. Esto nos muestra que $x \wedge y$ es la mayor de las cotas inferiores. De la misma forma se prueba que $x \vee y$ es la menor de las cotas superiores. Así tenemos que E es un lattice con el orden definido, y dado que E es un espacio vectorial compatible con ese orden, es lo que llamamos un vector lattice (ó espacio de Riesz).

Ahora, como E es normal entonces $\| \cdot \|_E$ resulta una lattice norm, y esto nos dice que E es un espacio de Riesz normado. Si además E es un Banach, entonces resulta ser un Banach lattice.

Un comentario más acerca de este tema: en gran parte de la bibliografía referida a los Banach lattice (ver por ejemplo [16] ó [18]) se hace mención de los espacios de funciones (o espacios de funciones de Köthe) con definiciones que en ocasiones difieren levemente unas de las otras. Estos no son más que ejemplos de Banach lattice (por cierto, una gran variedad de ejemplos!), entre los cuales se encuentran los espacios de Banach de sucesiones normales. Una definición de los espacios de funciones que se ajusta a nuestros contenidos se puede encontrar en ([16], p.28), considerando como espacio de medida a $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ donde $\mu(A) = \sharp A$ (ver **Apéndice A.2**).

A partir de aquí, cada vez que hablemos de un espacio de sucesiones, nos referiremos a un espacio de Banach de sucesiones $c_{00} \subsetneq E \subsetneq \omega$ que sea normal, y que resulte en consecuencia un Banach lattice.

1.2. Dual de Köthe y espacio de multiplicadores

En esta sección definiremos el dual de Köthe de un espacio de sucesiones y el espacio de multiplicadores entre dos espacios de sucesiones, y veremos algunos ejemplos de estos para los espacios ℓ_p y c_0.

Definición 1.2.1. Sea E un espacio de sucesiones. Llamamos dual de Köthe (o $\times$-dual) de E, al espacio

$$E^{\times} = \left\{ x \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty, \quad \forall y \in E \right\}$$

Si dadas dos sucesiones $x = (x_n)_n$ e $y = (y_n)_n$ notamos $xy = (x_n y_n)_n$, podemos reescribir $E^{\times} = \{x \in \omega : xy \in \ell_1, \quad \forall y \in E\}$.

El espacio $E^{\times}$ resultará un espacio de Banach de sucesiones con la norma dada por,

$$\|x\|_{E^{\times}} = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \ : \ \|y\|_E \leq 1 \right\} = \sup_{y \in B_E} \|xy\|_{\ell_1}.$$

Antes de verificar que $E^{\times}$ es efectivamente un espacio de sucesiones, vamos a definir los espacios de multiplicadores (de los cuales $E^{\times}$ resulta un caso particular).

Definición 1.2.2. Sean E, F espacios de sucesiones. Definimos el espacio de multiplicadores de E en F,

$$M(E, F) = \{x \in \omega : xy \in F, \quad \forall y \in E\}.$$

Si llamamos T_x al operador definido por $T_x(y) = xy = (x_n y_n)_n$, la definición anterior es equivalente a la siguiente:

$$M(E, F) = \{x \in \omega \ : \ T_x : E \to F \quad \text{está bien definido y es acotado}\}.$$

En efecto, basta ver que si $x \in \omega$ es tal que $xy \in F$ para todo $y \in E$, entonces $T_x : E \to F$ es un operador acotado. Esto es una simple consecuencia del teorema del gráfico cerrado, de hecho supongamos que se tiene $(y^n)_n = ((y_i^n)_i)_n$ una sucesión de elementos en E tal que $y^n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ en E, y que hay un $z \in F$ tal que $T_x(y^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ en F. Veamos que en ese caso $z = T_x(y)$, lo cual mostraría que T_x tiene gráfico cerrado, y en consecuencia resulta acotado. Por la **Observación 1.1.3**, sabemos que en espacios de sucesiones la convergencia en norma implica convergencia coordenada a coordenada, de manera que $y_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_i$ y $(T_x(y^n)) = x_i y_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto implica trivialmente que $x_i y_i^n = z_i$ para todo i, y en consecuencia $T_x(y^n) = z$ como se quería ver.

Ahora veamos que $M(E,F)$ es un espacio de sucesiones con la norma dada por

$$\|x\|_{M(E,F)} = \sup_{y\in B_E} \|xy\|_F = \|T_x\|.$$

Esto probaría que $E^\times$ es un espacio de sucesiones ya que claramente $E^\times = M(E,\ell_1)$ (igualdad isométrica). En primer lugar, notemos que $M(E,F)$ es un espacio vectorial:

1. Es claro que $0 \in M(E,F)$.

2. Si $x \in M(E,F)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot x = (\lambda x_n)_n \in M(E,F)$. De hecho, si $y \in E$ entonces $xy \in F$ (pues $x \in M(E,F)$). Luego, como F es espacio vectorial entonces $\lambda \cdot xy \in F$. Esto muestra que $\lambda \cdot x \in M(E,F)$.

3. Sean x,z en $M(E,F)$ y veamos que $x+z \in M(E,F)$. Si $y \in E$ entonces $(x+z)y = ((x_n+z_n)y_n)_n = xy + zy \in F$ pues xy, $zy \in F$

Ahora veamos que $\|\cdot\|_{M(E,F)}$ define una norma.

1. En primer lugar, si $\|x\|_{M(E,F)} = 0$ entonces $\|xy\|_F = 0$ para todo $y \in B_E$. Como $\|\cdot\|_F$ es una norma entonces $xy = 0$ para todo $y \in B_E$. Esto implica, naturalmente, que $xy = 0$ para todo $y \in E$. Tomando en particular $y = e_n$ tenemos $0 = xe_n = (0,...,0,x_n,0,.....)$, y en consecuencia $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. En segundo lugar, si $x \in M(E,F)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\|\lambda\cdot x\|_{M(E,F)} = \sup_{y\in B_E} \|\lambda\cdot xy\|_F = \sup_{y\in B_E} |\lambda|.\|xy\|_F = |\lambda|.\|x\|_{M(E,F)}$

3. Por último veamos la desigualdad triangular. Sean $x,z \in M(E,F)$ y sea $y \in B_E$ (cualquiera). Por la desigualdad triangular en F, y dado que $\|xy\|_F \leq \|x\|_{M(E,F)}$ (y lo mismo con z), tendremos $\|(x+z)y\|_F \leq \|xy\|_F + \|zy\|_F \leq \|x\|_{M(E,F)} + \|z\|_{M(E,F)}$. Luego tomando $\sup_{y\in B_E}$, obtenemos $\|x+z\|_{M(E,F)} \leq \|x\|_{M(E,F)} + \|z\|_{M(E,F)}$.

Hasta aquí tenemos que $M(E,F)$ es un espacio vectorial normado y que $c_{00} \subseteq M(E,F)$ (esto último se desprende trivialmente de la definición). Veamos que es completo. Sea $(x^n)_n = ((x_k^n)_k)_n$ una sucesión de Cauchy en $M(E,F)$. Para cada $y \in E$ se tiene $\|(x^n - x^m)y\|_F \leq \|x^n - x^m\|_{M(E,F)}.\|y\|_E \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Esto muestra que $(x^n y)_n$ es de Cauchy en F y, puesto que F es completo, hay un $z_y \in F$ tal que

$$x^n y \xrightarrow[n\to\infty]{} z_y \quad \text{en F.} \tag{1.1}$$

Ahora fijemos un $k \in \mathbb{N}$ y consideremos $y = e_k$. Como $(x^n e_k)_n = (0,..,0, x_k^n, 0, ...)$ es de Cauchy en F, entonces $(x_k^n)_n$ es de Cauchy (en $\mathbb{R}$) y en consecuencia hay un $x_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k. \tag{1.2}$$

Como $k \in \mathbb{N}$ era cualquiera, podemos considerar $x = (x_k)_k$. Veamos que $x \in M(E,F)$ y que $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ en $M(E,F)$. Para ver lo primero, consideremos $y \in E$ y probemos que $xy \in F$. Por (1.2) es claro que $x_k^n y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k y_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Pero por (1.1) tenemos $x_k^n y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} (z_y)_k$, de manera que $x_k y_k = (z_y)_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $xy = z_y \in F$. Para ver que la serie de los $(x^n)_n$ converge a x, consideremos $y \in B_E$ tal que

$$\|x^n - x\|_{M(E,F)} \leq \|(x^n - x)y\|_F + \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3}$$

para un $\varepsilon > 0$ dado (tal y existe por definición de la norma). Como $x^n y \xrightarrow[n\to\infty]{} xy$ en F, entonces existe un n_0 tal que, si $n \geq n_0$, se verifica $\|(x^n - x)y\|_F < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto, junto con (1.3), nos muestra que $\|x^n - x\|_{M(E,F)} < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Así, queda probado que $M(E,F)$ es completo.

Para terminar, veamos que es normal. Sean $x \in \omega$ y $z \in M(E,F)$ tales que $|x_i| \leq |z_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces, si $y \in E$ se tendrá $|x_i y_i| \leq |z_i y_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pero como $z \in M(E,F)$ entonces $zy \in F$, y puesto que F es normal, $xy \in F$ con $\|xy\|_F \leq \|zy\|_F$. Luego x pertenece a $M(E,F)$ con $\|x\|_{M(E,F)} \leq \|z\|_{M(E,F)}$ como se quería ver.

En definitiva, probamos que $M(E,F)$ *es un espacio de sucesiones.*

Observación 1.2.3. *Si E y F son simétricos entonces $M(E,F)$ lo es.*

Demostración. Sean $x \in M(E,F)$ y $\sigma \in \Pi$. Queremos ver que $x_\sigma \in M(E,F)$ con $\|x_\sigma\|_{M(E,F)} = \|x\|_{M(E,F)}$. Dado $y \in E$, es claro que $x_\sigma y = (x y_{\sigma^{-1}})_\sigma$. Ahora bien, como E es simétrico entonces $y_{\sigma^{-1}} \in E$, y dado que $x \in M(E,F)$, tenemos $x y_{\sigma^{-1}} \in F$. Pero F también es simétrico, con lo cual $x_\sigma y = (x y_{\sigma^{-1}})_\sigma \in F$. Luego $x_\sigma \in M(E,F)$. Para probar la igualdad $\|x_\sigma\|_{M(E,F)} = \|x\|_{M(E,F)}$, notar que como F es simétrico se tiene $\|x_\sigma y\|_F = \|(x y_{\sigma^{-1}})_\sigma\|_F = \|x y_{\sigma^{-1}}\|_F$. Por otro lado, $\|x y_{\sigma^{-1}}\|_F \leq \|x\|_{M(E,F)} . \|y_{\sigma^{-1}}\|_E = \|x\|_{M(E,F)} . \|y\|_E$, donde la última igualdad se debe en este caso a la simetría de E. En consecuencia $\|x_\sigma y\|_F \leq \|x\|_{M(E,F)} . \|y\|_E$, y tomando supremo sobre los $y \in B_E$, se obtiene $\|x_\sigma\|_{M(E,F)} \leq \|x\|_{M(E,F)}$. Razonando con σ^{-1} en lugar de σ y x_σ en lugar de x, obtenemos la igualdad buscada. $\square$

Veamos algunos ejemplos de espacios de multiplicadores entre los espacios ℓ_p.

Ejemplos 1.2.4. *i*) Si $1 \leq q < p < \infty$, entonces $M(\ell_p, \ell_q) = \ell_r$ donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Cuando $p = \infty$ se tiene $M(\ell_\infty, \ell_q) = \ell_q$.

ii) Si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $M(\ell_p, \ell_q) = \ell_\infty$.

Las igualdades en *i*) y *ii*) son isométricas.

Demostración. Probemos i). En primer lugar, veremos el caso $p < \infty$.

$\supseteq$) Sea $x \in \ell_r$. Queremos ver que $x \in M(\ell_p, \ell_q)$ con $\|x\|_{M(\ell_p,\ell_q)} \leq \|x\|_r$. Para eso consideremos $y \in \ell_p$ y veamos que $xy \in \ell_q$. Aplicando la desigualdad de Hölder con $s = \frac{r}{q}$ y $s' = \frac{p}{q}$ (notar que $s, s' \geq 1$ y que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ pues $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$), se tiene $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q |y_i|^q \leq \|x\|_r^q \|y\|_p^q < \infty$, ya que $x \in \ell_r$ e $y \in \ell_p$. Luego $\|xy\|_q \leq \|x\|_r \|y\|_p$, y tomando supremo sobre los $y \in B_{\ell_p}$, se obtiene $\|x\|_{M(\ell_p,\ell_q)} \leq \|x\|_r$.

$\subseteq$) Sea ahora $x \in M(\ell_p, \ell_q)$ y supongamos que $x \notin \ell_r$. Tomando s y s' como antes, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos, $z_n = (sgx_1.|x_1|^{s-1}, \ldots.., sgx_n.|x_n|^{s-1}, 0, \ldots..)$ e $y_n = \frac{z_n}{\|z_n\|_p} \in B_{\ell_p}$. Notar que $xy_n = \frac{1}{\|z_n\|_p}.(|x_1|^s, \ldots..|x_n|^s, 0, \ldots..) \in \ell_q$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ser sucesiones con finitas coordenadas no nulas), y su norma está dada por $\|xy_n\|_q = \frac{1}{\|z_n\|_p}.\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{sq}\right)^{1/q} = \frac{1}{\|z_n\|_p}.\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/q}$. Observando que $\|z_n\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{(s-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/p}$, obtenemos

$$\|xy_n\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/q-1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/r} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \tag{1.4}$$

ya que suponemos que $x \notin \ell_r$. Pero como era $x \in M(\ell_p, \ell_q)$ e $y_n \in B_{\ell_p}$ para todo n, entonces $\|xy_n\|_q \leq \sup_{y \in B_{\ell_p}} \|xy\|_q = \|x\|_{M(\ell_p,\ell_q)} < \infty$, lo cual se contradice con (1.4). La contradicción proviene de suponer que $x \notin \ell_r$, de manera que $x \in \ell_r$ como se quería probar. Además, ya vimos que $\|xy_n\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/r}$ y entonces, tomando supremo sobre todos los $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\|x\|_r = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|xy_n\|_q \leq \sup_{y \in B_{\ell_p}} \|xy\|_q = \|x\|_{M(\ell_p,\ell_q)}$.

Con esto probamos que $M(\ell_p, \ell_q) = \ell_r$ isométricamente. Nos quedaría el caso $p = \infty$, donde queremos ver que $M(\ell_\infty, \ell_q) = \ell_q$.

$\supseteq$) Sea $x \in \ell_q$. Es claro que si $y \in \ell_\infty$, entonces $xy \in \ell_q$ con $\|xy\|_q \leq \|y\|_\infty.\|x\|_q$. Tomando supremo para $y \in B_{\ell_\infty}$, se tiene $\|x\|_{M(\ell_\infty,\ell_q)} \leq \|x\|_q$ y así queda probada una inclusión.

$\subseteq$) Sea $x \in M(\ell_\infty, \ell_q)$, y consideremos $y_0 = (1, 1, 1, \ldots..) \in B_{\ell_\infty}$. Por hipótesis $xy_0 = x \in \ell_q$. Además $\|x\|_q = \|xy_0\|_q \leq \sup_{y \in B_{\ell_\infty}} \|xy\|_q = \|x\|_{M(\ell_\infty,\ell_q)}$, lo que prueba la otra inclusión.

Ahora veamos ii). Recordemos que queremos probar que $M(\ell_p, \ell_q) = \ell_\infty$, bajo la hipótesis de que $1 \leq p \leq q$. Veremos el caso $q < \infty$, si no la demostración es totalmente análoga.

$\supseteq$) Sean $x \in \ell_\infty$ e $y \in \ell_p$ y veamos que $xy \in \ell_q$. Notemos que como $p \leq q$ entonces $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ con inclusión de norma 1. Entonces, $\|xy\|_q \leq \|x\|_\infty.\|y\|_q \leq \|x\|_\infty.\|y\|_p < \infty$, de forma que $x \in M(\ell_p, \ell_q)$ con $\|x\|_{M(\ell_p,\ell_q)} \leq \|x\|_\infty$.

$\subseteq$) Para el otro lado, la inclusión se deduce de la **Proposición 1.1.8**, notando que $M(\ell_p, \ell_q)$ es un espacio de sucesiones normal y simétrico (o bien que los vectores canónicos están acotados por debajo). Más aún, si para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $e_n \in B_{\ell_p}$, luego por hipótesis se tendrá $xe_n \in \ell_q$ y en consecuencia $\|x\|_{M(\ell_p,\ell_q)} = \sup_{y \in \ell_p} \|xy\|_q \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|xe_n\|_q = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty$. $\square$

Como casos particulares de los anteriores, obtenemos los duales de Köthe de los espacios ℓ_p.

Ejemplos 1.2.5. *i*) Si $1 < p < \infty$, $(\ell_p)^\times = \ell_{p'}$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Por otro lado $(\ell_1)^\times = \ell_\infty$ y $(\ell_\infty)^\times = \ell_1$.

ii) En lo que respecta al espacio c_0, tenemos $(c_0)^\times = \ell_1$.

Demostración. El ítem *i*) es consecuencia inmediata de los ejemplos anteriores. Probemos *ii*).

$\supseteq$) Sean $x \in \ell_1$ e $y \in c_0$. Es claro que $xy \in \ell_1$, con lo cual $x \in (c_0)^\times$. Además $\|xy\|_1 \leq \|y\|_\infty.\|x\|_1$, de manera que tomando supremo sobre todos los $y \in B_{c_0}$, se tiene $\|x\|_{(c_0)^\times} \leq \|x\|_1$.

$\subseteq$) Sea $x \in (c_0)^\times$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y^n = (1, 1, ..., 1, 0, ...) \in B_{c_0}$ la sucesión con las primeras n coordenadas igual a uno y el resto igual a cero. Por hipótesis $xy^n \in \ell_1$ y $\|xy^n\|_1 \leq \|x\|_{(c_0)^\times}$. Luego $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \|x\|_{(c_0)^\times}$ para todos los $n \in \mathbb{N}$, de manera que $x \in \ell_1$ con $\|x\|_1 \leq \|x\|_{(c_0)^\times}$. $\square$

Observación 1.2.6. *Sea E un espacio de sucesiones y sean $x \in E$ e $y \in E^\times$. Entonces se verifica $\|xy\|_1 \leq \|x\|_E.\|y\|_{E^\times}$.*

Demostración. Es claro que $xy \in \ell_1$, dado que $y \in E^\times$ y $x \in E$. Por la definición de $\|\cdot\|_{E^\times}$, tenemos $\|y\|_{E^\times} = \sup_{z \in B_E} \|yz\|_1 \geq \left\| y \left(\frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_1$, y de aquí se deduce la desigualdad. $\square$

Introducimos ahora un poco de notación. Consideremos E y F dos espacios de sucesiones. Como es usual, escribimos $E \hookrightarrow F$ si E está incluido en F y la inclusión $id : E \to F$ es continua. En ese caso notaremos

$$c_E^F = \|id : E \to F\| \tag{1.5}$$

En el caso en que sea $\ell_p \hookrightarrow F$ abreviaremos $c_p^F = c_{\ell_p}^F$.

Propiedades 1.2.7. Sean E y F dos espacios de sucesiones.

a) Si $E \hookrightarrow F$ entonces $F^\times \hookrightarrow E^\times$ con $c_{F^\times}^{E^\times} \leq c_E^F$.

b) Si E_i, F_i $(i = 1, 2)$ son espacios de sucesiones tales que $E_2 \hookrightarrow E_1$ y $F_1 \hookrightarrow F_2$, entonces $M(E_1, F_1) \hookrightarrow M(E_2, F_2)$ con $c_{M(E_1,F_1)}^{M(E_2,F_2)} \leq c_{E_2}^{E_1}.c_{F_1}^{F_2}$.

c) Si $\|e_n\|_E = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\ell_1 \hookrightarrow E$ con $c_1^E = 1$.

d) Si $\|e_n\|_E = \|e_n\|_F = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $E^\times \hookrightarrow M(E, F)$ con $c_{E^\times}^{M(E,F)} = 1$.

e) Si $\|e_n\|_E = \|e_n\|_F = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $M(E, F) \hookrightarrow M(F^\times, E^\times)$ con $c_{M(E,F)}^{M(F^\times,E^\times)} = 1$.

f) Sean $1 \leq p < q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ (notar que $1 < r < \infty$ pues $p < q$) y supongamos que E es un espacio de sucesiones tal que $\ell_p \hookrightarrow E$. Entonces $\ell_q \hookrightarrow M(\ell_r, E)$ con $c_q^{M(\ell_r,E)} \leq c_p^E$.

Demostración. a) Sea $x \in F^{\times}$. Queremos ver que $x \in E^{\times}$ con $\|x\|_{E^{\times}} \leq c_E^F.\|x\|_{F^{\times}}$. Dado $y \in E$ se tiene $y \in F$ (pues $E \subseteq F$), y dado que $x \in F^{\times}$, obtenemos $xy \in \ell_1$. Esto muestra que $x \in E^{\times}$. Para la desigualdad, notemos que si $y \in B_E$ entonces $\left(\frac{1}{c_E^F}\right) \cdot y \in B_F$. De hecho, esto se debe a que por hipótesis, $\|y\|_F \leq c_E^F \|y\|_E$. Luego,

$$\|x\|_{E^{\times}} = \sup_{y \in B_E} \|xy\|_1 = c_E^F. \sup_{y \in B_E} \left\| x \left(\frac{y}{c_E^F} \right) \right\|_1 \leq \sup_{y \in B_F} \|xy\|_1 = \|x\|_{F^{\times}},$$

de forma que $\|x\|_{E^{\times}} \leq c_E^F.\|x\|_{F^{\times}}$ como se quería probar.

b) Consideremos $x \in M(E_1, F_1)$ y veamos que $xy \in F_2$ para cualquier $y \in E_2$. La inclusión $E_2 \subseteq E_1$ nos muestra que si $y \in E_2$ entonces $y \in E_1$. Luego, como x pertenece a $M(E_1, F_1)$ se tendrá $xy \in F_1$, y dado que $F_1 \subseteq F_2$ queda probado que $xy \in F_2$. Esto muestra que $x \in M(E_2, F_2)$. Para probar la desigualdad, notemos como lo hicimos en a), que si $y \in B_{E_2}$ entonces $\frac{1}{c_{E_2}^{E_1}}.y \in B_{E_1}$. Tenemos entonces que

$$\|x\|_{M(E_2,F_2)} = \sup_{y \in B_{E_2}} \|xy\|_{F_2} \leq \sup_{y \in B_{E_2}} c_{F_1}^{F_2}.\|xy\|_{F_1} \leq \sup_{y \in B_{E_1}} c_{F_1}^{F_2}.c_{E_2}^{E_1}.\|xy\|_{F_1} = c_{F_1}^{F_2}.c_{E_2}^{E_1}.\|x\|_{M(E_1,F_1)},$$

y esto es lo que queríamos ver.

c) Este ítem, no es otra cosa que el resultado visto en la **Proposición 1.1.6**. Lo único que hay que tener en cuenta, es que el hecho de pedir $\|e_n\|_E = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, permite probar que la inclusión $\ell_1 \hookrightarrow E$ tiene norma uno. De hecho, de la demostración del resultado mencionado anteriormente, se deduce que la inclusión tiene norma menor o igual que uno. Y dado que $\|e_n\|_E = \|e_n\|_1 = 1$, se tiene la igualdad.

d) Sea $x \in E^{\times}$ y veamos que $x \in M(E, F)$. Dado $y \in E$, queremos mostrar que $xy \in F$. Pero como $xy \in \ell_1$ (pues $x \in E^{\times}$ e $y \in E$) y por b) se tiene $\ell_1 \hookrightarrow F$, entonces $xy \in F$ como se quería ver (en este punto, precisamos $\|e_n\|_F = 1$ para todo n). Por otro lado $\|x\|_{M(E,F)} = \sup_{y \in B_E} \|xy\|_F \leq \sup_{y \in B_E} \|xy\|_1 = \|x\|_{E^{\times}}$, pues $\ell_1 \hookrightarrow F$ con inclusión de norma uno. Esto nos muestra que $id : E^{\times} \to M(E, F)$ es continua con norma menor o igual que uno. Para ver que $c_{E^{\times}}^{M(E,F)}$ es exactamente igual a uno, veamos que $\|e_n\|_{M(E,F)} = \|e_n\|_{E^{\times}} = 1$. En primer lugar, $\|e_n\|_{E^{\times}} = \sup_{y \in B_E} \|e_n y\|_1 = \sup_{y \in B_E} |y_n|$. Aquí, como E es normal e $y \in B_E$ entonces $|y_n| \leq \|y\|_E \leq 1$. Pero tomando $y = e_n \in B_E$ (recordar que por hipótesis se verifica $\|e_n\|_E = 1$), obtenemos

$$\|e_n\|_{E^{\times}} = \sup_{y \in B_E} |y_n| = 1. \tag{1.6}$$

En segundo lugar,

$$\|e_n\|_{M(E,F)} = \sup_{y \in B_E} \|e_n y\|_F = \sup_{y \in B_E} |y_n|.\|e_n\|_F = \sup_{y \in B_E} |y_n| = 1$$

pues $\|e_n\|_F = 1$ y por (1.6). Luego queda probado c). Notar que no es necesario pedir que sea $\|e_n\|_E = 1$ para todo n, alcanza con pedir que se verifique para algún n.

e) Consideremos x pereteneciente a $M(E,F)$ y probemos que pertenece a $M(F^\times, E^\times)$ con $\|x\|_{M(F^\times,E^\times)} \leq \|x\|_{M(E,F)}$. Por definición, debemos ver que $xz \in E^\times$ para todo $z \in F^\times$. Pero $xz \in E^\times$ si $(xz)y \in \ell_1$ para todo $y \in E$. Ahora bien, si $z \in F^\times$ e $y \in E$, entonces $(xz)y = (xy)z \in \ell_1$, ya que, por hipótesis, $xy \in F$ (puesto que $x \in M(E,F)$) y $z \in F^\times$. Luego $xz \in E^\times$ y en consecuencia $x \in M(F^\times, E^\times)$. Para probar la desigualdad entre las normas, notemos que

$$\begin{aligned}\|xz\|_{E^\times} &= \sup_{y\in B_E} \|xzy\|_1 \\ &\leq \sup_{y\in B_E} \|xy\|_F.\|z\|_{F^\times} \\ &= \|x\|_{M(E,F)}.\|z\|_{F^\times}\end{aligned}$$

donde la desigualdad se deduce de la **Observación 1.2.6**. Esta desigualdad nos muestra que $\|x\|_{M(F^\times,E^\times)} = \sup_{z\in B_{F^\times}} \|xz\|_{E^\times} \leq \sup_{z\in B_{F^\times}} \|x\|_{M(E,F)}.\|z\|_{F^\times} = \|x\|_{M(E,F)}$ que es lo que queríamos ver. Así, queda probado que $M(E,F) \hookrightarrow M(F^\times, E^\times)$ con inclusión menor o igual que uno. Para ver que la inclusión tiene norma exactamente igual a uno, se procede igual que en *c*). Notar que tan solo en esta parte se necesita que $\|e_n\|_E = \|e_n\|_F = 1$.

f) En primer lugar, veamos que si $x \in \ell_q$ entonces $x \in M(\ell_r, E)$. Para eso consideremos $y \in \ell_r$ y probemos que $xy \in E$. Dado que $\ell_p \hookrightarrow E$, basta con probar que xy pertenece a ℓ_p, y eso se deduce fácilmente aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{r}{p}$ y $\frac{q}{p}$ (recordar que por hipótesis $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$):

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|^p \leq \|x\|_q^p.\|y\|_r^p < \infty.$$

Esto prueba la inclusión $\ell_q \subseteq M(\ell_r, E)$. Luego nos queda ver que $\|i : \ell_q \hookrightarrow M(\ell_r, E)\| = c_q^{M(\ell_r,E)} \leq c_p^E$. Usando nuevamente la hipótesis de que $\ell_p \hookrightarrow E$, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\|x\|_{M(\ell_r,E)} = \sup_{y\in B_{\ell_r}} \|xy\|_E \leq \sup_{y\in B_{\ell_r}} c_p^E.\|xy\|_p = c_p^E. \sup_{y\in B_{\ell_r}} \|xy\|_p = c_p^E.\|x\|_{M(\ell_r,\ell_p)}.$$

Viendo el ítem *i*) de los **Ejemplos 1.2.4**, tenemos que $M(\ell_r, \ell_p) = \ell_q$ y en consecuencia la desigualdad anterior nos dice que $\|x\|_{M(\ell_r,E)} \leq c_p^E.\|x\|_q$, que es lo que queríamos probar. □

Observación 1.2.8. *Notar que c) es un caso particular de d). De hecho, si en d) ponemos* $E = \ell_\infty$, *nos queda* $E^\times = \ell_1$ *y*

$$M(E,F) = M(\ell_\infty, F) = F.$$

Esta última igualdad se verifica para cualquier espacio de sucesiones F. *Por un lado, si* $x \in M(\ell_\infty, F)$ *y consideramos* $y = (1,1,1,.....) \in B_{\ell_\infty}$, *entonces* $xy = x \in F$ *con* $\|x\|_F = \|xy\|_F \leq \|x\|_{M(\ell_\infty,F)}$. *Por otro lado, si* $x \in F$ *e* $y \in \ell_\infty$ *entonces* $|xy| \leq \|y\|_\infty.|x|$ *y por normalidad* $xy \in F$ *con* $\|xy\|_F \leq \|y\|_\infty.\|x\|_F$. *Entonces* $x \in M(\ell_\infty, F)$ *y* $\|x\|_{M(\ell_\infty,F)} \leq \|x\|_F$. *Luego, en* *este caso, d) nos diría exactamente que si $\|e_n\|_F = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\ell_1 \hookrightarrow F$ con inclusión de norma uno.*

A continuación queremos ver qué relación hay entre el dual y el dual de Köthe de un espacio de sucesiones. Dado $y = (y_n)_n \in E^\times$, nos construimos una funcional en E' dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_y : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_n)_n &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \end{aligned} \tag{1.7}$$

Veamos que efectivamente $\varphi_y \in E'$. En primer lugar veremos que está bien definida. Para eso deberíamos probar que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge, pero como $y \in E^\times$ y $x \in E$ entonces $xy \in \ell_1$, de manera que $|\varphi_y(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty$. Es claro que φ_y lineal y además resulta acotada ya que, volviendo a la desigualdad anterior, tenemos

$$\sup_{x \in B_E} |\varphi_y(x)| \leq \sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| = \|y\|_{E^\times}$$

o lo que es equivalente, $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_{E^\times}$.

Proposición 1.2.9. *Sea E un espacio de sucesiones. La aplicación definida por*

$$\begin{aligned} E^\times &\longrightarrow E' \\ y &\longmapsto \varphi_y \end{aligned}$$

resulta una inyección isométrica. Esta aplicación nos permite pensar a $E^\times$ como subespacio (isométrico) de E'.

Demostración. Por las consideraciones anteriores, ya sabemos que la aplicación está bien definida. Veamos que es lineal. Para eso notemos que si $y, z \in E^\times$ y $x \in E$ entonces

$$\varphi_{y+z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(y_n + z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n = \varphi_y(x) + \varphi_z(x)$$

(puesto que las series son convergentes), lo cual nos muestra que $\varphi_{y+z} = \varphi_y + \varphi_z$. Análogamente se ve que $\varphi_{\lambda y} = \lambda.\varphi_y$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Ahora bien, si probamos que la aplicación es isométrica, resultará automáticamente inyectiva y quedará probado el resultado. Veamos entonces que

$$\|y\|_{E^\times} = \sup_{x \in B_E} \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \right| = \sup_{x \in B_E} |\varphi_y(x)|. \tag{1.8}$$

Es claro que

$$\sup_{x \in B_E} \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \right| \leq \sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n| = \|y\|_{E^\times}.$$

Por otro lado, dado $x \in B_E$ podemos considerar $\overline{x} = (x_n.sg(x_n y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenece a B_E (pues E es normal) y que verifica

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{x_n}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n|\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n|.$$

Luego, tomando supremo sobre los $x \in B_E$ obtenemos

$$\|y\|_{E^\times} = \sup_{x\in B_E} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n| = \sup_{x\in B_E} \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{x_n}\right| \leq \sup_{\overline{x}\in B_E} \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{x_n}\right|,$$

lo cual demuestra que $\|y\|_{E^\times} = \sup_{x\in B_E} |\varphi_y(x)| = \|\varphi_y\|$. En consecuencia, la aplicación definida por $y \mapsto \varphi_y$ resulta una isometría como se quería probar. $\square$

Definición 1.2.10. Sea E un espacio de sucesiones. Llamamos *función fundamental del espacio E*, a la aplicación $\lambda_E : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda_E(n) = \|e_1 + ... + e_n\|_E$.

Es trivial, dado que los espacios de sucesiones son normales, que la función fundamental λ_E es una función no decreciente. La siguiente observación nos muestra la relación existente entre la función fundamental de un espacio de sucesiones simétrico y la de su dual de Köthe.

Observación 1.2.11. *Dado E un espacio de sucesiones simétrico, se verifica $\lambda_E(n).\lambda_{E^\times}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La **Proposición 1.2.9** nos permite pensar a $E^\times$ como subespacio (isométrico) de E'. Pensando en esta inclusión, notaremos e_i' a los vectores canónicos de $E^\times \subseteq E'$ y nos reservaremos la notación e_i para los vectores canónicos de E. Queremos ver entonces que $\|e_1' + ... + e_n'\|_{E^\times}.\|e_1 + ... + e_n\|_E = n$. Llamemos $\varphi_e = e_1' + ... + e_n'$ y notemos que $\varphi_e(e_1 + ... + e_n) = \sum_{i=1}^n e_i'(e_1 + ... + e_n) = n$. Luego,

$$n = |\varphi_e(e_1 + ... + e_n)| \leq \|\varphi_e\|_{E'}.\|e_1 + ... + e_n\|_E = \|e_1 + ... + e_n\|_{E^\times}.\|e_1 + ... + e_n\|_E,$$

de manera que $\lambda_E(n).\lambda_{E^\times}(n) \geq n$. Para la otra desigualdad, comencemos notando que:

$$\begin{aligned} \lambda_{E^\times}(n) &= \|e_1' + ... + e_n'\|_{E^\times} = \sup_{y\in B_E} \sum_{i=1}^n |y_i| = \sup_{(y_i)_{i=1}^n \in B_E} \sum_{i=1}^n |y_i| \\ &= \sup_{(y_i)_{i=1}^n} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|}{\|(y_i)_{i=1}^n\|_E} \right\} = \sup_{(y_i)_{i=1}^n} \left\{ \frac{|\sum_{i=1}^n y_i|}{\|(y_i)_{i=1}^n\|_E} \right\}, \end{aligned}$$

donde $(y_i)_{i=1}^n$ denota la sucesión $\sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$ (la última igualdad es la única que no es evidente; llamando $z_i = |y_i|$ y notando que $\|(y_i)_{i=1}^n\|_E = \|(z_i)_{i=1}^n\|_E$ pues E es normal, tenemos $\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|}{\|(y_i)_{i=1}^n\|_E} = \frac{|\sum_{i=1}^n z_i|}{\|(z_i)_{i=1}^n\|_E} \leq \sup_{(z_i)_{i=1}^n} \frac{|\sum_{i=1}^n z_i|}{\|(z_i)_{i=1}^n\|_E}$). Ahora bien, dada una sucesión $y = (y_i)_{i=1}^n$ vamos a considerar las permutaciones

$$\begin{aligned} y^1 &= (y_1, y_2, ..., y_n, 0, ...) \\ y^2 &= (y_2, ..., y_n, y_1, 0, ...) \\ &\vdots \\ y^n &= (y_n, y_1, ..., y_{n-1}, 0, ...) \end{aligned}$$

que, como suponemos E simétrico, verifican $\|y^i\|_E = \|y\|_E$ para todo $i = 1, ..., n$. Luego $\|y\|_E = \frac{1}{n}. \sum_{i=1}^n \|y^i\|_E \geq \left\|\frac{1}{n}. \sum_{i=1}^n y^i\right\|_E$ y notando que $\sum_{i=1}^n y^i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) \cdot e_i$, se deduce que $\|y\|_E \geq \frac{1}{n}. \left|\sum_{j=1}^n y_j\right| .\|e_1 + ... + e_n\|_E$. Reordenando obtenemos $\frac{n}{\lambda_E(n)} \geq \frac{\left|\sum_{j=1}^n y_j\right|}{\|y^i\|_E}$, y tomando supremo sobre todas las sucesiones $(y_i)_{i=1}^n$ nos queda $\frac{n}{\lambda_E(n)} \geq \lambda_{E^\times}(n)$, o equivalentemente, $\lambda_E(n).\lambda_{E^\times}(n) \leq n$. Luego queda probada la igualdad. □

Para finalizar esta sección, definiremos el concepto de espacio de sucesiones *perfecto*. Dado un espacio de sucesiones E, ya sabemos que podemos considerar su dual de Köthe $E^\times$ y que este resulta un espacio de sucesiones. Pero entonces tiene sentido considerar el dual de Köthe de este último (es decir, $(E^\times)^\times$) y obtener así un nuevo espacio de sucesiones. A este espacio, que notaremos $E^{\times\times}$, lo llamaremos (naturalmente) *doble dual de Köthe* del espacio E.

Observación 1.2.12. *Dado cualquier espacio de sucesiones E, se verifica $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ con $c_E^{E^{\times\times}} \leq 1$.*

Demostración. En efecto, si $x \in E$ e $y \in E^\times$ entonces $xy \in \ell_1$, de forma que $x \in E^{\times\times}$. Además, la **Observación 1.2.6** nos dice que $\|xy\|_1 \leq \|y\|_{E^\times}.\|x\|_E$. Luego, tomando $\sup_{y \in B_{E^\times}}$ se tiene $\|x\|_{E^{\times\times}} \leq \|x\|_E$, lo cual nos muestra que $c_E^{E^{\times\times}} \leq 1$. □

No vale, en general, que $c_E^{E^{\times\times}} = 1$. Es decir, E puede no resultar un subespacio isométrico de $E^{\times\times}$. En efecto, podemos decir un poco más al respecto y para eso precisamos la siguiente definición.

Definición 1.2.13. Dados X un espacio de Banach e $Y \subseteq X'$ un subespacio, decimos que Y es un *subespacio normante* de X' si

$$\|x\|_X = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in Y, \|\varphi\| = 1\}$$

para todo $x \in X$.

Ya vimos en la **Proposición 1.2.9** que podemos pensar a $E^\times$ como subespacio (isométrico) de E'. Teniendo en cuenta esto, probemos el siguiente resultado.

Observación 1.2.14. *La inclusión $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ es isométrica sí y solo si $E^\times$ es subespacio normante de E'.*

Demostración. Por un lado, si $E^\times \subseteq E'$ es normante tendremos $\|x\|_E = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \sup_{y \in B_{E^\times}} |\varphi_y(x)|$. Esto nos dice que

$$\|x\|_E = \sup_{y \in B_{E^\times}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| = \|x\|_{E^{\times\times}},$$

donde la última igualdad se debe a (1.8). Esto prueba una de las implicaciones.

Supongamos ahora que $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ isométricamente. En ese caso, dado un $x \in E$ se tiene

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|_E = \|x\|_{E^{\times\times}} = \sup_{y \in B_{E^\times}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| = \sup_{y \in B_{E^\times}} |\varphi_y(x)|,$$

lo que nos muestra que $E^\times$ es subespacio normante de E'. □

En [16, p. 30] se puede ver un ejemplo de un espacio de sucesiones E tal que la inclusión $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ no es isométrica. De hecho, se toma $E = \ell_\infty$ con la norma equivalente

$$\|x\|_E = \|x\|_\infty + \limsup_{n \to \infty} |x_n|,$$

y se prueba que $E^\times = \ell_1$ isométricamente, de forma que $E^{\times\times} = \ell_\infty$ isométricamente. Luego, la inclusión $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ no es isométrica.

Un caso de interés se da cuando el espacio coincide con su doble dual de Köthe. Eso nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.2.15. Sea E un espacio de sucesiones. Diremos que E es *perfecto* (o *Köthe reflexivo*) si $E = E^{\times\times}$ (igualdad isométrica).

Veamos algunos ejemplos de espacios perfectos y otros que no lo son. Incluímos dentro de los ejemplos algunos espacios que no son normales. En ese sentido, notar que si bien las definiciones del dual de Köthe y de espacios perfectos fueron hechas para espacios de sucesiones (y eso en nuestro caso implica que el espacio sea normal), son definiciones que pueden darse para cualquier subespacio de ω.

Ejemplos 1.2.16. *i*) Los espacios ℓ_p con $1 \leq p \leq \infty$ son perfectos.

ii) Los espacios c_0, c y bs no son perfectos. Aún más, en el caso de bs, la inclusión $bs \hookrightarrow (bs)^{\times\times}$ no es isométrica.

Demostración. El ítem *i*) es claro, dado que ya calculamos los $\times$-duales de los espacios ℓ_p (ver **Ejemplos 1.2.5**). Por la misma razón c_0 no es perfecto (notar que en este caso, la inclusión $c_0 \hookrightarrow (c_0)^{\times\times} = \ell_\infty$ es isométrica). Para ver que c no es perfecto, veamos que $c^\times = \ell_1$. Por un lado, como $c_0 \hookrightarrow c$ con inclusión de norma uno, entonces $c^\times \hookrightarrow (c_0)^\times = \ell_1$ con inclusión de norma menor o igual que uno (ver **Propiedades 1.2.7** *a*)). De la misma manera, como $c \hookrightarrow \ell_\infty$ entonces $(\ell_\infty)^\times = \ell_1 \hookrightarrow c^\times$, también con inclusión de norma menor o igual que uno.

Luego $c^\times = \ell_1$ isométricamente, y en consecuencia c no es perfecto. Aquí también, la inclusión $c \hookrightarrow c^{\times\times}$ es isométrica. Veamos por último que bs no es perfecto, mostrando para eso que $(bs)^\times = \ell_1$. Por un lado, veamos que si $x \in \ell_1$ entonces $x \in (bs)^\times$. Para eso consideremos $y \in bs$ y probemos que $xy \in \ell_1$. Puesto que para cada $i \in \mathbb{N}$ se verifica

$$|y_i| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} y_j \right| = \|y\|_{bs},$$

tendremos $\|y\|_\infty \le \|y\|_{bs}$ y en consecuencia

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \le \|y\|_\infty . \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \right) \le \|y\|_{bs} . \|x\|_1 < \infty.$$

Esto muestra que $x \in (bs)^\times$ con $\|x\|_{(bs)^\times} \le \|x\|_1$. Para el otro lado, si consideramos un x perteneciente a $(bs)^\times$, entonces tomando $y = (1, -1, 1, -1, ...) \in B_{bs}$ tenemos $xy = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, ...) \in \ell_1$ con $\|xy\|_1 \le \|x\|_{(bs)^\times}$. Es decir que $x \in \ell_1$ con $\|x\|_1 \le \|x\|_{(bs)^\times}$, lo cual prueba la otra inclusión y nos muestra que $(bs)^{\times\times} = \ell_\infty$, concluyendo de esta forma que bs no es perfecto. Además, se observa que $bs \hookrightarrow (bs)^{\times\times} = \ell_\infty$ no es isométrica. Tomando por ejemplo $x = (1, 1, 0, ...) \in bs$, se tiene $1 = \|x\|_\infty < \|x\|_{bs} = 2$. □

Observación 1.2.17. *Cualquiera sea E un espacio de sucesiones, $E^\times$ resulta perfecto.*

Demostración. Debemos ver que $E^\times = E^{\times\times\times}$ isométricamente. Basta ver que $E^{\times\times\times} \subseteq E^\times$ con inclusión de norma menor o igual que 1 (la otra inclusión es consecuencia de la **Observación 1.2.12**). Consideremos $x \in E^{\times\times\times}$ y probemos que $x \in E^\times$. Dado $y \in E$, la **Observación 1.2.12** nos dice que $y \in E^{\times\times}$ y en consecuencia $xy \in \ell_1$. Además, se verifican las desigualdades

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_{E^{\times\times\times}} . \|y\|_{E^{\times\times}} \le \|x\|_{E^{\times\times\times}} . \|y\|_E,$$

de forma que tomando supremo sobre todos los $y \in B_E$, obtenemos $\|x\|_{E^\times} \le \|x\|_{E^{\times\times\times}}$. Luego $E^\times$ es perfecto. □

Observación 1.2.18. *En el ítem a) de las **Propiedades 1.2.7** probamos que si E y F son dos espacios de sucesiones tales que $E \hookrightarrow F$, entonces $F^\times \hookrightarrow E^\times$ con $c_{F^\times}^{E^\times} \le c_E^F$. De esta propiedad se deduce rápidamente que si además E y F son perfectos, entonces $c_{F^\times}^{E^\times} = c_E^F$.*

1.3. Espacios maximales y minimales

El objetivo de esta sección es definir y caracterizar los conceptos de espacios minimales y espacios maximales. La idea será definir, para cada espacio de sucesiones E, su *núcleo minimal* E^{min} y su *envoltura maximal* E^{max}, dos espacios de sucesiones tales que $E^{min} \subseteq E \subseteq E^{max}$. Caracterizaremos los espacios que verifiquen $E = E^{min}$, que llamaremos minimales, y aquellos en los que $E = E^{max}$, que serán los maximales.

1.3.1. Espacios de sucesiones minimales

Sea E un espacio de sucesiones. Definimos al *núcleo minimal* de E como el conjunto de los $x \in \omega$ tales que $x = zy$ para ciertos $z \in c_0$, $y \in E$. Es decir,

$$E^{min} = \{x \in \omega \,:\, x = zy \quad \text{con} \quad z \in c_0 \;,\; y \in E\}.$$

En este espacio definimos la norma de un elemento x como

$$\|x\|_{E^{min}} = \text{ínf}\{\|z\|_\infty.\|y\|_E \;:\; x = zy \quad \text{con} \quad z \in c_0 \;,\; y \in E\},$$

es decir, tomamos $\text{ínf}\{\|z\|_\infty.\|y\|_E\}$ sobre todas las posibles representaciones de x del tipo $x = zy$, con $z \in c_0$, $y \in E$. Siempre que se sobreentienda cual es el espacio E que estamos considerando, notaremos $\|\cdot\|_{min} = \|\cdot\|_{E^{min}}$.

Veamos que E^{min}, con la norma definida, es un espacio de sucesiones y que $E^{min} \hookrightarrow E$ con inclusión de norma uno.

Comentario: *las definiciones del núcleo minimal y de su norma pueden verse en un contexto más general como el de productos de ideales normados (o casi-normados) tal como están en [19]. Siguiendo esa línea, resulta natural definir $\|\cdot\|_{min}$ como se hizo anteriormente. Veremos más adelante, que si $x \in E^{min}$ entonces $\|x\|_{min} = \|x\|_E$, de forma que la inclusión $E^{min} \hookrightarrow E$ resultará isométrica.*

En primer lugar veamos que E^{min} es un espacio vectorial con $c_{00} \subseteq E^{min}$. Que $c_{00} \subseteq E^{min}$ es evidente. Si $x \in E^{min}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda.x \in E^{min}$. De hecho por hipótesis existen $z \in c_0$ e $y \in E$ tales que $x = zy$ y entonces $\lambda.x = \lambda.zy$ con $\lambda.z \in c_0$, $y \in E$. Ahora sean $x_1, x_2 \in E^{min}$ y veamos que $x_1 + x_2 \in E^{min}$. Tenemos $x_i = z^i y_i$ con $z^i \in c_0$, $y_i \in E$ (para $i = 1, 2$). Si llamamos $z = \sup\{|z^1|, |z^2|\} = \big(\sup\{|(z^1)_n|, |(z^2)_n|\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, es claro que $z \in c_0$. Por otro lado, consideramos $\frac{1}{z} \in \omega$ definida por

$$\left(\frac{1}{z}\right)_i = \begin{cases} \frac{1}{z_i} & \text{si} \quad z_i \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z_i = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Luego tenemos

$$\left|\frac{x_1 + x_2}{z}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| |z^1 y_1 + z^2 y_2| \leq \left|\frac{1}{z}\right| |z^1||y_1| + \left|\frac{1}{z}\right| |z^2||y_2|,$$

y dado que $\left|\frac{1}{z}\right| |z^i| \leq (1, 1, 1, ...)$ para $i = 1, 2$, obtenemos

$$\left|\frac{x_1 + x_2}{z}\right| \leq |y_1| + |y_2| \in E. \tag{1.10}$$

Como E es normal, se tiene $\frac{x_1+x_2}{z} \in E$ y en consecuencia llamando $y = \frac{x_1+x_2}{z}$ nos queda $x_1 + x_2 = zy$ con $z \in c_0$ e $y \in E$. Esto muestra que $x_1 + x_2 \in E^{min}$ de manera que E^{min} resulta un espacio vectorial.

Veamos ahora que $\|\cdot\|_{min}$ define una norma. Para eso debemos probar que:

i) si $\|x\|_{min} = 0$ entonces $x = 0$,

ii) si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\|\lambda.x\|_{min} = |\lambda|.\|x\|_{min}$,

iii) dados $x_1, x_2 \in E^{min}$, se verifica $\|x_1 + x_2\|_{min} \leq \|x_1\|_{min} + \|x_2\|_{min}$.

Comenzaremos probando que $E^{min} \subseteq E$ con

$$\|\cdot\|_E \leq \|\cdot\|_{min} \tag{1.11}$$

lo que implica trivialmente *i)*. Dado $x \in E^{min}$ existen $z \in c_0$, $y \in E$ tales que $x = zy$. Pero entonces, como E es normal y $|x| \leq \|z\|_\infty.|y|$, se tendrá $x \in E$ con $\|x\|_E \leq \|z\|_\infty.\|y\|_E$. Como esto vale para cualquier representación de x de la forma $x = zy$ (con $z \in c_0$ e $y \in E$), tomando el ínfimo sobre todas éstas obtenemos $\|x\|_E \leq \|x\|_{min}$.

Para probar *ii)* consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$ no nulo (el caso $\lambda = 0$ ya está probado), y notemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda.x\|_{min} &= \inf\{\|z\|_\infty.\|y\|_E \ : \ \lambda.x = zy \ con \ z \in c_0 \ , \ y \in E\} \\ &= \inf\{\|z\|_\infty.\|y\|_E \ : \ x = \frac{z}{\lambda} y \ con \ z \in c_0 \ , \ y \in E\} \end{aligned}$$

de manera que, llamando $w = \frac{z}{\lambda}$ (y notando que $w \in c_0$ si y solo si $z \in c_0$) se tendrá

$$\begin{aligned} \|\lambda.x\|_{min} &= \inf\{\|\lambda.w\|_\infty.\|y\|_E \ : \ x = wy \ con \ w \in c_0 \ , \ y \in E\} \\ &= \inf\{|\lambda|.\|w\|_\infty.\|y\|_E \ : \ x = wy \ con \ w \in c_0 \ , \ y \in E\}. \end{aligned}$$

Luego $\|\lambda.x\|_{min} = |\lambda|.\|x\|_{min}$ como se quería ver.

Por último veamos la desigualdad triangular. Para eso hagamos la siguiente observación.

Observación 1.3.1. *Sean $x \in E^{min}$ y $\varepsilon > 0$. Según la definición de $\|\cdot\|_{min}$, existen $z \in c_0$, $y \in E$ tales que $x = zy$ y tales que $\|z\|_\infty.\|y\|_E < \|x\|_{min} + \varepsilon$. Veamos que podemos suponer $\|z\|_\infty = 1$.*

Demostración. En efecto, basta notar que $x = \frac{z}{\|z\|_\infty}.\|z\|_\infty.y$, de manera que llamando $z' = \left(\frac{z}{\|z\|_\infty}\right)$ e $y' = (\|z\|_\infty.y)$ obtenemos $x = z'y'$ (suponemos $\|z\|_\infty \neq 0$, de lo contrario $x = 0$ y el resultado es trivial). Claramente $z' \in c_0$ e $y' \in E$, de forma que obtuvimos una nueva descomposición de x que verifica $\|z'\|_\infty = 1$ y tal que $\|z'\|_\infty.\|y'\|_E < \|x\|_{min} + \varepsilon$ □

Con esto en mente, consideremos x_1 y x_2 en E^{min} y probemos que $\|x_1 + x_2\|_{min} \leq \|x_1\|_{min} + \|x_2\|_{min}$. Dado $\varepsilon > 0$ consideremos $z^i \in c_0$ e $y_i \in E$ $(i = 1, 2)$ tales que $x_i = z^i y_i$, $\|z^i\|_\infty = 1$ y $\|y_i\|_E < \|x_i\|_{min} + \varepsilon/2$ para $i = 1, 2$ (aquí usamos la observación anterior). La desigualdad (1.10) nos dice que

$$\left|\frac{x_1 + x_2}{z}\right| \leq |y_1| + |y_2| \in E$$

donde $z = \sup\{|z^1|, |z^2|\}$ y $\frac{1}{z}$ está definido como en (1.9). Como E es normal, esto implica

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{z} \right\|_E \leq \|y_1\|_E + \|y_2\|_E < \|x_1\|_{min} + \frac{\varepsilon}{2} + \|x_2\|_{min} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.12}$$

Pero como $x_1 + x_2 = z\left(\frac{x_1+x_2}{z}\right)$ con $z \in c_0$ y $\frac{x_1+x_2}{z} \in E$ y además $\|z\|_\infty = \|\sup\{|z^1|, |z^2|\}\|_\infty = 1$, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\|x_1 + x_2\|_{min} \leq \|z\|_\infty . \left\| \frac{x_1 + x_2}{z} \right\|_E < \|x_1\|_{min} + \|x_2\|_{min} + \varepsilon. \tag{1.13}$$

Como ε era cualquiera, haciendo $\varepsilon \to 0$ queda demostrada la desigualdad triangular.

Hasta aquí probamos que $\|\cdot\|_{min}$ define una norma y que $E^{min} \hookrightarrow E$ con inclusión de norma menor o igual que uno. Tomando $x \in c_{00}$ se tiene $\|x\|_E = \|x\|_{min}$ (ver (1.15) más adelante) de forma que la inclusión tiene norma exactamente igual a uno. A continuación veremos que E^{min} es normal. Consideremos $x_1 \in \omega$ y $x_2 \in E^{min}$ tales que $|x_1| \leq |x_2|$ y veamos que $x_1 \in E^{min}$ con $\|x_1\|_{min} \leq \|x_2\|_{min}$. Dado que $x_2 \in E^{min}$, fijado un $\varepsilon > 0$ existe una factorización de la forma $x_2 = zy$ (con $z \in c_0$, $y \in E$) tal que $\|z\|_\infty . \|y\|_E < \|x_2\|_{min} + \varepsilon$. Considerando $\frac{1}{z}$ definido como en (1.9), de la desigualdad $|x_1| \leq |x_2|$ se deduce que $\left|\frac{x_1}{z}\right| \leq |y| \in E$. Luego, como E es normal se tiene $\left|\frac{x_1}{z}\right| \in E$ con $\left\|\frac{x_1}{z}\right\|_E \leq \|y\|_E$ y en consecuencia $x_1 = z\left(\frac{x_1}{z}\right) \in E^{min}$ con

$$\|x_1\|_{min} \leq \|z\|_\infty . \left\| \frac{x_1}{z} \right\|_E \leq \|z\|_\infty . \|y\|_E < \|x_2\|_{min} + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, se obtiene $\|x_1\|_{min} \leq \|x_2\|_{min}$.

Para terminar de ver que E^{min} es un espacio de sucesiones, nos faltaría probar que es completo. Antes que eso, veremos algunos resultados que serán de utilidad.

Observación 1.3.2. *Para cada $x \in E^{min}$, se verifica la igualdad:*

$$\|x\|_{min} = \|x\|_E. \tag{1.14}$$

Demostración. Para comenzar, veamos que si consideramos $x \in E^{min}$ y llamamos $P_n x = (x_1, ...x_n, 0, ...)$, entonces se verifican:

$$\|P_n x\|_{min} = \|P_n x\|_E, \tag{1.15}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n x\|_{min} = \|x\|_{min}. \tag{1.16}$$

Para probar (1.15) basta ver que $\|P_n x\|_{min} \leq \|P_n x\|_E$ (la otra desigualdad vale siempre y ya la probamos en (1.11)). Consideremos $z_n = \sum_{i=1}^n e_i = (1, 1, ..., 1, 0, ...) \in c_0$. Es claro que $P_n x = z_n P_n x$ y como consecuencia de la definición de la norma $\|\cdot\|_{min}$, nos queda

$$\|P_n x\|_{min} \leq \|z_n\|_\infty . \|P_n x\|_E = \|P_n x\|_E$$

que es lo que queríamos ver. Ahora probemos (1.16). Por hipótesis $x = zy$ con $z \in c_0$, $y \in E$. Notar que $P_n x = P_n(z)y$ y en consecuencia $P_n x - x = (P_n z - z)y$ donde $(P_n z - z) \in c_0$ e

$y \in E$. Luego $\|P_n x - x\|_{min} \leq \|P_n z - z\|_\infty . \|y\|_E$ y dado que $\|P_n z - z\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (esto último porque $z \in c_0$), se obtiene

$$|\|P_n x\|_{min} - \|x\|_{min}| \leq \|P_n x - x\|_{min} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Esto nos muestra que $\lim_{n\to\infty} \|P_n x\|_{min} = \|x\|_{min}$. Pero como E es normal entonces es claro que $(\|P_n x\|_{min})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n x\|_{min} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|_{min} = \|x\|_{min}$$

como se quería ver.

Ahora bien, teniendo en cuenta la igualdad (1.15) podemos reformular (1.16) de la siguiente manera:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|_E = \|x\|_{min}, \tag{1.17}$$

para cada $x \in E^{min}$. Por otro lado, en la demostración de (1.16) vimos que $\|P_n x - x\|_{min} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y como $\|\cdot\|_E \leq \|\cdot\|_{min}$ se tendrá

$$|\|P_n x\|_E - \|x\|_E| \leq \|P_n x - x\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De esta manera hemos probado que si x pertenece a E^{min}, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|_E = \|x\|_E \tag{1.18}$$

y en consecuencia, juntando (1.16) con (1.18) obtenemos $\|x\|_{min} = \|x\|_E$ como se quería demostrar. □

El siguiente, es un resultado conocido que caracteriza la completitud de un espacio normado.

Observación 1.3.3. *Sea X un espacio normado. Luego X es completo si y solo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$$

implica la existencia de un $x \in X$ tal que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|_X \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Eventualmente, notaremos $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ indicando la convergencia de la serie a x.

Podemos decir un poco más al respecto.

Observación 1.3.4. *Consideremos, como en la observación anterior, un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$. Luego X es completo si y solo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X^{1/2} < \infty$$

implica la existencia de un $x \in X$ tal que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|_X \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Demostración. Supongamos que X es completo y consideremos $(x_n)_n$ una sucesión de elementos en X tal que $\sum_n \|x_n\|_X^{1/2} < \infty$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ consideremos el elemento $y_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \in X$ y probemos que $(y_N)_N$ es de Cauchy. Por un lado, es claro que si $N > M$ entonces

$$\|y_N - y_M\|_X = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\|_X \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|_X. \tag{1.19}$$

Por otro lado, también se verifican la desigualdad $\sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|_X \leq \left(\sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|_X^{1/2}\right)^2$ y el límite $\sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|_X^{1/2} \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$ (este último por la hipótesis de que la serie converge). Luego, volviendo a (1.19) obtenemos $\|y_N - y_M\|_X \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$, lo que nos muestra que $(y_N)_N$ es de Cauchy en X. Como X es completo, entonces existe un $x \in X$ tal que

$$\|x - y_N\|_X = \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|_X \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

que es lo que queríamos probar. Para la recíproca, consideremos $(y_k)_k$ una sucesión de Cauchy en X y probemos que converge (en X). Al ser de Cauchy, podemos extraer una subsucesión $(y_{k_n})_n$ tal que $\|y_{k_n} - y_{k_{n+1}}\|_X^{1/2} < \frac{1}{2^n}$. Llamemos $x_n = y_{k_n} - y_{k_{n+1}}$, de manera que resulta $\|x_n\|_X^{1/2} < \frac{1}{2^n}$ y en consecuencia $\sum_n \|x_n\|_X^{1/2} < \infty$. Por hipótesis, hay un $x \in X$ tal que $\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|_X \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, pero

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = (y_{k_1} - y_{k_2}) + (y_{k_2} - y_{k_3}) + ... + (y_{k_N} - y_{k_{N+1}}) = y_{k_1} - y_{k_{N+1}}$$

de forma que $(y_{k_n})_n$ resulta convergente. Como $(y_k)_k$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente entonces $(y_k)_k$ converge y en consecuencia X resulta completo. $\square$

Volviendo a la demostración de que E^{min} es completo, veremos que si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E^{min} tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|_{min}^{1/2} < \infty$, entonces existe un $x \in E^{min}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x^n \right\|_{min} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

En realidad, por (1.14) bastará ver que si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|_E^{1/2} < \infty$, entonces hay un $x \in E^{min}$ tal que $\left\|x - \sum_{n=1}^{N} x^n\right\|_E \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Como E es completo, la **Observación 1.3.4** nos muestra que existe un $x \in E$ tal que

$$\left\|x - \sum_{n=1}^{N} x^n\right\|_E \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{1.20}$$

La idea entonces, será probar que $x \in E^{min}$. Antes que eso, la siguiente observación (similar a la **Observación 1.3.1**).

Observación 1.3.5. *Dados $x \in E^{min}$ y $\varepsilon > 0$ sabemos que hay $z \in c_0$, $y \in E$ tales que $x = zy$ con $\|z\|_\infty.\|y\|_E < \|x\|_{min}.(1+\varepsilon)$. Veamos que podemos suponer*

$$\|z\|_\infty < (\|x\|_{min}.(1+\varepsilon))^{1/2}$$

$$\|y\|_E < (\|x\|_{min}.(1+\varepsilon))^{1/2}$$

Demostración. De hecho, llamando $z' = \left(\frac{(\|y\|_E)^{1/2}}{(\|z\|_\infty)^{1/2}}\right).z \in c_0$ e $y' = \left(\frac{(\|z\|_\infty)^{1/2}}{(\|y\|_E)^{1/2}}\right).y \in E$ (suponemos $\|z\|_\infty$, $\|y\|_E \neq 0$, de lo contrario sería $x = 0$ y el resultado es trivial en ese caso), tenemos $x = z'y'$ verificando

$$\|z'\|_\infty = \left(\frac{(\|y\|_E)^{1/2}}{(\|z\|_\infty)^{1/2}}\right).\|z\|_\infty = (\|z\|_\infty.\|y\|_E)^{1/2} < (\|x\|_{min}.(1+\varepsilon))^{1/2}$$

y análogamente

$$\|y'\|_E < (\|x\|_{min}.(1+\varepsilon))^{1/2}.$$

Luego queda probada la obsevación. □

En virtud de este resultado, para cada n podemos considerar $z^n \in c_0$, $y^n \in E$ tales que $x^n = z^n y^n$ con

$$\|z^n\|_\infty, \|y^n\|_E < (\|x^n\|_{min}.(1+\varepsilon))^{1/2}$$

para un $\varepsilon > 0$ dado. Pero como $\sum_n \|x^n\|_{min}^{1/2} < \infty$, la desigualdad anterior nos dice que $\sum_n \|z^n\|_\infty < \infty$ y $\sum_n \|y^n\|_E < \infty$. Luego por la **Observación 1.3.3**, y dado que c_0 y E son espacios de Banach, sabemos que existen $z \in c_0$, $y \in E$ tales que

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} |z^n| \quad \text{y} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} |y^n|.$$

Veamos que $|x| \leq |zy|$, de donde se deduce (ya que E^{min} es normal) que $x \in E^{min}$. Por un lado se tiene

$$\left|\sum_{n=1}^{N} x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |z^n y^n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |z^n|\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |y^n|\right)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Además, es claro que $\left(\sum_{n=1}^{N}|z^n|\right) \leq z$ y que $\left(\sum_{n=1}^{N}|y^n|\right) \leq y$, de manera que obtenemos

$$\left|\sum_{n=1}^{N} x^n\right| \leq zy = |zy| \tag{1.21}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Por otro lado, puesto que $\left\|x - \sum_{n=1}^{N} x^n\right\|_E \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ y que $\left||x| - \left|\sum_{n=1}^{N} x^n\right|\right| \leq \left|x - \sum_{n=1}^{N} x^n\right|$, se tendrá

$$\left\||x| - \left|\sum_{n=1}^{N} x^n\right|\right\|_E \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

lo cual implica (por normalidad de E) la convergencia coordenada a coordenada,

$$|x|_i = \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} x^n\right|_i . \tag{1.22}$$

Volviendo a (1.21), tenemos que para cada coordenada i se verifica la desigualdad: $\left|\sum_{n=1}^{N} x^n\right|_i \leq |zy|_i$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Por (1.22), tomando límite con $N \to \infty$ obtenemos $|x|_i \leq |zy|_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $|x| \leq |zy|$. Esto prueba que $x \in E^{min}$ como se quería ver.

Concluimos entonces que si E es un espacio de sucesiones, su núcleo minimal E^{min} resulta también un espacio de sucesiones y la inclusión $E^{min} \hookrightarrow E$ es isométrica.

Definición 1.3.6. Sea E un espacio de sucesiones. Diremos que E es *minimal* si $E = E^{min}$ (isométricamente).

Observación 1.3.7. *Es sencillo verificar que E^{min} es un espacio de sucesiones minimal, y que es el más grande de los subespacios minimales de E. Es decir que si $F \subseteq E$ es un espacio de sucesiones minimal, entonces $F \subseteq E^{min}$.*

Como dijimos al comienzo de la sección, intentaremos caracterizar aquellos espacios que resulten minimales. Los siguientes lemas serán de importancia para el objetivo que nos hemos planteado. A lo largo de estos, E será un espacio de sucesiones y E^{min} su núcleo minimal (como lo han sido desde el comienzo de la sección).

Lema 1.3.8.

$$E^{min} = \left\{x \in E \ : \ \lim_{n\to\infty} \|P_n(x) - x\|_E = 0\right\} \tag{1.23}$$

Recordar que $P_n(x) = P_n(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_2, ...x_n, 0, ...)$.

Demostración. $\subseteq$) Sea $x \in E^{min}$ y probemos que $\lim_n \|P_n(x) - x\|_E = 0$. Dados $z \in c_0$ e $y \in E$ tales que $x = zy$, es claro que $P_n(zy) = P_n(z)y$ de forma que

$$\|P_n(x) - x\|_E = \|P_n(zy) - zy\|_E = \|\left(P_n(z) - z\right)y\|_E.$$

Como E es normal, se tiene $\| (P_n(z) - z)\, y\|_E \leq \|P_n(z) - z\|_\infty . \|y\|_E$ y en consecuencia

$$\|P_n(x) - x\|_E \leq \|P_n(z) - z\|_\infty . \|y\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(esto último porque $z \in c_0$) lo que demuestra la inclusión.

$\supseteq$) Consideremos un x perteneciente a E tal que $\|P_n(x) - x\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y veamos que $x \in E^{min}$. Como $(P_n(x))_n$ es convergente en E, entonces es una sucesión de Cauchy (en E). En consecuencia es de Cauchy en E^{min}, ya que $P_n(x) \in c_{00} \subseteq E^{min}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la inclusión $E^{min} \hookrightarrow E$ es isométrica (ver (1.14)). Como E^{min} es completo, entonces $(P_n(x))_n$ converge a un cierto $y \in E^{min}$. Veamos que debe ser $y = x$ y en consecuencia tendremos $x \in E^{min}$ como queríamos probar. Esto último es sencillo, ya que si $\|P_n(x) - y\|_{min} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces hay convergencia coordenada a coordenada, es decir

$$|x_i - y_i| = \lim_{n\to\infty} |(P_n(x))_i - y_i| = 0$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $y = x$. $\square$

Observar que el **Lema 1.3.8** nos está diciendo, en otras palabras, que

$$E^{min} = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E} \tag{1.24}$$

Lema 1.3.9. $E = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E}$ *si y solo si E es separable.*

Demostración. Es claro que si $E = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E}$ entonces E es separable. Probemos la recíproca. Dado $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in E$ queremos ver que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right\|_E = \|x - P_N(x)\|_E \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Supongamos que no. En ese caso $(P_N(x))_N$ no es de Cauchy en E y entonces hay un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < .....$ tal que

$$\left\| \sum_{n=p_j}^{q_j} x_n e_n \right\|_E > \varepsilon \tag{1.25}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Llamemos $u_j = \sum_{n=p_j}^{q_j} x_n e_n = (0, ..,0, x_{p_j}, ..., x_{q_j}, 0, ...) \in E$ y sea $u = \sum_j u_j$. Notar que como E es normal y $x \in E$ entonces $u \in E$. Consideremos ahora el conjunto $A = \{\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} / \alpha_n = \pm 1\}$, que verifica $card(A) = 2^{\aleph_0} = c$. Dado $\alpha \in A$ llamemos

$$u_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j = (0, ..., \alpha_1.x_{p_1}, ..., \alpha_1.x_{q_1}, 0, ..., \alpha_2.x_{p_2}, ..., \alpha_2.x_{q_2}, 0...).$$

Usando nuevamente que E es normal y que $u \in E$, obtenemos $u_\alpha \in E$ para todo $\alpha \in A$. Ahora consideremos $\alpha, \beta \in A$ distintos entre si (esto quiere decir que hay un j tal que $\alpha_j \neq \beta_j$, o lo que es equivalente, $\alpha_j = -\beta_j$ puesto que toman solo los valores 1 o -1). Luego, la propiedad de normalidad de E implica que

$$\|u_\alpha - u_\beta\|_E \geq \|\alpha_j.u_j - \beta_j.u_j\|_E = \|2\alpha_j.u_j\|_E = |2\alpha_j|.\|u_j\|_E = 2.\|u_j\|_E,$$

y recordando que $\|u_j\|_E > \varepsilon$ (ver (1.25)) obtenemos

$$\|u_\alpha - u_\beta\|_E > 2\varepsilon$$

para un $\varepsilon > 0$ y cualesquiera $\alpha, \beta \in A$ ($\alpha \neq \beta$). Como $card(A) = c$, esto nos muestra que E no puede ser separable, hecho que se contradice con la hipótesis del comienzo. La contradicción proviene de suponer que $(P_N(x))_N$ no converge a x y en consecuencia debe ser $E = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E}$. □

Lema 1.3.10. $E = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E}$ *si y solo si* $E' = E^\times$ *(isomorfismo isométrico).*

Demostración. Comencemos suponiendo que $E = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E}$ y probemos que $E' = E^\times$. Para esta implicación, recordemos la aplicación definida en (1.7) y lo visto en la **Proposición 1.2.9**. Allí veíamos que, vía una inyección isométrica, podíamos pensar a $E^\times$ como subespacio isométrico de E'. Siguiendo la misma notación que en (1.7), probemos que cuando $E = \overline{[e_n]_n}^{\|\cdot\|_E}$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} E^\times & \longrightarrow & E' \\ y & \longmapsto & \varphi_y \end{array}$$

es suryectiva, y en consecuencia resulta el isomorfismo isométrico que estamos buscando. Dado $\varphi \in E'$, buscamos un $y = (y_n)_n \in E^\times$ tal que $\varphi = \varphi_y$. Por la definición de las φ_y, debemos considerar $y_n = \varphi(e_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $y \in E^\times$. Para eso consideremos $x = (x_n)_n \in E$ y probemos que $xy \in \ell_1$. Dado $m \in \mathbb{N}$ llamemos

$$z_m = (sg(x_1y_1)x_1, ..., sg(x_my_m)x_m, 0, 0, ...),$$

notando que $\|z_m\|_E \leq \|x\|_E$. Ahora, como φ es lineal entonces

$$\varphi(z_m) = \sum_{n=1}^{m} \varphi(sg(x_ny_n)x_n.e_n) = \sum_{n=1}^{m} sg(x_ny_n)x_n.\varphi(e_n),$$

y dado que estamos considerando $y_n = \varphi(e_n)$, la igualdad anterior no es otra cosa que $\varphi(z_m) = \sum_{n=1}^m |x_ny_n|$. Luego $\sum_{n=1}^m |x_ny_n| = |\varphi(z_m)| \leq \|\varphi\|.\|z_m\|_E \leq \|\varphi\|.\|x\|_E$ y en consecuencia

$$\sum_{n=1}^{m} |x_ny_n| \leq \|\varphi\|.\|x\|_E$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto nos muestra que $xy \in \ell_1$ con $\sum_n |x_ny_n| \leq \|\varphi\|.\|x\|_E < \infty$, y entonces queda probado que $y = (y_n)_n \in E^\times$. Aún más, tomando supremo sobre todos los $x \in B_E$

obtenemos $\|y\|_{E^\times} \leq \|\varphi\|$. Para terminar de probar la suryectividad (notar que todavía no usamos la hipótesis de que $E = \overline{[e_n]_n}^{\|\cdot\|_E}$), debemos ver que $\varphi = \varphi_y$. En efecto, dado que φ y φ_y son lineales y continuas y que $\varphi(e_n) = \varphi_y(e_n)$ para todo n, la hipótesis de que los vectores canónicos generan un subespacio denso en E nos permite afirmar que $\varphi = \varphi_y$.

Para la otra implicación suponemos $E' = E^\times$ y queremos ver que $E = \overline{[e_n]_n}^{\|\cdot\|_E}$. Supongamos que $\overline{[e_n]_n}^{\|\cdot\|_E} \subsetneq E$. En tal caso, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach existe una funcional $\varphi \in E'$ no nula tal que $\varphi|_{\overline{[e_n]_n}} \equiv 0$. Es decir, una funcional φ no nula tal que $\varphi(e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por hipótesis $E' = E^\times$ de forma que $\varphi = \varphi_y$ para algún $y \in E^\times$. Pero entonces $y_n = \varphi(e_n) = 0$ para todo n, luego $y = 0$ y de esta manera $\varphi = \varphi_y = 0$, lo cual contradice el hecho de que φ es no nula. Luego queda demostrado que $E = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E}$. $\square$

Resumiendo, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 1.3.11. *Sea E un espacio de sucesiones. Son equivalentes :*

a) *E es minimal.*

b) $E = \overline{[e_n]_{n\in\mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_E}$.

c) *E es separable.*

d) *$E' = E^\times$ (isomorfismo isométrico).*

Ahora que caracterizamos el concepto de espacio minimal, veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 1.3.12. *i*) Los espacios ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ y c_0 son minimales.

ii) El espacio ℓ_∞ no es minimal.

Ambos ejemplos resultan triviales de verificar a partir del **Teorema 1.3.11**. Aún más, en el caso de ℓ_∞, (1.24) nos muestra que $\ell_\infty^{min} = c_0$.

1.3.2. Espacios de sucesiones maximales

Dado un espacio de sucesiones E definimos su *envoltura maximal* como el conjunto de los $x \in \omega$ tales que $zx \in E$ para todo $z \in c_0$. Esto es,

$$E^{max} = \{x \in \omega : zx \in E \quad \forall z \in c_0\}.$$

Tendremos una norma en este espacio, dada por

$$\|x\|_{E^{max}} = \sup_{z\in B_{c_0}} \|zx\|_E.$$

Notaremos $\|\cdot\|_{max} = \|\cdot\|_{E^{max}}$ siempre que sea claro cual es el espacio E al que nos referimos.

Al igual que lo hicimos con el núcleo minimal, veamos que E^{max} es un espacio de sucesiones con la norma definida y que $E \hookrightarrow E^{max}$ con inclusión de norma uno.

Es claro que $c_{00} \subseteq E^{max}$ y que E^{max} es un espacio vectorial.

Veamos que $\|\cdot\|_{max}$ define una norma. En primer lugar, veamos que si $x \in E^{max}$ entonces $\|x\|_{max} < \infty$. Para eso notemos que dado $x \in E^{max}$, tiene sentido considerar el operador lineal dado por,

$$\begin{aligned} T_x : c_0 &\longrightarrow E \\ z &\longmapsto zx \end{aligned}$$

Es fácil ver que T_x tiene gráfico cerrado, de manera que resulta un operador acotado. Luego $\|x\|_{max} = \|T_x\| < \infty$ como se quería ver. Aún más, teniendo en cuenta que $T_0 \equiv 0$, $T_{x+y} = T_x + T_y$, $T_{\lambda.x} = \lambda.T_x$ (donde $x, y \in E^{max}$, $\lambda \in \mathbb{R}$) y que $\|x\|_{max} = \|T_x\|$, queda claro que $\|\cdot\|_{max}$ es una norma.

Por otro lado, dado $x \in E$ se tiene $zx \in E$ para todo $z \in c_0$ y además $\|zx\|_E \leq \|z\|_\infty.\|x\|_E$ (esto es consecuencia de la propiedad de normalidad de E). Tomando supremo sobre los $z \in B_{c_0}$ se obtiene $\|x\|_{max} \leq \|x\|_E$, lo cual nos muestra que $E \hookrightarrow E^{max}$ con inclusión de norma menor o igual que uno. Considerando $x = e_1$ se verifica fácilmente que $\|x\|_E = \|x\|_{max}$, de manera que la inclusión tiene norma exactamente igual a uno.

Probemos que E^{max} es normal. Sean $x \in \omega$ e $y \in E^{max}$ tales que $|x| \leq |y|$. Dado $z \in c_0$ se tendrá $|zx| \leq |zy|$ con $zy \in E$ (puesto que $y \in E^{max}$) y como E es normal, $zx \in E$ con $\|zx\|_E \leq \|zy\|_E$. Dado que $z \in c_0$ era cualquiera, se deduce que $x \in E^{max}$ con $\|x\|_{max} \leq \|y\|_{max}$. Luego E^{max} es normal.

Por último veamos que E^{max} es completo. Consideremos $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E^{max} y veamos que converge a un cierto $x \in E^{max}$. Sea $z \in c_0$. Por definición de la norma $\|\cdot\|_{max}$ (y dado que $(x^k)_k$ es de Cauchy) se tiene

$$\|zx^n - zx^m\|_E \leq \|z\|_\infty.\|x^n - x^m\|_{max} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0, \tag{1.26}$$

de manera que $(zx^k)_k$ resulta de Cauchy en E para cada $z \in c_0$ (y en consecuencia es convergente, puesto que E es completo). Como la convergencia de una sucesión en E implica convergencia coordenada a coordenada, tomando $z = e_i$ tendremos un $x_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_i. \tag{1.27}$$

Llamemos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y probemos que $x \in E^{max}$ y que $(x^k)_k$ converge a x (en E^{max}). Para ver que $x \in E^{max}$ consideremos un $z \in c_0$ y probemos que $zx \in E$. Por (1.26) existe un $y \in E$ tal que $\|zx^k - y\|_E \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Pero entonces para cada i se tiene $z_i.x_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} y_i$, mientras que por (1.27) se tiene $z_i.x_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} z_i.x_i$. Luego por unicidad del límite obtenemos $y_i = z_i.x_i$ para todo i, lo que nos muestra que $zx = y \in E$. Ahora veamos que $(x^k)_k$ converge a x en E^{max}. Dado $\varepsilon > 0$, hay un $z \in B_{c_0}$ tal que $\|x^k - x\|_{max} < \|zx^k - zx\|_E + \varepsilon/2$. Por otro lado, según lo visto anteriormente, existe un k_0 tal que si $k \geq k_0$ entonces $\|zx^k - zx\|_E < \varepsilon/2$. De esta forma, resulta $\|x^k - x\|_{max} < \varepsilon$ si $k \geq k_0$. Luego $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ en E^{max} y así queda probado que E^{max} es completo.

Definición 1.3.13. Sea E un espacio de sucesiones. Diremos que E es *maximal* si $E = E^{max}$ (igualdad isométrica).

Observación 1.3.14. *Se verifica fácilmente que E^{max} es un espacio de sucesiones maximal, y que es el más chico de los espacios maximales que contienen a E. Esto es, que si $E \subseteq F$ con F maximal entonces $E^{max} \subseteq F$.*

El siguiente lema caracteriza la envoltura maximal de un espacio de sucesiones E. Recordar que si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entonces $P_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)$.

Lema 1.3.15.

$$E^{max} = \{x \in \omega \ : \ (P_n x)_{n\in\mathbb{N}} \quad es \quad \|\cdot\|_E - acotada\}$$

Más aún, $\|x\|_{max} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|_E$.

Demostración. En primer lugar consideremos $x \in E^{max}$ y veamos que $(\|P_n x\|_E)_n$ es acotada. Sea $z^n = e_1 + e_2 + ... + e_n = (1, 1, ..., 1, 0, ...)$ perteneciente a B_{c_0}. Por definición de $\|\cdot\|_{max}$, se tendrá

$$\|x\|_{max} = \sup_{z\in B_{c_0}} \|zx\|_E \geq \sup_n \|z^n x\|_E = \sup_n \|P_n x\|_E \tag{1.28}$$

lo cual muestra que $(\|P_n x\|_E)_n$ es acotada.

Recíprocamente, sea $x \in \omega$ tal que $(\|P_n x\|_E)_n$ es acotada (es decir que $\sup_n \|P_n x\|_E < \infty$) y veamos que $zx \in E$ para todo $z \in c_0$. Como E es normal, dados $n, m \in \mathbb{N}$ $(n > m)$ se tiene

$$\|P_n(zx) - P_m(zx)\|_E = \|(P_n z - P_m z)P_n x\|_E \leq \|P_n z - P_m z\|_\infty . \|P_n x\|_E$$

y en consecuencia

$$\|P_n(zx) - P_m(zx)\|_E \leq \|P_n z - P_m z\|_\infty . \sup_n \|P_n x\|_E. \tag{1.29}$$

Dado que $z \in c_0$ es claro que $\|P_n z - P_m z\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, lo cual nos muestra junto con (1.29) que $(P_n(zx))_n$ es de Cauchy en E y en consecuencia converge a un cierto $y \in E$. Esto implica que $(P_n(zx))_i \xrightarrow[n\to\infty]{} y_i$ para cada i (convergencia en cada coordenada) y de aquí se deduce que $(zx)_i = y_i$ para todo i. Luego $zx = y$, de manera que $zx \in E$ como se quería ver. Como $z \in c_0$ era cualquiera, probamos que $x \in E^{max}$; más aún, dado que $\|P_n(zx) - zx\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ se tiene

$$\|zx\|_E = \lim_{n\to\infty} \|P_n(zx)\|_E = \sup_n \|P_n(zx)\|_E \leq \|z\|_\infty . \sup_n \|P_n(x)\|$$

y en consecuencia tomando supremo sobre los $z \in B_{c_0}$,

$$\|x\|_{max} \leq \sup_n \|P_n x\|_E. \tag{1.30}$$

Luego, (1.28) y (1.30) nos muestran que $\|x\|_{max} = \sup_n \|P_n x\|_E$ $\square$

Observación 1.3.16. *Sean $(x^n)_n$ una sucesión de elementos en ω (es decir $x^n = (x_i^n)_i$) y $x \in \omega$. Diremos que*

$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad en \quad \omega$$

si $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. En ese sentido, dado un espacio de sucesiones E, diremos que B_E es cerrada en ω si dada una sucesión $(x^n)_n$ de elementos en B_E tales que $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ en ω, se tiene $x \in B_E$.

El siguiente teorema relaciona este último concepto con el de espacio maximal.

Teorema 1.3.17. *Sea E un espacio de sucesiones. Son equivalentes :*

a) E es maximal.

b) B_E es cerrada en ω.

Demostración. Comencemos probando la implicación $a) \Rightarrow b)$. Sea $(x^n)_n$ una sucesión en B_E tal que $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ en ω y veamos que $x \in B_E$. Por hipótesis y teniendo en cuenta lo visto en el **Lema 1.3.15**, tenemos $E = \{x \in \omega \ : \ (P_n x)_n \text{ es } \|\cdot\|_E - \text{acotada}\}$ con $\|x\|_E = \sup_n \|P_n x\|_E$. Luego, como para cada m se tiene $x^m \in B_E$, es claro que $\|x^m\|_E = \sup_n \|P_n(x^m)\|_E \leq 1$. Ahora bien, si probamos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|P_n(x^m)\|_E \xrightarrow[m\to\infty]{} \|P_n x\|_E, \tag{1.31}$$

entonces será $\|P_n x\|_E \leq 1$ para todo n, y en consecuencia $x \in E$ con $\|x\|_E = \sup_n \|P_n x\|_E \leq 1$. Esto probaría que B_E es cerrado en ω. Para probar (1.31) notemos que dado $\varepsilon > 0$ y fijado $n \in \mathbb{N}$, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces

$$|x_i^m - x_i| < \varepsilon \quad \forall\ i = 1, 2, ..., n.$$

Esto es simplemente porque $x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$ en ω. Pero entonces, como E es normal se tendrá

$$\|P_n(x^m) - P_n x\|_E = \|(x_1^m - x_1, ..., x_n^m - x_n, 0, ...)\|_E \leq \|(\varepsilon, ..., \varepsilon, 0, ...)\|_E$$

para los $m \geq m_0$. Luego $\|P_n(x^m) - P_n x\|_E \leq \varepsilon.\|e_1 + ... + e_n\|_E$ si $m \geq m_0$, de forma que $\|P_n(x^m) - P_n x\|_E \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. En consecuencia, $\|P_n(x^m)\|_E \xrightarrow[m\to\infty]{} \|P_n x\|_E$ como se quería ver.

Ahora probemos $b) \Rightarrow a)$. Ya sabemos que $E \subseteq E^{max}$ con inclusión de norma uno. Probemos la otra inclusión bajo la hipótesis de que B_E es cerrada en ω. Dado $x \in E^{max}$

se tiene $\sup_n \|P_n x\|_E < \infty$ (por el **Lema 1.3.15**). Llamemos $C = \sup_n \|P_n x\|_E$ y consideremos $x_0 = C^{-1}.x$. Es claro que $\|P_n(x_0)\|_E \leq 1$ (o sea, $P_n(x_0) \in B_E$) y que $P_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ en ω. Luego, como B_E es cerrada en ω se tendrá $x_0 \in B_E$ y dado que $x_0 = C^{-1}.x$ deducimos que $x \in E$. Además, $\|x_0\|_E \leq 1$ implica

$$\|x\|_E \leq C = \sup_n \|P_n x\|_E = \|x\|_{max}$$

lo que nos muestra que $E^{max} \subseteq E$ con inclusión de norma uno. Luego queda probado que $E = E^{max}$ isométricamente, que es lo que se quería ver. $\square$

Ejemplos 1.3.18. *i*) Los espacios ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ y ℓ_∞ son maximales.

ii) El espacio c_0 no es maximal. Más aún, $c_0^{max} = \ell_\infty$.

Las demostraciones de *i*) y *ii*) se deducen fácilmente de la caracterización de la envoltura maximal vista en el **Lema 1.3.15**.

Observación 1.3.19. *Sean E y F dos espacios de sucesiones. Si F es maximal entonces el espacio de multiplicadores $M(E,F)$ también lo es. En particular, $E^\times = M(E,\ell_1)$ es maximal para cualquier espacio de sucesiones E.*

Demostración. Por el **Lema 1.3.15**, bastará ver que si $x \in \omega$ es una sucesión tal que $\sup_n \|P_n x\|_{M(E,F)} < \infty$, entonces $x \in M(E,F)$ con $\|x\|_{M(E,F)} \leq \sup_n \|P_n x\|_{M(E,F)}$. Consideremos $y \in E$ y veamos que xy pertenece a F. Por hipótesis y por la definición de la norma en $M(E,F)$, tenemos

$$\|P_n(xy)\|_F = \|P_n(x)y\|_F \leq \|P_n x\|_{M(E,F)}.\|y\|_E \leq \sup_n \|P_n x\|_{M(E,F)}.\|y\|_E < \infty.$$

Como F es maximal, el mismo **Lema 1.3.15** nos dice que $xy \in F$ con

$$\|xy\|_F \leq \sup_n \|P_n x\|_{M(E,F)}.\|y\|_E.$$

Esto nos muestra que $x \in M(E,F)$ y tomando supremo sobre los $y \in B_E$ nos queda $\|x\|_{M(E,F)} \leq \sup_n \|P_n x\|_{M(E,F)}$. $\square$

Recordemos que dado E un espacio de sucesiones, vimos que $E \subseteq E^{\times\times}$ con $c_E^{E^{\times\times}} \leq 1$ (ver **Observación 1.2.12**). Seguido a eso probamos que $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ isométricamente si y sólo si $E^\times$ es subespacio normante de E' (en **Definición 1.2.13** definimos subespacio normante). Veremos ahora que si E es maximal entonces $E^\times$ es subespacio normante de E' y a partir de eso se deducirá fácilmente que si E es maximal entonces es perfecto.

Propiedad 1.3.20. Sea E un espacio de sucesiones maximal. Luego $E^\times$ es subespacio normante de E'.

Demostración. El objetivo es probar que $\|x\|_E = \sup_{\varphi_y \in B_{E^\times}} |\varphi_y(x)|$ para todo $x \in E$ (como siempre que decimos $E^\times \subseteq E'$, estamos pensando en la isometría definida en (1.7)). Bastará probar que si $x \in E$ con $\|x\|_E > 1$, entonces hay un $y \in B_{E^\times}$ tal que $\varphi_y(x) > 1$. De hecho, supongamos probado esto último. En tal caso, dados $x \in E$ y $\varepsilon > 0$ consideramos $x_\varepsilon = \frac{x}{\|x\|_E - \varepsilon} \in E$. Claramente $\|x_\varepsilon\|_E > 1$ y en consecuencia hay un $y_\varepsilon \in B_{E^\times}$ tal que $\varphi_{y_\varepsilon}(x_\varepsilon) > 1$, o lo que es equivalente, $\varphi_{y_\varepsilon}(x) > \|x\|_E - \varepsilon$. Por otro lado es claro que

$$\varphi_{y_\varepsilon}(x) \leq \|\varphi_{y_\varepsilon}\|.\|x\|_E = \|y_\varepsilon\|_{E^\times}.\|x\|_E \leq \|x\|_E,$$

de manera que $\|x\|_E - \varepsilon < \varphi_{y_\varepsilon}(x) < \|x\|_E$. Como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, queda probado que $\|x\|_E = \sup_{y \in B_{E^\times}} |\varphi_y(x)|$ y entonces $E^\times$ es subespacio normante de E'.

Veamos entonces que si $x \in E$ es tal que $\|x\|_E > 1$, entonces hay un $y \in B_{E^\times}$ tal que $\varphi_y(x) > 1$. Para eso consideremos $Y = E \cap \ell_1$ visto como subespacio de ℓ_1 (o sea, con la norma $\|\cdot\|_1$) y el conjunto convexo $A = \{x \in Y \ : \ \|x\|_E \leq 1\}$. Probemos que A es cerrado en Y. Sea $(z^n)_n$ una sucesión de elementos en A que converge (en Y) a un cierto $z \in Y$. Probemos que $z \in A$, es decir, que $\|z\|_E \leq 1$. Como $\|z^n - z\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces $z_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, o dicho de otra manera, $z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ en ω (ver **Observación 1.3.16**). Como estamos suponiendo que E es maximal y eso (por el **Teorema 1.3.17**) es equivalente a decir que B_E es cerrada en ω, resulta $z \in B_E$. Luego $z \in A$ y en consecuencia A es cerrado como se quería probar. Ahora fijemos un $x \in E$ tal que $\|x\|_E > 1$. Como E es maximal, el **Lema 1.3.15** nos dice que $\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|_E$ y entonces podemos considerar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_N x\|_E > 1$. Estamos entonces en condiciones de aplicar la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Tenemos Y un espacio normado (subespacio de ℓ_1), A un subconjunto convexo y cerrado de Y y $P_N x \in Y - A$. En ese caso, sabemos que existe una $\varphi \in Y'$ tal que $\varphi(P_N x) > 1$ y $\varphi(z) < 1$ para todo $z \in A$. Como $Y \subseteq \ell_1$ y $\ell_1' = \ell_\infty$, entonces existe un $\xi \in \ell_\infty$ tal que $\varphi \equiv \varphi_\xi$ en Y (donde $\varphi_\xi(z) = \sum_k z_k.\xi_k$).

Recordar que queremos probar que existe un $y \in B_{E^\times}$ tal que $\varphi_y(x) > 1$. Hasta aquí tenemos $\xi \in \ell_\infty$ tal que

$$\varphi_\xi(P_N x) \quad > \quad 1 \tag{1.32}$$

$$\varphi_\xi(z) \quad < \quad 1 \ \ \forall z \in A. \tag{1.33}$$

Más aún, en lugar de (1.33) podemos poner

$$|\varphi_\xi(z)| < 1 \ \ \forall z \in A \tag{1.34}$$

(de hecho, si $z \in A$ entonces $-z \in A$ y en consecuencia $\varphi_\xi(-z) < 1$. Por linealidad esto es lo mismo que $\varphi_\xi(z) > -1$. Luego se tiene $-1 < \varphi_\xi(z) < 1$ para todo $z \in A$). Llamemos $y = P_N \xi$ y veamos que verifica que $y \in B_{E^\times}$ y que $\varphi_y(x) > 1$. Lo segundo es claro ya que

$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{N} x_k.\xi_k = \varphi_\xi(P_N x) > 1$$

(la desigualdad es por (1.32)). Por otro lado, $\|y\|_{E^\times} = \|\varphi_y\| = \sup_{z\in B_E} |\varphi_y(z)|$ y dado que $y = P_N\xi$ se tendrá

$$\sup_{z\in B_E} |\varphi_y(z)| = \sup\{|\varphi_y(z)| \ : \ z \in E_N, \ \|z\|_E \leq 1\}$$

donde $E_N = \{P_N z \ : \ z \in E\}$. Notando que si $z \in E_N$ es tal que $\|z\|_E \leq 1$ entonces $z \in A$, obtenemos

$$\sup\{|\varphi_y(z)| \ : \ z \in E_N, \ \|z\|_E \leq 1\} \leq \sup_{z\in A} |\varphi_y(z)|.$$

Ahora bien, dado que $\sup_{z\in A} |\varphi_y(z)| = \sup_{z\in A} |\varphi_\xi(P_N z)| < 1$ (por (1.34) y porque $P_N z \in A$ siempre que $z \in A$ debido a la normalidad de E), queda probado que

$$\|y\|_{E^\times} = \sup_{z\in B_E} |\varphi_y(z)| \leq \sup_{z\in A} |\varphi_y(z)| < 1$$

que es lo que faltaba ver. Resumiendo, probamos que si $x \in E$ es tal que $\|x\|_E > 1$ entonces hay un $y \in B_{E^\times}$ tal que $\varphi_y(x) > 1$, y esto bastaba para ver que $E^\times$ es subespacio normante de E'. □

Corolario 1.3.21. *Sea E un espacio de sucesiones. Si E es maximal entonces es perfecto.*

Demostración. Ya sabemos que cualquiera sea el espacio de sucesiones, se verifica $E \subseteq E^{\times\times}$ con $c_E^{E^{\times\times}} \leq 1$.

Veamos la otra inclusión. Sea $x \in E^{\times\times}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $P_n x \in E$. Como E es maximal, la **Propiedad 1.3.20** nos dice que $E^\times$ es subespacio normante de E' y esto es equivalente a decir que la inclusión $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ es isométrica (por la **Observación 1.2.14**). Luego,

$$\|P_n x\|_E = \|P_n x\|_{E^{\times\times}} \tag{1.35}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $E^{\times\times}$ es normal entonces

$$\|P_n x\|_{E^{\times\times}} \leq \|x\|_{E^{\times\times}}. \tag{1.36}$$

Luego (1.35) y (1.36) nos muestran que $\|P_n x\|_E \leq \|x\|_{E^{\times\times}}$ para todo n y como E es maximal, esto nos dice que $x \in E$ y que $\|x\|_E = \sup_n \|P_n x\|_E \leq \|x\|_{E^{\times\times}}$. En consecuencia $E = E^{\times\times}$ isométricamente, es decir, E es perfecto. □

Ejemplo 1.3.22. Consideremos el espacio de sucesiones $E = \ell_\infty$ con la norma dada por $\|x\|_E = \|x\|_\infty + \limsup_{n\to\infty} |x_n|$. Ya observamos en el comentario posterior a la **Observación 1.2.14**, que este espacio verifica que la inclusión $E \hookrightarrow E^{\times\times}$ no es isométrica y en consecuencia no es perfecto (para ser más precisos se tiene $E = E^{\times\times}$ pero la igualdad no es isométrica). Luego E no es maximal. Por otro lado, el espacio E tampoco resulta minimal. En efecto, basta considerar $x = (1, 1, 1, ...)$ y notar que $\|P_n x - x\|_E = 2$. En conclusión, hemos mostrado un espacio de sucesiones que no resulta maximal ni minimal.

A continuación, definiremos el reordenamiento decreciente de una sucesión.

Definición 1.3.23. Dada una sucesión $x = (x_n)_n \in \omega$, llamamos *función de distribución de* x a la función $d_x : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ dada por $d_x(t) = \sharp\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > t\}$.

Definición 1.3.24. Dada una sucesión $x = (x_n)_n \in \omega$, llamamos *reordenamiento decreciente de* x y notamos $x^* = (x_n^*)_n$, a la sucesión dada por

$$x_n^* = \text{ínf}\{t > 0 : \quad d_x(t) \leq n - 1\}.$$

Por otro lado, notaremos $x^{**} = (x_n^{**})_n$ a la sucesión dada por $x_n^{**} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i^*$.

Se deduce rápidamente de la definición que $x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq ....$, es decir, que x^* es una sucesión decreciente. La forma en que definimos el reordenamiento decreciente de una sucesión, es la manera en la que se define el reordenamiento decreciente en los espacios de funciones. La siguiente observación nos muestra una forma equivalente de definirlo.

Observación 1.3.25. *Dada una sucesión $x \in \omega$, se verifica*

$$x_n^* = \text{ínf}\{\sup_{i \notin J} |x_i| : \quad J \subseteq \mathbb{N}, \, \sharp J \leq n - 1\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. En primer lugar, veamos que $\text{ínf}\{\sup_{i \notin J} |x_i| : \quad J \subseteq \mathbb{N}, \, \sharp J \leq n - 1\} \leq x_n^*$. Según la definición del reordenamiento decreciente, dado $\varepsilon > 0$ existe un $t_0 > 0$ tal que $d_x(t_0) \leq n - 1$ y $t_0 - \varepsilon < x_n^*$. Ahora bien, consideremos $J_0 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\sharp J_0 \leq n - 1$ y tal que $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > t_0\} \subseteq J_0$ (aquí usamos la hipótesis de que $d_x(t_0) \leq n - 1$). Luego, es claro que

$$\text{ínf}\{\sup_{i \notin J} |x_i| : \quad J \subseteq \mathbb{N}, \, \sharp J \leq n - 1\} \leq \sup_{i \notin J_0} |x_i| \leq t_0 < x_n^* + \varepsilon$$

y dado que ε era cualquiera, obtenemos la desigualdad buscada.

Para probar la otra desigualdad, razonamos de manera similar. Dado $\varepsilon > 0$ existe un $J_0 \subseteq \mathbb{N}$, $\sharp J_0 \leq n - 1$ tal que $\sup_{i \notin J_0} |x_i| - \varepsilon < \text{ínf}\{\sup_{i \notin J} |x_i| : \quad J \subseteq \mathbb{N}, \, \sharp J \leq n - 1\}$. Llamemos $t_0 = \sup_{i \notin J_0} |x_i|$ y notemos que $d_x(t_0) \leq n - 1$ (puesto que $\sharp J_0 \leq n - 1$). Luego se tiene

$$x_n^* \leq t_0 < \text{ínf}\{\sup_{i \notin J} |x_i| : \quad J \subseteq \mathbb{N}, \, \sharp J \leq n - 1\} + \varepsilon,$$

lo cual demuestra (haciendo $\varepsilon \to 0$) que $x_n^* \leq \text{ínf}\{\sup_{i \notin J} |x_i| : \quad J \subseteq \mathbb{N}, \, \sharp J \leq n - 1\}$. □

Observación 1.3.26. *Si $x \in c_0$, entonces x^* se obtiene reordenando decrecientemente la sucesión $(|x_n|)_n$.*

Demostración. Dado que x pertenece a c_0, podemos asegurar la existencia de un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{k_1}| \geq |x_n|$ para todo n. Luego es claro que si $|x_{k_1}| < t < \infty$ entonces $d_x(t) = 0$ y que si $0 < t < |x_{k_1}|$ entonces $0 < d_x(t) < \infty$ (que es menor que infinito es porque $x \in c_0$). Esto nos muestra que $x_1^* = |x_{k_1}|$. A continuación, consideremos $k_2 \in \mathbb{N} - \{k_1\}$ tal que $|x_{k_1}| \geq |x_{k_2}| \geq |x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{k_1\}$ (la existencia de k_2 está nuevamente garantizada por el hecho de que $x \in c_0$). Al igual que antes, resulta claro que si $|x_{k_2}| < t < \infty$ entonces $d_x(t) \leq 1$ y que si $0 < t < |x_{k_2}|$ entonces $d_x(t) \geq 2$. Luego se tendrá $x_2^* = |x_{k_2}|$. El argumento continúa de manera inductiva, demostrando que x^* se obtiene reordenando decrecientemente la sucesión $(|x_n|)_n$. $\square$

Notar que x^* no es necesariamente una permutación de la sucesión original. De hecho, si $x = (1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, ...)$ entonces $x^* = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$. De todas maneras, la observación anterior nos muestra que si $x \in c_0$, entonces $x^* = (|x_{\sigma(n)}|)_n$ para cierta $\sigma \in P = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, \sigma \text{ es inyectiva}\}$. En el caso en que x no pertenezca a c_0, puede carecer de sentido el hecho de considerar el reordenamiento decreciente de $(|x_n|)_n$. Basta pensar, por ejemplo, en la sucesión $x = \left(1 - (\frac{1}{2})^n\right)_n$ cuyos elementos no pueden ser reordenados decrecientemente. En este caso, se tiene por definición $x^* = (1, 1, 1, ...)$.

Observación 1.3.27. *Sea E un espacio de sucesiones simétrico. Dado $x \in E$, se tiene $x^* \in E$ con $\|x^*\|_E \leq C.\|x\|_E$ para cierta constante $C > 0$ (que no depende de x). Si además E es maximal o es minimal, entonces $\|x\|_E = \|x^*\|_E$.*

Demostración. La **Proposición 1.1.5** nos muestra que al ser E un espacio de sucesiones simétrico, se verifica $E \subseteq c_0$ o bien $E = \ell_\infty$ (aquí la inclusión es continua y la igualdad es con normas equivalentes). Veremos cada uno de estos casos por separado. En primer lugar probemos el resultado para un espacio de sucesiones simétrico tal que $E \subseteq c_0$. En tal caso, ya observamos que $x^* = |x|_\sigma$ para algún $\sigma \in P = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, \sigma \text{ es inyectiva}\}$, y en consecuencia la **Observación 1.1.4** nos dice que $x^* \in E$. Más aún, se desprende de la demostración de dicha observación que $\|x^*\|_E \leq 2.\|x\|_E$. Supongamos ahora que E es maximal o minimal y veamos que $\|x\|_E = \|x^*\|_E$. Recordar que, ya sea que E resulte maximal o minimal, se verifica $\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|_E$ (ver (1.17) y **Lema 1.3.15**). Ahora bien, por un lado se deduce fácilmente de las propiedades de simetría y normalidad del espacio y del hecho de que x^* es un reordenamiento decreciente de la sucesión $(|x_n|)_n$ (aquí es necesario que sea $E \subseteq c_0$), que $\|P_n(x^*)\|_E \leq \|x\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, tomando supremo sobre todos los n obtenemos $\|x^*\|_E \leq \|x\|_E$. Para el otro lado, basta notar que $\|P_n x\|_E = \|(P_n x)^*\|_E \leq \|x^*\|_E$ para todo n (nuevamente por simetría y normalidad) y tomar supremo como en la desigualdad anterior. En definitiva, se tiene $\|x\|_E = \|x^*\|_E$.

Hasta aquí probamos el resultado para el caso $E \subseteq c_0$. Veamos qué sucede si suponemos $E = \ell_\infty$. Recordemos que dado $x \in E$, la **Proposición 1.1.5** afirma que $C_2.\|x\|_\infty \leq \|x\|_E \leq C_1.\|x\|_\infty$, donde $C_1 = \|(1, 1, 1, ...)\|_E$ y $C_2 = \|e_1\|_E$. Para comenzar, consideremos $x \in E$ y veamos que $x^* \in E$. Notemos que dado $\varepsilon > 0$, se verifica

$$d_x\left(\frac{\|x\|_E + \varepsilon}{C_2}\right) = \sharp\{n \in \mathbb{N} : |x_n|.C_2 > \|x\|_E + \varepsilon\} = \infty$$

puesto que el espacio E es normal. Esto nos muestra que $x_n^* \leq \frac{\|x\|_E+\varepsilon}{C_2}$ para todo n y en consecuencia $C_2.\|x^*\|_\infty \leq \|x\|_E$ dado que el $\varepsilon > 0$ era cualquiera. Luego, por la equivalencia entre las normas mencionada anteriormente, deducimos que $\|x^*\|_E \leq \frac{C_1}{C_2}.\|x\|_E$. Supongamos, para finalizar, que E es maximal o minimal. Por un lado, se desprende fácilmente de la definición de x^* que $\|(P_n x)^*\|_E \leq \|x^*\|_E$ para todo n. Pero como E es simétrico entonces $\|P_n x\|_E = \|(P_n x)^*\|_E$ (esto es porque son sucesiones con finitos elementos no nulos), de forma que tomando supremo sobre todos los $n \in \mathbb{N}$ en la desigualdad anterior, se obtiene $\|x\|_E \leq \|x^*\|_E$. Para la otra desigualdad, consideremos $\varepsilon > 0$ y veamos que $\|P_n(x^*)\|_E \leq \|x\|_E + \varepsilon.C_1$ para todo n. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos (sin pérdida de generalidad) que $x_j^* - \varepsilon > 0$ para $j = 1, ..., n$. Por definición se tiene

$$x_1^* = \text{ínf}\{t > 0 : \quad \sharp\{m \in \mathbb{N} : |x_m| > t\} = 0\},$$

de manera que podemos asegurar la existencia de un $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1^* - \varepsilon < |x_{i_1}|$. Si ahora consideramos

$$x_2^* = \text{ínf}\{t > 0 : \quad \sharp\{m \in \mathbb{N} : |x_m| > t\} \leq 1\},$$

entonces podemos afirmar que existen k, l tales que $x_2^* - \varepsilon < |x_k|, |x_l|$. Esto nos permite considerar $i_2 \neq i_1$ tal que $x_2^* - \varepsilon < |x_{i_2}|$. De esta manera, obtenemos $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}$ (distintos entre si) tales que $x_j^* - \varepsilon < |x_{i_j}|$ para $j = 1, ..., n$. Luego, por las propiedades de normalidad y simetría de E obtenemos

$$\|P_n(x^*)\|_E \leq \||x| + (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ...)\|_E \leq \|x\|_E + \varepsilon.\|(1, 1, 1, ...)\|_E$$

como se quería probar. Como el $\varepsilon > 0$ era cualquiera, nos queda $\|P_n(x^*)\|_E \leq \|x\|_E$ para todo n y en consecuencia $\|x^*\|_E \leq \|x\|_E$ (tomando supremo sobre n). Así, queda demostrada la igualdad. □

La siguiente es una conocida desigualdad debida a G. Hardy y J. Littlewood (se puede encontrar, en una versión más general, en [2]).

Proposición 1.3.28. *Dadas dos sucesiones finitas* $(a_1, ..., a_n)$ *y* $(b_1, ..., b_n)$*, se verifica la siguiente desigualdad,*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|.|b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^*.b_i^*.$$

Concluímos esta sección con un resultado que será de utilidad en el siguiente capítulo.

Observación 1.3.29. *Sea* E *un espacio de sucesiones simétrico y maximal tal que* $E \hookrightarrow \ell_2$ *pero* E *no es equivalente a* ℓ_2*. Luego se tiene* $M(\ell_2, E) \hookrightarrow c_0$*.*

Demostración. En primer lugar aclaremos que cuando decimos que E no es equivalente a ℓ_2, significa que no se tiene $E = \ell_2$ con normas equivalentes. En tal caso se tendrá $\sup_n \|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\| = +\infty$. De hecho, si fuese $\|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\| \leq C$ para alguna constante $C > 0$, entonces dado un $x \in \ell_2$ se tendría $\|P_n x\|_E \leq C\|P_n x\|_2$ y tomando supremo sobre n (y usando que E y ℓ_2 son maximales) se obtendría $\|x\|_E \leq C\|x\|_2$. Esto mostraría (junto con la hipótesis de que $E \hookrightarrow \ell_2$) que E y ℓ_2 son equivalentes. Comenzando con la demostración, llamemos $F = M(\ell_2, E)$ y probemos lo siguiente:

i) $\lambda_F(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$,

ii) dado $x \in F$ se verifica la desigualdad $x_n^*.\lambda_F(n) \leq \|x\|_F$.

Para probar *i)* notemos antes que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\lambda_F(n) = \|e_1 + ... + e_n\|_{M(\ell_2,E)} = \sup_{y\in B_{\ell_2^n}} \|(e_1 + ... + e_n)y\|_E = \sup_{y\in B_{\ell_2^n}} \|P_n y\|_E = \|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\|.$$

Luego, como E no es equivalente a ℓ_2 entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda_F(n) = \sup_n \lambda_F(n) = \sup_n \|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\| = +\infty$.

Ahora veamos *ii)*. Supongamos que $x_n^* > 0$ (de lo contrario no hay que probar nada) y sea $\varepsilon > 0$ tal que $x_n^* - \varepsilon > 0$. Recordando la definición de x^*, consideremos $i_1, ..., i_n$ tales que $x_j^* - \varepsilon < |x_{i_j}|$ para $1 \leq j \leq n$ (al igual que lo hicimos en la demostración de la **Observación 1.3.27**). Notando que $F = M(\ell_2, E)$ es simétrico puesto que E y ℓ_2 lo son (ver **Observación 1.2.3**), que $x_1^* \geq x_2^* \geq ... \geq x_n^*$ y usando la propiedad de normalidad, obtenemos

$$\begin{aligned}
(x_n^* - \varepsilon).\lambda_F(n) &= (x_n^* - \varepsilon).\|e_1 + ... + e_n\|_F = \left\|\sum_{i=1}^n (x_n^* - \varepsilon).e_i\right\|_F \\
&= \left\|\sum_{j=1}^n (x_n^* - \varepsilon).e_{i_j}\right\|_F \leq \left\|\sum_{j=1}^n (x_j^* - \varepsilon).e_{i_j}\right\|_F \\
&\leq \|x\|_F
\end{aligned}$$

para cualquier $0 < \varepsilon < x_n^*$. Haciendo $\varepsilon \to 0$ queda probado *ii)*. Ahora bien, dado que $\lambda_F(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, el ítem *ii)* nos muestra que para cada $x \in F$ debe verificarse $x_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de manera que $x \in c_0$. Además la inclusión es continua ya que $x_n^*.\lambda_F(1) \leq x_n^*\lambda_F(n) \leq \|x\|_F$ y en consecuencia $\|x^*\|_\infty = \|x\|_\infty \leq (\lambda_F(1))^{-1}.\|x\|_F$. Es decir que $F = M(\ell_2, E) \hookrightarrow c_0$ como se quería probar. $\square$

1.4. Potencias de espacios de sucesiones

Sea E un espacio de sucesiones y sea $0 < r < \infty$. Nos proponemos definir las potencias E^r del espacio E y estudiar su relación con la convexificación y la concavificación del mismo. Las definiciones de convexidad y concavidad en Banach lattices, así como la convexificación y concavificación de un espacio pueden verse en el **Apéndice A**. Como veremos, la construcción del espacio E^r no es más que una generalización del procedimiento mediante el cual la aplicación $(x_i)_i \mapsto (|x_i|^r.sg(x_i))_i$ manda el espacio ℓ_p en el espacio $\ell_{p/r}$ (si $p.r^{-1} \geq 1$).

1.4.1. Construcción de las potencias de espacios

Supongamos que E es $\text{máx}(1,r)$-convexo, y por el momento supongamos que su constante de $\text{máx}(1,r)$-convexidad verifica $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$ (más adelante veremos que no es estrictamente necesario). Definimos entonces,

$$E^r = \Big\{x \in \omega \ : \ |x|^{1/r} \in E\Big\}$$

con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, el orden usual y la norma dada por: $\|x\|_{E^r} = \||x|^{1/r}\|_E^r$ para cada $x \in E^r$. Notar que si $r = 1$, se tiene simplemente $E^1 = E$ (igualdad isométrica).

En la siguiente observación, dejaremos claro el significado de las expresiones $|x|^{1/r}$ que aparecen en la definición de E^r.

Observación 1.4.1. *Como se puede ver, la definición de E^r y su mencionada relación con la convexificación y concavificación del espacio E, son temas íntimamente relacionados con el cálculo funcional en Banach lattices, cuya construcción se puede ver en el* ***Apéndice A.3****. El cálculo funcional le da sentido, por ejemplo, a expresiones del tipo $f(x)$, donde x es un elemento en un Banach lattice y f una función en $\mathcal{H}_1$ (positivo-homogénea de grado uno). Cuando se trata de espacios de sucesiones, estas expresiones son más sencillas de visualizar. De hecho, si x es un elemento en un espacio de sucesiones E y f es una función en $\mathcal{H}_1$ entonces $f(x) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...) \in E$. Más aún, al trabajar con espacios de sucesiones, adquieren un significado algunas otras expresiones que en el marco de Banach lattices carecen de sentido. Por ejemplo, si $0 < s < \infty$ y x pertenece a un espacio de sucesiones E, entonces tiene sentido considerar las sucesiones $|x|^s = (|x_1|^s, |x_2|^s, |x_3|^s, ...)$ o $x^s = (|x_1|^s.sg(x_1), |x_2|^s.sg(x_2), |x_3|^s.sg(x_3), ...)$. En otras palabras, $|x|^s = f(x)$, donde $f(t) = |t|^s$ (o bien $x^s = f(x)$ con $f(t) = |t|^s.sg(t)$). Claro que, al considerar estas nuevas expresiones $f(x)$ con f no necesariamente en $\mathcal{H}_1$, no podemos asegurar que $f(x)$ sea un elemento en el espacio E del cual partimos, simplemente se tiene $f(x) \in \omega$. Esto le da sentido a la definición de E^r.*

Hacemos un último comentario al respecto: según la definición, un $x \in \omega$ pertenece a E^r si $|x|^{1/r} \in E$. Ahora bien, dado que E es normal, resulta claro que $E^r = \big\{x \in \omega \ : \ x^{1/r} \in E\big\}$.

Volviendo al tema que nos ocupa, notemos que en principio, no es evidente que E^r sea un espacio de Banach de sucesiones. Por empezar, deberíamos probar que es un $e.v.$ y que $\|\cdot\|_{E^r}$ define una norma (con la cual resulta completo). Si bien ambos resultados pueden verse de manera directa, la siguiente observación nos permite probarlos, a la vez que nos muestra la relación entre las potencias de espacios de sucesiones y la convexificación y concavificación. Dado $1 \leq p < \infty$, notamos $E^{(p)}$ a la p-convexificación de E, esto es, el espacio E con el orden usual (denotado por $\ll$), las operaciones dadas por

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \left(x^{1/p} + y^{1/p}\right)^p \\ \lambda \odot x &= \lambda^p \cdot x \end{aligned}$$

y la norma definida por $\| \cdot \|_{E^{(p)}} = \| \cdot \|_E^{1/p}$. Por otro lado, $E_{(p)}$ será la p-concavificación de E, es decir, el espacio E con el orden usual (denotado por $\ll$), las operaciones

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \left(x^p + y^p\right)^{1/p} \\ \lambda \odot x &= \lambda^{1/p} \cdot x \end{aligned}$$

y la norma dada por $\| \cdot \|_{E_{(p)}} = \| \cdot \|_E^p$ (para la p-concavificación pedimos que el espacio E sea p-convexo, en principio con constante $M^{(p)}(E) = 1$ para que lo anterior defina una norma). Para más detalles sobre estos temas, se puede ver el **Apéndice A.5**. Las definiciones de las constantes de p-convexidad ($M^{(p)}(E)$) y de p-concavidad ($M_{(p)}(E)$) de un espacio E, se pueden encontrar en el **Apéndice A.4**.

Observación 1.4.2. *Sean* $0 < r < \infty$ *y* E *un espacio de sucesiones* $\text{máx}(1, r)$*-convexo con* $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$.

i) Si $0 < r < 1$, *entonces*

$$\begin{aligned} T \,:\, \left(E^{(1/r)}, \oplus, \odot\right) &\longrightarrow (E^r, +, \cdot) \\ x &\longmapsto x^r \end{aligned} \tag{1.37}$$

es una aplicación bien definida y lineal. Aún más, T *es sobreyectiva y para cada* $x \in E^{(1/r)}$ *se verifica* $\|T(x)\|_{E^r} = \|x\|_{E^{(1/r)}}$.

ii) De manera análoga, cuando $1 \leq r < \infty$ *la aplicación*

$$\begin{aligned} T \,:\, \left(E_{(r)}, \oplus, \odot\right) &\longrightarrow (E^r, +, \cdot) \\ x &\longmapsto x^r \end{aligned} \tag{1.38}$$

está bien definida y verifica las mismas propiedades que en i).

Demostración. $i)$ Veamos que T está bien definida. Para eso consideremos un x perteneciente a $E^{(1/r)}$ y veamos que x^r pertenece a E^r. En efecto, recordando la definición de $E^{(1/r)}$, es claro que $x \in E$ y en consecuencia $|x^r|^{1/r} = |x| \in E$, lo que nos muestra que $x^r \in E^r$. Notar que la hipótesis de que E sea $\text{máx}(1, r)$-convexo no juega ningún papel en esta parte, ya que todo espacio es 1-convexo. Por otro lado, el hecho de que sea $\frac{1}{r} > 1$ le da sentido a la $\frac{1}{r}$-convexificación del espacio. Veamos ahora que T es lineal. Consideremos $x, y \in E^{(1/r)}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- En primer lugar probemos que $T(x \oplus y) = T(x) + T(y)$. Recordemos que $x \oplus y = (x^r + y^r)^{1/r}$, de manera que $T(x \oplus y) = T((x^r + y^r)^{1/r}) = (x^r + y^r) = T(x) + T(y)$.

- Ahora, teniendo en cuenta que $\lambda \odot x = \lambda^{1/r} \cdot x$ obtenemos $T(\lambda \oplus x) = T(\lambda^{1/r} \cdot x) = \lambda \cdot x^r = \lambda \cdot T(x)$.

En siguiente lugar, probemos que $\|T(x)\|_{E^r} = \|x\|_{E^{(1/r)}}$ para todo $x \in E^{(1/r)}$. Siguiendo las definiciones de T, $\|\cdot\|_{E^{(1/r)}}$ y $\|\cdot\|_{E^r}$ (y usando que E es normal) es claro que $\|T(x)\|_{E^r} = \|x^r\|_{E^r} = \||x|\|_E^r = \|x\|_E^r = \|x\|_{E^{(1/r)}}$.

Por último veamos que T es sobreyectiva. De hecho, si $y \in E^r$ entonces por definición $x = y^{1/r}$ es un elemento en E. Luego $x \in E^{(1/r)}$ y $T(x) = (y^{1/r})^r = y$ de forma que T resulta sobreyectiva.

La demostración de ii) es análoga. El único detalle que hay que tener en cuenta, es que para considerar la r-concavificación de E es necesario que E sea r-convexo. Pero como $1 \leq r < \infty$, esto no es otra cosa que la hipótesis de que E es $\text{máx}(1,r)$-convexo. Además, como suponemos $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$, la norma en $E_{(r)}$ está dada por $\|\cdot\|_{E_{(r)}} = \|\cdot\|_E^r$. $\square$

Como mencionamos, la observación nos permite probar que E^r es un *e.v.* y que $\|\cdot\|_{E^r}$ define una norma. Para lo primero, consideremos $x, y \in E^r$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo visto $T(x^{1/r}) = x$ y $T(y^{1/r}) = y$, que junto con el hecho de que T es lineal y que su imagen es E^r nos muestra que $x + y = T(x^{1/r}) + T(y^{1/r}) = T(x^{1/r} + y^{1/r}) \in E^r$. De la misma manera se prueba que $\lambda \cdot x \in E^r$. Ahora veamos que $\|\cdot\|_{E^r}$ es una norma:

- Supongamos que $\|x\|_{E^r} = 0$, es decir $\|T(x^{1/r})\|_{E^r} = 0$. Luego, por la observación, se tendrá $\|x^{1/r}\|_{E^{(1/r)}} = 0$ (o $\|x^{1/r}\|_{E_{(r)}} = 0$ según sea $0 < r < 1$ o $1 \leq r < \infty$) y en consecuencia $x^{1/r} = 0$. Esto implica trivialmente que $x = 0$.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ (y supongamos $0 < r < 1$) entonces $\|\lambda \cdot x\|_{E^r} = \|T(\lambda \cdot x^{1/r})\|_{E^r} = \|\lambda \cdot x^{1/r}\|_{E^{(1/r)}} = \lambda.\|x^{1/r}\|_{E^{(1/r)}} = \lambda.\|x\|_{E^r}$ (el caso $1 \leq r < \infty$ es totalmente análogo).

- Para la desigualdad triangular se utilizan los mismos argumentos.

Hasta aquí tenemos que E^r es un espacio vectorial normado y queremos mostrar que es un espacio de Banach de sucesiones. El orden $\leq$ en E^r es el usual (se define coordenada a coordenada) al igual que el orden $\ll$ en las convexificaciones y concavificaciones de E. Es fácil ver que las aplicaciones definidas en la **Observación 1.4.2** respetan el orden; esto se debe a que $x \leq y$ si y solo si $x^s \leq y^s$ para todo $0 < s < \infty$. Luego, dado que $E^{(1/r)}$ y $E_{(r)}$ son espacios de Riesz se deduce que E^r lo es. Más aún, como $\|\cdot\|_{E^{(1/r)}}$ y $\|\cdot\|_{E_{(r)}}$ son lattice norms entonces $\|\cdot\|_{E^r}$ lo es. Probemos esto último (de manera análoga se ve que E^r es espacio de Riesz). Supongamos $0 < r < 1$ (el caso $1 \leq r < \infty$ es idéntico). Si $x, y \in E^r$ son tales que $x \leq y$ entonces $x^{1/r} \leq y^{1/r}$ en E, o lo que es lo mismo, $x^{1/r} \ll y^{1/r}$ en $E^{(1/r)}$. Luego se tiene

$\|x^{1/r}\|_{E^{(1/r)}} \leq \|y^{1/r}\|_{E^{(1/r)}}$ y en consecuencia $\|x\|_{E^r} = \|T(x^{1/r})\|_{E^r} \leq \|T(y^{1/r})\|_{E^r} = \|y\|_{E^r}$ como se quería probar.

La completitud de E^r también se deduce de la completitud de las convexificaciones y concavificaciones de E. Por otro lado, nos quedaría ver que E^r es normal, pero si $|y| \leq |x|$ con $x \in E^r$ entonces y pertenece a E^r ya que $|y|^{1/r} \leq |x|^{1/r}$, $|x|^{1/r} \in E$ y E es normal. En definitiva, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4.3. *Sea $0 < r < \infty$ y sea E un espacio de sucesiones* $\text{máx}(1, r)$*-convexo con constante de convexidad $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$. Entonces E^r es un espacio de sucesiones $\frac{1}{\text{mín}(1,r)}$-convexo y las aplicaciones definidas en (1.37) y (1.38) son isomorfismos isométricos entre Banach lattices.*

Demostración. La mayor parte del trabajo ya fue realizado. Ya observamos que E^r es un espacio de sucesiones y de esta manera, las aplicaciones definidas en la **Observación 1.4.2** son isomorfismos isométricos entre espacios de Banach. Como además respetan las operaciones $\vee$ y $\wedge$ (puesto que respetan el orden), resultan isomorfismos entre lattices (ver la **Definición A.1.13** de morfismo entre lattices). En cuanto a que E^r resulta $\frac{1}{\text{mín}(1,r)}$-convexo, en el caso en que $1 \leq r < \infty$ es trivial ya que todo espacio es 1-convexo. Cuando $0 < r < 1$, debemos ver que E^r es $\frac{1}{r}$-convexo, lo cual se deduce del hecho que E^r es isomorfo a $E^{(1/r)}$ y este último es $\frac{1}{r}$-convexo (ver la **Observación A.5.3**). La misma observación nos muestra que la constante de $\frac{1}{r}$-convexidad es igual a uno. □

Ejemplos 1.4.4. *i*)En el caso de los espacios ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ es sencillo calcular sus potencias. Sabemos que ℓ_p es p-convexo con constante igual a uno (ver **Ejemplos A.4.3**). Luego para $0 < r \leq p$ tiene sentido considerar $\ell_p^r = \{x \in \omega \ : \ |x|^{1/r} \in \ell_p\}$ con la norma de cada elemento dada por $\|x\|_{\ell_p^r} = \||x|^{1/r}\|_p^r$. Es claro entonces que $\ell_p^r = \ell_{p/r}$ isométricamente.

ii) Cuando $p = \infty$, tenemos $\ell_\infty^r = \{x \in \omega \ : \ |x|^{1/r} \in \ell_\infty\} = \ell_\infty$ para todo $0 < r < \infty$ y la igualdad es isométrica como en *i*). De manera análoga $c_0^r = c_0$ para todo r.

Antes de seguir con algunas propiedades relacionadas con las potencias de espacios de sucesiones, veremos unos resultados sobre convexidad y concavidad de un espacio de sucesiones y su dual de Köthe.

Propiedad 1.4.5. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y E un espacio de sucesiones p-convexo. Entonces $E^\times$ es q-cóncavo y se verifica $M^{(p)}(E) = M_{(q)}(E^\times)$. Análogamente, si E es q-cóncavo entonces $E^\times$ es p-convexo con $M^{(p)}(E^\times) = M_{(q)}(E)$.

Demostración. Veremos el caso $p < \infty$. De forma análoga se deduce el resultado para $p = \infty$. La demostración se basa en las siguientes igualdades, en donde notamos x_k a los elementos de E e y_k a los elementos de $E^\times$. Dependiendo de la igualdad, pensaremos a los elementos de $E^\times$ como elementos en E' (notando en tal caso $y_k(x_k)$) vía el isomorfismo isométrico definido en

(1.7). Análogamente, cuando notemos $x_k(y_k)$ estaremos pensando a los elementos de $E \subseteq E^{\times\times}$ como elementos en $(E^\times)'$.

$$\begin{array}{ll}
i) & \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p\right)^{1/p} = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^n x_k(y_k)\right| : \quad \left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|_{E^\times}^q\right)^{1/q} \leq 1\right\} \\
ii) & \left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\right\|_E = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^n x_k(y_k)\right| : \quad \left\|\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{E^\times} \leq 1\right\} \\
iii) & \left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|_{E^\times}^q\right)^{1/q} = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^n y_k(x_k)\right| : \quad \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p\right)^{1/p} \leq 1\right\} \\
iv) & \left\|\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{E^\times} = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^n y_k(x_k)\right| : \quad \left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\right\|_E \leq 1\right\}
\end{array}$$

Veamos rápidamente como se deducen estas igualdades. La primer igualdad es consecuencia de las siguientes inclusiones isométricas:

$$\ell_p^n(E) \hookrightarrow \ell_p^n(E^{\times\times}) \hookrightarrow \ell_p^n((E^\times)') = (\ell_q^n(E^\times))'.$$

Aquí $\ell_p^n(E)$ denota el espacio de las n-uplas $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ con $x_k \in E$ y con la norma dada por $\|\overline{x}\|_{\ell_p^n(E)} = \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p\right)^{1/p}$. Las inclusiones se deducen fácilmente de las ya conocidas $E \hookrightarrow E^{\times\times} \hookrightarrow (E^\times)'$, mientras que la última igualdad es sencilla de verificar (ver [16](p.47)). Luego si $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \ell_p^n(E)$, tenemos $\varphi_{\overline{x}} \in (\ell_p^n(E^\times))'$ dado por $\varphi_{\overline{x}}(\overline{y}) = x_1(y_1) + ... + x_n(y_n)$ tal que $\|\overline{x}\|_{\ell_p^n(E)} = \|\varphi_{\overline{x}}\|_{(\ell_q^n(E^\times))'}$. Esto es justamente que $\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p\right)^{1/p} = \sup\left\{|\sum_{k=1}^n x_k(y_k)| : \quad \|\overline{y}\|_{\ell_q^n(E^\times)} \leq 1\right\}$ según las definiciones de $\varphi_{\overline{x}}$ y $\|\cdot\|_{\ell_p^n(E)}$, y de esta manera queda probado $i)$.

Para probar $ii)$ haremos uso de las siguientes inclusiones isométricas:

$$E(\ell_p^n) \hookrightarrow E^{\times\times}(\ell_p^n) \hookrightarrow (E^\times)'(\ell_p^n) = (E^\times(\ell_q^n))'$$

en donde $E(\ell_p^n)$ es el espacio de las n-uplas $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ de elementos $x_k \in E$, con la norma $\|\overline{x}\|_{E(\ell_p^n)} = \left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\right\|_E$. La última igualdad se puede ver en [16](p.47). Como consecuencia de estas inclusiones, si $\overline{x} \in E(\ell_p^n)$ tenemos $\varphi_{\overline{x}} \in (E^\times(\ell_q^n))'$ (definido igual que antes) tal que $\|\overline{x}\|_{E(\ell_p^n)} = \|\varphi_{\overline{x}}\|_{(E^\times(\ell_q^n))'}$ y esta es la igualdad que queríamos probar.

Las igualdades $iii)$ y $iv)$ se prueban de manera análoga. Para $iii)$ tenemos la inclusión $\ell_q^n(E^\times) \hookrightarrow \ell_q^n(E') = (\ell_p^n(E))'$, mientras que para $iv)$ se tiene que $E^\times(\ell_q^n) \hookrightarrow E'(\ell_q^n) = (E(\ell_p^n))'$.

Ahora sí, supongamos que E es p-convexo y veamos que $E^\times$ es q-cóncavo. Consideremos $y_1, ..., y_n \in E^\times$ y probemos que $\left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|_{E^\times}^q\right)^{1/q} \leq M^{(p)}(E). \left\|\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{E^\times}$. Sean

$x_1, ..., x_n \in E$, luego por ii) y dado que E es p-convexo se tiene,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k)\right| &\leq \left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\right\|_E . \left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{E^\times} \\ &\leq M^{(p)}(E). \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_E^p\right)^{1/p} . \left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{E^\times} .\end{aligned}$$

Notando que $x_k(y_k) = y_k(x_k)$ (ver el isomorfismo definido en (1.7)) y tomando supremo sobre todos los $x_1, ..., x_n$ tales que $\|(x_1, ..., x_n)\|_{\ell_p^n(E)} \leq 1$ obtenemos, debido a iii), que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|_{E^\times}^q\right)^{1/q} \leq M^{(p)}(E). \left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{E^\times} ,$$

y esto vale para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de elementos $y_1, ..., y_n \in E^\times$. Luego $E^\times$ es q-cóncavo con $M_{(q)}(E^\times) \leq M^{(p)}(E)$. Para probar la igualdad entre las constantes, consideremos $x_1, ..., x_n \in E$ e $y_1, ..., y_n \in E^\times$. Por i) tenemos

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k)\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_E^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|_{E^\times}^q\right)^{1/q}$$

y como $E^\times$ es q-cóncavo entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k)\right| \leq M_{(q)}(E^\times). \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_E^p\right)^{1/p} . \left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{E^\times} .$$

Luego por ii), si tomamos supremo sobre todos los $y_1, ..., y_n$ tales que $\|(y_1, ..., y_n)\|_{E^\times(\ell_q^n)} \leq 1$, nos queda

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\right\|_E \leq M_{(q)}(E^\times). \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_E^p\right)^{1/p}$$

para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in E$, lo que nos muestra que $M^{(p)}(E) \leq M_{(q)}(E^\times)$ y en consecuencia prueba la igualdad entre las constantes.

De manera análoga se prueba que si E es q-cóncavo entonces $E^\times$ es p-convexo con $M^{(p)}(E^\times) = M_{(q)}(E)$. □

A continuación, veremos que la propiedad de p-convexidad (resp. q-concavidad) es una propiedad creciente en p (resp. decreciente en q).

Propiedad 1.4.6. Sea E un espacio de sucesiones.

a) Supongamos que E es p-convexo y sea $1 \leq r < p \leq \infty$. Entonces E es r-convexo con $M^{(r)}(E) \leq M^{(p)}(E)$.

b) Supongamos que E es q-cóncavo y sea $1 \leq q < r \leq \infty$. Entonces E es r-cóncavo con $M_{(r)}(E) \leq M_{(q)}(E)$.

Demostración. Probemos a). De la definición de $M^{(p)}(E)$ se deduce fácilmente que,

$$\begin{aligned} M^{(p)}(E) &= \sup\left\{ \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_E : \quad x_1, ..., x_n \in E,\ (\sum_{k\leq n} \|x_k\|_E^p)^{1/p} = 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} a_k |y_k|^p \right)^{1/p} \right\|_E : \quad y_1, ..., y_n \in E,\ \|y_k\|_E = 1,\ \sum_{k\leq n} a_k = 1 \right\} \end{aligned}$$

donde el supremo se toma sobre todas las posibles elecciones de finitos elementos $y_1, ..., y_n$ en B_E y de finitos escalares positivos $a_1, ..., a_n$ verificando $\sum_{k\leq n} a_k = 1$, es decir, n no está fijo. En el caso en que E no fuese p-convexo, sería $M^{(p)}(E) = \infty$

Consideremos entonces $y_k \in B_E$ y $a_k \geq 0$ $(1 \leq k \leq n)$ tales que $\sum_{k\leq n} a_k = 1$. Vamos a usar las desigualdades c) y d) de la **Proposición A.3.6**. Sean $1 \leq q < r < p < \infty$ y $0 < \theta < 1$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$ (el caso $p = \infty$ se razona de la misma manera, simplemente cambia la notación). Luego la mencionada desigualdad d), nos dice que

$$\left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^q \right)^{\theta/q} \cdot \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^p \right)^{(1-\theta)/p}$$

y en consecuencia, dado que E es normal,

$$\left\| \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^r \right)^{1/r} \right\|_E \leq \left\| \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^q \right)^{\theta/q} \cdot \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^p \right)^{(1-\theta)/p} \right\|_E .$$

Ahora bien, esta desigualdad junto con la desigualdad c) nos muestra que

$$\left\| \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^r \right)^{1/r} \right\|_E \leq \left\| \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^q \right)^{1/q} \right\|_E^{\theta} \cdot \left\| \left(\sum_{k\leq n} a_k |y_k|^p \right)^{1/p} \right\|_E^{1-\theta} ,$$

de manera que tomando supremo sobre todas las posibles elecciones de elementos $y_1, ..., y_n \in E$ y de escalares positivos $a_1, ..., a_n$ que verifiquen $\sum_{k\leq n} a_k = 1$, obtenemos $M^{(r)}(E) \leq (M^{(q)}(E))^{\theta}.(M^{(p)}(E))^{1-\theta}$. Como caso particular de esta desigualdad obtenemos el resultado que queremos probar. De hecho, si tomamos $q = 1$ y $\theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) . \frac{p}{p-1}$ (de forma que $\frac{1}{r} = \theta + \frac{1-\theta}{p}$) entonces nos queda $M^{(r)}(E) \leq (M^{(1)}(E))^{\theta}.(M^{(p)}(E))^{1-\theta}$. Pero $M^{(1)}(E) = 1 \leq M^{(p)}(E)$ y en consecuencia $M^{(r)}(E) \leq (M^{(p)}(E))^{\theta}.(M^{(p)}(E))^{1-\theta} = M^{(p)}(E)$. Esto prueba que si E es p-convexo entonces es r-convexo con la desigualdad deseada entre las constantes.

Mediante argumentos de dualidad probaremos b). Si suponemos que E es q-cóncavo, la **Propiedad 1.4.5** nos dice que $E^{\times}$ es q'-convexo, donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Dado que $1 \leq q < r \leq \infty$ es claro que $1 \leq r' < q' \leq \infty$ (naturalmente, r' verificando $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$). Luego por a), se deduce que $E^\times$ es r'-convexo con $M^{(r')}(E^\times) \leq M^{(q')}(E^\times)$. Aplicando nuevamente la **Propiedad 1.4.5** obtenemos que E resulta r-cóncavo y se verifica la desigualdad $M_{(r)}(E) \leq M_{(q)}(E)$ entre las constantes. $\square$

A continuación veremos algunas propiedades relacionadas con las potencias de espacios de sucesiones.

Observación 1.4.7. *Sean $0 < r < \infty$ y E un espacio de sucesiones* $\text{máx}(1, r)$*-convexo con constante de convexidad $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$. Tiene sentido entonces considerar E^r, que resulta a su vez un espacio de sucesiones $\frac{1}{\text{mín}(1,r)}$-convexo, con constante de $\frac{1}{\text{mín}(1,r)}$-convexidad igual a uno (ver **Teorema 1.4.3**). Para poder considerar ahora la potencia $(E^r)^p$ debemos pedir que E^r sea* $\text{máx}(1, p)$*-convexo. Si $0 < p \leq 1$ esto se verifica trivialmente, de otra manera E^r debe ser p-convexo. En este sentido, basta pedir que sea $1 \leq p \leq \frac{1}{\text{mín}(1,r)}$ (pues E^r es $\frac{1}{\text{mín}(1,r)}$-convexo y por la **Propiedad 1.4.6**). En resumen, si pedimos $0 < p \leq \frac{1}{\text{mín}(1,r)}$ entonces tiene sentido considerar el espacio de sucesiones $(E^r)^p$. Además, siguiendo las definiciones obtenemos,*

$$(E^r)^p = \left\{ x \in \omega \ : \ |x|^{1/p} \in E^r \right\} = \left\{ x \in \omega \ : \ |x|^{1/pr} \in E \right\} = E^{rp}$$

y para cada $x \in (E^r)^p$ se tiene $\|x\|_{(E^r)^p} = \||x|^{1/p}\|_{E^r}^p = \||x|^{1/pr}\|_E^{pr}$. Esto nos muestra que $(E^r)^p = E^{rp}$ (igualdad isométrica).

Observación 1.4.8. *Sea $0 < r < \infty$ y sean E y F dos espacios de sucesiones* $\text{máx}(1, r)$*-convexos con constante de* $\text{máx}(1, r)$*-convexidad igual a uno. Luego $E \hookrightarrow F$ implica $E^r \hookrightarrow F^r$ con $c_{E^r}^{F^r} = \left(c_E^F\right)^r$.*

Demostración. Dado $x \in E^r$ tenemos $|x|^{1/r} \in E$. Pero como $E \subseteq F$ entonces $|x|^{1/r} \in F$, o equivalentemente, $x \in F^r$. Además $\||x|^{1/r}\|_F \leq c_E^F.\||x|^{1/r}\|_E$ y en consecuencia $\||x|^{1/r}\|_F^r \leq (c_E^F)^r.\||x|^{1/r}\|_E^r$, lo cual nos muestra que $c_{E^r}^{F^r} \leq \left(c_E^F\right)^r$. Como esto vale para cualquier $0 < r < \infty$, razonando con los espacios E^r y F^r y con $1/r$ (notando que $(E^r)^{1/r} = E$ y $(F^r)^{1/r}$ isométricamente por la **Observación 1.4.7**) se obtiene $c_E^F \leq \left(c_{E^r}^{F^r}\right)^{1/r}$. Luego queda probada la igualdad. $\square$

Propiedades 1.4.9. Sea E un espacio de sucesiones $\text{máx}(1, r)$-convexo con constante de convexidad $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$.

a) Si E es simétrico entonces E^r lo es.

b) Si E es maximal entonces E^r lo es.

c) Si E es minimal entonces E^r lo es.

Demostración. Veamos a). Consideremos $\sigma \in \Pi$ y $x \in E^r$. Queremos ver que x_σ pertenece a E^r y que $\|x_\sigma\|_{E^r} = \|x\|_{E^r}$. Por hipótesis $|x|^{1/r} \in E$ y dado que E es simétrico se tiene $(|x|^{1/r})_\sigma \in E$ con norma $\|(|x|^{1/r})_\sigma\|_E = \||x|^{1/r}\|_E$. Notando que $(|x|^{1/r})_\sigma = |x_\sigma|^{1/r}$ concluimos que $x_\sigma \in E^r$ y que $\|x_\sigma\|_{E^r} = \|x\|_{E^r}$. Luego E^r es simétrico.

Ahora probemos b). Queremos ver que $E^r = (E^r)^{max}$ isométricamente. Para eso consideremos $x \in \omega$ verificando $\|P_n x\|_{E^r} \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (K una constante), y veamos que x pertenece a E^r con norma $\|x\|_{E^r} = \sup_n \|P_n x\|_{E^r}$. Notando que $|P_n x|^{1/r} = P_n(|x|^{1/r})$ obtenemos $\|P_n(|x|^{1/r})\|_E^r = \||P_n x|^{1/r}\|_E^r = \|P_n x\|_{E^r} \leq K$ y en consecuencia $\|P_n(|x|^{1/r})\|_E \leq K^{1/r}$. Luego, como E es maximal, resulta $|x|^{1/r} \in E$ con $\||x|^{1/r}\|_E = \sup_n \|P_n(|x|^{1/r})\|_E$. Es decir que x pertenece a E^r y que $\|x\|_{E^r} = \sup_n \|P_n x\|_{E^r}$ como se quería ver.

Para finalizar, veamos c). Probemos que $(E^r)^{min} = E$. Si $x \in E^r$ entonces $|x|^{1/r} \in E$ y dado que E es minimal tiene una representación de la forma $|x|^{1/r} = zy = |z||y|$ con $z \in c_0$ e $y \in E$. Pero entonces $|x| = |z|^r |y|^r$ donde claramente se tiene $|z|^r \in c_0$ e $|y|^r \in E^r$. Esto nos muestra que $|x| \in (E^r)^{min}$ y en consecuencia $(E^r)^{min} = E$ (la igualdad es isométrica por (1.14)). Luego queda probado c). □

1.4.2. Una definición más general

Hasta el momento, todos los resultados probados en lo que se refiere a la potencia E^r de un espacio de sucesiones, fueron hechos para un espacio E que verifique ser $\text{máx}(1,r)$-convexo y con constante $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$. Al principio de la sección, mencionamos que no es estrictamente necesario suponer que la constante de $\text{máx}(1,r)$-convexidad sea igual a uno. La idea entonces, será ver de qué manera generalizar lo hecho hasta aquí, para poder trabajar con espacios de sucesiones E que sean $\text{máx}(1,r)$-convexos, pero sin pedir condiciones sobre su constante de convexidad.

En la **Observación 1.4.2** definimos un isomorfismo isométrico entre E^r y $E_{(r)}$ cuando $1 \leq r < \infty$, y vimos que para eso era necesario pedir que E sea r-convexo (para poder r-concavificar) y que $M^{(r)}(E) = 1$. Esta última condición tenía que ver con el hecho de considerar la norma $\|\cdot\|_{E_{(r)}} = \|\cdot\|_E^r$ en $E_{(r)}$. En el **Apéndice A.5.2** se puede ver la definición de una norma en $E_{(r)}$ dada por,

$$\|x\|_{E_{(r)}} = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^r \ : \ |x| = (|x_1|^r + ... + |x_n|^r)^{1/r} \,,\, x_i \in E_{(r)} \,\text{para}\, 1 \leq i \leq n\right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones finitas de $|x| \in E_{(r)}$, de la forma $|x| = (|x_1|^r + ... + |x_n|^r)^{1/r}$. La desigualdad (A.9) nos muestra que cuando $M^{(r)}(E) = 1$, esta norma coincide con la norma $\|\cdot\|_{E_{(r)}} = \|\cdot\|_E^r$ que veníamos considerando. Generalizando entonces la idea de la definición de las potencias de un espacio de sucesiones, si E es $\text{máx}(1,r)$-convexo (y ya no pedimos que sea $M^{(r)}(E) = 1$), definimos como antes al espacio $E^r = \{x \in \omega \ : \ |x|^{1/r} \in E\}$, pero ahora con la norma de un elemento x dada por:

- $\|x\|_{E^r} = \||x|^{1/r}\|_E^r$ si $0 < r < 1$.
- $\|x\|_{E^r} = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^r \ : \ |x|^{1/r} = (|x_1|^r + ... + |x_n|^r)^{1/r}, \ x_i \in E\right\}$ si $1 \le r < \infty$.

Notar que,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{E^r} &= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^r \ : \ |x|^{1/r} = (|x_1|^r + ... + |x_n|^r)^{1/r}, \ x_i \in E\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^n \|(|x_i|^r)^{1/r}\|_E^r \ : \ |x|^{1/r} = (|x_1|^r + ... + |x_n|^r)^{1/r}, \ x_i \in E\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^n \||y_i|^{1/r}\|_E^r \ : \ |x|^{1/r} = (|y_1| + ... + |y_n|)^{1/r}, \ y_i \in E^r\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^n \||y_i|^{1/r}\|_E^r \ : \ |x| = |y_1| + ... + |y_n|, \ y_i \in E^r\right\}.
\end{aligned}$$

Como mencionamos, esta definición generaliza la anterior en el sentido de que cuando $M^{(r)}(E) = 1$, la norma es la misma de antes. En particular, cuando $r = 1$ seguimos teniendo $E^1 = E$ isométricamente.

El siguiente resultado generaliza el **Teorema 1.4.3**.

Teorema 1.4.10. *Sea $0 < r < \infty$ y sea E un espacio de sucesiones* $\text{máx}(1, r)$*-convexo. Entonces E^r es un espacio de sucesiones $\frac{1}{\text{mín}(1,r)}$-convexo y las aplicaciones definidas en (1.37) y (1.38) son isomorfismos isométricos entre Banach lattices.*

Demostración. La demostración de este resultado es análoga a la del **Teorema 1.4.3**. □

Observación 1.4.11. *Sean $1 \le r < \infty$ y E un espacio de sucesiones r-convexo. Para cada $x \in E^r$ se verifican las siguientes desigualdades:*

$$\frac{\||x|^{1/r}\|_E^r}{\left(M^{(r)}(E)\right)^r} \le \|x\|_{E^r} \le \||x|^{1/r}\|_E^r. \tag{1.39}$$

Demostración. Estas desigualdades son totalmente análogas a las vistas en (A.9). La demostración utiliza los mismos argumentos que se usaron para probar estas últimas. □

Observación 1.4.12. *Para finalizar con este tema, debemos mencionar qué sucede en el caso general, con algunas de las propiedades probadas anteriormente para potencias de espacios. Las **Propiedades 1.4.9** siguen valiendo, aunque no se suponga $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$. Para el caso $0 < r < 1$ la demostración es, evidentemente, la misma (pues en ese caso la definición de $\|\cdot\|_{E^r}$ no cambia). Cuando $1 \le r < \infty$ hay que modificar ligeramente las demostraciones y tener en cuenta que hay que considerar el ínfimo sobre ciertas representaciones para calcular la norma de un elemento. De todas maneras, los argumentos siguen siendo básicamente los mismos.*

En lo que respecta a la ***Observación 1.4.7****, si consideramos un espacio de sucesiones* E *que sea* $\text{máx}(1,r)$*-convexo y* $0 < p \leq \frac{1}{\text{mín}(1,r)}$*, entonces es claro que* $(E^r)^p = E^{rp}$ *como conjuntos, aunque la igualdad ya no es necesariamente isométrica. De todas formas, veamos que las normas de cada uno de estos espacios resultan equivalentes. Separamos la demostración en dos casos.*

- *En primer lugar suponemos* $0 < r < 1$ *y en consecuencia* $0 < p \leq \frac{1}{r}$*. Aquí puede ser* $0 < p < 1$ *o* $1 \leq p \leq \frac{1}{r}$*. En caso de que ocurra lo primero, tendremos* $(E^r)^p = E^{rp}$ *isométricamente como en la* ***Observación 1.4.7****, ya que las normas se definen igual que antes si las potencias* r, p *son menores que uno. Ahora bien, si estamos en el caso* $0 < r < 1$ *y* $1 \leq p \leq \frac{1}{r}$*, entonces dado un* $x \in (E^r)^p$ *las desigualdades (1.39) nos muestran que* $\frac{\||x|^{1/p}\|_{E^r}^p}{\left(M^{(p)}(E^r)\right)^p} \leq \|x\|_{(E^r)^p} \leq \||x|^{1/p}\|_{E^r}^p$ *(aquí juega un papel fundamental el hecho de que sea* $1 \leq p \leq \frac{1}{r}$ *y que* E^r *sea* $1/r$*-convexo). Como* $0 < r < 1$*, y teniendo en cuenta la definición de* $\|\cdot\|_{E^r}$*, obtenemos las desigualdades* $\frac{\||x|^{1/pr}\|_E^{rp}}{\left(M^{(p)}(E^r)\right)^p} \leq \|x\|_{(E^r)^p} \leq \||x|^{1/pr}\|_E^{rp}$*. Por último, dado que* $rp \leq 1$*, es claro que* $\|x\|_{E^{rp}} = \||x|^{1/rp}\|_E^{rp}$ *y en consecuencia probamos que,*

$$\frac{\|x\|_{E^{rp}}}{\left(M^{(p)}(E^r)\right)^p} \leq \|x\|_{(E^r)^p} \leq \|x\|_{E^{rp}},$$

  lo cual nos dice que $(E^r)^p = E^{rp}$ *con normas equivalentes.*

- *En segundo lugar, vamos a suponer* $1 \leq r < \infty$*. Esto implica naturalmente que* $0 < p \leq \frac{1}{\text{mín}(1,r)} = 1$*. Luego, dado un* $x \in (E^r)^p$ *se tendrá* $\|x\|_{(E^r)^p} = \||x|^{1/p}\|_{E^r}^p$ *y nuevamente por (1.39),* $\frac{\||x|^{1/pr}\|_E^r}{\left(M^{(r)}(E)\right)^r} \leq \||x|^{1/p}\|_{E^r} \leq \||x|^{1/pr}\|_E^r$*. Juntando ambas cosas y tomando potencia p-ésima en estas desigualdades, obtenemos*

$$\frac{\||x|^{1/pr}\|_E^{rp}}{\left(M^{(r)}(E)\right)^{rp}} \leq \|x\|_{(E^r)^p} \leq \||x|^{1/pr}\|_E^{rp}. \tag{1.40}$$

  Cuando $rp \leq 1$ *esto nos dice que*

$$\frac{\|x\|_{E^{rp}}}{\left(M^{(r)}(E)\right)^{rp}} \leq \|x\|_{(E^r)^p} \leq \|x\|_{E^{rp}}$$

  y en consecuencia las normas son equivalentes. Faltaría ver qué sucede cuando $rp > 1$*. En tal caso, haciendo uso (por última vez!) de las desigualdades (1.39), tenemos* $\frac{\||x|^{1/rp}\|_E^{rp}}{\left(M^{(rp)}(E)\right)^{rp}} \leq \|x\|_{E^{rp}} \leq \||x|^{1/rp}\|_E^{rp}$*, que junto con (1.40) prueban que*

$$\frac{\|x\|_{E^{rp}}}{\left(M^{(r)}(E)\right)^{rp}} \leq \|x\|_{(E^r)^p} \leq \Big(M^{(rp)}(E)\Big)^{rp} \|x\|_{E^{rp}}.$$

Con esto terminamos de probar que si E *es un espacio de sucesiones* $\text{máx}(1,r)$*-convexo y* $0 < p \leq \frac{1}{\text{mín}(1,r)}$*, entonces* $(E^r)^p = E^{rp}$ *con normas equivalentes.*

Por último, en lo que concierne a la ***Observación 1.4.8****, es claro que si E y F son dos espacios de sucesiones* $\max(1,r)$*-convexos tales que $E \hookrightarrow F$, entonces $E^r \hookrightarrow F^r$. Por supuesto, no podemos asegurar como antes que las normas de las inclusiones verifiquen la igualdad $c_{E^r}^{F^r} = \left(c_E^F\right)^r$. En este caso, tendremos lo siguiente:*

- *si $0 < r < 1$ entonces $c_{E^r}^{F^r} \leq \left(c_E^F\right)^r$,*
- *si $1 \leq r < \infty$ entonces $c_{E^r}^{F^r} \leq \left(c_E^F . M^{(r)}(E)\right)^r$.*

Ambas desigualdades son consecuencia de (1.39). Se deduce de estas últimas y de las consideraciones hechas para las potencias $(E^r)^p$, que cuando $0 < r < 1$ se tiene

$$\frac{1}{M^{(1/r)}(F^r).M^{(1/r)}(E^r)} . \left(c_E^F\right)^r \leq c_{E^r}^{F^r} \leq \left(c_E^F\right)^r ,$$

mientras que si $1 \leq r < \infty$ entonces

$$\frac{1}{(M^{(r)}(F))^r} . \left(c_E^F\right)^r \leq c_{E^r}^{F^r} \leq (M^{(r)}(E))^r . \left(c_E^F\right)^r .$$

1.4.3. Algunos resultados útiles

En esta parte probaremos algunas propiedades que serán de utilidad más adelante. Comenzamos con una observación sencilla.

Observación 1.4.13. *Si E es un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico, entonces $E \hookrightarrow \ell_2$ con $c_E^{\ell_2} \leq \frac{M_{(2)}(E)}{\|e_1\|_E}$. Por otro lado, si E es 2-convexo, simétrico y maximal, entonces $\ell_2 \hookrightarrow E$ con $c_{\ell_2}^E \leq M^{(2)}(E).\|e_1\|_E$.*

Demostración. Supongamos que E es simétrico y 2-cóncavo. Consideremos un $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ perteneciente a E y veamos que pertenece a ℓ_2. Fijemos un $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $y_i = x_i \cdot e_i \in E$ para cada $i = 1, ..., n$. Como E es 2-cóncavo, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|_E^2\right)^{1/2} \leq M_{(2)}(E). \left\| \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{1/2} \right\|,$$

y notando que $\left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|_E^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|.\|e_i\|_E^2\right)^{1/2} = \|e_1\|_E. \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ (aquí usamos que E es simétrico) y que $\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{1/2} = (x_1, ..., x_n, 0, ...)$, obtenemos $\|e_1\|_E. \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \leq M_{(2)}(E).\|(x_1, ..., x_n, 0, ...)\|_E \leq M_{(2)}(E).\|x\|_E$. Como esto lo probamos para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que x pertenece a ℓ_2 con $\|e_1\|_E.\|x\|_2 \leq M_{(2)}(E).\|x\|_E$, de donde se deduce además que $c_E^{\ell_2} \leq \frac{M_{(2)}(E)}{\|e_1\|_E}$.

El caso en que E es 2-convexo es totalmente análogo, y la hipótesis de que E sea maximal es para poder afirmar que la desigualdad $\|(x_1, ..., x_n, 0, ...)\|_E \leq M^{(2)}(E).\|e_1\|_E.\|x\|_2$ implica que x pertenece a E. $\square$

Propiedad 1.4.14. Sea E un espacio de sucesiones 2-cóncavo. Entonces E resulta minimal y maximal.

Demostración. Primero veamos que E es minimal, lo cual es equivalente a probar que $E = \overline{[e_n]_n}^{\|\cdot\|_E}$ (según el **Teorema 1.3.11**). Supongamos que no es minimal y lleguemos a un absurdo. En tal caso podemos considerar un $x = (x_k)_k$ perteneciente a E, tal que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot e_k$ no converge en E. Luego existen $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < ....$ y un $\varepsilon > 0$, tales que $\| \sum_{k=p_j}^{q_j} x_k \cdot e_k\|_E > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Llamemos $z_j = \sum_{k=p_j}^{q_j} x_k \cdot e_k \in E$ para cada j. Dado que E es 2-cóncavo se tiene:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|z_j\|_E^2 \right)^{1/2} \leq M_{(2)}(E). \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_E \tag{1.41}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, notando que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2} = (0, ..., 0, |x_{p_1}|, ..., |x_{q_1}|, 0, ..., |x_{p_2}|, ..., |x_{q_2}|, ...)$$

y dado que E es normal, se tendrá $\left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq \|x\|_E$ para todo n. Por otro lado, como $\|z_j\|_E > \varepsilon$ entonces $\|z_j\|_E^2 > \varepsilon^2$ para todo j, de manera que $\left(\sum_{j=1}^{n} \|z_j\|_E^2 \right)^{1/2} > n^{1/2}.\varepsilon$. Volviendo a (1.41), ahora tenemos

$$n^{1/2}\varepsilon < \left(\sum_{j=1}^{n} \|z_j\|_E^2 \right)^{1/2} \leq M_{(2)}(E). \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq M_{(2)}(E).\|x\|_E$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es absurdo ya que $n^{1/2}\varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ mientras que $M_{(2)}(E).\|x\|_E$ se mantiene constante. Esto muestra que E es minimal.

De forma similar veremos que E es maximal. Para eso basta ver que si $x \in \omega$ es tal que $\|P_n x\|_E \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in E$ con $\|x\|_E = \sup_n \|P_n x\|_E$ (ver **Lema 1.3.15**). En primer lugar veamos que $x \in E$. Como antes, supongamos que no. Luego $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot e_k$ no converge en E, ya que de hacerlo debería converger a x y entonces sería $x \in E$. Estamos entonces en las mismas condiciones que cuando probamos minimalidad, de manera que utilizando la misma notación (y usando la 2-concavidad igual que antes) tenemos $n^{1/2}\varepsilon \leq M_{(2)}(E). \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_E$. Por otro lado, como E es normal y dado que $(\|P_n x\|_E)_n$ es acotada, entonces $\left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq \|P_{q_n} x\|_E \leq K$. Juntando ambas desigualdades obtenemos $n^{1/2}\varepsilon \leq M_{(2)}(E).K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Este absurdo proviene de suponer que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot e_k$ no converge en E. Luego la serie converge y en consecuencia $x \in E$. Aún más, de la convergencia de la serie se deduce que $\|x\|_E = \sup_n \|P_n x\|_E$. En definitiva, queda probado que E es maximal. $\square$

Propiedad 1.4.15. Sea E un espacio de sucesiones 2-cóncavo con $M_{(2)}(E) = 1$. Entonces se verifica $M(l_2, E) = \left(\left((E^\times)^2\right)^\times\right)^{1/2}$ isométricamente. Si no suponemos $M_{(2)}(E) = 1$ entonces sigue valiendo la igualdad, pero con normas equivalentes.

Demostración. En primer lugar, vamos a suponer que $M_{(2)}(E) = 1$.

$\subseteq$) Antes que nada, llamemos $F = \left((E^\times)^2\right)^\times$ para no recargar tanto la notación. Consideremos $x \in M(\ell_2, E)$ y veamos que $x \in F^{1/2}$. Para eso vamos a notar en primer lugar, que: $x \in F^{1/2}$ si y solo si $x \in M(E^\times, \ell_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned} x \in F^{1/2} &\iff |x|^2 \in \left((E^\times)^2\right)^\times \\ &\iff |x|^2|y| \in \ell_1, \quad \forall y \in \left(E^\times\right)^2 \\ &\iff |x|^2|y| \in \ell_1, \quad \forall y \,/\, |y|^{1/2} \in E^\times. \end{aligned}$$

Estas equivalencias son una simple consecuencia de las definiciones de potencias de espacios y dual de Köthe. En la última estamos utilizando el hecho de que un elemento y pertenece a $(E^\times)^2$ si y solo si $|y|^{1/2}$ pertenece a $E^\times$. Siguiendo con las equivalencias, obtenemos

$$\begin{aligned} |x|^2|y| \in \ell_1, \quad \forall y \,/\, |y|^{1/2} \in E^\times &\iff |x|^2|z|^2 \in \ell_1, \quad \forall z \in E^\times \\ &\iff |xz| \in \ell_2, \quad \forall z \in E^\times \\ &\iff x \in M(E^\times, \ell_2). \end{aligned}$$

Probado entonces que x pertenece a $F^{1/2}$ si y solo si pertenece a $M(E^\times, \ell_2)$, y volviendo a la inclusión que queremos probar, basta ver que: $x \in M(\ell_2, E)$ implica $x \in M(E^\times, \ell_2)$. Esto se deduce de un resultado anterior (ver **Propiedades 1.2.7**, ítem e)), donde se prueba además que $\|x\|_{M(E^\times,\ell_2)} \leq \|x\|_{M(\ell_2,E)}$. Luego la inclusión entre conjuntos queda demostrada, y en lo que sigue veremos que $\|x\|_{F^{1/2}} \leq \|x\|_{M(\ell_2,E)}$. Por lo visto, bastará con probar que $\|x\|_{F^{1/2}} = \|x\|_{M(E^\times,\ell_2)}$. Notando que $\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}$ si y solo si $|\overline{z}|^{1/2} \in B_{E^\times}$ (aquí usamos la hipótesis de que $M_{(2)}(E) = 1$), obtenemos

$$\begin{aligned} \|x\|_{F^{1/2}} = \left\||x|^2\right\|_F^{1/2} &= \left(\sup_{\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}} \left\||x|^2\overline{z}\right\|_1\right)^{1/2} \\ &= \left(\sup_{z \in B_{E^\times}} \left\||x|^2|z|^2\right\|_1\right)^{1/2} \\ &= \left(\sup_{z \in B_{E^\times}} \||xz|\|_2^2\right)^{1/2} \\ &= \sup_{z \in B_{E^\times}} \|xz\|_2 \\ &= \|x\|_{M(E^\times,\ell_2)} \end{aligned} \tag{1.42}$$

que es lo que queríamos probar.

$\supseteq$) Consideremos un elemento x perteneciente a $F^{1/2}$ y veamos que pertenece a $M(\ell_2, E)$. Ya probamos en la inclusión anterior que $F^{1/2} = M(E^\times, \ell_2)$ isométricamente, de manera que resulta $x \in M(E^\times, \ell_2)$ con $\|x\|_{M(E^\times,\ell_2)} = \|x\|_{F^{1/2}}$. Nuevamente el ítem e) de las **Propiedades 1.2.7**, nos permite afirmar que $x \in M(\ell_2, E^{\times\times})$ con $\|x\|_{M(\ell_2,E^{\times\times})} \leq \|x\|_{M(E^\times,\ell_2)}$. Ahora bien, dado que E es 2-cóncavo, la **Propiedad 1.4.14** nos dice que resulta maximal y en consecuencia es un espacio perfecto por lo visto en el **Corolario 1.3.21**. Luego, hemos probado que $x \in M(\ell_2, E)$ y que $\|x\|_{M(\ell_2,E)} \leq \|x\|_{M(E^\times,\ell_2)} = \|x\|_{F^{1/2}}$.

Hasta aquí, probamos el caso $M_{(2)}(E) = 1$. Repasando la demostración, el único punto en el que se necesita esta hipótesis, es cuando se ve que la igualdad $F^{1/2} = M(E^\times, \ell_2)$ es isométrica (la igualdad entre conjuntos no depende de la constante de 2-concavidad). Para ser más específicos, lo que se demuestra bajo la hipótesis de que $M_{(2)}(E) = M^{(2)}(E^\times) = 1$, es que $\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}$ si y solo si $|\overline{z}|^{1/2} \in B_{E^\times}$. Veamos entonces el caso general, probando la equivalencia entre las normas. Como ya observamos en (1.42), se verifica

$$\|x\|_{F^{1/2}} = \left(\sup_{\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}} \left\| |x|^2 \overline{z} \right\|_1 \right)^{1/2}. \tag{1.43}$$

Ahora bien, las desigualdades probadas en (1.39), nos muestran que

$$\frac{\||\overline{z}|^{1/2}\|^2_{E^\times}}{\left(M^{(2)}(E^\times)\right)^2} \leq \|\overline{z}\|_{(E^\times)^2} \leq \||\overline{z}|^{1/2}\|^2_{E^\times}, \tag{1.44}$$

y en consecuencia si $\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}$ entonces $\frac{|\overline{z}|^{1/2}}{M^{(2)}(E^\times)} \in B_{E^\times}$. Luego es claro que

$$\begin{aligned} \sup_{z \in B_{E^\times}} \||x|^2|z|^2\|_1 &\geq \sup_{\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}} \left\| |x|^2 \left(\frac{|\overline{z}|^{1/2}}{M^{(2)}(E^\times)} \right)^2 \right\|_1 \\ &= \frac{1}{\left(M^{(2)}(E^\times)\right)^2} . \sup_{\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}} \left\| |x|^2 \overline{z} \right\|_1 . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\left(\sup_{z \in B_{E^\times}} \||x|^2|z|^2\|_1 \right)^{1/2} = \|x\|_{M(E^\times,\ell_2)} \leq \|x\|_{M(\ell_2,E)}$ (ver (1.42)) y que se verifica (1.43), esta última desigualdad nos muestra que $\|x\|_{F^{1/2}} \leq M^{(2)}(E^\times).\|x\|_{M(\ell_2,E)}$. Para la otra desigualdad, notar que de (1.44) se deduce que si $z \in B_{E^\times}$ entonces $|z|^2 \in B_{(E^\times)^2}$. Luego tenemos $\sup_{z \in B_{E^\times}} \||x|^2|z|^2\|_1 \leq \sup_{\overline{z} \in B_{(E^\times)^2}} \left\| |x|^2 \overline{z} \right\|_1$ que junto con (1.42) y (1.43) nos muestran que $\|x\|_{M(\ell_2,E^{\times\times})} \leq \|x\|_{M(E^\times,\ell_2)} \leq \|x\|_{F^{1/2}}$. Como E es perfecto entonces $\|x\|_{M(\ell_2,E)} \leq \|x\|_{F^{1/2}}$. En definitiva, hemos probado que si no suponemos $M_{(2)}(E) = 1$, entonces se verifica $\|x\|_{M(\ell_2,E)} \leq \|x\|_{F^{1/2}} \leq M^{(2)}(E^\times).\|x\|_{M(\ell_2,E)}$. □

Corolario 1.4.16. *Si E es un espacio de sucesiones 2-cóncavo entonces $M(\ell_2, E)$ es 2-convexo.*

Demostración. Sabemos que si un espacio es $\max(1,r)$-convexo entonces la potencia E^r es un espacio $\frac{1}{\min(1,r)}$-convexo. De este hecho y de la **Propiedad 1.4.5**, se deduce que si E es 2-cóncavo entonces $(((E^\times)^2)^\times)^{1/2}$ es 2-convexo. Luego la propiedad anterior nos dice que $M(\ell_2, E)$ es 2-convexo. □

1.5. Espacios de Orlicz y de Lorentz

Casi a modo de apéndice, daremos las definiciones y propiedades básicas de los espacios de sucesiones de Orlicz y de Lorentz. Cada uno de estos espacios es, a su manera, una generalización de los ya conocidos espacios ℓ_p. En [15], [13], [18], [19], [2] se puede encontrar un estudio más detallado de estos temas.

1.5.1. Espacios de Orlicz

La definición de los espacios de Orlicz, se basa en el rol que juega la función $\varphi(t) = t^p$ en el espacio ℓ_p. En ese sentido apunta la siguiente definición.

Definición 1.5.1. Una *función de Orlicz* es una función $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ continua, no decreciente y convexa tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ para cada $t > 0$ y $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

En algunos libros no se pide la condición $\varphi(t) > 0$ para todo $t > 0$, y se denomina función de Orlicz *degenerada* a aquella función que verifique $\varphi(t) = 0$ para algún $t > 0$.

Dada φ una función de Orlicz, consideramos el conjunto de sucesiones

$$\ell_\varphi = \left\{ x = (x_i)_i : \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) < \infty \quad \text{para algún}\, \rho > 0 \right\},$$

el cual resulta un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|x\|_\varphi = \inf \left\{ \rho > 0 : \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}.$$

Es claro que el espacio $(\ell_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$ tiene la propiedad de normalidad (puesto que φ es no decreciente) y en consecuencia resulta un espacio de sucesiones. Estos espacios se denominan *espacios de sucesiones de Orlicz*.

Observación 1.5.2. *Notar que si ponemos $\varphi(t) = t^p$ entonces $\ell_\varphi = \ell_p$ isométricamente. Por otro lado, si φ es una función de Orlicz degenerada entonces se prueba que ℓ_φ es isomorfo a ℓ_∞. Por tal motivo, se excluyen estas funciones del estudio de los espacios de Orlicz.*

Definición 1.5.3. Una función de Orlicz φ satisface la *condición* Δ_2, si $\sup_{t\geq 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$.

Observación 1.5.4. *En [15, 4.a.4] se prueba que una función de Orlicz φ satisface la condición Δ_2 si y solo si ℓ_φ es separable.*

Observación 1.5.5. *Sea φ una función de Orlicz. Luego se verifican:*

i) El espacio ℓ_φ es simétrico y maximal.

ii) El espacio ℓ_φ es minimal si y solo si φ satisface la condición Δ_2.

Demostración. Probemos i). En primer lugar consideremos $x \in \ell_\varphi$ y $\sigma \in \Pi$. Sabemos que hay un $\rho > 0$ tal que $\sum_i \varphi(|x_i|/\rho) < \infty$; esta serie converge absolutamente (pues φ toma valores positivos) y en consecuencia todo reordenamiento es convergente. Esto nos muestra que $\sum_i \varphi\left(|x_{\sigma(i)}|/\rho\right) < \infty$, y de aquí se deduce que $x_\sigma \in \ell_\varphi$ con $\|x_\sigma\|_\varphi \leq \|x\|_\varphi$. Razonando con σ^{-1} obtenemos $\|x_\sigma\|_\varphi = \|x\|_\varphi$ y así probamos que ℓ_φ es simétrico.

Consideremos ahora un $x \in \omega$ tal que $\|P_n x\|_\varphi \leq C$ para todo n y veamos que $x \in \ell_\varphi$ con $\|x\|_\varphi \leq C$. Es claro que $\frac{|x_i|}{C} \leq \frac{|x_i|}{\|P_n x\|_\varphi}$ y dado que φ es no decreciente se tiene $\varphi(|x_i|/C) \leq \varphi(|x_i|/\|P_n x\|_\varphi)$. Luego por definición de la norma se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|x_i|}{C}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|x_i|}{\|P_n x\|_\varphi}\right) \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(|x_i|/C) \leq 1$, lo cual nos dice que $x \in \ell_\varphi$ con $\|x\|_\varphi \leq C$ (y entonces $\|x\|_\varphi = \sup_n \|P_n x\|_\varphi$). De esta manera queda probado que ℓ_φ es maximal.

El ítem ii) se deduce de la observación anterior y del hecho, probado en el **Teorema 1.3.11**, de que un espacio es minimal si y solo si es separable. □

Dada una función de Orlicz φ, consideremos su inversa a derecha dada por:

$$\varphi^{-1}(t) = \sup\{s : \varphi(s) \leq t\}.$$

Dado que φ es continua se tiene $\varphi(\varphi^{-1}(t)) = t$.

Observación 1.5.6. *La función fundamental de un espacio de Orlicz está dada por $\lambda_{\ell_\varphi}(n) = \frac{1}{\varphi^{-1}(1/n)}$.*

Demostración. Si consideramos $\rho = \frac{1}{\varphi^{-1}(1/n)}$, entonces obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{\rho}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

resultando de esta forma $\lambda_{\ell_\varphi}(n) \leq \frac{1}{\varphi^{-1}(1/n)}$. Por otro lado, si fuese $\lambda_{\ell_\varphi}(n) < \frac{1}{\varphi^{-1}(1/n)}$ entonces se tendría $\varphi^{-1}(1/n) < \frac{1}{\lambda_{\ell_\varphi}(n)}$ y en consecuencia $\varphi\left(1/\lambda_{\ell_\varphi}(n)\right) > \frac{1}{n}$, según la definición de φ^{-1}. Luego sería $\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(1/\lambda_{\ell_\varphi}(n)\right) > 1$, lo cual se contradice con la definición de la norma en ℓ_φ. Esto demuestra la igualdad buscada. □

En lo que respecta a las propiedades de convexidad y concavidad de los espacios de Orlicz, se conocen los siguientes resultados.

Observación 1.5.7. *Sean $1 < r \leq 2 \leq s < \infty$.*

i) El espacio ℓ_φ es s-cóncavo si y solo si existe una constante $K > 0$ tal que $\varphi(\lambda t) \geq K.\lambda^s.\varphi(t)$ para todo $0 \leq \lambda, t \leq 1$.

ii) El espacio ℓ_φ es r-convexo si y solo si φ satisface la condición Δ_2 y existe una constante $K > 0$ tal que $\varphi(\lambda t) \leq K.\lambda^r.\varphi(t)$ para todo $0 \leq \lambda, t \leq 1$.

En relación con lo anterior, hemos estudiado el tema de las potencias de espacios de sucesiones. Algunas cuentas sencillas nos permiten calcular las potencias de los espacios de Orlicz.

Observación 1.5.8. *Sea $0 < r < \infty$ y llamemos $\psi(t) = t^{1/r}$. Consideremos una función de Orlicz φ tal que $\varphi \circ \psi$ resulta convexa (y en consecuencia es una nueva función de Orlicz) y veamos que $\ell_\varphi^r = \ell_{\varphi\circ\psi}$.*

Demostración. $\subseteq$) Sea $x \in \omega$ tal que $|x|^{1/r} \in \ell_\varphi$. Luego hay un $\rho > 0$ tal que $\sum_i \varphi(|x_i|^{1/r}/\rho) < \infty$, o lo que es equivalente,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi \circ \psi \left(\frac{|x_i|}{\rho^r} \right) < \infty.$$

Esto nos muestra que $x \in \ell_{\varphi\circ\psi}$ con $\|x\|_{\varphi\circ\psi} \leq \||x|^{1/r}\|_\varphi^r$.

$\supseteq$) Análogamente, si $x \in \ell_{\varphi\circ\psi}$ entonces hay un $\rho > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi \circ \psi \left(\frac{|x_i|}{\rho} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{|x_i|^{1/r}}{\rho^{1/r}} \right) < \infty$$

y en consecuencia $|x|^{1/r} \in \ell_\varphi$ con $\||x|^{1/r}\|_\varphi \leq \|x\|_{\varphi\circ\psi}^{1/r}$, lo que prueba la otra inclusión.

Notar que la hipótesis de que $\varphi\circ\psi$ sea convexa es simplemente para asegurarse que resulta una función de Orlicz y de esta forma poder considerar el espacio de Orlicz $\ell_{\varphi\circ\psi}$. Cuando $0 < r < 1$ esta hipótesis se verifica para cualquier función φ de Orlicz, ya que $\psi(t) = t^{1/r}$ es convexa. □

Para finalizar, haremos un último comentario acerca del dual de un espacio de Orlicz. Dada una función de Orlicz φ, consideraremos su función complementaria dada por

$$\varphi^*(t) = \sup_{s\geq 0}(st - \varphi(s)).$$

Esta función resulta nuevamente una función de Orlicz y verifica la siguiente propiedad (que puede encontrarse en [15, 4.b.1] o en [13, Cap. 4.8]).

Observación 1.5.9. *Si φ satisface la condición Δ_2, entonces $\ell'_\varphi = \ell^\times_\varphi = \ell_{\varphi^*}$ (donde la igualdad no es necesariamente isométrica).*

1.5.2. Espacios $d(w,p)$ de Lorentz

Dados $1 \leq p < \infty$ y $w = (w_i)_i$ una sucesión tal que $1 = w_1 \geq w_2 \geq ... \geq 0$, $\lim_{i\to\infty} w_i = 0$ y $\sum_i w_i = \infty$, se define el espacio

$$d(w,p) = \left\{ (x_i)_i : \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*|^p.w_i < \infty \right\}$$

con la norma dada por

$$\|x\|_{d(w,p)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*|^p.w_i \right)^{1/p}.$$

Recordar que $x^* = (x_i^*)_i$ es el reordenamiento decreciente de la sucesión x. El espacio $(d(w,p), \|\cdot\|_{d(w,p)})$ es un espacio de sucesiones que denominamos *espacio de sucesiones de Lorentz* (en ciertos casos diremos espacio $d(w,p)$ de Lorentz puesto que, como veremos más adelante, hay otra clase de espacios también denominados de Lorentz).

Observación 1.5.10. *Se deduce fácilmente de la definición, que los espacios $d(w,p)$ son simétricos y que su función fundamental está dada por $\lambda_{d(w,p)}(n) = (\sum_{i=1}^{n} w_i)^{1/p}$.*

Observación 1.5.11. *Un espacio $d(w,p)$ de Lorentz resulta maximal y minimal.*

Demostración. Para ver que es maximal, consideremos $x \in \omega$ tal que $\|P_n x\|_{d(w,p)} \leq C$ para todo n. De aquí se deduce que $\sum_{i=1}^{m} |x_i^*|^p.w_i \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $x \in d(w,p)$ con $\|x\|_{d(w,p)} = \sup_n \|P_n x\|_{d(w,p)}$.

La minimalidad del espacio se deduce de un resultado probado en [13, Cap. 4.9], donde se muestra que $d(w,p)' = d(w,p)^\times$ (sabemos que esto es equivalente a que el espacio sea minimal). Por cierto, en [15, Cap. 4.e] se muestra que el dual $d(w,p)'$ de un Lorentz nunca es isomorfo a un espacio de Lorentz. $\square$

En [20] se puede encontrar una caracterización de las propiedades de convexidad y concavidad en los espacios $d(w,p)$ de Lorentz. Antes de enunciar este resultado, precisamos la siguiente definición.

Definición 1.5.12. Sea $w = (w_i)_i$ una sucesión como en la definición de los espacios de Lorentz. Diremos que w es *p-regular* si se verifica $w_n^p \asymp \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} w_i^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1.5.13. *i) Un espacio $d(w,p)$ de Lorentz es p-convexo con constante $M^{(p)}(d(w,p)) = 1$ y no es r-convexo para $r > p$.*

ii) Para $p < s < \infty$ se verifica que $d(w,p)$ es s-cóncavo si y solo si w es $\frac{q}{p}$-regular, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$.

iii) Un espacio $d(w,p)$ de Lorentz es q-cóncavo para algún $q < \infty$ si y solo si w es 1-regular.

Observación 1.5.14. *De la observación anterior se deduce que si $d(w,p)$ es q-cóncavo para algún $q < \infty$, entonces $\lambda_{d(w,p)}(n) \asymp n^{1/p}.w_n^{1/p}$.*

Demostración. Basta notar que si existe un $q < \infty$ tal que $d(w,p)$ es q-cóncavo, entonces w es 1-regular y esto implica que $w_n^{1/p} \asymp \left(\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^n w_i\right)^{1/p}$. Dado que $\lambda_{d(w,p)}(n) = \left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^{1/p}$, se tiene $w_n^{1/p} \asymp \frac{1}{n^{1/p}}.\lambda_{d(w,p)}(n)$. □

Observación 1.5.15. *En lo que respecta a las potencias de espacios de Lorentz, se verifica fácilmente que si* $0 < r \leq p$ *entonces* $d(w,p)^r = d(w,p/r)$.

1.5.3. Espacios $\ell_{p,q}$ de Lorentz

Dados $1 \leq p, q < \infty$, consideramos el *espacio* $\ell_{p,q}$ *de Lorentz* dado por:

$$\ell_{p,q} = \left\{(x_i)_i : \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^*.i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^q < \infty\right\}.$$

En principio, una manera natural de definir la norma de un elemento en este espacio, sería considerar

$$\|x\|_{p,q} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^*.i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^q\right)^{1/q}.$$

Sin embargo, con esta definición no podemos asegurar que se verifique la desigualdad triangular para cualquier elección de p y q. En [2, Teo. 4.3] se prueba que si $1 \leq q \leq p < \infty$, entonces $(\ell_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ resulta un espacio de Banach y en consecuencia es un espacio de sucesiones. Más aún, si $p = q$ entonces se tiene $\ell_{p,p} = \ell_p$ y si ponemos $q < p$, entonces podemos pensar al espacio $\ell_{p,q}$ como un espacio $d(w,p)$ de Lorentz. De hecho, basta considerar $w_n = n^{\frac{q}{p}-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para el resto de los casos, $(\ell_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ resulta un espacio casi-normado (falla la desigualdad triangular) y en consecuencia se prueba lo siguiente (ver [2, Cap. 4]).

Observación 1.5.16. *Bajo la hipótesis de que sea* $p > 1$, *para cada* $x \in \ell_{p,q}$ *se define*

$$\|x\|_{(p,q)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^{**}.i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^q\right)^{1/q},$$

la cual resulta una norma, independientemente del valor de $1 \leq q < \infty$. *Recordemos que* $x_n^{**} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^n x_i^*$. *Más aún, se puede ver que*

$$\|x\|_{p,q} \leq \|x\|_{(p,q)} \leq \frac{p}{p-1}.\|x\|_{p,q} \tag{1.45}$$

para cada $x \in \ell_{p,q}$. *Estas consideraciones nos permiten hablar del espacio de sucesiones* $(\ell_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ *de Lorentz, siempre que sean* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$.

Observación 1.5.17. *Sean* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$. *Los espacios* $\ell_{p,q}$ *son simétricos, maximales y minimales.*

Demostración. Que estos espacios son simétricos se deduce fácilmente de su definición.

Para probar la maximalidad de $\ell_{p,q}$, notemos que si $x \in \omega$ es tal que $\|P_n x\|_{(p,q)} \leq C$ para todo n, entonces resulta $\sum_{i=1}^{m}(x_i^{**}.i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})^q \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $x \in \ell_{p,q}$ con $\|x\|_{(p,q)} = \sup_n \|P_n x\|_{(p,q)}$.

En lo que respecta a la minimalidad de $\ell_{p,q}$, haremos uso del siguiente resultado (ver [2, Coro. 4.8]). Dados $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$ se verifica $\ell'_{p,q} = \ell_{p',q'}$ (igualdad con normas equivalentes), donde $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$. Recordemos que una de las equivalencias de minimalidad para un espacio de sucesiones E, es que se verifique $E^\times = E'$. La inclusión $E^\times \subseteq E'$ se verifica siempre, de manera que para probar que $\ell_{p,q}$ es minimal bastará ver que $\ell_{p',q'} \subseteq \ell_{p,q}^\times$. En este sentido, consideremos $x \in \ell_{p',q'}$, $y \in \ell_{p,q}$ y veamos que $xy \in \ell_1$. La desigualdad de Hölder y la primer de desigualdad en (1.45), nos muestran que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^*.y_i^*| &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_i^*|.i^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}}.|y_i^*|.i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\ &\leq \|x\|_{p',q'}.\|y\|_{p,q} \\ &\leq \|x\|_{(p',q')}.\|y\|_{(p,q)}.\end{aligned}$$

De aquí se deduce que x pertenece a $\ell_{p,q}^\times$ con $\|x\|_{\ell_{p,q}^\times} \leq \|x\|_{(p',q')}$, que es lo que se quería ver. □

Observación 1.5.18. *La función fundamental de un espacio $\ell_{p,q}$ de Lorentz está dada por $\lambda_{\ell_{p,q}}(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{q}{p}-1}\right)^{1/q}$. Dado que $\sum_{i=1}^{n} i^r \asymp n^{r+1}$ para todo $r > -1$, resulta $\lambda_{\ell_{p,q}}(n) \asymp n^{1/p}$.*

Los siguientes resultados sobre convexidad y concavidad pueden verse en [8].

Observación 1.5.19. *Sean $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.*

i) El espacio $\ell_{p,q}$ es r-convexo si y solo si $r < p$ y $r \leq q$.

ii) El espacio $\ell_{p,q}$ es s-cóncavo si y solo si $p < s$ y $q \leq s$.

Observación 1.5.20. *Consideremos un espacio $\ell_{p,q}$ de Lorentz y sea r tal que $0 < r < p$, $0 < r \leq q$. Luego, es sencillo ver que $\ell_{p,q}^r = \ell_{p/r,q/r}$ con normas equivalentes. En efecto, esto se deduce de las desigualdades (1.45) y de la siguiente igualdad,*

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(|x_i^*|^{1/r}.i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^q\right)^{1/q}\right)^r = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(|x_i^*|.i^{\frac{1}{p/r}-\frac{1}{q/r}}\right)^{q/r}\right)^{r/q}.$$

Capítulo 2

Operadores (E, p)-sumantes

En este capítulo definiremos los espacios de operadores (E, p)-sumantes, donde E denota un espacio de sucesiones. Esta definición generaliza el concepto de operadores (q, p)-sumantes (definidos en **B.5**). La idea será probar algunos resultados generales de estos operadores, para luego estudiar con más detalle las propiedades sumantes de determinadas inclusiones de la forma $id : E \longrightarrow \ell_2$.

2.1. Espacios de operadores (E, p)-sumantes

A lo largo de esta sección, reservaremos las letras E, F para espacios de sucesiones, mientras que X, Y denotarán espacios de Banach (cualesquiera). Recordemos que dados dos espacios de sucesiones E y F, escribimos $E \hookrightarrow F$ si E está contenido en F y la inclusión es continua. En tal caso, notamos c_E^F a la norma de la inclusión (ver (1.5)).

Definición 2.1.1. Sean $1 \leq p < \infty$ y E un espacio de sucesiones tal que $\ell_p \hookrightarrow E$. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach se denomina (E, p)-*sumante*, si existe una constante $C > 0$ tal que,

$$\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E \leq C.c_p^E. \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{1/p} \tag{2.1}$$

para cualquier elección de elementos $x_1, ..., x_n \in X$. Notaremos $\Pi_{E,p}(X, Y)$ al espacio de los operadores $T : X \longrightarrow Y$ que resulten (E, p)-sumantes y $\pi_{E,p}(T)$ a la menor de las constantes C satisfaciendo la desigualdad anterior.

Observar que cuando notamos $(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n$, nos referimos a la sucesión $\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|_Y \cdot e_i$ que naturalmente pertenece a E. En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, cuando notemos $(\lambda_i)_{i=1}^n$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ será para referirnos a la sucesión $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i \in c_{00}$.

Observación 2.1.2. *Si en la definición anterior ponemos $E = \ell_q$ con $q \geq p$, entonces obtenemos la definición de operador (q, p)-sumante (ver **Definición B.5.1**). De hecho, basta* *notar que como $q \geq p$ entonces $\ell_p \hookrightarrow \ell_q = E$, y que la inclusión tiene norma uno (es decir, $c_p^E = 1$).*

Observación 2.1.3. *Sea E un espacio de sucesiones maximal. De la misma manera que en la definición de operadores (q,p)-sumantes no tiene sentido considerar $q < p$, el hecho de que $\ell_p \hookrightarrow E$ juega el mismo papel en la definición de operadores (E,p)-sumantes. De hecho, si consideramos $\xi \in X$ (no nulo) y $x_i = \lambda_i \cdot \xi$ (para ciertos $\lambda_i \in \mathbb{R}$), entonces (2.1) nos dice que $\|T\xi\|_Y.\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_E \leq C.c_p^E.\|\xi\|_X.\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_p$. Esta desigualdad es válida para cualquier n y cualquier elección de $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. En caso de existir una sucesión $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ perteneciente a ℓ_p pero no perteneciente a E, la desigualdad anterior nos muestra que debe ser $T \equiv 0$. De lo contrario, sería $\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_E \leq Cte.\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_p \leq Cte.\|\lambda\|_p$ para todo n, y como suponemos E maximal, resultaría $\lambda \in E$.*

Observación 2.1.4. *Sean $1 \leq p < \infty$, E un espacio de sucesiones y X un espacio de Banach. Notamos $\ell_p^w(X)$ al conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in X$, que son débil p-sumables (ver **B.2**). Este conjunto resulta un espacio de Banach con las operaciones usuales (coordenada a coordenada) y la norma dada por $\|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p\right)^{1/p}$. Cuando se sobreentienda cual es el espacio X que se considera, notaremos $\|\cdot\|_{\ell_p^w(X)} = \|\cdot\|_p^w$.*

*Por otro lado, notamos $E(X)$ al conjunto de sucesiones $(x_n)_n$ (al igual que antes, $x_n \in X$) que resulten absolutamente E-sumables. Esto es, que $(\|x_n\|_X)_n$ sea una sucesión perteneciente a E. Con las operaciones usuales y la norma dada por $\|(x_n)_n\|_{E(X)} = \|(\|x_n\|_X)\|_E$, $E(X)$ resulta un espacio de Banach (la demostración se basa en el hecho de que tanto E como X son espacios de Banach). Notar que cuando $E = \ell_p$ se tiene $E(X) = \ell_p^s(X)$ isométricamente, donde $\ell_p^s(X)$ es el espacio de las sucesiones absolutamente p-sumables (también definidas en **B.2**). Con esta nueva notación, podemos reescribir (2.1) de la siguiente manera: $\|(Tx_i)_{i=1}^n\|_{E(Y)} \leq C.c_p^E.\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w$.*

Esta observación nos permite reformular, en ciertos casos, la definición de operadores (E,p)-sumantes.

Proposición 2.1.5. *Sea E un espacio de sucesiones maximal tal que $\ell_p \hookrightarrow E$. Son equivalentes:*

a) El operador $T : X \longrightarrow Y$ es (E,p)-sumante.

b) La aplicación inducida,

$$\begin{array}{rcl} \hat{T} : \ell_p^w(X) & \longrightarrow & E(Y) \\ \hat{T}\left((x_n)_n\right) & = & (Tx_n)_n \end{array}$$

está bien definida, es lineal y acotada. Además se verifica la igualdad $\|\hat{T}\| = \pi_{E,p}(T).c_p^E$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Consideremos $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$ y veamos que $(Tx_n)_n \in E(Y)$, mostrando así que $\hat{T}$ está bien definida. Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideremos $P_N((Tx_n)_n) = (Tx_1, ..., Tx_N, 0, ...)$. Por la hipótesis de que T es (E,p)-sumante y observando que $\|(x_i)_{i=1}^N\|_p^w \leq \|x\|_p^w$, tenemos

$$\begin{aligned} \|P_N((Tx_n)_n)\|_{E(Y)} &= \left\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^N\right\|_E \\ &\leq \pi_{E,p}(T).c_p^E.\|(x_i)_{i=1}^N\|_p^w \\ &\leq \pi_{E,p}(T).c_p^E.\|x\|_p^w. \end{aligned}$$

Notar que $C = \pi_{E,p}(T).c_p^E.\|x\|_p^w$ es una constante que no depende de N. Luego, dado que tenemos $\left\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^N\right\|_E = \|P_N((Tx_n)_n)\|_{E(Y)} \leq C$ para todo N, y que E es maximal, se deduce que $(\|Tx_n\|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a E como se quería ver. Aún más, tomando supremo sobre los $N \in \mathbb{N}$, obtenemos $\|(\|Tx_n\|_Y)_n\|_E \leq \pi_{E,p}(T).c_p^E.\|x\|_p^w$, o equivalentemente $\left\|\hat{T}(x)\right\|_{E(Y)} \leq \pi_{E,p}(T).c_p^E.\|x\|_p^w$. Esto nos muestra que $\hat{T}$ es acotada (es claro que es lineal), y que $\|\hat{T}\| \leq \pi_{E,p}(T).c_p^E$.

$b) \Rightarrow a)$ Sean $x_1, ..., x_n \in X$, y llamemos $x = (x_1, ..., x_n, 0, ...)$. Probemos que $\|(Tx_i)_{i=1}^n\|_{E(Y)} \leq C.c_p^E.\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w$. Por la definición de $\hat{T}$, y dado que es acotado por hipótesis, se tiene $\|(Tx_i)_{i=1}^n\|_{E(Y)} = \|\hat{T}(x)\|_{E(Y)} \leq \|\hat{T}\|.\|x\|_p^w$. En otras palabras, tenemos

$$\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E \leq \frac{\|\hat{T}\|}{c_p^E}.c_p^E. \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p},$$

y en consecuencia T resulta (E,p)-sumante con $\pi_{E,p}(T) \leq \frac{\|\hat{T}\|}{c_p^E}$. Esta desigualdad, junto con la de la implicación anterior, nos muestran que $\|\hat{T}\| = \pi_{E,p}(T).c_p^E$. □

Observación 2.1.6. *Fijemos los espacios de Banach X e Y, y veamos que $\Pi_{E,p}(X,Y)$ es un espacio de Banach con la norma dada por $\pi_{E,p}(\cdot)$.*

Demostración. En primer lugar notemos que $\Pi_{E,p}(X,Y)$ es un espacio vectorial. Es claro que $T \equiv 0$ es (E,p)-sumante y que si $T \in \Pi_{E,p}(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot T \in \Pi_{E,p}(X,Y)$. Quedaría probar que la suma de dos operadores (E,p)-sumantes resulta (E,p)-sumante. Para eso consideremos $T, S \in \Pi_{E,p}(X,Y)$ y $x_1, ..., x_n \in X$. Como consecuencia de la desigualdad triangular (en Y y en E), de que E es normal y que T y S son (E,p)-sumantes, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|(\|(T+S)(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E &\leq \|(\|Tx_i\|_Y + \|Sx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E \\ &\leq \|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E + \|(\|Sx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E \\ &\leq \pi_{E,p}(T).c_p^E.\|x\|_p^w + \pi_{E,p}(S).c_p^E.\|x\|_p^w \qquad (2.2) \end{aligned}$$

donde $x = (x_i)_{i=1}^n$. Deducimos entonces que $T + S$ pertenece a $\Pi_{E,p}(X,Y)$ con $\pi_{E,p}(T+S) \leq \pi_{E,p}(T) + \pi_{E,p}(S)$.

Ahora veamos que $\pi_{E,p}(\cdot)$ define una norma en $\Pi_{E,p}(X,Y)$. Primero probemos que hay una constante $C>0$, tal que $\|T\|\leq C.\pi_{E,p}(T)$ para todo $T\in\Pi_{E,p}(X,Y)$. Consideremos $x_1\in X$ y notemos que como T es (E,p)-sumante se tiene $\|\|Tx_1\|_Y\cdot e_i\|_E\leq\pi_{E,p}(T).c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{X'}}|\varphi(x_1)|$ para cualquier $i\in\mathbb{N}$. Es decir que $\|Tx_1\|_Y.\|e_i\|_E\leq\pi_{E,p}(T).c_p^E.\|x_1\|_X$, y en consecuencia tomando supremo sobre todos los $x_1\in B_X$, se obtiene $\|T\|\leq\frac{c_p^E}{\|e_i\|_E}.\pi_{E,p}(T)$. Observar que si el espacio de sucesiones E es tal que $\|e_i\|_E=1$ para algún i, entonces $\|T\|\leq c_p^E.\pi_{E,p}(T)$. Esta desigualdad nos muestra que si $\pi_{E,p}(T)=0$ entonces $\|T\|=0$, y de esta manera resulta $T\equiv 0$. Por otro lado, si $T\in\Pi_{E,p}(X,Y)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}\|(\|(\lambda\cdot T)(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E &= |\lambda|.\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E\\ &\leq |\lambda|.\pi_{E,p}(T).c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

de forma que $\pi_{E,p}(\lambda\cdot T)\leq|\lambda|.\pi_{E,p}(T)$. Aplicando el mismo razonamiento, se tiene $\pi_{E,p}(T)=\pi_{E,p}(\frac{1}{\lambda}.(\lambda\cdot T))\leq\frac{1}{|\lambda|}.\pi_{E,p}(\lambda\cdot T)$ (para $\lambda\neq 0$, sino no hay nada que probar), y entonces $\pi_{E,p}(\lambda\cdot T)=|\lambda|.\pi_{E,p}(T)$. Por último habría que ver que $\pi_{E,p}(\cdot)$ verifica la desigualdad triangular, pero esto es justamente lo que probamos en (2.2).

Hasta aquí probamos que $(\Pi_{E,p}(X,Y),\pi_{E,p}(\cdot))$ es un *e.v.* normado. Veamos que es completo, y así quedará probado que es un espacio de Banach. Sea $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\Pi_{E,p}(X,Y),\pi_{E,p}(\cdot))$. Ya vimos que $\|\cdot\|\leq C.\pi_{E,p}(\cdot)$, de forma que $(T_m)_m$ resulta una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$ y en consecuencia converge (en la norma $\|\cdot\|$ de $\mathcal{L}(X,Y)$) a un operador T. La idea será probar que T es (E,p)-sumante y que $T_m\xrightarrow[m\to\infty]{\pi_{E,p}(\cdot)}T$. En ese sentido, probemos lo siguiente:

i) Fijados $n\in\mathbb{N}$ y $x_1,...,x_n\in X$, se verifica $\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E=\lim_{m\to\infty}\|(\|T_mx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E$.

ii) La sucesión $(\pi_{E,p}(T_m))_m$ es convergente.

Para probar *i)* notar que como $T_m\xrightarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|}T$, dado $\varepsilon>0$ hay un m_0 tal que si $m\geq m_0$, se verifica $|\|Tx_i\|_Y-\|T_mx_i\|_Y|<\frac{\varepsilon}{\lambda_E(n)}$ para todo $i=1,...,n$. Ahora bien, como E es normal deducimos de esta desigualdad que si $m\geq m_0$, $\|(|\|Tx_i\|_Y-\|T_mx_i\|_Y|)_{i=1}^n\|_E\leq\frac{\varepsilon}{\lambda_E(n)}.\|e_1+...+e_n\|_E=\varepsilon$. Luego obtenemos

$$|\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E-\|(\|T_mx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E|\leq\|(|\|Tx_i\|_Y-\|T_mx_i\|_Y|)_{i=1}^n\|_E\leq\varepsilon$$

para los $m\geq m_0$ y así queda probado *i)*.

Para *ii)* basta recordar que $(T_m)_m$ es de Cauchy en $\Pi_{E,p}(X,Y)$. De hecho, por la desigualdad triangular tenemos

$$|\pi_{E,p}(T_m)-\pi_{E,p}(T_l)|\leq\pi_{E,p}(T_m-T_l)\xrightarrow[m,l\to\infty]{}0,$$

lo cual nos muestra que $(\pi_{E,p}(T_m))_m$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y en consecuencia resulta convergente.

Volviendo a la demostración de que $\Pi_{E,p}(X,Y)$ es completo, veamos que los resultados anteriores nos permiten probar que T es un operador (E,p)-sumante. Fijados $x_1,...,x_n \in X$ y llamando $x=(x_i)_{i=1}^n$, se verifica $\|(\|T_m x_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E \leq \pi_{E,p}(T_m).c_p^E.\|x\|_p^w$ para todo m, puesto que los operadores T_m son (E,p)-sumantes. Tomando límite cuando $m\to\infty$ y usando $i)$ y $ii)$, obtenemos $\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E \leq (\text{lím}_{m\to\infty}\pi_{E,p}(T_m)).c_p^E.\|x\|_p^w$. Esto nos dice que T es (E,p)-sumante con $\pi_{E,p}(T)\leq \text{lím}_{m\to\infty}\pi_{E,p}(T_m)$ (luego veremos que vale la igualdad). Por último, veamos que $T_m \xrightarrow[m\to\infty]{\pi_{E,p}(\cdot)} T$. Sean $x_1,...,x_n\in X$, $x=(x_i)_{i=1}^n$ y probemos que dado un $\varepsilon>0$ hay un $m_0\in\mathbb{N}$, que no depende de la elección de los x_i (y tampoco depende de n), tal que si $m\geq m_0$ se tiene $\|(\|(T_m-T)(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E \leq \varepsilon.c_p^E.\|x\|_p^w$. Esto probaría que $\pi_{E,p}(T_m-T)<\varepsilon$ para todo $m\geq m_0$, que es lo que queremos ver. En primer lugar notemos que como $T_m \xrightarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|} T$, dado $\varepsilon>0$ hay un j_0 (que depende de $x_1,...,x_n$) tal que si $j\geq j_0$ entonces $\|(T_j-T)(x_i)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}.\frac{1}{\lambda_E(n)}.c_p^E.\|x\|_p^w$ para todo $i=1,...,n$, y en consecuencia

$$\|(\|(T_j-T)(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}.\frac{1}{\lambda_E(n)}.c_p^E.\|x\|_p^w.\|e_1+...+e_n\|_E = \frac{\varepsilon}{2}.c_p^E.\|x\|_p^w \tag{2.3}$$

si $j\geq j_0$, debido a la desigualdad anterior y a que E es normal. Esta desigualdad no alcanza para probar lo que queremos, ya que j_0 depende de $x_1,...,x_n$. Pero si ahora consideramos m_0 tal que $\pi_{E,p}(T_m-T_l)<\frac{\varepsilon}{2}$, para $m,l\geq m_0$ (lo cual tiene sentido, puesto que $(T_m)_m$ es una sucesión de Cauchy en $\Pi_{E,p}(X,Y)$) y consideramos $j\geq \text{máx}\{m_0,j_0\}$, entonces para un $m\geq m_0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\|(\|(T_m-T)(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E &\leq \|(\|(T_m-T_j)(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E + \|(\|(T_j-T)(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.c_p^E.\|x\|_p^w + \frac{\varepsilon}{2}.c_p^E.\|x\|_p^w = \varepsilon.c_p^E.\|x\|_p^w,\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se debe a que E es normal y a las desigualdades triangulares en Y y en E, y la segunda se deduce de la elección de m y j, y de lo observado en (2.3). Aquí m_0 no depende de n, ni de la elección de los x_i, de manera que queda probada la completitud del espacio $(\Pi_{E,p}(X,Y),\pi_{E,p}(\cdot))$. Además, se deduce que $\pi_{E,p}(T)=\text{lím}_{m\to\infty}\pi_{E,p}(T_m)$, ya que $|\pi_{E,p}(T)-\pi_{E,p}(T_m)|\leq \pi_{E,p}(T_m-T) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. □

Hasta aquí, fijados los espacios de Banach X e Y y dado un espacio de sucesiones E verificando $\ell_p \hookrightarrow E$, hemos considerado al subespacio lineal $\Pi_{E,p}(X,Y)\subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ de operadores (E,p)-sumantes, y probamos que es un espacio de Banach con la norma dada por $\pi_{E,p}(\cdot)$. Vimos además que dado $T\in\Pi_{E,p}(X,Y)$, se verifica $\|T\|\leq C.\pi_{E,p}(T)$ para alguna constante $C>0$ (más aún, $C=c_p^E$ si $\|e_i\|_E=1$ para algún i).

Observación 2.1.7. *El caso $E=\ell_\infty$ carece de interés, puesto que $\Pi_{\ell_\infty,p}(X,Y)=\mathcal{L}(X,Y)$ isométricamente para cualquier $1\leq p<\infty$.*

Demostración. La inclusión $\Pi_{\ell_\infty,p}(X,Y)\subseteq\mathcal{L}(X,Y)$ es trivial, y por lo observado anteriormente se tiene además $\|T\|\leq c_p^{\ell_\infty}.\pi_{\ell_\infty,p}=\pi_{\ell_\infty,p}$ para todo operador T que sea (ℓ_∞,p)-sumante.

Para la otra inclusión, consideremos $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $x_1,...,x_n \in X$, y probemos que $\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_\infty \leq \|T\|.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}$. Para eso notemos que $\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n}\|Tx_i\|_Y$, y que para cada i se tiene:

$$\begin{aligned}\|Tx_i\|_Y \leq \|T\|.\|x_i\|_X &= \|T\|.\sup_{\varphi\in B_{X'}}|\varphi(x_i)| \\ &\leq \|T\|.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\sup_{1\leq i\leq n}\|Tx_i\|_Y \leq \|T\|.\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w$ como se quería ver. □

Teniendo en cuenta la definición de ideal de operadores (que puede ser vista en **E.4**), podemos considerar $(\Pi_{E,p},\pi_{E,p})$, como un método de asociarle a cada par (X,Y) de espacios de Banach, un subespacio lineal $\Pi_{E,p}(X,Y)\subseteq\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $(\Pi_{E,p}(X,Y),\pi_{E,p}(\cdot))$ resulte un espacio de Banach. Probemos que $(\Pi_{E,p},\pi_{E,p})$ es un ideal de operadores de Banach. Para eso debemos ver que:

i) $\varphi\otimes y \in \Pi_{E,p}(X,Y)$ para cualesquiera $\varphi\in X'$, $y\in Y$, y su norma está dada por $\pi_{E,p}(\varphi\otimes y) = \|\varphi\|_{X'}.\|y\|_Y$.

ii) Si X_0, Y_0 son espacios de Banach y tenemos $S\in\mathcal{L}(X_0,X)$, $T\in\Pi_{E,p}(X,Y)$ y $R\in\mathcal{L}(Y,Y_0)$, entonces $RTS\in\Pi_{E,p}(X_0,Y_0)$ con norma $\pi_{E,p}(RTS)\leq\|R\|.\pi_{E,p}(T).\|S\|$.

En primer lugar consideremos $\varphi\in X'$, $y\in Y$ y recordemos que el operador $\varphi\otimes y : X\longrightarrow Y$ está dado por $\varphi\otimes y(x) = \varphi(x)\cdot y$. Queremos ver que este operador es (E,p)-sumante, de forma que consideremos $x_1,...,x_n\in X$ y notemos que

$$\begin{aligned}\|(\|\varphi\otimes y(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E &= \|(|\varphi(x_i)|\|y\|_Y)_{i=1}^n\|_E \\ &= \|y\|_Y.\|(|\varphi(x_i)|)_{i=1}^n\|_E \\ &\leq \|y\|_Y.c_p^E.\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p} \qquad (2.4)\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\ell_p\hookrightarrow E$. Por otro lado, es claro que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p} &= \|\varphi\|_{X'}.\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\varphi(x_i)}{\|\varphi\|_{X'}}\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \|\varphi\|_{X'}.\sup_{\psi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\psi(x_i)|^p\right)^{1/p}, \qquad (2.5)\end{aligned}$$

y en consecuencia, juntando (2.4) y (2.5) obtenemos

$$\|(\|\varphi\otimes y(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E \leq \|y\|_Y.\|\varphi\|_{X'}.c_p^E.\sup_{\psi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\psi(x_i)|^p\right)^{1/p},$$

lo que nos muestra que $\varphi \otimes y$ es un operador (E,p)-sumante con norma $\pi_{E,p}(\varphi \otimes y) \leq \|\varphi\|_{X'}.\|y\|_Y$. Antes de probar que vale la igualdad, veamos ii). Como es usual, consideramos $x_1, ..., x_n \in X_0$. Notando que $\|RTS(x_i)\|_{Y_0} \leq \|R\|.\|TS(x_i)\|_Y$ y que E es normal, obtenemos $\|(\|RTS(x_i)\|_{Y_0})_{i=1}^n\|_E \leq \|(\|R\|.\|TS(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E = \|R\|.\|(\|TS(x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E$. Esta desigualdad, junto con el hecho de que $T \in \Pi_{E,p}(X,Y)$, nos muestran que

$$\begin{aligned}
\|(\|RTS(x_i)\|_{Y_0})_{i=1}^n\|_E &\leq \|R\|.\pi_{E,p}(T).c_p^E. \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(Sx_i)|^p \right)^{1/p} \\
&= \|R\|.\pi_{E,p}(T).c_p^E.\|S\|. \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{\varphi \circ S}{\|S\|} \right)(x_i) \right|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \|R\|.\pi_{E,p}(T).c_p^E.\|S\|. \sup_{\psi \in B_{X_0'}} \left(\sum_{i=1}^n |\psi(x_i)|^p \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe al simple hecho de que $\frac{\varphi \circ S}{\|S\|} \in B_{X_0'}$ si $\varphi \in B_{X'}$. Esto prueba que RTS es un operador (E,p)-sumante con norma $\pi_{E,p}(RTS) \leq \|R\|.\pi_{E,p}(T).\|S\|$. Luego, para terminar de probar que $(\Pi_{E,p}, \pi_{E,p})$ es un ideal, solo nos queda ver que $\pi_{E,p}(\varphi \otimes y) = \|\varphi\|_{X'}.\|y\|_Y$. Bastará probar que $id_{\mathbb{C}}$ es (E,p)-sumante con norma $\pi_{E,p}(id_{\mathbb{C}}) = 1$. De hecho, supongamos por un momento que se verifica esto último y veamos que $\pi_{E,p}(\varphi \otimes y) \geq \|\varphi\|_{X'}.\|y\|_Y$ (la otra desigualdad ya la probamos cuando vimos que $\varphi \otimes y \in \Pi_{E,p}(X,Y)$). Dado $0 < \varepsilon < \|\varphi\|_{X'}$, podemos considerar $x_0 \in B_X$ tal que $|\varphi(x_0)| \geq \|\varphi\|_{X'} - \varepsilon$, y (por Hahn-Banach) $\psi \in B_{Y'}$ tal que $\psi(y) = \|y\|_Y$. Por otro lado, para el x_0 elegido, consideremos el operador $M_{x_0} : \mathbb{C} \longrightarrow X$ dado por $M_{x_0}(z) = z \cdot x_0$, que claramente verifica $\|M_{x_0}\| = \|x_0\|_X \leq 1$. Notar que la composición $\mathbb{C} \xrightarrow{M_{x_0}} X \xrightarrow{\varphi \otimes y} Y \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$ dada por

$$z \longmapsto z \cdot x_0 \longmapsto z.\varphi(x_0) \cdot y \longmapsto \varphi(x_0).\|y\|_Y.z,$$

nos dice que $id_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{\varphi(x_0).\|y\|_Y}.\psi \circ (\varphi \otimes y) \circ M_{x_0}$. Lo conveniente de esta factorización, es que al calcular la norma $\pi_{E,p}(\cdot)$, y utilizando el ítem ii) que ya fue probado, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\pi_{E,p}(id_{\mathbb{C}}) &= \frac{1}{\varphi(x_0).\|y\|_Y}.\pi_{E,p}(\psi \circ (\varphi \otimes y) \circ M_{x_0}) \\
&\leq \frac{1}{\varphi(x_0).\|y\|_Y}.\|\psi\|_{Y'}.\pi_{E,p}(\varphi \otimes y).\|M_{x_0}\| \\
&\leq \frac{1}{\varphi(x_0).\|y\|_Y}.\pi_{E,p}(\varphi \otimes y)
\end{aligned}$$

(la última desigualdad se debe simplemente a que $\|\psi\|_{Y'}, \|M_{x_0}\| \leq 1$). Luego, como estamos suponiendo $\pi_{E,p}(id_{\mathbb{C}}) = 1$, se deduce que $|\varphi(x_0)|.\|y\|_Y \leq \pi_{E,p}(\varphi \otimes y)$. Recordando que x_0 fue elegido de forma tal que $|\varphi(x_0)| \geq \|\varphi\|_{X'} - \varepsilon$, nos queda $(\|\varphi\|_{X'} - \varepsilon).\|y\|_Y \leq \pi_{E,p}(\varphi \otimes y)$. Haciendo tender $\varepsilon \longrightarrow 0$, nos queda $\|\varphi\|_{X'}.\|y\|_Y \leq \pi_{E,p}(\varphi \otimes y)$ que es lo que se quería ver. Probemos entonces que $id_{\mathbb{C}}$ es (E,p)-sumante y que $\pi_{E,p}(id_{\mathbb{C}}) = 1$. Dados $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$, veamos en primer lugar que $\|(|id_{\mathbb{C}}(x_i)|)_{i=1}^n\|_E \leq c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{\mathbb{C}'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}$. Para esto basta notar que $\ell_p^w(\mathbb{C})=\ell_p^s(\mathbb{C})$ (de hecho un $\varphi\in B_{\mathbb{C}'}$ es de la forma $\varphi(z)=\lambda.z$ con $|\lambda|\leq 1$) y en consecuencia $\sup_{\varphi\in B_{\mathbb{C}'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$. De esta manera, habría que probar que $\|(|id_{\mathbb{C}}(x_i)|)_{i=1}^n\|_E\leq c_p^E.\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$, lo cual es evidente puesto que $\ell_p\hookrightarrow E$. Luego $id_{\mathbb{C}}$ es (E,p)-sumante, y en principio $\pi_{E,p}(id_{\mathbb{C}})\leq 1$. Para probar la igualdad, veremos que dado $\varepsilon>0$ existen $x_1,...x_N\in\mathbb{C}$ tales que $\|(|id_{\mathbb{C}}(x_i)|)_{i=1}^N\|_E\geq(c_p^E-\varepsilon).\left(\sum_{i=1}^N|x_i|^p\right)^{1/p}=(c_p^E-\varepsilon).\|(|x_i|)_{i=1}^N\|_p$. Por la definición de c_p^E, sabemos que hay un $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in B_{\ell_p}$ tal que $\|x\|_E\geq c_p^E-\frac{\varepsilon}{2}$. Notando que

$$\big|\|x\|_E-\|P_nx\|_E\big|\leq\|x-P_nx\|_E\leq c_p^E.\|x-P_nx\|_p\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

queda claro que podemos considerar un $N\in\mathbb{N}$, tal que $\|x\|_E\leq\|P_Nx\|_E+\frac{\varepsilon}{2}$. Juntando todo, obtenemos $\|P_Nx\|_E+\frac{\varepsilon}{2}\geq\|x\|_E\geq c_p^E-\frac{\varepsilon}{2}\geq(c_p^E-\frac{\varepsilon}{2}).\|P_Nx\|_p$ (la última desigualdad se debe a que $x\in B_{\ell_p}$), y de aquí deducimos que $\|(|x_i|)_{i=1}^N\|_E\geq(c_p^E-\varepsilon).\|(|x_i|)_{i=1}^N\|_p$ que es lo que buscábamos. Esto prueba que $\pi_{E,p}(id_{\mathbb{C}})=1$.

En definitiva, hemos probado que $(\Pi_{E,p},\pi_{E,p})$ es un ideal de operadores de Banach. Notar que fue fundamental en la demostración que el espacio E verifique $\ell_p\hookrightarrow E$. En lo que sigue, cada vez que consideremos operadores (E,p)-sumantes, se sobreentenderá que E es un espacio de sucesiones tal que $\ell_p\hookrightarrow E$.

Observación 2.1.8. *Sean X e Y espacios de Banach y E un espacio de sucesiones tal que $\ell_p\hookrightarrow E$. Si $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es un operador de rango finito entonces resulta un operador (E,p)-sumante.*

Demostración. Sea $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ un operador de rango finito y consideremos $y_1,...,y_n$ una base para $T(X)$. Es sencillo ver que existen $\varphi_1,...,\varphi_n\in X'$ tales que $T=\sum_{i=1}^n\varphi_i\otimes y_i$, y puesto que los operadores $\varphi_i\otimes y_i$ son (E,p)-sumantes, se deduce que T es (E,p)-sumante. □

Observación 2.1.9. *Sean E,F espacios de sucesiones tales que $\ell_p\hookrightarrow E\hookrightarrow F$ y sean X,Y espacios de Banach. Entonces $\Pi_{E,p}(X,Y)\subseteq\Pi_{F,p}(X,Y)$ y dado un $T\in\Pi_{E,p}(X,Y)$ se verifica $\pi_{F,p}(T)\leq c_E^F.\frac{c_p^E}{c_p^F}.\pi_{E,p}(T)$.*

Demostración. Consideremos $T\in\Pi_{E,p}(X,Y)$ y $x_1,...,x_n\in X$. Es claro que,

$$\begin{aligned}\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_F &\leq c_E^F.\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E\\ &\leq c_E^F.\pi_{E,p}(T).c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}\\ &= c_E^F.\pi_{E,p}(T).\frac{c_p^E}{c_p^F}.c_p^F.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

y esto prueba lo que queríamos ver. □

Es sabido que dado un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach, decir que T es 1-sumante es equivalente a decir que es un operador absolutamente sumante (ver la **Observación B.2.4** y los comentarios anteriores a la misma). Los operadores absolutamente sumantes son aquellos que mandan sucesiones incondicionalmente sumables en sucesiones absolutamente sumables, donde las primeras son aquellas $(x_i)_i$ tales que $\sum_i x_{\sigma(i)}$ converge en X para toda permutación σ, y las segundas son las $(x_i)_i$ tales que $\sum_i \|x_i\| < \infty$. El siguiente, es un resultado análogo a la **Observación B.2.4**, pero para operadores $(E,1)$-sumantes. Notaremos $\ell_1^u(X)$ al conjunto de todas las sucesiones incondicionalmente sumables, que resulta un espacio de Banach con la norma dada por $\|(x_i)_i\|_u = \sup_{(\lambda_i)_i \in B_{\ell_\infty}} \|\sum_i \lambda_i \cdot x_i\|_X$.

Observación 2.1.10. *Sea E un espacio de sucesiones maximal y sean X, Y espacios de Banach. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es $(E,1)$-sumante si y solo si para cada sucesión $(x_i)_i$ incondicionalmente sumable en X, se tiene que $(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^\infty \in E$.*

Demostración. Supongamos primero que T es $(E,1)$-sumante. Dada una sucesión $(x_i)_i$ incondicionalmente sumable en X, es claro que es débil 1-sumable (es decir, $(x_i)_i \in \ell_1^w(X)$). Ahora bien, como E es maximal podemos usar la **Proposición 2.1.5** que afirma que el operador inducido $\hat{T} : \ell_1^w(X) \longrightarrow E(Y)$ está bien definido y es acotado. Pero entonces $\hat{T}((x_i)_i) = (Tx_i)_i \in E(Y)$, y esto es justamente que $(\|Tx_i\|_Y)_i \in E$.

Para la recíproca, notar que por hipótesis $\hat{T} : \ell_1^u(X) \longrightarrow E(Y)$ está bien definido. Se verifica fácilmente que $\hat{T}$ tiene gráfico cerrado, y de aquí deducimos que $\hat{T}$ es acotado. Luego, si consideramos $x_1, ..., x_n \in X$ y notamos que $\|(x_i)_{i=1}^n\|_u = \|(x_i)_{i=1}^n\|_1^w$ (ver los comentarios previos a la **Observación B.2.4**), tendremos

$$\begin{aligned} \|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E &\leq \|\hat{T}\|.\|(x_1, ..., x_n, 0, ...)\|_u \\ &= \|\hat{T}\|.\|(x_i)_{i=1}^n\|_1^w, \end{aligned}$$

y esto nos muestra que T es $(E,1)$-sumante □

2.1.1. Teoremas de inclusión y de composición

Nuestro siguiente objetivo será probar algunos resultados para operadores (E,p)-sumantes, que generalicen los ya conocidos teoremas de inclusión y de composición para operadores (q,p)-sumantes (ver **Teoremas B.5.3** y **B.5.4**). Seguido a eso, veremos una caracterización del espacio $\Pi_{E,1}(X,Y)$ bajo la hipótesis de que X tenga cotipo 2 (caracterización que generaliza la **Proposición B.4.6**). Para comenzar, probemos un par de resultados auxiliares.

Observación 2.1.11. *Sean $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ y X un espacio de Banach. Si $S \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m, X)$, entonces es de la forma $S = \sum_{i=1}^m e_i \otimes x_i$ para ciertos $x_i \in X$ (aquí e_i es el funcional que proyecta sobre la i-ésima coordenada). Además se verifica $\|S\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} (\sum_{i=1}^m |\varphi(x_i)|^p)^{1/p}$.*

Demostración. Dado $z = (z_1, ..., z_m) \in \ell_{p'}^m$, tenemos $S(z) = \sum_{i=1}^m z_i \cdot S(e_i)$ por linealidad. Llamando $x_i = S(e_i)$, es claro que $S(z) = \sum_{i=1}^m (e_i \otimes x_i)(z)$ lo cual demuestra la primer afirmación. Ahora calculemos la norma del operador S. Por un lado, aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
\|S(z)\|_X &= \left\| \sum_{i=1}^m z_i \cdot x_i \right\|_X = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi\left(\sum_{i=1}^m z_i \cdot x_i \right) \right| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{i=1}^m |z_i|.|\varphi(x_i)| \leq \|z\|_{p'}. \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^m |\varphi(x_i)|^p \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

y en consecuencia $\|S\| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^m |\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}$. Para probar la igualdad, fijemos un $\psi \in B_{X'}$ y consideremos $z_i = |\psi(x_i)|^{p-1}.sg(\psi(x_i))$ para cada $1 \leq i \leq m$. Llamemos $z = (z_1, ..., z_m)$ y $z_0 = \frac{z}{\|z\|_{p'}} \in B_{\ell_{p'}^m}$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\|S(z_0)\|_X &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(Sz_0)| = \frac{1}{\|z\|_{p'}}. \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \sum_{i=1}^m |\psi(x_i)|^{p-1}.sg(\psi(x_i)).\varphi(x_i) \right| \\
&\geq \frac{1}{\|z\|_{p'}}. \sum_{i=1}^m |\psi(x_i)|^{p-1}.sg(\psi(x_i)).\psi(x_i) = \left(\sum_{i=1}^m |\psi(x_i)|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\|S\| \geq \|S(z_0)\|_X \geq \left(\sum_{i=1}^m |\psi(x_i)|^p\right)^{1/p}$ para todo $\psi \in B_{X'}$. Luego, tomando supremo sobre estos últimos, queda probada la igualdad. □

Antes de enunciar el siguiente lema, introducimos algo de notación. De la misma manera que ℓ_p^m describe al espacio de las m-uplas con la norma $\|\cdot\|_p$, notaremos E_m al espacio de las m-uplas $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ con la norma dada por $\|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_E$.

Lema 2.1.12. *Dados un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach y una constante $C > 0$, son equivalentes:*

a) El operador T es (E,p)-sumante con norma $\pi_{E,p}(T) \leq C$

b) Para cada m, la aplicación lineal $\Phi_T^m : \mathcal{L}(\ell_{p'}^m, X) \longrightarrow E_m(Y)$ definida por $\Phi_T^m(S) = (TSe_i)_{i=1}^m$ tiene norma menor o igual que $C.c_p^E$.

c) Para cada m y cada $S \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m, X)$ con $\|S\| \leq 1$, se verifica que TS es (E,p)-sumante con norma $\pi_{E,p}(TS) \leq C$.

Demostración. a) ⇒ b) Sea $T \in \Pi_{E,p}(X,Y)$ tal que $\pi_{E,p}(T) \leq C$. Fijado $m \in \mathbb{N}$, queremos ver que $\|\Phi_T^m\| \leq C.c_p^E$. En la **Observación 2.1.11** vimos que si $S \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m, X)$ entonces $S = \sum_{i=1}^m e_i \otimes S(e_i)$ con $\|S\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^m |\varphi(Se_i)|^p\right)^{1/p}$. Teniendo en cuenta esto y la hipótesis de que T es (E,p)-sumante con $\pi_{E,p}(T)\leq C$, nos queda

$$\begin{aligned}\|\Phi_T^m(S)\|_{E_m(Y)} &= \|(TSe_i)_{i=1}^m\|_{E_m(Y)} = \|(\|TSe_i\|_Y)_{i=1}^m\|_E \\ &\leq C.c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^m|\varphi(Se_i)|^p\right)^{1/p} = C.c_p^E.\|S\|.\end{aligned}$$

Esto prueba que $\|\Phi_T^m\|\leq C.c_p^E$. Notar que se deduce de lo anterior, que $\sup_{m\in\mathbb{N}}\|\Phi_T^m\|\leq \pi_{E,p}(T).c_p^E$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Fijemos $m\in\mathbb{N}$. Consideremos $S\in\mathcal{L}(\ell_{p'}^m,X)$ tal que $\|S\|\leq 1$ y veamos que TS es (E,p)-sumante con norma menor o igual que C. Dados $z_1,...,z_n\in\ell_{p'}^m$, definimos $R\in\mathcal{L}(\ell_{p'}^n,X)$ de manera que $Re_i=Sz_i$ para todo $i=1,...,n$. En principio, n y m pueden ser distintos. Más aún, si bien m está fijo, n depende de la elección de los z_i. Esto no afectará nuestro argumento, que se basa en la hipótesis de que $\|\Phi_T^n\|\leq C.c_p^E$ (sin importar cuál sea el n). Notar que $\Phi_T^n(R)=(TRe_i)_{i=1}^n=(TSz_i)_{i=1}^n$ y que $\|R\|=\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^m|\varphi(Re_i)|^p\right)^{1/p}=\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^m|\varphi(Sz_i)|^p\right)^{1/p}$ (nuevamente por la **Observación 2.1.11**). Esto, junto con la hipótesis de que $\|\Phi_T^n\|\leq C.c_p^E$, da lugar a la siguiente desigualdad:

$$\|(\|TSz_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E = \|\Phi_T^n(R)\|_{E_n(Y)}\leq C.c_p^E.\|R\| = C.c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^m|\varphi(Sz_i)|^p\right)^{1/p}.$$

Ahora bien, dado que $\|S\|\leq 1$, se tiene $\varphi\circ S\in B_{(\ell_{p'}^m)'}$ y entonces $\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^m|\varphi(Sz_i)|^p\right)^{1/p}$ $\leq\sup_{\psi\in B_{(\ell_{p'}^m)'}}\left(\sum_{i=1}^m|\psi(z_i)|^p\right)^{1/p}$. De esta manera, obtenemos la desigualdad $\|(\|TSz_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E\leq C.c_p^E.\sup_{\psi\in B_{(\ell_{p'}^m)'}}\left(\sum_{i=1}^m|\psi(z_i)|^p\right)^{1/p}$, que nos muestra que TS es (E,p)-sumante con norma $\pi_{E,p}(TS)\leq C$ como se quería ver. Aún más, estos argumentos nos muestran que $\pi_{E,p}(TS)\leq\frac{1}{c_p^E}.\sup_n\|\Phi_T^n\|$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Queremos probar que T es (E,p)-sumante. Sean $x_1,...,x_n\in X$, y sea $S\in\mathcal{L}(\ell_{p'}^n,X)$ tal que $Se_i=x_i$. Para poder usar la hipótesis, consideramos $\overline{S}=\frac{S}{\|S\|}\in\mathcal{L}(\ell_{p'}^n,X)$ que verifica $\|\overline{S}\|\leq 1$. Luego tendremos que $T\overline{S}$ resulta (E,p)-sumante con norma $\pi_{E,p}(T\overline{S})\leq C$, o equivalentemente $\pi_{E,p}(TS)\leq C.\|S\|$. Pero entonces,

$$\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E = \|(\|TSe_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E\leq C.c_p^E.\|S\|.\sup_{\varphi\in B_{(\ell_{p'}^n)'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(e_i)|^p\right)^{1/p}$$

y dado que $\sup_{\varphi\in B_{(\ell_{p'}^n)'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(e_i)|^p\right)^{1/p}=1$ y que $\|S\|=\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}$, queda probado que $\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E\leq C.c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^p\right)^{1/p}$. Luego T es (E,p)-sumante y $\pi_{E,p}(T)\leq C$.

Notar que en caso de que se verifique uno de los ítems del enunciado (y en consecuencia todos), de cada una de las implicaciones probadas se deduce que $\pi_{E,p}(T)=\sup_m\{\pi_{E,p}(TS):\|S:\ell_{p'}^m\to X\|\leq 1\}=\left(c_p^E\right)^{-1}.\sup_m\|\Phi_T^m\|$. $\square$

El siguiente resultado generaliza el teorema de composición para operadores (q,p)-sumantes en el siguiente sentido: poniendo $E=\ell_t$ $(t>p)$ y notando que en ese caso $M(\ell_r,E)=\ell_s$ con $1/r=1/t-1/s$, obtenemos el enunciado del **Teorema B.5.4**.

Teorema 2.1.13. *Sean* $1\le p<q<\infty$ *y* $1<r<\infty$ *tales que* $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. *Dados* X,Y,Z *espacios de Banach, se verifica la siguiente inclusión:*

$$\Pi_{M(\ell_r,E),q}(Y,Z)\circ\Pi_r(X,Y)\subseteq\Pi_{E,p}(X,Z).$$

Más aún, dados $S\in\Pi_r(X,Y)$, $T\in\Pi_{M(\ell_r,E),q}(Y,Z)$ *se tiene* $\pi_{E,p}(TS)\le\pi_{M(\ell_r,E),q}(T).\pi_r(S)$.

Demostración. Sean S y T como en el enunciado. Notar que tiene sentido considerar a T como un operador $(M(\ell_r,E),q)$-sumante, ya que $\ell_q\hookrightarrow M(\ell_r,E)$ según lo visto en el ítem $f)$ de las **Propiedades 1.2.7**. En ese mismo resultado, se veía también que $c_q^{M(\ell_r,E)}\le c_p^E$, hecho que utilizaremos más adelante en la demostración. Dados $x_1,...,x_n\in X$ (no nulos), veremos que $\|(\|TSx_i\|_Z)_{i=1}^n\|_E\le\pi_{M(\ell_r,E),q}(T).\pi_r(S).c_p^E.\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w$, lo cual prueba que TS es (E,p)-sumante con $\pi_{E,p}(TS)\le\pi_{M(\ell_r,E),q}(T).\pi_r(S)$. Por el **Teorema B.4.1**, y dado que S es r-sumante, sabemos que hay una medida de probabilidad boreliana μ sobre $B_{X'}$, tal que

$$\|Sx\|_Y\le\pi_r(S).\left(\int_{B_{X'}}|\hat{x}(\varphi)|^r d\mu\right)^{1/r}$$

para todo $x\in X$. Podemos considerar entonces, para cada $i=1,...,n$, los elementos

$$\overline{x_i}=\frac{1}{\left(\int_{B_{X'}}|\hat{x_i}(\varphi)|^p d\mu\right)^{1/r}}\cdot x_i\in X.$$

Para aliviar un poco la notación, llamemos $\lambda_i=\int_{B_{X'}}|\hat{x_i}(\varphi)|^p d\mu$, de forma que $\overline{x_i}=\frac{x_i}{\lambda_i^{1/r}}$. Ahora bien, notando que $\frac{1}{(\sum_{k=1}^n\lambda_k)^{1/r}}.(\lambda_1^{1/r},...,\lambda_n^{1/r},0,....)\in B_{\ell_r}$, y usando simplemente la definición de $\|\cdot\|_{M(\ell_r,E)}$, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\left\|TS\left(\frac{x_i}{(\sum_{k=1}^n\lambda_k)^{1/r}}\right)\right\|_Z\right)_{i=1}^n\right\|_E &= \left\|\left(\left\|TS\left(\frac{x_i}{\lambda_i^{1/r}}\frac{\lambda_i^{1/r}}{(\sum_{k=1}^n\lambda_k)^{1/r}}\right)\right\|_Z\right)_{i=1}^n\right\|_E\\
&= \left\|\left(\frac{\lambda_i^{1/r}}{(\sum_{k=1}^n\lambda_k)^{1/r}}\right)_{i=1}^n(\|TS(\overline{x_i})\|_Z)_{i=1}^n\right\|_E\\
&\le \|(\|TS(\overline{x_i})\|_Z)_{i=1}^n\|_{M(\ell_r,E)}.
\end{aligned}$$

Reordenando un poco, obtenemos

$$\|(\|TSx_i\|_Z)_{i=1}^n\|_E\le\|(\|TS(\overline{x_i})\|_Z)_{i=1}^n\|_{M(\ell_r,E)}.\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k\right)^{1/r}.$$

Pero como $T \in \Pi_{M(\ell_r,E),q}(Y,Z)$, entonces

$$\|(\|TS(\overline{x_i})\|_Z)_{i=1}^n\|_{M(\ell_r,E)} \leq \pi_{M(\ell_r,E),q}(T).c_q^{M(\ell_r,E)}.\|(S\overline{x_i})_{i=1}^n\|_q^w,$$

y en consecuencia volviendo a la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que $c_q^{M(\ell_r,E)} \leq c_p^E$, nos queda

$$\|(\|TSx_i\|_Z)_{i=1}^n\|_E \leq \pi_{M(\ell_r,E),q}(T).c_p^E.\|(S\overline{x_i})_{i=1}^n\|_q^w.\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^{1/r}. \tag{2.6}$$

Para obtener la desigualdad deseada, debemos usar una vez más la hipótesis de que S es r-sumante. Llamemos $\sigma_i = \lambda_i^{1/r} = \left(\int_{B_{X'}} |\hat{x}_i(\varphi)|^p d\mu\right)^{1/r}$, $y_i = S\overline{x_i} = \frac{1}{\sigma_i}.Sx_i$. Estas nuevas sucesiones $(\sigma_i)_{i=1}^n$ e $(y_i)_{i=1}^n$, son las que verifican el ítem $a)$ en el **Lema B.4.4**, esto es, $Sx_i = \sigma_i.y_i$ para todo i. A partir de las definiciones de estas sucesiones, podemos reescribir (2.6) de la siguiente manera: $\|(\|TSx_i\|_Z)_{i=1}^n\|_E \leq \pi_{M(\ell_r,E),q}(T).c_p^E.\|(y_i)_{i=1}^n\|_q^w.\|(\sigma_i)_{i=1}^n\|_r$. Ahora bien, el **Lema B.4.4** (ítems $b)$ y $c)$) nos dice que: $\|(\sigma_i)_{i=1}^n\|_r \leq (\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w)^{p/r}$ y $\|(y_i)_{i=1}^n\|_q^w \leq \pi_r(S).(\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w)^{p/q}$, y en consecuencia, volviendo a la desigualdad anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\|(\|TSx_i\|_Z)_{i=1}^n\|_E &\leq \pi_{M(\ell_r,E),q}(T).c_p^E.\pi_r(S).(\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w)^{p/q}.(\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w)^{p/r} \\ &= \pi_{M(\ell_r,E),q}(T).\pi_r(S).c_p^E.\|(x_i)_{i=1}^n\|_p^w,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Ahora probemos el teorema de inclusión para operadores (E,p)-sumantes.

Teorema 2.1.14. *Sean $1 \leq p < q < \infty$, $1 < r < \infty$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Dados X, Y espacios de Banach, se verifica la siguiente inclusión:*

$$\Pi_{E,p}(X,Y) \subseteq \Pi_{M(\ell_r,E),q}(X,Y).$$

Además, si $T \in \Pi_{E,p}(X,Y)$ entonces $\pi_{M(\ell_r,E),q}(T) \leq c_p^E.\frac{1}{c_q^{M(\ell_r,E)}}.\pi_{E,p}(T)$.

Demostración. Ya observamos en el teorema anterior que tiene sentido hablar de operadores $(M(\ell_r,E),q)$-sumantes bajo las hipótesis de que $\ell_p \hookrightarrow E$ y $1/r = 1/p - 1/q$. Consideremos $T \in \Pi_{E,p}(X,Y)$ y $x_1, ..., x_n \in X$, y probemos que

$$\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_{M(\ell_r,E)} \leq \pi_{E,p}(T).\frac{c_p^E}{c_q^{M(\ell_r,E)}}.c_q^{M(\ell_r,E)}.\|(x_i)_{i=1}^n\|_q^w,$$

obteniendo así que T es $(M(\ell_r,E),q)$-sumante con la desigualdad de normas deseada. En primer lugar, vemos que usando la hipótesis de que T es (E,p)-sumante obtenemos la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned}
\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_{M(\ell_r,E)} &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n\in B_{\ell_r^n}} \|(\lambda_i.\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_E \\
&= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n\in B_{\ell_r^n}} \|(\|T(|\lambda_i|x_i)\|_Y)_{i=1}^n\|_E \\
&\leq \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n\in B_{\ell_r^n}} \left\{\pi_{E,p}(T).c_p^E.\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(\lambda_i\cdot x_i)|^p\right)^{1/p}\right\} \\
&= \pi_{E,p}(T).c_p^E.\sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n\in B_{\ell_r^n}} \left\{\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(\lambda_i\cdot x_i)|^p\right)^{1/p}\right\}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Aplicando ahora la desigualdad de Hölder con q/p y r/p, y notando que $(\lambda_i)_{i=1}^n \in B_{\ell_r^n}$, resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n|\varphi(\lambda_i\cdot x_i)|^p &= \sum_{i=1}^n|\lambda_i|^p|\varphi(x_i)|^p \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^r\right)^{p/r}.\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^q\right)^{p/q} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n|\varphi(x_i)|^q\right)^{p/q},
\end{aligned}$$

y en consecuencia $\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^n|\varphi(\lambda_i\cdot x_i)|^p\right)^{1/p} \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_q^w$. Volviendo entonces a (2.7), obtenemos

$$\|(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^n\|_{M(\ell_r,E)} \leq \pi_{E,p}(T).c_p^E.\|(x_i)_{i=1}^n\|_q^w = \pi_{E,p}(T).\frac{c_p^E}{c_q^{M(\ell_r,E)}}.c_q^{M(\ell_r,E)}.\|(x_i)_{i=1}^n\|_q^w$$

que es lo que queríamos probar. □

Observación 2.1.15. *Siguiendo la notación del teorema anterior, la inclusión $\Pi_{E,p}(X,Y)\subseteq \Pi_{M(\ell_s,E),q}(X,Y)$ sigue siendo válida si $s\leq r$, o dicho de otra manera, si $1/s\geq 1/r = 1/p-1/q$ (la desigualdad entre las normas también se mantiene).*

Demostración. Por la **Observación 2.1.9** basta ver que $M(\ell_r,E)\hookrightarrow M(\ell_s,E)$, y esto se deduce del ítem *b*) de las **Propiedades 1.2.7**, teniendo en cuenta que como $s\leq r$ entonces $\ell_s\hookrightarrow\ell_r$. En cuanto a la desigualdad de normas, los mismos resultados antes mencionados nos muestran que $\pi_{M(\ell_s,E),q}(T)\leq c_{M(\ell_r,E)}^{M(\ell_s,E)}.\frac{c_q^{M(\ell_r,E)}}{c_q^{M(\ell_s,E)}}.\pi_{M(\ell_r,E),q}(T)$ y que $c_{M(\ell_r,E)}^{M(\ell_s,E)}\leq c_{\ell_s}^{\ell_r}=1$. Juntando esto con la desigualdad vista en el teorema anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\pi_{M(\ell_s,E),q}(T) &\leq \frac{c_q^{M(\ell_r,E)}}{c_q^{M(\ell_s,E)}}.\pi_{M(\ell_r,E),q}(T) \\
&\leq \frac{c_q^{M(\ell_r,E)}}{c_q^{M(\ell_s,E)}}.\frac{c_p^E}{c_q^{M(\ell_r,E)}}.\pi_{E,p}(T) = \frac{c_p^E}{c_q^{M(\ell_s,E)}}.\pi_{E,p}(T),
\end{aligned}$$

de manera que queda probada la desigualdad. $\square$

Para finalizar esta parte, veremos un resultado sobre operadores $(E, 1)$-sumantes que generaliza la **Proposicion B.4.6**. La demostración utiliza la **Proposición B.4.7** y algunos de los resultados de esta sección.

Teorema 2.1.16. *Si X es un espacio de Banach con cotipo 2, entonces para cualquier espacio de Banach Y se tiene $\Pi_{E,1}(X, Y) = \Pi_{M(\ell_2,E),2}(X, Y)$. La igualdad no es necesariamente isométrica.*

Demostración. La inclusión $\Pi_{E,1}(X, Y) \subseteq \Pi_{M(\ell_2,E),2}(X, Y)$ es consecuencia del **Teorema 2.1.14**, poniendo $r = 2$, $p = 1$ y $q = 2$. Aún más, dado $T \in \Pi_{E,1}(X, Y)$ tendremos $\pi_{M(\ell_2,E),2}(T) \leq c_1^E . \frac{1}{c_2^{M(\ell_2,E)}} . \pi_{E,1}(T)$. Para la vuelta, consideremos $T \in \Pi_{M(\ell_2,E),2}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{L}(\ell_\infty^n, X)$ tal que $\|S\| \leq 1$. La **Proposición B.4.7** afirma que S es 2-sumante y que existe una constante $C > 0$, que depende solo de la constante de cotipo de X, tal que $\pi_2(S) \leq C.\|S\|$ (y en consecuencia $\pi_2(S) \leq C$ dado que $\|S\| \leq 1$). Luego por el **Teorema 2.1.13** (nuevamente con $r = 1$, $p = 1$, $q = 2$), resulta $TS \in \Pi_{E,1}(X, Y)$ con $\pi_{E,1}(TS) \leq \pi_{M(\ell_2,E),2}(T).\pi_2(S) \leq \pi_{M(\ell_2,E),2}(T).C$. Como esto vale para cualquier $S \in \mathcal{L}(\ell_\infty^n, X)$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, el **Lema 2.1.12** nos dice que T es $(E, 1)$-sumante con $\pi_{E,1}(T) \leq \pi_{M(\ell_2,E),2}(T).C$, y en consecuencia queda probada la igualdad $\Pi_{E,1}(X, Y) = \Pi_{M(\ell_2,E),2}(X, Y)$. $\square$

2.1.2. Relación con los operadores compactos

Es un resultado conocido el hecho de que todo operador p-sumante es un operador completamente continuo (o de Dunford-Pettis), esto es, que manda sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma. Más aún, si $T : X \longrightarrow Y$ es p-sumante y X no contiene una copia isomorfa de ℓ_1, entonces T es compacto (ambas afirmaciones son consecuencia del *teorema de dominación de Pietsch* como se puede ver en **B.4**). Por otro lado, como puede observarse en los **Corolarios B.5.6** y **B.5.7**, este hecho no se generaliza a operadores (q, p)-sumantes. El teorema que veremos a continuación nos muestra que, bajo ciertas hipótesis, se puede asegurar que los operadores (E, p)-sumantes resultan compactos.

Teorema 2.1.17. *Sean Y un espacio de Banach y E un espacio de sucesiones.*

a) Si $T \in \Pi_{E,p}(\ell_{p'}, Y)$, donde $1 < p < \infty$ y $\ell_p \hookrightarrow E \hookrightarrow c_0$, entonces T es un operador compacto.

b) Si $T \in \Pi_{E,1}(c_0, Y)$, con $\ell_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow c_0$, entonces T es un operador compacto.

Demostración. En esta demostración, serán útiles algunos de los resultados que se mencionan en el **Apéndice E**.

Probemos a). Sea $T : \ell_{p'} \longrightarrow Y$ como en las hipótesis y supongamos que no es un operador compacto. En ese caso, hay una sucesión acotada $(x_i)_i$ de elementos en $\ell_{p'}$, tal que $(Tx_i)_i$

no tiene subsucesiones convergentes. Ahora bien, en **E.3** se observa que como consecuencia del teorema de Eberlein-Šmulian (ver **E.1**), toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo tiene una subsucesión débilmente convergente. Como $\ell_{p'}$ es reflexivo y $(x_i)_i$ es una sucesión acotada, entonces podemos extraer una subsucesión $(x_{i_k})_k$ que converge débilmente a un cierto $x \in \ell_{p'}$. Podemos suponer $x = 0$ sin pérdida de generalidad (tomando $(x_{i_k} - x)_k$ en lugar de $(x_{i_k})_k$). Por otro lado, $(Tx_{i_k})_k$ no converge a cero ya que $(Tx_i)_i$ no tiene subsucesiones convergentes. Luego, podemos extraer una nueva subsucesión $(x_{i_{k_j}})_j$, que verifique además, que $\|Tx_{i_{k_j}}\|_Y \geq C$ para todo j, y para algún $C > 0$. Para no recargar la notación, llamaremos $(x_i)_i$ a la subsucesión $(x_{i_{k_j}})_j$. Tenemos entonces una sucesión acotada $(x_i)_i$ en $\ell_{p'}$ y una constante $C > 0$, tal que $(x_i)_i$ es débilmente convergente a 0 y $\|Tx_i\|_Y \geq C$ para todo i. Como consecuencia de esta última condición, $\|T\|.\|x_i\|_{p'} \geq \|Tx_i\|_Y \geq C$, o equivalentemente, $\|x_i\|_{p'} \geq \frac{C}{\|T\|}$ (desde luego, estamos suponiendo $\|T\| \neq 0$, de lo contrario no hay nada que probar). Llamando $\varepsilon = \frac{C}{\|T\|}$, obtenemos una sucesión acotada $(x_i)_i$ en $\ell_{p'}$ tal que:

- $x_i \xrightarrow{w} 0$,
- $\|x_i\|_{p'} \geq \varepsilon$ para todo i.

Estamos entonces en las hipótesis del principio de selección de Bessaga-Pełczyński (ver **Teorema E.2.7**), que afirma que podemos extraer una subsucesión de $(x_i)_i$ que resulte una sucesión básica y que sea equivalente a una subsucesión básica en bloque de la base canónica de $\ell_{p'}$. Por el comentario posterior al teorema, esta subsucesión será equivalente a la base canónica $(e_i)_i$ de $\ell_{p'}$. Como antes, seguiremos notando $(x_i)_i$ a esta subsucesión, de manera que tenemos $(x_i)_i \sim (e_i)_i$. Notar, por otro lado, que $(e_i)_i$ es débilmente p-sumable en $\ell_{p'}$ (o dicho de otra forma, $(e_i)_i \in \ell_p^w(\ell_{p'})$). De hecho, si consideramos $\varphi \in B_{(\ell_{p'})'}$ e identificamos $(\ell_{p'})' = \ell_p$, obtenemos

$$\sup_{\varphi \in B_{\ell_p}} (\sum_{i=1}^n |\varphi(e_i)|^p)^{1/p} = \sup_{\varphi \in B_{\ell_p}} (\sum_{i=1}^n |\varphi_i|^p)^{1/p} = \|\varphi\|_p \leq 1.$$

Puesto que $(x_i)_i \sim (e_i)_i$, se tiene $(x_i)_i \in \ell_p^w(\ell_{p'})$ (ver **Observación E.2.4**); y como por hipótesis $T : \ell_{p'} \longrightarrow Y$ es (E,p)-sumante, entonces resulta $(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^\infty \in E$. Para finalizar, como el espacio de sucesiones E es tal que $E \hookrightarrow c_0$, se deduce que $(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^\infty \in c_0$, lo cual contradice el hecho de que $\|Tx_i\|_Y \geq C$ para todo i. La contradicción proviene de suponer que T no es compacto. Luego queda probado a).

Ahora probemos b). Consideremos $T : c_0 \longrightarrow Y$ como en el enunciado y veamos que es compacto. Dado que c_0 no contiene una copia isomorfa de ℓ_1 (ver por ejemplo [1, Corolario 2.1.6]), la **Observación B.2.6** afirma que T es compacto si y solo si es completamente continuo. Luego bastará probar que T es completamente continuo. La demostración de esto es muy similar a la anterior; de hecho vamos a suponer que T no es completamente continuo. En tal caso hay una sucesión $(x_i)_i$ de elementos en c_0, que converge débilmente a 0 y tal que $(Tx_i)_i$ no converge. Notar que la sucesión $(x_i)_i$ es acotada, ya que toda sucesión débilmente convergente en un espacio de Banach lo es. Al igual que en a), pasando a una subsucesión podemos suponer que los x_i verifican $\|Tx_i\|_Y \geq C$ para algún $C > 0$. De esta manera, $(x_i)_i$ será una sucesión acotada en c_0, que converge débilmente a 0 y que verifica $\|x_i\|_\infty \geq \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$. El principio de selección de Bessaga-Pełczyński nos dice que, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $(x_i)_i$ es equivalente a la base canónica $(e_i)_i$ de c_0. Como $(e_i)_i$ es débil 1-sumable en c_0 (eso es sencillo de verificar), entonces $(x_i)_i$ lo es, y en consecuencia, usando la hipótesis de que T es $(E,1)$-sumante deducimos que $(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^\infty$ pertenece a E. Como $E \hookrightarrow c_0$ (esta era una de las hipótesis) entonces $(\|Tx_i\|_Y)_{i=1}^\infty \in c_0$, lo cual contradice el hecho de que $(Tx_i)_i$ no converge. La contradicción proviene de suponer que T no es completamente continuo y en consecuencia queda probado b). □

Observación 2.1.18. *Se puede decir un poco más en el ítem a) del teorema anterior. Si tenemos $T \in \Pi_{E,p}(\ell_s, Y)$, donde $1 < p < \infty$, $p' \leq s < \infty$ y $\ell_p \hookrightarrow E \hookrightarrow c_0$, entonces T es compacto. La demostración es idéntica (poniendo ℓ_s en lugar de $\ell_{p'}$) y la hipótesis de que $s \geq p'$ es necesaria para probar que la base canónica $(e_i)_i$ pertenece a $\ell_p^w(\ell_s)$.*

2.2. Inclusiones $(E,1)$-sumantes

En esta sección veremos una generalización demostrada por Defant, Mastyło y Michels (ver [9]) de un resultado probado por Bennett en [3], que afirma que si $1 \leq p \leq 2$ entonces la inclusión $id : \ell_p \hookrightarrow \ell_2$ es $(p,1)$-sumante (ver **Teorema B.5.5**). Dado E un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico, sabemos por la **Observación 1.4.13** que $E \hookrightarrow \ell_2$. El objetivo será probar que en este caso, la inclusión $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(E,1)$-sumante y luego mostrar algunas aplicaciones de este resultado.

2.2.1. El resultado principal

La demostración de que la inclusión $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(E,1)$-sumante (para un espacio E 2-cóncavo y simétrico) utiliza algunas técnicas de la teoría de interpolación. En lo que a esto se refiere, el **Apéndice C** nos muestra las principales definiciones y propiedades que son de utilidad en lo que sigue. Asumiremos como conocidas las definiciones de categoría, funtor, pares de espacios, espacios intermedios y de interpolación (todas ellas enunciadas en el apéndice antes mencionado). Probaremos cuatro lemas auxiliares antes de enunciar el resultado principal de esta sección.

Para comenzar, resulta evidente que los espacios de sucesiones forman una categoría (donde los morfismos son los operadores lineales y acotados) que resulta una subcategoría de $\mathcal{B}$, la categoría de todos los espacios de Banach. Por otro lado, dados dos espacios de sucesiones E_0 y E_1, tiene sentido considerar el espacio suma $E_0 + E_1$ con la norma dada por $\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{x=x_0+x_1}\{\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}\}$, el cual resulta nuevamente un espacio de sucesiones. En efecto, es sabido que la suma de dos espacios de Banach (con la norma mencionada) es un espacio de Banach, de manera que lo que deberíamos ver para probar que E_0+E_1 es un espacio de sucesiones, es que resulta normal. Para eso supongamos que tenemos $x \in E_0+E_1$ e $y \in \omega$ tales que $|y| \leq |x|$ y veamos que $y \in E_0+E_1$ con $\|y\|_{E_0+E_1} \leq \|x\|_{E_0+E_1}$. Que $y \in E_0+E_1$ es consecuencia de una propiedad que tienen los espacios de Riesz (lattices), que afirma que la suma de dos ideales es nuevamente un ideal (ver **Observación A.1.11**). Para probar la desigualdad entre las normas, consideremos una representación de $|x|$ de la forma $|x| = x_0+x_1$ con $x_0 \in E_0$, $x_1 \in E_1$. Luego se deduce que $|y| \leq |x| \leq |x_0|+|x_1|$ y como consecuencia del ítem f) de las **Propiedades A.1.5** (y dado que $y \in E_0+E_1$), sabemos que existen $y_0 \in E_0$ e $y_1 \in E_1$ (elementos positivos) tales que $|y| = y_0+y_1$ y tales que $y_i \leq |x_i|$ $(i=0,1)$. Teniendo en cuenta la definición de la norma en E_0+E_1, y que E_0, E_1 son normales, obtenemos las siguientes desigualdades: $\|y\|_{E_0+E_1} \leq \|y_0\|_{E_0} + \|y_1\|_{E_1} \leq \|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}$. Tomando ínfimo sobre todas las posibles representaciones $x = x_0+x_1$, vemos que $\|y\|_{E_0+E_1} \leq \|x\|_{E_0+E_1}$. Luego E_0+E_1 es un espacio de sucesiones. Notar que de la misma manera que se probó esta última desigualdad, se prueba que si $|y| \leq |x|$ entonces el K-funcional (ver **Definición C.1.3**) verifica $K(t,y;E_0,E_1) \leq K(t,x;E_0,E_1)$ para cada $t>0$. Análogamente, dados E_0 y E_1, podemos considerar el espacio intersección $E_0 \cap E_1$, el cual resulta un espacio de sucesiones con la norma de un elemento dada por $\|x\|_{E_0\cap E_1} = \text{máx}\{\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\}$ (en este caso, es mucho más evidente que $E_0 \cap E_1$ es normal). Lo que nos muestra esto, es que dados dos espacios de sucesiones E_0 y E_1, tiene sentido hablar del par de espacios $\overline{E} = (E_0,E_1)$ y en consecuencia de la categoría de los pares de espacios de sucesiones.

Para el siguiente lema, serán útiles las siguientes desigualdades (fáciles de probar).

Observación 2.2.1. *Sean $0<p\leq 1$ y $1 \leq q < \infty$. Dados los escalares $a,b \geq 0$, se verifican:*

$$(a+b)^p \leq a^p+b^p \quad y \quad (a+b)^q \asymp a^q+b^q. \tag{2.8}$$

Esta última significa que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ (independientes de a y b) tales que $C_1.(a^q+b^q) \leq (a+b)^q \leq C_2.(a^q+b^q)$.

*Estas desigualdades junto con el cálculo funcional en Banach lattices (ver **A.3**), nos muestran que si $x,y \in E_+$ entonces $(x+y)^p \leq x^p+y^p$ $(0<p\leq 1)$ y $(x+y)^q \asymp x^q+y^q$ $(1 \leq q<\infty)$.*

Lema 2.2.2. *Sean E_0 y E_1 dos espacios de sucesiones. Supongamos que (E_0,E_1) es un par de espacios de Calderón y E es un espacio de interpolación con respecto a (E_0,E_1). Luego para todo $0<p<1$, E^p es un espacio de interpolación con respecto a (E_0^p,E_1^p).*

Demostración. Un par de espacios de Calderón $\overline{E} = (E_0,E_1)$, es un par de espacios tal que todo espacio de interpolación con respecto a $\overline{E}$ es un K-espacio. Por otro lado, un K-espacio es un espacio intermedio E (con respecto a $\overline{E}$) tal que si $K(t,y;E_0,E_1) \leq K(t,x;E_0,E_1)$ para todo $t>0$ y $x \in E$, entonces $y \in E$ con $\|y\|_E \leq C.\|x\|_E$ para alguna constante C. Estas definiciones pueden encontrarse en **C.1.4**. Recordemos además, que E^p es la potencia p-ésima del espacio E (las potencias de espacios de sucesiones fueron estudiadas en el **Capítulo 1.4**) y que cuando $0 < p < 1$ se puede tomar potencia p-ésima de cualquier espacio (la condición de que el espacio sea $\text{máx}(1,p)$-convexo no afecta, ya que todo espacio es 1-convexo).

Volviendo al enunciado del lema, para probar que E^p es un espacio de interpolación con respecto a (E_0^p, E_1^p), debemos ver primero que es un espacio intermedio y luego que $T : (E_0^p, E_1^p) \longrightarrow (E_0^p, E_1^p)$ implica $T : E^p \longrightarrow E^p$. Veamos que es un espacio intermedio. En primer lugar, es muy fácil ver que $(E_0 \cap E_1)^p = E_0^p \cap E_1^p$ isométricamente, de manera que teniendo en cuenta que $E_0 \cap E_1 \subseteq E$ (por ser espacio intermedio) y que tomar potencias respeta las inclusiones (ver **Observación 1.4.8**), obtenemos $(E_0 \cap E_1)^p = E_0^p \cap E_1^p \subseteq E^p$ con inclusión continua. Ahora veamos que $E^p \subseteq E_0^p + E_1^p$ y que la inclusión es continua. Dado $x \in E^p$ tenemos $|x|^{1/p} \in E$ y teniendo en cuenta que $E \subseteq E_0 + E_1$ por ser un espacio intermedio, $|x|^{1/p} \in E_0 + E_1$. Esto significa que existen x_0 y x_1 pertenecientes a E_0 y E_1, respectivamente, tales que $|x|^{1/p} = x_0 + x_1$. Luego tenemos $|x| = (x_0 + x_1)^p \leq (|x_0| + |x_1|)^p \leq |x_0|^p + |x_1|^p$, donde la segunda desigualdad se debe a la **Observación 2.2.1**. Pero como $x_i \in E_i$ entonces $|x_i|^p \in E_i^p$ $(i = 0, 1)$ y en consecuencia $|x_0|^p + |x_1|^p \in E_0^p + E_1^p$. Luego, como $E_0^p + E_1^p$ es normal, la desigualdad anterior nos muestra que $|x|$ pertenece a $E_0^p + E_1^p$ con $\|x\|_{E_0^p+E_1^p} \leq \||x_0|^p + |x_1|^p\|_{E_0^p+E_1^p}$. Ahora bien, es claro por la definición de la norma en $E_0^p + E_1^p$, que $\||x_0|^p + |x_1|^p\|_{E_0^p+E_1^p} \leq \||x_0|^p\|_{E_0^p} + \||x_1|^p\|_{E_1^p}$ y en consecuencia tenemos:

$$\begin{aligned}
(\|x\|_{E_0^p+E_1^p})^{1/p} &\leq (\||x_0|^p\|_{E_0^p} + \||x_1|^p\|_{E_1^p})^{1/p} \\
&= (\||x_0|\|_{E_0}^p + \||x_1|\|_{E_1}^p)^{1/p} \\
&\leq C.(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}),
\end{aligned}$$

siendo la última desigualdad consecuencia de la **Observación 2.2.1** (notando que $1 \leq 1/p < \infty$). La desigualdad probada se verifica para cualquier representación de $|x|^{1/p}$ de la forma $|x|^{1/p} = x_0 + x_1$, con $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$. Luego, tomando ínfimo sobre todas estas posibles representaciones obtenemos $(\|x\|_{E_0^p+E_1^p})^{1/p} \leq C.\||x|^{1/p}\|_{E_0+E_1}$, y como la inclusión $E \subseteq E_0 + E_1$ es continua entonces $(\|x\|_{E_0^p+E_1^p})^{1/p} \leq \tilde{C}.\||x|^{1/p}\|_E$ para alguna constante $\tilde{C}$. Es decir que $\|x\|_{E_0^p+E_1^p} \leq \tilde{C}.\||x|^{1/p}\|_E^p = \tilde{C}.\|x\|_{E^p}$. Esto demuestra que $E^p \subseteq E_0^p + E_1^p$ con inclusión continua. Hasta aquí, entonces, hemos probado que E^p es un espacio intermedio con respecto a $(E_0^p, , E_1^p)$.

Ahora veamos que si $T : (E_0^p, E_1^p) \longrightarrow (E_0^p, E_1^p)$ entonces $T : E^p \longrightarrow E^p$. En realidad, vamos a probar primero que E^p es un K-espacio con respecto al par (E_0^p, E_1^p) y de allí se deducirá lo anterior. Para eso será necesario probar la siguiente equivalencia entre los K-funcionales, que afirma que:

$$K(t, x; E_0^p, E_1^p) \asymp K(t^{1/p}, |x|^{1/p}; E_0, E_1)^p \tag{2.9}$$

para todo $x \in E_0^p + E_1^p$ y todo $t > 0$. Para comenzar, fijemos $x \in E_0^p + E_1^p$ y $t > 0$ y veamos que hay una constante C_1 (que no depende de x ni de t) tal que $K(t, x; E_0^p, E_1^p) \leq C_1.K(t^{1/p}, |x|^{1/p}; E_0, E_1)^p$. El argumento es similar al que usamos para probar la inclusión anterior. Lo primero que veremos es que $|x|^{1/p}$ pertenece a E_0+E_1. En efecto, existen $y_0 \in E_0^p$ e $y_1 \in E_1^p$ tales que $|x| = y_0 + y_1 \leq |y_0| + |y_1|$ y en consecuencia, $|x|^{1/p} \leq (|y_0| + |y_1|)^{1/p} \leq C.(|y_0|^{1/p} + |y_1|^{1/p})$ en virtud de la **Observación 2.2.1**. Como $|y_0|^{1/p} + |y_1|^{1/p} \in E_0+E_1$ y por la propiedad de normalidad, se deduce que $|x|^{1/p} \in E_0+E_1$ como se quería ver. Luego, podemos escribir $|x|^{1/p} = x_0+x_1$ para ciertos $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$ y dado que $|x| = (x_0+x_1)^p \leq |x_0|^p + |x_1|^p$, se tendrá $K(t, x; E_0^p, E_1^p) \leq K(t, |x_0|^p + |x_1|^p; E_0^p, E_1^p)$. Ahora bien, de la definición del K-funcional (y nuevamente de las desigualdades (2.8)) se deduce que,

$$\begin{aligned}
(K(t,x;E_0^p,E_1^p))^{1/p} &\leq (K(t,|x_0|^p+|x_1|^p;E_0^p,E_1^p))^{1/p} \\
&\leq \left(\||x_0|^p\|_{E_0^p} + t.\||x_1|^p\|_{E_1^p}\right)^{1/p} \\
&= \left(\|x_0\|_{E_0}^p + t.\|x_1\|_{E_1}^p\right)^{1/p} \\
&\leq C.\|x_0\|_{E_0} + t^{1/p}.\|x_1\|_{E_1}.
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre las representaciones $|x|^{1/p} = x_0 + x_1$ y elevando a la p, obtenemos $K(t, x; E_0^p, E_1^p) \leq C_1.K(t^{1/p}, |x|^{1/p}; E_0, E_1)^p$ para cierta constante C_1. Ahora probemos la otra desigualdad. Como antes fijamos $x \in E_0^p + E_1^p$, de manera que existen $x_0 \in E_0^p$ y $x_1 \in E_1^p$ tales que $x = x_0+x_1$ (prestar atención al hecho de que x_0 y x_1 no son los mismos que antes formaban una representación de $|x|^{1/p}$). Luego, $|x|^{1/p} \leq (|x_0|+|x_1|)^{1/p} \leq C.(|x_0|^{1/p}+|x_1|^{1/p}) \in E_0+E_1$ y en consecuencia $|x|^{1/p} \in E_0+E_1$; más aún, existen $y_0 \in E_0$ e $y_1 \in E_1$ tales que $|x|^{1/p} = y_0+y_1$ y tales que $y_i \leq C.|x_i|^{1/p}$ (consecuencia de las **Propiedades A.1.5**). Luego, argumentando de la misma manera que lo hicimos antes, tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\left(K(t^{1/p},|x|^{1/p};E_0,E_1)\right)^p &\leq \left(\|y_0\|_{E_0} + t^{1/p}.\|y_1\|_{E_1}\right)^p \\
&\leq \left(\|C.|x_0|^{1/p}\|_{E_0} + t^{1/p}.\|C.|x_1|^{1/p}\|_{E_1}\right)^p \\
&\leq C_2.(\||x_0|^{1/p}\|_{E_0}^p + t.\||x_1|^{1/p}\|_{E_1}^p) \\
&= C_2.(\|x_0\|_{E_0^p} + t.\|x_1\|_{E_1^p}).
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre las representaciones de la forma $x = x_0 + x_1$, obtenemos la desigualdad $K(t^{1/p}, |x|^{1/p}; E_0, E_1)^p \leq C_2.K(t, x; E_0^p, E_1^p)$, que es lo que queríamos probar (notar que la constante C_2 es la misma constante C_1 que obtuvimos antes). Luego, queda probada la equivalencia entre los K-funcionales. Podemos ver entonces que E^p es un K-espacio con respecto a (E_0^p, E_1^p). Sean $x \in E^p$, $y \in E_0^p + E_1^p$ satisfaciendo $K(t, y; E_0^p, E_1^p) \leq K(t, x; E_0^p, E_1^p)$ para todo $t > 0$, y probemos que $y \in E^p$ con $\|y\|_{E^p} \leq C.\|x\|_{E^p}$. La equivalencia (2.9) nos dice que existen constantes C_1, C_2 tales que $K(t^{1/p}, |y|^{1/p}; E_0, E_1)^p \leq C_1.K(t, y; E_0^p, E_1^p)$ y $K(t, x; E_0^p, E_1^p) \leq C_2.K(t^{1/p}, |x|^{1/p}; E_0, E_1)^p$, y como estamos suponiendo $K(t, y; E_0^p, E_1^p) \leq K(t, x; E_0^p, E_1^p)$, se deduce que

$$K(t^{1/p}, |y|^{1/p}; E_0, E_1) \leq (C_1.C_2)^{1/p}.K(t^{1/p}, |x|^{1/p}; E_0, E_1).$$

Pero $|x|^{1/p}$ pertenece a E (pues $x \in E^p$) y E es un K-espacio con respecto a (E_0, E_1), de forma que resulta $|y|^{1/p} \in E$ con $\||y|^{1/p}\|_E \leq C.\||x|^{1/p}\|_E$. De aquí concluimos que $y \in E^p$ y que $\|y\|_{E^p} \leq C^p.\|x\|_{E^p}$, y de esta manera mostramos que E^p es un K-espacio. Para terminar esta demostración, veamos que esto último implica que E^p es un espacio de interpolación con respecto a (E_0^p, E_1^p). Sea $T : (E_0^p, E_1^p) \longrightarrow (E_0^p, E_1^p)$ y veamos que $T : E^p \longrightarrow E^p$. Recordar que $T : (E_0^p, E_1^p) \longrightarrow (E_0^p, E_1^p)$ significa que $T : E_0^p + E_1^p \longrightarrow E_0^p + E_1^p$ es un operador lineal y acotado tal que $T(E_i^p) \subseteq E_i^p$ $(i = 0, 1)$ y las restricciones $T : E_i^p \longrightarrow E_i^p$ también son acotadas (digamos, con norma $\|T\|_i$). Consideremos $x \in E^p$ y veamos que $Tx \in E^p$. Dada una representación $x = x_0 + x_1$ $(x_i \in E_i^p)$ se tiene $Tx = Tx_0 + Tx_1$ con $Tx_i \in E_i^p$. En consecuencia

$$K(t, Tx; E_0^p, E_1^p) \leq \|Tx_0\|_{E_0^p} + t.\|Tx_1\|_{E_1^p} \leq \text{máx}(\|T\|_0, \|T\|_1).(\|x_0\|_{E_0^p} + t.\|x_1\|_{E_1^p})$$

y tomando ínfimo sobre las representaciones $x = x_0 + x_1$ nos queda $K(t, Tx; E_0^p, E_1^p) \leq \text{máx}(\|T\|_0, \|T\|_1).K(t, x; E_0^p, E_1^p)$. Dado que $x \in E^p$ y que E^p es un K-espacio, resulta $Tx \in E^p$ con $\|Tx\|_{E^p} \leq C.\|x\|_{E^p}$ y en consecuencia $T : E^p \longrightarrow E^p$ es acotado. Luego queda probado que E^p es un espacio de interpolación con respecto a (E_0^p, E_1^p). □

Lo que sigue, será probar que si E es un espacio de sucesiones 2-convexo, maximal y simétrico entonces es un espacio de interpolación con respecto al par (ℓ_2, ℓ_∞). Antes que eso, veremos que un espacio de sucesiones maximal y simétrico es un espacio de interpolación con respecto al par (ℓ_1, ℓ_∞).

Observación 2.2.3. *Sea E un espacio de sucesiones simétrico. Entonces E es un espacio intermedio con respecto a (ℓ_1, ℓ_∞).*

Demostración. Notando que $\ell_1 \cap \ell_\infty = \ell_1$ y que $\ell_1 + \ell_\infty = \ell_\infty$ (ambas igualdades isométricas), la demostración se reduce a ver que $\ell_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow \ell_\infty$ con inclusiones continuas y eso ya lo probamos en la **Proposición 1.1.8**. □

A continuación, definimos una nueva relación entre sucesiones. Recordar que dada una sucesión $x = (x_n)_n$ notamos $x^* = (x_n^*)_n$ al reordenamiento decreciente de x y $x^{**} = (x_n^{**})_n$ a la sucesión dada por $x_n^{**} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^n x_i^*$ (ver **Definición 1.3.24**). Luego, dadas dos sucesiones x e y, diremos que $x \prec y$ si $x^{**} \leq y^{**}$, esto es, si $x_n^{**} \leq y_n^{**}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos un par de resultados que involucran esta nueva definición.

Observación 2.2.4. *Sea E un espacio de sucesiones maximal y simétrico, y sean $x \in E$, $y \in \ell_1 + \ell_\infty$ tales que $y \prec x$. Entonces $y \in E$ con $\|y\|_E \leq \|x\|_E$.*

Demostración. Recordemos que como E es maximal y simétrico entonces $\|x\|_E = \|x^*\|_E$ para todo $x \in E$ (ver **Observación 1.3.27**). Por otro lado, en el **Capítulo 1.3.2** probamos que $E^\times$ es maximal (para cualquier espacio de sucesiones) y que si E es maximal entonces es perfecto (ambos resultados serán útiles en esta demostración). Por hipótesis tenemos $x \in E$, $y \in \ell_1 + \ell_\infty$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^* \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Si consideramos $z \in E^\times$, entonces (2.10) junto con la **Proposición C.1.15** nos dicen que $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^*.z_i^* \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*.z_i^* = \|x^* z^*\|_1$. Pero como E es maximal y simétrico entonces $x^* \in E = E^{\times\times}$ con $\|x^*\|_{E^{\times\times}} = \|x^*\|_E = \|x\|_E$, y dado que $E^\times$ resulta maximal y simétrico entonces $\|z^*\|_{E^\times} = \|z\|_{E^\times}$. Luego la desigualdad anterior nos dice que

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^*.z_i^* \leq \|x^* z^*\|_1 \leq \|x^*\|_{E^{\times\times}}.\|z\|_{E^\times} = \|x\|_E.\|z\|_{E^\times}.$$

Ahora bien, la desigualdad de Hardy-Littlewood (ver **Proposicion 1.3.28**) nos muestra que $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|.|z_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*.z_i^*$, y juntando esto con la desigualdad anterior nos queda $\|yz\|_1 \leq \|x\|_E.\|z\|_{E^\times}$. Esto prueba que $y \in E^{\times\times}$ y tomando supremo sobre los $z \in B_{E^\times}$ resulta $\|y\|_{E^{\times\times}} \leq \|x\|_E$. Como E es perfecto, probamos que $y \in E$ con $\|y\|_E \leq \|x\|_E$, que es lo que se quería ver. □

En virtud del **Teorema C.1.16**, esta observación se puede reescribir de la siguiente manera: dado E un espacio de sucesiones maximal y simétrico, si $x \in E$, $y \in \ell_1 + \ell_\infty$ son tales que $K(n, y; \ell_1, \ell_\infty) \leq K(n, x; \ell_1, \ell_\infty)$ para todo n, entonces $y \in E$ con $\|y\|_E \leq \|x\|_E$. Se deduce de aquí, que si E es maximal y simétrico entonces es un K-espacio con respecto a (ℓ_1, ℓ_∞). Esto no debe sorprender, ya que mencionamos que probaríamos que los espacios de sucesiones maximales y simétricos son espacios de interpolación con respecto a (ℓ_1, ℓ_∞) y este último es un par de espacios de Calderón (ver **Teorema C.1.14**).

Observación 2.2.5. *Sean $T : (\ell_1, \ell_\infty) \longrightarrow (\ell_1, \ell_\infty)$ y $x \in \ell_1 + \ell_\infty$. Luego se verifica $Tx \prec \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).x$, donde $\|T\|_1 = \|T : \ell_1 \longrightarrow \ell_1\|$ y $\|T\|_\infty = \|T : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty\|$.*

Demostración. Como $x \in \ell_1 + \ell_\infty$ entonces se puede escribir de la forma $x = x_0 + x_1$ con $x_0 \in \ell_1$ y $x_1 \in \ell_\infty$. Dado que $T : (\ell_1, \ell_\infty) \longrightarrow (\ell_1, \ell_\infty)$, se tendrá $Tx = Tx_0 + Tx_1 \in \ell_1 + \ell_\infty$ con $Tx_0 \in \ell_1$ y $Tx_1 \in \ell_\infty$. El **Teorema C.1.16** (aplicado a la sucesión Tx) nos dice que

$$\sum_{i=1}^{n} (Tx)_i^* = \inf_{Tx = y_0 + y_1} \{\|y_0\|_1 + n.\|y_1\|_\infty\} \leq \|Tx_0\|_1 + n.\|Tx_1\|_\infty$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\|Tx_0\|_1 + n.\|Tx_1\|_\infty \leq \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).(\|x_0\|_1 + n.\|x_1\|_\infty)$, obtenemos $\sum_{i=1}^{n} (Tx)_i^* \leq \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).(\|x_0\|_1 + n.\|x_1\|_\infty)$ y tomando ínfimo sobre todas las representaciones de la forma $x = x_0 + x_1$, nos queda

$$\sum_{i=1}^{n} (Tx)_i^* \leq \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty). \inf_{x = x_0 + x_1} \{\|x_0\|_1 + n.\|x_1\|_\infty\} = \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty). \sum_{i=1}^{n} x_i^*$$

donde la última igualdad es, nuevamente, consecuencia del **Teorema C.1.16** (ahora aplicado a la sucesión x). Luego se tendrá $\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(Tx)_i^* \leq \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i^*$, es decir, $Tx \prec \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).x$. $\square$

Las últimas tres observaciones nos permiten probar lo siguiente.

Proposición 2.2.6. *Sea E un espacio de sucesiones maximal y simétrico. Luego E es un espacio de interpolación exacto con respecto al par (ℓ_1, ℓ_∞).*

Demostración. La **Observación 2.2.3** nos dice que E es espacio intermedio con respecto a (ℓ_1, ℓ_∞). Luego queremos ver que si $T : (\ell_1, \ell_\infty) \longrightarrow (\ell_1, \ell_\infty)$ entonces $T : E \longrightarrow E$ es un operador acotado con norma $\|T : E \longrightarrow E\| \leq \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty)$. Consideremos $x \in E \subseteq \ell_1 + \ell_\infty$. La **Observación 2.2.5** afirma que $Tx \prec \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).x$, y dado que $\text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).x \in E$, se deduce de la **Observación 2.2.4** que $Tx \in E$ con $\|Tx\|_E \leq \text{máx}(\|T\|_1, \|T\|_\infty).\|x\|_E$. Esto es justamente lo que queríamos probar. $\square$

Esta proposición junto con el lema anterior, nos permiten probar el siguiente resultado.

Lema 2.2.7. *Sea E un espacio de sucesiones maximal y simétrico.*

a) Si E es 2-convexo, entonces es un espacio de interpolación con respecto a (ℓ_2, ℓ_∞).

b) Si E es 2-cóncavo, entonces $M(\ell_2, E)$ es un espacio de interpolación con respecto a (ℓ_2, ℓ_∞).

Demostración. En esta demostración serán necesarios algunos de los resultados probados en el **Capítulo 1.4**. Comencemos probando *a*). Dado que E es 2-convexo, tiene sentido considerar la potencia E^2 que resulta un espacio de sucesiones maximal y simétrico. De hecho, E es maximal y simétrico por hipótesis y tomar potencia a un espacio respeta la maximalidad y la simetría según lo observado en las **Propiedades 1.4.9** (y en la **Observación 1.4.12** para el caso general). Luego, la **Proposición 2.2.6** afirma que E^2 es un espacio de interpolación con respecto a (ℓ_1, ℓ_∞). Teniendo en cuenta que (ℓ_1, ℓ_∞) es un par de espacios de Calderón (hecho que ya remarcamos anteriormente) y aplicando el **Lema 2.2.2** con $p = 1/2$, obtenemos que $(E^2)^{1/2}$ es espacio de interpolación con respecto a $(\ell_1^{1/2}, \ell_\infty^{1/2})$. Notando que $\ell_1^{1/2} = \ell_2$ y $\ell_\infty^{1/2} = \ell_\infty$ isométricamente, resulta que $(E^2)^{1/2}$ es espacio de interpolación con respecto a (ℓ_2, ℓ_∞). Cuando la constante de convexidad $M^{(2)}(E) = 1$, sabemos por la **Observación 1.4.7** que $(E^2)^{1/2} = E$ isométricamente. En tal caso, quedaría probado el resultado. Si no suponemos $M^{(2)}(E) = 1$, entonces $(E^2)^{1/2} = E$ con normas equivalentes (según lo visto en la **Observación 1.4.12**). Veamos que en ese caso también se tiene que E es espacio de interpolación con respecto a (ℓ_2, ℓ_∞). De hecho, eso se deduce del siguiente resultado:

Observación 2.2.8. *Supongamos que $(A, \|\cdot\|_1)$ y $(A, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach con $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ (normas equivalentes) y supongamos que $(A, \|\cdot\|_1)$ es espacio de interpolación* *con respecto al par* $\overline{A} = (A_0, A_1)$. *Entonces* $(A, \|\cdot\|_2)$ *también es espacio de interpolación con respecto a* $\overline{A}$.

La demostración de este hecho es bien sencilla. Dado que $(A, \|\cdot\|_1)$ es espacio intermedio con respecto a $\overline{A}$, se tiene $\Delta(\overline{A}) \subseteq (A, \|\cdot\|_1) \subseteq \Sigma(\overline{A})$ con inclusiones continuas. Como $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ entonces las inclusiones $\Delta(\overline{A}) \subseteq (A, \|\cdot\|_2) \subseteq \Sigma(\overline{A})$ también son continuas, de manera que $(A, \|\cdot\|_2)$ es espacio intermedio con respecto a $\overline{A}$. Por otro lado, sabemos que si $T : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ entonces $T : (A, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (A, \|\cdot\|_1)$ es un operador acotado. La equivalencia entre normas nos muestra entonces que $T : (A, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (A, \|\cdot\|_2)$ es acotado y así $(A, \|\cdot\|_2)$ resulta espacio de interpolación con respecto a $\overline{A}$. De esta forma, queda probado *a*).

Ahora probemos *b*). Por lo visto antes, bastaría ver que si E es 2-cóncavo, maximal y simétrico entonces $M(\ell_2, E)$ es 2-convexo, maximal y simétrico. Que es 2-convexo se desprende del **Corolario 1.4.16**; las otras cuestiones fueron probadas en las *Observaciones 1.2.3* y *1.3.19*. □

Observación 2.2.9. *El lema anterior junto con el teorema de Aronszajn-Gagliardo (enunciado en **C.1.4**) afirman que si* E *es 2-convexo, entonces hay un funtor de interpolación exacto* $\mathcal{F}$ *en* $\mathcal{B}$ *(la categoría de los espacios de Banach) tal que* $E = \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$ *(igualdad con normas equivalentes). Análogamente, si* E *es* 2*-cóncavo entonces hay un funtor de interpolación exacto* $\mathcal{F}$ *tal que* $M(\ell_2, E) = \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$.

Para el siguiente lema, recordar que si E es un espacio de sucesiones y X un espacio de Banach, entonces $E(X)$ denota al espacio de Banach de las sucesiones $(x_n)_x$ de elementos en X tales que $(\|x_n\|_X)_n \in E$. La norma en este espacio está dada por $\|(x_n)_n\|_{E(X)} = \|(\|x_n\|_X)_n\|_E$ (ver **Observación 2.1.4**). Por otro lado, E_n denota al espacio de las n-uplas $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ con la norma dada por $\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_E$.

Lema 2.2.10. *Sean* E *y* F *dos espacios de sucesiones,* X *un espacio de Banach y* $\mathcal{F}$ *un funtor de interpolación exacto en* $\mathcal{B}$. *Entonces se verifica*

$$\|id : \mathcal{F}(E_n(X), F_n(X)) \hookrightarrow \mathcal{F}(E_n, F_n)(X)\| \leq 1.$$

Demostración. En primer lugar, notemos que tiene sentido que consideremos la inclusión $\mathcal{F}(E_n(X), F_n(X)) \hookrightarrow \mathcal{F}(E_n, F_n)(X)$, ya que se trata de espacios de sucesiones finitas. De hecho si $(x_i)_{i=1}^n \in \mathcal{F}(E_n(X), F_n(X)) \subseteq E_n(X) + F_n(X)$, es claro que $(\|x_i\|_X)_{i=1}^n \in \mathcal{F}(E_n, F_n)$ por ser una sucesión finita y en consecuencia $(x_i)_{i=1}^n \in \mathcal{F}(E_n, F_n)(X)$. Lo que queremos probar, es que dados $x_1, ..., x_n \in X$ se verifica $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{\mathcal{F}(E_n,F_n)(X)} \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\mathcal{F}(E_n(X),F_n(X))}$. Consideremos $\varphi_1, ..., \varphi_n$ funcionales en X' tales que $\varphi_i(x_i) = \|x_i\|_X$ y $\|\varphi_i\|_{X'} = 1$ para todo $i = 1, ..., n$. Podemos definir entonces, la aplicación $T : \mathbb{R}^n(X) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(y_i)_{i=1}^n \longmapsto (\varphi_i(y_i))_{i=1}^n$. Notar que $T((x_i)_{i=1}^n) = (\|x_i\|_X)_{i=1}^n$, de manera que si probamos que $\|T : \mathcal{F}(E_n(X), F_n(X)) \longrightarrow \mathcal{F}(E_n, F_n)\| \leq 1$, entonces se tendrá $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{\mathcal{F}(E_n,F_n)(X)} =$

$\|T((x_i)_{i=1}^n)\|_{\mathcal{F}(E_n,F_n)} \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\mathcal{F}(E_n(X),F_n(X))}$ como se quiere ver. Para eso, pensemos al operador $T : E_n(X) \longrightarrow E_n$ y $T : F_n(X) \longrightarrow F_n$ y veamos que en ambos casos tiene norma menor o igual que uno. En efecto, para cada $y_i \in X$ tenemos $\varphi_i(y_i) \leq \|\varphi_i\|_{X'}.\|y_i\|_X = \|y_i\|_X$ y en consecuencia por la propiedad de normalidad se obtiene:

$$\|T(y_i)_{i=1}^n\|_{E_n} = \|(\varphi_i(y_i))_{i=1}^n\|_{E_n} \leq \|(\|y_i\|_X)_{i=1}^n\|_{E_n} = \|(y_i)_{i=1}^n\|_{E_n(X)},$$

lo cual nos muestra que $\|T : E_n(X) \longrightarrow E_n\| \leq 1$. Análogamente se ve que $\|T : F_n(X) \longrightarrow F_n\| \leq 1$. Usando en este momento la hipótesis de que $\mathcal{F}$ es un funtor exacto, obtenemos

$$\|T : \mathcal{F}(E_n(X), F_n(X)) \longrightarrow \mathcal{F}(E_n, F_n)\| \leq \text{máx}\{\|T : E_n(X) \longrightarrow E_n\|, \|T : F_n(X) \longrightarrow F_n\|\} \leq 1$$

que es lo que queríamos probar. □

Antes de enunciar el próximo lema, y teniendo en cuenta que en la demostración del mismo pasaremos del caso infinito dimensional al caso finito dimensional (y de la misma manera sucederá en el teorema siguiente), será de gran utilidad el siguiente resultado.

Observación 2.2.11. *Sean E y F dos espacios de sucesiones. Hasta aquí, dado $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ notamos $\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_E$ para expresar la norma (en E) de la sucesión $(\lambda_1, ..., \lambda_n, 0, ...)$, es decir, no hacemos ninguna distinción entre $(\lambda_i)_{i=1}^n$ y $(\lambda_1, ..., \lambda_n, 0, ...)$. Para evitar cualquier tipo de confusión, en esta observación será conveniente notar $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n, 0, ...)$.*

i) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$, se verifica $\|\lambda\|_{M(E_n,F_n)} = \|\tilde{\lambda}\|_{M(E,F)}$. Es decir, $(M(E,F))_n = M(E_n, F_n)$ isométricamente.

ii) Si (E,F) es un par de espacios y $\mathcal{F}$ es un funtor de interpolación exacto en $\mathcal{B}$ entonces $(\mathcal{F}(E,F))_n = \mathcal{F}(E_n, F_n)$ isométricamente.

Demostración. Para probar $i)$ basta notar que $\|\tilde{\lambda}\|_{M(E,F)} = \sup_{y \in B_E} \|\tilde{\lambda} y\|_F = \sup_{y \in B_{E_n}} \|\tilde{\lambda}\tilde{y}\|_F = \sup_{y \in B_{E_n}} \|\lambda y\|_{F_n} = \|\lambda\|_{M(E_n,F_n)}$.

Ahora probemos $ii)$. Por un lado, consideremos $P_n : \omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección sobre las primeras n coordenadas y notemos que $P_n : E \longrightarrow E_n$ y $P_n : F \longrightarrow F_n$ en ambos casos con norma menor o igual que uno. Luego, dado que $\mathcal{F}$ es un funtor de interpolación exacto, se tendrá $P_n = \mathcal{F}(P_n) : \mathcal{F}(E,F) \longrightarrow \mathcal{F}(E_n, F_n)$ con norma menor o igual que uno. Esto nos muestra que $\|\lambda\|_{\mathcal{F}(E_n,F_n)} \leq \|\tilde{\lambda}\|_{\mathcal{F}(E,F)}$. Por otro lado, consideremos $Q_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \omega$ definida por $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$, y observemos que $Q_n : E_n \longrightarrow E$ y $Q_n : F_n \longrightarrow F$ con norma igual a uno. Usando nuevamente que $\mathcal{F}$ es un funtor exacto, obtenemos $Q_n : \mathcal{F}(E_n, F_n) \longrightarrow \mathcal{F}(E,F)$ con norma menor o igual que uno. Esto nos dice que $\|\tilde{\lambda}\|_{\mathcal{F}(E,F)} \leq \|\lambda\|_{\mathcal{F}(E_n,F_n)}$, que junto con la desigualdad anterior nos muestran que $(\mathcal{F}(E,F))_n = \mathcal{F}(E_n, F_n)$. Notar que es fundamental en la demostración, que el funtor sea exacto. □

Lema 2.2.12. *Sean E un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico y $\mathcal{F}$ un funtor de interpolación exacto en $\mathcal{B}$ tal que $M(\ell_2, E) \hookrightarrow \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$. Luego,*

$$\sup_{m,n} \|id : \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))\| \leq \sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.M_{(2)}(E). \tag{2.11}$$

Demostración. Al igual que en el lema anterior, haremos un comentario acerca de por qué tiene sentido considerar la inclusión $\mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))$, es decir, por qué dado $T \in \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n)$ se tiene $T \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))$. Para eso notemos que al ser $\mathcal{F}$ un funtor de interpolación, se verifica

$$\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n) \cap \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)) \subseteq \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n) + \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n) \subseteq \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n + \ell_2^n)$$

con inclusiones continuas. Luego dado un operador $T : \ell_2^m \longrightarrow E_n$, es claro que lo podemos pensar a valores en ℓ_1^n o en ℓ_2^n y en consecuencia puede ser visto como un operador en $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))$.

Ahora sí, comencemos con la demostración del lema. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ fijos, vamos a considerar $T \in \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n)$ y vamos a probar que

$$\|T\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))} \leq \sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.M_{(2)}(E).\|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m, E_n)}. \tag{2.12}$$

En tal caso se tendrá

$$\|id : \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))\| \leq \sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.M_{(2)}(E),$$

y tomando supremo sobre n y m quedaría probado el resultado. Luego la demostración se reduce a probar (2.12). Dado $T \in \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n)$, el **Teorema E.6.2** afirma que existen $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ y un operador $R \in \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)$ tales que T se factoriza de la forma $T : \ell_2^m \xrightarrow{R} \ell_2^n \xrightarrow{M_\lambda} E_n$, y además se verifica que $\|R\|.\|\lambda\|_{M(\ell_2^n, E_n)} \leq \sqrt{2}.M_{(2)}(E).\|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n, E_n)}$. Aquí, M_λ es el operador multiplicación dado por $M_\lambda(x) = (\lambda_i.x_i)_{i=1}^n$. Definamos entonces la aplicación lineal $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_2^m, \mathbb{R}^n)$ dada por $\mu \mapsto M_\mu \circ R$, notando que $\Phi(\lambda) = T$ según lo visto anteriormente. La idea será ver que $\Phi : (\ell_2^n, \ell_\infty^n) \longrightarrow (\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))$ de manera de poder aplicar el funtor $\mathcal{F}$. Más específicamente, veamos que $\Phi : \ell_2^n \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n)$ y que $\Phi : \ell_\infty^n \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)$ en ambos casos con norma menor o igual que $\|R\|$. En primer lugar, consideremos $\mu, x \in \mathbb{R}^n$ y notemos que una simple aplicación de la desigualdad de Hölder, nos muestra que

$$\begin{aligned}\|M_\mu \circ R(x)\|_{\ell_1^n} &= \|(\mu_i.(Rx)_i)_{i=1}^n\|_{\ell_1} \\ &\leq \|\mu\|_{\ell_2^n}.\|Rx\|_{\ell_2^n} \\ &\leq \|\mu\|_{\ell_2^n}.\|R\|.\|x\|_{\ell_2^m},\end{aligned}$$

de manera que $\|\Phi(\mu)\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n)} = \|M_\mu \circ R\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n)} \leq \|\mu\|_{\ell_2^n}.\|R\|$ y en consecuencia $\|\Phi : \ell_2^n \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n)\| \leq \|R\|$. De manera análoga se prueba que $\|\Phi : \ell_\infty^n \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)\| \leq \|R\|$. Luego, como $\mathcal{F}$ es un funtor de interpolación exacto se tiene

$$\Phi : \mathcal{F}(\ell_2^n, \ell_\infty^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))$$

con norma menor o igual que $\|R\|$. Ahora usando la hipótesis de que $M(\ell_2, E) \hookrightarrow \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$, veremos que podemos restrigir esta aplicación al espacio $M(\ell_2^n, E_n)$ y que resulta

$$\|\Phi : M(\ell_2^n, E_n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))\| \leq c_{M(\ell_2,\ell_\infty)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\|R\|.$$

En efecto, el hecho de que $M(\ell_2, E) \hookrightarrow \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$ junto con la **Observación 2.2.11**, nos muestran que para cada $\mu = (\mu_i)_{i=1}^n$ se verifica:

$$\|\mu\|_{\mathcal{F}(\ell_2^n,\ell_\infty^n)} = \|\tilde{\mu}\|_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)} \leq c_{M(\ell_2,\ell_\infty)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\|\tilde{\mu}\|_{M(\ell_2,\ell_\infty)} = c_{M(\ell_2,\ell_\infty)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\|\mu\|_{M(\ell_2^n,\ell_\infty^n)},$$

donde $\tilde{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n, 0, ...)$ como en la observación. Como consecuencia de esta desigualdad y de que $\|\Phi : \mathcal{F}(\ell_2^n, \ell_\infty^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))\| \leq \|R\|$, se obtiene

$$\|\Phi(\mu)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m,\ell_1^n),\mathcal{L}(\ell_2^m,\ell_2^n))} \leq \|R\|.\|\mu\|_{\mathcal{F}(\ell_2^n,\ell_\infty^n)} \leq \|R\|.c_{M(\ell_2,\ell_\infty)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\|\mu\|_{M(\ell_2^n,E_n)}, \tag{2.13}$$

y de esta manera $\|\Phi : M(\ell_2^n, E_n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))\| \leq c_{M(\ell_2,\ell_\infty)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\|R\|$ como nos habíamos propuesto. Con esto queda prácticamente demostrada la desigualdad (2.12); simplemente hay que recordar que $\Phi(\lambda) = T$ y que $\|R\|.\|\lambda\|_{M(\ell_2^n,E_n)} \leq \sqrt{2}.M_{(2)}(E).\|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n,E_n)}$, de forma que poniendo $\mu = \lambda$ en la desigualdad (2.13) obtenemos:

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m,\ell_1^n),\mathcal{L}(\ell_2^m,\ell_2^n))} &\leq c_{M(\ell_2,\ell_\infty)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\|R\|.\|\lambda\|_{M(\ell_2^n,E_n)} \\ &\leq c_{M(\ell_2,\ell_\infty)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\sqrt{2}.M_{(2)}(E).\|T\|_{\mathcal{L}(\ell_2^n,E_n)}\end{aligned}$$

como se quería probar. □

Notando que $\ell_2 = M(\ell_2, \ell_1)$, $\ell_\infty = M(\ell_2, \ell_2)$ y pensando en los espacios de multiplicadores como operadores diagonales, el lema que acabamos de probar nos dice que si E es 2-cóncavo y simétrico entonces la propiedad de interpolación de los operadores diagonales (esto es, la hipótesis de que $M(\ell_2, E) \hookrightarrow \mathcal{F}(M(\ell_2, \ell_1), M(\ell_2, \ell_2))$), se transfiere a una propiedad de interpolación, en el caso finito dimensional, de los espacios asociados de operadores acotados (es decir, $\mathcal{L}(\ell_2^n, E_n) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))$).

Finalmente, estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2.13. *Sea E un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico. Luego $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(E,1)$-sumante.*

Demostración. Dado que E es 2-cóncavo, podemos afirmar que tiene cotipo 2 (de hecho son conceptos equivalentes según la **Proposición E.5.4**). Luego el **Teorema 2.1.16** nos dice que $\Pi_{E,1}(E, \ell_2) = \Pi_{M(\ell_2,E),2}(E, \ell_2)$ (igualdad no necesariamente isométrica), y en consecuencia bastará probar que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(M(\ell_2, E), 2)$-sumante. Notar que al ser E un espacio 2-cóncavo, la **Propiedad 1.4.14** afirma que E resulta maximal y minimal. Comenzando entonces con la demostración de que $(id : E \hookrightarrow \ell_2) \in \Pi_{M(\ell_2,E),2}$, observemos que por el **Lema 2.2.7** (y la observación posterior) sabemos que hay un funtor de interpolación exacto $\mathcal{F}$, tal que $M(\ell_2, E) = \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$. Lo que haremos será definir, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, una aplicación $\Phi^{m,n} : (\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)) \longrightarrow (\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n))$ para luego aplicar el funtor $\mathcal{F}$. Dado un operador lineal $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definimos $\Phi^{m,n}(S) = (Se_i)_{i=1}^m$. Veamos que

$$\Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n) \longrightarrow \ell_2^m(\ell_2^n) \tag{2.14}$$

$$\Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n) \longrightarrow \ell_\infty^m(\ell_2^n) \tag{2.15}$$

en ambos casos con norma menor o igual que uno. En cualquiera de los dos casos, es claro que $\Phi^{m,n}$ está bien definido y es lineal, de manera que lo que hay que ver es que son operadores acotados con norma menor o igual que uno. Comencemos con (2.14). Notar que $id : \ell_1^n \longrightarrow \ell_2^n$ es un operador 2-sumante con norma $\pi_2(id : \ell_1^n \longrightarrow \ell_2^n) = 1$ (eso es fácil de chequear) y observar que si en el **Lema 2.1.12** ponemos $T = id : \ell_1^n \longrightarrow \ell_2^n$, entonces tenemos $\Phi_T^m = \Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n) \longrightarrow \ell_2^m(\ell_2^n)$, donde Φ_T^m resulta un operador acotado con norma $\|\Phi_T^m\| \le \pi_2(T).c_2^2 = 1$. Aún más, sabemos que

$$\sup_m \|\Phi_T^m\| = \sup_m \|\Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n) \longrightarrow \ell_2^m(\ell_2^n)\| = \pi_2(T) = 1.$$

Análogamente, notando que $id : \ell_2^n \longrightarrow \ell_2^n$ es $(\ell_\infty, 2)$-sumante con norma $\pi_{\ell_\infty,2}(id : \ell_2^n \longrightarrow \ell_2^n) = 1$ (de hecho, la **Observación 2.1.7** nos dice que $\Pi_{\ell_\infty,2}(\ell_2^n, \ell_2^n) = \mathcal{L}(\ell_2^n, \ell_2^n)$ isométricamente), y poniendo $T = id : \ell_2^n \longrightarrow \ell_2^n$ en el **Lema 2.1.12**, obtenemos que $\Phi_T^m = \Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n) \longrightarrow \ell_\infty^m(\ell_2^n)$ es acotado y además

$$\sup_m \|\Phi_T^m\| = \sup_m \|\Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n) \longrightarrow \ell_\infty^m(\ell_2^n)\| = \pi_{\ell_\infty,2}(id : \ell_2^n \longrightarrow \ell_2^n) = 1.$$

Ahora, dado que $\mathcal{F}$ es un funtor de interpolación exacto, se verifica:

$$\Phi^{m,n} : \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)) \longrightarrow \mathcal{F}(\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n))$$

con norma menor o igual que uno, y esto vale para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$. Recurriendo al **Lema 2.2.12**, podemos pensar en la restricción del operador $\Phi^{m,n}$ al espacio $\mathcal{L}(\ell_2^m, E_n)$. En efecto se tiene

$$\mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \overset{id}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)) \overset{\Phi^{m,n}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n)),$$

donde $\sup_{m,n} \|id : \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n))\| \le \sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.M_{(2)}(E)$ según lo visto en el **Lema 2.2.12**, y $\|\Phi^{m,n} : \mathcal{F}(\mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_1^n), \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)) \longrightarrow \mathcal{F}(\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n))\| \le 1$ según lo observado anteriormente. Seguiremos llamando $\Phi^{m,n}$ a la restricción, de manera que tenemos

$$\Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \longrightarrow \mathcal{F}(\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n))$$

un operador con norma menor o igual que $\sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.M_{(2)}(E)$ (y al igual que antes, la cota es independiente de n, m). Antes de seguir, hacemos el siguiente comentario: una de las hipótesis en el **Lema 2.2.12** era que se verifique $M(\ell_2, E) \hookrightarrow \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$, y en ese sentido aparecía la constante $c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}$. En esta demostración, el funtor $\mathcal{F}$ fue elegido de forma tal que $M(\ell_2, E) = \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$, de manera que nos podríamos preguntar ¿por qué seguimos considerando la constante $c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}$? La respuesta está en que la igualdad $M(\ell_2, E) = \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$ (garantizada por el **Lema 2.2.7**) no es isométrica. Más adelante, también consideraremos la constante $c_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}^{M(\ell_2,E)}$.

Lo que sigue, será pensar el operador $\Phi^{m,n}$ a valores en $M(\ell_2^m, E_m)(\ell_2^n)$ y ver que podemos acotar su norma independientemente de n y m. El **Lema 2.2.10** nos dice que $\|id : \mathcal{F}(\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n)) \hookrightarrow \mathcal{F}(\ell_2^m, \ell_\infty^m)(\ell_2^n)\| \leq 1$, de manera que el operador

$$\mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \overset{\Phi^{m,n}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n)) \overset{id}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(\ell_2^m, \ell_\infty^m)(\ell_2^n)$$

tiene norma menor o igual que $\sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.M_{(2)}(E)$. Ahora bien, según la **Observación 2.2.11**, se verifican $\mathcal{F}(\ell_2^m, \ell_\infty^m) = (\mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty))_m$ y $M(\ell_2^m, E_m) = (M(\ell_2, E))_m$ isométricamente y en consecuencia, dado que $M(\ell_2, E) = \mathcal{F}(\ell_2, \ell_\infty)$, se tendrá $M(\ell_2^m, E_m) = \mathcal{F}(\ell_2^m, \ell_\infty^m)$ con

$$\left(c_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}^{M(\ell_2,E)}\right)^{-1}.\|\cdot\|_{M(\ell_2^m,E_m)} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{F}(\ell_2^m,\ell_\infty^m)} \leq c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.\|\cdot\|_{M(\ell_2^m,E_m)}.$$

Es decir que $\|id : \mathcal{F}(\ell_2^m, \ell_\infty^m)(\ell_2^n) \hookrightarrow M(\ell_2^m, E_m)(\ell_2^n)\| \leq c_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}^{M(\ell_2,E)}$ y de esta manera, el operador

$$\mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \overset{\Phi^{m,n}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\ell_2^m(\ell_2^n), \ell_\infty^m(\ell_2^n)) \overset{id}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(\ell_2^m, \ell_\infty^m)(\ell_2^n) \overset{id}{\hookrightarrow} M(\ell_2^m, E_m)(\ell_2^n)$$

tiene norma menor o igual que $\sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.c_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}^{M(\ell_2,E)}.M_{(2)}(E)$. Al igual que antes, seguimos llamando $\Phi^{m,n}$ a este operador (ahora a valores en $M(\ell_2^m, E_m)(\ell_2^n)$). Resumiendo, hemos probado que el operador $\Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \longrightarrow M(\ell_2^m, E_m)(\ell_2^n)$ dado por $S \mapsto (Se_i)_{i=1}^m$, tiene norma menor o igual que $\sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.c_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}^{M(\ell_2,E)}.M_{(2)}(E)$, la cual es una cota que no depende de $n, m \in \mathbb{N}$. Recordemos que nuestro objetivo es probar que $(id : E \hookrightarrow \ell_2) \in \Pi_{M(\ell_2,E),2}$. Una última aplicación del **Lema 2.1.12**, ahora considerando el operador $T = id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n$, nos dice que son equivalentes:

- el operador T es $(M(\ell_2, E), 2)$-sumante,
- para cada m, la aplicación lineal $\Phi_T^m = \Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \longrightarrow M(\ell_2^m, E_m)(\ell_2^n)$ tiene norma menor o igual que $c_2^{M(\ell_2,E)}.\pi_{M(\ell_2,E),2}(T)$. Más aún,

$$\sup_m \|\Phi^{m,n} : \mathcal{L}(\ell_2^m, E_n) \longrightarrow M(\ell_2^m, E_m)(\ell_2^n)\| = c_2^{M(\ell_2,E)}.\pi_{M(\ell_2,E),2}(T).$$

Pero teniendo en cuenta la cota que obtuvimos antes para $\|\Phi^{m,n}\|$, resulta que

$$\pi_{M(\ell_2,E),2}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n).c_2^{M(\ell_2,E)} = \sup_m \|\Phi^{m,n}\| \leq \sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.c_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}^{M(\ell_2,E)}.M_{(2)}(E).$$

Es decir que, llamando $C = \left(c_2^{M(\ell_2,E)}\right)^{-1}.\sqrt{2}.c_{M(\ell_2,E)}^{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}.c_{\mathcal{F}(\ell_2,\ell_\infty)}^{M(\ell_2,E)}.M_{(2)}(E)$, nos queda:

$$\pi_{M(\ell_2,E),2}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq C \tag{2.16}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Notar que C es una constante que no depende de n, de forma que no sorprenderá ver que (2.16) implica $(id : E \hookrightarrow \ell_2) \in \Pi_{M(\ell_2,E),2}$. En ese sentido, es fundamental señalar que $\bigcup_n E_n$ es denso en E, puesto que E es separable (recordar que separable es lo mismo que minimal y al principio notamos que el espacio E era minimal por ser 2-cóncavo). Consideremos $x_1,...,x_N \in E$ y veamos que hay una constante K tal que $\|(\|x_i\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} \leq K.c_2^{M(\ell_2,E)}.\|(x_i)_{i=1}^N\|_2^w$ (esto es justamente que $E \hookrightarrow \ell_2$ sea $(M(\ell_2,E),2)$-sumante). La desigualdad (2.16) nos dice que

$$\|(\|P_n(x_i)\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} \leq C.c_2^{M(\ell_2,E)}.\|(P_n(x_i))_{i=1}^N\|_2^w \tag{2.17}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $P_n(\lambda_1, \lambda_2, ...) = (\lambda_1, ..., \lambda_n, 0, ...)$ (proyección sobre las primeras n coordenadas). Si probáramos que:

i) $\|(\|P_n(x_i)\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|(\|x_i\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)}$

ii) $\|(P_n(x_i))_{i=1}^N\|_2^w \xrightarrow[n\to\infty]{} \|(x_i)_{i=1}^N\|_2^w$,

entonces tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en (2.17), obtendríamos $\|(\|x_i\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} \leq C.c_2^{M(\ell_2,E)}.\|(x_i)_{i=1}^N\|_2^w$ y así quedaría demostrado el teorema. Luego, en lo que queda de esta demostración nos enfocaremos en probar *i)* y *ii)*.

Veamos *i)*. Por normalidad se tiene $\|(\|P_n(x_i)\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} \leq \|(\|x_i\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)}$ para todo n. Luego debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que $\|(\|P_n(x_i)\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} \geq \|(\|x_i\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} - \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Por definición, tenemos

$$\left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2\right)_{i=1}^N\right\|_{M(\ell_2,E)} = \sup_{y\in B_{\ell_2}} \left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2\right)_{i=1}^N y\right\|_E = \sup_{y\in B_{\ell_2}} \left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E,$$

y en consecuencia dado cualquier $y \in B_{\ell_2}$ se verifica:

$$\left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2\right)_{i=1}^N\right\|_{M(\ell_2,E)} \geq \left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E. \tag{2.18}$$

Por otro lado, la desigualdad triangular en E nos muestra que

$$\left|\left\|\left(\|x_i\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E - \left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E\right| \leq \left\|\left((\|x_i\|_2 - \|P_n(x_i)\|_2).y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E,$$

y como $|y_i| \leq 1$ para todo i (pues $y \in B_{\ell_2}$), entonces

$$\left|\left\|\left(\|x_i\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E - \left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E\right| \leq \left\|\left(\|x_i\|_2 - \|P_n(x_i)\|_2\right)_{i=1}^N\right\|_E \tag{2.19}$$

por la propiedad de normalidad. Ahora bien, como E es minimal entonces $\|P_n(x_i) - x_i\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ para todo $i = 1,...,N$. Luego dado que $E \hookrightarrow \ell_2$, se verifica $\|P_n(x_i) - x_i\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y en consecuencia $\|P_n(x_i)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x_i\|_2$ para cada $1 \leq i \leq N$. Elijamos n_0 de forma tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$|\|x_i\|_2 - \|P_n(x_i)\|_2| < \frac{\varepsilon}{\lambda_E(N)} \quad \text{para todo } i = 1,...,N.$$

Volviendo a (2.19) y nuevamente como consecuencia de que E es normal, si consideramos $n \geq n_0$ tendremos

$$\left|\left\|\left(\|x_i\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E - \left\|\left(\|P_n(x_i)\|_2.y_i\right)_{i=1}^N\right\|_E\right| < \varepsilon$$

para cualquier $y \in B_{\ell_2}$ (n_0 no depende de y). Esta última desigualdad, junto con (2.18) nos muestran que si $n \geq n_0$ entonces $\left\| \left(\|P_n(x_i)\|_2 \right)_{i=1}^N \right\|_{M(\ell_2,E)} \geq \left\| \left(\|x_i\|_2 . y_i \right)_{i=1}^N \right\|_E - \varepsilon$, para todo $y \in B_{\ell_2}$. Tomando supremo sobre todos los y, obtenemos $\|(\|P_n(x_i)\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} \geq \|(\|x_i\|_2)_{i=1}^N\|_{M(\ell_2,E)} - \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Esto prueba i).

Ahora probemos ii). La desigualdad triangular y el hecho ya conocido de que $\|P_n(x_i) - x_i\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ para cada $1 \leq i \leq N$, nos dan lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left| \left\| \left(P_n(x_i) \right)_{i=1}^N \right\|_2^w - \left\| \left(x_i \right)_{i=1}^N \right\|_2^w \right| &\leq \left\| \left(P_n(x_i) - x_i \right)_{i=1}^N \right\|_2^w \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^N |\varphi(P_n(x_i) - x_i)|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^N \|\varphi\|^2 . \|P_n(x_i) - x_i\|_E^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^N \|P_n(x_i) - x_i\|_E^2 \right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Luego queda probado ii). □

Observación 2.2.14. *Recordando la caracterización de los operadores $(E,1)$-sumantes dada en la **Observación 2.1.10**, el **Teorema 2.2.13** nos dice que si E es un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico entonces para cada sucesión $(x_i)_i$ incondicionalmente sumable en E, la sucesión de escalares $(\|x_i\|_2)_i$ está contenida en E.*

Dado E un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico, el **Teorema 2.2.13** nos dice que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es un operador $(E,1)$-sumante. Claramente esto implica que el operador sea $(F,1)$-sumante para todo espacio F que verifique $E \hookrightarrow F$. Ahora bien, ¿se puede probar más que la $(E,1)$-sumabilidad? ¿será $id : E \hookrightarrow \ell_2$ un operador $(F,1)$-sumante para algún $F \hookrightarrow E$? El siguiente resultado nos muestra que, bajo la hipótesis de 2-concavidad y simetría, el **Teorema 2.2.13** es lo mejor posible en ese sentido.

Corolario 2.2.15. *Sean E y F dos espacios de sucesiones 2-cóncavos y simétricos. Luego, se verifica*

$$\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \asymp \|id : E_n \hookrightarrow F_n\|. \tag{2.20}$$

En particular, se deduce que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(F,1)$-sumante si y solo si $E \hookrightarrow F$.

Demostración. En primer lugar, veamos que (2.20) implica la afirmación posterior. Es claro que si $E \hookrightarrow F$ entonces $id : E \hookrightarrow \ell_2$ resulta un operador $(F,1)$-sumante (puesto que es $(E,1)$-sumante por el **Teorema 2.2.13**). Veamos la otra implicación, es decir, supongamos que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(F,1)$-sumante y que se verifica (2.20), y probemos que $E \hookrightarrow F$. Es claro que $\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq \pi_{F,1}(id : E \hookrightarrow \ell_2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (aquí usamos que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(F,1)$-sumante), y en consecuencia (2.20) nos dice que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|id : E_n \hookrightarrow F_n\| \leq C.\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq C.\pi_{F,1}(id : E \hookrightarrow \ell_2)$$

para todo n. Luego, dado $x \in E$ se verifica $\|P_n x\|_F \leq C.\pi_{F,1}(id : E \hookrightarrow \ell_2).\|P_n x\|_E \leq C.\pi_{F,1}(id : E \hookrightarrow \ell_2).\|x\|_E$ para todo n. Dado que F es maximal (por ser 2-cóncavo) se deduce que x pertenece a F y que $\|x\|_F \leq C.\pi_{F,1}(id : E \hookrightarrow \ell_2).\|x\|_E$. Esto nos muestra que $E \hookrightarrow F$ con $c_E^F \leq C.\pi_{F,1}(id : E \hookrightarrow \ell_2)$.

Ahora probemos (2.20). Lo que queremos ver es que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ (que no dependen de n) tales que:

$$C_1.\|id : E_n \hookrightarrow F_n\| \leq \pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq C_2.\|id : E_n \hookrightarrow F_n\|. \tag{2.21}$$

Veamos la primera desigualdad. El **Teorema 2.1.14** nos dice que

$$\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \geq c_2^{M(\ell_2,F)}.\left(c_1^F\right)^{-1}.\pi_{M(\ell_2,F),2}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n),$$

y si aplicamos el **Lema 2.1.12** con $T = id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n$ entonces obtenemos $\pi_{M(\ell_2,F),2}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) = \sup_m\{\pi_{M(\ell_2,F),2}(TS) : \|S : \ell_2^m \to E_n\| \leq 1\}$. Junto con la desigualdad anterior nos queda,

$$\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \geq c_2^{M(\ell_2,F)}.\left(c_1^F\right)^{-1}.\sup_m \sup_{\|S:\ell_2^m \to E_n\|\leq 1} \pi_{M(\ell_2,F),2}(\ell_2^m \overset{S}{\hookrightarrow} E_n \overset{id}{\hookrightarrow} \ell_2^n). \tag{2.22}$$

Consideremos para cada $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n$, el operador diagonal $S_\lambda : \ell_2^n \hookrightarrow E_n$ dado por $(x_i)_{i=1}^n \mapsto (\lambda_i.x_i)_{i=1}^n$ y notemos que $\|S_\lambda\| = \|\lambda\|_{M(\ell_2^n,E_n)}$. Si llamamos $M_\lambda : id \circ S_\lambda : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n$, la desigualdad (2.22) nos dice que

$$\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \geq c_2^{M(\ell_2,F)}.\left(c_1^F\right)^{-1}.\sup_{\|\lambda\|_{M(\ell_2^n,E_n)}\leq 1} \pi_{M(\ell_2,F),2}(M_\lambda : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n). \tag{2.23}$$

Observemos que $\|\lambda\|_{M(\ell_2^n,F_n)} \leq c_2^{M(\ell_2,F)}.\pi_{M(\ell_2,F),2}(M_\lambda : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n)$. De hecho, si consideramos $e_1, ..., e_n$ los vectores canónicos en ℓ_2^n, entonces se verifica

$$\|\lambda\|_{M(\ell_2^n,F_n)} = \|(\|M_\lambda(e_i)\|_2)_{i=1}^n\|_{M(\ell_2,F)} \leq \pi_{M(\ell_2,F),2}(M_\lambda : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n).c_2^{M(\ell_2,F)}.\|(e_i)_{i=1}^n\|_2^w$$

que es justamente lo que queríamos ver si notamos que $\|(e_i)_{i=1}^n\|_2^w = 1$. Volviendo a (2.23), la desigualdad recién vista nos muestra que

$$\begin{aligned} \pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) &\geq \left(c_1^F\right)^{-1}.\sup_{\|\lambda\|_{M(\ell_2^n,E_n)}\leq 1} \|\lambda\|_{M(\ell_2^n,F_n)} \\ &= \left(c_1^F\right)^{-1}.\|id : M(\ell_2^n, E_n) \hookrightarrow M(\ell_2^n, F_n)\|. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pero según la **Propiedad 1.4.15**, se tiene

$$M(l_2, E) = \left(\left((E^{\times})^2\right)^{\times}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad M(l_2, F) = \left(\left((F^{\times})^2\right)^{\times}\right)^{1/2}$$

donde las igualdades son con normas equivalentes (aquí es necesario que los espacios E y F sean 2-cóncavos). Como consecuencia de esto y de las *Observaciones 1.2.18* y *1.4.12* (notar que E y F son perfectos por ser maximales), se tendrá

$$\begin{aligned} \|id : M(\ell_2^n, E_n) \hookrightarrow M(\ell_2^n, F_n)\| &\asymp \left\| id : \left(\left((E_n^{\times})^2\right)^{\times}\right)^{1/2} \hookrightarrow \left(\left((F_n^{\times})^2\right)^{\times}\right)^{1/2} \right\| \\ &\asymp \|id : E_n \hookrightarrow F_n\|, \end{aligned}$$

que junto con la desigualdad (2.24) nos permiten afirmar que existe una constante $C_1 > 0$, tal que $\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \geq C_1.\|id : E_n \hookrightarrow F_n\|$.

Ahora probemos la segunda desigualdad en (2.21), la cual se deduce del **Teorema 2.2.13**. Podemos factorizar $id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n$ de la siguiente manera $E_n \overset{id}{\hookrightarrow} F_n \overset{id}{\hookrightarrow} \ell_2^n$, y luego por la propiedad de ideal de los operadores sumantes obtenemos

$$\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq \|id : E_n \hookrightarrow F_n\|.\pi_{F,1}(id : F_n \hookrightarrow \ell_2^n).$$

Ahora bien, por lo visto en el **Teorema 2.2.13** la identidad $id : F \hookrightarrow \ell_2$ es $(F,1)$-sumante, luego llamando $C_2 = \pi_{F,1}(id : F_n \hookrightarrow \ell_2^n)$ y notando que $\pi_{F,1}(id : F_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq C_2$ para todo n, se deduce que $\pi_{F,1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq C_2.\|id : E_n \hookrightarrow F_n\|$ que es lo que queríamos probar. □

En lo que sigue, veremos que si E es un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico entonces la inclusión $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es un operador estrictamente singular. Como consecuencia de esto y de un ejemplo construido por Kalton en [12], veremos que la hipótesis de 2-concavidad en el **Teorema 2.2.13** es necesaria. Por empezar, recordemos la definición de operador estrictamente singular.

Definición 2.2.16. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es *estrictamente singular* si la restricción de T a cada subespacio cerrado infinito dimensional de X, no es un isomorfismo.

Notar que los operadores compactos son estrictamente singulares.

Proposición 2.2.17. *Sea E un espacio de sucesiones simétrico y maximal tal que $E \hookrightarrow \ell_2$ y tal que E no es equivalente a ℓ_2. Luego, si $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(E,1)$-sumante entonces resulta estrictamente singular.*

Demostración. Supongamos que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ no es estrictamente singular. En tal caso hay un subespacio cerrado $F \subseteq E$ de dimensión infinita tal que la restricción de la inclusión a F es un isomorfismo (entre F y $id(F)$). Como $id(F) \subseteq \ell_2$ es un subespacio cerrado entonces es complementado y en consecuencia podemos considerar la proyección lineal (y acotada)

$P:\ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tal que $Rg(P)=id(F)$. Probemos que la hipótesis de que $id:E\hookrightarrow \ell_2$ es $(E,1)$-sumante implica que $P:\ell_2\hookrightarrow \ell_2$ es $(M(\ell_2,E),2)$-sumante. Consideremos $\tilde{P}=\left(id_{/F}\right)^{-1}\circ P:\ell_2\longrightarrow F$, que resulta claramente un operador acotado (es más, es una proyección) y que verifica que $id\circ\tilde{P}=P$. Ahora bien, como $id:E\hookrightarrow \ell_2$ es $(E,1)$-sumante entonces $P=id\circ\tilde{P}$ lo es (por la propiedad de ideal de los operadores sumantes) y por el teorema de inclusión (ver **Teorema 2.1.14**) que afirma que $\Pi_{E,1}\subseteq \Pi_{M(\ell_2,E),2}$, deducimos que P es $(M(\ell_2,E),2)$-sumante. Pero como E no es equivalente a ℓ_2, la **Observación 1.3.29** nos dice que $M(\ell_2,E)\hookrightarrow c_0$ y en consecuencia el **Teorema 2.1.17** afirma que $P:\ell_2\longrightarrow \ell_2$ es compacto. Luego la restricción $P_{/F}=id:F\hookrightarrow F$ (aquí usamos que P es proyección) resulta compacta, lo cual es absurdo si se tiene en cuenta que F es infinito dimensional. El absurdo proviene de suponer que $id:E\hookrightarrow \ell_2$ no es estrictamente singular. $\square$

Como consecuencia inmediata de esta proposición y del **Teorema 2.2.13**, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.2.18. *Sea E un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico tal que E no es equivalente a ℓ_2. Entonces $id:E\hookrightarrow \ell_2$ es estrictamente singular.*

Corolario 2.2.19. *Sea E un espacio de sucesiones simétrico, no equivalente a ℓ_2 y tal que $id:E\hookrightarrow \ell_2$ no es estrictamente singular. Entonces E no es 2-cóncavo (o equivalentemente, no tiene cotipo 2).*

Combinando la **Proposición 2.2.17** y el **Corolario 2.2.19**, podemos mostrar que la hipótesis de que E sea 2-cóncavo es necesaria en el **Teorema 2.2.13**. Para eso consideramos un ejemplo construido por Kalton en [12], de un espacio de Orlicz $\ell_\varphi\hookrightarrow \ell_2$, no equivalente a ℓ_2 y tal que $id:\ell_\varphi\hookrightarrow \ell_2$ no es estrictamente singular (el espacio es simétrico y maximal según lo visto en el **Capítulo 1.5** para los espacios de Orlicz). El **Corolario 2.2.19** nos dice entonces que ℓ_φ no es 2-cóncavo y la **Proposición 2.2.17** nos muestra que $id:\ell_\varphi\hookrightarrow \ell_2$ no es $(\ell_\varphi,1)$-sumante.

Para terminar esta sección, probaremos un resultado que nos muestra que el rol de ℓ_2 en el **Teorema 2.2.13** es, en cierto sentido, minimal. Más específicamente, veremos que si $E\hookrightarrow F$ son dos espacios de sucesiones simétricos y maximales y E es 2-cóncavo, entonces $id:E\hookrightarrow F$ es $(E,1)$-sumante si y solo si $\ell_2\hookrightarrow F$. Pero antes que eso, debemos probar algunas desigualdades relacionadas con los números de aproximación y los números de Weyl (ver el **Apéndice D**), que se definen de la siguiente manera. Si consideramos un operador $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ y un $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$a_n(T)=\inf\{\|T-S\|:\quad S\in\mathcal{L}(X,Y),\, rg(S)<n\}$$

es el *n-ésimo número de aproximación* de T, y

$$x_n(T)=\sup\{a_n(TS):\quad S\in\mathcal{L}(\ell_2,X),\|S\|\leq 1\}$$

es el *n-ésimo número de Weyl* de T. La siguiente proposición, generaliza la desigualdad de König enunciada en la **Proposición D.1.15**.

Proposición 2.2.20. *Sea F un espacio de sucesiones tal que $\ell_2 \hookrightarrow F$. Luego, si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador $(F,2)$-sumante entonces $x_n(T) \leq \big(\lambda_F(n)\big)^{-1}.c_2^F.\pi_{F,2}(T)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. En primer lugar notemos que si consideramos un operador $R : \ell_2 \longrightarrow Y$, entonces la **Observación D.1.9** afirma que dado un $\varepsilon > 0$ hay un sistema ortonormal $(f_n)_n$ en ℓ_2, tal que $a_n(R) \leq (1+\varepsilon).\|Rf_n\|_Y$ para todo n. Si R es $(F,2)$-sumante, esto implica que $\|\sum_{i=1}^n a_i(R)\cdot e_i\|_F \leq c_2^F.\pi_{F,2}(R)$. En efecto, la *desigualdad de Bessel* nos dice que $\|(f_n)_n\|_2^w \leq 1$ y en consecuencia,

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i(R)\cdot e_i\right\|_F \leq (1+\varepsilon).\left\|\big(\|Rf_i\|_Y\big)_{i=1}^n\right\|_E \leq (1+\varepsilon).c_2^F.\pi_{F,2}(R).$$

Como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, entonces se tiene la desigualdad planteada.

Ahora sí, consideremos $T : X \longrightarrow Y$ un operador $(F,2)$-sumante y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de los números de Weyl, hay un operador $S \in \mathcal{L}(\ell_2, X)$ con $\|S\| \leq 1$ tal que $x_n(T) \leq (1+\varepsilon).a_n(TS)$. Por un lado, el hecho de que $a_1(TS) \geq a_2(TS) \geq .... \geq 0$ y la propiedad de normalidad nos dicen que $\lambda_F(n).a_n(TS) \leq \|\sum_{i=1}^n a_i(TS)\cdot e_i\|_F$. Por otro lado, la observación hecha al comienzo de la demostración nos muestra que $\|\sum_{i=1}^n a_i(TS)\cdot e_i\|_F \leq c_2^F.\pi_{F,2}(TS) \leq c_2^F.\pi_{F,2}(T)$ (la última desigualdad es por la propiedad de ideal de operadores sumantes y porque $\|S\| \leq 1$). Juntando todo obtenemos:

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{-1}.\lambda_F(n).x_n(T) &\leq \lambda_F(n).a_n(TS) \leq \left\|\sum_{i=1}^n a_i(TS)\cdot e_i\right\|_F \\ &\leq c_2^F.\pi_{F,2}(T)\end{aligned}$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$, nos queda $\lambda_F(n).x_n(T) \leq c_2^F.\pi_{F,2}(T)$ como se quería probar. □

Notar que si en la proposición anterior ponemos $F = \ell_2$, obtenemos la ya mencionada desigualdad de König: $n^{1/2}.x_n(T) \leq \pi_2(T)$.

Observación 2.2.21. *Sean E y F dos espacios de sucesiones simétricos y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $[\frac{n}{2}]$ el mayor de los enteros menores que $\frac{n}{2}$. Se verifican las siguientes desigualdades:*

$$x_{[\frac{n}{2}]+1}(id : E_n \hookrightarrow F_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\|id : \ell_2^n \longrightarrow F_n\|}{\|id : \ell_2^n \longrightarrow E_n\|}, \tag{2.25}$$

$$a_{[\frac{n}{2}]+1}(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\|, \tag{2.26}$$

$$a_{[\frac{n}{2}]+1}(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \leq \|id : \ell_2^{n-[\frac{n}{2}]} \hookrightarrow E_{n-[\frac{n}{2}]}\|. \tag{2.27}$$

Demostración. Para probar (2.25) serán útiles la desigualdad de König (esto es, el caso $F=\ell_2$ en la proposición anterior) y la **Observación B.4.9** que afirma que:

$$\pi_2(id : F_n \hookrightarrow \ell_2^n) \leq \sqrt{n}.\frac{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n\|}{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|} \tag{2.28}$$

En primer lugar probaremos que

$$x_k(id : E_n \hookrightarrow F_n) \geq \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^{1/2}.\frac{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|}{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\|}$$

para cada $1 \leq k \leq n$. En efecto, la propiedad de multiplicidad, junto con la desigualdad de König y la desigualdad (2.28) nos muestran que,

$$\begin{aligned} x_n(\ell_2^n \overset{id}{\hookrightarrow} F_n \overset{id}{\hookrightarrow} \ell_2^n) &\leq x_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n).x_{n-k+1}(id : F_n \hookrightarrow \ell_2^n) \\ &\leq x_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n).\frac{1}{(n-k+1)^{1/2}}.\pi_2(id : F_n \hookrightarrow \ell_2^n) \\ &\leq x_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n).\frac{n^{1/2}}{(n-k+1)^{1/2}}.\frac{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n\|}{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|} \\ &= x_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n).\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^{1/2}.\frac{1}{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|}. \end{aligned}$$

Notando que por la definición de s-number, se verifican:

$$1 = x_n(id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n) \quad \text{y} \quad x_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n) \leq \|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\|.x_k(id : E_n \hookrightarrow F_n),$$

de las desigualdades anteriores se deduce que

$$1 \leq \|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\|.x_k(id : E_n \hookrightarrow F_n).\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^{1/2}.\frac{1}{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|}$$

o lo que es equivalente,

$$x_k(id : E_n \hookrightarrow F_n) \geq \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^{1/2}.\frac{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|}{\|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\|}.$$

Poniendo $k = [\frac{n}{2}]+1$ y notando que $n-[\frac{n}{2}] \geq n-\frac{n}{2}$ (y en consecuencia $\left(\frac{n-[\frac{n}{2}]}{n}\right)^{1/2} \geq \left(\frac{n-\frac{n}{2}}{n}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) se prueba que:

$$x_{[\frac{n}{2}]+1}(id : E_n \hookrightarrow F_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\|id : \ell_2^n \longrightarrow F_n\|}{\|id : \ell_2^n \longrightarrow E_n\|}.$$

La desigualdad (2.26) se deduce rápidamente de la anterior. De hecho, como los números de aproximación son los más grandes de todos los s-numbers (ver **Observación D.1.7**), entonces tenemos

$$a_{[\frac{n}{2}]+1}(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \geq x_{[\frac{n}{2}]+1}(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\|id : \ell_2^n \longrightarrow E_n\|,$$

que es lo que se quería ver.

Por último, probemos (2.27). Por definición tenemos $a_{[\frac{n}{2}]+1}(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) = \inf\{\|id - S\| : S \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E_n),\, rg(S) < [\frac{n}{2}] + 1\}$, de forma que si consideramos $S : \ell_2^n \hookrightarrow E_n$ dado por $S(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{[\frac{n}{2}]}, 0, ...)$, es claro que

$$a_{[\frac{n}{2}]+1}(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \leq \|id - S\|. \tag{2.29}$$

Por otro lado $(id - S)(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0, x_{[\frac{n}{2}]+1}, ..., x_n)$, y entonces por la simetría de E tenemos

$$\begin{aligned} \|(id - S)(x_1, ..., x_n)\|_{E_n} &= \|(0, ..., 0, x_{[\frac{n}{2}]+1}, ..., x_n)\|_{E_n} = \|(x_{[\frac{n}{2}]+1}, ..., x_n)\|_{E_{n-[\frac{n}{2}]}} \\ &\leq \|id : \ell_2^{n-[\frac{n}{2}]} \hookrightarrow E_{n-[\frac{n}{2}]}\|.\|(x_{[\frac{n}{2}]+1}, ..., x_n)\|_{\ell_2^{n-[\frac{n}{2}]}} \\ &\leq \|id : \ell_2^{n-[\frac{n}{2}]} \hookrightarrow E_{n-[\frac{n}{2}]}\|.\|(x_1, ..., x_n)\|_{\ell_2^n}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Juntando (2.29) y (2.30) obtenemos $a_{[\frac{n}{2}]+1}(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \leq \|id : \ell_2^{n-[\frac{n}{2}]} \hookrightarrow E_{n-[\frac{n}{2}]}\|$. □

Ahora sí, estamos en condiciones de probar el resultado anunciado.

Corolario 2.2.22. *Sean E y F dos espacios de sucesiones maximales y simétricos y supongamos además que E es 2-cóncavo. Luego, se verifica*

$$\pi_{E,1}(id : E_n \hookrightarrow F_n) \asymp \|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|. \tag{2.31}$$

En particular, $id : E \hookrightarrow F$ es $(E, 1)$-sumante si y solo si $\ell_2 \hookrightarrow F$.

Demostración. Para empezar, probemos que (2.31) implica la equivalencia posterior. Esta parte de la demostración es muy parecida a la comienzo de la demostración del **Corolario 2.2.15**. Supongamos primero que $id : E \hookrightarrow F$ es $(E, 1)$-sumante y veamos que $\ell_2 \hookrightarrow F$. Es claro que $\pi_{E,1}(id : E_n \hookrightarrow F_n) \leq \pi_{E,1}(id : E \hookrightarrow F)$ para todo n y en consecuencia (2.31) nos dice que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\| \leq C.\pi_{E,1}(id : E_n \hookrightarrow F_n) \leq C.\pi_{E,1}(id : E \hookrightarrow F).$$

Dado que F es maximal, de aquí se deduce que $\ell_2 \hookrightarrow F$ con $\|\ell_2 \hookrightarrow F\| \leq C.\pi_{E,1}(id : E \hookrightarrow F)$ (esta cuenta está hecha en la demostración del **Corolario 2.2.15**). Para el otro lado, supongamos que $\ell_2 \hookrightarrow F$ y veamos que $id : E \hookrightarrow F$ es $(E, 1)$-sumante (notar que en principio no suponemos $E \hookrightarrow F$, pero como $E \hookrightarrow \ell_2$ ya que E es 2-cóncavo y $\ell_2 \hookrightarrow F$ por hipótesis, entonces $E \hookrightarrow F$). Nuevamente (2.31) nos asegura que hay una constante $C > 0$ (no necesariamente la misma de antes) tal que

$$\pi_{E,1}(id : E_n \hookrightarrow F_n) \leq C.\|id : \ell_2^n \hookrightarrow F_n\| \leq C.\|id : \ell_2 \hookrightarrow F\|.$$

Como E es minimal (separable) por ser 2-cóncavo, entonces $\bigcup_n E_n$ es denso en E y en consecuencia la desigualdad anterior nos dice que $id: E \hookrightarrow F$ es $(E,1)$-sumante con $\pi_{E,1}(id: E \hookrightarrow F) \leq C.\|id: \ell_2 \hookrightarrow F\|$. La demostración de este hecho es totalmente análoga al final de la demostración del **Teorema 2.2.13** (ver de la desigualdad (2.16) en adelante).

Ahora probemos (2.31). Una de las desigualdades se deduce del **Teorema 2.2.13** vía un argumento de factorización. De hecho como E es 2-cóncavo y simétrico entonces resulta $(E,1)$-sumante, lo cual nos muestra junto con la propiedad de ideal de los operadores sumantes, que:

$$\begin{aligned}\pi_{E,1}(id: E_n \hookrightarrow F_n) &= \pi_{E,1}(E_n \overset{id}{\hookrightarrow} \ell_2^n \overset{id}{\hookrightarrow} F_n)\\ &\leq \pi_{E,1}(id: E_n \hookrightarrow \ell_2^n).\|id: \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|\\ &\leq \pi_{E,1}(id: E \hookrightarrow \ell_2).\|id: \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|.\end{aligned}$$

Llamando $C_1 = \pi_{E,1}(id: E \hookrightarrow \ell_2)$ (notar que no depende de n), hemos probado que $\pi_{E,1}(id: E_n \hookrightarrow F_n) \leq C_1.\|id: \ell_2^n \hookrightarrow F_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para la otra desigualdad, serán de gran utilidad la **Proposición 2.2.20** y las desigualdades probadas en la **Observación 2.2.21**. El **Teorema 2.1.14** junto con la **Proposición 2.2.20** (para el espacio $F = M(\ell_2, E)$) nos dicen que

$$\begin{aligned}\pi_{E,1}(id: E_n \hookrightarrow F_n) &\geq \frac{c_2^{M(\ell_2,E)}}{c_1^E}.\pi_{M(\ell_2,E),2}(id: E_n \hookrightarrow F_n)\\ &\geq \frac{1}{c_1^E}.\lambda_{M(\ell_2,E)}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).x_{[\frac{n}{2}]+1}(id: E_n \hookrightarrow F_n)\\ &= \frac{1}{c_1^E}.\|id: \ell_2^{[\frac{n}{2}]+1} \hookrightarrow E_{[\frac{n}{2}]+1}\|.x_{[\frac{n}{2}]+1}(id: E_n \hookrightarrow F_n), \qquad (2.32)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $\lambda_{M(\ell_2,E)}(k) = \|id: \ell_2^k \hookrightarrow E_k\|$ (para todo k). Ahora, juntando (2.32) con (2.25) obtenemos

$$\pi_{E,1}(id: E_n \hookrightarrow F_n) \geq \frac{1}{c_1^E}.\|id: \ell_2^{[\frac{n}{2}]+1} \hookrightarrow E_{[\frac{n}{2}]+1}\|.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\|id: \ell_2^n \longrightarrow F_n\|}{\|id: \ell_2^n \longrightarrow E_n\|},$$

y dado que $n - [\frac{n}{2}] \leq [\frac{n}{2}] + 1$ (lo cual es fácil de probar) y que en consecuencia $\|id: \ell_2^{[\frac{n}{2}]+1} \hookrightarrow E_{[\frac{n}{2}]+1}\| \geq \|id: \ell_2^{n-[\frac{n}{2}]} \hookrightarrow E_{n-[\frac{n}{2}]}\|$, la desigualdad anterior nos muestra que

$$\pi_{E,1}(id: E_n \hookrightarrow F_n) \geq \frac{1}{c_1^E}.\|id: \ell_2^{n-[\frac{n}{2}]} \hookrightarrow E_{n-[\frac{n}{2}]}\|.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\|id: \ell_2^n \longrightarrow F_n\|}{\|id: \ell_2^n \longrightarrow E_n\|}.$$

Si en esta última desigualdad aplicamos las desigualdades (2.27) y (2.26) (en ese orden), entonces nos queda

$$\begin{aligned}\pi_{E,1}(id: E_n \hookrightarrow F_n) &\geq \frac{1}{c_1^E}.a_{[\frac{n}{2}]+1}(id: \ell_2^n \hookrightarrow E_n).\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\|id: \ell_2^n \longrightarrow F_n\|}{\|id: \ell_2^n \longrightarrow E_n\|}\\ &\geq \frac{1}{c_1^E}.\frac{\|id: \ell_2^n \longrightarrow F_n\|}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\|id: \ell_2^n \longrightarrow E_n\|}{\|id: \ell_2^n \longrightarrow E_n\|}\\ &= \frac{1}{2.c_1^E}.\|id: \ell_2^n \longrightarrow F_n\|.\end{aligned}$$

Llamando $C_2 = 2.c_1^E$ queda probado que $\|id : \ell_2^n \longrightarrow F_n\| \leq C_2.\pi_{E,1}(id : E_n \hookrightarrow F_n)$ para todo n, y en consecuencia queda demostrado el resultado. $\square$

2.2.2. Números de aproximación de operadores identidad

En [19, 11.11.5] se calculan los números de aproximación de las identidades $id : \ell_q^n \hookrightarrow \ell_p^n$ para $1 \leq p < q < \infty$. De hecho, según lo enunciado en el **Teorema D.1.10** se verifica

$$a_k(id : \ell_q^n \hookrightarrow \ell_p^n) = (n-k+1)^{1/p-1/q}$$

para todo $1 \leq k \leq n$. En el caso particular $1 \leq p < q = 2$, nos queda

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_p^n) = (n-k+1)^{1/p-1/2} = \frac{\lambda_{\ell_p}(n-k+1)}{(n-k+1)^{1/2}}. \tag{2.33}$$

Como aplicación del **Teorema 2.2.13** veremos que se puede generalizar (2.33) de manera asintótica, cuando cambiamos el espacio ℓ_p por un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico. Antes de enunciar este resultado, veremos un par de lemas auxiliares.

Lema 2.2.23. *Sea E un espacio de sucesiones simétrico y 2-cóncavo. Luego se verifica*

$$\|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\| \asymp \frac{\lambda_E(n)}{n^{1/2}} \tag{2.34}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Comencemos notando, como ya lo hemos hecho en otras ocasiones, que $\|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\| = \lambda_{M(\ell_2,E)}(n)$, lo cual nos permite reescribir (2.34) de la siguiente manera:

$$\lambda_{M(\ell_2,E)}(n) \asymp \frac{\lambda_E(n)}{n^{1/2}}.$$

Ahora recordemos algunos resultados que serán de utilidad en la demostración de esta fórmula. Por un lado, la **Propiedad 1.4.15** nos dice que $M(\ell_2, E) = \left(((E^\times)^2)^\times\right)^{1/2}$ con normas equivalentes. En segundo lugar, las desigualdades (1.39) junto con la **Propiedad 1.4.5**, nos muestran que si E es 2-cóncavo entonces

$$\frac{\||x|^{1/2}\|_{E^\times}^2}{(M_{(2)}(E))^2} \leq \|x\|_{(E^\times)^2} \leq \||x|^{1/2}\|_{E^\times}^2 \tag{2.35}$$

para todo $x \in E$. Por último, la **Observación 1.2.11** afirma que si E es un espacio de sucesiones simétrico entonces

$$\lambda_E(n).\lambda_{E^\times}(n) = n \tag{2.36}$$

para todo n. Volviendo a la demostración, es claro que

$$\lambda_{M(\ell_2,E)}(n) = \|e_1 + ... + e_n\|_{M(\ell_2,E)} \asymp \|e_1 + ... + e_n\|_{\left(((E^\times)^2)^\times\right)^{1/2}},$$

de manera que bastará probar que $\|e_1+...+e_n\|_{\left(((E^\times)^2)^\times\right)^{1/2}} \asymp \frac{\lambda_E(n)}{n^{1/2}}$. Notando que $|e_1+...+e_n|^2 = e_1+...+e_n$ y haciendo uso de la igualdad (2.36) obtenemos:

$$\begin{aligned}\|e_1+...+e_n\|_{\left(((E^\times)^2)^\times\right)^{1/2}} &= \||e_1+...+e_n|^2\|^{1/2}_{((E^\times)^2)^\times} = \|e_1+...+e_n\|^{1/2}_{((E^\times)^2)^\times} \\ &= \left(\frac{n}{\|e_1+...+e_n\|_{(E^\times)^2}}\right)^{1/2}. \qquad (2.37)\end{aligned}$$

Una de las desigualdades en (2.35) nos muestra que $\left(\frac{n}{\|e_1+...+e_n\|_{(E^\times)^2}}\right)^{1/2} \leq \frac{n^{1/2}}{\|e_1+...+e_n\|_{E^\times}}.M_{(2)}(E)$ y en consecuencia se deduce que:

$$\begin{aligned}\|e_1+...+e_n\|_{\left(((E^\times)^2)^\times\right)^{1/2}} &\leq \frac{n^{1/2}}{\|e_1+...+e_n\|_{E^\times}}.M_{(2)}(E) \\ &= n^{1/2}.\frac{\|e_1+...+e_n\|_E}{n}.M_{(2)}(E) \\ &= \frac{\lambda_E(n)}{n^{1/2}}.M_{(2)}(E)\end{aligned}$$

(donde la igualdad se debe nuevamente a (2.36)). Por otro lado, la segunda desigualdad en (2.35) nos dice que $\left(\frac{n}{\|e_1+...+e_n\|_{(E^\times)^2}}\right)^{1/2} \geq \frac{n^{1/2}}{\|e_1+...+e_n\|_{E^\times}}$, de forma que volviendo a (2.37) y razonando igual que antes obtenemos

$$\frac{\lambda_E(n)}{n^{1/2}} \leq \|e_1+...+e_n\|_{\left(((E^\times)^2)^\times\right)^{1/2}}.$$

En definitiva, hemos probado que $\|e_1+...+e_n\|_{\left(((E^\times)^2)^\times\right)^{1/2}} \asymp \frac{\lambda_E(n)}{n^{1/2}}$ como se quería ver. Observar que en el caso en que sea $M_{(2)}(E)=1$, se verifica la igualdad $\|id: \ell_2^n \hookrightarrow E_n\| = \frac{\lambda_E(n)}{n^{1/2}}$. □

Antes de enunciar el próximo lema, será necesaria la siguiente definición (que también se puede ver en el **Apéndice D**). El *n-ésimo número de Hilbert* de un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, está dado por

$$h_n(T) = \sup\{a_n(RTS): \quad S \in \mathcal{L}(\ell_2, X), \|S\| \leq 1 \text{ y } R \in \mathcal{L}(Y,\ell_2), \|R\| \leq 1\}.$$

Para determinados operadores, estos números coinciden con los números de Weyl como veremos a continuación.

Observación 2.2.24. *Sea X un espacio de Banach y consideremos un operador $T: X \longrightarrow \ell_2^n$. Luego $h_k(T) = x_k(T)$ para todo $1 \leq k \leq n$.*

Demostración. Fijemos $1 \leq k \leq n$. Dado que los números de Hilbert son los más chicos de todos los s-numbers (ver **Observación D.1.11**) es evidente que $h_k(T) \leq x_k(T)$. Para la otra desigualdad notemos que como los números de aproximación tienen la propiedad de inyectividad sobre los operadores entre espacios de Hilbert (ver **Definición D.1.4** y **Teorema D.1.5**), entonces si consideramos el operador $J_n \in \mathcal{L}(\ell_2^n, \ell_2)$ dado por $J_n(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ...)$, resulta claro que $a_k(J_nTS) = a_k(TS)$ para todo operador $S \in \mathcal{L}(\ell_2, X)$. Ahora bien, notando que $\|J_n\| \leq 1$ obtenemos,

$$\begin{aligned} h_k(T) &= \sup\{a_k(RTS) : \quad S \in \mathcal{L}(\ell_2, X), \|S\| \leq 1 \,\mathrm{y}\, R \in \mathcal{L}(Y, \ell_2), \|R\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{a_k(J_nTS) : \quad S \in \mathcal{L}(\ell_2, X), \|S\| \leq 1\} \\ &= \sup\{a_k(TS) : \quad S \in \mathcal{L}(\ell_2, X), \|S\| \leq 1\} \\ &= x_k(T) \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

Lema 2.2.25. *Sean X, Y dos espacios de Banach tales que $dim(X) = dim(Y) = n$.*

a) Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ con $rg(T) = n$, entonces $h_k(T).a_{n-k+1}(T^{-1}) \leq 1$ para todo $1 \leq k \leq n$.

b) Si $T \in \mathcal{L}(X, \ell_2^n)$ con $rg(T) = n$, entonces $x_k(T).a_{n-k+1}(T^{-1}) = 1$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Fijemos $1 \leq k \leq n$ y comencemos probando a). Dado $0 < \varepsilon < 1$, la **Proposición D.1.13** nos dice que existen $S \in \mathcal{L}(\ell_2^k, X)$ y $R \in \mathcal{L}(Y, \ell_2^k)$ tales que $\|S\| \leq 1$, $\|R\| \leq 1$ y $RTS = (1-\varepsilon).h_k(T).id_k$ (donde $id_k = id : \ell_2^k \hookrightarrow \ell_2^k$). Llamemos $\rho = (1-\varepsilon).h_k(T)$ y consideremos el operador $A : Y \longrightarrow X$ definido por $A = T^{-1} - \rho^{-1}.SR$ (notar que tiene sentido considerar T^{-1} puesto que $rg(T) = dim(X) = dim(Y) = n$). Notemos que $ATS \equiv 0$. De hecho,

$$\begin{aligned} ATS &= (T^{-1} - \rho^{-1}.SR)TS = T^{-1}TS - \rho^{-1}.SRTS \\ &= S - \rho^{-1}.\rho.S = S - S \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto nos muestra que $dim(Ker(A)) \geq rg(TS) = k$, donde la última igualdad se debe a que $TS : \ell_2^k \longrightarrow Y$ es un operador inyectivo (pues $RTS = \rho.id_k$). Luego $rg(A) = n - dim(Ker(A)) < n - (k-1) = n - k + 1$ y en consecuencia utilizaremos este operador A para estimar $a_{n-k+1}(T^{-1})$. Por definición del operador se tiene $T^{-1} - A = \rho^{-1}.SR$ y dado que $rg(A) < n - k + 1$ se deduce que,

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon).h_k(T).a_{n-k+1}(T^{-1}) &= \rho.a_{n-k+1}(T^{-1}) \leq \rho.\|T^{-1} - A\| \\ &= \rho.\rho^{-1}.\|SR\| = \|S\|.\|R\| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $h_k(T).a_{n-k+1}(T^{-1}) \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)}$. Como $0 < \varepsilon < 1$ era cualquiera, se concluye que $h_k(T).a_{n-k+1}(T^{-1}) \leq 1$.

Ahora veamos b). La desigualdad $x_k(T).a_{n-k+1}(T^{-1}) \leq 1$ se deduce rápidamente del ítem a) y de la **Observación 2.2.24**. Para el otro lado, notar que como los números de Weyl son s-numbers entonces $x_n(id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n) = 1$. Luego, dada la siguiente factorización de la identidad $\ell_2^n \overset{T^{-1}}{\hookrightarrow} X \overset{T}{\hookrightarrow} \ell_2^n$ y teniendo en cuenta que los números de Weyl son multiplicativos (ver **Observación D.1.14**), se obtiene $1 = x_n(TT^{-1}) \leq x_k(T).x_{n-k+1}(T^{-1})$. Esto, junto con el hecho de que los números de aproximación son los más grandes de todos los s-numbers, nos muestra que $x_k(T).a_{n-k+1}(T^{-1}) \geq 1$ como se quería ver. $\square$

Ahora sí, estamos en condiciones de probar la generalización de la fórmula (2.33).

Teorema 2.2.26. *Sea E un espacio de sucesiones 2-cóncavo y simétrico. Luego se verifica*

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \asymp \frac{\lambda_E(n-k+1)}{(n-k+1)^{1/2}} \tag{2.38}$$

para cada $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Notar que el caso $k = 1$ ya fue probado en el **Lema 2.2.23** (de hecho, basta observar que $a_1(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) = \|id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n\|$). Este caso particular será de gran utilidad en la demostración. En efecto, este resultado nos dice que

$$\frac{\lambda_E(n-k+1)}{(n-k+1)^{1/2}} \asymp \|id : \ell_2^{n-k+1} \hookrightarrow E_{n-k+1}\| = \lambda_{M(\ell_2,E)}(n-k+1),$$

de manera que la demostración de (2.38) se reduce a probar que $a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \asymp \lambda_{M(\ell_2,E)}(n-k+1)$ para $2 \leq k \leq n$. Hay una desigualdad que es directa, y para probarla basta considerar el operador $S \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E_n)$ dado por $S(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0, x_{n-k+2}, ..., x_n)$. Es claro que $rg(S) < k$, lo cual nos dice que $a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \leq \|id - S\|$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|(id - S)(x_1, ..., x_n)\| &= \|(x_1, ..., x_{n-k+1}, 0, ...)\|_E = \|(x_1, ..., x_n, 0...)(e_1 + ... + e_{n-k+1})\|_E \\ &\leq \|(e_1 + ... + e_{n-k+1})\|_{M(\ell_2,E)}.\|(x_1, ..., x_n, 0...)\|_2, \end{aligned}$$

lo cual nos muestra que $\|id - S\| \leq \lambda_{M(\ell_2,E)}(n-k+1)$. Juntando ambas desigualdades se obtiene

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \leq \lambda_{M(\ell_2,E)}(n-k+1).$$

Ahora veamos que hay una constante $C > 0$ (que no depende de n ni de k) tal que $a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \geq C.\lambda_{M(\ell_2,E)}(n-k+1)$. Según lo visto en el **Lema 2.2.25**, tenemos

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) = \frac{1}{x_{n-k+1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n)}$$

y en consecuencia bastará probar que hay una constante C tal que $x_{n-k+1}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n).C \leq \left(\lambda_{M(\ell_2,E)}(n-k+1)\right)^{-1}$ para cada $1 \leq k \leq n$. Esto es equivalente a probar que existe una constante C tal que $x_k(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n).C \leq \left(\lambda_{M(\ell_2,E)}(k)\right)^{-1}$ para cada $1 \leq k \leq n$. Para probar esto último, hacemos uso del **Teorema 2.2.13** que nos dice que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es un operador $(E,1)$-sumante y por lo tanto $(M(\ell_2,E),2)$-sumante según el **Teorema 2.1.14**. Aplicando entonces la desigualdad generalizada de König (ver **Proposición 2.2.20**) obtenemos:

$$\begin{aligned} x_k(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n) &\leq c_2^{M(\ell_2,E)}.\pi_{M(\ell_2,E),2}(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n).\big(\lambda_{M(\ell_2,E)}(k)\big)^{-1} \\ &\leq c_2^{M(\ell_2,E)}.\pi_{M(\ell_2,E),2}(id : E \hookrightarrow \ell_2).\big(\lambda_{M(\ell_2,E)}(k)\big)^{-1} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe justamente a que $id : E \hookrightarrow \ell_2$ es $(M(\ell_2,E),2)$-sumante. Llamando $C = \big(c_2^{M(\ell_2,E)}.\pi_{M(\ell_2,E),2}(id : E \hookrightarrow \ell_2)\big)^{-1}$ queda probado que $x_k(id : E_n \hookrightarrow \ell_2^n).C \leq \big(\lambda_{M(\ell_2,E)}(k)\big)^{-1}$ y en consecuencia

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow E_n) \geq C.\lambda_{M(\ell_2,E)}(n-k+1)$$

como se quería ver. □

Como consecuencia de este teorema, obtenemos las siguientes fórmulas asintóticas que conciernen a los espacios de Orlicz y de Lorentz.

Corolario 2.2.27. *a) Si $1 < p < 2$ y $1 \leq q \leq 2$, entonces*

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_{p,q}^n) \asymp (n-k+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \tag{2.39}$$

para cada $1 \leq k \leq n$.

b) Sean $1 \leq p < 2$ y $d(w,p)$ un espacio de Lorentz tal que w es $\frac{2}{2-p}$-regular. Luego se verifica

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow d(w,p)_n) \asymp (n-k+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.w_{n-k+1}^{1/p}. \tag{2.40}$$

para cada $1 \leq k \leq n$.

c) Sea φ una función de Orlicz tal que $\varphi(\lambda t) \geq K.\lambda^2.\varphi(t)$ para todo $0 \leq t, \lambda \leq 1$ (para alguna constante $K > 0$). Entonces se tiene

$$a_k(id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_\varphi^n) \asymp \frac{\big(\varphi^{-1}(1/(n-k+1))\big)^{-1}}{(n-k+1)^{1/2}} \tag{2.41}$$

para cada $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Según lo visto en el **Capítulo 1.5**, los espacios $\ell_{p,q}$, $d(w,p)$ y ℓ_φ son siempre simétricos y resultan 2-cóncavos bajo las hipótesis pedidas. De esta manera, notando que

$$\begin{aligned} \lambda_{\ell_{p,q}}(n) &\asymp n^{1/p} \\ \lambda_{d(w,p)}(n) &\asymp n^{1/p}.w_n^{1/p} \\ \lambda_{\ell_\varphi}(n) &= \frac{1}{\varphi^{-1}(1/n)} \end{aligned}$$

(ver nuevamente **1.5**) y aplicando el **Teorema 2.2.26**, quedan probadas las fórmulas (2.39), (2.40) y (2.41). □

Apéndice A

Banach lattices

Veremos algunas cuestiones básicas en relación a los Banach lattices. Comenzaremos con algunas definiciones y ejemplos sencillos y, seguido a eso, se introducirán los conceptos de concavidad y convexidad en estos espacios, que son de gran utilidad en el estudio de las potencias de los espacios de sucesiones. Todos estos contenidos pueden verse en detalle en [18], [16], [10].

A.1. Espacios de Riesz

Definición A.1.1. Un conjunto $X \neq \emptyset$ con una relación $\leq$ se denomina *conjunto ordenado* si verifica:

a) $x \leq x$ para todo $x \in X$.

b) Si $x, y \in X$ son tales que $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$.

c) Si x, y, z son tales que $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Diremos que X es un *conjunto totalmente ordenado* si dados $x, y \in X$ se tiene $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Sea A un subconjunto de un conjunto ordenado X. Diremos que $x \in X$ es *cota superior* de A si $y \leq x$ para todo $y \in A$. Análogamente, si $x \leq y$ para todo $y \in A$ diremos que x es *cota inferior* de A. Dados $x, y \in X$ notaremos, siempre que existan,

$$\begin{aligned} x \vee y &= \sup\{x, y\} \\ x \wedge y &= \text{ínf}\{x, y\} \end{aligned}$$

a la menor (resp. la mayor) de las cotas superiores (resp. inferiores) de $A = \{x, y\}$. De manera análoga, si $z \in X$ es la mínima cota superior de un subconjunto $A \subseteq X$, notaremos $z = \bigvee_{x \in A} x$, mientras que si z es la mayor cota inferior de A, será $z = \bigwedge_{x \in A} x$.

Definición A.1.2. Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ se denomina *lattice* (o reticulado) si dados $x, y \in X$ existen $x \vee y$ y $x \wedge y$.

Es fácil ver que si $(X, \leq)$ es lattice y $A \subseteq X$ un subconjunto finito, entonces existen $\bigvee_{x \in A} x$ y $\bigwedge_{x \in A} x$. Sin embargo, no se puede afirmar lo mismo en el caso en que A sea infinito.

Ejemplos A.1.3. Sea X un conjunto no vacío.

i) Si $\mathcal{M}$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X, con el orden dado por la inclusión de conjuntos, entonces $\mathcal{M}$ es lattice (con $A \vee B = A \cup B$ y $A \wedge B = A \cap B$).

ii) Si X es infinito, $\mathcal{N} = \{A \subseteq X \,/\, A \,\text{finito ó}\, A^c \,\text{finito}\}$ es lattice con el orden dado por la inclusión. En este caso, si consideramos $Y \subseteq X$ tal que $Y \notin \mathcal{N}$ y $\mathcal{B} = \{\{x\} \;:\, x \in Y\}$ subconjunto de $\mathcal{N}$, entonces no existe $\bigvee_{\{x\} \in \mathcal{B}} \{x\}$.

La idea es estudiar espacios vectoriales que cuenten además con la estructura de conjunto ordenado.

Definición A.1.4. Sea E un espacio vectorial (*e.v.*) sobre $\mathbb{R}$ que verifique además ser un conjunto ordenado. Diremos que E es un *espacio vectorial ordenado* (*e.v.o.*) si las estructuras de *e.v.* y de conjunto ordenado son compatibles en el siguiente sentido. Dados $x, y \in E$ tales que $x \leq y$, se verifican:

a) $x + z \leq y + z \;\; \forall z \in E$,

b) $\lambda . x \leq \lambda . y \;\; \forall \lambda \geq 0$.

Si además $(E, \leq)$ es lattice entonces E se denomina *espacio de Riesz* (o vector lattice).

De aquí en adelante E será un espacio de Riesz.

Notamos $E_+ = \{x \in E \,:\, x \geq 0\}$ al *cono positivo* de E y dado un $x \in E$ notaremos,

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad \text{y} \quad |x| = x \vee (-x)$$

(todos ellos elementos en el cono positivo de E). Se dice que $x, y \in E$ son *disjuntos* ($x \perp y$) si $|x| \wedge |y| = 0$.

Las siguientes propiedades (y algunas más) pueden verse en [18] (pág. 3).

Propiedades A.1.5. Sean $x, y, z \in E$.

a) $x \vee y = -((-x) \wedge (-y))$, $x \wedge y = -((-x) \vee (-y))$.

b) $x + y = x \vee y + x \wedge y$. En particular $x = x^+ - x^-$.

c) $|x| = x^+ + x^-$.

d) $x^+ \perp x^-$ y la descomposición de x como diferencia de dos elementos positivos es única.

e) $(x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z)$, $(x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z)$.

f) Si $x, y, z \in E_+$ son tales que $0 \leq z \leq x + y$ entonces existen $u, v \in E_+$ verificando $u \leq x$, $v \leq y$ y $z = u + v$ (esta es la llamada propiedad de descomposición de Riesz).

Ejemplo A.1.6. Sean X un conjunto no vacío y $B(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \text{f es acotada}\}$. Es claro que $B(X)$ es un *e.v.* y tiene un orden definido por : $f \geq g$ si $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in X$. Con este orden $(B(X), \leq)$ es un espacio de Riesz (donde $(f \vee g)(t) = \text{máx}\{f(t), g(t)\}$ y $(f \wedge g)(t) = \text{mín}\{f(t), g(t)\}$).

Definición A.1.7. Sea $\|\cdot\|_E$ una norma en E. Decimos que $\|\cdot\|_E$ es una *lattice norm* si dados $x, y \in E$ tales que $|x| \leq |y|$ se verifica $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Un espacio de Riesz con una lattice norm se llama *espacio de Riesz normado*. Si además el espacio es completo (respecto de la norma) entonces decimos que $(E, \|\cdot\|_E, \leq)$ es un *Banach lattice.*

Ejemplos A.1.8. *i*) Sea K un compacto Hausdorff. Consideremos $C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \text{f es continua}\}$ con el orden definido como en el ejemplo anterior y con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Luego $(C(K), \|\cdot\|_\infty, \leq)$ es un Banach lattice.

ii) Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida, $L^p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ es un Banach lattice con la norma usual $\|\cdot\|_p$ y el orden $f \leq g$ definido por: $f(t) \leq g(t)$ en casi todo punto.

iii) Consideremos el espacio $C^1(0,1)$ de todas las funciones $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables con derivada continua. Definimos un orden en $C^1(0,1)$ dado por : $f \leq g$ si $f(0) \leq g(0)$ y $f'(t) \leq g'(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Por otro lado consideramos en este espacio, la norma dada por $\|f\|_{C^1} = \|f'\|_\infty + |f(0)|$. Con el orden y la norma definidas, $C^1(0,1)$ es un Banach lattice.

En este caso, es sencillo ver que $C^1(0,1)$ es un *e.v.o.* y que $\|\cdot\|_{C^1}$ es una lattice norm (con la que el espacio resulta completo). Para ver que es lattice, hay que probar que dadas $f, g \in C^1(0,1)$ se verifica:

$$f \vee g(t) = \int_0^t \text{máx}\{f'(s), g'(s)\} ds + \text{máx}\{f'(0), g'(0)\}$$
$$f \wedge g(t) = \int_0^t \text{mín}\{f'(s), g'(s)\} ds + \text{mín}\{f'(0), g'(0)\}$$

(no sirven $f \vee g(t) = \text{máx}\{f(t), g(t)\}$ y $f \wedge g(t) = \text{mín}\{f(t), g(t)\}$ como en $C(0,1)$, ya que no necesariamente son funciones derivables).

Definiciones A.1.9. Sea E un espacio de Riesz.

a) Un subespacio $U \subseteq E$ se denomina *sublattice* de E si $x \vee y$,$x \wedge y \in U$ para todos los $x, y \in U$.

b) Un subconjunto A de E se llama *sólido* si cada vez que $|x| \leq |y|$ con $x \in E$ e $y \in A$ se verifica $x \in A$ (esta definición es similar a la de espacio de sucesiones normal, ver **Definición 1.1.1**).

c) I es un *ideal* en E si es un subespacio sólido de E

Observación A.1.10. *Se puede probar que si I es un ideal en E entonces es sublattice.*

Observación A.1.11. *Dados dos ideales I_1, I_2 en E, la suma $I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 : \quad x_j \in I_j\,(j = 1, 2)\}$ es nuevamente un ideal en E. No sucede lo mismo si en lugar de considerar ideales, se consideran sublattices. La demostración de esta propiedad no es complicada, simplemente hay que probar que $I_1 + I_2$ es sólido y para eso son útiles algunas de las* ***Propiedades A.1.5****.*

Ejemplos A.1.12. Consideremos los espacios de sucesiones c_0, c, ℓ_∞ (que son claramente espacios de Riesz).

i) $c \subseteq \ell_\infty$ es sublattice pero no es un ideal.

ii) c_0 es un ideal en ℓ_∞.

Definición A.1.13. Sean E, F Banach lattices. Diremos que $T : E \longrightarrow F$ es un *morfismo entre lattices* si es un morfismo entre espacios de Banach y además respeta las operaciones $\vee$ y $\wedge$. Esto es, $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ y $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ para todo $x, y \in E$.

Un isomorfismo entre Banach lattices será entonces un isomorfismo entre espacios de Banach que sea morfismo entre lattices.

A.2. Espacios de funciones

Los espacios de funciones (o espacios de funciones de Köthe) son una clase de ejemplos de Banach lattices (entre los cuales se encuentran los espacios de sucesiones). Hay varias definiciones (similares) para los espacios de funciones; la que mejor se adapta a nuestros contenidos es la de [16]. Antes de dar esta definición, recordemos los siguientes conceptos.

Observación A.2.1. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.*

El espacio se dice completo si todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible.

La medida μ es σ-finita si se puede escribir a Ω como unión numerable de conjuntos medibles y de medida finita.

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable si es medible y $\int_\sigma |f(\omega)| d\mu < \infty$, para todo $\sigma \in \Sigma$ con $\mu(\sigma) < \infty$.

Definición A.2.2. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo y de medida σ-finita. Consideremos un espacio de Banach X, cuyos elementos sean clases de equivalencia (modulo igualdad en casi todo punto) de funciones a valores reales localmente integrables. Diremos que X es un *espacio de funciones de Köthe* si se verifican las siguientes condiciones :

a) Si $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ a.e. en Ω, con f medible y $g \in X$ entonces $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \|g\|_X$.

b) Si $\sigma \in \Sigma$ con $\mu(\sigma) < \infty$, entonces la función característica χ_σ pertenece a X.

Todo espacio de funciones de Köthe es un Banach lattice con el orden definido por: $f \leq g$ si $f(\omega) \leq g(\omega)$ a.e. en Ω.

Observación A.2.3. *Dado un espacio de sucesiones E, es sencillo ver que resulta un espacio de funciones. De hecho basta tomar como espacio de medida a $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \sharp)$ y asociar a cada $(x_n)_n \in E$ con una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (localmente integrable) dada por $f(n) = x_n$. Luego, la primer condición de la definición se deduce de la propiedad de normalidad de los espacios de sucesiones, mientras que la segunda se debe a la inclusión $c_{00} \subsetneq E$.*

A.3. Cálculo funcional

En esta sección nos proponemos darle sentido a expresiones del tipo:

$$\left(\sum_{k\leq n} |x_k|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{A.1}$$

donde $x_1, ..., x_k$ son elementos en algún Banach lattice. Esto será fundamental para la posterior definición de concavidad y convexidad en Banach lattices.

Notemos que expresiones del tipo (A.1) tienen sentido si consideramos como Banach lattice a $C(K)$ o $L_q(\mu)$. De hecho están definidas puntualmente (o en casi todo punto) de la siguiente manera:

$$\left(\left(\sum_{k\leq n} |f_k|^p\right)^{1/p}\right)(\omega) = \left(\sum_{k\leq n} |f_k(\omega)|^p\right)^{1/p}$$

donde $f_1, ..., f_n \in C(K)$ (resp. en $L_q(\mu)$) y $\omega \in K$ (resp. en Ω).

La idea será usar un resultado (debido a Kakutani) que identifica ciertos lattices con espacios de funciones continuas $C(K)$ (para algún compacto K), en donde las expresiones planteadas tienen sentido. Antes de enunciar este resultado, precisamos algunas definiciones.

En primer lugar, diremos que un Banach lattice E es un *M-espacio abstracto* si $\|x \vee y\|_E = \max\{\|x\|_E, \|y\|_E\}$, $\forall x, y \in E_+$. Por otro lado, se dice que $e > 0$ es una *unidad* de E si se verifica:

$$\|x\| \leq 1 \Longleftrightarrow |x| \leq e.$$

El siguiente teorema puede verse en [10, Teo. 16.1] o en [16, Teo. 1.b.6].

Teorema A.3.1. ***(Teorema de representación de Kakutani)*** *Sea E un M-espacio abstracto con unidad. Luego E es isomorfo, como Banach lattice, a un espacio de funciones continuas $C(K)$ (para algún K compacto, Hausdorff).*

Claramente, el isomorfismo manda la unidad de E en la unidad de $C(K)$, que es la función $f \equiv 1$. Este teorema será de gran utilidad en la próxima observación.

Observación A.3.2. *Sea E un Banach lattice y sea $x \in E_+$. Consideramos el ideal generado por x, dado por:*

$$I(x) = \{y \in E \ : \ |y| \leq \lambda.|x| \quad \textit{para algún} \quad 0 < \lambda < \infty\}.$$

Es claro que $I(x) = \{0\}$ si y solo si $x = 0$. Cuando $x \neq 0$, definimos en $I(x)$ la norma

$$\|y\|_\infty = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \ : \ |y| \leq \frac{\lambda}{\|x\|_E}.|x|\right\}.$$

*Se puede ver fácilmente que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma y que $\|y\|_E \leq \|y\|_\infty$ para todo $y \in I(x)$ (más aún, con x vale la igualdad). El espacio $(I(x), \|\cdot\|_\infty)$ resulta completo y es Banach lattice con el orden que hereda de E. Además, se prueba que $(I(x), \|\cdot\|_\infty)$ es un M-espacio abstracto con unidad $\frac{x}{\|x\|_E}$. Luego el **Teorema A.3.1** nos dice que $(I(x), \|\cdot\|_\infty)$ es isomorfo (como Banach lattice) a un espacio de funciones continuas $C(K)$.*

Ahora veamos cómo se construye el cálculo funcional en un Banach lattice E.

Llamemos $\mathcal{C}_n$ a la familia de funciones $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que se obtienen de las funciones coordenadas $(t_1, ..., t_n) \longmapsto t_k$ $(1 \leq k \leq n)$ mediante finitas operaciones de suma, multiplicación por escalares, ínf y sup (sobre finitos elementos). Luego dados $x_1, ..., x_n \in E$ y dada $h \in \mathcal{C}_n$, tiene sentido la expresión $h(x_1, ..., x_n) \in E$ que se obtiene reemplazando los $t_i \in \mathbb{R}$ por los $x_i \in E$ en la fórmula de la función h (esto es porque todas las operaciones mediante las cuales se obtiene h tienen sentido en un lattice).

Observación A.3.3. *Fijados $x_1, ..., x_n \in E$, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} j : \mathcal{C}_n & \longrightarrow & E \\ h & \longmapsto & h(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

está bien definida.

Demostración. Para ver esto se utiliza la observación anterior. Consideremos $x = |x_1| \vee ... \vee |x_n| \in E_+$. Notar que si $h \in \mathcal{C}_n$ entonces $h(x_1, ..., x_n) \in I(x)$ (basta ver que esto es cierto para las funciones coordenadas y que sigue valiendo bajo las operaciones de suma, multiplicación por escalar, ínf y sup). Ahora bien, hay que probar que si $h, \tilde{h} \in \mathcal{C}_n$ son tales que $h(t_1, ..., t_n) = \tilde{h}(t_1, ..., t_n)$ para todo $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $h(x_1, ..., x_n) = \tilde{h}(x_1, ..., x_n)$. Por la **observación A.3.2**, los elementos de $I(x)$ se pueden identificar con elementos en un espacio de funciones continuas $C(K)$, lo cual nos permite pensar a x_k como funciones en $C(K)$ $(1 \leq k \leq n)$. Pero en $C(K)$ las expresiones del tipo $h(x_1, ..., x_n)$ tienen sentido puntualmente, de forma que $h(x_1, ..., x_n) = \tilde{h}(x_1, ..., x_n)$ si y solo si $h(x_1(\omega), ..., x_n(\omega)) = \tilde{h}(x_1(\omega), ..., x_n(\omega))$ para todo $\omega \in K$, y esto último se verifica por la hipótesis de que $h(t_1, ..., t_n) = \tilde{h}(t_1, ..., t_n)$ para todo $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Vía el isomorfismo entre $I(x)$ y $C(K)$ concluimos que $h(x_1, ..., x_n) =$

$\tilde{h}(x_1, ..., x_n)$ en $(I(x), \|.\|_\infty)$. Teniendo en cuenta que $\|\cdot\|_E \leq \|\cdot\|_\infty$ (lo mencionamos en la **Observación A.3.2**) obtenemos

$$\|h(x_1, ..., x_n) - \tilde{h}(x_1, ..., x_n)\|_E \leq \|h(x_1, ..., x_n) - \tilde{h}(x_1, ..., x_n)\|_\infty = 0$$

y en consecuencia $h(x_1, ..., x_n) = \tilde{h}(x_1, ..., x_n)$ en E. □

La idea es extender la aplicación $j : \mathcal{C}_n \longrightarrow E$ al espacio de las funciones positivo-homogéneas de grado uno, dado por

$$\mathcal{H}_n = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continuas, } f(\lambda t_1, ..., \lambda t_n) = \lambda f(t_1, ..., t_n)\ \forall \lambda \geq 0\}.$$

Observación A.3.4. *$\mathcal{H}_n$ es un Banach lattice y $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{H}_n$ es sublattice (con el orden definido puntualmente, como es usual). Además, si S_n es la esfera unidad de ℓ_∞^n, entonces*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n & \longrightarrow & C(S_n) \\ f & \longmapsto & f_{|S_n} \end{array}$$

es un isomorfismo entre Banach lattices.

Observación A.3.5. *Vía el isomorfismo definido en la observación anterior, podemos pensar a $\mathcal{C}_n$ como sublattice de $C(S_n)$. Se verifica que $\mathcal{C}_n$ es denso en $C(S_n)$.*

Demostración. Esto es una simple aplicación del teorema de Stone-Weierstrass (en su versión para lattices), ya que $\mathcal{C}_n$ separa puntos de S_n y contiene a las constantes. □

Ahora bien, la aplicación $j : \mathcal{C}_n \longrightarrow E$ es lineal, preserva el orden y resulta continua si le damos a $\mathcal{C}_n$ la norma inducida por $C(S_n)$. Para esto último, notar que si $h \in \mathcal{C}_n$ entonces

$$|h(t_1, ..., t_n)| = |h(\lambda s_1, ..., \lambda s_n)| = \lambda |h(s_1, ..., s_n)| \leq \lambda . \|h\|_{C(S_n)},$$

donde $\lambda = \text{máx}_k |t_k|$ y $s = \frac{1}{\lambda}.(t_1, ..., t_n)$. Luego $|h(t_1, ..., t_n)| \leq \|h\|_{C(S_n)}. \text{máx}_k |t_k|$ y como j preserva el orden, entonces $|h(x_1, ..., x_n)| \leq \|h\|_{C(S_n)}.x$ con $x = |x_1| \vee ... \vee |x_n|$. Dado que E es lattice se concluye que

$$\|h(x_1, ..., x_n)\| \leq \|h\|_{C(S_n)}.\|x\|_E, \tag{A.2}$$

lo cual nos muestra que $j : \mathcal{C}_n \longrightarrow E$ es continua.

Por la **Observación A.3.5**, $j : \mathcal{C}_n \longrightarrow E$ se extiende continuamente (de manera única) a $\tilde{j} : C(S_n) \longrightarrow E$, que resulta lineal y preserva el orden. Pensando en el isomorfismo definido en la **Observación A.3.4**, tenemos $\tilde{j} : \mathcal{H}_n \longrightarrow E$, lo cual le da sentido a las expresiones $\tilde{j}(h) = h(x_1, ..., x_n) \in E$ para toda $h \in \mathcal{H}_n$.

La construcción de $h(x_1, ..., x_n)$ a partir de una $h \in \mathcal{H}_n$ y $x_1, ..., x_n \in E$ es lo que llamamos el *cálculo funcional*. Esto le da sentido a las expresiones (A.1), ya que $f(t_1, ..., t_n) = \left(\sum_{k \leq n} |t_k|^p\right)^{1/p}$ es una función perteneciente a $\mathcal{H}_n$. La siguiente proposición generaliza resultados ya conocidos para sucesiones de números reales.

Proposición A.3.6. *Sean $x_1, ..., x_n$ elementos en un Banach lattice E.*

a) *Para $1 \leq p < \infty$,*

$$\left(\sum_{k\leq n} |x_k|^p\right)^{1/p} = \sup\left\{\sum_{k\leq n} a_k \cdot x_k \ : \ (a_k)_k \in B_{\ell_{p'}^n}\right\}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

b) *En el caso $p = \infty$, se tiene $\sup_{k\leq n} |x_k| = \sup\{\sum_{k\leq n} a_k \cdot x_k \ : \ (a_k)_k \in B_{\ell_1^n}\}$.*

c) *Dados $0 < \theta < 1$ y $x, y \in E$, se verifica:*

$$\left\| |x|^\theta |y|^{1-\theta} \right\|_E \leq \|x\|_E^\theta . \|y\|_E^{1-\theta}.$$

d) *Para cada elección de $1 \leq p < r < q \leq \infty$ y de $a_1, ..., a_n$ escalares positivos se tiene,*

$$\left(\sum_{k\leq n} a_k |x_k|^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{k\leq n} a_k |x_k|^p\right)^{\theta/p} . \left(\sum_{k\leq n} a_k |x_k|^q\right)^{(1-\theta)/q}$$

donde $0 < \theta < 1$ es tal que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. Cuando $q = \infty$, las expresiones de la forma $\left(\sum_{k\leq n} |x_k|^q\right)^{1/q}$ se reemplazan por expresiones del tipo $\bigvee_{k=1}^n |x_k|$.

Las demostraciones de *a)* y *b)* se pueden ver en [10, Proposición 16.2], mientras que *c)* y *d)* están probados en [16, Proposición 1.d.2].

Para finalizar, veamos un par de propiedades que son de gran utilidad cuando se trabaja con el cálculo funcional.

Propiedad A.3.7. Sea $f \in \mathcal{H}_1$ creciente. Si $x, y \in E$ son tales que $x \leq y$, entonces $f(x) \leq f(y)$ (un resultado análogo se obtiene para funciones decrecientes).

Demostración. Consideremos las funciones h_1, h_2 definidas por

$$h_1(t_1, t_2) = f(\text{mín}\{t_1, t_2\}), \quad h_2(t_1, t_2) = f(\text{máx}\{t_1, t_2\}).$$

Notar que $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_2$ y que $h_1 \leq h_2$, esto último puesto que f es creciente. Luego, dado que el cálculo funcional preserva el orden, se tendrá $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$. Pero por definición de h_1, h_2, y teniendo en cuenta que $x \leq y$, obtenemos $h_1(x, y) = f(x \wedge y) = f(x) \leq h_2(x, y) = f(x \vee y) = f(y)$ que es lo que se quería probar. □

Propiedad A.3.8. Sean $f \in \mathcal{H}_1$ y $(x_n)_n$ una sucesión de elementos en E tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en E. Entonces $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en E.

Demostración. Se deduce de la desigualdad (A.2). □

A.4. Convexidad y concavidad

A lo largo de esta sección, E será un Banach lattice. Con lo visto sobre el cálculo funcional en Banach lattices, podemos ir directo a las definiciones de p-convexidad y q-concavidad.

Definiciones A.4.1. *a*) Decimos que E es *p-convexo* si hay una constante M tal que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\|_E \leq M. \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

o

$$\left\| \bigvee_{i=1}^{n} |x_i| \right\|_E \leq M. \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_E, \quad \text{si } p = \infty$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de elementos $x_1, ..., x_n \in E$.

El ínfimo de todas las constantes satisfaciendo la desigualdad se denota $M^{(p)}(E)$ y se llama la *constante de p-convexidad* de E.

b) Decimos que E es *q-cóncavo* si hay una constante M tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^q \right)^{1/q} \leq M. \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|_E, \quad \text{si } 1 \leq q < \infty$$

o

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_E \leq M. \left\| \bigvee_{i=1}^{n} |x_i| \right\|_E, \quad \text{si } q = \infty$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $x_1, ..., x_n \in E$.

El ínfimo de todas las constantes M que satisfacen la desigualdad se denota $M_{(q)}(E)$ y se llama, naturalmente, la *constante de q-concavidad* de E.

Observación A.4.2. *Todo Banach lattice E es 1-convexo e ∞-cóncavo.*

Demostración. Para ver que es 1-convexo basta notar que por la desigualdad triangular,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \right\|_E \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E$$

para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in E$.

Luego E es 1-convexo, en principio, con $M^{(1)}(E) \leq 1$. Tomando $n = 1$, se prueba que $M^{(1)}(E) = 1$.

Que E es ∞-cóncavo es porque $\| \cdot \|_E$ es lattice norm. De hecho, como $|x_j| \leq \bigvee_{i=1}^{n} |x_i|$ para todo $1 \leq j \leq n$, entonces

$$\|x_j\|_E \leq \left\| \bigvee_{i=1}^{n} |x_i| \right\|_E \qquad \text{para todo } j = 1, ..., n.$$

Luego E es ∞-cóncavo y al igual que antes se verifica $M_{(\infty)}(E) = 1$. □

Ejemplos A.4.3. *i*) Si consideramos $E = L^p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces se verifica

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

o

$$\left\| \bigvee_{i=1}^{n} |f_i| \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|_\infty, \quad \text{si } p = \infty$$

para cualquier sucesión de funciones $\{f_i\}_{i=1}^n$ en el espacio. Esto muestra que $L^p(\mu)$ es p-cóncavo y p-convexo con constantes igual a 1.

Las condiciones

$$M_{(p)}(X). \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p \right)^{1/p} \leq \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\|_X \leq M^{(p)}(X). \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p \right)^{1/p}$$

para cada elección de elementos $x_1, ..., x_n$ en un Banach lattice X, caracterizan a los espacios isomorfos a $L^p(\mu)$. Es decir, los espacios isomorfos a $L^p(\mu)$ son aquellos que resultan p-convexos y p-cóncavos (ver [16, pp.22-24]).

ii) Los espacios de funciones continuas $C(K)$ son p-convexos para todo $1 \leq p \leq \infty$. En efecto, si $1 \leq p < \infty$ entonces

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|_\infty = \sup_{\omega \in K} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\omega)|^p \right)^{1/p} \leq \sup_{\omega \in K} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty^p \right)^{1/p}$$

(la desigualdad se debe a que $|f_i(\omega)| \leq \|f_i\|_\infty$). En consecuencia, obtuvimos

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|_\infty \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty^p \right)^{1/p},$$

lo que nos muestra que $C(K)$ es p-convexo para todo $1 \leq p < \infty$. El caso $p = \infty$ es análogo.

A.5. Convexificación y concavificación

Sea $(E, \|\cdot\|_E, \leq)$ un Banach lattice, con las operaciones $+$, $\cdot$ de suma y multiplicación por escalares. La idea de esta sección es construir, a partir de E, dos nuevos espacios $E^{(p)}$ y $E_{(p)}$ (que llamaremos respectivamente p-convexificación y p-concavificación de E) que verifican ciertas propiedades de convexidad y concavidad.

A.5.1. Convexificación

Sea $1 < p < \infty$. Dados $x, y \in E$ y λ un escalar, definimos nuevas operaciones de suma y multiplicación dadas por:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \left(x^{1/p} + y^{1/p}\right)^p \\ \lambda \odot x &= \lambda^p \cdot x. \end{aligned}$$

Observación A.5.1. *Notar que el cálculo funcional definido en* ***A.3*** *le da sentido a la expresión* $\left(x^{1/p}+y^{1/p}\right)^p$. *De hecho, basta considerar la función*

$$f(t_1,t_2)=\left||t_1|^{1/p}sg(t_1)+|t_2|^{1/p}sg(t_2)\right|^p\cdot\left(sg\left(|t_1|^{1/p}sg(t_1)+|t_2|^{1/p}sg(t_2)\right)\right)$$

perteneciente a $\mathcal{H}_2$ *y en consecuencia se tiene* $\left(x^{1/p}+y^{1/p}\right)^p=f(x,y)\in E$.

El conjunto E junto con las operaciones $\oplus$, $\odot$ resulta un *e.v.*. En este nuevo *e.v.* podemos considerar el orden $\ll$ dado por:

$$x\gg 0\iff x\geq 0.$$

Es decir, el mismo orden con el que $(E,+,\cdot)$ resulta un *e.v.o.*. Ahora llamemos $E^{(p)}$ al *e.v.* que resulta de considerar al conjunto E con las operaciones $\oplus$, $\odot$. Usando las propiedades del cálculo funcional y el hecho de que $(E,\leq)$ es un espacio de Riesz, se prueba que $(E^{(p)},\ll)$ es un espacio de Riesz. Definimos una norma en $E^{(p)}$ dada por:

$$\|x\|_{E^{(p)}}=\|x\|_E^{1/p}.$$

Veamos que efectivamente esto define una norma:

- Claramente $\|x\|_{E^{(p)}}\geq 0$ para todo $x\in E^{(p)}$ y vale la igualdad si y solo si $x=0$.
- Si $x\in E^{(p)}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\|\lambda\odot x\|_{E^{(p)}}=\|\lambda^p\cdot x\|_E^{1/p}=|\lambda|.\|x\|_E^{1/p}=|\lambda|.\|x\|_{E^{(p)}}.$$

- Para probar la desigualdad triangular, notemos que si $x,y\in E$ y $\alpha,\beta>0$ son tales que $\alpha^q+\beta^q=1$ (donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) entonces,

$$\left(|x|^{1/p}+|y|^{1/p}\right)^p\leq\frac{|x|}{\alpha^p}+\frac{|y|}{\beta^p}.\tag{A.3}$$

De hecho, por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\left(\frac{|t_1|^{1/p}}{\alpha}\cdot\alpha+\frac{|t_2|^{1/p}}{\beta}\cdot\beta\right)^p\leq\left(\left(\frac{|t_1|}{\alpha^p}+\frac{|t_2|}{\beta^p}\right)^{1/p}\cdot(\alpha^q+\beta^q)^{1/q}\right)^p=\frac{|t_1|}{\alpha^p}+\frac{|t_2|}{\beta^p}$$

y luego aplicando el cálculo funcional se obtiene (A.3). Si consideramos α, β positivos tales que,

$$\alpha^p=\frac{\|x\|_E^{1/q}}{\gamma},\quad\beta^p=\frac{\|y\|_E^{1/q}}{\gamma}$$

donde $\gamma=\left(\|x\|_E^{1/p}+\|y\|_E^{1/p}\right)^{p/q}$, entonces se verifica $\alpha^q+\beta^q=1$. Luego, como consecuencia de la desigualdad (A.3) y de que $\|\cdot\|_E$ es lattice norm, obtenemos:

$$\left\|\left(|x|^{1/p}+|y|^{1/p}\right)^p\right\|_E^{1/p}\leq\left\|\frac{|x|}{\alpha^p}+\frac{|y|}{\beta^p}\right\|_E^{1/p}\tag{A.4}$$

Por otro lado, se verifica $\left|\left(x^{1/p}+y^{1/p}\right)^p\right| \leq (|x|^{1/p}+|y|^{1/p})^p$, de forma que

$$\|x \oplus y\|_{E^{(p)}} = \left\|\left(x^{1/p}+y^{1/p}\right)^p\right\|_E^{1/p} \leq \left\|\left(|x|^{1/p}+|y|^{1/p}\right)^p\right\|_E^{1/p}. \tag{A.5}$$

Juntando (A.4) y (A.5) se concluye,

$$\|x \oplus y\|_{E^{(p)}} \leq \left\|\frac{|x|}{\alpha^p}+\frac{|y|}{\beta^p}\right\|_E^{1/p}. \tag{A.6}$$

Para terminar, si aplicamos la desigualdad triangular en $\|\cdot\|_E$ y recordamos las definiciones de α, β y γ, tendremos

$$\left\|\frac{|x|}{\alpha^p}+\frac{|y|}{\beta^p}\right\|_E^{1/p} \leq \left(\frac{\|x\|_E}{\alpha^p}+\frac{\|y\|_E}{\beta^p}\right)^{1/p} = \|x\|_E^{1/p}+\|y\|_E^{1/p}. \tag{A.7}$$

Luego, las desigualdades (A.6) y (A.7) prueban la desigualdad triangular $\|x \oplus y\|_{E^{(p)}} \leq \|x\|_{E^{(p)}} + \|y\|_{E^{(p)}}$.

Hasta aquí tenemos que $\|\cdot\|_{E^{(p)}}$ define una norma en $E^{(p)}$. Veamos que es una lattice norm; supongamos que $|x| \ll |y|$ y probemos que $\|x\|_{E^{(p)}} \leq \|y\|_{E^{(p)}}$. Por definición, $|x| \ll |y|$ si y solo si $|x| \leq |y|$ y en tal caso $\|x\|_E \leq \|y\|_E$ (puesto que $\|\cdot\|_E$ es lattice norm). Pero entonces $\|x\|_E^{1/p} \leq \|y\|_E^{1/p}$, es decir, $\|x\|_{E^{(p)}} \leq \|y\|_{E^{(p)}}$ como se quería probar.

Por otro lado, se puede probar que $E^{(p)}$ resulta completo con la norma definida (se deduce de la completitud de E). De esta manera, $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}}, \ll)$ es un Banach lattice.

Definición A.5.2. El Banach lattice $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}}, \ll)$ se denomina la *p-convexificación* de E.

Observación A.5.3. *La p-convexificación $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}}, \ll)$ es un Banach lattice p-convexo.*

Demostración. Sean $x_1, ..., x_n$ elementos en $E^{(p)}$. Usando simplemente las definiciones de la suma y la norma en $E^{(p)}$, y la desigualdad triangular en E, obtenemos:

$$\left\|(|x_1|^p \oplus ... \oplus |x_n|^p)^{1/p}\right\|_{E^{(p)}}^p = \||x_1| + ... + |x_n|\|_E \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|_E = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E^{(p)}}^p.$$

Esto prueba que $E^{(p)}$ es p-convexo con constante de p-convexidad $M^{(p)}\left(E^{(p)}\right) = 1$. □

Un poco más en general, y con una demostración análoga, se puede probar lo siguiente.

Observación A.5.4. *Si E es r-convexo y s-cóncavo para ciertos $1 \leq r \leq s \leq \infty$, entonces $E^{(p)}$ resulta pr-convexo y ps-cóncavo con las constantes verificando*

$$M^{(pr)}\left(E^{(p)}\right) \leq \left(M^{(r)}(E)\right)^{1/p}, \quad M_{(ps)}\left(E^{(p)}\right) \leq \left(M_{(s)}(E)\right)^{1/p}.$$

A.5.2. Concavificación

Sea $1 < p < \infty$. Veremos que, mediante un proceso similar al de la p-convexificación, obtenemos la p-concavificación de un Banach lattice E. En ese sentido, será necesario considerar un Banach lattice E que sea p-convexo.

Definiremos, al igual que antes, nuevas operaciones de suma y multiplicación por escalares en E, que notaremos $\oplus$ y $\odot$ (aunque no serán las mismas que definimos en la parte de convexificación). Dados $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \left(x^p + y^p\right)^{1/p} \\ \lambda \odot x &= \lambda^{1/p} \cdot x. \end{aligned}$$

Observación A.5.5. *Como ya observamos en la* ***Observación A.5.1****, el cálculo funcional le da sentido a expresiones del tipo* $\left(x^p + y^p\right)^{1/p}$.

El conjunto E con estas nuevas operaciones resulta un *e.v.* que denotaremos $E_{(p)}$. Si en este espacio definimos el orden $\ll$ dado por:

$$x \gg 0 \Longleftrightarrow x \geq 0$$

entonces $(E_{(p)}, \ll)$ resultará un espacio de Riesz. Nuestro siguiente objetivo es definir una norma en $E_{(p)}$ de manera que este resulte un Banach lattice. Siguiendo la idea de la p-convexificación, sería natural definir $\|x\|_{E_{(p)}} = \|x\|_E^p$; sin embargo con esta definición no siempre se verifica la desigualdad triangular, como veremos a continuación. Por ese motivo, notaremos $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_E^p$ (reservándonos la notación $\|\cdot\|_{E_{(p)}}$ para la que será finalmente la norma en $E_{(p)}$). Es claro que,

- $\|x\|_0 = 0$ implica $x = 0$,
- $\|\lambda \odot x\|_0 = |\lambda| . \|x\|_0$.

Por otro lado, en lugar de la desigualdad triangular, y gracias a la hipótesis de que E es p-convexo, obtenemos

$$\|x_1 \oplus ... \oplus x_n\|_0 \leq \left(M^{(p)}(E)\right)^p . \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_0. \tag{A.8}$$

para cualesquiera $x_1, ..., x_n$ en E. De hecho, basta notar que $\|x_1 \oplus .... \oplus x_n\|_0 = \left\|\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\right\|_E^p \leq \left\|\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\right\|_E^p$ y luego usar la hipótesis de p-convexidad.

Si suponemos $M^{(p)}(E) = 1$, (A.8) nos muestra que $\|\cdot\|_0$ verifica la desigualdad triangular y en consecuencia resulta una norma. En tal caso, se considera $\|\cdot\|_{E_{(p)}} = \|\cdot\|_0$ y se prueba que $(E_{(p)}, \|\cdot\|_{E_{(p)}}, \ll)$ es un Banach lattice. De todas maneras, no será necesario suponer que la constante de p-convexidad sea igual a uno. Dado un $x \in E_{(p)}$, definimos

$$\|x\|_{E_{(p)}} = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_0 \ : \ |x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|,\, x_i \in E_{(p)} \text{ para } 1 \leq i \leq n\right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de $|x|$ de la forma $|x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|$ (el n no está fijo). Veremos que esto define una lattice norm, con la cual $E_{(p)}$ resulta un Banach lattice. Lo primero que haremos, será probar que para cualquier x perteneciente a $E_{(p)}$, se verifican las siguientes desigualdades:

$$\frac{\|x\|_0}{\big(M^{(p)}(E)\big)^p} \leq \|x\|_{E_{(p)}} \leq \|x\|_0 \tag{A.9}$$

Por un lado, considerando la representación trivial $|x| = |x|$, resulta evidente de la definición de $\|\cdot\|_{E_{(p)}}$, que $\|x\|_{E_{(p)}} \leq \|x\|_0$. Para la otra desigualdad, consideremos una representación $|x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|$. De la desigualdad (A.8) se deduce que $\||x_1| \oplus ... \oplus |x_n|\|_0 \leq \big(M^{(p)}(E)\big)^p \cdot \sum_{i=1}^{n} \||x_i|\|_0$, y en consecuencia

$$\|x\|_0 \leq \Big(M^{(p)}(E)\Big)^p \cdot \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_0.$$

Tomando ínfimo sobre todas las representaciones de la forma $|x| = |x_1| \oplus .... \oplus |x_n|$, queda probado que

$$\frac{\|x\|_0}{\big(M^{(p)}(E)\big)^p} \leq \|x\|_{E_{(p)}}$$

como se quería ver.

En segundo lugar probemos que dados $x, y \in E_{(p)}$,

$$|x| \ll |y| \quad \text{implica} \quad \|x\|_{E_{(p)}} \leq \|y\|_{E_{(p)}}. \tag{A.10}$$

Por definición de $\|\cdot\|_{E_{(p)}}$, dado un $\varepsilon > 0$ hay una representación $|y| = |y_1| \oplus ... \oplus |y_n|$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_0 < \|y\|_{E_{(p)}} + \varepsilon$. Por otro lado, la propiedad de descomposición de Riesz (ver **Propiedades A.1.5**) nos muestra que existen $x_1, ..., x_n \in E_{(p)}$ tales que $|x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|$ con $|x_i| \ll |y_i|$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego $\|x_i\|_0 \leq \|y_i\|_0$ (para $i = 1, ..., n$) y en consecuencia

$$\|x\|_{E_{(p)}} \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_0 < \|y\|_{E_{(p)}} + \varepsilon.$$

Como el $\varepsilon > 0$ era cualquiera, $\|x\|_{E_{(p)}} \leq \|y\|_{E_{(p)}}$.

Ahora sí, veamos que $\|\cdot\|_{E_{(p)}}$ es una norma. En tal caso, (A.10) nos muestra que resulta una lattice norm.

- Es evidente que $\|x\|_{E_{(p)}} \geq 0$ para todo $x \in E_{(p)}$. Por otro lado $\|x\|_{E_{(p)}} = 0$ implica $\|x\|_0 = 0$ (por (A.9)) y en consecuencia $x = 0$.

- Sean $x \in E_{(p)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por definición

$$\|\lambda \odot x\|_{E_{(p)}} = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_0 \ ; \ |\lambda \odot x| = |y_1| \oplus ... \oplus |y_n|\right\}.$$

Ahora bien, notando que

$$\text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_0 \ ; \ |\lambda \odot x| = |y_1| \oplus ... \oplus |y_n|\right\} = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \|\lambda \odot x_i\|_0 \ ; \ |x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|\right\}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\lambda \odot x\|_{E_{(p)}} &= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \|\lambda \odot x_i\|_0 \ ; \ |x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda|.\|x_i\|_0 \ ; \ |x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|\right\} \\ &= |\lambda|.\|x\|_{E_{(p)}}. \end{aligned}$$

- Por último veamos la desigualdad triangular. Sean x, y en $E_{(p)}$ y sean $x_1, ..., x_n, y_1, ...y_m$ tales que $|x| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n|$ y $|y| = |y_1| \oplus ... \oplus |y_m|$ con

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_0 < \|x\|_{E_{(p)}} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|_0 < \|y\|_{E_{(p)}} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{A.11}$$

para un $\varepsilon > 0$ dado.

Usando el cálculo funcional en E es fácil ver que $|x \oplus y| \ll |x| \oplus |y|$ (recordar que el orden $\ll$ en $E_{(p)}$ es el mismo orden que en E). Luego, por lo visto en (A.10) y notando que $|x| \oplus |y| = |x_1| \oplus ... \oplus |x_n| \oplus |y_1| \oplus ... \oplus |y_m|$, tenemos

$$\|x \oplus y\|_{E_{(p)}} \leq \||x| \oplus |y|\|_{E_{(p)}} \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_0 + \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|_0 \tag{A.12}$$

(la segunda desigualdad es simplemente por definición de $\|\cdot\|_{E_{(p)}}$). Pero entonces, juntando las desigualdades (A.11) y (A.12) se tiene $\|x \oplus y\|_{E_{(p)}} \leq \|x\|_{E_{(p)}} + \|y\|_{E_{(p)}} + \varepsilon$, y dado que $\varepsilon > 0$ era cualquiera, $\|x \oplus y\|_{E_{(p)}} \leq \|y\|_{E_{(p)}} + \|y\|_{E_{(p)}}$.

Luego queda probado que $\|\cdot\|_{E_{(p)}}$ es una lattice norm. Notar que $E_{(p)}$ resulta completo con esta norma (el argumento es similar al que se usa para ver que $E^{(p)}$ es completo; a tal efecto es útil la primera desigualdad de (A.9)). En definitiva, $(E_{(p)}, \|\cdot\|_{E_{(p)}}, \ll)$ es un Banach lattice.

Definición A.5.6. El Banach lattice $(E_{(p)}, \|\cdot\|_{E_{(p)}}, \ll)$ se denomina la *p-concavificación* de E.

Observación A.5.7. *Notar que cuando $M^{(p)}(E) = 1$, (A.9) nos muestra que la norma $\|\cdot\|_{E_{(p)}}$ coincide con $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_E^p$.*

Observación A.5.8. *Sea E un Banach lattice p-convexo (de manera que tenga sentido la p-concavificación). Si E es r-convexo y s-cóncavo para determinados $1 \leq p \leq r \leq s \leq \infty$, entonces $E_{(p)}$ es $\frac{r}{p}$-convexo y $\frac{s}{p}$-cóncavo con constantes*

$$M^{(r/p)}\big(E_{(p)}\big) \leq \Big(M^{(p)}(E)M^{(r)}(E)\Big)^{p}, \quad M_{(s/p)}\big(E_{(p)}\big) \leq \Big(M^{(p)}(E)M_{(s)}(E)\Big)^{p}.$$

Demostración. Veamos que $E_{(p)}$ resulta $\frac{r}{p}$-convexo (de manera análoga se prueba que es $\frac{s}{p}$-cóncavo). Dados $x_1, ..., x_n$ en $E_{(p)}$, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \Big(|x_1|^{r/p} \oplus ... \oplus |x_n|^{r/p}\Big)^{p/r} \right\|_{E_{(p)}} &= \left\| (|x_1|^r + ... + |x_n|^r)^{1/r} \right\|_{E_{(p)}} \\ &\leq \left\| (|x_1|^r + ... + |x_n|^r)^{1/r} \right\|_{E}^{p} \\ &\leq \Big(M^{(r)}(E)\,(\|x_1\|_E^r + ... + \|x_n\|_E^r)^{1/r} \Big)^{p}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que E es r-convexo. Por otro lado $\|x_i\|_E^r = \|x_i\|_0^{r/p} \leq \big(M^{(p)}(E)\big)^r . \|x_i\|_{E_{(p)}}^{r/p}$ para todo $i = 1, ..., n$ (la desigualdad se deduce de (A.9)). Este hecho, junto con la desigualdad anterior nos muestran que

$$\left\| \Big(|x_1|^{r/p} \oplus ... \oplus |x_n|^{r/p}\Big)^{p/r} \right\|_{E_{(p)}} \leq \Big(M^{(r)}(E)M^{(p)}(E)\Big)^{p} \Big(\|x_1\|_{E_{(p)}}^{r/p} + ... + \|x_n\|_{E_{(p)}}^{r/p}\Big)^{p/r}$$

y en consecuencia $E_{(p)}$ es $\frac{r}{p}$-convexo con $M^{(r/p)}(E_{(p)}) \leq \big(M^{(p)}(E)M^{(r)}(E)\big)^{p}$. $\square$

Apéndice B

Operadores sumantes

En el **Capítulo 2** se estudia la clase de operadores (E, p)-sumantes, que son una generalización de los ya conocidos operadores (q, p)-sumantes. En este apéndice daremos un brevísimo panorama sobre la teoría de operadores sumantes, repasando las principales definiciones y enunciando algunos de los resultados más relevantes. Todos estos resultados pueden verse en [10, Capítulos 2 y 10].

B.1. Definición de operadores sumantes

Definición B.1.1. Sean $1 \leq p < \infty$ y $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Diremos que T es p-sumante si existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|_Y^p \right)^{1/p} \leq C. \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right)^{1/p} \tag{B.1}$$

para cualquier n, y cualquier elección de $x_1, ..., x_n \in X$. Notaremos $\pi_p(T)$ a la menor de las constantes verificando (B.1).

El espacio de los operadores $T : X \longrightarrow Y$ que resultan p-sumantes se denota $\Pi_p(X, Y)$. Es claro que $\Pi_p(X, Y)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(X, Y)$. Se prueba que $\pi_p(\cdot)$ define una norma en este espacio, que verifica $\|T\| \leq \pi_p(T)$ para todo operador p-sumante y tal que $(\Pi_p(X, Y), \pi_p(\cdot))$ es un espacio de Banach. Más aún, $(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$ resulta un ideal de operadores de Banach (la definición de ideal de operadores se puede ver en **E.4**)

B.2. Sucesiones fuertemente y débilmente sumables

En esta parte, consideraremos $1 \leq p < \infty$ y X un espacio de Banach.

Definición B.2.1. Una sucesión de elementos $(x_n)_n$ en X es *fuertemente p-sumable* si $(\|x_n\|_X)_n \in \ell_p$. Notaremos $\ell_p^s(X)$ al espacio vectorial que forman estas sucesiones.

La manera natural de definir una norma en $\ell_p^s(X)$ es considerar para cada sucesión en este espacio, $\|(x_n)_n\|_p^s = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|_X^p\right)^{1/p}$. Es sencillo ver que $(\ell_p^s(X), \|\cdot\|_p^s)$ es un espacio de Banach.

Definición B.2.2. Una sucesión de elementos $(x_n)_n$ en X es *débilmente p-sumable* si $(\varphi(x_n))_n \in \ell_p$ para todo $\varphi \in X'$. El conjunto de estas sucesiones se denota $\ell_p^w(X)$.

Evidentemente, $\ell_p^w(X)$ es un espacio vectorial, que resulta un espacio de Banach si consideramos la norma dada por $\|(x_n)_n\|_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X'}} (\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p)^{1/p}$. Se puede probar que $\|(x_n)_n\|_p^w = \sup_{(\lambda_n)_n \in B_{\ell_{p'}}} \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot x_n\|_X$ si $1 < p < \infty$, y para el caso $p = 1$ se tiene $\|(x_n)_n\|_1^w = \sup_{(\lambda_n)_n \in B_{c_0}} \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot x_n\|_X$.

El espacio $\ell_p^s(X)$ es un subespacio lineal de $\ell_p^w(X)$ y la inclusión tiene norma uno. La inclusión es estricta a menos que X sea finito dimensional (este resultado se conoce como la versión débil del Teorema de Dvoretzky-Rogers).

Queda excluido de estas consideraciones el caso $p = \infty$, por el simple hecho de que siguiendo la manera natural de definir $\ell_\infty^s(X)$, $\ell_\infty^w(X)$ y sus respectivas normas (esto es, definiendo $\|(x_n)_n\|_\infty^s = \sup_n \|x_n\|_X$ y $\|(x_n)_n\|_\infty^w = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_n \|x_n\|_X$), tendríamos $\ell_\infty^s(X) = \ell_\infty^w(X)$ isométricamente. Por este motivo, notaremos simplemente $\ell_\infty(X)$ al espacio de las sucesiones $(x_n)_n$ tal que $(\|x_n\|_X)_n \in \ell_\infty$, con la norma $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n \|x_n\|_X$.

De mayor interés, resultan los espacios de sucesiones $c_0^s(X) = \{(x_n)_n : \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = 0\}$ y $c_0^w(X) = \{(x_n)_n : \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0, \quad \forall \varphi \in B_{X'}\}$. Con la norma $\|\cdot\|_\infty$, el espacio $c_0^w(X)$ es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(X)$, y a su vez, $c_0^s(X)$ resulta un subespacio cerrado de $c_0^w(X)$. Estos espacios se suelen llamar, respectivamente, el espacio de las sucesiones *débilmente nulas* y *fuertemente nulas* en el espacio X.

Observación B.2.3. *Todas estas consideraciones, nos permiten reformular la definición de operadores p-sumantes. Dado un operador* $T : X \longrightarrow Y$*, podemos considerar el operador inducido* $\hat{T}$ *definido por* $(x_n)_n \longmapsto (Tx_n)_n$*. En principio se tiene* $\hat{T} : \ell_p^w(X) \longrightarrow \ell_p^w(Y)$ *y* $\hat{T} : \ell_p^s(X) \longrightarrow \ell_p^s(Y)$ *para todo p, con norma* $\|\hat{T}\| = \|T\|$*. Siguiendo las definiciones y haciendo uso del teorema del gráfico cerrado, se prueba que T es p-sumante si y solo si* $\hat{T}(\ell_p^w(X)) \subseteq \ell_p^s(X)$*. En tal caso, se verifica* $\|\hat{T} : \ell_p^w(X) \to \ell_p^s(X)\| = \pi_p(T)$*.*

El caso $p = 1$ es aún más interesante. Para eso precisamos las siguientes definiciones. Se dice que una sucesión $(x_n)_n$ en X es *incondicionalmente sumable* si $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge (en X) para cualquier permutación σ. Se suele decir también que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente. Por otro lado, una sucesión $(x_n)_n$ es *absolutamente sumable* si $\sum_n \|x_n\| < \infty$. Notar que esto es exactamente lo mismo que decir que $(x_n)_n \in \ell_1^s(X)$. Al igual que antes, en este caso se suele decir que la serie $\sum_n x_n$ es absolutamente convergente. No es difícil ver que las sucesiones incondicionalmente sumables son aquellas $(x_n)_n$ tales que $\sum_n \lambda_n \cdot x_n$ converge para todo $(\lambda_n)_n \in \ell_\infty$. Más aún, el conjunto $\ell_1^u(X)$ de todas las sucesiones incondicionalmente sumables, es un espacio de Banach con la norma dada por $\|(x_n)_n\|_u = \sup_{(\lambda_n)_n \in B_{\ell_\infty}} \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot x_n\|_X$

(notar que las normas $\|\cdot\|_u$ y $\|\cdot\|_1^w$ coinciden en las sucesiones con finitos elementos no nulos). Es claro que una sucesión incondicionalmente sumable es débilmente 1-sumable, pero la recíproca no vale en general (basta considerar la sucesión $(e_n)_n$ en c_0). De aquí se deduce que si T es un operador 1-sumante entonces manda sucesiones incondicionalmente sumables en sucesiones absolutamente sumables. Los operadores que tienen esta propiedad son los que se denominan *absolutamente sumantes* y en consecuencia, hemos notado que si T es 1-sumante entonces es absolutamente sumante. Se puede probar la recíproca, esto es:

Observación B.2.4. *Si T es un operador absolutamente sumante entonces es un operador 1-sumante.*

Una definición que está estrechamente relacionada con la de operadores p-sumantes, es la de los operadores completamente continuos.

Definición B.2.5. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ que manda sucesiones débilmente nulas (en X) en sucesiones fuertemente nulas (en Y), se denomina *completamente continuo*. En términos del operador inducido $\hat{T}$, esto es lo mismo que decir que $\hat{T}(c_0^w(X)) \subseteq c_0^s(Y)$. Estos operadores también suelen llamarse operadores de *Dunford-Pettis*.

Se deduce fácilmente que T es completamente continuo si manda sucesiones débilmente convergentes (resp. débil de Cauchy) en sucesiones convergentes en norma (resp. de Cauchy en norma). Como consecuencia del teorema de Eberlein-Šmulian (ver **E.1**), esto es equivalente a decir que T manda conjuntos (relativamente) débil compactos en conjuntos (relativamente) compactos en norma. No es difícil ver que los operadores compactos son operadores completamente continuos. La recíproca no se verifica: si el espacio X es infinito-dimensional y tiene la propiedad de Schur (esto es, las sucesiones débilmente convergentes son convergentes en norma), entonces id_X es completamente continuo pero no es compacto.

Observación B.2.6. *Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador completamente continuo y X es reflexivo, entonces T resulta un operador compacto. Esto es consecuencia de que si X es reflexivo entonces B_X es débil compacta (más aún, son condiciones equivalentes). Más en general, como consecuencia del Teorema ℓ_1 de Rosenthal (ver **E.3**), se deduce que si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador completamente continuo y X no contiene una copia isomorfa de ℓ_1, entonces T es compacto.*

Para finalizar esta sección, recordemos la definición de operador débil compacto.

Definición B.2.7. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ se llama *débil compacto* si $T(B_X)$ es relativamente débil compacto en Y

Nuevamente el teorema de Eberlein-Šmulian nos muestra que un operador T es débil compacto si y solo si dada una sucesión acotada $(x_n)_n$ en X, $(Tx_n)_n$ tiene una subsucesión débilmente convergente en Y.

Observación B.2.8. *Teniendo en cuenta esta caracterización de los operadores débil compactos, es fácil ver que si* $T : Y \longrightarrow Z$ *es completamente continuo y* $S : X \longrightarrow Y$ *es débil compacto entonces* $T \circ S$ *es compacto.*

B.3. Algunos ejemplos y propiedades

Ya mencionamos que $(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$ es un ideal de operadores de Banach, lo cual implica entre otras cosas, que los operadores de la forma $\varphi \otimes y : X \longrightarrow Y$ con $\varphi \in B_{X'}$, $y \in Y$ son p-sumantes. Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ de rango uno es de esta forma, de manera que resulta p-sumante. Ahora bien, los operadores de rango finito se pueden escribir como suma de operadores de rango uno, y entonces se deduce que:

Observación B.3.1. *Si* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *es un operador de rango finito entonces es* p*-sumante para todo* $1 \leq p < \infty$.

Siguiendo con las propiedades de ideal que tienen los operadores sumantes, la composición de un operador p-sumante con otro operador (no necesariamente sumante) es p-sumante. Más específicamente, lo que dice esta propiedad es lo siguiente:

Proposición B.3.2. *Sean* $1 \leq p < \infty$, $T \in \Pi_p(X, Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$ *y* $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$. *Entonces* RTS *es* p*-sumante con norma* $\pi_p(RTS) \leq \|R\|.\pi_p(T).\|S\|$.

Como casos particulares, tenemos que si $T : X \longrightarrow Y$ es p-sumante y $X_0 \subseteq X$, $Y \subseteq Y_0$ (como subespacios), entonces $T : X_0 \longrightarrow Y$ (la restricción de T a X_0) y T visto como operador de $X \longrightarrow Y_0$, son p-sumantes. El siguiente resultado nos dice un poco más.

Proposición B.3.3. *Si* $i : Y \longrightarrow Y_0$ *es una isometría, entonces* $T \in \Pi_p(X, Y)$ *si y solo si* $iT \in \Pi_p(X, Y_0)$. *En tal caso,* $\pi_p(T) = \pi_p(iT)$. *Esta es la llamada propiedad de inyectividad del ideal* Π_p.

Si T es un operador p-sumante y q es tal que $1 \leq p < q < \infty$, entonces podemos asegurar que T resulta q-sumante. Esto es lo que llamamos teorema de inclusión para operadores sumantes, que enunciamos a continuación.

Teorema B.3.4. *Si* $1 \leq p < q < \infty$, *entonces* $\Pi_p(X, Y) \subseteq \Pi_q(X, Y)$. *Además, dado* $T \in \Pi_p(X, Y)$ *se verifica* $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$.

En particular, si se prueba que un operador es 1-sumante, resultará p-sumante para todo $1 < p < \infty$.

A continuación, mencionamos algunos de los ejemplos más conocidos de operadores sumantes.

Ejemplos B.3.5. *i*) Sean K un espacio compacto y Hausdorff, μ una medida regular de Borel sobre K y sea $1 \leq p < \infty$. Dado $\psi \in L_p(\mu)$, tenemos el operador multiplicación dado por

$$\begin{aligned} M_\psi : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto \psi \cdot f. \end{aligned}$$

Este operador es p-sumante con $\pi_p(M_\psi) = \|\psi\|_p$.

ii) Sean K, μ y p como en *i*). La inclusión canónica $j_p : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ es p-sumante, con $\pi_p(j_p) = \mu(K)^{1/p}$.

iii) Dado (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$, podemos considerar para cada $\psi \in L_p(\mu)$ el operador multiplicación,

$$\begin{aligned} M_\psi : L_\infty(\mu) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto \psi \cdot f. \end{aligned}$$

Al igual que en *i*), este operador resulta p-sumante con $\pi_p(M_\psi) = \|\psi\|_p$.

iv) Siguiendo con la notación de *iii*), la inclusión canónica $i_p : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$ es p-sumante, con $\pi_p(j_p) = \mu(K)^{1/p}$.

v) Sean $1 \leq p < \infty$ y $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$. Luego el operador diagonal

$$\begin{aligned} D_\lambda : \ell_\infty &\longrightarrow \ell_p \\ (a_n)_n &\longmapsto (\lambda_n.a_n)_n \end{aligned}$$

es p-sumante con $\pi_p(D_\lambda) = \|\lambda\|_p$.

B.4. Teorema de dominación

En esta parte, enunciaremos el teorema de dominación de Pietsch y algunas de sus aplicaciones. Antes de hacerlo, daremos una motivación para intentar comprender de qué trata este resultado.

Consideremos $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Dado cualquier espacio de Banach, en particular el espacio X, tenemos la inyección isométrica $X \hookrightarrow C(B_{X'})$ (con $B_{X'}$ compacto si consideramos la topología débil*) dada por $x \mapsto \hat{x}$, donde $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ para todo $\varphi \in B_{X'}$. Esto nos permite pensar a X como subespacio isométrico de $C(B_{X'})$. Para ser más precisos, llamemos $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$ a la imagen de la isometría ya mencionada. Como T es acotado, tenemos $\|Tx\|_Y \leq \|T\|.\|x\|_X = \|T\|.\|\hat{x}\|_{C(B_{X'})}$, y esto nos muestra que el operador $\hat{T} : \hat{X} \longrightarrow Y$ dado por $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$ es acotado. Hasta aquí tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d] & Y \\
\hat{X} \arrow[ur, "\hat{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si ahora consideramos una medida de probabilidad boreliana μ en $B_{X'}$, la inclusión canónica $j_p : C(B_{X'}) \longrightarrow L_p(\mu)$ y llamamos $X_p = j_p(\hat{X})$, podemos intentar generalizar lo anterior preguntándonos si se puede definir $\tilde{T} : X_p \longrightarrow Y$ (la definición sería como antes, $\tilde{T}(\hat{x}) = T(x)$ pero ahora pensando a $\hat{x} \in L_p(\mu)$) de forma que:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d] & Y \\
\hat{X} \arrow[r, "j_{p|_{\hat{X}}}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & X_p \arrow[u, "\tilde{T}"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
C(B_{X'}) \arrow[r, "j_p"] & L_p(\mu)
\end{tikzcd}$$

Claramente, la existencia de tal $\tilde{T}$ se deduciría de la siguiente desigualdad,

$$\|Tx\|_Y \leq C.\|\hat{x}\|_{L_p(\mu)} = C.\left(\int_{B_{X'}} |\hat{x}(\varphi)|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

En tal caso T se factoriza de la siguiente manera: $X \hookrightarrow \hat{X} \xrightarrow{j_{p|_{\hat{X}}}} X_p \xrightarrow{\tilde{T}} Y$, lo cual nos muestra que T es p-sumante, dado que $j_{p|_{\hat{X}}}$ lo es y por la propiedad de ideal. Hemos visto entonces que dado un operador $T : X \longrightarrow Y$, la condición $\|Tx\|_Y \leq C.\left(\int_{B_{X'}} |\hat{x}(\varphi)|^p d\mu\right)^{1/p}$ implica que el operador es p-sumante. Lo que afirma el siguiente teorema, es que vale la recíproca.

Teorema B.4.1. ***(Teorema de dominación de Pietsch)*** *Sean $1 \leq p < \infty$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $K \subseteq B_{X'}$ un subconjunto w^*-compacto y normante. Son equivalentes:*

a) *T es p-sumante.*

b) *Existen una constante $C > 0$ y una medida de probabilidad boreliana μ sobre K, tal que para cada $x \in X$ se verifica,*

$$\|Tx\|_Y \leq C.\left(\int_K |\hat{x}(\varphi)|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

En tal caso, $\pi_p(T)$ es la menor de las constantes C para las cuales existe tal medida.

La demostración de este resultado puede verse en [10, Teorema 2.12]. Como consecuencia del mismo, se prueba el siguiente resultado:

Corolario B.4.2. *Sea $1 \leq p < \infty$. Si T es un operador p-sumante entonces resulta débil compacto y completamente continuo.*

Juntando este resultado con las *Observaciones B.2.8* y *B.2.6*, obtenemos las siguientes conclusiones.

Corolario B.4.3. *a) Sean $1 \leq p, q < \infty$. Si $T : Y \longrightarrow Z$ es p-sumante y $S : X \longrightarrow Y$ es q-sumante, entonces la composición $T \circ S$ es un operador compacto.*

b) Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador p-sumante y X no contiene una copia isomorfa de ℓ_1, entonces T es compacto.

Se puede decir más acerca de la composición de dos operadores sumantes, y ese es el resultado que enunciaremos a continuación (conocido como el teorema de composición). El resultado es precedido por un lema, cuya demostración es consecuencia del teorema de dominación.

Lema B.4.4. *Sean $1 \leq p, q, r < \infty$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, y sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador r-sumante. Luego dada una sucesión $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, existen sucesiones $(\sigma_n)_n \in \ell_r$, $(y_n)_n \in \ell_q^w(Y)$ tales que:*

a) $Tx_n = \sigma_n . y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

b) $\|(\sigma_n)_n\|_r \leq (\|(x_n)_n\|_p^w)^{p/r}$,

c) $\|(y_n)_n\|_q^w \leq (\|(x_n)_n\|_p^w)^{p/q} . \pi_r(T)$.

Demostración. La demostración de este lema se puede ver en [10, Lema 2.23]. La idea se basa en considerar una medida de probabilidad boreliana μ sobre $B_{X'}$, de manera que

$$\|Tx\|_Y \leq \pi_r(T) . \left(\int_{B_{X'}} |\hat{x}(\varphi)|^r d\mu \right)^{1/r}$$

(en este punto resulta fundamental el **Teorema B.4.1**) y luego se prueba que sirven $\sigma_n = \left(\int_{B_{X'}} |\hat{x_n}(\varphi)|^p d\mu \right)^{1/r}$ e $y_n = \frac{1}{\sigma_n} . Tx_n$. □

Teorema B.4.5. *Sean $1 \leq p < q < \infty$ y $1 \leq r < \infty$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Luego, dados X, Y, Z espacios de Banach, se verifica*

$$\Pi_q(Y, Z) \circ \Pi_r(X, Y) \subseteq \Pi_p(X, Z).$$

Además, si $T \in \Pi_q(Y, Z)$, $S \in \Pi_r(X, Y)$ entonces $\pi_p(TS) \leq \pi_q(T) . \pi_r(S)$.

Las siguientes proposiciones están demostradas en [10], y forman parte de una serie de resultados que relacionan la teoría de operadores sumantes entre espacios de Banach con el tipo y cotipo de estos últimos. En primer lugar, una igualdad entre clases de operadores cuyo espacio de partida tiene cotipo 2 (ver [10, Corolario 11.16]).

Proposición B.4.6. *Sean X, Y espacios de Banach. Si X tiene cotipo 2, entonces $\Pi_2(X,Y) = \Pi_1(X,Y)$.*

En segundo lugar, una desigualdad que se puede ver en la demostración de [10, Teorema 11.14].

Proposición B.4.7. *Sea Y un espacio con cotipo 2. Entonces para cualquier $S \in \mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)$ se verifica: S es 2-sumante y existe una constante $C > 0$ que solo depende de la constante de cotipo de Y (es decir que no depende de S ni de n), tal que $\pi_2(S) \leq C.\|S\|$.*

Otra de las aplicaciones del teorema de dominación, es el cálculo de la norma 2-sumante de identidades de espacios finito dimensionales.

Teorema B.4.8. *Si X es un espacio de Banach de dimensión n, entonces $\pi_2(id_X) = \sqrt{n}$.*

Relacionado con este tema, se puede probar el siguiente resultado (una versión más general se puede ver en [6, p. 233]).

Observación B.4.9. *Sea X un espacio de Banach de dimensión n. Entonces,*

$$\pi_2(id : X \longrightarrow \ell_2^n) = \frac{\sqrt{n}}{\|id : \ell_2^n \longrightarrow X\|}.$$

Esta igualdad nos permite probar que si X e Y son espacios de Banach de dimensión n, entonces

$$\pi_2(id : X \longrightarrow Y) \leq \sqrt{n}.\frac{\|id : \ell_2^n \longrightarrow Y\|}{\|id : \ell_2^n \longrightarrow X\|}.$$

De hecho, basta notar que $\pi_2(id : X \longrightarrow Y) \leq \pi_2(id : X \longrightarrow \ell_2^n).\|id : \ell_2^n \longrightarrow Y\|$ por la propiedad de ideal de operadores sumantes y luego aplicar la igualdad anterior.

B.5. Operadores (q,p)-sumantes

La siguiente definición generaliza la de operadores p-sumantes.

Definición B.5.1. Sean $1 \leq p, q < \infty$, y un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach. Decimos que T es (q,p)-sumante si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|_Y^q \right)^{1/q} \leq C. \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right)^{1/p} \tag{B.2}$$

para cualquier n, y cualquier elección de $x_1, ..., x_n \in X$. Notaremos $\pi_{q,p}(T)$ a la menor de las constantes verificando (B.2).

Esta definición es equivalente a decir que $\hat{T} : \ell_p^w(X) \longrightarrow \ell_q^s(Y)$, donde $\hat{T}$ es el operador inducido dado por $(x_n)_n \mapsto (Tx_n)_n$. Poniendo $x_i = \lambda_i \cdot x$ en (B.2), para ciertos escalares λ_i y un x no nulo en X, se puede ver que si $q < p$ entonces el único operador (q,p)-sumante es el operador $T \equiv 0$. Luego, cuando hablemos de operadores (q,p)-sumantes estará implícita la hipótesis de que $q \geq p$. Notar que cuando $q = p$, la definición anterior coincide con la de operadores p-sumantes, y al igual que lo que se tenía en ese caso, se puede probar lo siguiente.

Observación B.5.2. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. Luego $(\Pi_{q,p}, \pi_{q,p}(\cdot))$ es un ideal de operadores de Banach y tiene la propiedad de inyectividad. Esto significa que valen resultados análogos a los mencionados en las **Proposiciones B.3.2** y **B.3.3**.*

En lo que se refiere al **Teorema B.3.4**, tenemos la siguiente generalización.

Teorema B.5.3. *Sean X, Y espacios de Banach y $1 \leq p_j \leq q_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ tales que $p_1 \leq p_2$, $q_1 \leq q_2$ y $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$. Entonces $\Pi_{q_1,p_1}(X,Y) \subseteq \Pi_{q_2,p_2}(X,Y)$ y para cada $T \in \Pi_{q_1,p_1}(X,Y)$ se tiene $\pi_{q_1,p_1}(T) \leq \pi_{q_2,p_2}(T)$.*

Por otro lado, el **Teorema B.4.5** se generaliza de la siguiente manera.

Teorema B.5.4. *Sean $1 \leq p, q, r, s, t < \infty$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{t} - \frac{1}{s}$. Luego, si X, Y, Z son espacios de Banach, tenemos*

$$\Pi_{s,q}(Y,Z) \circ \Pi_r(X,Y) \subseteq \Pi_{t,p}(X,Z).$$

Además, si $T \in \Pi_{s,q}(Y,Z)$, $S \in \Pi_r(X,Y)$ entonces $\pi_{t,p}(TS) \leq \pi_{s,q}(T).\pi_r(S)$.

B.5.1. Inclusiones sumantes

Los siguientes resultados fueron probados por Bennett en [3], y se refieren a ciertas propiedades sumantes de las inclusiones $i : \ell_p \hookrightarrow \ell_q$.

Teorema B.5.5. *Consideremos $1 \leq p \leq q \leq \infty$ y la inclusión $i : \ell_p \hookrightarrow \ell_q$.*

a) Si $1 \leq p \leq q \leq 2$, entonces $i : \ell_p \hookrightarrow \ell_q$ es $(2pq/(pq - 2p + 2q), 1)$-sumante.

b) Si $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ o $2 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $i : \ell_p \hookrightarrow \ell_q$ es $(p, 1)$-sumante.

c) Los resultados son lo mejor posible en el sentido de que si $r < 2pq/(pq - 2p + 2q)$ en a) o $r < p$ en b), entonces $i : \ell_p \hookrightarrow \ell_q$ ya no resulta $(r, 1)$-sumante.

Ya se observó que si T es un operador p-sumante, entonces resulta completamente continuo (ver **Corolario B.4.2**). Como consecuencia del teorema anterior, se prueba que esta afirmación no se puede generalizar al caso en que el operador sea $(p, 1)$-sumante. De hecho, basta considerar la inclusión $i : \ell_p \hookrightarrow \ell_2$ $(1 < p \leq 2)$ que por lo anterior resulta $(p, 1)$-sumante (y en consecuencia $(r, 1)$-sumante para todo $r \geq p$), pero que no es un operador completamente continuo. Esto muestra que:

Corolario B.5.6. *Para cada $p > 1$, existe un operador $(p, 1)$-sumante que no es completamente continuo.*

Se puede decir un poco más al respecto. En el resultado que acabamos de ver, el operador depende de p, y eso puede mejorarse en el siguiente sentido:

Corolario B.5.7. *Hay un operador $T : X \longrightarrow Y$ que es (q, p)-sumante para todo $q > p \geq 1$, pero que no resulta completamente continuo.*

Apéndice C

Interpolación

Dado que en la sección de inclusiones $(E,1)$-sumantes (**Capítulo 2.2**) se utilizan algunas técnicas de interpolación, en este apéndice daremos las definiciones y los resultados necesarios para esa parte. Todos los resultados que veremos, se pueden encontrar en [4], [2] o en [5].

Uno de los resultados que da inicio al estudio de la teoría de interpolación es el teorema de Riesz-Thorin. Para motivar las definiciones posteriores y entender de donde surgen, enunciamos a continuación ese conocido teorema.

Teorema C.0.8. *Sean $1 \leq p_i, q_i < \infty$ ($i = 0,1$), $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$, y sean (Ω, μ) y (V, ν) espacio de medida. Luego si*

$$\begin{aligned} T : L_{p_0}(\Omega, \mu) &\longrightarrow L_{q_0}(V, \nu) \quad \textit{con norma } M_0 \textit{ y} \\ T : L_{p_1}(\Omega, \mu) &\longrightarrow L_{q_1}(V, \nu) \quad \textit{con norma } M_1, \end{aligned}$$

entonces $T : L_p(\Omega, \mu) \longrightarrow L_q(V, \nu)$ con norma $M \leq M_0^{(1-\theta)}.M_1^{\theta}$, para todo $0 < \theta < 1$ y $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

C.1. Espacios de interpolación

Nos proponemos definir el concepto de espacio de interpolación A con respecto a un par de espacios (A_0, A_1). Para eso serán necesarias algunas definiciones previas (de categorías, funtores, espacios intermedios, etc.) que daremos a continuación.

C.1.1. Categorías y funtores

Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de *objetos* $A, B, C, ...$ y *morfismos* $R, S, T, ...$ entre los mismos, verificando las siguientes relaciones. Si $T : A \longrightarrow B$ y $S : B \longrightarrow C$ entonces hay un morfismo producto (o composición) $ST : A \longrightarrow C$. El producto de morfismos satisface la ley asociativa $T(SR) = (TS)R$ y para cada objeto A en la categoría $\mathcal{C}$, hay un morfismo identidad $I = I_A$ tal que $IT = TI = T$ para todo morfismo $T : A \longrightarrow A$.

Los ejemplos típicos (y más que suficientes para nuestros objetivos) son los de las categorías de espacios vectoriales topológicos (de aquí en más notaremos *e.v.t.*). En estas categorías, los objetos son ciertos *e.v.t.* y los morfismos son los operadores lineales continuos entre estos espacios.

Definición C.1.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$ dos categorías. Un *funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una aplicación que a cada objeto A en $\mathcal{C}$ le asigna un objeto $F(A)$ en $\mathcal{G}$, y a cada morfismo T en $\mathcal{C}$ le asigna un morfismo $F(T)$ en $\mathcal{G}$ de tal manera que si $T : A \longrightarrow B$ entonces $F(T) : F(A) \longrightarrow F(B)$ y verificando además

- $F(TS) = F(T)F(S)$ para cualesquiera T, S morfismos en $\mathcal{C}$,
- $F(I_A) = I_{F(A)}$.

Si por ejemplo $\mathcal{C}$ es la categoría de todos los *e.v.t.* y $\mathcal{N}$ es la categoría de los espacios vectoriales normados (en ambos casos los morfismos serán los operadores lineales continuos), entonces $F(A) = A$, $F(T) = T$ define un funtor de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{C}$. En general, si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$ son dos categorías tales que todos los objetos de $\mathcal{C}$ son objetos de $\mathcal{G}$ y todos los morfismos de $\mathcal{C}$ son morfismos de $\mathcal{G}$, decimos que $\mathcal{C}$ es una *subcategoría* de $\mathcal{G}$ si $F(A) = A$, $F(T) = T$ define un funtor de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{G}$. Lo anterior nos diría entonces que $\mathcal{N}$ es una subcategoría de la categoría de todos los *e.v.t.*. Llamando $\mathcal{B}$ a la categoría de los espacios de Banach, es claro que $\mathcal{B}$ es subcategoría de $\mathcal{N}$.

C.1.2. Pares de espacios

Diremos que dos *e.v.t* A_0 y A_1 son *compatibles* si hay un *e.v.t.* Hausdorff $\mathfrak{U}$, tal que A_0 y A_1 son subespacios de $\mathfrak{U}$. En tal caso, tiene sentido considerar la intersección $A_0 \cap A_1$ y la suma $A_0 + A_1$, que consiste de todos los elementos $a \in \mathfrak{U}$ que se pueden escribir de la forma $a = a_0 + a_1$ con $a_0 \in A_0$ y $a_1 \in A_1$.

Observación C.1.2. *Sean A_0 y A_1 espacios vectoriales normados compatibles. Luego $A_0 \cap A_1$ es un espacio vectorial normado con la norma definida por*

$$\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}.$$

Lo mismo sucede con $A_0 + A_1$, con la norma definida de la siguiente manera:

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1}\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de la forma $a = a_0 + a_1$ con $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$.

Si A_0 y A_1 son completos entonces $A_0 \cap A_1$ y $A_0 + A_1$ también lo son.

Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{N}$ (los espacios normados). Dados A_0, A_1 espacios en $\mathcal{C}$, decimos que $\overline{A} = (A_0, A_1)$ es un *par de espacios compatibles* (o simplemente un par de espacios), si A_0 y A_1 son compatibles y además $A_0 \cap A_1$ y $A_0 + A_1$ son espacios en $\mathcal{C}$. Podemos definir los morfismos $T : (A_0, A_1) \longrightarrow (B_0, B_1)$ entre pares de espacios, como los operadores lineales y acotados $T : A_0 + A_1 \longrightarrow B_0 + B_1$ tales que $T(A_0) \subseteq B_0$, $T(A_1) \subseteq B_1$ y las restricciones $T_{A_0} : A_0 \longrightarrow B_0$ y $T_{A_1} : A_1 \longrightarrow B_1$ son morfismos en $\mathcal{C}$. Con estos morfismos, los pares de espacios compatibles forman una categoría que denotaremos $\overline{\mathcal{C}}$. Notando $\|T\|_{A,B}$ a la norma del operador $T : A \longrightarrow B$, es fácil ver que $\|T\|_{A_0+A_1,B_0+B_1} \leq \text{máx}\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}$ y que $\|T\|_{A_0\cap A_1,B_0\cap B_1} \leq \text{máx}\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}$.

Se definen los funtores suma e intersección $\Sigma, \Delta : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$, como aquellos que verifican:

- $\Sigma(T) = \Delta(T) = T$,
- $\Sigma(\overline{A}) = A_0 + A_1$ y $\Delta(\overline{A}) = A_0 \cap A_1$.

Definición C.1.3. Dados $a \in \Sigma(\overline{A})$ y $t > 0$, consideramos

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + t.\|a_1\|_{A_1}\}.$$

Este es el llamado *K-funcional de Peetre* (o simplemente K-funcional).

Si ponemos $t = 1$ en la definición, obtenemos $K(1, a; A_0, A_1) = \|a\|_{\Sigma(\overline{A})}$. En general, si fijamos un $t > 0$ entonces $K(t, \cdot; A_0, A_1)$ define una norma equivalente en $\Sigma(\overline{A})$.

C.1.3. Espacios intermedios y de interpolación

Como antes, $\mathcal{C}$ denota una subcategoría de $\mathcal{N}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ es la categoría de pares de espacios compatibles $\overline{A} = (A_0, A_1)$ con A_i en $\mathcal{C}$ $(i = 0, 1)$.

Definición C.1.4. Sea $\overline{A} = (A_0, A_1)$ en $\overline{\mathcal{C}}$. Un espacio A en $\mathcal{C}$ se llama *espacio intermedio* entre A_0 y A_1 (o con respecto a $\overline{A}$) si $\Delta(\overline{A}) \subseteq A \subseteq \Sigma(\overline{A})$ con inclusiones continuas. El espacio A es un *espacio de interpolación* entre A_0 y A_1 (o con respecto a $\overline{A}$) si es un espacio intermedio y además $T : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ implica $T : A \longrightarrow A$; es decir, $T(A) \subseteq A$ y la restricción $T : A \longrightarrow A$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ (o sea, un operador lineal y acotado).

Notar que el teorema de Riesz-Thorin enunciado al comienzo del apéndice, nos dice que $L_p(\mu)$ es espacio de interpolación entre $L_{p_0}(\mu)$ y $L_{p_1}(\mu)$ si $p_0 < p < p_1$ (poniendo $q_0 = p_0$, $q_1 = p_1$ y los mismos espacios de medida).

Se puede generalizar un poco más la definición anterior, de la siguiente manera.

Definición C.1.5. Sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ dos pares de espacios en $\overline{\mathcal{C}}$. Decimos que dos espacios A y B en $\mathcal{C}$ son espacios de interpolación con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$, si A y B son espacios intermedios con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$ (respectivamente) y además $T : \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$ implica $T : A \longrightarrow B$.

Observación C.1.6. *Que A y B sean espacios de interpolación con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$, no implica necesariamente que A sea espacio de interpolación con respecto a $\overline{A}$, o que B sea espacio de interpolación con respecto a $\overline{B}$.*

Observación C.1.7. *Dados A y B dos espacios de interpolación con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$, las posibles estimaciones de la norma del operador $T : A \longrightarrow B$, dan lugar a diferentes definiciones.*

- *Si $\|T\|_{A,B} \leq \text{máx}\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}$ decimos que A y B son espacios de interpolación exactos.*
- *Si $\|T\|_{A,B} \leq C. \text{máx}\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}$ para alguna constante C, decimos que A y B son espacios de interpolación uniformes. Cuando $C = 1$ estamos en el caso anterior.*
- *Si hay un $0 \leq \theta \leq 1$ y una constante C tales que $\|T\|_{A,B} \leq C.\|T\|^{1-\theta}_{A_0,B_0}.\|T\|^{\theta}_{A_1,B_1}$, entonces decimos que A y B espacios de interpolación de exponente θ. Cuando $C = 1$ decimos que son exactos de exponente θ.*

Por lo visto anteriormente, es claro que $\Delta(\overline{A})$ y $\Delta(\overline{B})$ son espacios de interpolación exactos con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Lo mismo sucede con $\Sigma(\overline{A})$ y $\Sigma(\overline{B})$. Por otro lado, volviendo al teorema de Riesz-Thorin, si $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ es claro que $L_p(\mu)$ es un espacio de interpolación exacto de exponente θ entre $L_{p_0}(\mu)$ y $L_{p_1}(\mu)$. Cuando trabajamos en la categoría de los espacios de Banach, el siguiente teorema afirma que todos los espacios de interpolación resultan uniformes.

Teorema C.1.8. *Consideremos la categoría $\mathcal{B}$ de los espacios de Banach. Supongamos que A y B son espacios de interpolación con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Luego A y B son espacios de interpolación uniformes.*

C.1.4. El teorema de Aronszajn-Gagliardo

Uno de los objetivos más importantes en la teoría de interpolación es la construcción de espacios de interpolación.

Definición C.1.9. Un *método de interpolación* (o funtor de interpolación) en $\mathcal{C}$, es un funtor $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son pares de espacios en $\overline{\mathcal{C}}$, entonces $F(\overline{A})$ y $F(\overline{B})$ son espacios de interpolación con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Además F debe verificar $F(T) = T$ para todo $T : \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$.

Decimos que F es un *método de interpolación uniforme (exacto)* si $F(\overline{A})$ y $F(\overline{B})$ son espacios de interpolación uniformes (exactos) con respecto a $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Análogamente se define *método de interpolación (exacto) de exponente θ.*

El **Teorema C.1.8** nos dice que todo método de interpolación F en $\mathcal{B}$ es uniforme. Es decir que $\|T\|_{F(\overline{A}),F(\overline{B})} \leq C. \text{máx}\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}$ para alguna constante C que depende de $\overline{A}$ y $\overline{B}$. En el caso en que se pueda elegir C independiente de los pares de espacios, diremos que F es un *método de interpolación acotado.*

Los funtores Δ y Σ son métodos de interpolación exactos en la categoría de los espacios vectoriales normados. Ahora bien, dado un espacio de interpolación A con respecto a $\overline{A}$, nos podemos preguntar si existe un método de interpolación F tal que $F(\overline{A}) = A$. El siguiente teorema nos da una respuesta cuando trabajamos en la categoría de los espacios de Banach.

Teorema C.1.10. ***(Teorema de Aronszajn-Gagliardo)*** *Consideremos la categoría $\mathcal{B}$ de los espacios de Banach. Si A es un espacio de interpolación con respecto a $\overline{A}$, entonces hay un método de interpolación exacto F_0 en $\mathcal{B}$ tal que $F_0(\overline{A}) = A$ (donde la igualdad no es necesariamente isométrica, sino con normas equivalentes).*

El K-funcional definido anteriormente (ver **Definición C.1.3**) juega un papel importante en la construcción de un conocido método de interpolación, el llamado K-método (que no estudiaremos en este apéndice). Siguiendo la misma inquietud que motiva al teorema de Aronszajn-Gagliardo, fue motivo de estudio el saber si todo espacio de interpolación se puede obtener a partir de un K-método. Los pares de espacios para los cuales esto se cumple fueron caracterizados, y se denominan par de espacios de Calderón. Nos interesará trabajar con estos espacios, de manera que veremos su definición. En las siguientes definiciones se considera la categoría $\mathcal{B}$.

Definición C.1.11. Un espacio intermedio A con respecto a un par $\overline{A} = (A_0, A_1)$ se denomina *K-espacio*, si cada vez que $a \in A$ y $b \in A_0 + A_1$ satisfacen $K(t, b; A_0, A_1) \leq K(t, a; A_0, A_1)$ para todo $t > 0$, se verifica que $b \in A$ con $\|b\|_A \leq C.\|a\|_A$ (para alguna constante C).

Definición C.1.12. Un par de espacios $\overline{A} = (A_0, A_1)$ se denomina se denomina *par de espacios de Calderón*, si todos los espacios de interpolación con respecto a $\overline{A}$ son además K-espacios.

Simplemente a modo informativo, enunciamos el siguiente resultado.

Observación C.1.13. *Dado un par de espacios $\overline{A} = (A_0, A_1)$, son equivalentes:*

i) $\overline{A}$ es un par de espacios de Calderón.

ii) Para cada par de elementos $a, b \in A_0 + A_1$ satisfaciendo $K(t, b; A_0, A_1) \leq K(t, a; A_0, A_1)$ para todo $t > 0$, existe un operador $T : A_0 + A_1 \longrightarrow A_0 + A_1$ tal que $Ta = b$.

El siguiente resultado fue probado por Calderón y puede verse en [5, Cap. 2, Teorema 2.6.9].

Teorema C.1.14. *El par (ℓ_1, ℓ_∞) es un par de espacios de Calderón.*

C.1.5. Desigualdad de Hardy y caracterización de la norma en $\ell_1 + \ell_\infty$

Los siguientes resultados de teoría de la medida pueden encontrarse en [2] en sus versiones más generales para espacios de funciones. El primero de ellos (ver [2, Cap. 2, Proposición 3.6]) es el llamado lema de Hardy.

Proposición C.1.15. *Sean $x = (x_i)_i$ e $y = (y_i)_i$ dos sucesiones no negativas en ω tales que $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $z = (z_i)_i$ es una sucesión no negativa y decreciente (esto es, $z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq ....$). Entonces se verifica $\sum_{i=1}^\infty x_i.z_i \leq \sum_{i=1}^\infty y_i.z_i$ (eventualmente $\sum_{i=1}^\infty y_i.z_i = +\infty$).*

El segundo de los resultados (ver [2, Cap. 2, Teorema 6.2]) nos brinda una caracterización de la norma en $\ell_1 + \ell_\infty$. Recordar que dada una sucesión $x = (x_n)_n$, notamos $x^* = (x_n^*)_n$ al reordenamiento decreciente de la sucesión x y $x^{**} = (x_n^{**})_n$ a la sucesión dada por $x_n^{**} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^n x_i^*$.

Teorema C.1.16. *Sea x una sucesión en el espacio suma $\ell_1 + \ell_\infty$. Entonces se verifica*

$$\inf_{x=x_0+x_1} \{\|x_0\|_1 + n.\|x_1\|_\infty\} = \sum_{i=1}^n x_i^* = n.x_n^{**}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como caso particular de este teorema, se obtiene que $\|x\|_{\ell_1+\ell_\infty} = \|x\|_\infty = x_1^{**} = x_1^*$ (donde la primer desigualdad se debe a que $\ell_1 \hookrightarrow \ell_\infty$).

Apéndice D

s-Numbers de operadores en espacios de Banach

La idea alrededor de la definición de los s-numbers (singular numbers) es la de asignarle a cada operador T entre espacios de Banach, una sucesión decreciente de números que nos indiquen, de alguna manera, *cuán aproximable o compacto resulta*. Recordar que dados X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, decimos que T es *aproximable* (notaremos $T \in \mathcal{P}(X, Y)$) si hay una sucesión $(T_n)_n$ de operadores de rango finito tales que $\|T - T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Por otro lado, decimos que el operador T es *compacto* (aquí notamos $T \in \mathcal{K}(X, Y)$) si $T(B_X)$ es relativamente compacto en Y. Se sabe que los operadores aproximables son compactos, y que cuando se trata de operadores entre espacios de Hilbert, estos conceptos son equivalentes. Para espacios arbitrarios no se verifica en general esta equivalencia, y es un problema muy estudiado el de los espacios X para los cuales los operadores compactos $T : X \longrightarrow Y$ son aproximables (ver por ejemplo [15, Capítulo 1.e]). A continuación, veremos la definición de s-number y algunos ejemplos de estos, como lo son los números de aproximación, los números de Hilbert, los números de Weyl y algunos otros más. Estos temas pueden encontrarse en [19] y [7].

D.1. Definiciones y ejemplos

Definición D.1.1. Una aplicación s se denomina *s-function*, si a cada operador T entre espacios de Banach le asigna una sucesión $(s_n(T))_n$ tal que se verifican:

(S_1) $\|T\| = s_1(T) \geq s_2(T) \geq .... \geq 0$, para todo operador T.

(S_2) $s_n(T + S) \leq s_n(T) + \|S\|$, para cualesquiera $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(S_3) $s_n(RTS) \leq \|R\|.s_n(T).\|S\|$, para $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$.

(S_4) Si T es un operador de rango finito con $rg(T) < n$ entonces $s_n(T) = 0$.

(S_5) $s_n(id : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n) = 1$.

En tal caso $s_n(T)$ se denomina el *n-ésimo s-number* del operador T.

Observación D.1.2. *Las siguientes propiedades se deducen fácilmente de la definición.*

i) Si T es un operador tal que $s_n(T) = 0$ entonces $rg(T) < n$.

ii) Los s-numbers son continuos. Más aún, dados $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ se verifica la desigualdad $|s_n(T) - s_n(S)| \leq \|T - S\|$.

Definición D.1.3. Sea s una s-function.

i) Diremos que s es *aditiva* si $s_{k+n-1}(T + S) \leq s_k(T) + s_n(S)$, para $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$.

ii) Diremos que s es *multiplicativa* si $s_{k+n-1}(TS) \leq s_k(T).s_n(S)$, para $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$ y $T \in \mathcal{L}(X, X_1)$.

Eventualmente, en lugar de hablar de una s-function aditiva o multiplicativa, nos referiremos a los s-numbers como aquellos que tienen las propiedades de aditividad y multiplicatividad.

Las condiciones (S_2) y (S_3) de la **Definición D.1.1** son casos particulares de las definiciones anteriores (basta poner $k = 1$).

Veamos un par de definiciones más. Para eso recordemos que un operador $J : X \longrightarrow Y$ es una *inyección métrica* si $\|Jx\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$, y que $Q : X \longrightarrow Y$ es una *suryección métrica* si es suryectiva y además $Q(B_X^\circ) = B_Y^\circ$ (aquí B_X° denota el interior de B_X).

Definición D.1.4. Sea s una s-function.

i) Diremos que s es *inyectiva* (o que los s-numbers lo son) si $s_n(T) = s_n(JT)$ para todo n, todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y toda inyección métrica $J \in \mathcal{L}(Y, \tilde{Y})$.

ii) Diremos que s es *suryectiva* (o que los s-numbers lo son) si $s_n(T) = s_n(TQ)$ para todo n, todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y toda suryección métrica $Q \in \mathcal{L}(Y, \tilde{Y})$.

Cuando se trabaja con operadores entre espacios de Hilbert se puede decir lo siguiente.

Teorema D.1.5. *Hay una única s-function en la clase de operadores entre espacios de Hilbert. Dicho de otra forma, todas las s-functions coinciden sobre los operadores entre espacios de Hilbert.*

D.1.1. Números de aproximación

Dado un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, el *n-ésimo número de aproximación* de T está dado por:

$$a_n(T) = \inf\{\|T - S\| : \quad S \in \mathcal{L}(X, Y),\ rg(S) < n\}.$$

Los números de aproximación son s-numbers, es decir, verifican las condiciones de la **Definición D.1.1**. Además, verifican las propiedades de aditividad y multiplicatividad. Dado un operador T, es claro que resulta un operador aproximable si y solo si $\lim_{n\to\infty} a_n(T) = 0$.

Observación D.1.6. *Sea X un espacio de Banach tal que $dim(X) \geq n$. Luego $a_n(id : X \hookrightarrow X) = 1$.*

Observación D.1.7. *Los números de aproximación son los más grandes de todos los s-numbers. Es decir, $s_n(T) \leq a_n(T)$ para todo n, para todo operador T y para toda s-function.*

Ejemplo D.1.8. Es fácil ver que si $D_\sigma : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es un operador diagonal dado por $D_\sigma(x) = (\sigma_i.x_i)_i$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq .... \geq 0$, entonces $a_n(D_\sigma) = \sigma_n$. En el caso de un operador aproximable $T : H_1 \longrightarrow H_2$ entre espacios de Hilbert, el *Teorema de representación de Schmidt* (ver [19, D.3.2]) nos dice que existen familias ortonormales (finitas o a lo sumo numerables) (x_i) e (y_i) y una sucesión decreciente no negativa (σ_i) (finita o numerable) de elementos que tienden a cero, tales que $Tx = \sum_i \sigma_i.(x, x_i).y_i$. Esto nos permite factorizar a T vía el operador diagonal D_σ y en consecuencia se puede probar que $a_n(T) = \sigma_n$. Es decir que los números de aproximación de un operador aproximable T entre espacios de Hilbert (y en consecuencia todos los s-numbers, en virtud del **Teorema D.1.5**) coinciden con los coeficientes σ_n del *Teorema de representación de Schmidt.*

Observación D.1.9. *Sean Y un espacio de Banach y un operador $T : \ell_2 \longrightarrow Y$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un sistema ortonormal $(f_n)_n$ en ℓ_2 tal que $a_n(T) \leq (1 + \varepsilon).\|Tf_n\|_Y$ para todo n.*

En [19, 11.11.5] se calculan los números de aproximación de las inclusiones $id : \ell_q^n \hookrightarrow \ell_p^n$. El resultado afirma lo siguiente.

Teorema D.1.10. *Para $1 \leq k \leq n$ y $1 \leq p < q < \infty$, se verifica:*

$$a_k(id : \ell_q^n \hookrightarrow \ell_p^n) = (n - k + 1)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

D.1.2. Números de Hilbert

Dado un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, definimos su *n-ésimo número de Hilbert* como:

$$h_n(T) = \sup\{a_n(RTS) : \quad S \in \mathcal{L}(\ell_2, X), \|S\| \leq 1 \text{ y } R \in \mathcal{L}(Y, \ell_2), \|R\| \leq 1\}.$$

Observación D.1.11. *Los números de Hilbert son los más chicos de todos los s-numbers. Es decir, dado un operador T se verifica $h_n(T) \leq s_n(T)$ para todo s-number.*

Observación D.1.12. *Los números de Hilbert son aditivos pero no son multiplicativos. Esto último se deduce de las siguientes desigualdades:*

$$n^{-1/2} \leq h_n(id : c_0 \hookrightarrow c_0) \leq C.n^{-1/2}$$

donde C es una constante positiva (ver [19, 11.9.3]).

La demostración del siguiente resultado, se puede encontrar en [19, 11.4.3].

Proposición D.1.13. *Sean $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ existen $S \in \mathcal{L}(\ell_2^n, X)$ y $R \in \mathcal{L}(Y, \ell_2^n)$ tales que $\|S\| \leq 1$, $\|R\| \leq 1$ y $RTS = (1 - \varepsilon).h_n(T).id_n$ (donde $id_n : \ell_2^n \hookrightarrow \ell_2^n$).*

D.1.3. Números de Weyl

Para cada operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se define el *n-ésimo número de Weyl* de T, de la siguiente forma:

$$x_n(T) = \sup\{a_n(TS) : \quad S \in \mathcal{L}(\ell_2, X), \|S\| \leq 1\}.$$

Observación D.1.14. *Los números de Weyl son aditivos y multiplicativos. Por otro lado, se deduce fácilmente de la definicion que si $T : \ell_2 \longrightarrow Y$ entonces $x_n(T) = a_n(T)$.*

La siguiente desigualdad relaciona los números de Weyl con la norma 2-sumante de un operador y puede verse en [14].

Proposición D.1.15. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador 2-sumante. Luego se verifica:*

$$n^{1/2}.x_n(T) \leq \pi_2(T)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

D.1.4. Números de Kolmogorov

La siguiente caracterización de los operadores compactos motiva la definición de los números de Kolmogorov.

Observación D.1.16. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subespacio $N_\varepsilon \subseteq Y$ finito dimensional, tal que $T(B_X) \subseteq N_\varepsilon + \varepsilon.B_Y$*

Con esta caracterización en mente, dado un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se define el *n-ésimo número de Kolmogorov* de T como:

$$d_n(T) = \inf\{\varepsilon > 0 : \quad T(B_X) \subseteq N_\varepsilon + \varepsilon.B_Y \text{ con } N_\varepsilon \subseteq Y \text{ y } dim(N_\varepsilon) < n\}$$

Los números de Kolmogorov son s-numbers aditivos y multiplicativos. Es claro que un operador T resulta compacto si y solo si $\lim_{n\to\infty} d_n(T) = 0$.

La caracterización anterior de compacidad, se centra en las partes del conjunto $T(B_X)$ que caen fuera de subespacios finito dimensionales. Dado un subespacio de dimensión finita $N \subseteq Y$, consideremos el cociente $Q_N^Y : Y \longrightarrow Y/N$. Se prueba que para cada operador T, se verifica $d_n(T) = \inf\{\|Q_N^Y T\| : \quad N \subseteq Y,\ dim(N) < n\}$.

Observación D.1.17. *Los números de Kolmogorov son suryectivos. Más aún, los más grandes entre los s-numbers suryectivos.*

D.1.5. Números de Gelfand

Basándose en otra caracterización de compacidad, se definen los números de Gelfand.

Observación D.1.18. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ hay finitas funcionales $\varphi_i \in X'$ $(1 \leq i \leq n_\varepsilon)$ tales que $\|Tx\|_Y \leq \sup_i |\varphi_i(x)| + \varepsilon.\|x\|$ para todo $x \in X$.*

Ahora sí, se define el *n-ésimo número de Gelfand* de un operador T de la siguiente forma:

$$c_n(T) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : \quad \|Tx\|_Y \leq \sup_{1 \leq i \leq k} |\varphi_i(x)| + \varepsilon.\|x\| \text{ donde } \varphi_i \in X',\ 1 \leq i \leq k \text{ con } k < n\}.$$

Los números de Gelfand son s-numbers aditivos y multiplicativos. Al igual que antes, es claro que T es compacto si y solo si $\text{lím}_{n\to\infty} c_n(T) = 0$.

La caracterización anterior de operadores compactos se fija en las restricciones de los operadores a subespacios $M \subseteq X$ de codimensión finita. De hecho, sea T un operador compacto y sean ε y $\varphi_i \in X'$ $(1 \leq i \leq k)$ como antes. Consideremos $M = \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\varphi_i)$ y notemos que es un subespacio de codimensión menor o igual que k. Llamando $I_M^X : M \hookrightarrow X$ a la inclusión, tendremos $\|TI_M^X\| \leq \varepsilon$. Luego, se tiene que $c_n(T) = \text{ínf}\{\|TI_M^X\| : \quad M \subseteq X,\ codim(M) < n\}$.

Observación D.1.19. *Los números de Gelfand son inyectivos. Más aún, son los más grandes entre los s-numbers inyectivos.*

D.1.6. Relación entre los s-numbers

Según lo dicho en las *Observaciones D.1.7* y *D.1.11*, es claro que

$$h_n(T) \leq c_n(T) \leq a_n(T) \quad \text{y} \quad h_n(T) \leq d_n(T) \leq a_n(T)$$

para todo operador T y para todo $n \in \mathbb{N}$. Para el otro lado, se pueden probar las siguientes desigualdades.

Proposición D.1.20. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Luego se verifican:*

$$a_n(T) \leq 2.n^{1/2}.c_n(T) \quad y \quad a_n(T) \leq 2.n^{1/2}.d_n(T)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Apéndice E

Resultados auxiliares

El objetivo de este apéndice es el de enunciar algunos resultados y definiciones que son útiles en algunos tramos del texto. Cada sección será dedicada a un tema en particular, en su mayoría resultados clásicos del análisis funcional. Por lo general, cada sección será independiente de las otras.

E.1. Teorema de Eberlein-Šmulian

Es sabido que en espacios cuya topología es inducida por una métrica, un subconjunto A es compacto si y solo si es secuencialmente compacto (es decir, si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente). El teorema que enunciaremos a continuación, afirma que esto sigue valiendo si consideramos la topología débil en cualquier espacio normado. Recordemos que dado un espacio de Banach X y un subconjunto A del mismo, decimos que A es *débil compacto* si es compacto con la topología débil, y que es *relativamente débil compacto* si la clausura débil $\overline{A}^w$ es débil compacta. Por otro lado, decimos que A es *débil secuencialmente compacto* si dada una sucesión en A, se puede extraer una subsucesión débilmente convergente; análogamente, A es *relativamente débil secuencialmente compacto* si $\overline{A}^w$ es débil secuencialmente compacto.

Teorema E.1.1. *Un subconjunto de un espacio de Banach es relativamente débil compacto si y solo si es relativamente débil secuencialmente compacto.*

En particular, un subconjunto de un espacio de Banach es débil compacto si y solo si es débil secuencialmente compacto.

La demostración de este teorema puede encontrarse, por ejemplo, en [11, Cap. 3], [17, Cap. 2.8] o en [1, Cap. 1.6]

E.2. Principio de selección de Bessaga-Pełczyński

Antes de enunciar el resultado de esta sección, necesitamos definir el concepto de base de un espacio de Banach y de algunas otras cuestiones relacionadas con esta definición. Estos temas se estudian (con mucho detalle) en los libros [1, Cap. 1.3] y [11, Cap. 5].

Definición E.2.1. Una sucesión $(e_i)_i$ en un espacio de Banach X es una *base de Schauder* (o simplemente una *base*) para X, si para cada $x \in X$ existe un única sucesión de escalares $(\alpha_i)_i$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot e_i.$$

Esta igualdad significa que $(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot e_i)_N$ es una sucesión que converge a x (convergencia en norma).

Dado un espacio X con una base $(e_i)_i$, podemos considerar las funcionales asociadas $e_i^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot e_i \mapsto \alpha_i$, que resultan continuas en X.

Definición E.2.2. Una sucesión $(e_i)_i$ en un espacio X se denomina *sucesión básica*, si es una base para $[e_i]_i = \overline{span\{e_i : i \in \mathbb{N}\}}$.

Supongamos ahora que tenemos dos espacios de Banach X e Y, con respectivas bases (o sucesiones básicas) $(x_i)_i$, $(y_i)_i$. Diremos que $(x_i)_i$ e $(y_i)_i$ son *equivalentes*, si para cualquier sucesión de escalares $(\alpha_i)_i$ se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot x_i$ converge en X si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot y_i$ converge en Y. En tal caso, notaremos $(x_i)_i \sim (y_i)_i$.

Observación E.2.3. *Se puede ver que $(x_i)_i \sim (y_i)_i$ si y solo si existe una constante $C > 0$, tal que para cualquier elección de finitos escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$, se tiene*

$$\frac{1}{C} \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot y_i \right\|_Y \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i \right\|_X \leq C. \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot y_i \right\|_Y .$$

Otra caracterización similar es la siguiente: $(x_i)_i \sim (y_i)_i$ si y solo si existe un isomorfismo $T : [x_i]_i \longrightarrow [y_i]_i$ tal que $Tx_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Relacionando la equivalencia entre bases con las propiedades de p-sumabilidad vistas en B.2, obtenemos la siguiente observación.

Observación E.2.4. *Sean $(x_i)_i$, $(y_i)_i$ bases de los espacios de Banach X e Y respectivamente, y supongamos que son bases equivalentes. Luego, si $(x_i)_i \in \ell_p^w(X)$ (resp. $\ell_p^s(X)$) entonces $(y_i)_i \in \ell_p^w(Y)$ (resp. $\ell_p^s(Y)$). De hecho, la observación anterior nos muestra que existe un isomorfismo $T : X \longrightarrow Y$ tal que $Tx_i = y_i$ para todo i. Considerando el operador inducido $\hat{T}$, dado por $(z_i)_i \mapsto (Tz_i)_i$, es claro que $\hat{T} : \ell_p^w(X) \longrightarrow \ell_p^w(Y)$ y que $\hat{T} : \ell_p^s(X) \longrightarrow \ell_p^s(Y)$, y esto prueba que si $(x_i)_i$ pertenece a $\ell_p^w(X)$ entonces $\hat{T}((x_i)_i) = (y_i)_i$ pertenece a $\ell_p^w(Y)$ (y lo mismo con $\ell_p^s(X)$).*

Definición E.2.5. Sean $(e_i)_i$ una base de un espacio X, $(p_j)_j$ una sucesión creciente de naturales y $(\alpha_i)_i$ una sucesión de escalares. Una sucesión de vectores no nulos de la forma

$$u_i = \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} \alpha_i \cdot e_i,$$

se llama *sucesión básica en bloque* de $(e_i)_i$.

Es fácil probar que $(u_i)_i$ es, como lo indica su nombre, una sucesión básica.

Observación E.2.6. *Sea $X = \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$) o $X = c_0$. Consideremos $(u_i)_i$ una sucesión básica en bloque de la base canónica $(e_i)_i$ de X, y supongamos que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1 \leq \|u_i\|_X \leq C_2$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces $(u_i)_i$ es equivalente a $(e_i)_i$.*

Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de esta sección, conocido como el principio de selección de Bessaga-Pełczyński.

Teorema E.2.7. *Sea X un espacio de Banach con base $(e_i)_i$, y sea $(x_i)_i$ una sucesión en X tal que:*

- *$x_i \xrightarrow{w} 0$ (esto es, que x_i converge débilmente a 0),*
- *hay un $\varepsilon > 0$ tal que $\|x_i\|_X > \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Luego, se puede extraer una subsucesión $(x_{i_k})_k$, que resulta sucesión básica y que es equivalente a una sucesión básica en bloque de $(e_i)_i$.

La **Observación E.2.6** nos dice que si en el teorema consideramos $X = \ell_p$ o c_0 ($1 \leq p < \infty$), y $(e_i)_i$ la base canónica, entonces la subsucesión $(x_{i_k})_k$ es equivalente a $(e_i)_i$.

E.3. Teorema ℓ_1 de Rosenthal

Dado un espacio de Banach X, se puede ver que B_X es débil compacta si y solo si X es reflexivo. Luego, como consecuencia del teorema de Eberlein-Šmulian, es claro que toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión débilmente convergente si y solo si X es reflexivo. Supongamos que ahora pedimos que cada sucesión acotada en X tenga una subsucesión débil de Cauchy, donde $(x_n)_n$ es *débil de Cauchy* (o simplemente w-Cauchy) si para cada $\varphi \in X'$ la sucesión de escalares $(\varphi(x_n))_n$ es convergente. Por lo anterior, es evidente que si X es reflexivo entonces último se verifica. Sin embargo, nos podemos preguntar si la condición de reflexividad es una condición necesaria en este sentido. El siguiente teorema nos muestra que no, a la vez que da una condición necesaria y suficiente sobre el espacio X.

Teorema E.3.1. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

a) *El espacio X no contiene una copia isomorfa de ℓ_1.*

b) *Cada sucesión acotada en X tiene una subsucesión w-Cauchy.*

Se puede precisar un poco más el enunciado del teorema. Dado un espacio X, la manera natural de encontrar una copia de ℓ_1, es mostrando una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que para cualquier elección de $n \in \mathbb{N}$ y de escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ (que no dependen de n ni de los escalares) tales que

$$C_1. \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \right\|_X \leq C_2. \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

Dicho de otra manera, se busca una sucesión $(x_n)_n$ que sea equivalente a la base canónica de ℓ_1. Lo que se muestra en el teorema es que si $(x_n)_n$ es una sucesión acotada en X que no tiene subsucesiones w-Cauchy, entonces se puede extraer una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que sea equivalente a la base canónica de ℓ_1. La demostración de este resultado, más otras cuestiones asociadas al mismo, se pueden ver en [11, Cap. 11], [1, Cap. 10.2].

E.4. Ideales de operadores

En esta sección definiremos el concepto de ideal de operadores. En [19] se estudian con detalle propiedades y ejemplos de los ideales de operadores. Antes de ver la definición, recordemos que dados X, Y dos espacios de Banach, si $\varphi \in X'$ e $y \in Y$ entonces notamos $\varphi \otimes y : X \longrightarrow Y$ al operador dado por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x) \cdot y$.

Definición E.4.1. Un *ideal de operadores* $\mathcal{A}$ es un método de asociarle a cada par (X, Y) de espacios de Banach, un subespacio lineal $\mathcal{A}(X, Y)$ de $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que se verifiquen:

$(I1)$ $\varphi \otimes y \in \mathcal{A}(X, Y)$ para todo $\varphi \in X'$, $y \in Y$,

$(I2)$ si X_0, Y_0 son espacios de Banach y se tienen $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, $T \in \mathcal{A}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$ entonces $RTS \in \mathcal{A}(X_0, Y_0)$.

Si además, para cada (X, Y) tenemos una norma α que verifica:

$(N1)$ $\alpha(\varphi \otimes y) = \|\varphi\|_{X'}.\|y\|_Y$ para todo $\varphi \in X'$, $y \in Y$,

$(N2)$ $\alpha(RTS) \leq \|R\|.\alpha(T).\|S\|$ para cualesquiera X_0, Y_0 espacios de Banach y $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, $T \in \mathcal{A}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$,

$(N3)$ $(\mathcal{A}(X, Y), \alpha)$ es un espacio de Banach,

entonces $(\mathcal{A}, \alpha)$ se denomina *ideal de operadores de Banach.*

Algunos ejemplos de ideales de operadores de Banach son: $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ el ideal de todos los operadores lineales y acotados, $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ el ideal de los operadores compactos, $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ el ideal de los operadores débil compactos, $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ el ideal de los operadores completamente continuos, (Π_p, π_p) y $(\Pi_{q,p}, \pi_{q,p})$ los ideales de operadores sumantes.

E.5. Tipo y cotipo

Los conceptos de tipo y cotipo de un espacio han sido largamente estudiados en la teoría local de espacios de Banach. En lo que sigue veremos las definiciones y algunas propiedades básicas referidas a este tema, que se pueden ver con mucho más detalle en cualquiera de los siguientes libros: [16], [1], [10].

Definición E.5.1. Sea X un espacio de Banach y sean $r_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{N})$ las *funciones Rademacher* definidas por $r_i(t) = sg(\sin(2^n \pi t))$.

a) Decimos que X tiene *tipo p* si existe una constante $C \geq 0$, tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de elementos $x_1, ..., x_n \in X$, se verifica

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \|_X^2 dt \right)^{1/2} \leq C. \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p \right)^{1/p}.$$

Si X tiene tipo p, se nota $T_p(X)$ a la menor de las constantes satisfaciendo la desigualdad anterior, y se la denomina *constante de tipo* p de X.

b) Decimos que X tiene *cotipo q* si existe una constante $C \geq 0$, tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de elementos $x_1, ..., x_n \in X$, se verifica

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right)^{1/q} \leq C. \left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \|_X^2 dt \right)^{1/2}$$

Si X tiene cotipo q, se nota $C_q(X)$ a la menor de las constantes satisfaciendo la desigualdad anterior, y se la denomina *constante de cotipo* q de X. En el caso $q = \infty$ se reemplaza el término $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q\right)^{1/q}$ por $\max_{i \leq n} \|x_i\|_X$.

Observación E.5.2. *Algunas desigualdades relacionadas con estas definiciones son las conocidas desigualdades de Khintchine y Kahane. La primera afirma que para cualquier* $0 < p < \infty$*, existen constantes positivas* A_p, B_p *tales que*

$$A_p. \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 | \sum_{i=1}^n \lambda_i . r_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p. \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}$$

para cualquier elección finita de escalares $(\lambda_i)_{i=1}^n$.

La segunda es más general, y afirma que dados $0 < p, q < \infty$*, existe una constante* $K_{p,q} \geq 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \|_X^q dt \right)^{1/q} \leq K_{p,q}. \left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \|_X^p dt \right)^{1/p}$$

para cualquier elección finita de elementos $x_1, ..., x_n \in X$.

Observaciones E.5.3. *a) La desigualdad de Kahane nos muestra que en las definiciones de tipo y cotipo, la expresión* $\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i\|_X^2 dt\right)^{1/2}$ *puede ser reemplazada por* $\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i\|_X^p dt\right)^{1/p}$*, para cualquier* $0 < p < \infty$*. Lo que habría que ajustar en tal caso, serían las nuevas constantes de tipo y cotipo.*

b) Como consecuencia de la desigualdad de Khintchine, se prueba fácilmente que ningún espacio de Banach (excepto el trivial $X = \{0\}$*) puede tener tipo* $p > 2$ *o cotipo* $q < 2$*.*

c) Todo espacio X *tiene tipo* p *para cualquier* $0 < p \leq 1$ *y cotipo* $q = \infty$*. Más aún,* $T_1(X) = C_\infty(X) = 1$*.*

d) Si un espacio X *tiene tipo* $p > 1$*, entonces tiene tipo* $\tilde{p}$ *para cualquier* $1 \leq \tilde{p} < p$*, con constante* $T_{\tilde{p}}(X) \leq T_p(X)$*. Análogamente, si* X *tiene cotipo* $q > 2$*, entonces también tiene cotipo* $\tilde{q}$ *para cualquier* $q < \tilde{q} \leq \infty$*, y la constante verifica* $C_{\tilde{q}} \leq C_q(X)$*.*

e) Todo espacio de Hilbert tiene tipo 2 y cotipo 2 (los mejores posibles). Recíprocamente, si un espacio de Banach tiene tipo 2 y cotipo 2, entonces es isomorfo a un espacio de Hilbert.

f) Si $1 \leq p \leq 2$*, entonces* ℓ_p *tiene tipo* p *y cotipo 2.*

Si $2 \leq q < \infty$*, entonces* ℓ_q *tiene tipo 2 y cotipo* q*. El espacio* ℓ_∞ *no tiene tipo* $p > 1$ *ni cotipo* $q < \infty$*.*

A continuación, enunciaremos algunos resultados que relacionan los conceptos de tipo y cotipo con los de convexidad y concavidad en Banach lattices (ver A.4).

Proposición E.5.4. *Sea* X *un Banach lattice.*

a) Si X *es* q*-cóncavo para algún* $q \geq 2$ *entonces tiene cotipo* q*. Cuando* $q = 2$ *vale la recíproca, es decir que* X *es 2-cóncavo si y solo si tiene cotipo 2.*

b) Si X *es* p*-convexo para un* $1 < p \leq 2$ *y* q*-cóncavo para algún* $q < \infty$*, entonces tiene tipo* p*.*

c) Sea $1 < r < \infty$ *y supongamos que* X *tiene tipo* r *(resp. cotipo* r*). Luego* X *es* p*-convexo (resp.* q*-cóncavo) para todo* $1 \leq p < r$ *(resp.* $r < q \leq \infty$*).*

E.6. Teoremas de factorización

En esta sección, enunciaremos un par de teoremas de factorización. El primero es el teorema de Maurey-Rosenthal, que se puede encontrar en [10, Teorema 12.30] y el segundo es una variante del primero y se puede ver en [8, 4.2].

Teorema E.6.1. *Sean X un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow L_1[0,1]$ un operador que satisface*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |Tx_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^2 \right)^{1/2}. \tag{E.1}$$

Luego T admite una factorización de la forma $T : X \xrightarrow{\tilde{T}} L_2[0,1] \xrightarrow{M_g} L_1[0,1]$, donde $\|\tilde{T}\| \leq 1$ y M_g es el operador multiplicación dado por $f \mapsto f.g$, para cierta $g \in L_2[0,1]$.

Se puede probar (usando la desigualdad de Khintchine) que si X tiene tipo 2 entonces dado cualquier operador $T : X \longrightarrow L_1[0,1]$, hay una constante C (que depende de la constante de tipo 2 de X) tal que $C.T$ verifica (E.1).

Teorema E.6.2. *Fijemos $n, m \in \mathbb{N}$ y sea E un espacio de sucesiones 2-cóncavo. Dado un operador $T : \ell_2^m \longrightarrow E_n$, existen $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ y un operador $R : \ell_2^m \longrightarrow \ell_2^n$ tales que T admite la factorización $T : \ell_2^m \xrightarrow{R} \ell_2^n \xrightarrow{M_\lambda} E_n$ (M_λ el operador multiplicación) y se verifica $\|R\|.\|\lambda\|_{M(\ell_2^n, E_n)} \leq \sqrt{2}.M_{(2)}(E).\|T\|$.*

Bibliografía

[1] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton. *Topics in Banach space theory.* Graduate Texts in Mathematics 233. Berlin: Springer. xi, 373 p. , 2005.

[2] Colin Bennett and Robert Sharpley. *Interpolation of operators.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 129. Boston etc.: Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XIV, 469 p. , 1988.

[3] G. Bennett. Inclusion mappings between l^p spaces. *J. Funct. Anal.*, 13:20–27, 1973.

[4] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 223. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. X, 207 p. with 5 figs. , 1976.

[5] Yu.A. Brudnyĭ and N.Ya. Krugljak. *Interpolation functors and interpolation spaces. Vol. 1.* North-Holland Mathematical Library. 47. Amsterdam etc.: North-Holland. XV, 718 p. , 1991.

[6] Bernd Carl and Andreas Defant. Asymptotic estimates for approximation quantities of tensor product identities. *J. Approximation Theory*, 88(2):228–256, 1997.

[7] Bernd Carl and Irmtraud Stephani. *Entropy, compactness and the approximation of operators. Paperback reprint of the 1990 edition.* Cambridge Tracts in Mathematics 98. Cambridge: Cambridge University Press. x, 277 p. , 2008.

[8] Andreas Defant. Variants of the Maurey-Rosenthal theorem for quasi Köthe function spaces. *Positivity*, 5(2):153–175, 2001.

[9] Andreas Defant, Mieczyslaw Mastylo, and Carsten Michels. Summing inclusion maps between symmetric sequence spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 354(11):4473–4492, 2002.

[10] Joe Diestel, Hans Jarchow, and Andrew Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 43. Cambridge: Cambridge Univ. Press. xv, 474 p. , 1995.

[11] Joseph Diestel. *Sequences and series in a Banach space.* Graduate Texts in Mathematics, 92. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag. XIII, 261 p. , 1984.

[12] N.J. Kalton. Orlicz sequence spaces without local convexity. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 81:253–277, 1977.

[13] P.K. Kamthan and Manjul Gupta. *Sequence spaces and series.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc. XI, 368 p. , 1981.

[14] Hermann König. *Eigenvalue distribution of compact operators.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 16. Basel/Boston/Stuttgart: Birkhäuser Verlag. 262 p. , 1986.

[15] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. *Classical Banach spaces I. Sequence spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 92. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XIII, 190 p. , 1977.

[16] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. *Classical Banach spaces. II: Function spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 97. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. X, 243 p. , 1979.

[17] Robert E. Megginson. *An introduction to Banach space theory.* Graduate Texts in Mathematics. 183. New York, NY: Springer. xix, 596 p. , 1998.

[18] Peter Meyer-Nieberg. *Banach lattices.* Universitext. Berlin etc.: Springer-Verlag. xv, 395 p. , 1991.

[19] A. Pietsch. *Operator ideals.* Mathematische Monographien, Bd. 16. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 451 p. , 1978.

[20] Shlomo Reisner. A factorization theorem in Banach lattices and its application to Lorentz spaces. *Ann. Inst. Fourier*, 31(1):239–255, 1981.