UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

por

Francisco Javier Gil Vidal

Director: Alejandro Petrovich

Fecha de Presentación: 27/12/2010.

LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO.

Tesis de Licenciatura por
Francisco Javier Gil Vidal.

Director: Dr. Alejandro Petrovich.

Buenos Aires, 27 de Diciembre de 2010.

INTRODUCCIÓN

La Teoría de Conjuntos nació aquel día de Diciembre de 1873 en que Georg Cantor (1845-1918) estableció que la colección de los números reales es no numerable, y en las siguientes décadas la teoría habría de florecer a través del progreso formidable hecho por el propio Cantor con su formulación de los números ordinales y cardinales, que abrieron la puerta para un torrente de creatividad matemática aportada por otros grandes de nuestra ciencia, hasta llegar a ser un campo autónomo y sofisticado de la matemática que, a pesar de sufrir fuertes turbulencias desde su invención, puede arrogarse éxitos impresionantes en términos tanto de su propio desarrollo como de servir de argamasa unificadora de la matemática toda.

Como hemos dicho, Cantor estableció la no numerabilidad de los reales; este logro extraordinario se consiguió demostrando que no puede haber una función suryectiva entre los números naturales y los reales: el "método diagonal" de Cantor, hoy lugar común, constituyó una grandiosa hazaña en su tiempo, para la que no toda la comunidad matemática estaba preparada. A partir de allí, los descubrimientos cantorianos se sucedieron con rapidez, hasta demostrar que ningún conjunto, finito o infinito, puede ponerse en correspondencia biunívoca con su conjunto de partes; iterando la operación de tomar partes se generaba una jerarquía de infinitos cada vez mayores, el primero de los cuales era el de los naturales; ¿cuál era el segundo? Cantor especuló que debía ser el de los reales, y así nació la Hipótesis del Continuo.

El entero paisaje transfinito puede entenderse como el resultado de los intentos de Cantor de articular y resolver el Problema del Continuo, de convertir su hipótesis en certeza. Los axiomas de Zermelo, a su vez, pueden entenderse como el esfuerzo por demostrar un único resultado, el Teorema de Buena Ordenación. El éxito casi total de la axiomática de Zermelo es debido a su carácter esquemático y abierto, en resonancia con la práctica matemática emergente. En efecto, casi toda la matemática puede sustentarse en la axiomática ZFC de Zermelo-Fraenkel aumentada con el axioma de elección, AC.

Más tarde la jerarquía acumulativa de los conjuntos, introducida por von Neumann en la tercera década del s. XX, llevó a concebir a la teoría de conjuntos como el estudio de la buena fundamentación, expandida más tarde para incluir las cuestiones de consistencia relativa. Sin embargo, y a pesar de los enormes esfuerzos por resolverla, la Hipótesis del Continuo permaneció inabordable incluso con la formidable maquinaria derivada de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más AC. El climax de estas investigaciones llegó en 1963 cuando Paul Cohen a través de la técnica del forzamiento, inventada por él, demostró que la hipótesis del continuo es *independiente* de esos axiomas, por lo que todos los esfuerzos por probarla (o refutarla) usando los axiomas clásicos estaban condenados al fracaso. En palabras de W. Hugh Woodin, uno de los más eminentes cultores de la Teoría de Conjuntos de los últimos treinta años,

> *the ZFC axioms are obviously incomplete and,*
> *moreover, incomplete in a fundamental way*[1].

---

[1] Woodin, W. Hugh. The Continuum Hypothesis, Part I. Notices of the AMS, Vol. 48, Nº 6, Junio/Julio 2001, p. 575.

Lo que sigue es una descripción, por fuerza sucinta e incompleta, de las consideraciones que llevaron a la formulación de una teoría axiomática de conjuntos (necesaria para evitar las paradojas) y del encadenamiento de ideas que llevaron a la Hipótesis del Continuo, los esfuerzos que se han hecho por resolverla y el actual estado de esencial incertidumbre respecto de esta crucial cuestión. El relato comienza con una breve descripción del problema de la unicidad de las series trigonométricas, que llevaron a Cantor a estudiar por primera vez a los conjuntos de números reales como entidades con interés propio. Las Secciones 2 y 3 se dedican a establecer los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF) y a los primeros pasos del desarrollo de una Teoría de Conjuntos.

Las secciones 4, 5 y 6 (Ordinales e Inducción Transfinita, Aritmética Ordinal y Ordinales y Conjuntos Bien Ordenados) avanzan con buen ritmo, hasta tropezar con la primera gran dificultad, el auténtico fin de la inocencia de la Teoría de Conjuntos: la crucial noción de número cardinal, generalización natural de los cardinales finitos que nos permiten contar "cuántos" elementos tiene un conjunto, es imposible de definir con rigor si no introducimos un nuevo y tremendo axioma, el Axioma de Elección, que a pesar de su inocente formulación permite probar teoremas que van desde lo sublime (todo espacio vectorial tiene una base) hasta lo ridículo (una esfera puede descomponerse en un número finito de partes que, vueltas a unir usando solamente isometrías, produce dos esferas iguales a la original). Al Axioma de Elección dedicamos las secciones 7 y 9, entre las cuales intercalamos una sección dedicada a las Álgebras de Boole, que serán fundamentales para enunciar y probar los teoremas del forzamiento.

Las secciones 10 y 11 introducen los Números Cardinales y su Aritmética, seguidas por la Sección 12 (Exponenciación Cardinal: Cofinalidad y Cardinales Regulares y Singulares) en donde nos adentramos ya en la Teoría de Conjuntos superior. El importante Lema de König, que regula el comportamiento de la función "partes de" (función, por otra parte, cuya estructura está lejos de ser completamente conocida) es, quizás, su resultado capital.

La sección 13: Grandes Cardinales es un inicio del estudio de este apasionante y complejo aspecto de la Teoría de Conjuntos, que habrá de jugar un papel esencial en la clarificación (es un decir) de la endiablada Hipótesis del Continuo. Se describen los Cardinales Inaccesibles, la Jerarquía Acumulativa de von Neuman y los Modelos de Teoría de Conjuntos, que serán importantes para probar la independencia de la Hipótesis del Continuo respecto de (ZFC). En la sección 14 discutimos la noción de Constructibilidad (Gödel, 1940) que lleva a la notable hipótesis gödeliana V = L, que implica la *validez* de la Hipótesis del Continuo.

En la sección 15 damos una presentación intuitiva (más o menos) de la noción de Forzamiento que, como dijimos antes, fue introducida por Paul Cohen en 1963 y usada por él para demostrar que la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel aumentados con el Axioma de Elección. La discusión utiliza de modo esencial la noción de álgebra de Boole presentada en la sección 8 y constituye un tratamiento informal en el que el rigor cede el paso a la rapidez y coherencia del discurso, difiriendo las complicadas demostraciones para la sección 16. La casi increíble conclusión de lo estudiado en estas dos secciones es que *el cardinal del continuo puede ser prácticamente cualquier aleph*, la única restricción siendo que, por el Lema de König (sección 12. 5. c), su cofinalidad debe ser no numerable.

Nuestro modesto tratamiento acaba con la sección 17: A la Búsqueda de Nuevos Axiomas. La técnica del forzamiento permitió demostrar la independencia de innumerables proposiciones respecto de (ZFC), entre las cuales la Hipótesis del Continuo es sólo una. Esa esencial ineptitud de (ZFC) para decidir cuestiones básicas en Teoría de Conjuntos (aunque casi totalmente irrelevantes en la Matemática "común", para la cual (ZFC) e incluso sistemas axiomáticos más débiles son suficientes) motivó la cita de Woodin que reproducimos más arriba. Esta sección discute algunos de los esfuerzos que se han hecho en las últimas cuatro décadas por encontrar un juego "correcto" de axiomas que permita decidir las cuestiones más urticantes planteadas a partir del descubrimiento de Cohen. Un papel esencial en el tratamiento lo juega la noción de Determinación (17. 2. 6.) que conduce al Axioma de Determinación (AD) que, por ser demasiado fuerte (es incompatible con el Axioma de Elección, AC), debe ser cualificado (es decir, debilitado) apelando a la idea de Determinación Proyectiva (DP, 17. 2. 6. 5.). En un escenario de Determinación Proyectiva (que no es aceptada por todos los matemáticos: "controversia" es, acaso, la noción unificadora de toda esta sección), muchas de las cuestiones de independencia son zanjadas, al costo de tener que introducir "grandes cardinales" cada vez más fantasiosos, de existencia harto dudosa y fogosamente discutida entre los expertos. El tratamiento nos lleva a rever temas familiares de Topología y Análisis Real, tales como el de los Teoremas de Categoría de Baire (17. 2. 5. 1.) y los Borelianos (17. 2. 6. 3.).

Los temas esbozados en nuestra tesis tienen un final abierto. Al día de hoy, y a pesar de los inmensos esfuerzos desplegados durante casi medio siglo por legiones de matemáticos eminentes, no se ha logrado encontrar un sistema axiomático en el cual la Hipótesis del Continuo sea cierta o falsa pero tenga una resolución; es cierto que el axioma V = L implica la validez de la Hipótesis (y también del Axioma de Elección), pero nadie cree en él. Por otra parte, durante los años '80 y '90 se acumuló creciente *evidencia* de que, bajo cualquier sistema axiomático "razonable" (palabra que nunca es definida con rigor) la Hipótesis del Continuo debería ser *falsa*, pero nadie ha encontrado tal sistema. Los axiomas salvadores ni están ni se les espera, después de haberse descubierto que ni siquiera la tremenda maquinaria del forzamiento puede resolver la Hipótesis. Después de muchos años de escepticismo, Woodin dice "creer" que la cuestión se zanjará algún día, pero que ese día está en un remoto futuro....

Cierta vez se le preguntó al gran David Hilbert (1862-1943) cuál sería la primera pregunta que haría si despertara después de un sueño de 500 años. Sin dudarlo, Hilbert respondió: "¿Ha sido ya resuelta la conjetura de Riemann?" La respuesta a la pregunta "¿Ha sido encontrado ya un sistema axiomático creíble que resuelva la Hipótesis del Continuo?" puede requerir de un letargo aún más prolongado.

Buenos Aires, Diciembre 12, 2010.

ÍNDICE

Secciones 1, 2 y 3.

1. Unicidad de series trigonométricas.
2. Los Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF).
3. Desarrollo.

1. Unicidad de series trigonométricas.

Sean $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dos sucesiones de números complejos tales que las series

$$\sum a_n e^{int}\ ,\ \sum b_n e^{int} \quad \text{...} \quad (1)$$

convergen y coinciden $\forall$ t $\in$ [0, 2π). ¿Se puede afirmar, entonces, que $a_n = b_n$ $\forall$ n $\in$ Z? Equivalentemente: si $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos tal que la serie

$$\sum c_n e^{int} \quad \text{...} \quad (2)$$

converge a 0 $\forall$ t $\in$ [0, 2π). ¿Se puede afirmar, entonces, que $c_n = 0$ $\forall$ n $\in$ Z?

Cantor probó en 1870[2] que la respuesta es afirmativa. Más aún: si (2) converge a 0 en [0, 2π)\E, siendo E un conjunto con ciertas propiedades topológicas[3], entonces $c_n = 0$ $\forall$ n $\in$ Z. Fue a partir de los trabajos de Cantor aquí mencionados que arrancó la teoría de conjuntos.

2. Los Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF).

Esbozaremos una teoría de conjuntos siguiendo los axiomas de Zermelo y Fraenkel. Cantor había "definido" verbalmente la noción de conjunto diciendo: "Entendemos por *clase* a una combinación M de objetos definidos y bien distinguidos m que se llamarán los *elementos* de M y que se presentan a nuestra intuición o a nuestro pensamiento como un todo"[4]. Esta controvertida frase carece de sentido[5]; nosotros, al adoptar el enfoque axiomático, trataremos sobre ciertos objetos indefinidos a los que llamaremos "conjuntos"; entre dos cualesquiera de ellos puede valer, o no, una relación, también indefinida, de "pertenencia", simbolizada por "$\in$"[6].

---

[2] *Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von* x *durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion* f(x) *sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt* (*Demostración de que una función* f(x) *dada por una serie trigonométrica para todo valor real de* x *sólo admite una representación con esa forma*. Crelles Journal f. Mathematik 72, pp. 139 - 142, 1870; reproducido en Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 80 - 83. Springer Verlag, 1932).

[3] Cantor da con precisión la estuctura de E: dado un conjunto P arbitrario de números reales, sea P' su conjunto de puntos de acumulación, y $P^{(n)}$ el resultado de n iteraciones de este proceso. Entonces E debe ser tal que $E^{(n)} = \varnothing$ para algún n; por ejemplo, E puede ser *numerable y cerrado*. Aquí, Cantor exploraba terreno virgen al definir por primera vez conjuntos de números reales por medio de una operación. Georg Cantor: *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (*Sobre la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas*. Math. Annalen 5, pp. 123 - 132, 1872; reproducido en Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 92 - 102. Springer Verlag, 1932). En 1909 W. H. Young extendió este resultado, probando que E puede ser *numerable*. W.H. Young: *A note on trigonometrical series*, Messenger of Math. 38(1909), 44-48.

[4] "Unter eine "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einen Ganzen." (*Beiträge zur Begründung der tranfiniten Mengenlehre*. Math Annalen 46, pp. 481 - 512, 1895; reproducido en Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 282. Springer Verlag, 1932).

[5] En [Bell, E. T. *The Development of Mathematics*, p. 273 y ss.] se dice: "No two of a dozen mathematicians and scientists bilingual in English and German agreed on the meaning of this definition; two said it was meaningless. This definition is one source of trouble in the foundations of mathematics".

[6] Así, los "elementos" de los conjuntos serán también conjuntos; esto da, inicialmente, un carácter confuso al estudio riguroso de la teoría: en la práctica usual de nuestra ciencia, los conjuntos son de

Para desarrollar la teoría ZF, debemos comenzar con la lógica formal; trabajaremos con:

- el Cálculo Proposicional, que estudia los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.
- El Cálculo de Predicados [$\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$]. Convención: si Q es predicado,escribiremos

$$\exists!xQ(x)$$

en vez de

$$(\exists xQ(x)) \wedge \forall x\ \forall y(Q(x) \wedge Q(y) \Rightarrow x = y)$$

["existe un único x: Q(x)"]

- El Cálculo de Predicados con Igualdad, es decir con un predicado binario distinguido

E(x, y) representado por x = y[7].

- El Cálculo de Predicados con Igualdad extendido, al que agregamos otro predicado

binario distinguido B(x, y) representado por $x \in y$. Convención:

$$x \notin y := \neg(x \in y);$$

de ahora en más, el símbolo "P:= Q" significará "P es igual, por definición, a Q".

2.1. <u>Axioma de Extensionalidad (AE)</u>.

$$\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y.$$

"Un conjunto queda determinado por sus elementos".

Aunque x, y aparecen libres, hay un "$\forall x \forall y$" implícito en este axioma[8]. Una consecuencia importante de AE es que existe a lo sumo *un* conjunto sin elementos, al que llamaremos *conjunto vacío* y simbolizaremos por "$\varnothing$"; éste será nuestro (único) "conjunto atómico" o "urelemento", sobre el que construiremos toda la teoría[9].

---

puntos, o de números, o de operadores acotados en espacios de Banach, pero rara vez consideramos conjuntos de conjuntos. La distinción, sin embargo, es ilusoria: números y operadores son en realidad conjuntos, aunque no pensemos en ello; en cuanto a los "puntos", su naturaleza es irrelevante y queda siempre sin definir, importando más bien su interrelación con otros "puntos"; lo mismo ocurre con los "objetos" de que se se habla cuando se define una estructura algebraica cualquiera (grupo, anillo, etc.).

[7] $\neg E(x, y)$ se representará por $x \neq y$.

[8] La implicación recíproca "$x = y \Rightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$" es consecuencia del esquema axiomático $x = y \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P(y))$, válido en el Cálculo de Predicados con Igualdad.

[9] No hemos postulado ni probado aún la existencia de $\varnothing$; se postulará más adelante por medio de AV, el Axioma del Conjunto Vacío, y se probará con el Axioma de Infinitud, AI, que hará redundante a AV. Hay teorías de conjuntos que niegan AE y permiten la existencia de varios "urelementos". Una de ellas es la de Fraenkel-Mostowski, con la que se probó por primera vez la independencia del Axioma de Elección, AC (por Axiom of Choice), respecto de los axiomas ZF aquí presentados; ver § 7 más adelante.

2.2. Esquema Axiomático de Subconjunto (AS) [10]. Para cada predicado P(.),

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge P(z)).$$

"Si x es un conjunto, entonces la colección $\{z \in x: P(z)\}$ también es un conjunto."

Esta es una versión restringida del "Principio de Extensionalidad" (PE) de Cantor, que postulaba, para toda "propiedad" P, la existencia del conjunto $y = \{z: P(z)\}$; formalmente,

$$\exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow P(z))^{11}.$$

Este principio hubo de ser abandonado cuando se descubrió la *paradoja de Russell*: suponiendo la validez de (PE), apliquémoslo a la "propiedad" $P(z) \equiv z \notin z$:

$$\exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \notin z).$$

En particular si $z = y$ obtenemos $z \in z \Leftrightarrow z \notin z$, absurdo.

(AS) implica que *no existe el conjunto V de todos los conjuntos*: si así fuera, podríamos aplicar AS a V y al predicado $P(x) \equiv x \notin x$, para obtener el conjunto $R = \{x \in V: x \notin x\}$. En ese caso, se tendrá $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, y volvemos a caer en la paradoja de Russell.

Dado un predicado P, llamaremos *clase* determinada por P a la colección $Y = \{z: P(z)\}$[12]. Los conjuntos pueden ser miembros de clases[13], pero la recíproca no vale necesariamente: algunas clases serán conjuntos, pero otras no. Las clases que no sean conjuntos se llamarán *propias*[14].

---

[10] Este esquema de axiomas también se llama *de Separación* o *Aussonderung*. La expresión "Esquema Axiomático" significa que no se trata de un solo axioma sino de un grupo de axiomas que dependen del predicado P(.) que se incluye en su enunciado, de modo que para cada predicado habrá un axioma. En § 2. 3 encontraremos otro más de estos esquemas axiomáticos, el de Reemplazo (AR). *Aussonderung* es una versión débil del Principio de Comprensión de Cantor, y se debe a Zermelo. Habiendo debilitado el principio de comprensión, la existencia de ciertos conjuntos que necesitamos debe postularse explícitamente. Esto se hace en los axiomas que siguen.

[11] Esto no es exactamente así; la teoría cantoriana de conjuntos es menos "ingenua" de lo que parece sugerir esta frase; aunque el autor de esta tesis emprendió el estudio destinado a aclarar completamente la verdadera postura de Cantor respecto de la relación entre conjunto y "propiedad", las consultas bibliográficas y el entrecruzamiento de datos, no siempre coherentes entre sí, amenazaban con volver laberíntica una investigación que, aunque de gran interés por sí misma, no deja de ser una nota al pie en el contexto del presente trabajo. Quizás el autor vuelva a este tema cuando escriba su tesis doctoral.

[12] "la clase de los conjuntos tales que P(z)"; en general denotaremos a las clases por letras mayúsculas, y a los conjuntos por minúsculas.

[13] aunque debemos tener claro que $z \in Y$ sólo quiere decir P(z).

[14] La teoría ZF no tiene a las clases por objetos de estudio, pero otras teorías sí. Por ejemplo la Teoría NBG (von Neumann-Bernays-Gödel) parte de las clases como objetos indefinidos, y usa un predicado unario distinguido S(x) "x es un conjunto", con axiomas que aseguran que sólo los conjuntos serán elementos de las clases. NBG tiene sólo finitos axiomas, y ningún esquema axiomático.

2.3. Axioma de la Unión (AU): Si x es conjunto, tambien lo es $\bigcup x := \{z: \exists y(z \in y \wedge y \in x)\}$.

2. 4. Axioma del Par: $\forall a \forall b \exists c: a \in c \wedge b \in c$.

Este axioma postula que, dados a y b, hay un c que los contiene, pudiendo el c en cuestión contener otras cosas además de a y b. Aplicando (AS) a este c, garantizamos que $\forall a \forall b \exists \{a, b\} = \{z \in c: P(z)\}$, con P(z) = "$z = a \vee z = b$". Con esto afirmamos que hay un "mínimo" conjunto que cumple con 2. 4; ese mínimo conjunto será el *par desordenado* {a, b}.

2. 5. Esquema Axiomático de Reemplazo (AR).

2. 5. 1. Notación; dada un predicado P, escribimos:

$$M_x P(x) := \exists y \forall x (P(x) \Rightarrow x \in y).$$

"existe un conjunto y que contiene a todo x: P(x)".

Por (AS), esto implica que la clase {x: P(x)} es un conjunto.

2. 5. 2. El Esquema-Axioma de Reemplazo (AR): Si P(. , .) es un predicado binario, entonces

$$\forall x \exists y \forall z (P(x, z) \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow \forall u M_x(\exists x(x \in u \wedge P(x, y)).$$

Este esquema axiomático es una implicación, cuyos componentes analizamos por separado:

- el antecedente dice que P(x, y) define una "función a valores conjuntos"[15]

$$F: x \mapsto y = \{z: P(x, z)\}.$$

- el consecuente dice que, dado un conjunto u, la clase

$$\bigcup_{x \in u} F(x)$$

  es un conjunto.[16]

El esquema axiomático de reemplazo no forma parte de los axiomas de Zermelo. Fue introducido por Fraenkel para poder definir los ordinales límite (5. 2.) y los cardinales singulares (12. 3. f).

2.6. Axioma del Conjunto Potencia (AP).

---

[15] Debemos usar comillas porque, como veremos después, una función es un *conjunto* de pares ordenados, mientras que F es en general una *clase*.

[16] En realidad, sólo dice que hay un conjunto que contiene a esta clase, pero entonces por (AS) tal clase es un conjunto.

2. 6. 1. Notaciones:

$$x \subseteq y := \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y),$$
$$x \subset y := (x \subseteq y \wedge x \neq y).$$

2. 6. 2. El Axioma (AP):

$$\forall x M_y(y \subseteq x),$$

equivalente a:

$$\forall x \exists p \forall y((y \subseteq x) \Rightarrow y \in p).$$

Para todo conjunto x, la clase $P(x) := \{y: y \subseteq x\}$ es un conjunto, único por (AE). La clase P(x) se llama el *conjunto potencia* de x.

(AP) y (AS) garantizan que si x es un conjunto también lo es $S = \{\{y\}: y \in x\}$, pues

$$M_z(y \subseteq x \wedge \exists u(u \in z) \wedge \forall u \forall v(u \in z \wedge v \in z \Rightarrow u = v)).$$

2.7. <u>Axioma del Conjunto Vacío (AV)</u>. Los axiomas expuestos hasta ahora pueden satisfacerse si no hay conjuntos. Para evitar esto, postulamos

$$\exists x \forall y(y \notin x).$$

Por (AE), este x es único; lo llamamos el *conjunto vacío* y lo denotamos por $\varnothing$. La aplicación sucesiva de (AP) nos da la familia infinita de conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, ..., y por (AS) tenemos también todos los subconjuntos de éstos. Todos estos conjuntos son *finitos*[17]; para garantizar que existen conjuntos infinitos, nos hace falta otro axioma:

2.8. <u>Axioma de Infinitud (AI)</u>.

2. 8. 1. Si x es un conjunto, definimos:

$$S(x) := \{y: y \in x \vee y = x\} = x \cup \{x\}.$$

Para ver que esta definición es aceptable, introducimos el predicado binario

$$P(a, b) = \begin{cases} V & \text{si} \quad (a = \varnothing \wedge b = x) \vee (a = \{\varnothing\} \wedge b = \{x\}) \\ F & \qquad\qquad\qquad \text{e.o.c.} \end{cases},$$

equivalente a

$$P(a, b) = ((\forall z(z \notin a)) \wedge b = x) \vee$$
$$\vee ((\forall z(z \in a \Leftrightarrow \forall w(w \notin z))) \wedge (\forall z(z \in b \Leftrightarrow z = x))).$$

Si aplicamos (AR) a $u = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ y a P, obtenemos que $x \cup \{x\}$ es un conjunto.

2. 8. 2. El Axioma (AI):

$$\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow S(y) \in x).$$

Si definimos a los *números naturales*[18] como

$$0 := \varnothing,\ 1 := S(0) = \{\varnothing\},$$

---

[17] Por ahora, usamos la palabra *finito* de modo intuitivo e informal; su definición rigurosa se verá al analizar el centenido del axioma siguiente, y se completará con el estudio de la sección 4. 4. 5.

[18] También llamados *ordinales de von Neumann* cuando se los define como sucesiones encajadas de conjuntos, tal como hacemos aquí. Ver sección 4. 4. 6.

$$2 := S(1) = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$
$$3 := S(2) = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\},\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},$$
$$4 := S(3) = \{0, 1, 2, 3\}, \ldots,$$

entonces (AI) afirma que existe un conjunto x que contiene a todos los números naturales.

2. 8. 3. Definición. Un conjunto que satisface (AI) se llama *inductivo*. Diremos algo más de los conjuntos inductivos en la sección 3. 1. 4., cuando tratemos la intersección de conjuntos.

2.9. <u>Axioma de Fundamentación o Regularidad (AF)</u>.

$$\exists y(y \in x) \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y)$$

("todo conjunto $x \neq \varnothing$ tiene un elemento y disjunto de x").

Consecuencia de 2.9. es:

2. 9. 1. Lema. $\forall x(x \notin x)$.

Demostración. Sea x: $x \in x$, y consideremos $\{x\} \neq \varnothing$. Por (AF), $\exists y \in \{x\}$: $z \in y \Rightarrow z \cap \{x\} := \{w: w \in z \wedge w \in \{x\}\} = \varnothing$. Pero $y \in \{x\} \Rightarrow y = x$, y $x \in x \Rightarrow x \in y \Rightarrow x \cap \{x\} = \varnothing$; esto sólo es posible si $x = \varnothing$, pero en ese caso será $\varnothing \in \varnothing$, absurdo porque $\varnothing$ está definido por la propiedad $\forall y(y \notin \varnothing)$. ▮[19]

Con esto completamos nuestra lista de axiomas de ZF. A medida que avancemos, habremos de agregar más axiomas a la lista; éstos son:

- Axioma de Elección (AC)[20].
- Axioma de Determinación (AD), introducido en §17. 2. 6. y ss.
- La Hipótesis del Continuo (HC), introducida en §11. 6. y cuyo estudio es el objetivo primordial de esta tesis.
- Axiomas de Grandes Cardinales (AGC), introducidos en §13. y, con más profundidad, en (17. 3.).
- Axioma de Constructibilidad (ACons.), introducido en §14. 6.

No todos estos axiomas son mutuamente compatibles, y además son considerados menos "seguros" que los axiomas básicos de ZF; por ejemplo, (AC) da lugar a teoremas "extraños" respecto de la posibilidad de particionar la esfera (ver Sección 7). A continuación desarrollaremos lo más que se pueda la teoría de conjuntos usando solamente los axiomas 1 - 7.

3. Desarrollo.

Esbozaremos una teoría de conjuntos siguiendo los axiomas de Zermelo y Fraenkel.

---

[19] De aquí en más, este símbolo querrá decir "Fin de la demostración".

[20] Inglés: "Axiom of Choice". Alemán *Auswahlaxiom*. Tratamos este axioma en profundidad en las secciones 7 y 9.

3. 1. Definiciones.

3. 1. 1. $\{x\} := \{y : y = x\}$.

3. 1. 2. $\{x, y\} := \{z : z = x \vee z = y\}$[21].

3. 1. 3. $\bigcup x := \{z : \exists y(z \in y \wedge y \in x)\}$[22].

3. 1. 4. $\bigcap x := \{z : \forall y(y \in x \Rightarrow z \in y)\}$[23].

Completamos ahora nuestro análisis del Axioma de Infinito, 2. 6. [24]:

3. 1. 4. 1. La intersección de dos conjuntos inductivos es inductiva (ver 2. 6. 3):
si a y b son inductivos, entonces $\varnothing \in a \wedge \varnothing \in b \Rightarrow \varnothing \in a \cap b$. También, $(x \in a \wedge x \in b) \Rightarrow (S(x) \in a \wedge S(x) \in b) \Rightarrow ((x \in a \cap b) \Rightarrow (S(x) \in a \cap b))$.

3. 1. 4. 2. La intersección una familia arbitraria de conjuntos inductivos es
inductiva: sea A una colección de conjuntos inductivos; $\varnothing \in a\ \forall\ a \in A \Rightarrow \varnothing \in \bigcap_{a \in A} a$. $\alpha \in \bigcap_{a \in A} a \Rightarrow \alpha \in a\ \forall\ a \in A \Rightarrow S(x) \in a\ \forall\ a \in A \Rightarrow S(x) \in \bigcap_{a \in A} a$.

3. 1. 4. 3. Sean Ω un conjunto inductivo y $A = \{a \in P(\Omega) : a \text{ es inductivo}\}$.
Definimos $\omega = \bigcap_{a \in A} a$. El conjunto ω es único e independiente de Ω: si Ω_1 y Ω_2 son inductivos, también lo es $\Omega_1 \cap \Omega_2$, y $\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \Omega_1$ y $\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \Omega_2$. Concluimos que ω es el menor conjunto inductivo, de modo que $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$. Ahora podemos construir el sucesor de ω,

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, ..., \omega\},$$

y el sucesor de $\omega + 1$,

$$\omega + 1 + 1 = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1\};$$

escribimos $\omega + 2$ en vez de $\omega + 1 + 1$, y $\omega + n$ en vez de $\omega + 1 + ... + 1$, el "1" repetido n veces. Volveremos a ω cuando estudiemos números ordinales y cardinales.

---

[21] Esta definición implica $\{x, x\} = \{x\}$.

[22] Si $x = \{a, b\}$, será $a \cup b = \{z : z \in a \vee z \in b\}$.

[23] Exigimos en esta definición que $x \neq \varnothing$. Si $x = \{a, b\}$, será $a \cap b = \{z : z \in a \wedge z \in b\}$.

[24] El material de éste y los siguientes dos apartados es de Andersen, Robert. *Set Theory and the Construction of Numbers*. Department of Mathematics, University of Wisconsin - Eau Claire, 2000.

3. 1. 5. Definición. $x \backslash y := \{z: z \in x \wedge z \notin y\}$.

Para definir las funciones, las identificaremos con sus gráficos, y definiremos a éstos como ciertos conjuntos de pares ordenados; por lo tanto, hará falta una definición rigurosa de esta última noción:

3. 2. Definición: Dados dos conjuntos x, y,

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Leemos: "el par ordenado formado por x e y"; esta definición se debe a Kuratowski (1921)[25]; notemos que $(x, x) = \{\{x\}\}$.

3. 3. Lema.

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) $\{x\} \in (x, y) = (u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\} \Rightarrow (\{x\} = \{u\} \vee \{x\} = \{u, v\}) \Rightarrow u \in \{x\} \Rightarrow$ (por (AE)): $u = x$. También, $\{x, y\} \in (x, y) = (u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, v\}\} \Rightarrow (\{x, y\} = \{x\} \vee \{x, y\} = \{x, v\}) \Rightarrow (x = y \vee y = v)$. Intercambiando los papeles de (x, y) y (u, v) tenemos que $v = u$ o $v = y$. Así, se da una y sólo una de estas posibilidades:

- $y \neq x \Rightarrow y = v$.
- $y = x \Rightarrow u = v \Rightarrow y = x = u = v$.

$\Leftarrow$) Aplicamos repetidamente (AE): $(x = u \wedge u = v) \Rightarrow \{x\} = \{u\}, \{x, y\} = \{u, v\} \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\} \{u, v\}\} \equiv (x, y) = (u, v)$. ▌

3. 4. Producto Cartesiano.

Dados dos conjuntos x, y, queremos definir su *producto cartesiano* de modo tal que

sea un *conjunto*. Conseguimos esto utilizando (AS) para que $x \times y$ sea un subconjunto de un cierto conjunto:

- $u \in x, v \in y \Rightarrow \{u\}, \{u, v\} \in P(x \cup y)$.
- $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\} \in P(P(x \cup y))$.

---

[25] Kaczmier Kuratowski: *Sur la notion d'ordre dans la Théorie des Ensembles*. Fundamenta Mathematicae 2, 1921, pp. 161-171. Incluso en un objeto aparentemente tan simple como el par ordenado, la más incipiente investigación sobre el tema abrió abismos que debieron ser cerrados en falso si no se quería extender esta tesis hasta el infinito: existen definiciones alternativas, y sumamente interesantes, de "par ordenado" dadas por Wiener (1914), Hausdorff (1914), Quine-Rosser (1953), Morse (1965), y Bourbaki (1970, donde el par ordenado se introduce como noción primitiva). Por otra parte, hay variantes de la definición de Kuratowsky que ameritarían un estudio más profundo. Baste decir que una de ellas, $(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$ requiere del axioma de regularidad para demostrar su equivalencia con la usual. También hemos debido omitir el estudio de las operaciones conjuntistas necesarias para definir las proyecciones $\pi_{1,2}$, que permiten "recuperar las coordenadas" x, y, a partir de (x, y).

- $x \times y := \{(u, v) \in P(P(x \cup y)): u \in x \wedge v \in y\}$.

3. 5. Relaciones.[26]

3. 5. 1. Definición. Sea a conjunto. Una *relación* R en a es un suconjunto arbitrario de
$P(a \times a)$; es decir, R es un conjunto arbitrario de pares ordenados de elementos de a. Si $x, y \in a$, escribiremos xRy si $(x, y) \in R$. La relación es:

Reflexiva si $(\forall x \in a)(xRx)$.
Simétrica si $(\forall x \in a)(\forall y \in a)(xRy \Rightarrow yRx)$.[27]
Antisimétrica si $(\forall x, y \in a)((xRy \wedge x \neq y) \Rightarrow \neg(yRx))$.
Conexa si $(\forall x, y \in a)((x \neq y) \Rightarrow (xRy \vee yRx))$.
Transitiva si $(\forall x, y, z \in a)((xRy \wedge yRz) \Rightarrow (xRz))$.

3. 5. 2. Definición. Si R es reflexiva, simétrica y transitiva, decimos que R es una
relación de equivalencia en a, o simplemente una *equivalencia en a*. Si $x \in a$, su *clase de equivalencia por R* es el conjunto

$$[x] = [x]_R = \{y \in a: xRy\}.$$

Toda relación de equivalencia en a particiona al conjunto a en clases de equivalencia disjuntas.

3. 5. 3. Definición. Si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, decimos que R es un
orden parcial en a, y que a es un conjunto *parcialmente ordenado* (p. o.) *por R*.[28] En estos casos, escribiremos "$\leq$" en vez de R, de modo que $x \leq y := xRy$; también escribiremos "$x < y$" si $x \leq y \wedge x \neq y$.

Sean $(a, \leq)$ un conjunto p. o., $b \subseteq a$; un elemento $x \in b$ es un *elemento minimal* de b si

$$\forall y \in b \ \neg(y < x);$$

El *conjunto p. o.* $(a, \leq)$ está *bien fundado* si todo $b \subseteq a$, $b \neq \varnothing$, admite un elemento minimal. Equivalentemente, la *relación* R = "$\leq$" en a está bien fundada si

$$\forall b \subseteq a \ (b \neq \varnothing \Rightarrow \exists m \in b: \forall y \in b \ (y, m) \notin R).$$

---

[26] Fuente: Devlin, Keith J. *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer-Verlag, 1991.

[27] De ahora en más escribiremos "$(\forall x, y \in a)$" en vez de "$(\forall x \in a)(\forall y \in a)$".

[28] Formalmente, un conjunto parcialmente ordenado será el par ordenado $(a, \leq)$.

Observemos que la relación "$\in$" introduce un orden parcial en la clase V de todos los conjuntos; el Axioma 2.9. de Fundamentación o Regularidad (AF), entonces, nos dice que (V, $\in$) *es una clase bien fundada*; hablaremos más extensamente sobre esta clase en (13. 5) y ss.

3. 5. 4. Lema. (a, $\leq$) está bien fundado si y sólo si no existe ninguna sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de a tales que $a_{n+1} < a_n$ $\forall$ n; una tal sucesión se llama una *cadena descendente infinita*.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe una sucesión $a_0 > a_1 > ... > a_n > a_{n+1} >$... de elementos de a; entonces el subconjunto de a y = $\{a_0, a_1, ... , a_n, a_{n+1}, ...\}$ no tiene elemento minimal y (a, $\leq$) no es bien fundado.

$\Leftarrow$) Supongamos que (a, $\leq$) no es bien fundado, y sea b $\subseteq$ a, b $\neq \emptyset$, sin elemento minimal. Sea $a_0 \in$ b; como a_0 no es minimal, $\exists$ $a_1 \in$ b: $a_0 > a_1$. Como a_1 no es minimal, $\exists$ $a_2 \in$ b: $a_1 > a_2$. Aplicando repetidamente este proceso, obtenemos una sucesión $a_0 > a_1 > ... > a_n > a_{n+1} >$... de elementos de a. ▌

Ejemplos de relaciones *no bien fundadas*:

- (P(N), $\subseteq$): si a_i = {i, i + 1, 1 + 2, ...}, tenemos $a_0 > a_1 > ... > a_n > a_{n+1} >$...; en general, la inclusión no es una relación bien fundada en P(S) para ningún conjunto S *infinito*.
- Los enteros negativos {–1, –2, –3, ...} con el orden usual: ningún subconjunto no acotado admite un elemento minimal.
- El conjunto de todas las tiras finitas sobre un alfabeto finito con el orden lexicográfico: la sucesión "B" > "AB" > "AAB" > "AAAB" > … es una cadena descendente infinita. Notemos que el conjunto completo sí posee un elemento minimal, la *tira vacía*.
- El conjunto Q de números racionales con el orden usual; lo mismo para R, los números reales; notemos que ($Q_{\geq 0}$, $\leq$) tampoco está bien fundado, aunque tenga mínimo; lo mismo para ($R_{\geq 0}$, $\leq$).

3. 5. 5. Definición. Sean (a, $\leq$) un conjunto p. o., b $\subseteq$ a; un elemento x $\in$ b es un *elemento maximal* de b si

$$\forall\ y \in b\ \neg(y > x);$$

una *cota superior* para b es un t $\in$ a: $\forall$ y $\in$ b (y $\leq$ t); si hay una menor cota superior para b se la llama *supremo* de b (sup b) y, si sup b $\in$ b se la llama el *máximo* de b (máx b). Dualizando lo dicho recién, una *cota inferior* para b es un t $\in$ a: $\forall$ y $\in$ b (t $\leq$ y); si hay una mayor cota inferior para b se la llama *ínfimo* de b (sup b) y, si inf b $\in$ b se la llama el *mínimo* de b (máx b).

Sea x un conjunto; su conjunto potencia P(x) está p. o. por la relación de inclusión "$\subseteq$", y lo mismo vale para cualquier familia de conjuntos. De hecho, salvo isomorfismos, la inclusión conjuntista es el único orden parcial que existe:

3. 5. 6. Lema. Sea $(x, \leq)$ un conjunto p. o. Entonces $\exists\ y \subseteq P(x)$: $(x, \leq) \cong (y, \subseteq)$.

Demostración.
Para cada $a \in x$, sea $z_a = \{b \in x: b \leq a\} \in P(x)$, y definamos $y = \{z_a: a \in x\} \subseteq P(x)$. Definimos ahora una biyección $\pi: x \to y$, $\pi(a) = z_a$; es claro que $a \leq b \Leftrightarrow z_a \subseteq z_b$, de modo que π es un orden-isomorfismo[29] entre $(x, \leq)$ y $(y, \subseteq)$. ▌

3. 5. 7. Definición. Un *orden total* o *lineal* en un conjunto $x \neq \varnothing$ es un orden parcial conexo. Un conjunto *totalmente ordenado* (t. o.) es un par $(x, \leq)$ donde $x \neq \varnothing$ y "$\leq$" es un orden total. Un subconjunto t. o. de un conjunto p. o. a se llama una *cadena* en a.

Ejemplos de relaciones bien fundadas que *no son* órdenes totales:

- Los enteros positivos {1, 2, 3, ...} con el orden $a < b$ sii a divide a b y $a \neq b$.
- El conjunto de todas las tiras finitas sobre un alfabeto fijo con el orden $s < t$ sii s es una subtira propia de t.
- El conjunto N × N de pares de números naturales con el orden $(n_1, n_2) < (m_1, m_2)$ sii $n_1 < m_1$ y $n_2 < m_2$.
- El conjunto de nodos de un grafo dirigido sin ciclos cerrados, con el orden $v_1 < v_2$ sii hay una arista de v_1 a v_2.

3. 5. 8. Definición. Un *buen orden* en un conjunto $x \neq \varnothing$ es un orden total y bien fundado. Un conjunto *bien ordenado* (b. o.) es un par $(x, \leq)$ donde $x \neq \varnothing$ y "$\leq$" es un buen orden.

3. 6. Funciones.

3. 6. 1. Sean x, y conjuntos, f un símbolo arbitrario; definiremos un predicado ternario

$$\mathrm{Fun}(f, x, y) := f: x \to y, \quad \text{...} \quad (3)$$

con el significado

$$f \subseteq x \times y \wedge \forall u(u \in x \Rightarrow \exists v(v \in y \wedge (u, v) \in f)) \wedge \forall u \forall v \forall w((u, v) \in f \wedge (u, w) \in f \Rightarrow v = w.$$

Leemos (3) diciendo "f es función del conjunto x (el *dominio* de f) en el conjunto y (el *codominio* de f)". Si $z \subseteq x$, escribimos $f|z$ para indicar al conjunto $\{(u, v) \in f: u \in z\}$, llamado la *restricción* de f a z.

3. 6. 2. Si $f: x \to y$ y $u \in x$, $f(u) := \iota v((u, v) \in f)$[30]; es decir f(u) es la (única) imagen de u por f.

[29] Es decir, una biyección que preserva el orden. Esta noción fundamental reaparece en 6. 2., donde se demuestra que todo conjunto b. o. es, fundamentalmente, un número ordinal.

[30] La notación "ιv...." quiere decir "el único v tal que...", y fue introducida por Peano: *Demonstration de l'integrabilite des equations differentielles ordinaires*, Mathematische Annalen, vol. 37, 1890, pp. 182-228; el símbolo fue elegido por ser la inicial del griego *ισοζ*, "igual". En este *paper* se introduce también

3. 6. 3. Si $f: x \to y$ y $u \subseteq x$,

$$f``u := \{v \in y: \exists w(w \in u \wedge (u, v) \in f)\} = \{f(w): w \in u\}$$ [31].

3. 6. 4. Si $f: x \to y$, decimos que f es *inyectiva* si

$$\forall u_1 \in x \forall u_2 \in x(f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2.$$

una versión primitiva del símbolo de pertenencia, $\in$, como la letra griega ε, dada como inicial ficticia de la palabra francesa *est*, "es o está". Así Peano, en vez de decir "$c \in [a, b]$" siendo a, b y c números reales, escribe: "*... alors c $\underline{\varepsilon}$ ab signifie «c* *<u>est</u>* *un point de ab».*" (p. 191; subrayado del autor de la presente tesis). Por otra parte, en la página 192 leemos: "*... ainsi au lieu de a = b on peut écrire a$\varepsilon\iota$b*", de modo que a "es" b y es el "único" que es b. Comentando esta notación, Kanamori escribe: *It is quite striking how Peano intended his mathematical notation to mirror the grammar of ordinary language.* Kanamori, Akihiro. *The Empty Set, the Singleton, and the Ordered Pair*. The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 9, No. 3 (Sep., 2003), p. 280.

[31] En la matemática convencional la distinción entre 3. 5. 2. y 3. 5. 3. no se da: si $x \in$ Dom (f) y $A \subseteq$ Dom (f), escribimos indistintamente f(x) y f(A); no hay ambigüedad porque A es un conjunto y x no lo es (o no es pensado como tal). En cambio, en este contexto sólo existen conjuntos, y no distinguir entre f(x) y f(A) lleva a confusión.

Secciones 4, 5 y 6.

4. Ordinales e Inducción Transfinita.
5. Aritmética Ordinal.
6. Ordinales y Conjuntos Bien Ordenados.

4. Ordinales e Inducción Transfinita.

Profundizamos ahora en lo visto en 3. 1. 4. Como hemos dicho, y continuando en la misma forma que con los números naturales, definimos:

- $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$, el conjunto de todos los números naturales[32].
- $\omega + 1 = \{0, 1, 2, ..., \omega\} = \omega \cup \{\omega\}$.
- $\omega + 2 = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1\} = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$.
- .....

Estos son los *ordinales infinitos*, que definimos más sistemáticamente a continuación.

4. 1. Definiciones.

- x es *$\in$-transitivo* si $\forall y \forall z(z \in y \wedge y \in x \Rightarrow z \in x)$[33].
- α es un *ordinal* sii α y todos sus elementos son $\in$-transitivos.

Sigue que todo elemento de un ordinal es un ordinal: sea α ordinal, $\beta \in \alpha$; entonces:

- β es $\in$-transitivo por ser elemento del ordinal α.
- Sea $\gamma \in \beta$; hay que ver que γ es $\in$-transitivo; si $\delta \in \gamma$ y $\varepsilon \in \delta$, $\varepsilon \in \gamma$ por $\in$-transitividad en α.

Si α, β son ordinales, definimos:

- $\alpha < \beta$ sii $\alpha \in \beta$.
- $\alpha \leq \beta$ sii $\alpha \in \beta$ ó $\alpha = \beta$.

4. 2. Teorema. La relación "$\leq$" da un orden parcial (o. p.) a los ordinales.
Demostración.

- $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ por $\in$-transitividad.
- Por 2. 7. 1. $\forall\alpha$ $(\alpha \notin \alpha)$, luego $\neg(\alpha < \alpha)$. De aquí y la transitividad sigue $\alpha < \beta \Rightarrow \neg(\beta < \alpha)$.
- Siguen las tres propiedades del o. p. para "$\leq$":
  - $\alpha \leq \alpha$ $\forall\alpha$.
  - $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$
  - $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$. ▌

4. 3. La buena ordenación de los ordinales.

---

[32] ω es un conjunto, aplicando (AS) al conjunto infinito cuya existencia viene garantizada por (AI), y que contiene a todos los naturales.

[33] Es decir, si todo subconjunto de x es elemento de x: los ordinales se caracterizan por el hecho de que "$\in$" y "$\subset$" definen la misma relación. De ahora en más, usaremos letras griegas para representar ordinales.

4. 3. 1. Lema. $\forall P$ predicado,

$$\exists\alpha: P(\alpha) \Rightarrow \exists\mu: (P(\mu) \wedge \forall\beta(\beta < \mu \Rightarrow \neg P(\beta))).$$

"Si P vale para algún ordinal α, existe un ordinal mínimo μ tal que $P(\mu)$".

Demostración. Sea α ordinal: $P(\alpha)$.

- Si $\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow \neg P(\beta))$, entonces $\mu = \alpha$.
- Si no, sea $x = \{\beta: \beta < \alpha \wedge P(\beta)\} \neq \emptyset$. Por (AF),

$$\exists y: (y \in x) \Rightarrow \exists\ \mu: (\mu \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in \mu)).$$

Como $\mu \in x$, es $\mu < x$, y como $\neg\exists z(z \in x \wedge z \in \mu)$, sabemos que ningún ordinal $< \mu$ tiene la propiedad P. ▌

4. 3. 2. Lema. "$\leq$" es total.

Demostración. Supongamos que tenemos dos ordinales α y β no comparables entre sí por "$\leq$"; entonces α es un ordinal que cumple con la propiedad

$$P(x) = \text{"}\exists\beta \text{ ordinal no comparable con } x\text{"},$$

y por 4. 3. 1 hay un μ minimal con esta propiedad. Sea ν minimal respecto de la propiedad

$$Q(x) = \text{"no es comparable con } \mu\text{"}.$$

- $\nu \subseteq \mu$: si $\alpha \in \nu$, $\alpha < \nu$ y por minimalidad de ν es α comparable con μ. Ahora $\alpha = \mu$ y $\alpha > \mu$ implican $\mu < \nu$, y μ, ν son comparables; debe ser, entonces, $\alpha < \mu \equiv \alpha \in \mu \Rightarrow \nu \subseteq \mu$.
- Habiendo establecido que $\nu \subseteq \mu$, debe ser $\nu \subset \mu$, pues no son comparables.

Sea $\rho \in \mu \backslash \nu$. Entonces $\rho < \mu$, y ν no es comparable con ρ: $\nu \leq \rho \Rightarrow \nu \leq \mu$, absurdo, y $\rho < \nu \Rightarrow \nu \in \rho$, absurdo. Pero, por minimalidad de μ, todo ordinal, también ν, debe ser comparable con ρ.▌

4. 3. 3. Toda clase $A \neq \emptyset$ de ordinales tiene un único elemento minimal: por 4. 3. 2. A está totalmente ordenada, y por 4. 3. 1. hay un elemento minimal respecto de "$\leq$".

4. 3. 4. Todo ordinal α está bien ordenado por "$\in$" porque, por 4. 1., todo ordinal es un conjunto de ordinales.

4. 3. 5. Lema. α, β ordinales $\Rightarrow (\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta)$.

Demostración.

$\Rightarrow$) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subseteq \beta$: sigue de la $\in$-transitividad de β.

$\Leftarrow$) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$. Si no fuera así, sería $\beta < \alpha$ por 4. 3. 2., o sea $\beta \in \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \beta \in \beta$, absurdo por 2. 7. 1. ▌

4. 3. 6. A la luz de lo visto, podemos dar una definición alternativa de ordinal: un conjunto bien ordenado $(X, <)$ es un *ordinal* si $\forall\ a \in X$ vale que $a = \{x \in X \mid x < a\}$.

4. 4. Principio de Inducción Transfinita.

4. 4. 1. Lema. Sea P predicado tal que

$$\forall\alpha(\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow P(\beta)) \Rightarrow P(\alpha)).$$

Entonces $\forall\alpha P(\alpha)$.

Demostración.

Sea μ el mínimo ordinal tal que $\neg P(\mu)$; se tiene

$$\neg\ P(\mu) \wedge (\forall\beta(\beta < \mu \Rightarrow P(\beta))),$$

contra la hipótesis. $\blacksquare$

4. 4. 2. Lema. Si α es ordinal, entonces $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ también lo es.

Demostración.

- $S(\alpha)$ es $\in$-transitivo: sea $\gamma \in \beta \in S(\alpha)$; hay que ver que $\gamma \in S(\alpha)$:
  - si $\beta \neq \alpha$ entonces $\beta \in \alpha$; por $\in$-transitividad de α, $\gamma \in \beta \Rightarrow \gamma \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$;
  - si $\beta = \alpha$, entonces $\gamma \in \beta \Rightarrow \gamma \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$.

- Sea $\beta \in S(\alpha)$; hay que ver que β es $\in$-transitivo; sea $\delta \in \gamma \in \beta$:
  - si $\beta \neq \alpha$ entonces $\beta \in \alpha$; por definición de ordinal, todo elemento de α es $\in$-transitivo, luego β es $\in$-transitivo;
  - si $\beta = \alpha$, entonces $\delta \in \beta = \alpha$ por $\in$-transitividad de α. $\blacksquare$

4. 4. 3. Lema. $S(\alpha)$ es el menor ordinal β tal que $\alpha < \beta$.

Demostración.

- $\alpha < S(\alpha)$, pues $\alpha \in S(\alpha)$;
- sea $\alpha < \beta < S(\alpha)$; entonces $\beta \in S(\alpha) \Rightarrow \beta \in \alpha$ ó $\beta = \alpha$; ambos casos son imposibles por ser $\alpha < \beta$. $\blacksquare$

4. 4. 4. Lema. $(S(\alpha) = S(\beta)) \Rightarrow \alpha = \beta$.

Demostración.

$\alpha \in S(\alpha) = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\} \Rightarrow \alpha \in \beta$ ó $\alpha = \beta$. Supongamos $\alpha \neq \beta$; entonces $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha < \beta$. Ahora $\beta \in S(\beta) = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, o sea $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta < \alpha$, absurdo. $\blacksquare$

4. 4. 5. Definición: α es un *ordinal sucesor* si $\exists\ \beta$: $\alpha = S(\beta)$. Si α no es ordinal sucesor y $\alpha \neq 0$, α se llama un *ordinal límite*. Por ejemplo $\omega = \{1, 2, 3, ...\}$ es un ordinal límite; lo probamos a continuación.

a) Si x es un conjunto de ordinales, entonces

$$A = \bigcup x = \{z: \exists y(z \in y \wedge y \in x\}$$

es un ordinal.

Demostración.

- A es $\in$-transitivo: sea $\beta \in \alpha \in A$; hay que ver que $\beta \in A$; $\alpha \in A \Rightarrow \exists\ \gamma$: $\alpha \in \gamma \wedge \gamma \in x$, o sea γ es un ordinal. Pero entonces $\beta \in \alpha \in \gamma \Rightarrow \beta \in \gamma$ por $\in$-transitividad de $\gamma \Rightarrow \exists\ \gamma$: $\beta \in \gamma \wedge \gamma \in x \Rightarrow \beta \in A$.
- Sea $\alpha \in A$; hay que ver que α es $\in$-transitivo, es decir si $\gamma \in \beta \in \alpha$, entonces debemos probar que $\gamma \in \alpha$. Ahora $\alpha \in A \Rightarrow \exists\ \delta(\alpha \in \delta \wedge \delta \in x)$. Como δ es ordinal, δ es transitivo, y todos sus elementos también, de donde sigue $\gamma \in \alpha$. ▌

Por 4. 3. 5., $\bigcup x$ es el menor ordinal μ tal que $\alpha \leq \mu\ \forall\ \alpha \in x$. Escribimos $\mu := \sup\{\alpha: \alpha \in x\}$.

b) La clase Ord de todos los ordinales es propia: si Ord fuese un conjunto, entonces $\alpha = \bigcup \mathrm{Ord}$ sería un ordinal mayor o igual que todo ordinal, absurdo porque $\alpha < S(\alpha)$[34].

c) **Teorema.** Existe al menos un ordinal límite.

Demostración.

Usamos el Axioma de Infinito:

$$\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow S(y) \in x)). \qquad \text{(AI)}$$

Sea $\mu = U\{\alpha: \alpha \in \mathrm{Ord} \wedge \alpha \in x\}$; por a) $\mu \in \mathrm{Ord}$, y $\alpha \in x \Rightarrow \alpha \subseteq \mu \Rightarrow \alpha \leq \mu$. Vamos a probar que μ es un ordinal límite.

- $\mu \neq 0$: $0 = \varnothing \in x \Rightarrow S(0) = 1 \in x \Rightarrow 1 \leq \mu \Rightarrow \mu \neq 0$.
- μ no es un sucesor: supongamos $\mu = S(\beta)$; entonces $\beta \in \mu \Rightarrow \beta \in \alpha \in x$ para algún $\alpha \Rightarrow S(\beta) = \mu \geq \alpha > \beta \Rightarrow \mu = \alpha$. Por definición de x, $S(\alpha) \in x \Rightarrow \mu \geq S(\alpha)$, absurdo. ▌

El menor ordinal límite se llama ω, y sus elementos son los *números naturales*. Un ordinal se llama *finito* si es un número natural, e *infinito* en caso contrario. Introducimos ahora una definición que será necesaria al estudiar los cardinales regulares (12. 3. f).

4. 4. 6. Definición: Si X es un conjunto de ordinales y $\alpha > 0$ es ordinal límite, entonces α es un *punto límite de X* si $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$.

4. 4. 7. El principio de inducción transfinita puede formularse usando la noción de sucesor: Sea P predicado tal que:

- P(0).

[34] Esta es la paradoja de Burali-Forti (1897); dejó de ser tal cuando se comprendió la distinción entre clase propia y conjunto.

- $\forall\alpha\ P(\alpha) \Rightarrow P(S(\alpha))$.
- $\forall\ \lambda$ ordinal límite $(\forall\ \alpha < \lambda)\ P(\alpha) \Rightarrow P(\lambda)$.

Entonces $\forall\alpha P(\alpha)$.

5. Aritmética Ordinal.

5. 1. Definiones.

Sean $\alpha, \beta \in$ Ord, λ un ordinal límite. Usando Inducción Transfinita, se definen la suma, el producto y la exponenciación de ordinales:

- Suma.
  - $\alpha + 0 = \alpha$.
  - $\alpha + (\beta + 1)$[35] $= (\alpha + \beta) + 1$.
  - $\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \gamma: \gamma < \lambda\}$[36].

La suma no conmuta: $1 + \omega = \sup\{1 + \gamma: \gamma < \omega\}$ = (γ es finito, luego es un número natural): $\sup\{\gamma + 1: \gamma < \omega\} = \omega \neq \omega + 1$.

- Producto.
  - $\alpha \cdot 0:=$[37] $\alpha 0 = \alpha$.
  - $\alpha(\beta + 1) = (\alpha\beta) + \alpha := \alpha\beta + \alpha$.[38]
  - $\alpha\lambda = \sup\{\alpha\gamma: \gamma < \lambda\}$.

El producto no conmuta: $2\omega = \sup\{2\gamma: \gamma < \omega\}$ = (γ es finito, luego es un número natural): $\sup\{\gamma 2: \gamma < \omega\} = \sup\{\gamma + \gamma: \gamma < \omega\} = \omega \neq \omega 2 = \omega + \omega$.

- Exponenciación.
  - $\alpha^0 = 1$.
  - $\alpha^{(\beta + 1)} = \alpha^\beta\alpha$.[39]
  - $\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^\gamma: \gamma < \lambda\}$.

La exponenciación no distribuye: $(\omega 2)^2 = (\omega 2)(\omega 2)$ = (ver 5. 3. más abajo): $\omega(2(\omega 2))$ = (íd.) $= \omega((2\omega)2) = \omega(\omega 2) = (\omega\omega)2 = \omega^2 2 \neq \omega^2 2^2$.

---

[35] De ahora en más, escribiremos "$\beta + 1$" en vez de "$S(\beta)$".

[36] Los conceptos de *cota superior* y *supremo* de un conjunto de ordinales se definen igual que sus homólogos en el caso de los números reales. Sin embargo, la existencia de una menor cota superior de un conjunto acotado de números reales debe ser planteada como axioma (o bien penosamente demostrada si los reales se definen como cortaduras de Dedekind o como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales), porque los reales no están bien ordenados. La situación aquí es mucho más simple: el supremo σ de un conjunto A de ordinales será el primer elemento de la clase B de los ordinales mayores que todos los elementos de A.

[37] De ahora en más suprimimos el punto en la multiplicación.

[38] En particular, $\alpha 1 = \alpha$, $\alpha 2 = \alpha + \alpha$, $\alpha 3 = (\alpha + \alpha) + \alpha$, etc.

[39] En particular, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha\alpha$, $\alpha^3 = (\alpha\alpha)\alpha$, etc.

5. 2. Comentario. En virtud de lo dicho hasta aquí, podemos imaginar a los ordinales de la siguiente manera: 0, 1, 2, ..., ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... $\omega + \omega = \omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, ..., $\omega \cdot 3$, ..., $\omega \cdot \omega = \omega^2$, ..., ω^3, ..., ω^ω, ..., ω^{ω^ω}, ...

Los ordinales $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... $\omega + \omega$, ... merecen un estudio más detallado; ¿cómo estar seguros de su existencia, cómo "construirlos" usando los axiomas de ZF?[40]

Dado el ordinal ω, podemos construir $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$, etc. Queremos definir a $\omega + \omega$ como el "conjunto" $\{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\}$, pero esto es poco preciso. Consideremos la "función" [41]

$$f: \omega \to V, \ f(n) = \omega + n.$$

Por el axioma de reemplazo (AR, 2. 5.), la colección $E = \{f(n): n \in \omega\}$ es un conjunto. Sea $A = \bigcup E$. Este es un *conjunto*, por el Axioma de la Unión (AU); pero, por 4. 4. 5. a), un conjunto de ordinales es un ordinal. Este ordinal es $\omega + \omega$. Esta construcción sugiere cómo continuar para construir $\omega + \omega + \omega$, $\omega + \omega + \omega + \omega$, etc. Todos ellos son *numerables*, es decir coordinables con los números naturales; esta noción se introducirá formalmente en 10. 10., pero nos pareció legítimo incluirla aquí por sernos familiar desde los primeros cursos de la carrera y por su utilidad para enriquecer la presente sección. Será bueno modelar estos ordinales numerables a partir de N, el conjunto de los números naturales:

- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ puede concebirse como $\omega + 1 = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\} \cup \{0\} = A \cup \{0\}$,

con $A = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$. El orden en $\omega + 1$ es el siguiente: A hereda el orden usual de N, y $0 > a \ \forall \ a \in A$; $\omega + 1$ es bien ordenado: si $\emptyset \neq S \subseteq \omega + 1$, hay dos posibilidades: $S = \{0\}$, o $S \neq \{0\}$. En el primer caso, 0 es el primer elemento de S; en el segundo, $S \cap A \subseteq N$ con el orden usual y el primer elemento de $S \cap A$ es el primer elemento de S.

- Sea $n \in \omega$, $n > 0$. El ordinal $\omega + n = [\omega + (n - 1)] \cup \{\omega + (n - 1)\}$ puede concebirse como

$\omega + n = A \cup B$, con $A = \{n, n + 1, n + 2, ..., n + k, ...\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, ..., n - 1\}$. El orden en $\omega + n$ es el siguiente: A y B heredan, cada uno de ellos por separado, el orden usual de N, y $b > a \ \forall \ a \in A, \forall \ b \in B$; $\omega + n$ es bien ordenado: si $\emptyset \neq S \subseteq \omega + n$, hay dos posibilidades: $S \cap A = \emptyset$, o $S \cap A \neq \emptyset$. En el primer caso, $S \subseteq B$ con el orden usual en N y el primer elemento de $S \cap B$ es el primer elemento de S; en el segundo, el primer elemento con el orden usual en N de $S \cap A$ es el primer elemento de S.

- El siguiente ordinal es $\omega + \omega$, que puede concebirse como $A_0 \cup A_1$, con $A_0 = \{0, 2, 4, ...,$

[40] Fuente: Devlin, Keith J. *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer-Verlag, 1991.

[41] El entrecomillado se debe a que el "codominio" de esta "función" no es un conjunto; esto no invalida nuestra construcción.

2n, ...} y A_1 = {1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...}. El orden en $\omega + \omega$ es el siguiente: A_0 y A_1 heredan, cada uno de ellos por separado, el orden usual de N y b > a $\forall$ a $\in A_0$, $\forall$ b $\in A_1$; $\omega + \omega$ es bien ordenado: si $\emptyset \neq S \subseteq \omega + \omega$, hay dos posibilidades: $S \cap A_0 = \emptyset$, o $S \cap A_0 \neq \emptyset$. En el primer caso, $S \subseteq A_1$ con el orden usual en N y el primer elemento de $S \cap A_1$ es el primer elemento de S; en el segundo, el primer elemento de $S \cap A_0$ con el orden usual en N es el primer elemento de S. Notemos que A_0 y A_1 son las clases de equivalencia en N mód 2. Sea k $\in \omega$, k > 2; el mismo razonamiento puede repetirse, *mutatis mutandis*, para el ordinal $\sum_{i=0}^{k-1} \omega = \omega \cdot k$, tomando las clases de equivalencia en N mód k.

- El siguiente ordinal es $\omega + \omega + \omega + ... + \omega + ... = \omega \cdot \omega = \omega^2$, que modelamos a

continuación; sea $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los números primos. Sea N = M $\cup$ {0, 1}, con M = {2, 3, 4, 5, ..., n, n + 1, ...}. Particionamos a M en clases disjuntas A_i declarando: t $\in A_i$ sii p_i es el *mínimo* primo que divide a t. Construimos la sucesión de conjuntos disjuntos $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, definiendo: $B_1 = A_1 \cup \{0, 1\}$, $B_i = A_i$ $\forall$ i > 1; por ejemplo:

  - B_1 es la unión de todos los números pares (incluyendo 0), más el 1.
  - B_2 es la unión de todos los múltiplos impares de 3, *excluyendo* 0.
  - B_3 es la unión de todos los múltiplos impares de 5, *excluyendo* 0 y los múltiplos de 3.
  - etc.

Es evidente que N = $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. El orden en $\omega \cdot \omega = \omega^2$ es el siguiente: cada B_i hereda, por separado, el orden usual de N, y b > a $\forall$ a $\in A_i$, $\forall$ b $\in A_j$; j > i; $\omega \cdot \omega = \omega^2$ es bien ordenado: si $\emptyset \neq S \subseteq \omega^2$, sea k = mín{i $\in$ N: $S \cap A_i \neq \emptyset$}. El primer elemento de $S \cap A_k$ con el orden usual en N es el primer elemento de S.

Razonamientos similares permiten modelar a todos los ordinales numerables; todos ellos aparecen como reordenamientos de N, con buenos órdenes que salen de alterar adecuadamente el buen orden natural de ω. El tratamiento riguroso de todos los ordinales numerables y no numerables se difiere hasta 10. 10, donde estudiamos los números cardinales.

5. 3. Propiedades de las operaciones.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in$ Ord, λ un ordinal límite. Entonces:

- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$:
  - $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$.
  - $((\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)) \Rightarrow (\alpha + \beta) + (\gamma + 1) =$

$= ((\alpha + \beta) + \gamma) + 1 = (\alpha + (\beta + \gamma)) + 1 =$
$= \alpha + ((\beta + \gamma) + 1) = \alpha + (\beta + (\gamma + 1)).$

- $(\alpha + \beta) + \lambda = \sup\{(\alpha + \beta) + \gamma: \gamma < \lambda\} =$
$= \sup\{\alpha + (\beta + \gamma): \gamma < \lambda\} = \alpha + \sup\{(\beta + \gamma): \gamma < \lambda\} =$
$= \alpha + (\beta + \lambda).$

•$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$:

- $\alpha(\beta + 0) = \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha 0.$
- $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \Rightarrow \alpha(\beta + (\gamma + 1)) =$
$= \alpha(\beta + \gamma) + 1) = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha = (\alpha\beta + \alpha\gamma) + \alpha =$
$= \alpha\beta + (\alpha\gamma + \alpha) = \alpha\beta + \alpha(\gamma + 1).$
- $\alpha(\beta + \lambda) = \sup\{\alpha(\beta + \gamma): \gamma < \lambda\} =$
$= \sup\{\alpha\beta + \alpha\gamma: \gamma < \lambda\} = \alpha\beta + \sup\{\alpha\gamma: \gamma < \lambda\} =$
$= \alpha\beta + \alpha\cdot\sup\{\gamma: \gamma < \lambda\} = \alpha\beta + \alpha\lambda.$

La otra distributividad no vale: $(\omega + 1)2 = (\omega + 1) + (\omega + 1) = ((\omega + 1) + \omega) + 1 = (\omega + (1 + \omega)) + 1 = (\omega + \omega) + 1 = \omega 2 + 1 \neq \omega 2 + 1 \cdot 2$.

•$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$:

- $(\alpha\beta)0 = 0 = \alpha 0 = \alpha(\beta 0).$
- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \Rightarrow \alpha\beta(\gamma + 1) = (\alpha\beta)\gamma + \alpha\beta =$
$= \alpha(\beta\gamma) + \alpha\beta = \alpha((\beta\gamma) + \beta) = \alpha(\beta(\gamma + 1)).$
- $(\alpha\beta)\lambda = \sup\{(\alpha\beta)\gamma: \gamma < \lambda\} = \sup\{\alpha(\beta\gamma): \gamma < \lambda\} =$
$= \alpha\cdot\sup\{(\beta\gamma): \gamma < \lambda\} = \alpha(\beta\cdot\sup\{\gamma: \gamma < \lambda\}) = \alpha(\beta\lambda).$

•$\alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$:

- $\alpha^{\beta + 0} = \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta}\cdot 1 = \alpha^{\beta}\alpha^{0}.$
- $\alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} \Rightarrow \alpha^{\beta + (\gamma + 1)} = \alpha^{(\beta + \gamma) + 1} = \alpha^{(\beta + \gamma)}\cdot\alpha =$
$= (\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma})\alpha = \alpha^{\beta}(\alpha^{\gamma}\alpha) = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma + 1} = \alpha^{\beta(\gamma + 1)}.$
- $\alpha^{\beta + \lambda} = \sup\{\alpha^{\beta + \gamma}: \gamma < \lambda\} = \sup\{\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}: \gamma < \lambda\} =$
$= \alpha^{\beta} \cdot \sup\{\alpha^{\gamma}: \gamma < \lambda\} = \alpha^{\beta}\alpha^{\lambda}.$

- Monotonía respecto de los supremos: Sean $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $A \subset \mathrm{Ord}$, $\sigma = \sup(A)$; entonces:
  - $\alpha + \sigma = \sup\{\alpha + \beta: \beta \in A\}.$
  - $\alpha\sigma = \sup\{\alpha\beta: \beta \in A\}.$
  - $\alpha^{\sigma} = \sup\{\alpha^{\beta}: \beta \in A\}.$

Esto es trivial si $\sigma \in A$; si $\sigma \notin A$, entonces σ es ordinal límite y las tres proposiciones siguen de las correspondientes definiciones.

5. 4. Resta, división, logaritmación de ordinales.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$. Entonces:

- **Resta: $\beta \leq \alpha \Rightarrow (\exists! \gamma \leq \alpha)(\beta + \gamma = \alpha)$.**

<u>**Existencia**</u>:

- $\beta \leq 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ cumple con lo dicho.
- Sea cierto que $\beta \leq \alpha \Rightarrow (\exists\gamma \leq \alpha)(\beta + \gamma = \alpha)$, y sea $\beta \leq \alpha + 1$. Si $\beta = \alpha + 1$, entonces $\gamma = 0$ cumple con lo dicho. Si $\beta < \alpha + 1$, entonces $\beta \leq \alpha \Rightarrow (\exists\gamma \leq \alpha)(\beta + \gamma = \alpha) \Rightarrow (\beta + (\gamma + 1) = \alpha + 1)$, y $\gamma + 1 \leq \alpha + 1$.
- Sea $\lambda \geq \beta$ un ordinal límite, y supongamos que la proposición vale $\forall\alpha < \lambda$; veremos que también vale para λ. El caso $\lambda = \beta$ es trivial, así que suponemos $\lambda > \beta$. Sea $\mu = \sup(A)$, con $A = \{\gamma: \beta + \gamma < \lambda \wedge \gamma \leq \lambda\}$; entonces $\mu \leq \lambda$ y $\beta + \mu = \sup\{\beta + \gamma: \gamma \in A\} = \sup\{\alpha: \alpha < \lambda\} = \lambda$, pues todo $\alpha < \lambda$ es expresable como $\alpha = \beta + \gamma$ para algún $\gamma \in A$.

<u>Unicidad</u>:

Por IT, es fácil probar que $\beta < \beta + \gamma \ \forall \ \gamma \neq 0$. Si $\beta + \gamma = \beta + \delta$ con $\gamma \leq \delta$, entonces por lo recién probado $\exists \ \sigma : \delta = \gamma + \sigma \Rightarrow \beta + \delta = \beta + (\gamma + \sigma) = (\beta + \gamma) + \sigma > \beta + \gamma$ si $\sigma \neq 0$, de modo que debe ser $\sigma = 0$, y $\delta = \gamma$.

• **División: $\beta \neq 0 \Rightarrow (\exists!\gamma \leq \alpha)(\exists!\delta < \beta)(\beta\gamma + \delta = \alpha)$.**

<u>Existencia</u>:

- Sea $A = \{\varepsilon: \beta\varepsilon > \alpha\}$[42]; $A \neq \varnothing$, pues $\beta(\alpha + 1) \geq \alpha + 1 > \alpha$; sea $\gamma' \leq \alpha + 1$ el primer

elemento de A. γ' no es 0, ni puede ser un ordinal límite: si lo fuera, se tendría $\beta\varepsilon \leq \alpha \ \forall \ \varepsilon < \gamma' \Rightarrow \beta\gamma' = \sup\{\beta\varepsilon: \varepsilon < \gamma'\} \leq \alpha$. Entonces γ' es un sucesor, $\gamma' = \gamma + 1$ para algún γ y, como $\gamma' \leq \alpha + 1$, debe ser $\gamma \leq \alpha$. Por la minimalidad de γ',

$$\beta\gamma \leq \alpha < \beta\gamma' = \beta(\gamma + 1) = \beta\gamma + \beta. \quad \text{.......................................} \quad (4)$$

Por lo anterior, $\exists\delta: \alpha = \beta\gamma + \delta$, y $\delta \geq \beta \Rightarrow \delta = \beta + \varepsilon$ para algún $\varepsilon \Rightarrow \alpha = \beta\gamma + (\beta + \varepsilon) = (\beta\gamma + \beta) + \varepsilon \geq \beta\gamma + \beta$, contradiciendo (4); sigue que $\delta < \beta$.

<u>Unicidad</u>:

- Sea $\alpha = \beta\gamma + \delta = \beta\rho + \sigma$. Por la minimalidad de γ', $\rho \neq \gamma \Rightarrow \rho < \gamma \Rightarrow \exists\tau \neq 0: \gamma =$

$= \rho + \tau \Rightarrow \alpha = \beta\gamma + \delta = \beta(\rho + \tau) + \delta = \beta\rho + \beta\tau + \delta = \beta\rho + \sigma \Rightarrow \beta\tau + \delta = \sigma \Rightarrow \sigma > \beta$, absurdo. Entonces γ es único, y $\alpha = \beta\gamma + \delta = \beta\gamma + \sigma$. Pero entonces $\delta = \sigma$.

• **Logaritmación: $(\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1 \wedge \alpha \neq 0) \Rightarrow$**

$\Rightarrow (\exists!\gamma \leq \alpha)(\exists!0 < \delta < \beta)(\exists!\varepsilon < \beta^\gamma)(\beta^\gamma \cdot \delta + \varepsilon = \alpha)$.

<u>Existencia</u>:

- Sea $A = \{\xi: \beta^\xi > \alpha\}$[43]; $A \neq \varnothing$, pues $\beta^{\alpha + 1} > \alpha \ \forall \ \alpha \geq 1$, aún si α es

ordinal límite:

[42] A es una clase propia.

- Si $\alpha = 1$, como $\beta \geq 2$, es $\beta^{\alpha+1} = \beta^2 \geq 2^2 > 1$.
- Sea $\beta^{\alpha+1} > \alpha$; entonces $\beta^{(\alpha+1)+1} = \beta^{\alpha+1} \cdot \beta > \alpha\beta$; como $\beta > 1$, $\beta = 1 + \gamma$ para algún $\gamma \Rightarrow \beta^{\alpha+1} \cdot \beta > \alpha(1+\gamma) = \alpha + \alpha\gamma \geq \alpha + 1$.

También vale que $0 \notin A$ pues $\beta^0 = 1 \leq \alpha$; sea γ' el primer elemento de A. γ' no es 0, ni puede ser un ordinal límite: si lo fuera, se tendría $\gamma' = \sup\{\beta^\varepsilon: \varepsilon < \gamma'\} \leq \alpha \Rightarrow \beta^{\gamma'} \leq \alpha$. Entonces γ' es un sucesor, $\gamma' = \gamma + 1$ y $\beta^\gamma \leq \alpha \Rightarrow 0 < \delta < \beta$: $\beta^\gamma \cdot \delta \leq \alpha \Rightarrow \exists \varepsilon < \beta^\gamma$: $\beta^\gamma \cdot \delta + \varepsilon = \alpha$. La unicidad se prueba de modo similar al caso anterior.

5. 5. Teorema. $\forall \alpha, \beta \in \text{Ord}$ ($\beta \geq 2$), existe una única expresión del tipo:

$$\alpha = \beta^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \beta^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \ldots + \beta^{\gamma_{n-1}} \cdot \delta_{n-1},$$

con $n \in \omega$, $0 < \delta_i < \beta \ \forall i$, $\alpha \geq \gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_{n-1}$.[44]

Demostración.

<u>Existencia</u>: Supongamos $\alpha \neq 0$; por lo visto recién existen únicos γ_0, δ_0, ε_0:

$$\alpha = \beta^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \varepsilon_0, \ \alpha \geq \gamma_0, \ 0 < \delta_0 < \beta \text{ y } \varepsilon_0 < \beta^{\gamma_0}.$$

Si $\varepsilon_0 = 0$ el teorema está probado con n = 1; en caso contrario $\varepsilon_0 = \beta^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \varepsilon_1$, $0 < \delta_1 < \beta$ y $\varepsilon_1 < \beta^{\gamma_1}$. Además $\beta^{\gamma_1} \leq \beta^{\gamma_1} \cdot \delta_1 \leq \varepsilon_0 < \beta^{\gamma_0} \Rightarrow \gamma_0 > \gamma_1$.

Siguiendo de este modo tenemos una sucesión estrictamente decreciente de ordinales $\alpha \geq \gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_n$ que para sólo cuando $\varepsilon_0 = 0$. Como no se puede tener una sucesión estrictamente decreciente de ordinales, esto debe ocurrir para algún $n \in \omega$.

<u>Unicidad</u>: sigue de las consideraciones dadas en 5. 3. ▌

- Un corolario importante es que $\forall \alpha \in \text{Ord}$ existe una única expresión del tipo

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} \cdot a_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{\gamma_{n-1}} \cdot a_{n-1},$$

con $n \in \omega$, los a_i enteros positivos y $\alpha \geq \gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_{n-1} \geq 0$.

6. Ordinales y Conjuntos Bien Ordenados.

6. 1. Teorema. Sea $\{R_\alpha\}$, $\alpha \in \text{Ord}$, una familia creciente de subconjuntos de un conjunto A. Entonces $R_{S(\alpha)} = R_\alpha$ para algún $\alpha \in \text{Ord}$.

---

[43] A es una clase propia.

[44] El caso $\alpha = 0$ corresponde a n = 0.

Demostración. Sea, $R_{S(\alpha)} \supset R_\alpha \ \forall\alpha$, $R = \{x \in A: x \in R_\alpha$ para algún $\alpha \in Ord\}$. Entonces R es un *conjunto*, pues es una subclase del conjunto A. Tenemos definida una función $F: R \to Ord$, $F(x) = \text{mín}\{\alpha: x \in R_{S(\alpha)}\}$. F es suryectiva: dado $\alpha \in Ord$, $\exists x \in R_{S(\alpha)} \backslash R_\alpha$ y $x \notin R_\alpha \Rightarrow x \notin R_{S(\beta)} \forall\beta < \alpha \Rightarrow \alpha = F(x)$. Sigue que $\bigcup F(R) = Ord$. Pero, por (AR), $\bigcup F(R)$ debe ser un *conjunto*, absurdo porque Ord es una clase propia. Por lo tanto, $R_{S(\alpha)} = R_\alpha$ para algún $\alpha \in Ord$. ▌

6. 2. Teorema. $\forall(X, \leq)$ conjunto bien ordenado (b. o.) $\exists! \ \alpha \in Ord \wedge \exists!$ orden-isomorfismo[45] $F: \alpha \to X$.

Demostración. Definimos F por IT: $F(0) = x_0$ = primer elemento de X. $F(\alpha)$ = primer elemento de $X_\alpha = X \backslash \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$. F es inyectiva por construcción, y debe haber un $\alpha \in Ord$: $X_\alpha = \varnothing$. Si no fuera así, $\bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$ sería una familia etrictamente creciente de subconjuntos de X indexada por los ordinales, absurdo por 6. 1. Entonces, para algún $\alpha \in Ord$ es $F: \alpha \to X$ suryectiva. F preserva el orden, por construcción. Si $G: \beta \to X$ es otro orden-isomorfismo, por IT sigue $G(\gamma) = F(\gamma) \ \forall \ \gamma < \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$.▌

6. 2. 1. Todo conjunto X transitivo y totalmente ordenado por "$\in$" es un ordinal: el orden total dado por "$\in$" y (AF) implican que X está b. o. Si $x \in X$ y X es transitivo, $a \in x \Rightarrow a \in X$, de modo que $x = \{a \in X \mid a \in x\}$; por 4. 3. 6., X es un ordinal.

6. 2. 2. Sean u un conjunto, β un ordinal tales que $u \subseteq \beta$; u está b. o., y por 6. 2. es u orden-isomorfo a algún ordinal α por un orden-isomorfismo $f: u \to \alpha$; veamos que $\alpha \leq \beta$: si $\alpha > \beta$, $\beta \in \alpha$ y $\beta \subset \alpha \Rightarrow f^{-1} \circ i: \beta \to u$ es inyectiva. Como $u \subseteq \beta$, hay biyección entre u y $\beta \Rightarrow u = \beta$, absurdo.

[45] Es decir, una biyección que preserva el orden. Esta noción fundamental apareció en 3. 5. 5., donde se demuestra que todo orden parcial es, en esencia, una relación de inclusión entre subconjuntos de un cierto conjunto.

Secciones 7, 8 y 9.

7. El Axioma de Elección (1).
8. Álgebras de Boole.
9. El Axioma de Elección (2).

7. El Axioma de Elección (1).

El estudio de los ordinales (que agota la clase de los conjuntos b. o.) nos lleva a plantearnos la cuestión de si para todo conjunto x puede definirse un buen orden $\leq$. El *Principio de Buena Ordenación*:

Todo conjunto puede bien-ordenarse .... (BO)

es independiente de los axiomas de ZF[46]. Introduciremos un nuevo axioma que nos permitirá probar (BO).

7. 1. Definición. Una función f: $x \to Ux$ es una *función de elección en x* si $f(y) \in y \ \forall \ y \in x$.

7. 2. El Axioma de Elección (AC).

Al final de 2. 9. 1. dábamos una lista de axiomas que habría que añadir a la teoría de conjuntos para hacerla lo suficientemente fuerte como para garantizar la validez de ciertos resultados de gran importancia. Presentamos aquí el primero de ellos, el Axioma de Elección.

$\forall x(\emptyset \notin x) \Rightarrow \exists$ f función de elección en x. .... (AC)

"Dada una colección x de conjuntos no vacíos,
siempre se puede hacer una elección
simultánea de un elemento
de cada $y \in x$".

7. 3. En muchos casos no hace falta (AC) para obtener una función de elección. Por ejemplo:

- Si los conjuntos y son grupos, podemos elegir el neutro de cada uno.

- Si los y están bien ordenados, podemos tomar el mínimo de cada uno; (AC) sólo
participa cuando tenemos que hacer *infinitas elecciones arbitrarias simultáneas*.

- Si x = {y}, de modo que sólo queremos hacer *una* elección f(y) de un único $y \neq \emptyset$:

$$(\exists z)(z \in y) \Rightarrow (\exists(y, z))(z \in y) \Rightarrow (\exists \ f: x \to Ux)(f(y) \in y).$$

Por un argumento inductivo finito sigue la existencia de una función de elección sobre x $\forall$x conjunto *finito* de conjuntos $\neq \emptyset$; lo que no podemos hacer sin el axioma es infinitas elecciones simultáneas.

---

[46] Diremos algo más respecto de esto más adelante (7. 6.).

7. 4. Teorema. (AC) $\Rightarrow$ (BO).
Demostración.

Sea $a \neq \varnothing$; basta probar que $\exists$ F: $\alpha \to a$ biyectiva para algún $\alpha \in$ Ord. Sean x = $P(a) \setminus \{\varnothing\}$, f: $x \to Ux = a$ una función de elección en x. Definimos F: Ord $\to$ a inductivamente por:

$$F(\beta) = \begin{cases} f\left(a \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma)\right) & \text{si} \quad \bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma) \neq a \\ f(a) & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

[F(β) se elige de los elementos que quedan en a (si es que queda alguno) después de haber calculado F de todos los ordinales menores que β]; F es *inyectiva* por construcción. Por otra parte, si $\bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma) \neq \varnothing$ $\forall$ $\beta \in$ Ord, entonces F define una familia estrictamente creciente de subconjuntos de a indexados por Ord, imposible por 6. 1. Entonces, F(β) = f(a) para algún $\beta \in$ Ord. Si α es el mínimo de tales ordinales, F: $\alpha \to$ a es *sobre*. ∎

7. 5. Teorema. Usando sólo ZF, (BO) $\Rightarrow$ (AC).

Demostración. Sea x un conjunto con $\varnothing \notin x$. Usamos (BO) para bien-ordenar Ux; esto da un b. o. a todo $y \in x$. Ahora definimos una función de elección f: $x \to Ux$, f(y) = mín(y), $y \in x$. ∎

7. 6. Como (AC) no puede probarse en (ZF)[47], 7. 5. indica que (BO) tampoco es demostrable en (ZF): es necesario introducir (AC) en nuestra teoría si queremos tener (BO). La teoría así ampliada se llama (ZFC).

Muchas cuestiones interesantes y de gran importancia en la Teoría de Conjuntos (y en la Matemática en general) utilizan de modo esencial el Axioma de Elección. Este axioma es, también, fuente de importantes contraejemplos y de interesantes teoremas "patológicos" que aparecen en toda la Matemática; sirvan tres como ejemplos [48] :

- El Teorema de Vitali, según el cual existen conjuntos no medibles Lebesgue de números reales.

- El teorema de Hausdorff[49]: Una superficie esférica S puede descomponerse en subconjuntos disjuntos $S = A \cup B \cup C \cup Q$ tales que:
  i) los conjuntos A, B, C son mutuamente congruentes;

[47] La independencia de AC respecto de ZF fue establecida en dos etapas, primero por Gödel (1936) y luego por Cohen (1963). Sunque no probaremos este hecho (que por sí mismo toda involucra una tesis), diremos algo al respecto al tratar la constructibilidad en 12. 6.

[48] Fuente: Jech, Thomas J. The Axiom of Choice. North-Holland Publishing Company, 1973.

[49] *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).

ii) el conjunto $B \cup C$ es congruente a cada uno de los conjuntos A, B, C;
iii) Q es numerable[50].

Consideremos la siguiente relación entre conjuntos del espacio euclídeo tridimensional: Definimos

$$X \approx Y \quad \text{.......................................} \quad (5)$$

si hay una descomposición finita de X en subconjuntos disjuntos,

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i \, ,$$

y una descomposición de Y en la misma cantidad de subconjuntos disjuntos,

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} Y_i \, ,$$

tales que X_i es congruente a Y_i $\forall\ 1 \leq i \leq m$. Tenemos el siguiente notable:

- Teorema de Banach-Tarski[51]: Una bola cerrada U se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos, $U = X \cup Y$, tales que $U \approx X$ y $U \approx Y$. Así, usando el Axioma de Elección, se puede descomponer una bola en un número finito de partes, y luego re-armar estas partes isométricamente para obtener dos bolas del mismo tamaño que la bola original (!)

Las descomposiciones de la esfera dadas por los teoremas de Hausdorff y Banach-Tarski se llaman "paradójicas", y jugarán un papel importante a partir de (17. 2.).

No probaremos el teorema de Vitali, por ser bastante común en los cursos de Análisis Real, pero nos pareció interesante demostrar los de Hausdorff y Banach-Tarski ya que, aunque el alumno de licenciatura puede "oír hablar" de ellos, rara vez se mencionan sus demostraciones en el curso de la carrera.

Sea G el producto libre de los grupos $\{1, \varphi\} \approx z_2$ y $\{1, \psi, \psi^2\} \approx z_3$, i.e., el grupo de todos los productos formales de los objetos φ, ψ, y ψ^2, con la condición de que $\varphi^2 = \psi^3 = 1$. Sea U la bola unitaria centrada en $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in R^3$ y consideremos dos ejes de rotación a_φ, a_ψ pasando por **0**; identificamos a a_φ con el eje x, y supondremos que a_ψ está en el plano z = 0. Consideremos, por fin, el grupo G de todas las rotaciones generadas por una rotación φ de 180° alrededor de a_φ y una rotación ψ de 120° alrededor de a_ψ.

7. 7. Lema. Podemos determinar el eje a_ψ de modo tal que elementos distintos de G representen rotaciones distintas generadas por φ y ψ, de modo que será $G \cong \mathrm{G}$.

---

[50] Es decir, coordinable con los números naturales; esta noción se introducirá formalmente en 10. 10., pero nos pareció legítimo incluirla aquí porque nos es familiar desde los primeros cursos de la carrera y nos ayuda a enriquecer la presente sección sobre (AC).

[51] Stefan Banach y Alfred Tarski (1924): *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. 6, 244-277.

Demostración. Hay que determinar el ángulo $\theta \in (0, \pi)$ entre a_φ (el eje x) y a_ψ de modo tal que ningún elemento de $G \neq 1$ represente a la rotación idéntica. Consideremos un elemento típico de G,

$$\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi^{r_i} \cdot \psi^{s_i}\right),\ r_i = 0, 1,\ s_i = 0, 1, 2;$$

para cada n sólo hay finitos valores θ_i, $1 \leq i \leq k_n$, que pueden resolver la ecuación $\alpha = 1$. La reunión de todos ellos es numerable, y basta tomar $\theta \in (0, \pi)\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_n}\theta_i$. ▌

Supondremos elegido un θ tal que $G \cong \mathrm{G}$.

7. 8. Lema. El grupo G se puede descomponer en tres subconjuntos $\mathrm{G} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ tales que

$$\mathrm{A} \cdot \varphi = \mathrm{B} \cup \mathrm{C},\ \mathrm{A} \cdot \psi = \mathrm{B},\ \mathrm{A} \cdot \psi^2 = \mathrm{C}.$$

Demostración. Construimos A, B, C inductivamente sobre las longitudes de los elementos de G. Hacemos $1 \in \mathrm{A}$, $\varphi, \psi \in \mathrm{B}$, $\psi^2 \in \mathrm{C}$ y, para cada $\alpha \in \mathrm{G}$, continuamos según la siguiente tabla:

α **termina en**	$\alpha \in \mathbf{A}$	$\alpha \in \mathbf{B}$	$\alpha \in \mathbf{C}$
ψ o ψ^2	$\alpha\cdot\varphi \in \mathrm{B}$	$\alpha\cdot\varphi \in \mathrm{A}$	$\alpha\cdot\varphi \in \mathrm{A}$
φ	$\alpha\cdot\psi \in \mathrm{B}$	$\alpha\cdot\psi \in \mathrm{C}$	$\alpha\cdot\psi \in \mathrm{A}$
	$\alpha\cdot\psi^2 \in \mathrm{C}$	$\alpha\cdot\psi^2 \in \mathrm{A}$	$\alpha\cdot\psi^2 \in \mathrm{B}$

Esto asegura la descomposición pedida. ▌

7. 9. Teorema (Hausdorff). Una superficie esférica S puede descomponerse en subconjuntos disjuntos $S = A \cup B \cup C \cup Q$ tales que:

i) los conjuntos A, B, C son mutuamente congruentes;
ii) el conjunto $B \cup C$ es congruente a cada uno de los conjuntos A, B, C;
iii) Q es numerable.

Demostración. Sea Q el conjunto de todos los puntos fijos de la superficie esférica S por todas las rotaciones $\alpha \in \mathrm{G}$. Cada una de tales α tiene sólo dos puntos fijos, así que Q es numerable. El conjunto $S\setminus Q$ es unión disjunta de todas las órbitas P_x del grupo G: $P_x = \{x \cdot \alpha : \alpha \in \mathrm{G}\}$. Por el Axioma de Elección, existe un conjunto M que contiene exactamente un elemento de cada P_x, $x \in S\setminus Q$[52]. Sean entonces $A = M \cdot \mathrm{A}$, $B = M \cdot \mathrm{B}$, $C = M \cdot \mathrm{C}$. De 7. 8. sigue que A, B, C son disjuntos y mutuamente

[52] Obsérvese que no damos, ni podemos dar, indicación alguna de *cómo obtener efectivamente* al conjunto M; tal indefinición es inherente a todas las construcciones que apelan al Axioma de Elección; volveremos sobre este punto en (17. 2.).

congruentes y que $B \cup C$ es congruente a cada uno de ellos; además, $S = A \cup B \cup C \cup Q$. ▌

7. 10. Lema. Sea "$\approx$" la relación definida en (5). Entonces:

a) "$\approx$" es de equivalencia.

b) Si X e Y son uniones disjuntas de X_1, X_2 e Y_1, Y_2 respectivamente, y si $X_i \approx Y_i$, $i = 1,2$, entonces $X \approx Y$.

c) $(X_1 \subseteq Y \subseteq X \approx X_1) \Rightarrow X \approx Y$.

Demostración.

a) y b) son fáciles. Para probar c), sean $X = \bigcup_{i=1}^{n} X^i$, $X_1 = \bigcup_{i=1}^{n} X_1^i$ tales que X_i es congruente a X_1^i, $i = 1,\dots, n$. Definamos una congruencia f^i: $X^i \rightarrow X_1^i$ para cada $i = 1, \dots, n$, y sea f la biyección de X en X_1: $f|X^i = f^i$; será $X_1 = f(X)$. Sean ahora:

$$X_0 = X,\ X_1 = f(X_0),\ X_2 = f(X_1),\ \dots,$$
$$Y_0 = Y,\ Y_1 = f(Y_0),\ Y_2 = f(Y_1),\ \dots.$$

Si hacemos $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty}(X_n - Y_n)$, entonces $f(Z)$ y $X \backslash Z$ son disjuntos, $Z \approx f(Z)$ y $X = Z \cup (X \backslash Z)$, $Y = f[Z \cup (X \backslash Z)]$, luego $X \approx Y$ por b). ▌

7. 11. Teorema (Banach-Tarski). Una bola cerrada U se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos, $U = X \cup Y$, tales que $U \approx X$ y $U \approx Y$.

Demostración.

Sea $S = A \cup B \cup C \cup Q$ la descomposición de la superficie de U dada por el Teorema de Hausdorff 7. 9., y sean:

0 el centro de la esfera S (o U).

$\overline{A}$ la unión de todos los puntos que están sobre radios (**0**, a] de U tales que $a \in A$ (**0** excluido, a incluido).

$\overline{B}$ la unión de todos los puntos que están sobre radios (**0**, b] de U tales que $b \in B$ (**0** excluido, b incluido).

$\overline{C}$ la unión de todos los puntos que están sobre radios (**0**, c] de U tales que $c \in C$ (**0** excluido, c incluido).

$\overline{Q}$ la unión de todos los puntos que están sobre radios (**0**, q] de U tales que $q \in Q$ (**0** excluido, q incluido).

Se tiene $U = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{Q} \cup \{\mathbf{0}\}$ y, por 7. 9. c) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ y $\overline{B} \cup \overline{C}$ son mutuamente congruentes, por lo que vale que $\overline{A} \approx \overline{B} \approx \overline{C} \approx \overline{B} \cup \overline{C}$.

Sean $X = \overline{A} \cup \overline{Q} \cup \{c\}$, $Y = U \backslash X$. De 7. 10. sigue que

$$\overline{A} \approx \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \Rightarrow X \approx U. \quad \dots \quad (6)$$

Ahora es fácil encontrar una rotación $\alpha \notin G$: Q y $Q \cdot \alpha$ sean disjuntos; usando el hecho de que $\overline{C} \approx \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$, $\exists\ M \subset C$ such that $\overline{M} \approx \overline{Q}$. Sea $p \in \overline{C} \setminus \overline{M}$; se tendrá entonces que

$$\overline{A} \cup \overline{Q} \cup \{\mathbf{0}\} \approx \overline{B} \cup \overline{M} \cup \{p\}. \quad \text{(7)}$$

Como $\overline{B} \cup \overline{M} \cup \{p\} \subseteq Y \subseteq U$, podemos usar (6), (7) y el Lema 7. 10 para concluir que $Y \approx U$. ▌

En contraste con los tres reciente usos "patológicos" de (AC), empleamos ahora este axioma para probar un resultado "evidente":

7. 12. Lema[53]. La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia numerable de conjuntos numerables. Por el Axioma de Elección, podemos *elegir* una enumeración $\{a_{n,k}: k \in N\}$ de cada A_n. Esto nos da una proyección del conjunto numerable $N \times N$ sobre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$: $(n, k) \xi\ a_{n,k}$. ▌

Otro uso fundamental de (AC) es:

7. 13. Teorema (Lema de Zorn). Todo conjunto no vacío p. o. en el cual toda cadena tiene una cota superior tiene un elemento maximal (ver definiciones en 3. 5. 5 y 3. 5. 7.)

Demostración. Sea $(S, \leq)$ el conjunto p. o. Usando (BO)[54] damos a S un b. o., de modo que $S = \{s_i\}_{i \in Ord}$. Usando recursión infinita, definimos $c_0 = s_0$, $c_\xi = s_\gamma$, donde γ es el mínimo ordinal tal que s_γ es cota superior de la cadena $C_\xi = \{c_\eta: \eta < \xi\}$ y $s_\gamma \notin C$. Si $c_\xi \notin C_\xi\ \forall\ \xi \in$ Ord, entonces la sucesión transfinita $\{C_\xi\}_{\xi \in Ord}$ define una familia estrictamente creciente de subconjuntos de a indexados por Ord, imposible por 6. 1. Entonces, para algún $\xi \in$ Ord se tiene $c_\xi \in C_\xi$, y c_ξ es elemento maximal. ▌

7. 14. Teorema. En (ZF), el Lema de Zorn implica (AC).

Demostración. Sea X un conjunto: $\emptyset \notin X$. Sea S el conjunto de todos los pares (f, Y): $\emptyset \neq Y \subseteq X$ y f es una función de elección en Y. $S \neq \emptyset$: si $y \in X$, entonces $y \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ f: $\{y\} \to y$: f es función de elección $\Rightarrow (f, \{y\}) \in S$. Damos a S un o. p., definiendo:

---

[53] Fuente: Jech, Thomas J. *Set Theory*. Corrected 4th printing. Springer Monographs in Mathematics, 2006.

[54] Equivalente a (AC) según lo visto en 7. 4 y 7. 5.

$$(f_1, Y_1) \leq (f_2, Y_2) \Leftrightarrow ((Y_1 \subseteq Y_2) \wedge (f_2 \mid Y_1 = f_1)).$$

Sea $C = \{(f_i, Y_i)\}_{i \in I}$ una cadena en S. C admite la cota superior $b_C = (f_C, Y_C)$ haciendo $Y_C = \bigcup_{i\in I} Y_i$, y $f_C(y) = f_i(y)$ si $y \in Y_i$. Por el Lema de Zorn, S tiene un elemento maximal (f, Y); probamos ahora que Y = X: si así no fuera, sea $x \in X \backslash Y$; $x \neq \varnothing \Rightarrow \exists\ \xi \in x$, Definimos una función de elección g sobre $Z = Y \cup \{x\}$ por:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in Y \\ \xi & z \in \{x\} \end{cases}.$$

(g, Z) es entonces una exrensión de (f, Y), imposible porque (f, Y) es maximal. Debe ser entonces Y = X, y X admite una función de elección. ▌

El Lema de Zorn y su equivalente el Principio de Buena Ordenación son muy útiles en álgebra:

7. 15. Teorema. Todo espacio vectorial $E \neq \{\mathbf{0}\}$ admite una base de Hamel.

Demostración (1). Sea E un e. v.; damos un buen orden a $E \backslash \{\mathbf{0}\}$ y escribimos:

$$E = \{\mathbf{0}\} \cup \{x_\alpha: \alpha < \mu\},$$

$\mu \in$ Ord. Construimos una base $\{\mathbf{e}_\beta: \beta < \lambda\}$ por inducción transfinita: hacemos $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 \in E \backslash \{\mathbf{0}\}$ y, definido $\mathbf{e}_\beta\ \forall\ \beta < \alpha$, buscamos el menor γ: $\mathbf{x}_\gamma \notin \langle \mathbf{e}_\beta \rangle_{\beta < \alpha}$ y hacemos $\mathbf{e}_\gamma = \mathbf{x}_\gamma$. El proceso continúa hasta que $\langle \mathbf{e}_\beta \rangle_{\beta < \alpha} = E$, obteniendo una base de Hamel para E. ▌

Demostración (2). Sea $(S, \subseteq)$ el conjunto p. o. de todos los subconjuntos l. i. de E; S $\neq \varnothing$ pues $E \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \exists\ \mathbf{x}_0 \in E \backslash \{\mathbf{0}\}$ y $\{\mathbf{x}_0\}$ es l. i. Si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una cadena en S, entonces $\bigcup_{i\in I} S_i$ es una cota superior para $\{S_i\}_{i \in I}$. Sea B un elemento maximal de S, que existe por el Lema de Zorn. Entonces B es una base para E: B es l. i., y si $\mathbf{x} \in E \backslash \langle B \rangle$ tenemos que $B \cup \{\mathbf{x}\}$ es in conjunto l. i. que incluye estrictamente a B, absurdo. ▌

En conclusión, vemos que (AC) sirve a la vez para probar teoremas importantes y "buenos" para el desarrollo de la matemática, y para demostrar resultados que repugnan a nuestra intuición. Esta extraña dualidad confiere al *Auswahlaxiom* un carácter único en la matemática. Volveremos a este axioma después de la siguiente sección, que será de gran importancia en el desarrollo de la presente tesis.

8. Álgebras de Boole.

8. 1. Definición. Un *álgebra de Boole* es un conjunto $B \neq \varnothing$ con operaciones binarias $\vee$, $\wedge$, una operación unaria $x \mapsto \overline{x}$ y elementos distinguidos 0 y 1 que satisfacen los siguientes axiomas:

$$a \vee a = a \qquad\qquad a \wedge a = a$$

$$
\begin{array}{cc}
a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a \\
(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) & (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \\
a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) & a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
a \vee \bar{a} = 1 & a \wedge \bar{a} = 0 \\
a \vee 0 = a & a \wedge 1 = a
\end{array}
$$

Si $0 \neq 1$, decimos que B es *no trivial*. Podemos hacer de B un conjunto p. o. (B, $\leq$) si declaramos $a \leq b$ sii $a \vee b = b$:

- $a \vee a = a \Rightarrow a \leq a$, y "$\leq$" es *reflexiva*.

- $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b$ y $b \leq a \Rightarrow b \vee a = a$; de $a \vee b = b \vee a$ sigue $a = b$ y "$\leq$" es *antisimétrica*.

- Si $a \leq b \leq c$ se tiene $a \vee b = b$ y $b \vee c = c \Rightarrow a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c \Rightarrow ((a \leq b \leq c) \Rightarrow (a \leq c))$ y "$\leq$" es *transitiva*.

8. 2. Álgebras de Boole, Lógica y Teoría de Conjuntos. Sea S el conjunto de todas las sentencias del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos, construidas a partir de enunciados atómicos tales como "x = y" y "$x \in y$"; aquí, x, y, ... son símbolos constantes que representan ciertos elementos fijos del dominio. Las sentencias se combinan con los conectivos lógicos "#" (disjunción), "&" (conjunción)[55], "$\neg$" (negación) y los cuantificadores "$\exists$" y "$\forall$". Toda expresión de (ZFC) puede expresarse en este leguaje:

- "Si A entonces B" (abreviado por "$A \Rightarrow B$") equivale a "($\neg$A)#B".
- "A si y sólo B" (abreviado por "$A \Leftrightarrow B$") equivale a "($A \Rightarrow B$)&($B \Rightarrow A$)".
- "x es subconjunto de y" (abreviado por $x \in y$) equivale a "$\forall z((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$".
- El axioma del Conjunto Potencia (AP; ver 2. 6.) se escribe como $\forall x \exists y \forall z((z \subseteq x) \Leftrightarrow (z \in y))$.

Al elegir las sentencias que queremos sean válidas en S, habremos de respetar ciertas restricciones; por ejemplo, si φ y ψ son válidas, entonces queremos que φ & ψ sea válida. Un modo natural de respetar estas restricciones es empleando un álgebra de Boole: en efecto, hay una correspondencia natural entre los conceptos booleanos "0", "1", "$\vee$", "$\wedge$" y "$\bar{\ }$" y los conceptos lógicos de falsedad, verdad, "o", "y" y "no" respectivamente.

El conjunto potencia de un conjunto S, 2^S, ordenado parcialmente por inclusión, es otro ejemplo natural de álgebra de Boole; en él, hay una correspondencia natural entre los conceptos booleanos "0", "1", "$\vee$", "$\wedge$" y "$\bar{\ }$" y los conceptos conjuntistas "$\varnothing$", "S", "$\cup$", "$\cap$" y complementación respecto de S respectivamente.

---

[55] Reservamos los símbolos más comunes "$\vee$" de disjunción y "$\wedge$" de conjunción para los operadores booleanos.

8. 3. Proposición. Sea (B, $\leq$) un álgebra de Boole p. o. por la relación $a \leq b$ sii $a \vee b = b$. Entonces:

- $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$: $((0 \vee \overline{0} = \overline{0})\ \&\ (0 \vee \overline{0} = 1)) \Rightarrow \overline{0} = 1$; $((1 \wedge \overline{1} = \overline{1})\ \&\ (1 \wedge \overline{1} = 0)) \Rightarrow \overline{1} = 0$.

- $a \vee b = \sup\{a, b\}$: Si $\sup\{a, b\} = b$, entonces $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b$;
lo mismo si $\sup\{a, b\} = a$.

- $a \wedge b = \text{ínf}\{a, b\}$.

- $\overline{\overline{a}} = a\ \forall a$: $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{a}} \wedge 1 = \overline{\overline{a}} \wedge (a \vee \overline{a}) = (\overline{\overline{a}} \wedge a) \vee (\overline{\overline{a}} \wedge \overline{a}) = (\overline{\overline{a}} \wedge a) \vee 0 = \overline{\overline{a}} \wedge a \leq a$. Repitiendo con a, llegamos a $a \leq \overline{\overline{a}}$, y $\overline{\overline{a}} = a$.
- $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$: .

- $0 = \text{ínf } B$, $1 = \sup B$: $a \vee 0 = a\ \forall a \Rightarrow 0 \leq a\ \forall a$; $a = a \wedge 1 = \text{ínf}\{a, 1\} \Rightarrow \text{ínf}\{a, 1\} = a\ \forall a \Rightarrow a \leq 1\ \forall a$.

- $a \leq b \Rightarrow a \vee c \leq b \vee c\ \forall c$: $(a \vee c) \vee (b \vee c) = (a \vee (c \vee b)) \vee c = (a \vee (b \vee c)) \vee c = ((a \vee b) \vee c) \vee c = (a \vee b) \vee (c \vee c) = b \vee c$.

- $a \leq b \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge c\ \forall c$:.

- $a \vee b = 1 \Leftrightarrow a \geq \overline{b}$.

- $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a \leq \overline{b}$.

- $a = \overline{b} \Leftrightarrow (a \wedge b = 0\ \&\ a \vee b = 1)$. $\Rightarrow$): obvio. $\Leftarrow$): $a \wedge b = 0$.

- $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$.

- $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$.

- $a \leq b \Leftrightarrow \overline{b} \leq \overline{a}$.

∎

8. 4. Definición. Un subconjunto no vacío J de un álgebra de Boole es un *ideal* si:

- $a, b \in J \Rightarrow a \vee b \in J$.

- $a \in J\ \&\ b \leq a \Rightarrow b \in J$.

- $1 \notin J$.

8. 5. Definición. Un subconjunto no vacío F de un álgebra de Boole es un *filtro* si:

- $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.
- $a \in F$ & $b \geq a \Rightarrow b \in F$.
- $0 \notin F$.

Claramente estas definiciones son duales, de modo que el conjunto $F =: \{x \in B: \bar{x} \in J\}$ es filtro si y sólo si J es ideal. Damos algunos ejemplos de cada uno de los objetos definidos:

- $J = \{0\}$, $F = \{1\}$ son el *ideal trivial* y el *filtro trivial*, respectivamente.
- Si $1 \neq a \in B$, el conjunto $J_a = \{x \in B: x \leq a\}$ es un ideal, llamado el *ideal principal generado por a*.
- Si $0 \neq a \in B$, el conjunto $F_a = \{x \in B: x \geq a\}$ es un filtro, llamado el *filtro principal* (o *fijo*, o *trivial*) *generado por a*. Un filtro no principal también se llama *libre*.
- Un conjunto $A \subset N$ es *de densidad 0* si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0$, donde la medida de un conjunto finito es su cardinal. El conjunto $J = \{A \subset N: d(A) = 0\}$ es un ideal.

8. 6. Teorema. Sea I un ideal de un álgebra de Boole B. Entonces equivalen:

1) $\forall\, a \in B$, se da una y sólo una de las siguientes opciones: $a \in I$ o $\bar{a} \in I$.

2) I es maximal en el conjunto de todos los ideales de B ordenados por "$\subseteq$".

3) $a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I$ ó $b \in I$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2): inmediato observando que no puede ser ($a \in I$ & $\bar{a} \in I$) para ningún $a \in B$, o de lo contrario sería $1 = a \vee \bar{a} \in B$.

2) $\Rightarrow$ 3): Sea I maximal tal que $a \wedge b \in I$ pero $a \notin I$ y $b \notin I$. Consideremos el conjunto

$$J = \{x \in B: x \leq a \vee y \text{ para algún } y \in I\}.$$

J cumple con las tres siguientes condiciones:

- $I \subseteq J$: $y \leq a \vee y\ \forall\, y \in I$.

- $x_1, x_2 \in J \Rightarrow x_1 \vee x_2 \in J$: sea $x_i \leq a \vee y_i$, $y_i \in I$, $i = 1, 2$. Entonces $x_1 \vee x_2 \leq (a \vee y_1) \vee (a \vee y_2) = a \vee (y_1 \vee y_2) \Rightarrow x_1 \vee x_2 \in J$.

- $x_1 \in J$ & $x_2 \leq x_1 \Rightarrow x_2 \in J$: sea $x_1 \leq a \vee y_1$, $y_1 \in I$; por transitividad, $x_2 \leq x_1 \Rightarrow x_2 \leq a \vee y_1 \Rightarrow \in x_2 \in J$.

Vemos entonces que J cumple con dos de las tres condiciones de un ideal y contiene a I que es ideal maximal, luego J no es ideal y $1 \in J$; concluimos que $1 \leq a \vee x$ para algún $x \in I \Rightarrow 1 = a \vee x$ para algún $x \in I$. De la misma manera, $1 \leq b \vee y$ para algún $y \in I \Rightarrow 1 = b \vee y$ para algún $y \in I$. Vale entonces que $1 = (a \vee x) \wedge (b \vee y)$ o, desarrollando:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge y) \vee (x \wedge (b \vee y)) = 1.$$

Pero:

- $a \wedge b \in I$ por hipótesis.

- $a \wedge y \leq y \in I \Rightarrow a \wedge y \in I$.

- $x \wedge (b \vee y) \leq x \in I$.

Sigue $1 = (a \wedge b) \vee (a \wedge y) \vee (x \wedge (b \vee y)) \in I$, absurdo.

3) $\Rightarrow$ 1): $a \wedge \bar{a} = 0 \in I$. ▌

8. 7. Definición. Un ideal que cumple con las condiciones de 8. 6. se llama *primo*.

Esta definición proviene del álgebra; por ejemplo en Z, los ideales primos son los generados por los números primos; cumplen con la condición $a \cdot b \in I \Rightarrow a$ ó $b \in I$; también, los ideales primos son los maximales de Z.

8. 8. Teorema (del Ideal Primo para Álgebras de Boole, TIPAB). Todo ideal I en un álgebra de Boole B no trivial está contenido en un ideal primo.

Demostración.

Sea $(S, \leq)$ el conjunto de todos los ideales de B que contienen a I, p. o. por inclusión ($S \neq \emptyset$, pues $I \in S$). Si C es una cadena en S, entonces $\bigcup C$ es un ideal, y es cota superior para C. Por el Lema de Zorn (7. 13.), $\exists$ M maximal en S, y por (8. 6.) es M ideal primo. ▌

8. 9. Teorema. Sea F un filtro de un álgebra de Boole B. Entonces equivalen:

1) $\forall$ a $\in$ B, se da una y sólo una de las siguientes opciones: a $\in$ F o $\bar{a} \in$ F.

2) F es maximal en el conjunto de todos los filtros de B ordenados por "$\subseteq$".

3) $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ ó $b \in F$.

Demostración.
Dual de 8. 6. ▌

8. 10. Definición. Un filtro que cumple con las condiciones de 8. 8. se llama *ultrafiltro*. Esta definición es dual de la (8. 7.). También aquí puede hablarse de *ultrafiltros principales* (o *fijos*, o *triviales*; cf. 8. 5.) y *ultrafiltros no principales* o *libres*. Los ultrafiltros principales tienen un elemento mínimo $a \neq 0$, luego son de la forma $F_a = \{x: a \leq x\}$; a se llama el *elemento principal* del ultrafiltro. *Todo ultrafiltro de un conjunto p. o. finito es principal*, pues todo filtro finito tiene un elemento mínimo.

Aplicaciones Conjuntistas de Filtros y Ultrafiltros.[56]

8. 10. 1. En Teoría de Conjuntos son especialmente importantes los conceptos de *filtro* y *ultrafiltro en S*, siendo S un conjunto no vacío; en lo que sigue, "filtro" significa filtro del álgebra de Boole P(S), con $0 = \emptyset$, $1 = S \neq \emptyset$. En este contexto, las propiedades de la definición de filtro serán:

- $a, b \in F \Rightarrow a \cap b \in F \Rightarrow$ F tiene la propiedad de intersección finita (pif)[57].
- $a \in F$ & $b \supseteq a \Rightarrow b \in F$.
- $0 \notin F$.

8. 10. 2. Lema.

i) Si F es una familia no vacía de filtros en S, entonces $\bigcap F$ es un filtro en S.

ii) Si C es una $\subset$ - cadena de filtros en S, entonces $\bigcup C$ es un filtro en S.

iii) Si $G \subset P(S)$ tiene la pif, entonces $\exists$ F filtro en S: $G \subset F$.

Demostración.
i) y ii) son fáciles de verificar; iii): sea F el conjunto de todos los $X \subset S$: $\exists H = \{X_1, ..., X_n\} \subset G$ con $X_1 \cap ... \cap X_n \subset X$; F es un filtro y $G \subset F$. ▌

[56] La Sección (8. 3.) se basa en:
- Hrbacek & Jech 01: *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, Inc. 1999.
- Jech, Thomas. *Set Theory*. Corrected 4th printing. Springer Monographs in Mathematics, 2006.

[57] Es decir, toda subfamilia finita de conjuntos en F tiene interseción no vacía. El concepto de "tener la pif" puede aplicarse a cualquier familia G de conjuntos.

Como todo filtro F' $\supset$ G debe contener a todas las intersecciones finitas de conjuntos de G, el filtro F de la demostración de (8. 10. 2. iii) es el filtro más pequeño en S que extiende a G: F = $\bigcap$\{D: D es filtro en S y G $\subset$ D\}. Este es el *filtro generado* por G.

Un filtro U en el álgebra de Boole P(S) que no puede ampliarse a un filtro más grande, es decir un *filtro maximal*, se llamará *ultrafiltro*. Los elementos que pueden jugar el papel de principales son exactamente los subconjuntos unitarios: un *ultrafiltro principal* en S consiste en todos los subconjuntos de S que contienen un punto en particular {s}. Si S es *finito*, todo ultrafiltro en S es principal. Un ultrafiltro que no es principal se llama *libre* o *no principal*.

La existencia de un ultrafiltro U en S equivale a imponer una *medida finitamente aditiva* en S, según la cual un subconjunto A $\subseteq$ S puede considerarse como "casi todo" o "de medida 1" si A $\in$ U, o como "casi nada" o "de medida 0" si A $\notin$ U, la condición de ultrafiltro exige que $\forall$ A $\subseteq$ S valga A $\in$ U, o bien S \ A $\in$ U. Formalizamos:

8. 10. 3. Definición. Sea S $\neq \varnothing$; un *ultrafiltro en S* es un conjunto U $\subset$ P(S) tal que:

1. $\varnothing \notin$ U.
2. A $\subseteq$ B $\subseteq$ S, A $\in$ U $\Rightarrow$ B $\in$ U.
3. A, B $\in$ U $\Rightarrow$ A $\cap$ B $\in$ U.
4. A $\subseteq$ S $\Rightarrow$ A $\in$ U o S \ A $\in$ U.[58]

El correlato de (8. 9.) en esta situación es:

8. 10. 4. Teorema. Sea U un filtro en X. Entonces equivalen:

1) A $\subseteq$ X $\Rightarrow$ A $\in$ U o X \ A $\in$ U.

2) U es maximal en el conjunto de todos los filtros de X ordenados por "$\subseteq$".

3) A $\cup$ B $\in$ U $\Rightarrow$ A $\in$ U o B $\in$ U. ▌

Un ultrafiltro sería entonces un filtro que cumpla con cualquiera de las condiciones mencionadas.

Otro modo de considerar a los ultrafiltros sobre S consiste en definir una función μ: P(S) $\rightarrow$ S, μ(A) = 1 si A $\in$ U, μ(A) = 0 si A $\notin$ U; entonces μ es una medida *finitamente aditiva* en S. Sean R un predicado y A = \{x $\in$ S: R(A)\};[59] imitando lo que sabemos del Análisis Real, decimos que R es:

- *cierto en casi todo punto* si A $\in$ U.
- *falso en casi todo punto* si A $\notin$ U.

---

[58] Los axiomas 1. 2. y 3. definen un *filtro en X*; 1. y 3. implican que no puede darse el caso A $\in$ U y X \ A $\in$ U, pero para un filtro ordinario podría ocurrir que A $\notin$ U y X \ A $\notin$ U; este axioma garantiza que tal situación no puede darse en un ultrafiltro.

[59] A existe por Esquema Axiomático de Subconjunto (2.2.)

Notemos dos hechos importantes:

- $\mu(A) = \mu(B) = 1 \Rightarrow \mu(A \cap B) = 1$ por el axioma 3. de ultrafiltro: no podemos "sumar

las medidas de A y B" porque dos (y por lo tanto cualquier cantidad *finita* de) elementos de U jamás son disjuntos.

- Esto no define una medida en el sentido usual, porque no tenemos la aditividad

numerable: los axiomas de ultrafiltro no dicen nada acerca de $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ si $A_i \in U \ \forall\ i \in \omega$.

Esto nos lleva a un concepto fundamental:

8. 10. 5. Definición. La *completitud* de un ultrafiltro (o de un filtro) $U \subset P(S)$ es el menor cardinal κ tal que hay κ elementos de U cuya intersección no está en U. Se tiene siempre $\kappa \geq \aleph_0$; si $\kappa > \aleph_0$, decimos que U es *numerablemente completo* or *σ-completo*. (cf. 17. 2. 7. 12.).

8. 11. Teorema (del Ultrafiltro para Álgebras de Boole, TUPAB). Todo filtro F en un álgebra de Boole no trivial B está contenido en un ultrafiltro.

Demostración.
Dual de 8. 8. ▌

Damos un ejemplo para ilustrar el alcance y el significado de este importante teorema que, como todos aquellos que emplean el Axioma de Elección (en este caso, en la forma del Lema de Zorn), es de naturaleza *no constructiva*. Tomemos un conjunto infinito cualquiera X; para fijar las ideas, haremos X = N, el conjunto de los números naturales. En P(N) consideramos la familia

$$F = \{A \subseteq N: \text{card}(N \setminus A) < \infty\}$$

de los subconjuntos de N que tienen *complemento finito*; veamos que F es un filtro, llamado *de Fréchet*:

1. $\varnothing \notin F$, pues $N \setminus \varnothing = N$, que no es finito.
2. $A \subseteq B \subseteq N$, $A \in F \Rightarrow B \in F$: $A \subseteq B \Rightarrow (N \setminus B) \subseteq (N \setminus A)$, y $\text{card}(N \setminus A) < \infty \Rightarrow \text{card}(N \setminus B) < \infty$.
3. $A, B \in U \Rightarrow A \cap B \in U$: $N \setminus (A \cap B) = (N \setminus A) \cup (N \setminus B)$, y este conjunto es finito si $(N \setminus A)$ y $(N \setminus B)$ lo son.

Es difícil demostrar que hay un filtro F' que contiene estrictamente a F pero, gracias a la propiedad 1) de (8. 10. 3.), podemos ver con facilidad que F *no es un ultrafiltro*: basta con dar un subconjunto S de N que no sea finito ni tenga complemento finito; por ejemplo, $S = \{2n: n \in N\}$, el conjunto de los números pares.

Usando (8. 11.) concluimos que debe haber un ultrafiltro U que contenga a F, pero exhibirlo explícitamente no es fácil; ni siquiera sabemos si U es numerable (observemos que F sí lo es, pues puede ponerse en correspondencia con la familia de todos los subconjuntos *finitos* de N), pero sí sabemos (y esto es típico de los ultrafiltros en conjuntos infinitos) que U *no puede ser principal*: si lo fuera, existiría n ∈

N: U = $\{A \subseteq N: n \in A\}$. Pero B = $(N \setminus \{n\}) \in F$ (tiene complemento finito $\{n\}$) y a la vez B $\notin$ U, luego F $\not\subset$ U. El ultrafiltro U puede considerarse un caso de *ultrafiltro en* ω (4. 4. 5.); esta clase de ultrafiltros es particularmente interesante y volveremos brevemente a ella en (11. 9. c) cuando hayamos visto la Hipótesis del Continuo.

Usaremos abundantemente las nociones de filtro y ultrafiltro cuando nos ocupemos de la técnica del forzamiento para probar la independencia de la Hipótesis del Continuo respecto de los axiomas ZFC. Por ahora, digamos que la topología proporciona una de las mejores ilustraciones de lo expuesto en (8. 9. - 8. 11.) En lo que sigue, "filtro" significa filtro del álgebra de Boole P(X) de subconjuntos de un espacio topológico dado X, con 0 = $\varnothing$, 1 = X. En este contexto, las propiedades de la definición de filtro serán:

8. 12. Definición. Dado $x \in X$, el *filtro de entornos de x*, N_x, es el conjunto de todos los entornos de x. Un filtro F *converge a x* si $N_x \subseteq F$; en ese caso, escribimos F $\to$ x.

8. 13. Teorema.

1) (ZF): X es Hausdorff sii ningún filtro converge a más de un punto.

2) (ZF) + (TUPAB): X es compacto sii todo ultrafiltro converge.

3) Sea Y otro e. t.; f: X $\to$ Y es continua sii $f(F) \to f(x)$ cada vez que $F \to x$.

Demostración.

Probamos 2) solamente.

$\Rightarrow$) Sean X compacto, U un ultrafiltro en X, y $\bar{U}$ el conjunto de las clausuras de los elementos de U. Como U tiene la pif, también $\bar{U}$ la tiene, y como X es compacto $\exists\, x \in \bigcap \bar{U}$[60]. Sigue que, si N es entorno de x, entonces X\N $\notin$ U $\Rightarrow$ (U es ultrafiltro; ver 8. 11. a): $N \in U \Rightarrow N_x \subseteq U \Rightarrow U \to x$.

$\Leftarrow$) Supongamos que todo ultrafiltro en X converge, y sea C una familia de cerrados con la pif. Sea

$$F = \{Y \subseteq X: Y \supseteq F_1 \cap ... \cap F_n \text{ para ciertos } F_1 ... F_n \in C\}.$$

F es un filtro, y por el TUPAB (8. 10.) es $F \subseteq U$ para algún ultrafiltro $U \to x$ para algún $x \in X$. Si N es entorno de x, entonces $N \in U \Rightarrow N \cap F \neq \varnothing\ \forall\, F \in U$ y, en particular, $\forall\, F \in C$. Como los elementos de C son cerrados, se tiene $x \in \bigcap C$. ▌

9. El Axioma de Elección (2).

60 "Toda familia de conjuntos cerrados de X con la pif tiene intersección no vacía". Es una de las propiedades equivalentes a la compacidad. Ver Munkres, James R. *Topology. A First Course.* Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

9. 1. Recordamos el enunciado de (AC): $\forall x(\emptyset \notin x) \Rightarrow \exists$ f función de elección en x ("dada una colección x de conjuntos no vacíos, siempre se puede hacer una elección simultánea de un elemento de cada $y \in x$"). Hay varias versiones más débiles de (AC):

i) Elección Numerable $(AC)_\omega$: (AC) para x numerable.

ii) Elección Numerable en R $(AC)_\omega$ (P(R)): (AC) para x numerable, $x \subseteq R$.

iii) Elección Dependiente $(DC)_\omega$: Dados $x = \{y_0, y_1, y_2, ...\}$ y una función d: $\omega \times \bigcup x \to \bigcup x$ tal que $\forall z \in y_n$ es d(n, z) un subconjunto no vacío de y_{n+1}, hay una función f: $\omega \to \bigcup x$ tal que $f(n) \in y_n$ y $f(n+1) \in d(n, f(y_n)) \ \forall n \in \omega$[61].

iv) Elección de Conjuntos Finitos (AC)(F): (AC) con y finito $\forall y \in x$.

v) El Teorema del Ideal Primo para Álgebras de Boole, TIPAB[62]: Todo ideal I en un álgebra de Boole B no trivial está contenido en un ideal primo.

vi) El Teorema del Ultrafiltro para Álgebras de Boole, TUPAB[63]: Todo filtro F en un álgebra de Boole no trivial B está contenido en un ultrafiltro.

Ninguna de estas proposiciones puede probarse dentro de (ZF). La práctica convencional en matemática es aceptar iii) sin mencionarlo, pero apelar explícitamente (AC) cuando hay que hacer una cantidad no numerable de elecciones simultáneas.

Analicemos algunos casos particulares de aplicación de los axiomas mencionados:

- La elección de conjuntos finitos iv) rara vez es tratada como un caso especial; este axioma podría probarse en (ZF) si los conjuntos finitos tuvieran alguna estructura añadida que permitiera la elección; por ejemplo si son conjuntos finitos de números reales, podemos tomar el mínimo de cada uno de ellos. Sin embargo, situaciones así rara vez se dan[64].

---

[61] O sea, la (n+1)º elección depende de la nº; este axioma implica $(AC)_\omega$. Volveremos a $(DC)_\omega$ en (17. 2. 5.).

[62] Ver 8. 8.

[63] Ver 8. 11.

[64] Bertrand Russell da una excelente ilustración de aplicación de este axioma: si tenemos infinitos pares de zapatos y hay que elegir un zapato de cada par, podemos hacerlo sin apelar a (AC)(F) pues basta con elegir el zapato izquierdo de cada par. Sin embargo, si tenemos infinitos pares de medias y necesitamos una media de cada par, no hay criterio alguno de elección y tenemos que apelar a

- Si los conjuntos y de números reales son infinitos el axioma ii) $(AC)_\omega$ (P(R)) es

necesario, aún si todos los y son numerables, pues es necesario hacer una *elección de la numeración* específica que daremos a cada y antes de tomar un elemento concreto de cada uno de ellos, por ejemplo el primero que aparece en cada numeración.

- La demostración del teorema que dice que una función $f: X \to Y$ entre dos espacios

métricos es continua si y sólo si $f(x_n) \to f(x)$ cada vez que $x_n \to x$ requiere del axioma i) de Elección Numerable $(AC)_\omega$. Repasemos la demostración: sea f discontinua en x; entonces $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall\, n \in N$ el conjunto

$$S_n = \{s \in X: d(s, x) < \frac{1}{n} \wedge d(f(s), f(x)) > \varepsilon\}$$

es no vacío. Elegimos $x_n \in S_n$, n = 1, 2, 3, ..., *simultáneamente*, para obtener una $\{x_n\}$ que tiende a x sin que $\{f(x_n)\}$ tienda a f(x).

- La demostración del teorema que dice que una función $f: R \to R$ es continua si y sólo si

$f(x_n) \to f(x)$ cada vez que $x_n \to x$ requiere del axioma ii) de Elección Numerable en R $(AC)_\omega$ (P(R)).

- La demostración del teorema de Categoría de Baire que dice que en un espacio

métrico completo X la intersección de cualquier familia numerable $\{G_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos densos es no vacía requiere del axioma iii) de Elección Dependiente $(DC)_\omega$. Repasemos la demostración: se construyen bolas $B(x_n, \delta_n)$ tales que

$$\overline{B}(x_n, \delta_n) \subseteq B(x_{n+1}, \delta_{n+1}) \cap G_n, \; n = 1, 2, 3, ...;$$

la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, y su límite está en la clausuras de todos los conjuntos

$B(x_n, \delta_n)$ y por lo tanto en todos los G_n, tal como deseábamos. Nótese cómo cada par (x_{n+1}, δ_{n+1}) *se elige de un conjunto no vacío de posibles pares que depende* de (x_n, δ_n).

9. 2. El Teorema de Tichonov.

Ya vimos en 8. 13. y 8. 14. una aplicación de (AC) a la topología. Ahora veremos otra, que es de la máxima importancia.

El Axioma de Elección, inevitablemente, juega un papel en en los espacios producto infinitos, pues es equivalente a la proposición de que en un producto cartesiano arbitrario de una familia de conjuntos no vacíos es no vacío. A continuación probaremos el famoso teorema de Tichonov que afirma que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto.

(AC)(F). Hay un tratamiento interesante de este axioma en *The Book of Numbers*, de John H. Conway y Richard K. Guy.

Repasemos la definición de topología producto: dada una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos, sean $\prod_{i\in I} X_i$ su producto cartesiano y π_i: $X \to X_i$ la i-ésima proyección, $i \in I$. La *topología producto* en X es la más débil de las topologías en X que hacen continuas a todas las π_i. En términos de filtros[65], es la topología tal que $F \to x$ en X sii $\pi_i(F) \to \pi_i(x)$ $\forall$ $i \in I$.

9. 2. 1. Teorema de Tichonov (T. T.). En (ZF) + (AC), todo producto de espacios compactos es compacto. En (ZF) + (TUPAB)[66], todo producto de espacios de Hausdorff compactos es compacto.

Demostración.
Hay que probar que, si los X_i son compactos, entonces todo ultrafiltro U en X converge[67]. Si U es ultrafiltro en X, entonces $\pi_i(U)$ es ultrafiltro en X_i $\forall$ $i \in I$, que converge por compacidad de X_i y por (TUPAB); pongamos $\pi_i(U) \to x_i \in X_i$. Si los X_i son Hausdorff, entonces x_i es *único* para cada $i \in I$, y entonces $U \to \{x_i\} = x \in X$. Si los X_i no son Hausdorff, entonces usamos (AC) para *elegir* un punto límite $x_i \in \pi_i(U)$; nótese que las elecciones son *simultáneas* en una familia infinita de conjuntos (posiblemente) infinitos.Hecha esta elección, $U \to \{x_i\} = x \in X$. ▌

9. 2. 2. Teorema (Kelley). Usando sólo ZF, (T. T.) $\Rightarrow$ (AC) (!).

Demostración. Sea x un conjunto en el que queremos definir una función de elección. Para cada $y \in x$, definimos el espacio topológico $S_y = y \cup \{p_y\}$ con $p_y \notin y$.

Topologizamos S_y; un conjunto $G \subseteq S_y$ será abierto sii se da una (y sólo una si y es infinito) de las siguientes condiciones:

- $G \subseteq \{p_y\}$ (o sea, $G = \{p_y\}$).
- $S_y \backslash G$ es finito.

Claramente, S_y es compacto (y T_1) con esta topología; por (T. T.), será también compacto el espacio producto $X = \prod_{y\in x} S_y$.

Para cada $y \in x$, y es cerrado en S_y; consideremos, en X, la familia K de los conjuntos $F_y = \pi_y^{-1}(y)$: $y \in x$; cada F_y es cerrado en X por continuidad de π_i. Probemos que K tiene la pif: para probar que $F_{y_1} \cap \ldots \cap F_{y_n} \neq \emptyset$, elegimos $s_i \in y$ $(1 \leq i \leq n)$[68] y definimos $x \in F_{y_1} \cap \ldots \cap F_{y_n}$ por la regla:

$$\pi_y(x) = \begin{cases} s_i & (y = y_i, 1 \leq i \leq n) \\ p_y & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

---

[65] cf. párrafo anterior a 8. 13.

[66] Teorema del Ultrafiltro para Álgebras de Boole; ver 8. 11.

[67] Ver 8. 14.

[68] Sólo hacemos finitas elecciones, luego no estamos usando (AC).

Como X es compacto, $\exists\, z \in \bigcap_{y\in x} F_y$. Entonces $\pi_y(z) \in y$ $(y \in x)$; es decir, $y \mapsto \pi_y(z)$ es una función de elección en x. $\blacksquare$

De hecho, hemos probado algo más: el teorema de Tichonov para espacios T_1 implica (AC). Se puede probar que (T. T.) para espacios T_2 implica (TUPAB). El Teorema 9. 2. 2. es típico de muchas demostraciones de teoremas de la matemática "ordinaria" que resultan ser equivalentes a (AC) o a alguna de sus variantes más débiles. El tema, por sí mismo, da para toda una tesis, y no profundizaremos más en él.

Secciones 10 y 11.

10. Números Cardinales.
11. Aritmética Cardinal.

10. Números Cardinales.

Si x, y son conjuntos, escribimos:

- $x \approx y$ si $\exists$ f: $x \to y$ biyectiva.
- $x \leq y$ si $\exists$ f: $x \to y$ inyectiva.

"$\approx$" introduce una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos. Llamamos *cardinalidad de x* (o *cardinal de x*) a su clase de equivalencia por "$\approx$"; el cardinal de x se representa por card(x), o por el símbolo $|x|$. Definimos una relación "$\leq$" entre cardinales declarando $|x| \leq |y|$ sii $x \leq y$[69]. Esta relación es trivialmente reflexiva y transitiva; el siguiente famoso teorema prueba que es antisimétrica:

10. 1. Teorema (Schröder - Bernstein).

$$((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x \approx y.$$

Demostración. Sean f: $x \to y$, g: $y \to x$ inyectivas. Si $a \in x$, consideramos:

$$g^{-1}(a) \text{ si } a \in \mathrm{Im}(g),$$
$$f^{-1}(g^{-1}(a)) \text{ si } g^{-1}(a) \in \mathrm{Im}(f),$$
$$g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(a))) \text{ si } f^{-1}(g^{-1}(a)) \in \mathrm{Im}(g), \text{ etc.}$$

Definimos el *orden de a*, o(a), como el número de veces distintas en que se pueden contruir estas pre-imágenes; si $a \notin \mathrm{Im}(g)$, o(a):= 0. Si $b \in y$, consideramos:

$$f^{-1}(b) \text{ si } b \in \mathrm{Im}(f),$$
$$g^{-1}(f^{-1}(b)) \text{ si } f^{-1}(b) \in \mathrm{Im}(g),$$
$$f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(a))) \text{ si } g^{-1}(f^{-1}(b)) \in \mathrm{Im}(f), \text{ etc.}$$

Definimos el *orden de b*, o(b), como el número de veces distintas en que se pueden contruir estas pre-imágenes; si $b \notin \mathrm{Im}(f)$, o(b):= 0.

Ahora construimos una función h: $x \to y$, definida por:

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad o(a) = \infty \\ f(a) & \text{si} \quad o(a) = 2n, n \in \omega \\ g^{-1}(a) & \text{si} \quad o(a) = 2n+1, n \in \omega \end{cases}.$$

Observamos que:

[69] Hubo que incurrir en abuso de notación por limitaciones tipográficas.

- $(a \in x \wedge o(a) = \infty) \Rightarrow o(f(a)) = o(h(a)) = \infty$; por otra parte, $(b \in y \wedge o(b) = \infty) \Rightarrow (\exists\ a = f^{-1}(b) \wedge o(a) = \infty) \Rightarrow b = h(a)$: h es una *biyección* entre los elementos de orden *infinito* de x e y.

- $(a \in x \wedge o(a) = 2n,\ n \in \omega) \Rightarrow o(f(a)) = o(h(a)) = 2n + 1$; por otra parte, $(b \in y \wedge o(b) = 2n + 1,\ n \in \omega) \Rightarrow (\exists\ a = f^{-1}(b) \wedge o(a) = 2n) \Rightarrow b = h(a)$: h es una *biyección* entre los elementos de orden *par* de x y los elementos de orden *impar* de y.
- $(a \in x \wedge o(a) = 2n + 1,\ n \in \omega) \Rightarrow (\exists\ h(a) = g^{-1}(a) \wedge o(h(a)) = 2n)$; por otra parte, $(b \in y \wedge o(b) = 2n,\ n \in \omega) \Rightarrow (\exists\ a = g(b) \wedge o(a) = 2n + 1) \Rightarrow b = h(a)$: h es una *biyección* entre los elementos de orden *impar* de x y los elementos de orden *par* de y. ▌

10. 2. Definición.

$$2^{|x|} = |P(x)|.$$

10. 3. Teorema (Cantor).

$$\forall x,\ 2^{|x|} > |x|.$$

Demostración. La función f: $x \to P(x)$, $f(a) = \{a\}$ es inyectiva, luego $x \leq P(x)$ y $2^{|x|} \geq |x|$: el teorema afirma, en realidad, que $2^{|x|} \neq |x|$. Supongamos, entonces, que $\exists$ F: $x \to P(x)$ biyectiva, y consideremos el conjunto $N = \{a \in x: a \notin F(a)\}$; $N \in P(x) \Rightarrow \exists\ n \in x$: $N = F(n) \Rightarrow n \notin F(n) \Leftrightarrow n \in N \Leftrightarrow n \in F(n)$, absurdo. [70]▌

10. 4. Cardinales como ordinales.

Hasta ahora, los números cardinales son clases propias, las clases de equivalencia definidas al principio. Queremos elegir un *ordinal* que represente a cada clase; por (BO), dado un conjunto x podemos ponerlo en biyección con un $\alpha \in$ Ord. La biyección puede no ser única: por ejemplo, $\omega \approx \omega + 1$ si definimos f: $\omega \to \omega + 1$ por $f(0) = \omega$, $f(n) = n - 1$. El buen orden de Ord nos permite definir a los números cardinales sin ambigüedad:

$$|x| = \text{mín}\ \{\alpha \in \text{Ord}: x \approx \alpha\}.$$

Evidentemente, $\forall x \forall y\ |x| = |y| \Leftrightarrow x \approx y$.

10. 5. Comparación de cardinales.

Podría definirse formalmente la desigualdad de cardinales declarando $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x \leq y$. Sin embargo, habiendo definido a los cardinales como cierto tipo de ordinales, podemos usar la relación "$\leq$" en Ord para *probar* la desigualdad anterior:

---

[70] Sin la distinción entre conjuntos y clases propias, tendríamos la *paradoja de Cantor*: sea A el conjunto de todos los conjuntos, y κ su cardinal. Entonces κ es el máximo cardinal, pero $2^{\kappa} > \kappa$. Vemos que la demostración usa esencialmente el mismo argumento que Russell para construir su paradoja del "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos".

$\Rightarrow$) Sea $|x| \leq |y| \Rightarrow |x| \subseteq |y|$; sea i: $|x| \to |y|$ la inclusión. Si f: $x \to |x|$, g: $y \to |y|$ son biyecciones $\Rightarrow g^{-1} \circ i \circ f: x \to y$ es inyectiva $\Rightarrow x \leq y$.

$\Leftarrow$) $x \leq y \Rightarrow \exists$ h: $x \to y$ inyectiva, y gh(x) $\subseteq |y|$. Por 6. 2. 2, es $x \approx \alpha$ para algún ordinal $\alpha \leq |y|$. De la definición de $|x|$, debe ser $|x| \leq \alpha \Rightarrow |x| \leq |y|$.

10. 6. Teorema. Sea $x \neq \varnothing$. Entonces $|x| \leq |y| \Leftrightarrow \exists$f: $y \to x$ *suryectiva*.

Demostración.
$\Rightarrow$) $x \neq \varnothing \Rightarrow \exists \Leftrightarrow x_0 \in x$. $|x| \leq |y| \Rightarrow \exists$ g: $x \to y$ inyectiva. Definimos f: $y \to x$ por

$$f(b) = \begin{cases} g^{-1}(b) & \text{si} \quad b \in g(x) \\ x_0 & \text{si} \quad b \notin g(x) \end{cases} \quad \forall b \in y.$$

$\Leftarrow$) Sea f: $y \to x$ suryectiva. Usamos (BO) para bien-ordenar al conjunto y, y definimos g: $x \to y$ inyectiva, por g(a) = mín{$b \in y$: f(b) = a} $\forall a \in x$.[71] ▌

10. 7. Teorema. $\forall\alpha, \beta \in$ Ord, $\alpha + 1 \approx \beta + 1 \Rightarrow \alpha \approx \beta$.

Demostración. Sea f: $(\alpha \cup \{\alpha\}) \to (\beta \cup \{\beta\})$ biyectiva. Si $f(\alpha) = \mu \neq \beta$ y $f(\lambda) = \beta$, entonces $\lambda \in \alpha$ y $\mu \in \beta$. Construimos una biyección g: $\alpha \to \beta$ definida por $g(\gamma) = \begin{cases} \mu & \text{si} \quad \gamma = \lambda \\ f(\gamma) & \text{si} \quad \gamma \neq \lambda \end{cases} \quad \forall \gamma \in \alpha.$ ▌

10. 8. Corolario. $n \in \omega \Rightarrow \neg(n \approx n + 1)$.

Demostración. Inducción sobre n: $n = 0 \Rightarrow \neg(0 \approx 0 + 1)$, pues f: $\varnothing \to \{\varnothing\}$ no puede ser suryectiva. Por 8. 7, $\neg(n \approx n + 1) \Rightarrow \neg(n + 1 \approx (n + 1) + 1)$. ▌

10. 9. Definición. Un ordinal α es un *cardinal* si $\exists$ x: $|x| = \alpha \Leftrightarrow |\alpha| = \alpha$. [72]

10. 10. Cardinales infinitos.

---

[71] Este es un ejemplo notable de un teorema "obvio" que sólo puede probarse con (BO), es decir con (AC).

[72] Por ejemplo, $\omega + 1$ *no* es un cardinal, pues $|\omega + 1| = \omega$.

De 8. 8 y 8. 9 sigue que *todo número natural es un cardinal*. También ω, el primer ordinal límite, es un cardinal: si $\omega \approx n < \omega$, entonces $n + 1 \leq \omega \leq n \Rightarrow n \approx n + 1$, contra 8. 8. Escribiremos $\aleph_0$ cuando consideremos a ω como cardinal:

$$\aleph_0 := \omega \text{ considerado como cardinal.}$$

Llamamos Card a la subclase de Ord formada por todos los cardinales, tanto finitos como infinitos. En general, los cardinales infinitos forman otra subclase de Ord que está bien ordenada, cuyos segmentos iniciales son *conjuntos*: si α es un sucesor, entonces $\alpha = \beta + 1$ y su segmento inicial el ordinal (conjunto) β; si α es un ordinal límite, entonces el propio α es su segmento inicial. Por lo tanto, hay un *orden-isomorfismo*

$$f: \text{Ord} \to \text{Cardinales Infinitos},$$

representado por $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$; escribiremos ω_α en vez de $\aleph_\alpha$ cuando lo consideremos como un ordinal. Más sencillamente, el Teorema de Cantor (10. 3.) permite establecer las relaciones:

$P(\aleph_0) > \aleph_0 \Rightarrow A(\aleph_0) = \{\alpha \in \text{Ord}: \alpha > \aleph_0\} \neq \emptyset$. Por b. o. de Ord, $\exists\ \aleph_1 = \text{mín}\{A(\aleph_0)\}$.
$P(\aleph_1) > \aleph_1 \Rightarrow A(\aleph_1) = \{\alpha \in \text{Ord}: \alpha > \aleph_1\} \neq \emptyset$. Por b. o. de Ord, $\exists\ \aleph_2 = \text{mín}\{A(\aleph_1)\}$.
$P(\aleph_2) > \aleph_2 \Rightarrow A(\aleph_0) = \{\alpha \in \text{Ord}: \alpha > \aleph_2\} \neq \emptyset$. Por b. o. de Ord, $\exists\ \aleph_3 = \text{mín}\{A(\aleph_2)\}$.
....

En nuestra teoría no hay diferencia entre entre ω_α y $\aleph_\alpha$, pero la hay en cualquier teoría que no identifique a los cardinales con ciertos ordinales específicos. Por ahora tenemos $\omega_0 = \aleph_0 = \omega$. quisiéramos tener una idea del tamaño de ω_1. Decimos que x es *numerable* si $|x| \leq \aleph_0$, e *infinito numerable* si $|x| = \aleph_0$. Como toda unión numerable de numerables es numerable[73], son numerables: ω, $\omega^2 = \omega \cdot \omega$, ..., ω^n $(n \in \omega)$, $\omega^\omega = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$, ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^\omega}}}}$ con n ω's anidadas en el exponente, y $\omega^{\omega^{\cdots}}$ con ω símbolos ω anidados en el exponente. Si a este último ordinal lo denotamos por ω^*, resultan numerables: $(\omega^*)^* = \omega^*$ a la ω^* a la .... con ω^* exponentes anidados, etc[74]. En términos ordinales, ω_1 *es muy grande*; de hecho, ω_1 no es límite de ninguna *sucesión* de ordinales $< \omega_1$. En cambio, sí tenemos: *todo cardinal infinito es un ordinal límite*, pues $\alpha \in \text{Ord}$, $\alpha \geq \omega \Rightarrow \alpha \approx \alpha + 1$: para probarlo, definimos una biyección

$$f: \alpha \to \alpha + 1,\ f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \xi = \alpha \\ \xi + 1 & \text{si} \quad \xi \in \omega \\ \xi & \text{si} \quad \omega \leq \alpha \end{cases}.$$

11. Aritmética Cardinal.

11. 1. Definiones.

---

[73] Si aceptamos (AC); ver Lema 7. 12.

[74] En 5. 1. construimos algunos de estos ordinales numerables.

Sean m, n $\in$ Card; se definen la suma, el producto y la exponenciación de cardinales:

- Suma: $m + n = |(m \times \{0\}) \cup (n \times \{1\})|$; m y n son ordinales, y por lo tanto conjuntos de ordinales. Por ejemplo, $\aleph_0 + \aleph_0 = |\{(n, 0): n \in \omega\} \cup \{(n, 1): n \in \omega\}| = \aleph_0$.

- Producto: $m \cdot n := |m \times n|$.

- Exponenciación: $m^n := |m^n| = |\{f: n \to m\}|$.

Es fácil ver que, si m, n $\in \omega$, las operaciones así definidas coinciden para cardinales y ordinales, y con las de la aritmética elemental.

11. 2. Propiedades de las operaciones.

Sean a, b, c, d $\in$ Card. Entonces:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- $a + b = b + a$.
- $a + 0 = a$.
- $a \leq b \Leftrightarrow (\exists c)(a = b + c)$.
- $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + b \leq c + d$.
- $a(b + c) = ab + ac$.
- $(ab)c = a(bc)$.
- $ab = ba$.
- $a \cdot 1 = a$.
- $a \cdot 0 = 0$.
- $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow ab \leq cd$.
- $a^{b + c} = a^b \cdot a^c$.
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.
- $(a^b)^c = a^{bc}$.
- $0^a = 0 \ \forall \ a \neq 0$; $0^0 = 1$.
- $a^1 = a$.
- $1^a = 1$.
- $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a^c \leq b^d$.

11. 3. Teorema. $\forall \ \alpha \in$ Ord, $\forall \ n \in \omega$,

$$\omega_\alpha + n = \omega_\alpha.$$

Demostración $\omega_\alpha + 0 = \omega_\alpha$; $\omega_\alpha + (k + 1) = (\omega_\alpha + k) + 1 =$ (por h. i.): $\omega_\alpha + 1 =$ (por h. i.): ω_α. ▌

11. 4. Teorema. $\forall \ \alpha \in$ Ord,

$$\bullet \aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$
$$\bullet \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

Demostración

- Construimos una biyección f: $((\omega_\alpha \times \{0\}) \cup (\omega_\alpha \times \{1\})) \to \omega_\alpha$: Sea $\beta \in$ Ord, $\beta =$

$\left(\sum_{i=1}^{n} \omega^{\gamma_i} \cdot b_i\right) + b_{n+1}$, $n \in \omega$, $b_i \in \omega\backslash\{0\}$, $1 \leq i \leq n$, $b_{n+1} \in \omega$, $\gamma_1 > \gamma_2 > ... > \gamma_n \geq 1$ (ver 5. 4); definimos $f(\beta, 0) = \beta + 2b_{n+1}$, $f(\beta, 1) = \beta + 2b_{n+1} + 1$. Como ω_α es ordinal límite, $\beta < \omega_\alpha \Rightarrow f(\beta, 0), f(\beta, 1) < \omega_\alpha$.

- Probamos por inducción en α que $\omega_\alpha\times\omega_\alpha \approx \omega_\alpha$.
  - Si $\alpha = 0$, $\omega\times\omega \approx \omega$.
  - Sea el resultado cierto $\forall\ \beta < \alpha$. Para probar que $\omega_\alpha\times\omega_\alpha \approx \omega_\alpha$,

definimos un orden "$\leq$" en $\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ por

$$(\alpha, \beta) \leq (\gamma, \delta) \Leftrightarrow (\text{máx}\{\alpha, \beta\} < \text{máx}\{\gamma, \delta\}) \vee ((\text{máx}\{\alpha, \beta\} = \text{máx}\{\gamma, \delta\}) \wedge (\alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta))).$$

"$\leq$" es un b. o. en $\omega_\alpha\times\omega_\alpha$, luego hay un orden-iso

$$F: (\mu, <) \to (\omega_\alpha\times\omega_\alpha, \leq)$$

para algún $\mu \in$ Ord. Entonces

$$\mu \xrightarrow{F} \omega_\alpha\times\omega_\alpha \xrightarrow{\pi_1} \omega_\alpha$$

es suryectiva $\Rightarrow |\mu| \geq \aleph_\alpha$ y $\mu \geq \omega_\alpha$. Por otro lado, si $\nu < \mu$, tenemos

$$F(\nu) = \{(\beta, \gamma) \in \omega_\alpha\times\omega_\alpha: (\beta, \gamma) \leq (\delta, \varepsilon) = F(\mu)\} \subseteq$$
$$\subseteq \text{máx}\{\delta + 1, \varepsilon + 1\}\times\text{máx}\{\delta + 1, \varepsilon + 1\} \approx$$
$$\approx \text{máx}\{\delta + 1, \varepsilon + 1\} < \omega_\alpha$$

por h. i., pues $\text{máx}\{\delta + 1, \varepsilon + 1\} < \omega_\alpha$. Así, $\mu < \omega_\alpha$. ▌

11. 5. Teorema. $\forall\ \alpha, \beta \in$ Ord,

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \text{máx}\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta.$$

Demostración. $\text{máx}\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \text{máx}\ \{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} + \text{máx}\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} = \text{máx}\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$, y la igualdad sigue del teorema de Schröder-Bernstein 8.1. La igualdad $\text{máx}\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta$ se prueba igual. ▌

Dos consecuencias de esto son: $\forall\alpha \in$ Ord, $\forall n \in \omega$,

- $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$;
- $(\aleph_\alpha)^n = \aleph_\alpha$.

En ambos casos se usan 9. 5 e inducción sobre n.

11. 6. Hipótesis del Continuo. Para todo conjunto x, cualquier subconjunto y puede identificarse con su *función característica*

$$\chi_y(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t\in x-y\\ 1 & \text{si} \quad t\in y\end{cases}.$$[75]

Con esto, la definición dada en 10. 2:

$$2^{|x|}=|P(x)|$$

adquiere el carácter de *teorema*. Por el Teorema de Cantor 10. 3, se tiene $2^n > n \ \forall \ n \in$ Card, lo que nos lleva a una famosa conjetura:

- La *Hipótesis Generalizada del Continuo* (HGC): Para todo cardinal infinito n, $\neg\exists$ m $\in$ Card: n < m < 2^n. En presencia de (AC), que permite ligar cardinales con ordinales, (HGC) se escribe

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}. \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\mathrm{HGC_{AC}})$$

Un caso especial de HCG es la *Hipótesis del Continuo* (HC):

$$\neg\exists \ m \in \text{Card}: \aleph_0 < m < 2^{\aleph_0}.$$

Nuevamente, en presencia de (AC), (HC) se escribe

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1. \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\mathrm{HC_{AC}})$$

Puesto que los cardinales son cierto tipo de ordinales, podemos preguntar: ¿cuál es el primer ordinal no numerable? Sabemos que la identidad entre ordinales y cardinales se acaba en ω+1, que tiene la misma cardinalidad que ω, es decir $\aleph_0$. Como sabemos que $2^{\aleph_0}$ tiene cardinalidad > $\aleph_0$, preguntamos si habrá alguna cardinalidad intermedia; la respuesta negativa a esta pregunta es (HC).[76]

11. 7. Justificación de la terminología. No hemos dado razones para la locución "Hipótesis del Continuo". El "continuo", o "continuo real" es un nombre tradicional para la recta real o conjunto $\mathfrak{R}$ de todos los números reales.[77] Si definimos **c** = $|\mathfrak{R}|$ al cardinal de este conjunto, surge de inmediato la necesidad de asociarlo con los alephs. En 1878 Georg Cantor, empleando su hoy famoso "método diagonal", demostró que **c** > ω. Inmediatamente, Cantor postuló su hipótesis de que *no hay cardinales intermedios entre ω y **c***. En otros términos: para todo subconjunto S del conjunto $\mathfrak{R}$ de números reales, o bien S es numerable o bien S $\approx \mathfrak{R}$.

---

[75] Esta caracterización de subconjuntos como funciones (de un conjunto en un álgebra de Boole) será importante cuando tratemos el forzamiento (15. y ss.).

[76] Si, por otra parte, llamamos $\aleph$ a un cardinal infinito cualquiera y $\aleph_+$ al siguiente cardinal infinito (cuya existencia es segura por la buena ordenación de los ordinales, de los cuales los cardinales son una sub-clase), entonces (HGC) puede escribirse $\aleph_+ = 2^{\aleph}$.

[77] El nombre se basa en que, siendo un cuerpo ordenado completo, $\mathfrak{R}$ es homologable a una recta "continua", libre de "agujeros" o interrupciones. Esta intuición es una de las más antiguas de la matemática, aunque su justificación plena recién se alcanzó en el s.XIX.

11. 8. Una hipótesis conflictiva. En general, es deseable evitar (HC) para probar teoremas: como veremos, (HC) está sujeta a dudas aún mayores que las que se tienen hacia (AC). Aunque (HC) es una seria cuestión de la fundamentación de la matemática, a menudo es suficiente trabajar sólo con el cardinal **c** sin acudir a (AC) ni a (HC). Así, puede probarse (encontrando biyecciones adecuadas con la recta real) que muchos conjuntos que aparecen rutinariamente en el estudio del análisis real tienen cardinalidad **c**; por ejemplo:

- Cualquier intervalo abierto (a, b), semicerrado [a, b), (a, b] o cerrado [a, b]:
    - f: (a, b) $\to \Re$, f(x) = $\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]$.
    - Sea A = [a, b), (a, b] ó [a, b], Aº = (a, b); $\Re \supset A \supset A^{o} \Rightarrow$ **c** $\geq |A| \geq |A^{o}| =$ **c**.

- Cualquier semirrecta abierta o cerrada:
    - (a, +∞): f_1: (a, +∞) $\to \Re$, $f_1(x) = \ln(x - a)$.
    - (–∞, b): f_2: (–∞, b) $\to \Re$, $f_2(x) = \ln(b - x)$.
    - Sea A = [a, +∞), Aº = (a, +∞); $\Re \supset A \supset A^{o} \Rightarrow$ **c** $\geq |A| \geq |A^{o}| =$ **c**; lo mismo para B = (–∞, b], Bº = (–∞, b).

- I = $\Re$\Q. No podemos decir **c** $\geq |I| > |Q| = \omega \Rightarrow |I| =$ **c**, pues eso es (HC). Sea $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ una numeración de Q[78]. Consideramos el conjunto de números reales A = {aπ + r_k}, a ∈ N ≥ 0, k∈ N ≥ 1, y construimos la biyección f: $\Re \to$ I, $f(x)=\begin{cases} x+\pi & x \in A \\ x & x \notin A \end{cases}$.

- El conjunto 2^N de sucesiones infinitas de 0's y 1's. Escribimos 2^N como unión disjunta de 4 subconjuntos: 2^N = {0', 1'} ∪ A ∪ B ∪ C, donde:

    - 0' = {0, 0, 0, ..., 0, ...}, 1' = {1, 1, 1, ..., 1, ...}.
    - A = $\left\{x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \exists k\left(k \geq 1 \wedge x_k = 1 \wedge x_n = 0\ \forall n > k\right)\right\}$.
    - B = $\left\{x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \exists k\left(k \geq 1 \wedge x_k = 0 \wedge x_n = 1\ \forall n > k\right)\right\}$.
    - C = resto de sucesiones.

Sea I el intervalo cerrado [0, 1]; consideramos $I_A \subset I$, $I_A = \left\{y \in I : \exists n_0 \in N\left(n_0 \geq 1 \wedge y = \sum_{k=1}^{n_0} 2^{-k}\right)\right\}$. Esto establece una biyección f_A: A $\to I_A$. A y B pueden numerarse sin apelar al axioma de elección numerable: A = {a_1, a_2, ...}, B = {b_1, b_2, ...}[79]. La biyección f_A induce una numeración en I_A: I_A = {y_1, y_2, ...}, $y_i = f_A(a_i)$. Ahora establecemos una biyección f: $2^N \to$ I:

- f(0') = 0; f(1') = 1.
- $f(a_i) = y_{2i-1}$; $f(b_i) = y_{2i}$.

---

[78] Podemos construir tal numeración sin apelar a la versión numerable de (AC), aunque es laborioso.

[79] Omitimos la sencilla pero tediosa demostración.

- Si $x \in C$, $x = \{x_1, x_2, ...\}$, $f(x) = y$, de desarrollo binario $0,x_1x_2, ...$

Como $|I| = \mathbf{c}$, también vale que $|2^N| = \mathbf{c}$. Vemos, pues, que $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$, justificando así escribir (HC) en la forma $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, si vale (AC).

- Con argumentos similares puede probarse que $|N^N| = \mathbf{c}$.

- Sea O la familia de todos los conjuntos abiertos de $\Re$. Para cada $x \in \Re$, el intervalo $I_x = (x, x+1) \in O$, luego $|O| \geq \mathbf{c}$. Por otra parte $\Re$ con la topología usual admite una base numerable, luego $|O| \leq |2^N| = \mathbf{c}$.

11. 9. (HC) en la matemática *ordinaria*. A veces, (HC) aparece en teoremas pertenecientes a áreas más familiares de la matemática que la teoría de conjuntos. Veamos tres ejemplos:

a) Sean $A \subseteq \Re^2$, $x, y \in \Re$. Definimos:

$$A^y = \{x \in \Re: (x, y) \in A\},$$

$$A_x = \{y \in \Re: (x, y) \in A\}.$$

Entonces, si vale (AC), (HC) es equivalente a la existencia de un $A \subseteq \Re^2$ tal que A^y y $(\Re^2 \backslash A)_x$ son ambos numerables $\forall\ x, y \in \Re$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $\mathbf{c} = \aleph_1$. Entonces podemos escribir $\Re = \{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$. Sea $A = \{(x_\alpha, y_\beta): \alpha \leq \beta\}$. Dado $y \in \Re$, tenemos $y = x_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1$. Entonces $A^y = \{x_\beta: \beta \leq \alpha\}$. Como $\alpha < \omega_1$, A^y es numerable.

$\Leftarrow$) Sea $A \subseteq \Re^2$ con las propiedades indicadas y supongamos que (HC) falla, de modo que $\aleph_1 < \mathbf{c}$. Damos a $\Re$ el buen orden inducido por $\{x_\alpha: \alpha < \mathbf{c}\}$, y definimos el conjunto $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A^{x_\alpha}$. Por hipótesis cada A^{x_α} es numerable, así que $|X| \leq \aleph_1 < \mathbf{c} \Rightarrow \exists x \in \Re \backslash X \Rightarrow \forall \alpha < \omega_1\ \exists x \notin A^{x_\alpha} \Rightarrow (x, x_\alpha) \notin A \Rightarrow x_\alpha \in (\Re^2 \backslash A)_x \Rightarrow |(\Re^2 \backslash A)_x| \geq \aleph_1$, contra la hipótesis. ▌

b) De importancia aún mayor es la solución dada independientemente por Garth Dales y Jean Esterle del Problema de Kaplansky. Sea A = C[0, 1] el álgebra asociativa de todas las funciones continuas a valores complejos en [0, 1], con la norma del supremo, $\|\ \|_s$. Esta norma de álgebra es *completa* (toda sucesión de Cauchy en A tiene límite en A), y se sabe que toda norma *completa* en A es equivalente a $\|\ \|_s$ (notemos que es crucial la condición $\|fg\|_s = \|f\|_s \|g\|_s$ para garantizar completitud: si no la agregamos, la norma de la integral de Lebesgue no es completa).

El problema de Kaplansky es si *toda* norma en A es equivalente a $\|\ \|_s$ o, lo que es lo mismo, si existe alguna norma incompleta en A. Dales y Esterle probaron independientemente[80] que, si se supone la validez de (HC), entonces existe una norma de álgebra incompleta en A. Más tarde, Solovay demostró que este resultado no puede probarse en (ZFC): hay un modelo de (ZFC) en el que no existe ninguna norma de álgebra incompleta en A.[81]

c) Ultrafiltros en ω. En (8. 11.) dimos un caso de ultrafiltro en N, el conjunto de los números naturales; hay varias otras propiedades, útiles en Teoría de Conjuntos y en Topología, que puede tener un ultrafiltro en ω; veremos ahora que algunas de estas propiedades están ligadas con (HC). Un ultrafiltro no principal (8. 5. y 8. 10.) U es *débilmente selectivo* si para toda *partición* de ω, $\{C_n: n < \omega\}$ en conjuntos disjuntos tales que $C_n \notin U \ \forall \ n < \omega$, $\exists \ A \in U$: $|A \cap C_n| < \omega \ \forall \ n < \omega$. El ultrafiltro U es *selectivo* si para toda *partición* de ω, $\{C_n: n < \omega\}$ en conjuntos disjuntos tales que $C_n \notin U \ \forall \ n < \omega$, $\exists \ A \in U$: $|A \cap C_n| = 1 \ \forall \ n < \omega$. Walter Rudin demostró (*Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*. Duke Math 23 (1956), pp. 409–419) que *(HC) implica la existencia de ultrafiltros selectivos*. Más tarde, Saharon Shelah probó que *la inexistencia de ultrafiltros débilmente selectivos es consistente con (ZFC)*, de modo que la existencia de estos tipos de ultrafiltros es independiente de (ZFC).[82]

11. 10. Nota Histórica. La Hipótesis del Continuo, uno de los problemas más arduos de la teoría de conjuntos, empezó como el propósito optimista, por parte de Georg Cantor, de resolver lo que a su juicio era una cuestión evidente y fácil de probar. En uno de sus papers[83], Cantor considera subconjuntos de números reales,

[80] Dales & Esterle. *Discontinuous Homomorphisms from C(X)*. Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 83, Number 2, March 1977. Esterle. *Discontinuous Homomorphisms from C(X)*. Spectral Theory. Banach Centre Publications, Volume 8, Warsaw, 1982. El resultado fue presentado por primera vez por Dales en una conferencia titulada *Conference on Automatic Continuity*. Leeds 14-18 de Junio, 1976.

[81] No hemos podido encontrar detalles del trabajo de Solovay; su demostración fue simplificada por Woodin, y aparece en el libro: Dales & Woodin. *An Introduction to Independence for Analysts*. Cambridge University Press, LMS Lecture Note Series Nº 115, 1987.

[82] Los ultrafiltros débilmente selectivos también se llaman *P-puntos*, denominación que reciben de la topología. Como veremos en (), su existencia también se deduce del Axioma de Martin. Los ultrafiltros selectivos también se llaman *de Ramsey*, por su relación con el teorema del mismo nombre de la teoría de grafos. Ver Wimmers, Edward: *The Shelah P-point independence theorem*, Israel Journal of Mathematics (Hebrew University Magnes Press) 43 (1, March 1982), pp. 28–48. Consúltese también:

- Comfort, W. W. *Ultrafilters: some old and some new results*. Bulletin of the American Mathematical Society 83 (4, 1977), pp. 417–455.
- Comfort, W. W.; Negrepontis, S. (1974): *The theory of ultrafilters*. Berlin, New York: Springer-Verlag.

[83] *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (*Una contribución a la teoría de las multiplicidades)*. Crelles Journal f. Mathematik 84, pp. 242 - 258, 1878; reproducido en Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 119 - 133. Springer Verlag, 1932); "Mannigfaltigkeit" ("multiplicidad", equivalente al inglés "manifold"), fue el nombre originalmente dado por Cantor al concepto de conjunto, reemplazado en 1885 por "Punktmenge" y en 1895 por el definitivo "Menge" (sin embargo, el término primitivo retorna por última vez, en la forma de "Punktmannigfaltigkeit", en un paper de 1890). Por su parte, el uso matemático de la palabra inglesa "manifold" evolucionaría hasta el actual significado de "variedad".

clasificándolos según su "potencia" (*Mächtigkeit*), o cardinalidad. El siguiente párrafo del mencionado paper es revelador[84]:

> "...así, nos preguntamos *en cuántas* y en cuáles clases se pueden dividir las multiplicidades ... (infinitas) de puntos, ... (atendiendo a su cardinalidad). Por medio de un procedimiento inductivo, que no expondremos aquí en detalle, llegamos al teorema de que... (el número de tales clases) es finito y, ciertamente, se reduce a *dos*.
>
> "Según este criterio,... (las dos clases son, respectivamente, equivalentes a los números naturales y a todos los números reales). Correspondiendo a estas clases, habría por lo tanto sólo dos posibles potencias de variedades infinitas de números reales; ..."[85]

El problema de probar (HC) se enquistó hasta volverse obsesión en la comunidad matemática[86]. Ocupó el primer lugar en la famosa lista de 23 cuestiones fundamentales abiertas para ser resueltas durante el s.XX, presentada por Hilbert en el Congreso Matemático de París de 1900. Entre estas cuestiones figuraba también el problema de bien-ordenar los reales, y hasta parece haber creído Hilbert en la posibilidad de exhibir efectivamente un buen orden en $\Re$. La idea de que estos problemas pudieran ser independientes de las nociones conjuntistas entonces vagamente mantenidas entre la comunidad matemática (y que emergerían en 1905 como la teoría axiomática de Zermelo), les parecía inconcebible a Hilbert y a sus coetáneos.

De hecho, tanto (HGC) como (HC) son consistentes con (ZF) e independientes de (ZFC), la teoría de conjuntos (ZF) a la que se añade (AC). La consistencia:

$$\text{(ZF) consistente} \Rightarrow \text{[(ZFC) + (HGC)] consistente}$$

fue probada por Gödel en 1940[87]. La independencia:

$$\text{(ZF) consistente} \Rightarrow \text{[(ZFC) + }\neg\text{(HGC)] consistente}$$

[84] Respetamos el uso original de *cursivas* para enfatizar los conceptos que a Cantor le parecieron más importantes.

[85] Pensábamos reproducir completo el párrafo original, pero la correspondiente nota al pie sería excesivamente larga; nos conformamos con su última oración, que resume el afán entusiasta de Cantor, un instante antes de convertirse en fuente de toda clase de frustraciones para su autor: *...die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit*: "la investigación precisa de esta cuestión la dejamos para otra oportunidad". Esa *spätere Gelegenheit*, esa "otra oportunidad", jamás llegaría; su perpetua, esquiva promesa y su permanente desengaño constituyen un componente no menor de la depresión nerviosa con que Cantor terminó sus días en 1918. En opinión del autor de esta tesis, éste es uno de los momentos más conmovedoramente humanos de la historia de la matemática.

[86] Es notable que nadie parecía dudar de que (HC) fuese verdadera: todos los esfuerzos se encaminaron a *demostrarla*, no a refutarla.

[87] *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*. Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies No. 3.,1940. Reproducido en *Kurt Gödel. Collected Works Vol. II: Publications 1938-1974*. New York Oxford, Oxford University Press, 1990.

fue probada por Cohen en 1963[88], cerrando así de modo definitivo la cuestión planteada por Cantor en 1878. La "spätere Gelegenheit" esperada por Cantor tardó 83 años en llegar, trayendo una "solución" a la Hipótesis del Continuo que, con seguridad, no hubiera satisfecho a quien primero la planteó: (HC) y (HGC) son *indecidibles* en el contexto de (ZF). La cuestión, desde 1963 hasta hoy, consiste en encontrar nuevos axiomas que, conservando lo esencial de la *Mengenlehre*, permitan demostrar la verdad o falsedad de (HGC) y (HC); a explorar los intentos llevados a cabo en este sentido por la comunidad matemática en los últimos 40 años se dedica la presente tesis. Para ello, debemos introducir algunas definiciones y algunos teoremas adicionales.

[88] *The Independence of the Continuum Hypothesis I*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 50 (1963) pp. 1143-48. *The Independence of the Continuum Hypothesis II*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 51 (1964) pp. 105-10.

Sección 12.

12. Exponenciación Cardinal: Cofinalidad y Cardinales Regulares y Singulares.

12. Exponenciación Cardinal: Cofinalidad y Cardinales Regulares y Singulares[89].

12. 1. Definimos la *función del continuo* como:

$$\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

y nos preguntamos si con esto ya podemos calcular todas las expresiones del tipo $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. La respuesta será afirmativa si vale (HGC), pero negativa si no vale (HGC). En lo que sigue, y salvo aviso en contra, estudiaremos la función $(\alpha, \beta) \mapsto \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ suponiendo la validez de (ZFC), pero no de (HGC).

12. 2. Teorema

a) Si **a**, **b** son cardinales tales que b es infinito y $2 \le \mathbf{a} \le 2^{\mathbf{b}}$, entonces $\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = 2^{\mathbf{b}}$.

b) Si $\aleph_\alpha \le \aleph_\beta$, entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

c) Si $\aleph_\alpha \ge \aleph_\beta$, entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \le 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración.

a) $2^{\mathbf{b}} \le \mathbf{a}^{\mathbf{b}}\ (2^{\mathbf{b}})^{\mathbf{b}} = 2^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = 2^{\mathbf{b}}$.

b) sigue de a), haciendo a = $\aleph_\alpha$, b = $\aleph_\beta$.

c) $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha}$ = [por a)]: $2^{\aleph_\alpha}$

∎

12. 3. Cofinalidad.

a) Sean (A, ≤) un conjunto parcialmente ordenado, ∅ ≠ B ⊆ A; decimos que B es *cofinal en A* si ∀ a ∈ A ∃ b ∈ B: a ≤ b. La *cofinalidad de A* , simbolizada por cf(A), es la *cardinalidad mínima de los subconjuntos cofinales* de A. Esta definición de cofinalidad depende de (AC), al afirmar que todo conjunto no vacío de números cardinales tiene un mínimo[90]. Es evidente que A es cofinal en A, luego cf(A) ≤ ∣ A ∣.

---

[89] Referencias:

1. Dixon, P. G.: Set Theory. Lecture Notes, 1998-99.
2. Drake, Frank. *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 76, 1974, Elsevier Science Ltd.
3. Jech, Thomas, 2003. Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded. Springer.
4. König, Julius, 1905. Zum Kontinuumproblem. Math. Ann. Bd. 60, p. 177.
5. Kunen, Kenneth, 1980. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs. Elsevier.

b) La cofinalidad de A también puede definirse, sin usar (AC), como *el menor ordinal* α *tal que* $\exists$ *f:* $\alpha \to A$*, y tal que Im(f) es cofinal* en A. Consecuencia de esta definición es que cf(A) es un *cardinal*: si $B \subseteq A$ es tal que $B \approx cf(A)$, la condición de mínimo de la cofinalidad nos dice que $|B| = cf(A)$. En presencia de (AC), ambas definiciones son equivalentes[91]. Sea f: $|A| \to A$ una biyección. Se tiene Im(f) = A, cofinal en A; por la condición de mínimo de cf(A), volvemos a obtener la desigualdad $cf(A) \leq |A|$.

c) Sea $A = \alpha$ un *ordinal*. Una tercera definición de cofinalidad para este caso es: $cf(\alpha) = \beta$, si β es el *mínimo ordinal* que cumple las siguientes dos propiedades:

- $\exists \{\mu_\gamma\}, \gamma < \beta$, tal que $\mu_\gamma < \alpha \ \forall \ \gamma < \beta$; llamamos a $\{\mu_\gamma\}, \gamma < \beta$, una *familia indexada por* β, o una β*-sucesión*.

- $\sup(\mu_\gamma) = \alpha$.

Es decir: $cf(\alpha)$ = mínimo número de subconjuntos estrictamente $< \alpha$ tales que su unión es α. Ejemplo importante: los ordinales menores que ω son finitos; una sucesión finita de ordinales finitos tiene siempre un máximo finito, luego ω no puede ser límite de ninguna sucesión de tipo $< \omega$ cuyos elementos son ordinales $< \omega$. *Concluimos que* $cf(\omega) = \omega$.

De la definición de la relación "<" entre ordinales, sigue

$$\mu_\gamma \in \alpha \ \forall \ \gamma < \beta \Rightarrow \bigcup_{\gamma<\beta} \mu_\gamma \subseteq \alpha \Rightarrow \left|\bigcup_{\gamma<\beta} \mu_\gamma\right| \leq |\alpha| \leq \alpha.$$

Pero $\left|\bigcup_{\gamma<\beta} \mu_\gamma\right| = |\beta| = \beta = cf(\alpha)$, por la condición de mínimo: volvemos a obtener la desigualdad $cf(\alpha) \leq |\alpha|$.

d) Ejemplos.

d-1. La cofinalidad de 0 es 0. La cofinalidad de un conjunto parcialmente ordenado con máximo *m* es 1, pues B = {m} es cofinal y debe estar incluido en todo otro subconjunto cofinal. En particular la cofinalidad de cualquier ordinal finito no vacío (o de cualquier conjunto dirigido finito) es 1, pues todos ellos tienen máximo. También es 1 la cofinalidad de cualquier ordinal sucesor.

---

[90] Via el buen orden en la clase Ord de todos los ordinales. Recordemos que es necesario (AC) para poder identificar a cada cardinal con un ordinal.

[91] Como de costumbre, aceptaremos (AC) salvo mención en contra. En estos primeros apartados, haremos continuo hincapié en la doble definición de cofinalidad, tanto en su carácter de cardinal como de ordinal. Más adelante, será tratada principalmente como un ordinal. La idea de cofinalidad puede aplicarse de modo similar a los conjuntos dirigidos para definir subred de una red, generalizando la noción de subsucesión de una subsucesión.

d-2. Todo B cofinal en A parcialmente ordenado debe contener a todos los elementos maximales de A, luego si A es finito debe ser cf(A) = número de elementos maximales de A. En particular, sean S un conjunto cualquiera de cardinal finito n, A = P(S), B = x $\in$ A: card(x) $\leq$ m $\leq$ n. A y B están p.o. por inclusión, y los objetos maximales de B son los subconjuntos de A con m elementos $\Rightarrow$ cf(B) = $\binom{n}{m}$.

d-3. B $\subseteq$ N es cofinal sii B es infinito $\Rightarrow$ cf($\aleph_0$) = $\aleph_0$.

d-4. N $\subseteq \Re$ es cofinal en $\Re$ con el orden usual; por otra parte ningún subconjunto finito de $\Re$ es cofinal en $\Re$, de modo que cf($\Re$) = $\aleph_0$. El orden usual de $\Re$ no es orden-isomorfo a **c**, la cardinalidad de $\Re$, que tiene cofinalidad > $\aleph_0$ [Lema de König; ver (12. 5. c) más abajo]. Así, *la cofinalidad depende del orden*; distintos órdenes en el mismo conjunto pueden dar distintas cofinalidades.

d-5. La cofinalidad de un ordinal α es el menor ordinal δ que es el tipo ordinal de un subconjunto cofinal de α. La cofinalidad de un conjunto de ordinales (o cualquier otro conjunto bien ordenado) es la cofinalidad del tipo ordinal de ese conjunto. Así, si α es un ordinal límite, existe una sucesión δ-indexada estrictamente creciente con límite α. Esto significa que la cofinalidad de cualquier ordinal límite es por lo menos ω. Por ejemplo, la cofinalidad de ω^2 es ω, pues la sucesión ω·m (m $\in$ N) tiende a ω^2; en general, *cualquier ordinal límite numerable tiene cofinalidad ω*; esto, desde luego. incluye al propio ω.

d-6. $cf(\omega^\omega) = \omega$: $\omega^\omega = \sup_{n\in\omega} \omega^n$.

d-7. $cf(\omega_\omega) = \omega$: $\omega_\omega = \sup_{n\in\omega} \omega_n$: vemos que un ordinal límite no numerable puede tener cofinalidad numerable.[92]

d-8. Generalizando el ejemplo anterior, se tiene: *si α es ordinal límite, entonces cf(ω_α) = α*: esto es inmediato, pues $\omega_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$.

e) *El cálculo de la cofinalidad es una operación idempotente*:

- La relación de cofinalidad entre subconjuntos de A es transitiva, luego según la definición a) de cofinalidad es cf[cf(A)] = cf(A).

- Si $\exists$ f: $\alpha \rightarrow$ A tal que Im(f) es cofinal en A y $\exists$ g: $\beta \rightarrow \alpha$ tal que Im(g) es cofinal en α, entonces f∘g: $\beta \rightarrow$ A es tal que Im(f∘g) es cofinal en A. Sigue que, según la definición b) de cofinalidad, también es cf[cf(A)] = cf(A).

- Sea A = α un *ordinal*. Si cf(α) = β, sea $\{\mu_\gamma\}$, $\gamma < \beta$, una familia indexada por β tal que sup(μ_γ) = α. Si cf(β) = δ, sea $\{\nu_\varepsilon\}$, $\varepsilon < \delta$, una familia indexada por δ tal que sup(ν_ε) = β. Entonces $\{\mu_{\nu_\varepsilon}\}$ es una familia indexada por δ tal que $\sup(\mu_{\nu_\varepsilon})$ = α. Nuevamente, cf[cf(α)] = cf(α).

[92] Como consecuencia de un resultado que veremos después (lema de König, 10. 5. c), resultará que es no numerable cof(**c**), siendo **c** el cardinal de los números reales. Nada puede afirmarse a priori, pues, sobre la cofinalidad de un ordinal límite no numerable.

f) Ordinales y cardinales regulares y singulares.

- Sea α un ordinal. Decimos que α es *regular* si $cf(\alpha) = \alpha$; si $cf(\alpha) < \alpha$, decimos que α es *singular*. Esta definición es aplicable también a los cardinales.

  - Como vimos, $cf(0) = 0$ y $cf(1) = 1$; éstos son los únicos ordinales finitos regulares, pues $cf(n) = 1 \ \forall \ n \in N, n \geq 1$.

  - También vimos que $cf(\aleph_0) = \aleph_0 \Rightarrow \aleph_0$, el primero de los cardinales infinitos, es un *cardinal regular*. Desde luego, también es regular ω, el primero de los ordinales infinitos.

  - Si α es un ordinal cualquiera, finito o infinito, entonces $cof(\alpha + 1) = 1$, pues $\{\alpha + 1\}$ es un subconjunto cofinal: *un ordinal infinito regular tiene que ser ordinal límite*.

  - De la ya probada igualdad $cf[cf(\alpha)] = cf(\alpha)$ sigue que *la cofinalidad de cualquier ordinal α es un ordinal regular*.

- Si κ es un cardinal infinito, entonces *cf(κ) es el mínimo cardinal j tal que hay una función no acotada de j en k*. Otra manera de caracterizar la cofinalidad de un cardinal k es: *cf(κ) = cardinalidad de la menor colección de conjuntos de cardinales estrictamente menores que k tales que su suma es κ*; más precisamente,

$$cf(k) = \text{ínf}\{card(I): k = \sum_{i \in I} \lambda_i \text{ , y } \forall i \ \lambda_i < k\}; I \neq \emptyset \text{, pues } \kappa = \bigcup_{i \in \kappa} \{i\}.$$

Esto ya implica inmediatamente que $cf(\kappa) \leq \kappa$.

- Debido a la condición de mínimo de la definición de cofinalidad, todo ordinal regular es el ordinal inicial de un cardinal: *los ordinales regulares son cardinales*.

- Cualquier límite de ordinales regulares es límite de ordinales iniciales, luego también inicial, aunque no necesariamente regular.

- Repitiendo lo dicho recién, pero usando la terminología cardinal, cualquier límite de ordinales regulares es límite de cardinales, luego es también un cardinal, aunque no todo cardinal es necesariamente regular:

  - La igualdad $cf(\omega) = \omega$ nos dice que ω es ordinal regular; $\aleph_0$, su cardinal asociado, también es regular. La regularidad de $\aleph_0$ también puede verse directamente, pues la suma cardinal de finitos cardinales finitos es finita. Suponiendo la validez del Axioma de Elección, $\omega_{\alpha+1}$ es regular $\forall \ \alpha$[93]; así, los ordinales 0, 1, ω, ω_n son regulares $\forall \ n \in N$, y por lo tanto cardinales[94].

---

[93] Ver 12. 3. 1. y 12. 3. 2. más abajo.

- 2, 3, ..., n $\forall$ n $\in$ $N_{\geq 2}$ y $\aleph_\omega$ son ordinales iniciales (cardinales) *singulares*; el caso finito es obvio, y para ver que $\aleph_\omega$ es singular basta observar que es unión de $\aleph_0$ cardinales estrictamente menores, i. e. los $\aleph_n$, n $\in$ N. $\aleph_\omega$, el menor cardinal singular y límite de los cardinales regulares $\aleph_n$, n $\in$ N, nos da un ejemplo de un hecho notable: si $\alpha > \beta$ son cardinales, puede ocurrir que $cf(\alpha) < cf(\beta)$: $\aleph_\omega > \aleph_n$ $\forall$ n $\in$ N, pero $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0 < \aleph_n$ $\forall$ n > 0.

- ω + 1 es el ordinal siguiente a ω; es singular, pues no es ordinal límite, y lo mismo pasa para ω + k $\forall$ $\in$ ω. ω + ω es el siguiente ordinal límite después de ω, y puede escribirse como límite de la sucesión ω, ω + 1, ω + 2, ω + 3, ... Esta sucesión tiene tipo ordinal ω, así que ω + ω es límite de una sucesión de tipo < ω + ω cuyos elementos son ordinales < ω + ω: *el ordinal límite ω + ω es singular*.

- $\aleph_1$ es el siguiente cardinal > $\aleph_0$, de modo que los cardinales < $\aleph_1$ son infinitos numerables o bien finitos. *Si aceptamos el axioma de elección*, la unión de numerables conjuntos numerables es numerable: $\aleph_1$ no puede escribirse como suma de un conjunto numerable de cardinales numerables, y por lo tanto es regular.

- $\aleph_\omega$ es el primer cardinal > $\aleph_i$ $\forall$ i $\in$ ω. Su ordinal inicial ω_ω es el límite de la sucesión ω, ω_1, ω_2, ω_3, ..., de tipo ordinal ω: ω_ω y $\aleph_\omega$ son *singulares*. *Si aceptamos el axioma de elección*, $\aleph_\omega$ es el primer cardinal singular (el primer *ordinal* infinito singular is ω+1). La demostración de la existencia de cardinales singulares exige el axioma de reemplazo (2. 5.), introducido por Fraenkel en 1922 precisamente para este fin; la teoría de conjuntos de Zermelo no era lo suficientemente fuerte para sustentar a estos cardinales.

- *Sin el axioma de elección* habría cardinales que no podrían bien-ordenarse y ni siquiera podría definirse el cardinal suma de una colección arbitraria. Además, la unión numerable de numerables no tiene por qué ser numerable si no contamos con (AC): es consistente con ZF que $\omega_1$sea límite de una sucesión numerable de conjuntos numerables. De hecho, Moti Gitik ha probado que la demostración de la existencia de alephs regulares distintos de $\aleph_0$ exige el axioma de elección. Los detalles están en *Elements of Set Theory*, de Herbert B. Enderton y en *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, de Kenneth Kunen.

- Probamos a continuación el hecho, de gran importancia, de que $\omega_{\alpha+1}$ es regular $\forall$ α:
  - **Lema 12. 3. 1**: Sean $\aleph_\alpha$, $\aleph_\beta$ cardinales, $\{A_\delta\}_{\delta<\omega_\beta}$ una familia de conjuntos con $|A_\delta| \leq \aleph_\alpha$ ($\delta < \omega_\beta$). Entonces $\left|\bigcup_{\delta<\omega_\beta} A_\delta\right| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta$.

[94] Los cardinales correspondientes son 0, 1, $\aleph_0$, $\aleph_n$ $\forall$ n $\in$ N.

Demostración. $|A_\delta| \leq \aleph_\alpha \Rightarrow \forall\ \delta\ \exists\ f_\delta$: $\omega_\alpha \to A_\delta$ suryectiva[95]. Juntando todas estas funciones, tenemos una suryección F: $\omega_\alpha \times \omega_\beta \to \bigcup_{\delta<\omega_\beta} A_\delta$, $F(\gamma, \delta) = f_\delta(\gamma)$. ▌

▪ **Teorema 12. 3. 2**: $\aleph_{\alpha+1}$ es regular, $\forall\ \alpha$.

Demostración. Supongamos que $\aleph_{\alpha+1}$ no es regular; entonces $cf(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_\beta$ con $\beta \leq \alpha$. Se tendrá, pues, que $\omega_{\alpha+1} = \bigcup_{\delta<\omega_\beta} \mu_\delta$ con $\mu_\delta \leq \omega_\alpha$ ($\delta < \omega_\beta$). Por 12. 3. 1 será entonces $|\omega_{\alpha+1}| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\alpha$, absurdo. ▌

Introducimos ahora definiciones y lemas que serán necesarios al estudiar los grandes cardinales, especialmente los medibles (17. 2. 7. 15.) y los de Mahlo (13. 3. 5.)[96].

12. 3. 3. Definición. Sea κ un *cardinal regular no numerable*. Un conjunto $C \subset \kappa$ es *cerrado y no acotado en* κ [cna(κ)[97]] si es no acotado en κ (es decir: si $\forall\ k \in \kappa\ \exists\ c \in C$: $c > k$) y contiene a todos sus puntos límite distintos de κ (cf. 4. 4. 6.). Un conjunto $S \subset \kappa$ es *estacionario* si $S \cap C \neq \varnothing\ \forall$ cna(κ) $C \subset \kappa$.

La condición sobre κ de ser un cardinal regular no numerable y, por lo tanto, de tener cofinalidad no numerable, se impone para evitar casos triviales: si cof(κ) es numerable, entonces $S \subset \kappa$ es estacionario sii $\kappa \setminus S$ es acotado en κ. En particular, si $\kappa = \omega = \aleph_0$, entonces S es estacionario sii $S \in F$, el filtro de Fréchet (8. 11.), y la intersección de dos estacionarios es siempre estacionaria. Este ya no es el caso si cof(κ) es no numerable: por un importante resultado de Robert Solovay[98], si κ es cardinal regular no numerable y $S \subset \kappa$ es estacionario, entonces S es unión disjunta de κ subconjuntos estacionarios disjuntos.

Un $C \subset \kappa$ no acotado es *cerrado* sii $\forall\ \{\alpha_\xi\}_{\xi<\gamma}$ de elementos de C y longitud $\gamma < \kappa$ se tiene lím $\xi \to \gamma\ (\alpha_\xi) \in C$.

12. 3. 4. Lema. C, $D \subset \kappa$, cna(κ) $\Rightarrow C \cap D$ cna(κ): la familia de los cna(κ) tiene la *propiedad de intersección finita* (pif)[99].

Demostración.

La clausura de $C \cap D$ es evidente; para ver la no acotación, sea $\alpha < \kappa$. Por la no acotación de C $\exists\ \alpha_1 \in C$: $\alpha < \alpha_1$ y, por la no acotación de D, $\exists\ \alpha_2 \in D$: $\alpha_1 < \alpha_2$. Continuando de tal forma construimos una sucesión creciente $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ de elementos alternativamente en C y D. Sigue que β = lím $i \to \omega\ (\alpha_i) \in C \cap D$, y $\beta > \alpha$. ▌

---

[95] Aquí usamos (AC). Esta demostración es, eencialmente, la del Lema 7. 12., donde probamos que la unión numerable de numerables es numerable.

[96] Fuente: Jech, Thomas J. *Set Theory*. Corrected 4th printing. Springer Monographs in Mathematics, 2006, p. 91 y ss.

[97] Estos son los llamados *club sets* o sencillamente *clubs* en la literatura inglesa (club = **cl**osed and **unb**ounded).

[98] Solovay. *Real-valued measurable cardinals*. En "Axiomatic Set Theory" (D. S. Scott, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967. También en Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, pp. 397–428.

[99] Es decir, toda subfamilia finita tiene interseción no vacía; ver (8. 11.).

El filtro generado[100] por los cna(κ) consta de todos los $X \subset \kappa$ que contienen un cna(κ); llamamos a éste el *filtro cerrado no acotado en κ*. Probamos a continuación un teorema importante:

12. 3. 5. Teorema. El filtro cerrado no acotado en κ es κ-completo.

Demostración.

Probemos, por inducción en $\gamma < \kappa$, que la intersección de una sucesión $\{C_\xi\}_{\xi<\gamma}$ de conjuntos cerrados y no acotados es cerrada y no acotada. El paso inductivo funciona en los ordinales sucesores, gracias a (12. 3. 5.). Si γ es ordinal límite supongamos que el teorema vale $\forall\ \alpha < \gamma$ y reemplacemos a cada C_α por $\bigcap_{\xi\leq\alpha} C_\xi$, obteniendo una sucesión decreciente y con la misma intersección. Así, podemos suponer que $C_0 \supset C_1 \supset ... C_\alpha \supset ...$ $(\alpha < \gamma)$ son cna(κ).

Sea $C = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ y probemos que es un cna(κ); la clausura es sencilla, y la omitimos. Para ver la no acotación, sea $\alpha < \kappa$; construimos una sucesión creciente $\{\beta_\xi\}_{\xi<\gamma}$ del siguiente modo: sea $\beta_0 \in C_0$: $\beta_0 > \alpha$, y para cada $\xi < \gamma$ sea $\beta_\xi \in C_\xi$: $\beta_\xi > \sup\{\beta_\nu$: $\nu < \xi\}$. Como κ es regular y $\gamma < \kappa$, tal sucesión existe y tiene límite $\beta < \kappa$. Para cada $\eta < \gamma$, $\beta = \text{lím}\ \{\beta_\xi\}_{\eta\leq\xi<\gamma} \subset C_\eta \Rightarrow \beta \in C_\eta \Rightarrow \beta \in C$. ▌

El filtro cerrado no acotado en κ, aunque κ-completo, no es en general un ultrafiltro, pues siempre hay un subconjunto estacionario en κ cuyo complemento también es estacionario; como en tantas ocasiones, el caso $\kappa = \aleph_0$ aclara los conceptos, aunque no sea numerable: un conjunto S estacionario en N (los números naturales) es sencillamente un conjunto infinito, y nada impide que su complemento también sea infinito; pensemos en el caso de los números pares y los impares. Por su parte, el caso $\kappa = \aleph_1$ es especial en exigir el uso del Axioma de Elección; sin (AC) es consistente respecto de los axiomas de grandes cardinales el hecho de que el filtro cerrado y no acotado de $\aleph_1$ es ultrafiltro[101]. Terminemos diciendo que el ideal dual del filtro cerrado no acotado en κ se llama el *ideal no estacionario de κ*. No tendremos ocasión de profundizar en este aspecto importante en Teoría de Conjuntos, al que Hugh Woodin, entre otros, hizo grandes contribuciones.[102]

12. 4. Lema de Zermelo.

Sean A_γ, B_γ indexados por $\{\gamma$: $\gamma < \omega_\beta\}$ tales que, $|A_\gamma| < |B_\gamma|\ \forall\gamma$; entonces, $\left|\bigcup_\gamma A_\gamma\right| < \left|\prod_\gamma B_\gamma\right|$.

---

[100] Ver (8. 10. 2.).

[101] Jech, Thomas. *Set Theory*. Corrected 4th printing. Springer Monographs in Mathematics, 2006, p. 94.

[102] Woodin, W. Hugh. *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*. Ser. Logic Appl., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1999.

Demostración. Si $\left|\bigcup_\gamma A_\gamma\right| \geq \left|\prod_\gamma B_\gamma\right|$, $\exists$ f: $\bigcup_\gamma A_\gamma \to \prod_\gamma B_\gamma$ suryectiva. Si $C_\gamma = \pi_\gamma f(A_\gamma)$[103], se tiene $|C_\gamma| \leq |A_\gamma| < |B_\gamma| \Rightarrow B_\gamma \backslash C_\gamma \neq \varnothing \Rightarrow \exists\ y = \{y_\gamma\}$[104] $\in \prod_\gamma B_\gamma$: $y_\gamma \in B_\gamma \backslash C_\gamma$, y por ser f suryectiva $\exists\ x \in \bigcup_\gamma A_\gamma$: f(x) = y. Entonces $x \in A_\delta$ para algún $\delta < \omega_\beta \Rightarrow y_\delta \in C_\delta = \pi_\delta f(A_\delta)$, mientras que $y_\delta \in B_\delta \backslash C_\delta$, absurdo. ▌

12. 5. Teorema. $\forall\ \alpha, \beta \in$ Ord:

a) $\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} > \aleph_\alpha$.

b) $\mathrm{cf}\left(\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$.

c) $\mathrm{cf}\left(2^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$[105].

Demostración.

a)

- Si $\alpha = 0$ o un ordinal sucesor, sabemos que $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$; entonces, por 10. 2. b), $\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.
- Si α es ordinal límite con $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\beta$, entonces $\omega_\alpha = \bigcup_{\gamma<\omega_\beta} \mu_\gamma$ con $\mu_\gamma < \omega_\alpha$ $\Rightarrow |\mu_\gamma| < \aleph_\alpha\ \forall\ \gamma < \omega_\beta$. Entonces, por el Lema de Zermelo 10. 4, $\aleph_\alpha = \left|\bigcup_{\gamma<\omega_\beta} \mu_\gamma\right| < \left|\prod_{\gamma<\omega_\beta} \omega_\alpha\right|$ $\leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

b)

Sea $\mathrm{cf}\left(\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}\right) = n \leq \aleph_\alpha$. Entonces $\aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$; por a),

$$\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} < \left(\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}\right)^{\mathrm{cf}\left(\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}\right)} = \left(\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}\right)^n = \aleph_\beta^{\aleph_\alpha \cdot n} = \aleph_\beta^{\aleph_\alpha}.$$

c)

Sale de b) haciendo $\beta = 0$ y teniendo en cuenta que, por 10. 2 b), es $\aleph_0^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$. ▌

El Lema de König prueba que la cofinalidad de **c** = $2^{\aleph_0}$ no es numerable, en contraste con la de $\Re$, que es ω (N es un subconjunto cofinal numerable); repitiendo lo dicho en [12. 3. d-4] más arriba, *la cofinalidad depende del orden*; distintos órdenes en el mismo conjunto pueden dar distintas cofinalidades.

Ahora estamos en condiciones de dar una completa descripción de la exponenciación cardinal, *si aceptamos la validez de HGC*.

---

103 la γ-ésima proyección de $f(A_\gamma)$.

104 aquí usamos AC para elegir un $y_\gamma \in B_\gamma \backslash C_\gamma$.

105 Éste es el Lema de König. *Zum Kontinuumproblem*. Math Ann 60, 1905, p. 177.

12. 6. Teorema. Si suponemos válida la Hipótesis Generalizada del Continuo, entonces:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \text{si} \quad \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1} & \text{si} \quad \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \le \aleph_\beta \le \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1} & \text{si} \quad \aleph_\beta \ge \aleph_\alpha \end{cases}.$$

Demostración.

a) Sea $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$; consideramos las tres posibilidades para el ordinal α:

- $\alpha = 0$; $\mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$; $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \Rightarrow \aleph_\beta < \aleph_0 \Rightarrow \aleph_\beta \in \mathrm{N}$, abs: el caso $\alpha = 0$ no puede darse.

- Si α es ordinal sucesor con $\alpha = \gamma + 1$, entonces $\aleph_\alpha$ es regular $\Rightarrow \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \Leftrightarrow \aleph_\beta < \aleph_\alpha = \aleph_{\gamma+1} \Rightarrow \aleph_\beta \le \aleph_\gamma$. *Por HGC*, $2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1} = \aleph_\alpha \Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \left(2^{\aleph_\gamma}\right)^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\gamma \cdot \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\gamma} = \aleph_\alpha$.

- Sea α ordinal límite, y probemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \le \aleph_\alpha$[106]. Como $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, para cualquier función f: $\omega_\beta \to \omega_\alpha$ debe ser $\sup[f(\omega_\beta)] := \sup\{f(\omega_\delta): \delta < \beta\} < \omega_\alpha$, pues en otro caso contradiríamos la minimalidad de $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. Sean: $\gamma < \alpha$, $A_\gamma = \{f: \omega_\beta \to \omega_\gamma\}$, $A = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$. Consideramos dos casos:
  - $\gamma < \beta \Rightarrow |A_\gamma| = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$ = [por 10. 2. b)]: $2^{\aleph_\beta}$ = (por HGC): $\aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$, pues $\beta < \alpha$ y α es ordinal límite.
  - $\gamma \ge \beta \Rightarrow |A_\gamma| = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \le$ [por 10. 2. c)]: $2^{\aleph_\gamma}$ = (por HGC): $\aleph_{\gamma+1} < \aleph_\alpha$, pues $\gamma < \alpha$ y α es ordinal límite.

Entonces, por el Lema de Zermelo 10. 4, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |A| \le \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

b) Sea $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \le \aleph_\beta \le \aleph_\alpha$. Entonces $\aleph_\alpha$ < [por 10. 5. b)]: $\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \le$ [por 10. 2. c)]: $2^{\aleph_\alpha}$ = (por HGC): $\aleph_{\alpha+1}$. Como $\aleph_{\alpha+1}$ es el cardinal siguiente a $\aleph_\alpha$, debe ser $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.

c) Sea $\aleph_\beta \ge \aleph_\alpha$. Entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ = [por 10. 2. a)]: $2^{\aleph_\beta}$ = (por HGC): $\aleph_{\beta+1}$. ▌

12. 7. El Problema de los Cardinales Singulares.

La *función del continuo* $\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha}$ está sometida a dos severas restricciones, la primera de ellas bastante obvia:

[106] la otra desigualdad es obvia.

- $\alpha \leq \beta \Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}$.
- El Lema de König: $cf\left(2^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$ [10. 5. c)].[107]

W. J. Easton probó en 1964[108] que, con (ZFC), esto es todo lo que puede decirse de la función del continuo para el caso de los *cardinales regulares*: si existe una función P: RCard[109] $\rightarrow$ Card tal que:

$$a)\ \alpha \leq \beta \Rightarrow P(\aleph_\alpha) \leq P(\aleph_\beta);$$

$$b)\ cf[P(\aleph_\alpha)] > \aleph_\alpha,$$

entonces P es la función del continuo restringida a RCard. El *Problema de los Cardinales Singulares* (PCS), aún no resuelto al día de hoy, es el de averiguar todas las condiciones que debe cumplir la función del continuo cuando $\aleph_\alpha$ es singular. Aquí veremos dos de esas condiciones, y haremos algunos comentarios.

12. 7. 1. Sean I un conjunto infinito, $\{\mathbf{n}_i\}_{i\in I}$ una familia de cardinales no nulos indexada por I, y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos con $|A_i| = \mathbf{n}_i$.

- Definimos la *suma infinita* de los $\mathbf{n}_i$ como: $\sum_{i\in I} \mathbf{n}_i = |A|$, siendo A = $\bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$. Vale que $|A| = |I| \cdot \sup(\mathbf{n}_i)$:
  - $|A| \leq |I| \cdot \sup(\mathbf{n}_i)$: Sea B = $\bigcup_{i\in I} A_i$; entonces $|B| = \sup(\mathbf{n}_i)$.

Tenemos que

$$|I| \cdot \sup(\mathbf{n}_i) = |I \times B| = |B \times I|.$$

Como $|B| \geq |A_i|\ \forall$ i, existen inyecciones f_i: $A_i \rightarrow B$; definimos entonces una inyección f: A $\rightarrow$ I $\times$ B, del siguiente modo: a $\in$ A $\Rightarrow \exists$ i $\in$ I: a = $\{a_i\} \times \{i\}$, con $a_i \in A_i$. Entonces, $f(a) =: f_i(a_i) \times \{i\}$.

  - $|A| \geq |I| \cdot \sup(\mathbf{n}_i)$: Sea B un conjunto tal que $|B| = \sup(\mathbf{n}_i)$.

Tenemos que

$$|I| \cdot \sup(\mathbf{n}_i) = |I \times B| = |B \times I|.$$

Como $|B| \geq |A_i|\ \forall$ i, existen inyecciones f_i: $A_i \rightarrow B$; definimos entonces una inyección f: A $\rightarrow$ I $\times$ B, del siguiente modo: a $\in$ A $\Rightarrow \exists$ i $\in$ I: a = $\{a_i\} \times \{i\}$, con $a_i \in A_i$. Entonces, $f(a) =: f_i(a_i) \times \{i\}$.

---

[107] Dos consecuencias de esto son: a) $2^{\aleph_0}$ no puede ser $\aleph_\omega$, pues $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$. b) $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.

[108] W. J. Easton. *Powers of Regular Cardinals*. The Journal of Symbolic Logic 1964. Reeditado en Ann. Math. Logic, 1 (1970), 139-178.

[109] La clase de todos los cardinales regulares.

- Definimos el *producto infinito* de los $\mathbf{n}_i$ como: $\prod_{i\in I}\mathbf{n_i}$ = | B | , siendo B = $\prod_{i\in I} A_i$ = {funciones de elección f: I $\to \bigcup_{i\in I} A_i$}. Vale que $2^{\sum_{i\in I} n_i} = \prod_{i\in I} 2^{n_i}$; para probarlo, establecemos una biyección f: P(A) $\to$ P(B):
  - $2^{\sum_{i\in I} n_i} = 2^{|A|}$ = | P(A) | = | P($\bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$) |.
  - B = $\prod_{i\in I} A_i \Rightarrow$ P(B) = P($\prod_{i\in I} A_i$) = $\prod_{i\in I} P(A_i)$.
  - Sea S $\in$ P(A) = P($\bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$); entonces S = $\bigcup_{i\in I}(S_i \times \{i\})$, con $S_i \subseteq A_i$. Definimos f(S) = $\prod_{i\in I} S_i \in \prod_{i\in I} P(A_i)$ = P($\prod_{i\in I} A_i$) = P(B).
  - Sea T = $\bigcup_{i\in I}(T_i \times \{i\})$, $T_i \subseteq A_i$; T $\neq$ S $\Rightarrow \exists$ i $\in$ I: $T_i \neq S_i \Rightarrow$ f(T) = $\prod_{i\in I} T_i \neq \prod_{i\in I} S_i$ = f(S): f es *inyectiva*.
  - Sea R $\in$ P(B) = P($\prod_{i\in I} A_i$); entonces R = $\prod_{i\in I} R_i$, con $R_i \subseteq A_i$. Se tiene R = f(S), S = $\bigcup_{i\in I}(R_i \times \{i\})$: f es *suryectiva*.

12. 7. 2. Definición. si α es un *ordinal límite*, $2^{<\aleph_\alpha}$:= $\sup\{2^{\aleph_\beta} : \beta < \alpha\}$. Si vale (HGC), entonces $2^{<\aleph_\alpha}$ = sup{$\aleph_{\beta+1}$: $\beta < \alpha = \aleph_\alpha$}.

12. 7. 3. Lema. Si α es un ordinal límite, entonces $2^{\aleph_\alpha} = \left(2^{<\aleph_\alpha}\right)^{cf(\aleph_\alpha)}$.

Demostración. Sea κ = cf($\aleph_\alpha$) = cf(α). Entonces $\aleph_\alpha = \sup_{i<\kappa}\aleph_{\alpha_i}$, $\alpha_i < \alpha$, i < κ. Será $\aleph_\alpha$ = máx{κ, $\aleph_\alpha$} = $\kappa\cdot\aleph_\alpha$ = $\sum_{i<\kappa}\aleph_{\alpha_i}$ [ver 10. 7. a)]. Se tiene: $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\sum_{i<\kappa}\aleph_{\alpha_i}} = \prod_{i<\kappa} 2^{\aleph_{\alpha_i}} \le \prod_{i<\kappa} 2^{<\aleph_\alpha} = \left(2^{<\aleph_\alpha}\right)^\kappa \le \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^\kappa = 2^{\aleph_\alpha\cdot\kappa} = 2^{\aleph_\alpha}$. ▌

Aparte de las condiciones recién estudiadas, la función del continuo debe satisfacer, como mínimo, lo enunciado en los dos teoremas siguientes[110]:

12. 7. 4. Teorema (Bukovsky[111] & Hechler[112]). Sea $\aleph_\alpha$ un cardinal singular tal que la función del continuo en [0, $\aleph_\alpha$) es finalmente constante, i. e. $\exists\ \beta < \alpha$: $\forall\ \gamma \in [\beta, \alpha)$ es $2^{\aleph_\gamma} = 2^{\aleph_\beta}$. Entonces $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta}$

---

[110] El conjunto completo de condiciones que caracterizarían a la función del continuo es aún desconocido.

[111] L. Bukovsky: *The Continuum Problem and Powers of Alephs*. Comment. Math. Univ. Carolinae, 6 (1965), 181-197.

Demostración. Sean $\kappa = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, $\gamma = \text{máx}\{\kappa, \beta\}$. Entonces por 10. 7. c) es $2^{\aleph_\alpha} = \left(2^{<\aleph_\alpha}\right)^\kappa$. Por hipótesis se tiene $\left(2^{<\aleph_\alpha}\right)^\kappa = \left(2^{\aleph_\gamma}\right)^\kappa$, pues $\gamma \geq \beta$. A su vez, $\gamma \geq \kappa \Rightarrow \left(2^{\aleph_\gamma}\right)^\kappa = 2^{\aleph_\gamma}$. Finalmente, $2^{\aleph_\gamma} = 2^{\aleph_\beta}$ por hipótesis. ▌

12. 7. 5. Teorema (Silver[113]). Sea $\aleph_\alpha$ un cardinal singular con $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Entonces $\aleph_\alpha$ no puede ser el primer punto en el que falla la HGC, es decir: $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ $\forall\ \beta < \alpha \Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. ▌

La hipótesis $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ en 12. 7. 5. es necesaria, pues Magidor probó[114] (suponiendo que existe un cardinal enorme *–huge cardinal–* mayor que un cardinal súpercompacto) que ZFC es consistente
con

$$\begin{cases} 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} & (n < \omega) \\ 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2} \end{cases}.$$

---

[112] S. H. Hechler: *Powers of singular cardinals and a strong form of the negation of the generalized continuum hypothesis*. Z. Math. Logik Grundlagen Math., 19 (1973), 83-84.

[113] No demostramos este teorema. Ver J. Silver: *On the Singular Cardinals Problem*. Proc. Int. Cong. Math. Vancouver (1974), pp. 265-268. Reproducido en Sacks (ed.): Mathematical Logic In The 20th Century, pp. 435-438.

[114] M. Magidor. *On the Singular Cardinals Problem II*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 106, Nº. 3 (Nov., 1977), pp. 517̃547.

Secciones 13 y 14.

13. Grandes Cardinales.
14. Constructibilidad.

13. Grandes Cardinales.

13. 1. Una manera de construir un cardinal bastante grande es la siguiente: consideremos la sucesión

$$\begin{cases} \alpha_0 = \aleph_0 \\ \alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n} \quad (n \in \omega) \end{cases},$$

y definamos $\alpha = \sup_{n\in\omega}\alpha_n$. Este cardinal, que cumple con la notable igualdad $\aleph_\alpha = \alpha$, es, sin embargo, relativamente pequeño: su cofinalidad es numerable. Nos proponemos construir cardinales "realmente" grandes.

13. 2. Cardinales Inaccesibles.

13. 2. 1. Definiciones. Repetimos y ampliamos las definiciones de (10. 3. f). Un cardinal $\aleph_\alpha$ es:

1. *regular* si $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$.
2. *singular* si $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) < \aleph_\alpha$; ejemplo: $\aleph_\omega$; éste es el menor cardinal (infinito) singular.
3. un *cardinal límite débil* (*cld*) si α es ordinal límite, o sea si $\aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$ $\forall$ $\beta < \alpha$; ejemplo: también $\aleph_\omega$.
4. un *cardinal límite fuerte* (*clf*) si $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha \, \forall \, \beta < \alpha$.

Observaciones:

- Vale que (clf) $\Rightarrow$ (cld), y (HGC) $\vdash$ [(clf) $\Leftrightarrow$ (cld)].

- Como hemos visto, $\aleph_\omega$ es el menor cld; también vale que *todo cardinal singular es un cld*: si

α no es ordinal límite, entonces $\alpha = 0$ o $\alpha = \beta + 1$ para algún β; sabemos que $\aleph_0$ es regular, y $\aleph_{\beta+1}$ es regular por 10. 3. f).

Queremos saber si vale la recíproca de la última proposición, es decir si todo cld es singular; aunque esta cuestión está sin decidir, no parece que tal sea el caso, como veremos a continuación.

13. 2. 2. Definiciones. Un cardinal *regular y no numerable* es:

1. *débilmente inaccesible* (cdi) si es un cld.

2. *fuertemente inaccesible* (cfi) si es un clf.

Observaciones:

- Vale que (cfi) $\Rightarrow$ (cdi), y (HGC) $\vdash$ [(cfi) $\Leftrightarrow$ (cdi)][115].

- Justificamos la definición si pensamos que, hasta ahora, "accedíamos" a un cardinal "grande" **a** de dos maneras:

    - tomando límites de sucesiones transfinitas de longitud < **a** de cardinales < **a**; en ese caso, **a** es un cld o un clf, pero cf(**a**) < **a**, es decir **a** no es regular.
    - haciendo **a** = $\aleph_{\beta+1}$ en el caso débil, o **a** = $2^{\aleph_\beta}$ en el caso fuerte; en ambos casos **a** es regular, pero no es cld ni clf, respectivamente.

Si **a** cumple la definición, entonces no "accedemos" a él de ninguna de las dos maneras descriptas, es decir, es "inaccesible".

- Notemos que $\aleph_0$ sirve de modelo a esta definición:

    - tomando "límites" de sucesiones de longitud < $\aleph_0$ (es decir, finitas) de cardinales < $\aleph_0$ (es decir, de números naturales), obtenemos un cardinal (número natural) **a**, que no es regular salvo para los casos **a** = 0 o **a** = 1.

    - Si $\beta < \aleph_0$ (es decir, si es un número natural) entonces, ni haciendo **a** = β+1 en el caso débil, ni haciendo **a** = 2^β en el caso fuerte, "accedemos" a $\aleph_0$, que es "inaccesible" para los números naturales.

Para evitar que la definición de cardinal inaccesible sea trivial, se exige que tal cardinal sea no numerable.

Habíamos empezado esta sección construyendo un cardinal bastante "grande", α, tal que $\aleph_\alpha = \alpha$. Este cardinal no es inaccesible, por ser singular (no es numerable, pero su cofinalidad sí). No sabemos si existen inaccesibles[116], pero todo inaccesible debe tener la propiedad señalada:

13. 3. 3. Teorema. Si $\aleph_\kappa$ es débilmente inaccesible, entonces $\aleph_\kappa = \kappa$.

Demostración.

a) $\aleph_\kappa$ regular $\Rightarrow \aleph_\kappa = \mathrm{cf}(\aleph_\kappa)$.

b) κ ordinal límite $\Rightarrow \mathrm{cf}(\aleph_\kappa) = \mathrm{cf}(\kappa) \leq \kappa \leq \aleph_\kappa$. Sigue $\kappa = \aleph_\kappa$. ▌

Ahora podremos caracterizar a los inaccesibles, *suponiendo la validez de HGC*:

13. 3. 4. Teorema. Un cardinal κ es inaccesible sii $\sum_{\lambda<\kappa} \kappa^\lambda = \kappa$.

---

[115] No estamos afirmando que los cdi's y los cfi's *existan*; sólo evaluamos las consecuencias que tendría su existencia.

[116] Ver 13. 7. más adelante.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea κ inaccesible; si $\lambda < \kappa$, entonces $\lambda < cf(\kappa)$ pues κ es regular $\Rightarrow$ (por 10. 6): $\kappa^\lambda = \kappa \Rightarrow \sum_{\lambda<\kappa}\kappa^\lambda = \sum_{\lambda<\kappa}\kappa = \kappa\cdot\kappa = \kappa$.

$\Leftarrow$) κ ordinal límite *no* inaccesible $\Rightarrow$ (por HGC): κ ordinal límite no *débilmente* inaccesible $\Rightarrow \kappa$ singular $\Rightarrow cf(\kappa) < \kappa \Rightarrow \sum_{\lambda<\kappa}\kappa^\lambda \geq \kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$. ▌

Vemos, pues, que los inaccesibles quedan caracterizados, entre los cardinales límite, como los puntos fijos de una cierta "función" f: Card $\rightarrow$ Card, $f(\kappa) = \sum_{\lambda<\kappa}\kappa^\lambda$. Otros tipos de cardinales grandes se definen de igual manera como puntos fijos de funciones adecuadas.

13. 3. 5. Cardinales de Mahlo. Sea κ un cardinal inaccesible. El conjunto de todos los cardinales menores que κ es un conjunto no acotado de κ

13. 3. 5. 1. Definición. Un cardinal κ es *de Mahlo* [117] si es inaccesible y el conjunto $U = \{\lambda < \kappa$: λ es inaccesible$\}$ es estacionario (12. 3. 3.) en κ. El cardinal κ es *Mahlo débil* si es débilmente inaccessible y el conjunto $V = \{\lambda < \kappa$: λ es débilmente inaccessible$\}$ es estacionario en κ.

Es útil el siguiente lema, que no demostramos:

13. 3. 5. 2. Lema.

- Un cardinal κ es Mahlo débil sii es ordinal límite y el conjunto $W = \{\lambda < \kappa$: λ es ordinal regular$\}$ es estacionario en κ.
- Si κ es Mahlo débil y además clf (13. 2. 1.), entonces κ es Mahlo. ▌

No podemos dedicar a los cardinales de Mahlo el espacio que merecen. Digamos, sí, que son realmente "grandes" cardinales, que llevan mucho más allá la noción del cardinal inaccesible: en una de las borgianas *casi terribles dinastías*[118], tenemos los cardinales híper-inaccesibles, híper-híper-inaccesibles, etc., de tamaños cada vez mayores. Los cardinales de Mahlo son α-inaccesibles, para cualquier grado de inaccesibilidad $\alpha \in$ Ord. Los detalles se ven en Drake, Frank. *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 76, 1974, Elsevier Science Ltd.

13. 4. La Jerarquía Acumulativa[119].

---

[117] Mahlo, Paul:

- *Über lineare transfinite Mengen*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse 63 (1911): 187–225.
- *Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse 64(1912): 108–112.

[118] " ... la palabra infinito ... es una ... finísima concepción en las matemáticas –Russell explica ... el por qué de sus dinastías casi terribles– ... " Jorge Luis Borges. *El idioma de los argentinos* (1928).

[119] Fuentes:

El *universo V de von Neumann*, ordenado según la *jerarquía acumulativa de von Neumann* o *jerarquía acumulativa de conjuntos* V_α, $\alpha\in$ **Ord** que definiremos a continuación, es la clase de los conjuntos bien fundados (2. 9., 3. 5. 3.) Esta colección, formalizada por la teoría (ZFC) de conjuntos de Zermelo–Fraenkel + (AC), se usa a menudo para interpretar o motivar los axiomas of ZFC (2. y ss.).

13. 4. 1. Definimos la *jerarquía acumulativa de conjuntos* V_α, $\alpha\in$ **Ord**, por inducción transfinita (4. y ss.):

i) $V_0 = \varnothing$.

ii) $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$.

iii) $V_\mu = \bigcup_{\alpha<\mu} V_\alpha$ si μ es ordinal límite.

13. 4. 2. Teorema. $V = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Ord}} V_\alpha$.

Demostración. Sea $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Ord}} V_\alpha$; definiremos otro conjunto con la misma propiedad, y cumpliendo con $y \subseteq \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Ord}} V_\alpha$. Si $x \subseteq \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Ord}} V_\alpha$, hacemos $y = x$. Si no, procedemos del siguiente modo:

- Formamos la *clausura $\in$-transitiva*, t, de x en tres etapas:
  1. $t_0 = x$.
  2. $t_{n+1} := \bigcup t_n := \bigcup_{u\in t_n} u$.
  3. $t := \bigcup_{n\in\omega} t_n = \bigcup \{x, \bigcup x, \bigcup\bigcup x, \bigcup\bigcup\bigcup x, \dots\}$.

Con esto, t es es el menor conjunto $\in$-transitivo que contiene a x[120].

- Sea $s \in t \setminus \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Ord}} V_\alpha$; s es un conjunto por el Axioma de

Subconjuntos (t es conjunto), y $s \neq \varnothing$ pues $x \in s$. Por el Axioma de Fundamentación

---

- Ciesielski, Krzysztof. *Set Theory for the Working Mathematician*. London Mathematical Society Student Texts 39, 2000.
- Devlin, Keith J. *Constructibility*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
- Devlin, Keith J. *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer-Verlag, 1991.
- Dixon, P. G. *Set Theory*. Lecture Notes, 1998-99.
- Enderton, Herbert B. *Elements of Set Theory*. Academic Press. New York, San Francisco, London, 1977.
- Jech, Thomas J. *Lectures in Set Theory, with Particular Emphasis on the Method of Forcing*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- Woodin, W. Hugh. *The Continuum Hypothesis, Part I*. Notices of the AMS, Vol. 48, Nº 6, Junio/Julio 2001, pp. 567-576.

[120] Es más común hablar de *clausura transitiva* en vez de clausura $\in$-transitiva; cf. 13. 6. 2.

(AF), $\exists$ y $\in$ s: y $\cap$ s = $\varnothing$. Por la construcción de t, se tiene y $\subseteq$ t $\Rightarrow$ y \ $\bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$ = y $\cap$ s = $\varnothing$ $\Rightarrow$ y $\subseteq \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$. Por la definición de s, tenemos que y $\notin \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$.[121]

- Si hacemos $y_\alpha = y \cap V_\alpha$, $\alpha \in$ **Ord**, se tiene $y = \bigcup_{\alpha \in Ord} y_\alpha$. Esta es la

situación descripta en 6. 1, de modo que la sucesión $\{y_\alpha\}$ es finalmente constante $\Rightarrow \exists$ $\beta \in$ Ord: $y \subseteq V_\beta \Rightarrow y \in V_{\beta+1}$, absurdo porque $y \notin \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$. ▌

Ahora que sabemos que todo conjunto en V está bien fundado, podemos definir su rango. El *rango* de un conjunto bien fundado A se define inductivamente como el mínimo ordinal mayor que los rangos de todos los elementos de A; el rango de $\varnothing$ es 0, y el rango de todo ordinal α es el mismo α; podríamos caracterizar también al rango de A como el *mínimo ordinal α tal que $A \subseteq V_\alpha$*. Los conjuntos de V, pues, aparecen clasificados en una jerarquía transfinita, basada en el rango de sus elementos. Un rasgo crucial de esta clasificación es que existe una fórmula φ(α,x) en el lenguaje de (ZFC) que define al hecho de que "*el conjunto x está en V_α*".

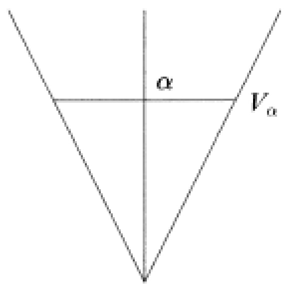

Ilustración de la jerarquía acumulativa.

c) **Teorema.** Sea κ el primer cardinal inaccesible. Entonces:

1. $|V_\alpha| < \kappa \ \forall \ \alpha < \kappa$.

2. $|V_\kappa| = \kappa$.

Demostración.

1. Inducción en α:
   - $|V_0| = |\varnothing| = 0 < \kappa$.
   - $|V_\alpha| = \mathbf{n} < \kappa \Rightarrow |V_{\alpha+1}| = 2^{\mathbf{n}} < \kappa$, pues κ es clf.
   - Sea α ordinal límite, y supongamos que $|V_\beta| < \kappa \ \forall \ \beta < \alpha$.

Entonces $|V_\alpha| = \sup_{\beta<\alpha} |V_\beta| \leq \kappa$. Si se diera la igualdad, se tendría cf(κ) $\leq \alpha < \kappa$, absurdo porque κ es regular.

[121] Si hubiésemos enunciado (AF) en la forma "Toda *clase* no vacía tiene un elemento que es disjunto de ella", entonces habríamos llegado a esta etapa más rápidamente aplicando (AF) directamente a t \ $\bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$. Lo que hemos hecho es, esencialmente, probar una proposición acerca de *clases*. Usamos la forma conjuntista en nuestra axiomatización porque (ZF) no permite, formalmente, el uso de clases como variables.

2. $V_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} V_\alpha \Rightarrow |V_\kappa| \leq \kappa\cdot\kappa = \kappa$, por 10. 3. 1. Recíprocamente, $|V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha| \geq 1$ ($\alpha < \kappa$) $\Rightarrow |V_\kappa| \geq \kappa$. ▌

13. 5. Modelos de Teoría de Conjuntos.

Sea L un **lenguaje**, i. e. un conjunto de predicados distinguidos[122]. Una **sentencia** es una fórmula admisible[123], y una **teoría** es un conjunto de sentencias en el cálculo de predicados con igualdad y los predicados distinguidos del lenguaje.

13. 5. 1. Definición. Un **modelo** para el lenguaje L es un conjunto M junto con una relación P^M correspondiente a cada uno de los predicados del lenguaje (usualmente suprimiremos los superíndices). Un modelo M será un modelo para la teoría T si, cada vez que las sentencias se interpretan en el modelo M usando las relaciones P^M para los predicados P, obtenemos sentencias verdaderas[124]. En tal caso escribimos M ~ T ("M **satisface** a T").[125] Por lo tanto, un modelo de la teoría de conjuntos es un par $\mathrm{M} = (M, E)$ que consiste de una *clase propia* (aquí alteramos levemente la definición) y una relación binaria *E* sobre *M* que corresponde al predicado binario $\in$.

13. 5. 2. Definición. Un modelo $\mathrm{M} = (M, E)$ de la teoría de conjuntos es un **$\in$-modelo** si $E = \in \cap M^2$, o sea si los elementos de M son conjuntos. El $\in$-modelo es **transitivo** si M es una clase $\in$- transitiva, i. e. $x \in y \in M \Rightarrow x \in M$[126]. Íntimamente ligada a estas ideas es la noción de *clausura transitiva* de un conjunto X: cltr(X) = $\bigcap$ {Y: Y es transitivo y $X \subseteq Y$} (cf. 13. 5. b).

Sea κ un cardinal infinito. Definimos su *altura transitiva*

$$H(\kappa) = \{X: \#[\mathrm{cltr}(X)] < \kappa\}.$$

Todo conjunto pertenece a $H(\kappa)$ para algún κ lo suficientemente grande. Si valen los axiomas de ZF, esta afirmación equivale a (AC)[127]. $H(\kappa)$ adquirirá gran importancia a partir del §17, cuando estudiemos la ampliación del sistema axiomático (ZFC) para resolver la Hipótesis del Continuo.

---

[122] Por ejemplo, el lenguaje de la teoría de conjuntos consta del predicado binario distinguido "$\in$", y el lenguaje de la teoría de anillos cuenta con los dos predicados distinguidos "+" y "·".

[123] Recordamos que, del estudio de la Lógica Matemática, sabemos que hay una definición inductiva para este concepto.

[124] Nuevamente, la noción de "interpretación" admite una definición inductiva rigurosa, tal como se ve en los cursos de Lógica Matemática.

[125] Por ejemplo, si T consta de los axiomas de anillo en el lenguaje de la teoría de anillos, entonces un modelo de T es simplemente un anillo.

[126] Equivalentemente, la $\in$-transitividad puede caracterizarse así: $x \in M \Rightarrow x \subset M$.

[127] No probaremos este hecho.

¿Hay modelos que sean *conjuntos* y no clases? La respuesta es afirmativa, si valen ciertas hipótesis. En (13. 6. 1.) damos un ejemplo, y ampliamos el estudio de esta cuestión en (15. 3.). Ahora nos gustaría dar ejemplos de *conjuntos* que modelan parcialmente a (ZFC), al cumplir algunos de sus axiomas.

13. 5. 2. 1. Modelos para Ciertos Axiomas o sus Negaciones.

a) Axioma de Extensionalidad (AE; 2. 1.).Podemos decir que una estructura (M, E) $\sim$ (AE) si

$$(\forall a \in M\ \forall b \in M)\ ((\{c \in M: (c, a) \in E\} = \{c \in M: (c, b) \in E\}) \Rightarrow a = b).$$

Ejemplos:

1. (R, <) es un modelo para (AE): si el conjunto de todos los números reales menores que a es igual al conjunto de todos los números reales menores que b, podemos concluir que a = b.

2. Sea $E \subset N \times N$, $E = \{(n, m): \exists$ p primo: $\left(\left(p^{n+1} \mid m\right) \wedge \neg\left(p^{n+2} \mid m\right)\right)\}$; esto asocia a cada número natural > 1 el conjunto de los exponentes de su factorización en primos, rebajados en 1. Por ejemplo, $666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$ está relacionado con el conjunto {0, 1} o, lo que es lo mismo, $(0, 666) \in E$, $(1, 666) \in E$ y $(a, 666) \notin E\ \forall a \in N$. Es evidente que (N, E) no es un modelo para (AE): $245 = 5 \cdot 7^2$ también está relacionado con el conjunto {0, 1}, y $245 \neq 666$.

b) Axioma de Infinitud (AI; 2. 8.).Podemos decir que una estructura (M, E) $\sim$ (AI) si

$$\exists x: ((\varnothing, x) \in E \wedge \forall y((y, x) \in E \Rightarrow (S(y), x) \in E).$$

Un ejemplo muy importante de estructura que cumple con todos los axiomas de (ZFC) *excepto* (AI) es $V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ (ver 13. 5.). Todo $x \in V_\omega$ es un conjunto *finito*, luego (AI) no vale en V_ω. Volveremos a este ejemplo en (17. 1.).

13. 5. 3. Definición. Los **cuantificadores restringidos** son expresiones de la forma $(\exists x \in X)$, $(\forall x \in X)$. Una fórmula ϕ es una **fórmula restringida** si todos sus cuantificadores son restringidos.

13. 5. 4. Lema. Si *M* es un modelo transitivo y ϕ es una fórmula restringida, entonces $\forall \{x_i\}_{i=1}^n \in M$ vale que

$$M \sim \phi(\{x_i\}_{i=1}^n) \Leftrightarrow \phi(\{x_i\}_{i=1}^n). \quad \text{......} \quad (9)$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Inducción en l, la longitud de ϕ:

- $l = 1 \Rightarrow [\phi(x, y) = (x = y) \wedge \phi(x, y) = (x \in y)]$; en ambos casos ϕ es válida porque en el modelo se tiene la igualdad y la pertenencia.

- Si ϕ es de la forma $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, ó $\alpha \Rightarrow \beta$ con $l(\alpha)$ y $l(\beta)$ menores que $l(\phi)$, entonces por h. i. $M \sim \alpha(\{x_i\}_{i=1}^n), \beta(\{x_i\}_{i=1}^n) \Rightarrow \alpha(\{x_i\}_{i=1}^n), \beta(\{x_i\}_{i=1}^n)$.
- Sea $\phi(X, y, ...)$ de la forma

$$(\exists x \in X)\psi(x, X, y, ...) \qquad (10)$$

o

$$(\forall x \in X)\psi(x, X, y, ...). \qquad (11)$$

$l(\psi) < l(\phi) \Rightarrow$ (9) vale para ϕ. Como $\forall \equiv \neg\exists\neg$, basta probar que (9) vale para la expresión (10). Se tiene

$$[M \square \phi(X, y, ...)] \equiv$$
$$\equiv [M \square \exists x\, (x \in X \wedge \psi(x, X, y, ...)] \equiv \text{(por hipótesis inductiva):}$$
$$\equiv [(\exists x \in M)(x \in X \wedge M \square \psi(x, X, y, ...)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(\exists x \in M)(x \in X \wedge \psi(x, X, y, ...)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(\exists x \in X)(\psi(x, X, y, ...)] \Rightarrow \phi(X, y, ...).$$

$\Leftarrow$) Sea $\phi(X, y, ...) \Rightarrow [(\exists x \in X)(\psi(x, X, y, ...)]$. Aquí, $X, y, ... \in M$, pero no sabemos si $x \in M$; pero M transitivo $\Rightarrow [(x \in X \in M) \Rightarrow (x \in M)] \Rightarrow [(\exists x \in M)(x \in X \wedge \psi(x, X, y, ...)]$. ▌

13. 5. 5. Corolario. Todo modelo transitivo satisface el Axioma de Extensionalidad y el Axioma de Fundamentación.

Reescribimos (AE) y (AF) como fórmulas restringidas:

$$\text{(AE)}: \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$$

se convierte en

$$((\forall z \in x)(z \in y) \wedge (\forall z \in y)(z \in x)) \Rightarrow x = y.$$

$$\text{(AF)}: \exists y(y \in x) \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$$

se convierte en

$$(\exists y \in x)(y = y) \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \notin y).$$

13. 6. Independencia de la Existencia de Inaccesibles.

13. 6. 1. Teorema. (ZFC). Si κ es el primer cardinal inaccesible, entonces V_κ es un $\in$- modelo transitivo para ZFC+($\neg$($\exists$ cardinales inaccesibles)). Observemos que V_κ es un *conjunto*.

Demostración. Es fácil probar por inducción transfinita que V_α es $\in$-transitivo $\forall \alpha \in$ Ord. Sea $M = V_\kappa$; como M es $\in$-transitivo, en M valen (AE) y (AF) por 11. 6. 5. Hay que probar que en M valen los otros axiomas de ZFC:

- (AS) $\exists y \forall z(z \in y) \Leftrightarrow (z \in x \wedge P(z))$: dado $x \in M$, (AS) en V nos da un conjunto y; hay que probar que $y \in M$. Ahora

$$x \in M \Rightarrow \exists\, \alpha \in \text{Ord}: \alpha < \kappa \wedge x \in V_\alpha.$$

Como V_α es transitivo, $z \in x \Rightarrow z \in V_\alpha \Rightarrow y \subseteq V_\alpha \Rightarrow y \in V_{\alpha+1} \subseteq M \Rightarrow M \approx$ (AS).

- (AR) No lo probamos.

- (AP) $\forall x \exists p \forall y((y \subseteq x) \Rightarrow y \in p)$. La validez de este axioma se debe, esencialmente, al

siguiente hecho: $x \in M \Rightarrow \exists \alpha \in Ord: \alpha < \kappa \wedge x \in V_\alpha \Rightarrow P(x) \in V_{\alpha+1} \subseteq M$. Sin embargo, este argumento oculta una sutileza: debemos comprobar que, $\forall x \in M$, P(x) dentro del modelo significa lo mismo que P(x) en V. Para esto, hay que comprobar que $\forall$ x, y $\in$ M,

$$(M \approx y \subseteq x) \Leftrightarrow (y \subseteq x).$$

Ahora: "$M \approx y \subseteq x$" significa que, $\forall u \in M$, $u \in y \Rightarrow u \in x$, mientras que "$y \subseteq x$" significa lo mismo, pero en V. La equivalencia de ambos hechos proviene de la transitividad de M, pues

$$u \in y \subseteq x \in M \Rightarrow u \in x \in M \Rightarrow u \in M.$$

- (AV): $\exists x \forall y(y \notin x)$. Podríamos saltarnos este axioma, pues aparece incluido en el de Infinito. Sin embargo, podemos también observar que M satisface (AV), pues $\varnothing \in V \Rightarrow \varnothing \in M$.

- (AI): $\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow S(y) \in x)$, siendo $S(x) = x \cup \{x\}$. Acabamos de dejar sentado que $\varnothing$ es el mismo en V y en M; también S(x) es el mismo en V y en M; un ejemplo de un tal x es ω; como $\omega \in M$, $M \approx$ (AI).

- (AC): supongamos que $V \approx$ (AC). Dado $x \in M$, debemos ver que la función de elección f sobre x producida por (AC) en V está también en M. Ahora, $x, y \in V_\alpha \Rightarrow z, t \in V_\alpha\ \forall z \in x, \forall t \in y \Rightarrow \{z, t\} \in V_{\alpha+1} \Rightarrow (z, t) \in V_{\alpha+2} \Rightarrow \forall f: x \to y, f \in V_{\alpha+3}$. En particular, $x \in V_\alpha \Rightarrow \bigcup x \in V_\alpha$ y toda función de elección sobre x está en $V_{\alpha+3}$. Sigue $M \approx$ (AC).

Comprobada la validez de los axiomas en el modelo, resta ver que los ordinales y cardinales "se portan bien" en M; repasando las definiciones dadas oportunamente, es fácil verificar los siguientes hechos:

- $M \approx (\alpha \in Ord) \Leftrightarrow (\alpha \in Ord)$.
- $M \approx (\alpha \in Card) \Leftrightarrow (\alpha \in Card)$.
- $M \approx (\alpha \in Card\ Reg) \Leftrightarrow (\alpha \in Card\ Reg)$.
- $M \approx (\alpha \in Card\ Inacc) \Leftrightarrow (\alpha \in Card\ Inacc)$.

Por lo tanto, como κ es el primer cardinal inaccesible y $M = V_\kappa$, tenemos

$$M \approx (\neg(\exists \text{ cardinales inaccesibles})). \blacksquare$$

13. 6. 2. Observación I. Debido a lo expuesto al analizar la validez de (AP) en M, tenemos que

$$V \approx (HGC) \Rightarrow M \approx (HGC).$$

Como vemos, la existencia de cardinales débilmente inaccessibles no puede probarse en –y no se sabe si es inconsistente con– (ZFC). Su existencia se toma a veces como un nuevo axioma. Los cardinales inaccessibles son necesariamente puntos fijos de la función aleph, aunque no todos los puntos fijos son regulares: el primer punto fijo es el límite de la ω-sucesión dada en (13. 1.), que es singular.

Como hemos dicho, *si vale el axioma de elección* todo cardinal sucesor es regular (12. 13. 2.) y por ende la regularidad o singularidad de la mayoría de los alephs se puede comprobar según que el cardinal sea sucesor o límite. Por otra parte, algunos cardinales tienen la peculiaridad de que *no se puede comprobar que sean iguales a ningún aleph en particular*; por ejemplo, en (ZFC) *la cardinalidad del continuo **c** puede ser cualquier cardinal no numerable*, siempre y cuando [Lema de König; (12. 5. c)] su cofinalidad sea no numerable[128]. Como sabemos, la hipótesis del continuo postula que la cardinalidad de **c** es $\aleph_1$, que es regular. Volveremos a los cardinales inaccesibles en (17. 2. 5.).

14. Constructibilidad.

En esta sección describiremos el modelo creado por Gödel para probar la consistencia relativa de (AC) y de (HGC). Para ello construiremos otra jerarquía acumulativa, en la que $V_{\alpha+1}$ no es necesariamente $P(V_\alpha)$, sino sólo la familia de todos los subconjuntos *constructibles* de V_α.

14. 1. Definición. Dado $X \in V$, denotamos por L_X al lenguaje de la Teoría de Conjuntos provisto de una constante x' para cada $x \in X$.

14. 2. Definición. Dado $Y \subseteq X \in V$, decimos que Y es *X-definible* si, para alguna fórmula ϕ de L_X con una variable libre, vale que

$$Y = \{x \in X: X \approx \phi(x')\}.$$

Denotamos por Def(X) a todos los subconjuntos X-definibles de X.

14. 3. La Jerarquía Constructiva.

Definimos la *jerarquía constructiva de conjuntos* L_α, $\alpha \in$ **Ord**, por inducción transfinita:

$$\text{i) } L_0 = \varnothing.$$
$$\text{ii) } L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha).$$
$$\text{iii) } L_\mu = \bigcup_{\alpha<\mu} L_\alpha \text{ si } \mu \text{ es ordinal límite.}$$

Escribimos $L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} L_\alpha$, que es una *clase propia*.

14. 4. Lema.

- $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}, \alpha < \beta \Rightarrow L_\alpha \subseteq L_\beta$ y $L_\alpha \in L_\beta$.
- $\forall\alpha \in \mathrm{Ord}$, L_α es $\in$-transitivo $\Rightarrow$ L es $\in$-transitiva y L $\models$ (AE) + (AF).

[128] Ver comentarios después de la Definición 15. 7. 4. 2.

- $\forall\alpha \in \text{Ord}$, $\alpha \in L_{\alpha+1} \Rightarrow \text{Ord} \subseteq L$.

Omitimos las demostraciones, similares a las propiedades probadas para la jerarquía acumulativa $\{V_\alpha\} = V$. ▌

14. 5. Teorema. (Gödel[129]). *Si (ZF) es consistente*, entonces la clase L es un modelo transitivo para (ZFC)+(HC). Por lo tanto, *si (ZF) es consistente*, entonces también lo son (ZFC) y (HC).

Demostración. No daremos una demostración completa, pero diremos que una diferencia importante entre L y V_κ es que en L vale el Principio de Buena Ordenación (BO), de modo que L $\approx$ (AC), gracias a los siguientes hechos que "narramos" sin dar demostraciones rigurosas:

- L_α es BO $\forall\ \alpha$: suponiendo L_α BO, la BO de $L_{\alpha+1}$ sale del hecho de que todo elemento de $L_{\alpha+1}$ es un subconjunto definible de L_α, y por lo tanto corresponde a una fórmula $\phi(x, x_1', x_2', ..., x_n')$.

- L presenta una "construcción gradual" BO $\bigcup_{\alpha\in\text{Ord}} L_\alpha$ que "hereda" los BO de los L_α.

La demostración de que L $\approx$ (HGC) es más complicada. ▌

14. 6. Observación. La jerarquía constructible, introducida aquí para tener estas demostraciones de independencia, tiene un considerable interés por sí misma. Ella motiva el siguiente importante Axioma de Constructibilidad:

(ACons.) $\qquad$ V = L,

es decir que *todo conjunto es constructible*. Lo que Gödel demuestra en el paper citado es que L es un modelo para

$$(ZF) + (V = L),$$

y que

$$(V = L) \Rightarrow (AC) + (HGC).$$

Veamos otra de las consecuencias de (ACons.), con una sorprendente aplicación al álgebra.

14. 7. Definición. Un grupo abeliano G es un *W-grupo* si

[129] Gödel, Kurt. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Ann. of Math. Stud., vol. 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1940, pp. 33–101.

$$\mathrm{Ext}(G, Z) = 0.$$

es decir si cada vez que H es un grupo abeliano con un subgrupo $K \equiv Z$ tal que $H/K \equiv G$, debe ser

$$H = K \oplus M,$$

con $M \equiv G$. Todo grupo abeliano libre es un W-grupo. El *Problema de Whitehead* (1951) pregunta si todo W-grupo es libre. En 1951, Stein probó que todo W-grupo numerable es libre, y en 1975 Shelah resolvió el problema por la afirmativa, *suponiendo que V = L*.

Secciones 15 y 16.

15. Forzamiento (I).
16. Forzamiento (II).

15. Forzamiento (I).

15. 1. Introducción. En 1963 Paul Cohen asombró al mundo matemático con su nueva técnica del *forzamiento*[130] que le permitió resolver de un solo golpe varios problemas notables de la Teoría de Conjuntos; quizás el logro mayor fue la demostración de la independencia de (HC) respecto de (ZFC).

A pesar de la importancia del resultado de Cohen y del paso de casi medio siglo desde su concepción, el forzamiento sigue siendo un completo misterio para la gran mayoría de los matemáticos profesionales, incluso para aquéllos con ciertos conocimeintos de lógica matemática[131].

Existen numerosos textos con demostraciones matemáticamente impecables de los teoremas del forzamiento, pero el tema sigue siendo especialmente difícil para el no experto. Así como existen *problemas abiertos de investigación* en la matemática, podemos decir que el forzamiento constituye un *problema abierto de exposición*, cuya resolución involucra un tratamiento que lo haga perfectamente claro para el lector. Cada paso de la exposición debiera ser claro y bien motivado, con demostraciones "naturales" en el sentido de Donald Newman[132]. En contraste, el análisis de todos los textos consultados acerca del forzamiento deja al lector la sensación de que sólo un genio con intuición y virtuosismo técnico casi sobrenaturales podría haber encontrado la senda correcta. Esta primera sección sobre el forzamiento se propone dar un paso hacia la solución del problema expositivo; habrá detalles técnicos que se probarán en secciones subsiguientes, esperando que su diferimiento a favor de la rapidez y coherencia del tratamiento ayudará a tener una visión de conjunto y una sensación de que los teoremas conducen a un objetivo determinado.

15. 2. Resumen Ejecutivo. La negación de (HC) dice que existe un cardinal, $\aleph_1$, entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$. Para dar una estructura matemática que cumpla con esto, uno

[130] El nombre originalmente concebido por Cohen para su técnica (que le valió la Medalla Fields, el máximo galardón a nivel mundial para premiar los logros matemáticos) fue *forcing*, y no parece haber tradución al castellano para él; nosotros hemos decidido llamarlo *forzamiento* para evitar continuos anglicismos. Las fuentes básicas para esta sección son:
- Chow, Timothy Y. *A Beginner's Guide to Forcing*. Publicación Interna, Princeton University, 2006.
- Chow, Timothy Y. *Basic Forcing*. Publicación Interna, Princeton University, 2001.

[131] Como ilustración de tal estado de cosas, digamos que el excelente libro de Michael Monastyrsky *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals* (2º ed. A. K. Peters, 1998) expone con profundidad y detalle el trabajo de casi todos los ganadores de la Medalla Fields, pero no dice prácticamente nada acerca del forzamiento.

[132] "This term ... is introduced to mean not having any ad hoc constructions or *brilliancies*. A natural proof, then, is one which proves itself, one available to the «common mathematician in the streets.»" *Analytic Number Theory*. Springer Verlag, 1998.

podría empezar por una estructura en la que *sí* valga (HC)[133] e *insertar* en ella ciertos conjuntos faltantes, entre los cuales estaría el cardinal intermedio que deseamos. El teorema fundamental del forzamiento dice que, bajo condiciones muy generales, uno *puede* empezar con una estructura (conjunto) M que satisfaga (ZFC) y *ampliarla mediante la adjunción* de un nuevo elemento U para obtener una nueva y mayor estructura (conjunto) M[U] que sigue satisfaciendo (ZFC). Conceptualmente, dicha adjunción se parece mucho al proceso de añadir un elemento X a un anillo R para obtener el anillo mayor R[X]. Esto es muy satisfactorio para el aprendiz de la técnica del forzamiento, por la simple y potente analogía entre un área menos familiar (la teoría de conjuntos) con una en la que nos movemos con más soltura (la teoría de anillos).

Aunque análoga, la construcción de M[U] es mucho más complicada que la de R[X] porque los axiomas de (ZFC) son más complicados que los de anillo. La gran idea de Cohen fue construir al nuevo elemento U paso a paso, siguiendo rígidamente la pista de cuáles nuevas propiedades se "forzaría" a cumplir a M[U] en cada paso, de modo que pudiéramos controlar su comportamiento hasta llegar a la situación en que M[U] cumpliera simultáneamente con (ZFC) y con $\neg$(HC). Las secciones siguientes darán más substancia a lo dicho, y en 16 nos proponemos formalizar el discurso siguiendo a Kunen, Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Elsevier, 1980.

15. 3. Conjuntos que Son Modelos de ZFC.

Como vimos en 14. 6., Gödel construyó un modelo para (ZFC) + (HC), apelando a la clase L de los conjuntos constructibles. *Si (ZFC) es consistente*, entonces L = V. Observemos que L y V son *clases*, no conjuntos, y uno se pregunta si no podría construirse un *conjunto* que haga las veces de L para probar la consistencia de (ZFC). Como (ZFC) es una axiomática para una teoría de conjuntos, esto equivale a preguntar si (ZFC) puede probar su propia consistencia. El famoso teorema de incompletitud de Gödel[134] nos dice que esto es imposible: ninguna teoría lo suficientemente fuerte como para contener a la aritmética (es decir, a los números naturales) puede probar su propia consistencia. El primer párrafo del paper mencionado de Gödel comienza con estas palabras:

> Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der *Principia Mathematica* (PM) einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. von Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der

> El desarrollo de la matemática hacia una mayor precisión ha llevado, como bien sabemos, a la formalización de grandes porciones de ella, de modo que se puede esperar probar cualquier teorema usando nada más que una pocas regla mecánicas. Los sistemas formales más completos hasta ahora construidos son el de los *Principia mathematica* (PM) de Russel-Whitehead por un lado y el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos (ulteriormente desarrollada por J. von

[133] Como hemos visto en 14., Gödel probó que existe al menos *una* de tales estructuras: es L, el universo de todos los conjuntos constructibles; problema: L es una *clase*, no un conjunto.

[134] Gödel, Kurt. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte fur Mathematik und Physik, 38 (1931), 173-198, reproducido en Gödel, Kurt. *Collected Works, Volume I; Publications 1929-1936*. Este teorema fue recogido en el libro Gödel. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, traducido por b. Meltzer y completado con una introducción de R. B. Braithwaite. También consultado fue Nagel & Newman. *Gödel's Proof.* New York University Press, 2001.

Mengenlehre andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt, die sich aus den Axiomen nicht entscheiden lassen. Dieser Umstand liegt nicht etwa an der speziellen Natur der aufgestellten Systeme, sondern gilt für eine sehr weite Klasse formaler Systeme, zu denen insbesondere alle gehören, die aus den beiden angeführten durch Hinzufügung endlich vieler Axiome entstehen, vorausgesetzt, daß durch die hinzugefügten Axiome keine falschen Sätze ... beweisbar werden.

Neumann) por el otro. Estos dos sistemas son tan abarcativos que en ellos todos los métodos de demostración empleados hoy en día en la matemática se encuentran formalizados, es decir, reducido a unos cuantos axiomas y reglas de inferencia. Podríamos, pues, conjeturar que estos axiomas y reglas de inferencia son suficientes para decidir cualquier cuestión matemática que pudiese expresarse formalmente en estos sistemas. Probaremos más abajo que esto no esposible sino que, por el contrario, existen en los dos sistemas problemas relativamente simples en la teoría de los enteros que no pueden decidirse sobre la base de los axiomas. Esta situación no se debe, en absoluto, a la naturaleza especial de los sistemas mencionados, sino que se da en una amplia clase de sistemas formales; entre éstos, en particular, están todos los sistemas que surgen de los dos mencionados mediante la adición de un número finito de axiomas, siempre y cuando no haya proposiciones falsas... que se puedan probar a causa de los axiomas añadidos.

Por otra parte, en Enderton, Herbert B. *Elements of Set Theory*. Academic Press. New York, San Francisco, London, 1977, leemos:

There is a fascinating theorem of mathematical logic, called "Gödel's second incompleteness theorem." It implies, among other things, that if our axioms are consistent (as we sincerely believe them to be), then we can never use them to prove the existence of a model of the axioms. Such a model may exist (as a set), but a proof (from our axioms) that it is there does not exist.

No podemos probar, entonces, la consistencia de (ZFC) dentro de (ZFC); sin embargo, *si (ZFC) es consistente*, entonces admite un modelo y, por el Teorema de Löwenheim-Skolem[135], admite un modelo numerable M que, desde luego, es un *conjunto* y por lo tanto está en (ZFC). De ahora en más, todas las relaciones que aparecen en (ZFC) serán *relativizadas o restringidas* a M (ver 13. 6. 3.). En 13. 6. 5. reescribimos el Axioma de Extensionalidad (AE)[136] en su versión relativizada; volvemos a hacerlo ahora, alterando levemente el enunciado para hacerlo más cómodo para nuestros propósitos:

(AE): Si x e y son elementos distintos de M, entonces o bien $\exists$ z $\in$ M: (z $\in$ x) $\wedge$ $\neg$(z $\in$ y), o bien $\exists$ z $\in$ M: (z $\in$ y) $\wedge$ $\neg$(z $\in$ x).

En 2. 6. introdujimos es Axioma del Conjunto Potencia; lo reescribimos relativizado a M:

---

[135] *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begrundung der Mengenlehre*. Proc. 5th Scandinavian Math. Congr., Helsinki (1922), 217-232; traducido al inglés en van Heijenoort. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*.

[136] Introducido en 2. 1.

(AP): $\forall$ x $\in$ M, $\exists$ y $\in$ M: ($\forall$ z $\in$ M, z $\in$ y $\Leftrightarrow$ z $\subseteq$ x). Aquí, "z $\subseteq$ x" es una abreviatura de "$\forall$ w $\in$ M (w $\in$ z $\Rightarrow$ w $\in$ x)".

Como dijimos, no podemos esperar encontrar un *conjunto* M que sea un modelo de (ZFC), aunque exista si (ZFC) es consistente. Existe sin embargo un ente, la clase V de todos los conjuntos, que es "casi" un modelo; sus propiedades guiarán nuestra intuición, pues el M del que hablaremos se parecerá en cierto sentido a V. De ahora en más, supondremos la consistencia de (ZFC) y, por ende, la existencia del *conjunto* M, al que nos aproximaremos inspirándonos en V.

15. 4. Definición. M es un *modelo standard* para (ZFC) si los elementos de M son conjuntos *bien fundados* respecto de la relación de pertenencia, "$\in$"; es decir, si cumplen con el Axioma de Fundamentación o Regularidad, (AF)[137]. Podemos imaginar al universo de los conjuntos bien fundados como "recursivamente formados" a partir de $\emptyset$, usando operaciones tales como uniones, pares, conjuntos potencia, etc.

Esta definición puede parecer extraña: si M va a ser un modelo de (ZFC) y (AF) es uno de sus axiomas, ¿por qué pedir explícitamente que M lo cumpla? La respuesta es que, en esta sección, estamos comentando las ideas de Cohen que lo llevaron a concebir el forzamiento, tal como las expone en su libro *Set Theory And The Continuum Hypothesis* (W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1966). En las páginas 51 a 53 de ese libro, Cohen admite sólo 8 axiomas para (ZFC), a saber: Extensionalidad, del Conjunto Vacío, del Par no Ordenado, de la Unión, del Infinito, de Reemplazo, del Conjunto Potencia y de Elección. La regularidad no aparece entre sus axiomas básicos y por ello la introduce como una propiedad deseable cuando la necesita; textualmente:

In this section we discuss the role of the Axiom of Regularity. In particular, we shall show that adding it to the other axioms does not lead to contradiction if the latter are themselves consistent.

Cohen, Paul. *Set Theory And The Continuum Hypothesis*; p. 68.

Y todavía:

The Axiom of Regularity shows that $\neg(x \in x)$ and that there does not exist a sequence $\{x_n\}$ such that $x_{n+1} \in x_n$ etc. However, the reason one never needs to quote this axiom in the conventional part of mathematics is simply because the normal sets one deals with such as integers, reals, etc. are easily seen to be well-founded sets. If non-well founded sets exist they must be rather artificial objects. Let us show how one can construct a "universe" with such sets. This argument will show that the Axiom of Regularity cannot be proved from the other axioms, so that ... it is an independent axiom.

Op. Cit. p. 72.

La expresión "modelo standard" (*standard model*), acuñada por Cohen, aparece en la página 79 de la obra citada. Es claro que, si existen modelos standard para (ZFC), entonces forman una clase natural de ejemplos, pero no está en absoluto claro que tales modelos existan, incluso si los 8 axiomas aceptados por Cohen son consistentes[138]. Cohen nos pide que creamos en su existencia:

---

[137] Introducido en 2. 9.

[138] La clase de todos los conjuntos bien fundamentados es propia, así que no sirve como ejemplo de modelo standard. La existencia de un modelo standard para (ZFC) es una hipótesis auténticamente más fuerte que la de la mera existencia de un modelo, pero ignoraremos este hecho.

Since the negation of CH or AC may appear somewhat unnatural one might think it hopeless to look for standard models. However, we make a firm decision at the point to consider only standard models. Although this may seem like a very severe limitation in our approach it will turn out that this very limitation will guide us in suggesting possibilities.

Op. Cit.. p. 108.

Otra propiedad que le pediremos a M es la $\in$-*transitividad*: $x \in y \in M \Rightarrow x \in M$; la observación de Cohen acerca de los modelos standard vale también para los modelos transitivos: el teorema de contracción de Mostowsky garantiza que si existe un modelo para (ZFC), entonces existe un modelo transitivo. Más concretamente: toda clase en la que vale el Axioma de Extensionalidad es isomorfa a una clase transitiva (Mostowski, Andrzej. *Constructible Sets with Applications*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969, p. 20). Isomorfismo entre clases significa, aquí, que existe una biyección entre ellas que preserva la relación "$\in$". En todo lo que sigue, pues, "modelo" querrá decir "modelo numerable, bien fundado y transitivo".

15. 5. Propiedades Absolutas y Conjuntos Potencia. Un modelo M de (ZFC), como todo lo demás, "vive" en V, pero es especial porque se parece mucho a V: casi cualquier demostración de existencia de algún objeto en V puede imitarse, usando sólo (ZFC), para probar que M debe contener un Y que es por lo menos muy similar a X. En muchos casos importantes Y = X, tal como ocurre con todos los ordinales de von Neumann (es decir, los números naturales; ver 2. 8. 2) y con $\omega = \aleph_0$ (hasta nuevo aviso borramos la distinción de ω como ordinal y $\aleph_0$ como cardinal).

Sin embargo, no siempre vale que Y = X; un contraejemplo crucial es $2^{\aleph_0}$, el conjunto potencia de $\aleph_0$. En apariencia, el axioma del conjunto potencia (AP) de ZFC exigiría que $2^{\aleph_0} \in M \ \forall$ modelo M, pero esto no es así: dado $\aleph_0 \in M$, (AP) dice que

$$\exists\, t \in M: \forall\, z \in M,\ z \in t \Leftrightarrow \forall\, w \in M\ (w \in z \Rightarrow w \in \aleph_0).$$

¿Quiere esto decir que t es precisamente el conjunto de *todos* los subconjuntos de $\aleph_0$?

No: para empezar, ni siquiera está claro que $z \subset \aleph_0$; el axioma no pide que *todo* w: $w \in z$ cumpla con $w \in \aleph_0$; sólo pide eso $\forall\ w \in M$. Sin embargo, la hipótesis de *transitividad* de M garantiza que $w \in z \in M \Rightarrow w \in M$. Vemos, entonces, que sí es cierto que $z \subset \aleph_0$.

Más importante que esto es el hecho de que t no contiene a *todo* subconjunto de $\aleph_0$, sino *sólo a aquéllos subconjuntos de $\aleph_0$ que están en M*. Como M es numerable, t también lo es, luego no puede ser $t = 2^{\aleph_0}$, que es no numerable. El conjunto t, que llamaremos conjunto potencia de $2^{\aleph_0}$ en M y denotaremos por $P(\aleph_0)^M$, no coincide con el "auténtico" $P(\aleph_0)$, de cardinal $2^{\aleph_0}$. Hay muchos subconjuntos de $\aleph_0$ que "faltan" en $P(\aleph_0)^M$.

Pero, ¿no podríamos imitar la demostración cantoriana de que $2^{\aleph_0}$ es no numerable (ver 10. 3.) para mostrar que M debe contener un subconjunto no numerable y concluir, por transitividad, que M mismo es no numerable?

No: el teorema de Cantor (10. 3.) dice que no existe una biyección entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$; pero una biyección es una función, es decir un *conjunto de pares ordenados*. Nuestro modelo M contiene un conjunto $P(\aleph_0)^M$ que hace las veces de $P(\aleph_0)$ *en M*, y no contiene ninguna biyección entre $P(\aleph_0)^M$ y $\aleph_0$. Tal biyección podría existir *en V*, pero no existe en M. Vemos que no hay contradicción en el hecho de que tanto $\aleph_0$ como $P(\aleph_0)^M$ sean numerables, y sin embargo no haya ninguna biyección *en M* entre ellos. Esta curiosa situación se llama *paradoja de Skolem* aunque, desde luego, no hay nada de paradójico en ella.

Generalizamos lo dicho con la siguiente

15. 6. Definición. Un concepto en V es *absoluto* si coincide con su contrapartida en M.

Los conceptos "$\varnothing$", "$\in$", "$\subseteq$", "biyección" y "$\aleph_0$" *son* absolutos; los conceptos "conjunto potencia" y "no numerable" *no* son absolutos. Cuando un concepto no es absoluto, hay que distinguir cuidadosamente entre su versión en V y su versión en M. Un estudio cuidadoso de (ZFC) requiere seguir la pista exactamente de cuáles conceptos son absolutos y cuáles no. Sin embargo, como la mayoría de los conceptos básicos son absolutos excepto los relacionados con los conjuntos potencia y las cardinalidades, de ahora en más sólo mencionaremos el carácter no absoluto cuando sea estrictamente necesario.

15. 6. 1. Observación. A la luz de lo dicho recién sobre conjuntos que son modelos de (ZFC), la construcción de (13. 6. 1.) puede entenderse así: *si existen cierto tipo de grandes cardinales* (en este caso los inaccesibles), *entonces puede construirse un conjunto M que modele a (ZFC)*; tal modelo vendrá dado por una aplicación inyectiva $j: V \to M$ tal que $\forall$ propiedad P predicable de un conjunto $A \in V$ se tiene P(A) es cierta en V sii P(j(A)) es cierta en M. Esa inyección j se llamará una *inmersión elemental*. Como $\aleph_0$ es absoluto (al igual que todos los cardinales finitos), debe ser $j(\aleph_0) = \aleph_0$; pero, si el modelo es numerable, $j(2^{\aleph_0}) \neq 2^{\aleph_0}$; en general, dada una inmersión elemental $j: V \to M$, no todos los cardinales pueden ser aplicados a sí mismos. Existirá, entonces, un mínimo cardinal κ: $j(\kappa) \neq \kappa$. Este cardinal es el *punto crítico* de la inmersión. En el caso de (13. 6. 1.), κ será el primer cardinal inaccesible.

15. 7. Bosquejo de la Construcción de un Modelo Booleano que Satisface $\neg$(HC).

15. 7. 1. Introducción.

El poco intuitivo hecho de que (ZFC) tiene modelos numerables con muchos subconjuntos que "faltan" nos da un idea de cómo podríamos construir un modelo de (ZFC) que satisface $\neg$(HC). Comenzamos con un modelo M standard, numerable y transitivo. Como vale el Axioma de Infinito [(AI), ver 2. 8], $\aleph_0 \in M$. La teoría elemental de los números cardinales (ver 10.) puede repetirse para M, y concluir que M contiene los cardinales $\aleph_i$ $\forall$ $i \in N$. Por ejemplo, el Teorema de Cantor (10. 3.) permite establecer las relaciones (cf 10. 10.):

$P(\aleph_0)^M > \aleph_0 \Rightarrow A(\aleph_0) = \{\alpha \in Ord_M: \alpha > \aleph_0\} \neq \varnothing$. Por b. o. de Ord_M, $\exists$ $\aleph_1 = \text{mín}\{A(\aleph_0)\}$.
$P(\aleph_1)^M > \aleph_1 \Rightarrow A(\aleph_1) = \{\alpha \in Ord_M: \alpha > \aleph_1\} \neq \varnothing$. Por b. o. de Ord_M, $\exists$ $\aleph_2 = \text{mín}\{A(\aleph_1)\}$.
$P(\aleph_2)^M > \aleph_2 \Rightarrow A(\aleph_2) = \{\alpha \in Ord_M: \alpha > \aleph_2\} \neq \varnothing$. Por b. o. de Ord_M, $\exists$ $\aleph_3 = \text{mín}\{A(\aleph_2)\}$.

....

Por supuesto, todos estos cardinales serán numerables "vistos desde afuera", o sea en V, pero no habrá biyecciones entre ellos en M; sí habrá inyecciones en M entre cualquiera de estos cardinales y cualquier otro con un índice mayor, de modo que aquí, igual que en V, se tendrá $i < j \Rightarrow \aleph_i < \aleph_j$. Para resaltar el hecho de que trabajamos en M, escribiremos $\aleph_i^M$, $i > 0$ [repetimos que, por (AI), $\aleph_0^M = \aleph_0$].

Ahora construimos, en V (*no* en M), una función cualquiera

$$F_2: \aleph_2^M \times \aleph_0 \to \{0, 1\}.$$

Como $\aleph_2^M$ es *numerable*, podemos interpretar a F_2 como *una sucesión de funciones*

$$\{f_{2,t}\}: \aleph_0 \to \{0, 1\},\ f_{2,t}(x) = F_2(t, x),\ t \in \aleph_2^M,\ x \in \aleph_0$$

y, otra vez por la *numerabilidad* de $\aleph_2^M$, podemos suponer que todas las $f_{2,t}$ son *distintas* entre sí.

Si $F_2 \in M$, entonces M satisface $\neg$(HC): puesto que cada función $\{f_{2,t}\}: \aleph_0 \to \{0, 1\}$ puede interpretarse como un *subconjunto* de $\aleph_0$ (*en M*), del hecho de que todas las $f_{2,t}$ son distintas entre sí resultará que todos los subconjuntos que ellas representan también serán distintos entre sí, de modo que se tendrá:

$$|P(\aleph_0)^M| \geq \aleph_2 \text{ en M.}$$

De hecho, si repetimos la construcción con $\aleph_i^M$, $i > 1$, vemos que: *si $F_i \in M$, entonces $|P(\aleph_0)^M| \geq \aleph_i$*. De ahora en más, consideraremos sólo a F_2, y lo llamaremos F por brevedad.

¿Qué pasa si $F \notin M$? Una idea natural sería *agregarlo* a M, con la esperanza de no perturbar demasiado sus propiedades, para obtener un modelo mayor M[F] que siga cumpliendo con (ZFC) y que, por contener a F, satisfaga la condición $\neg$(HC).

Esta idea, aparentemente ingenua, funciona; desde luego habrá que superar numerosas dificultades técnicas, pero lo esbozado más arriba está en la senda correcta.

¿Cuáles son esas dificultades técnicas? Lo primero que debemos notar es que no podemos agregar solamente a F y esperar que $M \cup \{F\}$ siga cumpliendo con (ZFC). Debemos agregar, como mínimo, todos los conjuntos que sean *constructibles*[139] a partir de F y de elementos de M, así como cuando extendemos una estructura algebraica por la adjunción de un elemento x debemos agregar todo lo *generado* por x.

Pero hay una objeción mucho más seria: la adjunción de un conjunto F "cualquiera", más todo lo "construible" a partir de F y M, podría destruir el carácter de M[F] como modelo de (ZFC); lo vemos a continuación.

Como dijimos al principio de esta sección, M es un modelo standard, numerable y transitivo; añadimos ahora la hipótesis no restrictiva de que M sea *minimal*, es decir que no contenga ningún submodelo propio. Esto siempre puede conseguirse:

[139] En el sentido de Gödel. Ver 14.

15. 7. 1. 1. Teorema[140]**.** Existe un único modelo standard, numerable y transitivo M tal que, si N es cualquier modelo standard, numerable y transitivo, existe una $\in$-inyección[141] de M en N.

Demostración. Sea N cualquier modelo standard, numerable y transitivo; N ocurre por primera vez en algún nivel L_α en la jerarquía de los constructibles (ver 14), con α numerable en V; por lo tanto, todo ordinal que aparece en N es numerable (la noción de "ordinal" es absoluta). Sea α_0 el supremo de todos los ordinales en N. Otra vez por la propiedad absoluta de "ordinal", no hace falta distinguir entre ordinales relativos a N y ordinales $< \alpha_0$; también, si $\alpha < \alpha_0$, L_α tiene el mismo significado en V que relativizado a N. Escribamos X_α en vez de $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} L_\beta$; como N es modelo de (ZFC), X_{α_0} también lo es. Sea α_1 el *mínimo* ordinal tal que X_{α_1} = M es modelo de (ZFC). Se tendrá $M \subseteq N$; la inyección mencionada en el enunciado será la identidad. ▌

En vista de este teorema, podemos suponer que M es un modelo standard, numerable, transitivo y mínimo; así lo haremos de aquí en más.

15. 7. 1. 2. Teorema. Es consistente suponer que $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} L_\beta$ no es un modelo de (ZFC) para ningún $\alpha > \alpha_0$.

Demostración. Sea α_1 el mínimo de los $\alpha > \alpha_0$ tales que N = $\bigcup\limits_{\beta<\alpha_1} L_\beta$ es un modelo. Entonces, en N se cumple que $\alpha > \alpha_0 \Rightarrow L_\alpha$ no es un modelo. ▌

15. 7. 1. 3. Teorema. Es consistente suponer que, para cualquier modelo N de (ZFC), $\alpha_0 = \sup\{\alpha: \alpha \in N\}$

Demostración. Sea N' el conjunto de los conjuntos constructibles de N; entonces, $\sup\{\alpha: \alpha \in N'\} = \sup\{\alpha: \alpha \in N\}$, y por 15. 7. 1. 2. es consistente suponer que $\sup\{\alpha: \alpha \in N'\} = \alpha_0$. ▌

Ahora podemos entender por qué la adjunción de un conjunto F "cualquiera", más todo lo "construible" a partir de F y M, podría destruir el carácter de M[F] como modelo de (ZFC). De los Teoremas 1 - 3 vemos que, cualquiera sea el modelo N que construyamos como extensión de M, tenemos que arreglárnoslas con los ordinales en M: sólo podremos agregar conjuntos nuevos de rango $\alpha < \alpha_0$[142]. Como los conjuntos de rango finito son absolutos, la primera posibilidad es encontrar una extensión N tal

[140] Cohen, Paul. *Set Theory And The Continuum Hypothesis*. W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1966, p. 104.

[141] Es decir, una $f: M \rightarrow N$ inyectiva que respeta "$\in$".

[142] Un conjunto S es de *rango* α si aparece por primera vez en L_α.

que para algún $z \subseteq \omega$, $z \in N$ y $\omega \backslash z \in M$. Si N contiene a z, también debe contener a todos los conjuntos constructibles a partir de z, que definiremos por inducción transfinita:

$$M_0(z) = \omega \cup \{z\};$$

$$M_\alpha(z) = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta(z) \right)', \ \alpha > 0.$$

$M_\alpha(z)$ es transitivo $\forall\ \alpha$, y $\alpha \in M \Rightarrow M_\alpha(z) \in N$. Si tomamos un $z \subseteq \omega$ que no esté en M, en general $N = \bigcup_{\beta<\alpha_0} M_\beta(z)$ no será un modelo de (ZFC): el ordinal numerable α_0, que no está en M, corresponde a un buen orden en ω, luego a un subconjunto de $\omega \times \omega$ y por lo tanto a un subconjunto de ω mismo. Si z es ese subconjunto, entonces cualquier modelo de (ZFC) que contenga a z debe contener a α_0, pues por 6. 2. a cada b. o. le corresponde un único ordinal. Sin embargo, es claro que $x \in N \Rightarrow$ rango$(x) < \alpha_0$, de modo que no puede ser $\alpha_0 \in N$. Tenemos, pues, que una elección desafortunada del subconjunto que añadimos para extender a M puede crear una especie de paradoja auto-referencial. Reproducimos aquí las palabras de Cohen (op. cit., p. 111):

Thus z must have certain special properties.... Rather than describe z directly, it is better to examine the various properties of z and determine which are desirable and which are not. The chief point is that we do not wish z to contain "special" information about M, which can only be seen from the outside... The z which we construct will be referred to as a "generic" set relative to M. The idea is that all the properties of z must be "forced" to hold merely on the basis that z behaves like a "generic" set in M. This concept of deciding when a statement about z is "forced" to hold is the key point of the construction.

A continuación Cohen explica el concepto del forzamiento, pero en este punto nos separamos de su relato, para desarrollar el concepto de *Modelo booleano* de (ZFC)[143] tal como fue desarrollado a partir de 1965 por Scott, Solovay y Vopenka[144]. Este concepto, que Cohen aún no tenía a su disposición en 1963, es mucho más simple que el del forzamiento original. Volveremos a la "versión Cohen" del forzamiento en la sección 16.

15. 7. 2. Modelos Booleanos.

Como vimos en (8. 2.), hay un isomorfismo natural entre los conceptos booleanos "0", "1", "$\vee$", "$\wedge$" y "$\bar{\ }$" y los conceptos lógicos de falsedad, verdad, "o", "y" y "no" respectivamente. Ahora queremos llevar el isomorfismo más lejos: si S es el conjunto de todas las sentencias del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos y queremos que ciertas sentencias sean válidas en nuestra teoría, pero no estamos seguros de otras, podemos modelar nuestra incertidumbre tomando un álgebra de Boole adecuada B y representar cada sentencia φ por un elemento $[\varphi]^B \in B$. Si φ es cierta, entonces $[\varphi]^B = 1$; si es falsa, $[\varphi]^B = 0$; si no estamos seguros acerca del valor de verdad de φ, entonces $[\varphi]^B = b \in B \backslash \{0, 1\}$. En cierto sentido, estamos desarrollando

143 "Boolean-valued models of (ZFC)"; más correcto sería llamarlos "Modelos de (ZFC) con valores en álgebras de Boole", pero optamos por este nombre más manejable.

144 Dana Scott, *A proof of the independence of the continuum hypothesis*, Math. Sys. Theory 1 (1967), 89-111.

una especie de "lógica difusa" o "multivalente" en la cual hay proposiciones que no son ni ciertas ni falsas, sino que tienen valores intermedios de verdad. Desde luego, sigue siendo válida la relación entre conectivos lógicos y operaciones booleanas, a saber:

$$[\varphi \text{ o } \psi]^B = [\varphi]^B \vee [\psi]^B \text{ , } [\varphi \text{ y } \psi]^B = [\varphi]^B \wedge [\psi]^B, [\neg\varphi]^B = ([\varphi]^B)^*, \text{ .... (12)}$$

donde por razones de comodidad en la escritura representamos a " ¯ " por "*".

Respecto de expresiones atómicas del tipo $[x = y]^B$ y $[x \in y]^B$, trabajamos del siguiente modo: si conocemos la certeza o falsedad de ciertas igualdades o relaciones de pertenencia, pero queremos posponer una decisión respecto de otras, representaremos esta situación por medio de “conjuntos difusos”; un conjunto ordinario puede identificarse con una función cuyo codominio es el álgebra de Boole {0, 1} y que manda cada elemento que pertenece al conjunto al 1 y los que no al 0. Si B es un álgebra de Boole arbitraria, entonces un “conjunto difuso” debiera ser una función que manda un “potencial elemento”, y, (que sería él mismo un “conjunto difuso”) a un valor en B que mida el “grado de certeza” que tenemos de que y pertenezca a x. Más precisamente:

15. 7. 2. 1. Definición. Si B es un álgebra de Boole, *un conjunto B-valuado* es una función de un conjunto de conjuntos B-valuados en B. La circularidad se evita notando que $\varnothing$ es un conjunto B-valuado, y para los demás conjuntos procedemos inductivamente.

Sea M un modelo de (ZFC), B un álgebra de Boole y M^B el conjunto de todos los conjuntos B-valuados de M. El conjunto S de todas las sentencias del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos ha de tener un símbolo para cada elemento de M^B. Definimos $f: S \to B$ tal que $f(\varphi) = [\varphi]^B$, se cumplen las propiedades (12) y f manda los axiomas de (ZFC) a $1 \in B$. Diremos que M^B será un *modelo booleano* de (ZFC). No será un auténtico modelo de (ZFC) porque sus elementos no serán conjuntos sino “conjuntos difusos”: si tomamos una φ arbitraria en S y preguntamos si es válida en M^B, la respuesta a menudo no será ni “sí” ni “no” sino algún elemento de B distinto de 0 y de 1, mientras que un auténtico modelo N de (ZFC) o bien satisface φ o bien no la satisface. Por otro lado, M^B será un *casi-modelo*, en el sentido de que $[\varphi]^B = 1 \ \forall \ \varphi \in$ (ZFC). En su momento convertiremos a M^B en un auténtico modelo, tomando un cociente adecuado que elimine la ambigüedad.

15. 7. 2. 2. Cuantificadores en M^B. La condición de existir un x que satisface una cierta propiedad φ equivale a decir que o bien $\varphi(a)$, o bien $\varphi(b)$, o bien $\varphi(c)$, ..., siendo a, b, c, ... elementos de M^B, y de manera dual para “$\forall$”. Por ello definimos

$$[\exists\ x: \varphi(x)]^B = \bigvee_{a \in M^B} [\varphi(a)]^B; [\forall\ x: \varphi(x)]^B = \bigwedge_{a \in M^B} [\varphi(a)]^B. \text{ .... (13)}$$

Para que estas definiciones tengan sentido, debemos pedir que B sea un álgebra de Boole *completa*, es decir tal que subconjuntos arbitrarios de ella tengan supremo e ínfimo.

15. 7. 2. 3. Igualdad y Pertenencia en M^B. Definir en nuestro modelo booleano las relaciones $[x = y]^B$ y de $[x \in y]^B$ es notablemente delicado[145], pues se hallan estrechamente relacionadas entre sí y se necesitan mutuamente en las respectivas definiciones; motivaremos dichas definiciones haciendo un listado de ciertas condiciones que han de ser cumplidas por las relaciones mencionadas. Nuestro deseo de que valga el Axioma de Extensionalidad (A. E.; ver 2. 1.) sugiere la ecuación

$$[x = y]^B = [(\forall w(w \in x \Rightarrow w \in y)) \ \& \ (\forall w(w \in y \Rightarrow w \in x))]^B.$$

Otra ecuación plausible es

$$[x \in y]^B = [\exists w((w \in y) \ \& \ (w = x))]^B.$$

También es plausible pedir que la expresión $[\exists w((w \in y) \ \& \ \varphi(w))]^B$ dependa de los valores de $[\varphi(w)]^B$ sólo para aquéllos $w \in dom(y)$[146]; por último, el valor de $[w \in y]^B$ debe guardar una relación estrecha con el valor de y(w). Todo esto nos conduce a las ecuaciones

$$[\exists w((w \in y) \ \& \ \varphi(w))]^B = \bigvee_{w \in dom(y)} (y(w) \wedge [\varphi(w)]^B),$$

$$[\forall w((w \in y) \Rightarrow \varphi(w))]^B = \bigwedge_{w \in dom(y)} (y(w) \Rightarrow [\varphi(w)]^B),$$

donde "$x \Rightarrow y$" es otro modo de escribir "$\overline{x} \vee y$". Llegamos así a las definiciones que deseamos:

$$[x \in y]^B = \bigvee_{w \in dom(y)} (y(w) \wedge [x = w]^B), \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (14)$$

$$[x = y]^B = \bigwedge_{w \in dom(x)} (x(w) \Rightarrow [w \in y]^B) \wedge \bigwedge_{w \in dom(y)} (y(w) \Rightarrow [w \in x]^B). \ \ldots\ldots\ldots \ (15)$$

Las definiciones (14) y (15) definen a $[x \in y]^B$ y a $[x = y]^B$ en términos la una de la otra, pero no son circulares porque ambas deben interpretarse como definiciones inductivas.

15. 7. 2. 4. Conjunto Potencia en M^B. Dado $x \in M^B$ queremos construir $y = P(x)$ en M^B. Pediremos que

$$dom(y) = B^{dom(x)},$$

es decir que los "potenciales miembros" de y debieran ser las funciones de dom(x) en B y además, para cada $w \in dom(y)$, debiera ser $y(w) = [w \subseteq x]^B$. El problema es que, si $B \not\subset M$, las aplicaciones de dom(x) en B pueden no ser conjuntos B-valuados en M. Por ello, *impondremos al álgebra completa B la condición de ser un subconjunto de M*. Una vez hecho esto podremos relajar la condición de completitud, y pedir

[145] Seguimos la exposición de John L. Bell *Set theory: Boolean-valued models and independence proofs*. Clarendon Press, Oxford, 2005.

[146] Recordemos que y es un conjunto B-valuado, es decir una función de un subconjunto de M^B en B, y por lo tanto tiene un dominio.

solamente que *el álgebra de Boole B sea completa en M*, es decir que *todo conjunto de subconjuntos de B que esté en M debe tener un ínfimo en M y un supremo en M*. Acabamos así con la definición del modelo booleano MB; en resumen:

- Tomamos un álgebra de Boole B en M que sea completa en M.
- Definimos M^B como el conjunto de todos los conjuntos B-valuados en M.
- Definimos $[.]^B$ siguiendo las ecuaciones (12 - 15).

Hecho esto hay que hacer una larga verificación de que M^B cumple con (ZFC) y de que las reglas de inferencia lógica se portan "adecuadamente" en M^B (por ejemplo: si $[\alpha]^B = 1$ y $\alpha \Rightarrow \beta$, entonces debe ser $[\beta]^B = 1$). Omitimos por ahora estos detalles técnicos, a los que volveremos en 16.

15. 7. 3. Cociente de M^B por un Ultrafiltro. Como dijimos en 15. 7. 2. 1., convertiremos a M^B en un auténtico modelo de (ZFC) tomando un cociente adecuado que nos diga precisamente qué proposiciones serán ciertas en nuestro modelo. Para ello, tomaremos un subconjunto U de B que contenga a $[\alpha]^B$ para cada proposición α que sea válida en el nuevo modelo de (ZFC). El conjunto U, siendo un "definidor de verdad" para nuestro modelo, debe cumplir ciertas condiciones. Por ejemplo, como para cada α o bien α o bien $\neg\alpha$ debe ser válida, pediremos que $\forall\, x \in$ B o bien $x \in U$ o bien $x^* \in U$. Del mismo modo, identificando "verdad" con "pertenencia a U", deben cumplirse los siguientes hechos:

- $1 \in U$.
- $0 \notin U$.
- $x, y \in U \Rightarrow x \wedge y \in U$.
- $(x \in U \;\&\; x \leq y)$[147] $\Rightarrow y \in U$.
- $(x \in B) \Rightarrow x \in U \# x^* \in U$.

Estas propiedades son idénticas a las que definen al concepto de *ultrafiltro* de B (ver 8. 10.). Si U es un ultrafiltro cualquiera de B (U no tiene por qué estar en M), definimos el cociente M^B/U como el conjunto de las clases de equivalencia de elementos de M^B por la relación

$$x \sim_U y \Leftrightarrow [x = y]^B \in U.$$

Si representamos por x^U a la clase de equivalencia de x, entonces definimos la relación binaria $\in_U$ en M^B/U como

$$x^U \in_U y^U \Leftrightarrow [x \in y]^B \in U.$$

Ahora es relativamente sencillo probar que M^B/U es un modelo de (ZFC); lo fatigoso es probar que M^B es un modelo de (ZFC).

[147] Es decir, $x \wedge y = x$. Ver 8. 3.

15. 7. 4. Ultrafiltros Genéricos. Conclusión del Bosquejo de Construcción de un Modelo que Satisface $\neg$(HC).

La construcción hecha en 15. 7. 3. es muy poderosa: tomamos un modelo M de (ZFC), un álgebra de Boole $\mathbb{B}$ completa en M y un ultrafiltro U de $\mathbb{B}$ para formar un nuevo modelo M^B/U de (ZFC); experimentando con diversos M, $\mathbb{B}$ y U obtendremos modelos de (ZFC) con distintas propiedades.

Si M es un modelo transitivo standard (ver 15. 4.), en general M^B/U no lo será; es decir, no tiene por qué valer el Axioma de Fundamentación o Regularidad (2. 9.; recordemos que este axioma no figura en la lista de los aceptados desde el principio por Cohen). Aquí es donde se manifiesta con mayor poder el ingenio del descubridor del forzamiento, al advertir que la condición para lograr la transitividad standard del cociente es que U sea un ultrafiltro *genérico*:

15. 7. 4. 1. Definición. Sea P un conjunto p. o. arbitrario. $D \subseteq P$ es *denso* si $\forall\, p \in P\ \exists\, d \in D$: $d \leq p$. $G \subseteq P$ es *genérico* si $G \cap D \neq \varnothing\ \forall\, D$ denso en P.

En el contexto de nuestra construcción el conjunto p. o. P es $\mathbb{B}\backslash\{0\}$, y la condición crucial sobre el ultrafiltro U será la de pedir que U sea *M-genérico* (o *genérico sobre M*): $U \cap D \neq \varnothing\ \forall\ D \subseteq \mathbb{B}\backslash\{0\}$ que esté en M. Si U es M-genérico, se cumplen las siguientes propiedades:

- M^B/U es un modelo transitivo standard de (ZFC), al que denotaremos por V^B.
- M, $U \in M^B/U$. [148]

De ahora en más escribiremos M[U] en vez de M^B/U si U es M-genérico. Hemos realizado nuestro deseo de adjuntar a M un subconjunto de M para obtener un modelo mayor M[U] de (ZFC)[149]. No es evidente que existan ultrafiltros M-genéricos pero, si M es *numerable*, este hecho es relativamente simple de probar; esencialmente, hacemos una lista de todos los subconjuntos densos de M y hacemos un U que los interseque a todos, uno por uno (desde luego, tal *listado* exige usar la versión numerable del Axioma de Elección).

Volvemos a nuestro esbozo presentado en 15. 7. 1., y acabamos la construcción del modelo de (ZFC) + $\neg$(HC).

15. 7. 4. 2. Definición. Una *función parcial* de $\aleph_2^M \times \aleph_0$ en 2 = {0, 1} es una f: Z $\rightarrow$
{0, 1}, siendo $Z \subset \aleph_2^M \times \aleph_0$ un conjunto *finito*; denotamos por G_f al *gráfico* de f, es decir al conjunto de pares ordenados (a, b) tales que $a \in Z$ y b = f(a).

---

[148] Es decir, M^B/U contiene subconjuntos isomorfos a M y U; digamos, de paso, que M^B/U es el *menor* modelo que cumple con estas propiedades.

[149] Recordemos que $U \subseteq \mathbb{B} \subseteq M$.

Damos un orden parcial al conjunto P de todas las funciones parciales de $\aleph_2^M \times \aleph_0$ en 2, aplicando la inclusión inversa: $f \leq g$ si $G_g \subseteq G_f$. Por un método similar al de la completación de los números racionales por medio de cortaduras de Dedekind[150], todo conjunto parcialmente ordenado puede completarse a un álgebra de Boole completa; la completación de P en M será nuestra álgebra $\mathbb{B}$. Ahora, tomemos un ultrafiltro U de $\mathbb{B}$ que sea M-genérico (recordemos que U existe porque M es numerable). Ahora construimos, *en M*, la función F_2: $\aleph_2^M \times \aleph_0 \to \{0, 1\}$ mencionada en 15. 7. 1., declarando:

$$F_2 = \bigcup U.$$

La definición es buena:

- Consistencia de F_2: si $x, y \in U$, U ultrafiltro $\Rightarrow \exists z \in U$: ($z \leq x$ & $z \leq y$ en U), y z es
consistente con x y con y.
- F_2 es total: U es genérico, y las funciones parciales finitas definidas en un punto
particular a_0 de $\aleph_2^M \times \aleph_0$ son un conjunto denso de P: si una función parcial f no está definida en a_0, siempre podemos extender a f dándole un valor arbitrario $f(a_0) \in 2$.
- La sucesión de funciones

$$\{f_{2,t}\}: \aleph_0 \to \{0, 1\},\ f_{2,t}(x) = F_2(t, x),\ t \in \aleph_2^M,\ x \in \aleph_0,$$

presentada en 15. 7. 1. y codificada por F_2, está formada por funciones distintas dos a dos: esto es así porque U es genérico y la condición de ser distintas dos a dos es densa.

Los axiomas de (ZFC) garantizan que $F \in M[U]$, de modo que M[U] es el modelo deseado de (ZFC) + $\neg$(HC).

Es importante observar que $\aleph_2^M$ no juega ningún rol esencial en nuestra construcción; pudimos haber utilizado $\aleph_i^M$ para cualquier valor de i > 1: *es consistente con (ZFC) suponer que* $2^{\aleph_0}$ *es tan grande como deseemos*. El primer cardinal que se puede demostrar dentro de (ZFC) que es mayor que $2^{\aleph_0}$ es $\aleph_\omega = \bigcup_{n<\omega} \aleph_n$, pues no cumple con el Lema de König (12. 5. c).

Queda un punto importante sin mencionar: es cierto que $\aleph_2^M \in M[U]$, pero es concebible que $\aleph_2^M$ ya no juegue el papel de $\aleph_2$ en M[U], es decir que $\aleph_2^M \neq \aleph_2^{M[U]}$. Los cardinales no son absolutos, y puede ocurrir un *colapso de cardinales*, es decir que el objeto que juega el papel de un cierto cardinal en M puede no jugar el mismo papel en una extensión de M; dicho con otras palabras, podría ocurrir que un cardinal "grande" en M admita una correspondencia biyectiva con un cardinal menor en M[U], al agregar los conjuntos "extras" que nos permiten pasar de M a M[U]. Tal colapso no se da en nuestro modelo debido a que nuestra álgebra de Boole $\mathbb{B}$ cumple con una cierta propiedad llamada *Condición de Cadena Numerable* (CCC, por *Countable Chain Condition*), cuyo análisis no cabe en esta sección informal; la estudiaremos cuando fundamentemos todo lo dicho hasta ahora en 15. 9.

[150] Método de Dedekind-MacNeille; no lo describiremos aquí.

15. 7. 5. Relación del Modelo Booleano con el Forzamiento.

En su trabajo original, Cohen se hizo la siguiente pregunta fundamental: si queremos adjuntar un conjunto "genérico" U a M, ¿qué propiedades se "forzará" a que sean válidas en el modelo extendido si sólo tenemos una información parcial acerca de U, a saber: si sólo sabemos que un cierto elemento p de M está en U?

Si tenemos la maquinaria de los modelos booleanos, podemos dar una respuesta concluyente: diremos que $p \in M$ *fuerza* a $\varphi \in S$[151], y escribiremos "$p \Vdash \varphi$", sii $p \leq [\varphi]^B$. Desde luego, Cohen no disponía de los modelos booleanos. Lo que hizo fue describir las propiedades que debiera tener la expresión "$p \Vdash \varphi$", si sabemos que p es elemento de un conjunto "genérico"; por ejemplo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$, debe valer que $p \Vdash (\varphi \ \& \ \psi)$[152]. Razonando de modo similar (aunque más complejo), Cohen hizo una lista de reglas análogas a las marcadas por (12 - 15) más arriba para definir "$p \Vdash \varphi$" $\forall \varphi \in S$.

Vemos, entonces, que hay al menos dos maneras de construir un modelo de (ZFC) + $\neg$(HC), según que usemos "$\Vdash$" o "$[.]^B$" como concepto fundamental; en esta sección usamos "$[.]^B$" pues los "conjuntos difusos" (15. 7. 2. 1.) y el álgebra de Boole B (15. 7. 4. 2.) son relativamente fáciles de introducir. Cohen también introduce "conjuntos difusos" [que él llama *nombres* ("names") o *etiquetas* ("labels")] y un cierto orden parcial; ambos parecen más difíciles de motivar. También, la validez de las relaciones (12 - 15) es más difícil de establecer en el trabajo de Cohen.

A pesar de lo dicho, el gran valor del trabajo de Cohen amerita que dediquemos la sección 17. 8. a un esbozo, también informal, de su enfoque. Además, la intuición de Cohen acerca de lo que debe ser un conjunto genérico U, y de qué proposiciones ven "forzada" su validez a partir de nuestro conocimiento de que un cierto $p \in M$ está en U, es una gran ayuda, incluso trabajando con modelos booleanos. Por último, digamos "a favor" del enfoque de Cohen que, en él, se puede trabajar con un conjunto p. o. P arbitrario, aunque no sea un álgebra de Boole; sólo se le pide a P que sea un *filtro* genérico en vez de un ultrafiltro (ver 8. 5.). La gran debilidad del tratamiento booleano es la noción de *genericidad*, que parece "llovida del cielo"; a posteriori vemos que la definición funciona perfectamente para nuestros fines pero, ¿cómo adivinar a priori que los conceptos, puramente geométricos, de densidad y genericidad son los indicados?

Una respuesta posible es que Cohen fue un genio, pero quizás haya una solución más satisfactoria para el *problema abierto de exposición* del forzamiento, tal como fue presentado en (15. 1.). La siguiente lista de referencias establece conexiones del forzamiento con distintas ramas de la matemática. De tales conexiones puede, quizás, salir una síntesis que ayude a resolver el mencionado problema expositivo:

- Avigad, Jeremy. *Forcing in Proof Theory*. Bull. Symbolic Logic 10 (2004), 305-333. (Teoría de la Demostración).

[151] Recordemos que S es el conjunto de todas las proposiciones que forman el Lenguaje de Primer Orden de la Teoría de Conjuntos.

[152] Es decir, si nuestro conocimiento de que $p \in U$ *fuerza* la validez de φ en el modelo extendido y nuestro conocimiento de que $p \in U$ *fuerza* la validez de ψ en el modelo extendido, entonces nuestro conocimiento de que $p \in U$ *fuerza* la validez de $(\varphi \ \& \ \psi)$ en el modelo extendido.

- Boolos & Jeffrey. *Computability and Logic*. Cambridge University Press, 1989. (Aritmética).
- Bowen, Kenneth A. *Forcing in a General Setting*. Fund. Math. 81 (1974), 315-329. (Topología).
- Mac Lane & Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag, 1992. (Teoría de Topos).
- Smullyan & Fitting. *Set Theory and the Continuum Problem*. Oxford University Press, 1996. (Lógica Modal).

15. 8. Bosquejo de la Construcción de Cohen para el Forzamiento. Como en el caso booleano, partimos de un modelo standard M de (ZFC), transitivo y numerable. La discusión de conceptos absolutos y relativos a M sigue siendo válida (15. 3 y ss.); también, la idea de añadir una función F_2 para obtener un modelo ampliado en el que no valga (HC) (15. 7. y ss.). Las secciones que siguen pretenden dar una idea del siguiente:

15. 8. 1. Teorema Fundamental del Forzamiento. Si $G \subseteq P \in M$ satisfacen ciertas condiciones entonces el conjunto M[G], obtenido de la adjunción a M de G y ciertos otros "conjuntos auxiliares", también es un modelo standard transitivo y numerable de (ZFC).

En su momento explicaremos este enunciado; por ahora, digamos que este teorema es muy fuerte porque las condiciones a imponer a P y G son bastante suaves, dejando un enorme espacio para la creatividad: eligiendo bien a P y G, pueden construirse M[G]'s que satisfacen toda clase de propiedades conjuntistas. Aún hoy, casi medio siglo después, casi todos los (centenares de) resultados de independencia conocidos en lógica están basados en esta construcción.

15. 8. 2. Nombres. Comenzamos definiendo los "conjuntos auxiliares" de 15. 8. 1. Una idea crucial en toda la teoría del forzamiento es la de que ciertos hechos relativos a G y a M[G] dependen del G en cuestión, mientras que otros son hechos generales, válidos $\forall$ G. Podríamos establecer una analogía con las extensiones de cuerpos en álgebra: si F es un cuerpo y le adjuntamos un nuevo elemento X, entonces sabemos que, sin importar la naturaleza de X, existirá en la extensión F[X] el elemento $X^2 + 1$. Por otra parte, si $X^2 + 1 = 0$ dependerá del X en particular que elijamos, y de otras propiedades de F y de F[X][153]; en el caso de los cuerpos no es crítico distinguir entre un X "general" y un X "particular" porque la situación es lo suficientemente simple como para que no surjan confusiones si usamos "X" para todo. Las cosas son más complicadas en (ZFC), y es importante tener diferentes notaciones para los casos "general" y "particular". Definiremos la noción de "nombres" para los elementos de M[G][154]. Los nombres (o, mejor, *P-nombres*, pues dependen de P) se definirán sin hacer referencia a G, pero los *valores* de los nombres (los conjuntos rotulados por los nombres) sí dependerán de G.

[153] Por ejemplo, en $Q[\sqrt[3]{2}]$ la ecuación mencionada no tiene solución.

[154] Cohen: "Names" o "Labels".

15. 8. 2. 1. Definición. Un conjunto x es un *P-nombre* sii todos sus elementos son pares ordenados (y, p), donde y es un P-nombre y $p \in P$. Si x es un P-nombre, entonces su *dominio* es el conjunto dom(x) = {y: (y, p) $\in$ x para algún $p \in P$}.

La definición no es circular, pues $\varnothing$ es un P-nombre y a partir de él podemos construir los demás usando 15. 8. 2. 1.

Como veremos, un P-nombre x menciona a un cierto conjunto X relacionado con G; sin embargo x debe servir para tratar hechos válidos "en general" $\forall$ G, de modo que los elementos de dom(x) no son los nombres de todos los miembros de X; más bien, los elementos de x son los nombres de todo lo que *potencialmente* está en X. Si llegásemos a conocer cuál es el G en particular que nos interesa, entonces podríamos saber exactamente cuál es el conjunto nombrado por x. Para ello, cada elemento de x está "marcado" con un elemento de P; si conocemos G, podemos examinar uno por uno los elementos de x y, cada vez que la "marca" esté en G, cambiamos la propiedad de ser *potencialmente* un elemento de X por la propiedad de ser *realmente* un elemento de X; si la "marca" no está en G, descartamos al miembro potencial. Más formalmente:

15. 8. 2. 2. Definición. Sean G un conjunto y x un P-nombre. El *valor de x respecto de G* es el conjunto

$$\mathrm{val}(x, G) = \{\mathrm{val}(y, G): (y, p) \in x \text{ para algún } p \in G\}.$$

La definición no es circular, pues el valor de $\varnothing$ es $\varnothing$, y a partir de él podemos construir los demás usando 15. 8. 2. 2.

Hay dos razones para usar P en vez de M:

- Para probar (15. 8. 1.) habremos de imponer una cierta estructura en P, que en general no podremos imponer en M.
- La posibilidad de elegir un "buen" P será importante para construir modelos standard transitivos numerables con propiedades especiales.

Como dijimos en (15. 8. 1.), $G \subseteq P \in M$; de ahora en más pediremos que G (y, por lo tanto, P) tenga un elemento distinguido al que llamaremos "1". Veamos que *existe un nombre canónico para cada elemento $X \in M$*. Como siempre, esto se prueba por recursión: si cada $Y \in X$ tiene un nombre Y*, entonces

$$X^* = \{(Y^*, 1): Y \in X\}.$$

Como $1 \in G$, debe ser val(X*, G) = X. Esta construcción es absoluta, de modo que $X^* \in M$. De aquí deducimos que G admite el nombre "diagonal"

$$G^* = \{(X^*, X): X \in G\}$$

y que el valor de este nombre es el conjunto de todos los valores de X* cuando X recorre los elementos de G: val(G*, G) = G.

Ya podemos llenar un hueco en (15. 8. 1.): dados $G \subseteq P \in M$,

$$M[G] := \{\mathrm{val}(x, G): x \text{ es un P-nombre en } M\}.$$

Habrá que elegir "bien" a G y a P para que M[G] sea un modelo de (ZFC). Aún sin la elección "correcta" de G y P, algunos axiomas de (ZFC) ya valen en M[G]. Por ejemplo, el Axioma de la Unión (AU; ver 2.3.):

$$\forall X \in M[G]\ \forall Y \in M[G]\ \exists Z \in M[G]: (X \in Z) \wedge (Y \in Z).$$

Para verlo, sean X, Y $\in$ M[G]. Por definición de M[G], X = val(x, G) e Y = val(y, G) para ciertos P-nombres x, y en M. Sea z = {(x, 1), (y, 1)}; z es un P-nombre, y z $\in$ M[155]. Entonces Z = val(z, G) = {X, Y} $\in$ M[G]. Con esto también probamos que M[G] cumple con el Axioma del Par (2. 4.).

En contraste con lo dicho, el Axioma del Conjunto Potencia (AP, 2. 6.) no tiene garantías de cumplirse en M[G]: sean X $\in$ M[G], x un P-nombre en M tal que val(x, G) = X; hay que encontrar un P-nombre y $\in$ M: Y = val(y, G) contenga a todo subconjunto de X que esté en M[G]. Probamos con la siguiente definición:

$$y = \{(z, 1): z \in M \text{ es P-nombre y } dom(z) \subseteq dom(x)\}.$$

Supongamos que Z $\subseteq$ X en M[G]. Debe existir un P-nombre z en M tal que Z = val(z,G). Queremos que dom(z) $\subseteq$ dom(x), pues en tal caso val(z,G) $\in$ Y, resolviendo el problema. Pero hay dificultades, pues z podría contener elementos "potenciales" que no están en dom(x) sino que "desaparecen" al calcular sus valores, por estar “marcados” con elementos de P que no están en G. Salimos del atolladero notando que diferentes P-nombres en M pueden tener el mismo valor (la asignación de valores no tiene por qué ser inyectiva); es cierto que un z *arbitrario* que nombra a Z puede no tener un dominio contenido en dom(x), pero a lo mejor un z elegido “apropiadamente” sí cumple con esa condición. ¿Cómo encontrar tal z? La respuesta a esta pregunta nos lleva a la noción de *forzamiento*.

15. 8. 3. Forzamiento. Profundicemos en la idea de que ciertos hechos son específicos de G, mientras que otros son ciertos “en general”:

- “$\varnothing \in G$” es una propiedad específica de G.
- “$\varnothing \in G \Rightarrow G \neq \varnothing$” es una propiedad válida $\forall$ G, *aunque no conozcamos* G.
- “$\omega \in G \Rightarrow \bigcup G$ es infinito” también es una propiedad válida $\forall$ G.

Más en general, es posible construir implicaciones bastante sofisticadas del tipo “$p \in G \Rightarrow \varphi$”, con φ cierta fórmula del lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Formalizamos lo dicho:

15. 8. 3. 1. Definición. Sean $p \in P$, φ una sentencia predicable sobre los P-nombres.

Decimos que “p fuerza a φ” ("$p \Vdash \varphi$") si, $\forall G \subseteq P$ (que satisfaga ciertas condiciones), $p \in G \Rightarrow \varphi$ es verdad en M[G] (es decir, φ es verdad cuando los P-nombres se reemplazan por sus valores).

[155] No probaremos esto, que se deduce del hecho de que (AU) vale en M.

Demos dos ejemplos:

- Sean G^* el P-nombre canónico de G, y φ la sentencia "$G^* \neq \emptyset$". Entonces "$\emptyset \Vdash \varphi$"

equivale a decir que $\forall$ G ($\emptyset \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$), y esto es verdad (en realidad, *queremos que esto sea verdad*) en M[G]. Nótese como cambiamos, en φ, al P-nombre G^* por su valor G.

- Sean ω^* el P-nombre canónico de ω, y ψ la sentencia "$\omega^* \in G^*$". Entonces "$\emptyset \Vdash \psi$"

equivale a decir que $\forall$ G ($\emptyset \in G \Rightarrow \omega \in G$), y esto *no queremos que sea verdad* en M[G]. Otra vez cambiamos, en ψ, al P-nombre G^* por su valor G.

Volviendo a nuestro deseo de que M[G] satisfaga al Axioma (AP); con la misma notación que antes, definamos

$$z' = \{(q, r): q \in \mathrm{dom}(x) \wedge r \Vdash \varphi\},$$

siendo φ la proposición "$q \in z$". Se tiene $\mathrm{dom}(z') \subseteq \mathrm{dom}(x)$, por definición. Val(z', G) está determinado por cuáles "marcas" están en G; pero, por la definición de forzamiento, $r \in G \Rightarrow \mathrm{val}(q, G) \subseteq \mathrm{val}(z, G) = Z$, por lo cual $\mathrm{val}(z', G) \subseteq \mathrm{val}(z, G)$; nosotros quisiéramos $\mathrm{val}(z', G) = \mathrm{val}(z, G)$, y para asegurarlo quisiéramos que $\forall$ $Q \in Z$ exista un P-nombre q de Q, $q \in \mathrm{dom}(x)$ y un P-nombre $r \in G$ tales que $r \Vdash$ "$q \in z$".

Para garantizar la existencia de r, necesitamos un teorema que afirme que para cada φ (tal como "$Q \in Z$") que sea cierta en M[G], exista un r en ese G en particular tal que nuestro conocimiento de que $r \in G$ sea suficiente para garantizar que φ es cierta respecto de G, y esto no es plausible. En general, saber que un cierto elemento está en G no nos dice mucho acerca de G. Sin embargo, podemos arreglar este problema *si imponemos cierta estructura en G y P* de modo que ciertos $r \in G$ sean "más informativos" que otros, es decir si saber que $r \in G$ nos dice más acerca de G que saber que cierto otro $p \in G$. La manera más simple de lograrlo es imponer un *orden parcial* $\leq$ en P, siendo "1" su único elemento maximal, y que G sea un *filtro* en P; imitando la definición (8. 5.) de filtro para álgebras de Boole, decimos que $G \subseteq P$ (P p. o.) es un filtro si

- $r \in G \wedge r \leq p \Rightarrow p \in G$.
- $\forall$ $p, q \in G \; \exists \; r \in G$: $p \leq r \wedge q \leq r$.

La primera condición nos dice que, si sabemos que $r \in G$, entonces sabemos que todos los elementos mayores que r están en G: *cuanto más pequeño sea r, más "informativo" será*. La segunda nos dice que, dados p y q, existe un r que es al menos tan "informativo" como p y q juntos. Esta propiedad es muy útil, si hemos de insistir en el hecho de que el sólo chequear elementos individuales de G nos dé "información" sobre G.

Revisando la definición (15. 8. 3. 1.) e insertando las condiciones de que P sea p. o. y G sea un filtro en P vemos que aún no podemos garantizar la existencia de un $r \in G$: $r \Vdash$ "$q \in z$". Esto es porque, como P puede ser infinito, no hay certeza de que, para una φ arbitraria que afirme algo acerca de G, existirá un $r \in G$ que nos dé suficiente información para decidir sobre el valor de verdad de φ: podrían aparecer elementos r cada vez menores que nos den cada vez más información sobre φ, sin llegar nunca al r que nos dé la información decisiva. Esto motiva la última condición sobre G, con la que resolveremos todos los problemas:

15. 8. 3. 2. Definición. Sea P un conjunto p. o. arbitrario. D es *denso* si $\forall\ p \in P\ \exists\ d \in D$: $d \leq p$. Un filtro $G \subseteq P$ es *genérico* (o *M-genérico*) si $G \cap D \neq \emptyset\ \forall\ D$ denso en P (cf. 15. 7. 4. 1).

15. 8. 3. 3. Teorema. Sea $G \subseteq P$ un filtro genérico. $\forall\ \varphi$ verdadera en M[G], $\exists\ r \in G$: r □ φ. Además, "□" es definible en M.

Explicaremos rigurosamente en (16.) el significado de "definible". Por ahora, digamos que la definibilidad de "□" en M garantiza que, a pesar de los requisitos añadidos de ordenación parcial y de existencia de filtros genéricos, la definición de "□" todavía es lo suficientemente "general" como para no requerir de ningún conocimiento "especial" de G. El teorema (de difícil demostración que por ahora omitimos) nos permite probar que val(z', G) = Z, y (por definibilidad) que el z' definido por "□" está en M. (15. 8. 3. 3.) permite probar que no sólo (AP), sino todos los demás axiomas de (ZFC) valen en M[G]. Repetimos, completando su enunciado, el

Teorema Fundamental del Forzamiento. Si M es un modelo transitivo, numerable y standard de (ZFC), $P \in M$ es un conjunto p. o. con un único elemento maximal "1", y $G \subseteq P \in M$ es un filtro genérico no vacío, entonces el conjunto M[G] = {val(x, G): x es un P-nombre en M} también es un modelo standard transitivo y numerable de (ZFC).

15. 8. 4. Conclusión del Bosquejo de Construcción con Forzamiento de un Modelo que Satisface $\neg$(HC).

El final de esta sección repite casi fielmente lo dicho en 15. 7. 3. y ss., aunque hay algunos cambios. Como antes, quisiéramos extender a M por una función F_2 de $\aleph_2^M \times \aleph_0$ en 2 = {0, 1}; esto no funciona, porque los miembros de una función son pares ordenados y ningún par en particular es "más informativo" acerca de la función que otro cualquiera. Por otra parte, los grandes *subconjuntos* de pares transmiten más información que los pequeños. Por ello, haremos que P sea el conjunto de todas las *funciones parciales* (ver 15. 7. 4. 2.), nuevamente ordenado por inclusión inversa. Si $x \in \aleph_2^M \times \aleph_0$, el conjunto D^x de tales funciones que están definidas en x es denso en P, y si G es un filtro genérico en P debe ser $G \cap D^x \neq \emptyset\ \forall\ x \in \aleph_2^M \times \aleph_0$. Como antes, $F_2 = \bigcup G$ será la función buscada. El teorema fundamental nos dice que podemos insertar a F_2 en M si no estaba allí originalmente, y la genericidad de G nos dice que las $\aleph_2^M$ funciones

$$f_{2,t}(x) = F_2(t, x),\ t \in \aleph_2^M,\ x \in \aleph_0$$

son distintas. Además, no hay necesidad de buscar un filtro G "adecuado"; *cualquier* filtro genérico bastará. Como antes, no es evidente que existan filtros M-genéricos pero, si M es *numerable*, este hecho es relativamente simple de probar;

esencialmente, hacemos una lista de todos los subconjuntos densos de M y tomamos un elemento de cada uno de ellos (desde luego, tal *listado* exige usar la versión numerable del Axioma de Elección). G será el filtro generado por estos elementos. Igual que en (15. 7. 4. 2.), también en este caso se evita el *colapso de cardinales*, como probaremos en 15. 9.

Tanto en la presentación de los modelos booleanos como en la del forzamiento, hemos incurrido en varias ambigüedades en aras de presentar con rapidez conceptos que son de gran dificultad. Una falencia en nuestra exposición del forzamiento es que las nociones de "$p \Vdash \varphi$" y de filtro "genérico" son difíciles de motivar, al igual que la idea de que algunos enunciados requieren más (o menos) "información acerca de G". Con todo, se espera que estas secciones (15. 7.) y (15. 8.) nos den, por dos vías distintas, una primera impresión de cómo se puede probar que la negación de la Hipótesis del Continuo es compatible con los Axiomas de Zermelo-Fraenkel aumentados con el Axioma de Elección. Como dijimos más arriba, en las secciones siguientes formalizaremos lo expuesto en (15. 7.) y (15. 8.) siguiendo Kunen, Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Elsevier. 1980.

Sección 17

17 A la Búsqueda de Nuevos Axiomas.

17. A la Búsqueda de Nuevos Axiomas[156].

17. 1. Introducción. El Teorema (14. 5.) y la construcción de Cohen (15. 7. & ss.) prueban que (HC) es *independiente* de los axiomas de (ZFC). Tal resultado, en apariencia concluyente, no satisfizo a los matemáticos encargados de la construcción de la Teoría de Conjuntos: siendo los enunciados de (HC) y de (HGC) tan sencillos, la imposibilidad de resolver estas cuestiones fue vista como una *deficiencia de los axiomas* (ZFC); comenzó entonces la búsqueda de los axiomas "correctos" que permitieran resolver esta cuestión, a la que llamaremos el *problema del continuo*.[157]

Al evaluar posibles candidatos a nuevos axiomas, atendemos a dos tipos de justidicaciones:

- Intrínsecas; apelan a la "auto-evidencia" de ciertas intuiciones que tenemos al observar los

conjuntos y que, a pesar de su lejanía de nuestras percepciones sensoriales, se nos imponen en cierto modo como "verdaderas"; un ejemplo de estos axiomas "remotos pero ciertos" sería el de infinitud (2. 8.); otro (quizás) podría ser el Axioma de Elección (§§ 7 y 9).

- Extrínsecas, tales como:

    - Confirmación por casos particulares.
    - Predicción de consecuencias que luego se confirman.
    - Nuevas demostraciones de teoremas conocidos.
    - Extensión de líneas de razonamiento que fueron exitosas (por ejemplo, los axiomas de la teoría de categorías, que extienden a los de las estructuras algebraicas usuales).

---

[156] Referencias:

1. Hrbacek & Jech. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, Inc. 1999.
2. Kanamori, Akihiro. *The Emergence of Descriptive Set Theory*.
3. Luzin, Nikolai. *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 180 (1925), pp. 1572-1574.
4. Maddy, Penelope. *Believing the Axioms. I*. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 53, No. 2. (Jun., 1988), pp. 481-511.
5. Maddy, Penelope. *Believing the Axioms. II*. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 53, No. 3. (Sep., 1988), pp. 736-764.
6. Solovay, Robert. *A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals Is Lebesgue Measurable*. Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.
7. Stob, Michael. *Is the Continuum Hypothesis True or False?* Calvin College and the University of Notre Dame, 2006.
8. Woodin, W. Hugh. *The Continuum Hypothesis, Part I*. Notices of the AMS, Vol. 48, Nº 6, Junio/Julio 2001, pp. 567-576.

[157] No todos los matemáticos adoptaron esta postura; Solomon Feferman, entre otros, afirma que (ZFC) agota nuestro conocimiento e intuición sobre el infinito, y considera a (HC) como *inherentemente vaga*; volveremos sobre este punto más adelante, cuando tratemos los papers:

- Feferman, Solomon. *Does mathematics need new axioms?* American Mathematical Monthly, vol. 106 (1999), pp. 99-111.
- Feferman, Friedman, Maddy & Steel. *Does Mathematics Need New Axioms?*

Por otro lado, no faltan quienes se toman la libertad de aceptar, o no, (HC) según sus necesidades del momento. Desde luego, no admiten su aceptación y su rechazo simultáneos.

- Unificación de nuevos resultados con los antiguos, que aparecen como casos especiales de los nuevos; hay abundancia de ejemplos de esta situación en toda la matemática, especialmente en la topología.
- Demostración o refutación de resultados previamente conjeturados [es lo que intentamos hacer con (HC) y con (HGC)].
- Potencia expositiva: el axioma (principio) de buena ordenación (BO; §7.), de poderosas consecuencias y enunciado no tan "obvio" como el de (AC), aunque equivalente con él.
- Cubre un hueco en una demostración "falsa pero natural"; ejemplo, (AC) para demostrar que todo conjunto tiene un cardinal.
- Interrelaciones con otras teorías.

En las secciones siguientes esbozamos la búqueda, aún inconclusa, de los axiomas mencionados; nuestro esbozo tendrá que ser necesariamente incompleto y parcial si queremos mantener esta tesis dentro de un volumen manejable.

Recordemos (13. 6. 2.) que la *altura transitiva* $H(\kappa)$ de un cardinal κ es el conjunto de todos los conjuntos X cuya clausura transitiva tiene cardinal menor que κ. La solución del problema del continuo depende de la comprensión de $H(\omega_2)$[158], es decir de que seamos capaces de encontrar los axiomas "correctos" para esta estructura. Surge así un programa de acción radicalmente distinto de lo hecho hasta ahora: ya no pretendemos crear un sistema axiomático que describa a *toda* la Teoría de Conjuntos; más bien, identificamos los axiomas "correctos" para $H(\omega)$, intentamos su generalización "adecuada" para $H(\omega_1)$ y tratamos de extender esta generalización a una familia "razonablemente completa" de axiomas para $H(\omega_2)$, resolviendo (esperamos) la Hipótesis del Continuo. Como veremos la generalización mencionada existe, pero cualquier generalización que dé una teoría que sea *fuertemente canónica* (en un sentido que especificaremos) debe llevar a la conclusión de que (HC) es *falsa*.

La estructura $H(\omega)$ no aporta elementos nuevos ni interesantes, pues es la familiar estructura (N, +, ·); de hecho podemos probar fácilmente que $H(\omega) \approx V_\omega$, introducida en (13. 6. 2. 1. b): vemos que *la Teoría de Números equivale a la Teoría de Conjuntos en ausencia del Axioma de Infinitud*.

La siguiente parada en nuestro estudio del infinito sí aporta elementos nuevos de gran interés.

17. 2. La Estructura $H(\omega_1)$. Esta estructura también es familiar, pues coincide con (P(N), N, +, ·, $\in$), que es la estructura standard para la Teoría de Números de Segundo Orden, en la cual no sólo hablamos de números, sino de *conjuntos* de números.

Como veremos, hay cuestiones naturales respecto de $H(\omega_1)$ que no son resolubles en (ZFC), pero que sí lo son si introducimos ciertos axiomas "razonables" y claramente "verdaderos". Estos axiomas serán los de Determinación y Determinación proyectiva (17. 2. 6. & ss.), para cuya formulación debemos comenzar estudiando ciertas clases especiales de subconjuntos del espacio euclídeo R^n; estos serán los conjuntos *analíticos* y los conjuntos *proyectivos*, que obtendremos a partir de los subconjuntos cerrados de espacios de dimensiones mayores. Recordamos dos operaciones geométricas elementales pero de gran importancia:

[158] La notación es standard aunque, en propiedad, el argumento de H es un *cardinal* y debiera escribirse $H(\aleph_2)$.

a) Proyección: Si $X \subseteq R^{n+1}$, su *proyección* es la imagen de X por la aplicación

$$\pi_{n+1}: R^{n+1} \to R^n,\ \pi(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) = (a_1, ..., a_n).$$

b) Complementación: Si $X \subseteq R^n$, su *complemento* es el conjunto $X^* = R^n \backslash X$.

Si $X \subseteq R^{n+2}$ es *cerrado*, entonces X* es abierto, y $\pi_{n+2}(X) \subseteq R^{n+1}$ es unión numerable de cerrados: la proyección y la complementación, aplicadas una vez, no nos sacan de los borelianos. Complementando y proyectando otra vez tenemos algo nuevo, la clase de los conjuntos *analíticos*. Más precisamente:

17. 2. 1. Definición. $X \subseteq R^n$ es *analítico* si $\exists$ $C \subseteq R^{n+2}$ cerrado: $X = \pi_{n+1}([\pi_{n+2}(X)]^*)$.

Sucesivas iteraciones de las operaciones "*" y "π" nos dan la clase de los conjuntos *proyectivos*. Más precisamente:

17. 2. 2. Definición. $X \subseteq R^n$ es *proyectivo* si $\exists$ $k \in N$, $C \subseteq R^{n+k}$ cerrado: X se obtiene de C aplicando un número finito de veces las operaciones "*" y "π".

Si k = 0 tenemos los conjuntos cerrados, si k = 1 tenemos los borelianos y si k = 2 tenemos los analíticos. Todos ellos son proyectivos pero, salvo mención en contra, la palabra se reserva para el caso $k \geq 3$. De ahora en más supondremos que n = 1, de modo que nos concentraremos en los subconjuntos proyectivos de la recta real. Estos conjuntos interesan porque pueden definirse usando un lenguaje *razonable*, el de la lógica de primer orden; por ejemplo son proyectivos:

- $Q = \{x:\exists n \exists m((mx = n) \wedge (m \in N) \wedge (n \in N) \wedge (m \neq 0))\}$.
- $(a, b) = \{x \mid (a < x < b)\}$.

La estructura $H(\omega_1)$ puede interpretarse como la de los conjuntos proyectivos: $A \subseteq H(\omega_1)$ es proyectivo sii

$\exists$ $\varphi(x_1, x_2) \in L(=, \in)$, $a \in H(\omega_1)$: $A = \{b \in H(\omega_1): (H(\omega_1), \in) \models \varphi(a, b)\}$[159]. .... (16)

Tales conjuntos A son *definibles*, a partir de parámetros, en la estructura $(H(\omega_1), \in)$; he aquí un método común en lógica: estudiar una estructura por medio de los conjuntos y relaciones *que se pueden definir* en ella. La teoría de los conjuntos proyectivos constituye un capítulo de la teoría descriptiva de conjuntos, originada a partir de principios del s. XX por pioneros de la escuela francesa tales como René

[159] Esta situación recuerda fuertemente al *Teorema de Representación de Riesz* del Análisis Funcional: toda funcional continua φ sobre un espacio de Hilbert H tiene asociado un vector $\mathbf{v}_\varphi \in H$: $\forall$ $\mathbf{w} \in H$, $\varphi(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_\varphi \rangle$.

Baire[160], Henri Lebesgue[161] y Henri Poincaré[162]. Más adelante, los rusos Nikolai Luzin y Mikhail Suslin hicieron aportes decisivos.

Los conjuntos proyectivos incluyen a todos los conjuntos de números reales que surgen en la matemática "cotidiana" exceptuando a los conjuntos "patológicos" cuya construcción exige el axioma de Elección (AC): compárese la gran diferencia entre la definición precisa y terminante del intervalo abierto $(a, b) = \{x \mid (a < x < b)\}$, para la cual tenemos una fórmula[163], y la "construcción" del conjunto de Vitali: debemos *creer* en su existencia si aceptamos (AC), pero no podemos definirlo de ninguna manera clara y precisa. Recordemos, también, la indefinición básica e insalvable que rodeaba a la partición paradójica de la esfera vista en el Teorema de Banach-Tarski (7. 11.); nos plantearemos ciertas preguntas estructurales a partir de esta construcción, y veremos hasta qué punto podemos responderlas:

17. 2. 3. Pregunta. ¿Podría haber una descomposición paradójica de la esfera en trozos analíticos?

Respuesta. No: toda descomposición paradójica exige que al menos una de las partes sea no medible Lebesgue, y Luzin demostró en 1917[164] que todo conjunto analítico es medible.

17. 2. 4. Pregunta. ¿Podría haber una descomposición paradójica de la esfera en trozos proyectivos?

Aún más profundamente:

17. 2. 5. Pregunta. ¿Es todo conjunto proyectivo medible Lebesgue?

Esta pregunta planteó una extraordinaria dificultad a los fundadores de la teoría, hasta el punto de hacer escribir a Nikolai Luzin en 1925:

La théorie des ensembles analytiques (...) n'y a là qu'une seule lacune importante: *on ne sait pas si tout complémentaire ... (d'un ensemble analytique) non dénombrable a la puissance du continu.* Les efforts que j'ai faits por résoudre cette question m'ont conduit à cette résultat tout inattendu: *il existe une famille admettant una application sur le continu d'ensembles effectifs*	La teoría de los conjuntos analíticos (...) sólo tiene una laguna importante: *no se sabe si todo complemento ... (de un conjunto analítico) no numerable tiene la potencia del continuo.* Los esfuerzos que hice para resolver esta cuestión me han conducido a este resultado inesperado: *existe una familia de la misma cardinalidad que el continuo de conjuntos*

[160] 1898: *Sur les fonctions discontinues qui se rattachment aux fonctions continues*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 129, pp. 1621-1623. 1899: *Sur les fonctions de variables réeles*. Annali de Matematica Pura ed Applicata 3(3), pp. 1-122. 1906: *Sur le représentation des fonctions discontinues. Première Partie*. Acta Mathematica 30, pp. 1-48. 1909: *Sur le représentation des fonctions discontinues. Deuxième Partie*. Acta Mathematica 32, pp. 97-176.

[161] 1902: *Integrale, longueur, aire*. Annali de Matematica Pura ed Applicata 7(3), pp. 231-359. 1905: *Sur les fonctions représentables analytiquement*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1(6), pp. 139-216.

[162] 1906: *Les mathématiques et la logique*. Révue de Métaphysique et de morale 14, pp. 17-34.

[163] Usamos dos fórmulas en realidad: $(a, b) = A \cap B$. con $A = \{x \in R: x > a\}$, y $B = \{x \in R: b > x\}$. Nótese cómo a y b actúan como "parámetros definidores" en la fórmula $\varphi(x, y)$ = "$x > y$".

[164] *Sur la classification de M. Baire*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 164, pp. 91-94.

telle q'on ne sait pas et l'on ne saura jamais si un ensemble quelconque de cette famille (supposé non-dénombrable) a la puissance du continu, (...) et même si'l est mesurable.[165]

efectivos[166] *tal que no se sabe, ni se sabrá jamás, si un conjunto cualquiera no numerable de esta familia tiene la potencia del continuo, (...) e incluso si es medible.*

Se estaba rozando un problema de consistencia relativa, que sólo empezó a aclararse en 1940 cuando Gödel publicó su histórico paper sobre la consistencia de (ZF) + (AC) + (HC)[167]. En él se prueba un resultado anunciado sin demostración por el mismo Gödel en 1938:

Si (ZFC) es consistente, también lo es (ZFC) +
"Existe un conjunto proyectivo y no medible de números reales". .... (17)

Corolario inmediato de esta demostración es:

Si (ZFC) es consistente, también lo es (ZFC) +
"Existe una partición paradójica de la bola unitaria en la cual
cada parte no sólo es un conjunto proyectivo, sino que es la proyección
del complemento de un conjunto analítico". .... (18)

Así, el teorema de Luzin de 1917 acerca de la medibilidad de los analíticos es lo más fuerte que podemos decir respecto de los conjuntos proyectivos. Inmediatamente surge un problema: hay cuestiones simples y naturales acerca de los conjuntos proyectivos que corren la misma suerte que (HC), y por las mismas razones. *Necesitamos nuevos axiomas* si queremos determinar las propiedades *deseables* de los proyectivos. Típicamente, los axiomas necesarios invocarán la existencia de cardinales "grandes"; en (13. 2.) introdujimos los cardinales inaccesibles, y en (13. 7.) vimos que su existencia es independiente de (ZFC). Sobre la hipótesis de que existe un cardinal (no numerable) inaccesible, Robert Solovay[168] probó importantes resultados directamente relacionados con la cuestión que estudiamos aquí. Reproducimos a continuación algunas de sus conclusiones omitiendo las complejas demostraciones, basadas en el método de forzamiento (15. y ss.).

[165] Luzin, Nikolai. *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 180 (1925), pp. 1572-1574.

[166] Es decir, definible explícitamente sin usar (AC).

[167] *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Ann. of Math. Stud., vol. 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1940, pp. 33–101. Reproducido en Gödel, Kurt. *Collected Works, Volume II*; Publications 1938-1974. Oxford University Press, 1990.

[168] Solovay, Robert. *A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals Is Lebesgue Measurable*. Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.

La existencia de un conjunto no medible Lebesgue no puede probarse en (ZF) sin (AC). De hecho, aún si agregamos $(DC)_\omega$[169] a (ZF), la teoría resultante carece de la fuerza necesaria para garantizar la existencia de conjuntos no medibles (L).

Sea (CI) el axioma "Existe un cardinal inaccesible"; el paper de Solovay empieza con el

17. 2. 5. 1. Teorema. Si existe un modelo $\in$-transitivo para (ZFC) + (CI), entonces existe un modelo $\in$-transitivo para (ZF) en el que valen:

- $(DC)_\omega$.
- Todo conjunto de números reales es medible (L).
- Todo conjunto A de números reales tiene la *propiedad de Baire*: $\exists$ U $\subseteq$ R abierto tal que A $\supseteq$ U (la diferencia simétrica entre A y U) es de primera categoría, o sea el interior de su clausura es vacío.
- Todo A $\subseteq$ R no numerable tiene un subconjunto no vacío *perfecto*, es decir cerrado y sin puntos aislados.
- Sea $\{A_x\}_{x \in R}$ una familia de conjuntos no vacíos de números reales indexada por los números reales. Entonces $\exists$ h_1, h_2: R $\to$ R medibles Borel tales que:
  - $\{x: h_1(x) \notin A_x\}$ es de medida (L) nula.
  - $\{x: h_2(x) \notin A_x\}$ es de primera categoría. ▌

Solovay afirma tajantemente su creencia en la validez de (AC):

Of course, the Axiom of Choice is true, and so there are non-measurable sets.[170]

Se pregunta a continuación si los conjuntos no medibles (L) podrían describirse explícitamente, e introduce la noción de conjunto definible que es, básicamente, la de conjunto proyectivo dada en (1). Restringido a los definibles, el autor enuncia su siguiente

17. 2. 5. 2. Teorema. Si existe un modelo $\in$-transitivo para (ZFC) + (CI), entonces existe un modelo $\in$-transitivo para (ZFC) + (HGC) en el que valen:

- Todo conjunto *proyectivo* (definible) de números reales es medible (L).
- Todo conjunto *proyectivo* (definible) A de números reales tiene la *propiedad de Baire*: $\exists$ U $\subseteq$ R abierto tal que la diferencia simétrica entre A y U es de primera categoría.
- Todo A $\subseteq$ R no numerable y *proyectivo* (definible) tiene un subconjunto no vacío *perfecto*, es decir cerrado y sin puntos aislados.
- Sea $\{A_x\}_{x \in R}$ una familia de conjuntos *proyectivos* (definibles) no vacíos de números reales indexada por los números reales. Entonces $\exists$ h_1, h_2: R $\to$ R medibles Borel tales que:
  - $\{x: h_1(x) \notin A_x\}$ es de medida (L) nula.
  - $\{x: h_2(x) \notin A_x\}$ es de primera categoría. ▌

[169] El Axioma de Elección Dependiente en R; ver (9. 1.).

[170] Op. cit., p. 3.

El añadido de (CI) es indispensable, pero es notable el comentario que al respecto hace Woodin:

The consistency with ZFC that every projective set is Lebesgue measurable, while true, cannot be proved assuming just the consistency of ZFC.[171]

Sin embargo, una consecuencia de las demostraciones que Solovay da de (17. 2. 5. 1. y 2.) es la siguiente proposición, *que no requiere a (CI) como hipótesis*, y que debemos comparar con (18):

Si (ZFC) es consistente, también lo es (ZFC) +
"No existe ninguna partición paradójica de la bola unitaria
en la cual cada parte sea un conjunto proyectivo". .... (19)

Vemos que, ya al nivel de $H(\omega_1)$, existen cuestiones estructurales naturales que son formalmente indecidibles. La resolución de estas cuestiones, si existe, demanda el descubrimiento de nuevos axiomas; (CI) fue uno de ellos, el primero de un grupo llamado Axiomas de Grandes Cardinales. A medida que avancemos veremos otros axiomas de grandes cardinales y también otros grupos de axiomas, llamados *de forzamiento* (17. 2. 9. y ss.). Por ahora, siguiendo a Woodin, nos moveremos en otra dirección.

17. 2. 6. Determinación (I).

a) Un juego: Fijemos $A \subseteq [0, 1]$ y definamos el *juego infinito* J_A entre dos jugadores, I y II, de la siguiente manera: I y II se alternan en la elección de números $\varepsilon_i \in 2 = \{0, 1\}$, de modo que I elige ε_i para i impar, y II elige ε_i para i par. *I gana* si $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i 2^{-i} \in A$; *II gana* si $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i 2^{-i} \notin A$.

b) Partidas: Una *partida* es una materialización cualquiera del juego, es decir una sucesión arbitraria $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$, $\varepsilon_i \in 2\ \forall$ i. Existen $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$ partidas.

c) Estrategia: Sea BIN el conjunto de todas las sucesiones binarias finitas. Una estrategia τ es una función τ: BIN $\to 2 = \{0, 1\}$.

d) Generación de partidas: Una partida P *está generada por I de acuerdo con la estrategia* τ si $\varepsilon_1 = \tau(\emptyset)$ y $\varepsilon_{2k+1} = \tau(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2k})\ \forall\ k \geq 1$. P *está generada por II de acuerdo con* τ si $\varepsilon_{2k} = \tau(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2k-1})\ \forall\ k \geq 1$.

e) Estrategias ganadoras: La estrategia τ *es ganadora para I* si toda partida P generada por I de acuerdo con τ es ganada por I. La estrategia τ *es ganadora para II* si toda partida P generada por II de acuerdo con τ es ganada por II.

[171] Woodin, W. Hugh. *The Continuum Hypothesis, Part I*, p.571. Notices of the AMS, Vol. 48, Nº 6, Junio/Julio 2001, pp. 567-576; el subrayado es de Woodin.

Definición 17. 2. 6. 1: El juego J_A *está determinado* si existe una estrategia ganadora para I o II. En ese caso, decimos que el *conjunto* $A \subseteq [0, 1]$ *está determinado*.

Ahora introducimos un nuevo axioma:

17. 2. 6. 2. Axioma de Determinación (AD)[172]**.** $A \subseteq [0, 1]$ está determinado $\forall A \in P([0, 1])$.

Una posible justificación para (AD) es la siguiente: se sabe que los juegos *finitos* de información perfecta están bien determinados, es decir siempre hay estrategias que conducen al triunfo de uno u otro jugador[173]. Si, en el caso infinito, suponemos que I y II son jugadores infinitamente sabios y poseen información completa y exhaustiva acerca de A, entonces el resultado final no puede depender del azar; esto es lo que afirma (AD). El problema de la consistencia de (AD) con (ZF) está sin resolver aunque, como veremos en (17. 2. 6. 4.), (AD) es incompatible con el Axioma de Elección, (AC). Si (AD) y (ZF) son consistentes tendríamos una demostración de la independencia de (AC) respecto de (ZF). Desde luego, la demostración de Gödel de que (ZF) + (AC) es consistente implica la consistencia respecto de (ZF) de la negación de (AD).

Hay casos en que la determinación se puede demostrar sin necesidad del axioma:

- Todo conjunto finito o infinito numerable está determinado (II gana siempre). Este es un caso sencillo de aplicación del *método diagonal* de Cantor: si $A = \{a_i\}_{i\in\omega}$, la estrategia ganadora para II consiste en elegir $\varepsilon_{2k} = 1 - a_{k,\, 2k}$, $k \geq 1$, siendo $a_{i,\, j}$ la j-ésima cifra del desarrollo binario de a_i.

- Todo intervalo abierto está determinado para uno u otro jugador; más aún, si A pertenece al álgebra de Boole generada por los subintervalos abiertos de [0, 1] entonces A está determinado; lo mismo pasa si A es un subconjunto cerrado (Teorema de Gale & Stewart)[174].

- Al final del paper mencionado Gale y Stewart plantean la pregunta de si A está determinado si es un boreliano; dos décadas más tarde, en un *tour de force* técnico, Martin probó que la respuesta es afirmativa: *en (ZFC), los borelianos están determinados*[175].

[172] Mycielski & Steinhaus. *A Mathematical Axiom Contradicting the Axiom of Choice*. Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math., Astron. Phys. 10 (1962), 1–3.

[173] von Neumann & Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1955.

[174] Gale & Stewart. *Infinite Games with Perfect Information*. Recogido en *Contributions to the Theory of Games* (Harold W. Kuhn and Alan W. Tucker, eds.), Ann. of Math. Stud., vol. 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953, pp. 245–266.

[175] Martin, Donald A. *Borel Determinacy*. Ann. of Math. 102 (1975), 363–371.

17. 2. 6. 3. Los Borelianos. Un aspecto notable de la demostración de Martin es que Friedman había demostrado previamente[176] que la determinación de los borelianos no podía probarse en (ZC), el sistema (ZFC) sin el esquema axiomático de reemplazo (2. 5.). La mayor parte de los matemáticos trabajan, consciente o inconscientemente, en este sistema reducido de axiomas.

Vamos a detenernos un instante en el estudio de los borelianos, a fin de entender el esbozo de la compleja demostración de Martin de que los conjuntos de esta clase están determinados. Como sabemos, el *álgebra de Borel* de un espacio topológico X es la menor colección de subconjuntos que contiene a los abiertos y que es cerrada por uniones numerables y complementos; de aquí sigue que también es cerrada por intersecciones numerables. Una manera sencilla de probar que esta álgebra existe es ver que el álgebra de partes del espacio cumple con las propiedades de contener a los abiertos, sus uniones numerables y sus complementos, y por lo tanto la familia de álgebras de conjuntos que describimos es no vacía; el álgebra de Borel sería la intersección de todas ellas. Esta definición, lógicamente satisfactoria, no nos da una gran idea de cómo son los borelianos. En la búsqueda de criterios más manejables y explícitos para determinar si un conjunto es o no boreliano, introduciremos la noción de *jerarquía de Borel* en X. Esta jerarquía consiste en clases de subconjuntos de X que denotaremos por Σ_α^0, Π_α^0 y Δ_α^0, para cada ordinal $\alpha > 0$; la definición inductiva de las clases es la siguiente:

Un conjunto es Σ_1^0 sii es abierto.

Un conjunto es Π_α^0 sii su complemento es Σ_α^0.

Un conjunto A es Σ_α^0 para $\alpha > 1$ sii $\exists$ $\{A_i\}_{i\in\omega}$ tal que cada A_i es $\Pi_{\alpha i}^0$ para algún $\alpha_i < \alpha$ y $A = \bigcup A_i$.

Un conjunto es Δ_α^0 sii es Σ_α^0 y Π_α^0 simultáneamente.

Se puede probar que $\bigcup\Sigma_\alpha^0 = \bigcup\Pi_\alpha^0 = \bigcup\Delta_\alpha^0$, las uniones tomadas sobre todos los ordinales $< \omega_1$, y que un conjunto está en cualquiera de estas uniones sii es boreliano. La jerarquía sigue el modelo de cómo puede construirse paso a paso un boreliano a partir de los abiertos unsando complementaciones y uniones numerables. Un boreliano es *de rango finito* si está en Σ_α^0 para algún ordinal finito α; en caso contrario es *de rango infinito*. Las clases rangos pequeños tienen nombres especiales, y son especialmente importantes en la Topología y el Análisis: los conjuntos Σ_1^0 son los *abiertos* y los Π_1^0 son los *cerrados*. Los conjuntos Σ_2^0 son los F_σ y los Π_2^0 son los G_δ. Todavía introduciremos otra notación más: un conjunto proyectivo A es de categoría $\Sigma_{\sim 2}^1$ si es proyección del complemento de un analítico. Usaremos estos conjuntos en (17. 2. 8. 2.).

Antes de describir la demostración, dada por Martin, de la determinación de los borelianos, debemos aclarar un punto importante. El juego descripto en (17. 2. 6. a) es un caso especial en el que los jugadores generan un elemento de 2^N, con $2 = \{0, 1\}$ dotado de la topología producto, que coincide con la usual de R; esto cubre las representaciones binarias de los números reales en el intervalo unitario U = [0, 1]. Aplicado a este caso, el teorema de Gale-Stewart dice que cualquier abierto en 2^N (o

---

[176] Friedman, Harvey. *Higher Set Theory and Mathematical Practice*. Ann. of Math. Logic 2 (1971), 325–357. Recogido en Sacks. *Mathematical Logic in the 20th Century*. Singapore University Press, 2003.

sea, en U) está determinado. Ahora bien, nada en la demostración de Gale-Stewart exige que el conjunto usado por los jugadores para hacer la partida sea 2 = {0, 1}; el teorema vale igual de bien para cualquier Z discreto, siempre y cuando dotemos a Z^N de la topología producto.

Sea $B \subset U$ un boreliano. Haremos un juego J_C en el que los jugadores eligen elementos de Z, con Z un conjunto discreto apropiado; a grandes rasgos, diremos que la determinación de B seguirá del hecho de que asociamos a B un abierto $C \subset Z^N$, elegido de tal modo que la determinación de C (que vale por lo probado por Gale-Stewart y nuestras observaciones previas) implique la determinación de B. El discreto Z y el abierto C se determinan por inducción transfinita sobre el *rango* α que tiene B en la *jerarquía de Borel* (ver más arriba), $\alpha < \omega_1$. A medida que B varía sobre todos los borelianos, Z es $P^\alpha(R)$, definido por:

i) $P^0(R) = R$.
ii) $P^{\alpha+1}(R) = P(P^\alpha(R))$.
iii) $P^\alpha(R) = \bigcup_{\beta<\alpha} P^\beta(R)$ si α es ordinal límite, $0 < \alpha < \omega_1$.

En la teoría (ZC) ni siquiera puede probarse la existencia de $P^\omega(R)$ de modo que, tal como predijo Friedman, la demostración de Martin no puede llevarse a cabo sólo en (ZC).

17. 2. 6. 4. Incompatibilidad de (AD) con (AC). El Axioma de Determinación (AD) es demasiado fuerte porque implica la negación del Axioma de Elección (AC), al que no quisiéramos renunciar. Para ver la incompatibilidad de (AD) con (AC), usaremos (AC) para construir un subconjunto M indeterminado en U = [0, 1], respecto de un juego J en el que I y II eligen por turno elementos de 2 = {0, 1}. Partimos de tres hechos básicos:

- El conjunto S_I de estrategias ganadoras para I tiene cardinalidad **c**.
- El conjunto S_{II} de estrategias ganadoras para II tiene cardinalidad **c**.
- El conjunto 2^N de todas las posibles partidas tiene cardinalidad **c**.

Usando (AC) bien-ordenamos S_I y S_{II}, notando que el buen orden "<" puede construirse de modo que cada sección inicial propia tenga una potencia *menor* que la del continuo[177]. Trabajaremos por inducción transfinita sobre $(S_I, <)$ y $(S_{II}, <)$ para construir M "paso a paso":

1. Sea S_{I1} la primera estrategia del jugador I. Jugamos la partida generada por esta estrategia, obteniendo un punto P_1. Declaramos $P_1 \notin M$, de modo que S_{I1} es perdedora para S_I.
2. Sea S_{II1} la primera estrategia del jugador II. Jugamos la partida generada por esta estrategia, obteniendo un punto P_2. Hacemos las alteraciones que sean necesarias a esta partida para garantizar que $P_2 \neq P_1$ y declaramos $P_2 \in M$, de modo que S_{II1} es perdedora para S_{II}.
3. Repetimos con las siguientes estrategias (si las hay), asegurándonos de que las sucesiones ya consideradas no se vuelvan a generar; para lograr esto,

[177] Esto imita el buen orden de N, en el cual toda sección inicial propia tiene cardinal finito.

comenzamos con el conjunto 2^N de todas las partidas y cada vez que generamos una la de 2^N.
4. Para cualquier elemento de 2^N que no haya sido considerado en la construcción anterior, decidimos arbitrariamente si pertenece o no a M.

Esto define un juego J_M. Dada una estategia $\tau \in S_I$, ésta fue considerada en algún "momento" de la sucesión transfinita 1, 2, ..., **c** y hemos decidido que τ era perdedora para I. Pero lo mismo pasa para cualquier otra estrategia de cualquiera de los dos jugadores, por lo que M es indeterminado. Concluimos que (AC) y (AD) son incompatibles.

17. 2. 6. 5. Determinación Proyectiva (DP). El conjunto M construido con la ayuda del Axioma de Elección no es, en general, proyectivo. Esto sugiere el siguiente axioma:

Axioma de Determinación Proyectiva (DP): Si $A \subseteq [0, 1]$ es proyectivo, entonces el juego J_A está determinado[178].

Nos proponemos dar evidencia de que éste es el axioma "correcto" para decidir la Hipótesis del Continuo al nivel de los conjuntos proyectivos; no probamos teoremas, pero citamos fuentes:

- Si vale (DP), entonces todo conjunto proyectivo es medible Lebesgue (Mycielski & Swierczkowski. *On the Lebesgue Measurability and the Axiom of Determinateness*. Fund. Math. Vol. 54 (1964), pp. 67–71).
- Si vale (DP), entonces todo conjunto proyectivo no numerable tiene cardinal $2^{\aleph_0}$ (op. cit.): no existen contraejemplos a (HC) entre los conjuntos proyectivos y, *en este sentido*, la Hipótesis del Continuo *es cierta*.
- Si vale (DP), entonces todo conjunto proyectivo no numerable tiene un subconjunto cerrado no numerable (Morton Davis: *Infinite Games of Perfect Information*, Annals of Math. Studies, Volume 52, Advances in Game Theory (1964), pp. 85-101).

(DP) tiene interesantes relaciones con (AC), para estudiar las cuales debemos dar algunas definiciones.
1. Si $A \subseteq R^2$ y $x \in R$, la *sección de A en x* es $A_x = \{y \in R: (x, y) \in A\}$.

2. Sea $B = \{x \in R: A_x \neq \emptyset\}$ la *proyección* de A. El conjunto puede interpretarse como la unión

de sus secciones, o sea como una función $A: B \to P(R)$, según la cual obtenemos la familia indexada de conjuntos $\{A_x\}_{x \in B}$.

3. Una función $f: B \to R$ *uniformiza* a A si $\forall\ x \in B$, $f(x) \in A_x$. También decimos que el conjunto

[178] Mycielski & Steinhaus. *A Mathematical Axiom Contradicting the Axiom of Choice*. Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math., Astron. Phys. 10 (1962), 1–3.

$G = gr(f) \subseteq A$ *uniformiza* a A. Notemos que G (o, lo que es lo mismo, f) es una función de elección sobre la familia indexada de conjuntos $\{A_x\}_{x\in B}$. Así, decir que un conjunto puede uniformizarse implica que la familia de sus secciones cumple con (AC).

4. Una función $f: R \to R$ es *proyectiva* si $gr(f) \subseteq R^2$ es un conjunto proyectivo.

5. Sean A un conjunto, M la clausura transitiva de {A} (13. 5. b); decimos que A es un *conjunto*

proyectivo general si $\exists\ \pi: R \to M$ suryectiva tal que el conjunto

$$T = \{(x, y) \in R^2: \pi (x) \in \pi(y)\}$$

es proyectivo. Si $A \subseteq R^N$, entonces A es proyectivo sii es proyectivo general, pero los conjuntos proyectivos generales no tienen por qué ser subconjuntos de R^N: pueden también ser ordinales, funciones, etc.; vemos, pues, que la noción de conjunto proyectivo general es una auténtica generalización de la de conjunto proyectivo.

Ahora podemos dar resultados que ligan a (DP) con (AC):

- En la página 286 de su libro *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* (Gauthier-Villars et C^ie, Éditeurs. Paris, 1930), Luzin planteó la pregunta de si todo subconjunto proyectivo del plano puede ser uniformizado por una función proyectiva. Más de cuarenta años después, Yiannis Moschovakis demuestra que la respuesta es afirmativa si vale (DP)[179].
- Si vale (DP) entonces (AC) *no vale proyectivamente*, en el sentido de que no existe ningún buen orden de los reales que sea un subconjunto proyectivo de R^2 (un buen orden es un caso particular de relación, que puede caracterizarse por el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) que cumplen con $a \leq b$; en ese sentido, cualquier relación en R se identifica con un subconjunto de R^2).
- Si vale (DP) entonces (AC) *vale proyectivamente*, en el sentido de que si $F: R \to V$ es un conjunto proyectivo general, entonces existe una función de elección para F que también es un conjunto proyectivo general. Por ejemplo, según la definición 2. más arriba, un conjunto proyectivo $A \subseteq R^2$, puede considerarse como una función $A: B \to P(R)$, que podemos extender a una $F: R \to V$ si hacemos $F(x) = \varnothing$ si $x \notin B$. Por el resultado de Moschovakis mencionado recién, A (y por lo tanto F) puede ser uniformizado por una función proyectiva que, por 3. más arriba, es una función de elección.

17. 2. 7. Grandes Cardinales (II). Introdujimos la idea de los grandes cardinales en (13.) y tuvimos ocasión, desde entonces, de tocar el tema de forma dispersa en diversas oportunidades; ahora seremos más sistemáticos[180].

La teoría de los grandes cardinales arranca con un problema central en el Análisis Real, el *problema de la medida*. Sabemos que, si vale (AC), no existe una medida μ definida en P(R) que sea σ-aditiva, invariante por traslaciones y tal que $\mu([a, b]) = b - a$. Nos preguntamos, entonces, si existe alguna medida μ definida en P(R) [o,

[179] Moschovakis 02: *Uniformisation in a Playful Universe*. Bulletin of the American Mathematical Society Volume 77, Number 5, September 1971, pp. 731 - 736.

[180] Lo que sigue fue tomado de Hrbacek & Jech. *Introduction to Set Theory*, pp. 241 - 249.

mejor, en P(S) para cualquier conjunto S infinito] que sea σ-aditiva. Para evitar casos triviales como el de la *medida del conteo* según la cual $\forall$ A $\subseteq$ S es

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{si } \mathrm{card}(A) = n \in \boldsymbol{\omega} \\ \infty & \text{si } \mathrm{card}(A) = \infty \end{cases},$$

exigiremos que $\mu(S) = 1$.

17. 2. 7. 1. Definición. Sea S un conjunto no vacío. Una *medida* (probabilística σ-aditiva no trivial) sobre S es una función μ: P(S) $\to$ [0, 1] tal que:
(a) $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(S) = 1$.
(b) $X \subseteq Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
(c) $X \cap Y = \varnothing \Rightarrow \mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.
(d) $\mu(\{a\}) = 0\ \forall\ a \in S$.
(e) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de subconjuntos de S entonces $\boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}(x_n)$.

Es claro que la existencia o no de una medida sobre S depende exclusivamente de la cardinalidad de S, pues una biyección entre S y S' permite llevar la medida de S a S'. Por tal motivo, podemos centrarnos en un *cardinal* κ y estudiar el *problema de la medida* para κ, es decir averiguar si κ tiene una medida σ-aditiva no trivial. De (d) y (e) sigue que todo subconjunto a los sumo numerable de S tiene medida 0 de modo que, si S es medible (es decir, si hay una medida sobre S) entonces S es no numerable. Es natural que nos preguntemos si $\aleph_1$, el primer cardinal no numerable, es medible. La respuesta es negativa:

17. 2. 7. 2. Teorema. $\aleph_1$es no medible.

Demostración. Sea μ una medida sobre S = ω_1 y consideremos la familia

$$J = \{X \in P(S): \mu(X) = 0\};$$

J es un ideal, pues:

1. $X, Y \in J \Rightarrow X \cup Y \in J$.
2. $X \in J,\ Y \subseteq X \Rightarrow Y \in J$.
3. $S \notin J$.

(cf. 8. 4.). Otras propiedades de J son:

4. $x \in S \Rightarrow \{x\} \in J$: obvio; esto garantiza que $J \neq \varnothing$.
5. Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$es una sucesión de elementos de J entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in J$: fácil.
6. Si $\{X_i\}_{i<\alpha} \subseteq P(S)$ es una familia *no numerable* de subconjuntos *disjuntos* de S, entonces $X_i \in$

J para algún i: sea $\{X_i\}_{i<\alpha} \subseteq P(S)$ una familia de subconjuntos *disjuntos* de S, siendo $\mu(X_i) > 0 \ \forall$ i; sea $T_n = \{X_i: \mu(X_i) \geq \frac{1}{n}\}$. Como $\mu(S) = 1$, sólo puede haber *finitos* X_i en cada T_n y, como $\{X_i\}_{i<\alpha} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, debe ser $\alpha \leq \omega$.

Sea $\xi < \omega_1$, de modo que ξ es finito o numerable; en ambos casos, $\exists\ f_\xi: \omega \to \omega_1: \xi \subseteq Im(f_\xi)$: si $\xi = n \in \omega$, entonces f_ξ = id sirve, pues $Im(f_\xi) = \omega$ y $\xi \subseteq \omega$. Si $|\xi| = \infty$, entonces hay una biyección f_ξ entre ω y $\xi + 1 = \xi \cup \{\xi\}$; entonces, $\exists\ n \in \omega: f_\xi(n) = \xi \subseteq \xi \cup \{\xi\} = Im(f_\xi)$.

Construimos ahora la "matriz" $[A_{\alpha n}]$: $\alpha < \omega_1$, $n < \omega$, donde cada $A_{\alpha n} \in P(S)$, de la siguiente manera: para cada $\xi < \omega_1$ elegimos [usando (AC) si $|\xi| = \infty$] una f_ξ como las mencionadas recién y hacemos: $A_{\alpha n} = \{\xi < \omega_1: f_\xi(n) = \alpha\}$. La "matriz" $[A_{\alpha n}]$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\forall\ n < \omega, \forall\ \alpha, \beta < \omega_1, \alpha \neq \beta \Rightarrow A_{\alpha n} \cap A_{\beta n} = \varnothing$: $\xi \in A_{\alpha n} \cap A_{\beta n} \Rightarrow f_\xi(n) = \alpha$ y $f_\xi(n) = \beta$.
2. $\forall\ \alpha < \omega_1$, $T = S \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha n}$ es a lo sumo numerable: sea $\xi \in T$, de modo que $\xi \notin A_{\alpha n}\ \forall$ n; será entonces $f_\xi(n) \neq \alpha\ \forall\ n < \omega \Rightarrow \alpha \notin Im(f_\xi)$; ahora, $\alpha < \xi \Rightarrow \alpha \in \xi \Rightarrow$ [pues $\xi \subseteq Im(f_\xi)$]: $\alpha \in Im(f_\xi)$, absurdo. Concluimos que $\xi \leq \alpha \Rightarrow T \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$.

Sea $\alpha < \omega_1$ fijo; la numerabilidad de T implica $\mu(T) = 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha n}\right) = 1$: no puede ser $\mu(A_{\alpha n}) = 0\ \forall\ n < \omega$. Sigue que para cada $\alpha < \omega_1\ \exists\ n_\alpha \in \omega: \mu(A_{\alpha n_\alpha}) > 0$. Como las α's son no numerables y las n's son numerables, debe haber un $n < \omega$ con la condición de que el conjunto $Z = \{\alpha: n_\alpha = n\}$ es no numerable. Sea $U = \{A_{\alpha n}: n_\alpha = n\}$; U es una colección no numerable de conjuntos disjuntos de medida positiva (recordemos que n está fijo y que las α's asociadas a este n son no numerables), contradiciendo la propiedad 6. ▌

17. 2. 7. 3. Corolario. Si existe una medida en **c**, entonces (HC) es falsa[181].

Demostración. En efecto, $\aleph_1$ es no medible, luego si $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$ es medible no puede ser $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. ▌

El problema de la medida está relacionado con la cuestión de si se puede extender la medida de Lebesgue a todo subconjunto de R, es decir si $\exists\ \mu: P(R) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ σ-aditiva y tal que, si X es medible Lebesgue, entonces $\mu(X)$ es su medida de Lebesgue. Si μ existe, entonces su restricción a P([0,1]) es una medida no trivial sobre S = [0,1] satisfaciendo (a)-(e) de (17. 2. 7. 1.). Recíprocamente, puede probarse que, si existe una medida μ σ-aditiva no trivial sobre un S de cardinalidad **c**, entonces

[181] Este notable teorema aparece por primera vez en Banach & Kuratowski: *Sur une généralisation du probleme de la mesure*. Fundamenta Mathematicae Tom 14 (1929), pp. 127 – 131.

la medida de Lebesgue puede extenderse a una medida σ-aditiva en P(R). El Corolario (17. 2. 7. 3.) nos dice que, si (HC) es cierta, entonces tal medida no existe.

Lo visto nos demuestra que el problema de la medida, una cuestión que surge naturalmente en el análisis real abstracto, tiene una profunda relación con el problema del continuo y, sorprendentemente, también con el de los cardinales inaccesibles (13. 2. y ss.); la siguiente sucesión de notables teoremas da cuenta de lo dicho.

Sea S un conjunto medible con medida no trivial μ y volvamos a considerar el ideal J de los subconjuntos de S de medida 0. Sea κ el *mínimo* cardinal tal que, para algún conjunto S de tamaño κ, S contiene un ideal J con las propiedades 4 - 6 mencionadas en la demostración de (17. 2. 7. 2.); esto implica que *κ mismo contiene un tal ideal*.

17. 2. 7. 4. Lema. $\forall\ \lambda < \kappa$, $\{X_\eta\}_{\eta<\lambda} \subseteq J \Rightarrow \bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \in J$ [esto es el análogo de la propiedad 8 de J en (17. 2. 7. 2.)].

Demostración. Sea $\lambda < \kappa$: $\{X_\eta\}_{\eta<\lambda} \subseteq J$ pero $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \notin J$; podemos suponer que los X_η son disjuntos reemplazando, si es necesario a X_η por $Y_\eta = X_\eta \backslash \bigcup_{\nu<\eta} X_\nu$. Sea $L = \{\alpha \subseteq \lambda\colon \bigcup_{\eta<\alpha} X_\eta \in J\}$; $L \neq \emptyset$, pues para $\alpha = 2$ se tiene $X_1 \in J$. L es un ideal: por ejemplo, $\lambda \notin L$, pues $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \notin J$; también es cierto que L cumple con las propiedades 4 – 6 de (17. 2. 7. 2.): por ejemplo si $\eta \in \lambda$, $\{\eta\} \in L$, pues $X_\eta \in J$; ésta es la propiedad 4; las otras dos se prueban de modo similar. Así, $\lambda < \kappa$ cumple con las propiedades 4 – 6, contradiciendo la minimalidad de κ. ▌

17. 2. 7. 5. Corolario. Si $X \subset \kappa$ y $\forall\ |X| < \kappa$, entonces $X \in J$. ▌

17. 2. 7. 6. Corolario. κ es un cardinal regular no numerable.

Demostración. κ es no numerable porque todo subconjunto a lo sumo numerable pertenece a J. Si κ no fuera regular, sería unión de menos de κ conjuntos de cardinal menor que κ y por lo tanto se tendría $\kappa \in J$. ▌

17. 2. 7. 7. Lema. κ es débilmente inaccesible [cfr. (13. 2. b-1)].

Demostración. Como κ es un cardinal regular no numerable, bastará con demostrar que κ es un cardinal límite [cfr. (13. 2. a-3)]. Sea entonces $\kappa = \aleph_{\nu+1}$; para cada $\xi < \kappa$, elegimos una $f_\xi\colon \omega_\nu \to \omega_{\nu+1}\colon \xi \subseteq Im(f_\xi)$ [cfr. (12. 2. 7. 2.)]. Construimos ahora la "matriz" $[A_{\alpha\eta}]$: $\alpha < \omega_{\nu+1}$, $\eta < \omega_\nu$, donde cada $A_{\alpha\eta} \in P(\kappa)$, haciendo: $A_{\alpha\eta} = \{\xi < \kappa\colon f_\xi(\eta) = \alpha\}$. Como antes, la "matriz" $[A_{\alpha\eta}]$ tiene las siguientes propiedades:

3. $\forall\ \eta < \omega_\nu$, $\forall\ \alpha, \beta < \omega_{\nu+1}$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow A_{\alpha\eta} \cap A_{\beta\eta} = \emptyset$: $\xi \in A_{\alpha\eta} \cap A_{\beta\eta} \Rightarrow f_\xi(\eta) = \alpha$ y $f_\xi(\eta) = \beta$.
4. $\forall\ \alpha < \omega_{\nu+1}$, $|T| = |\kappa \setminus \bigcup_{\eta<\omega_\upsilon} A_{\alpha\eta}| \leq \aleph_\nu$.

Siguiendo la demostración de 12. 2. 7. 2. pero usando 17. 2. 7. 3. en vez del ideal de conjuntos de medida 0, probamos que para cada $\alpha < \omega_{\nu+1}$ $\exists$ $\eta < \omega_\nu$: $A_{\alpha\eta} \notin J$. Con el mismo argumento que antes construimos un U de tamaño $\aleph_{\nu+1}$ (y por lo tanto no numerable) de conjuntos mutuamente disjuntos $\notin$ J, contradiciendo la propiedad 6 de (12. 2. 7. 2.). ▌

Lo visto después de 12. 2. 7. 2. se resume así:

17. 2. 7. 8. Teorema. Si existe una medida en un conjunto S, entonces algún cardinal $\kappa \leq |S|$ es débilmente inaccesible. ▌

17. 2. 7. 9. Corolario. Si existe una medida en **c**, entonces **c** $\geq \kappa$ para algún cardinal débilmente inaccesible κ. ▌

Antes de pasar a hablar de los grandes cardinales (de entre los cuales distinguiremos a los cardinales medibles), introducimos una definición y un teorema que enunciamos sin demostración.

17. 2. 7. 10. Definición. Una medida μ sobre un conjunto S es *bivaluada* si sólo toma dos valores, 0 y 1. Notemos que la exigencia de la σ-aditividad implica que *dos subconjuntos de medida no nula* (es decir, de medida 1) *no pueden ser disjuntos*. Equivalentemente, el complemento de un conjunto de medida no nula tiene medida 0.

17. 2. 7. 11. Teorema (de Dicotomía de Ulam[182]). Si existe una medida μ en algún conjunto S, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:

- Existe una medida en **c** = $2^{\aleph_0}$ que generaliza a la de Lebesgue (y en ese caso $2^{\aleph_0} \geq \kappa$ para algún cardinal débilmente inaccesible κ en virtud de 17. 2. 7. 9.).
- Existe $Z \subset S$ tal que $\mu(Z) > 0$ y $\forall A \subset Z$; $\mu(A) \neq 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(Z)$. Dividiendo por $\mu(Z)$, lo dicho equivale a afirmar que existe una medida bi-valuada. ▌

17. 2. 7. 12. Lema. Si μ es una medida bivaluada sobre un conjunto S, entonces el conjunto $U = \{X \subseteq S: \mu(X) = 1\}$ es un *ultrafiltro no principal* en S (cf. 8. 10 y ss.) y si $\{X_n\}_{n<\omega} \subseteq U$, entonces $\bigcap_{n<\omega} X_n \in U$; esta propiedad se llama *σ-completitud* de U (cf. 8. 10. 4.).

Demostración. La comprobación de la condición de ultrafiltro es rutinaria; U es no principal porque, siendo μ no trivial, $X \in U \Rightarrow X \setminus \{x\} \in U$, con $x \in X$ arbitrario: no puede haber un elemento minimal en U. La σ-completitud surge de la σ-aditividad. ▌

182 *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*. Fundamenta Mathematicae Tom 16 (1930), pp. 140 – 150; ver también Nyikos, Charles. *Himalayan Expedition.* Summary of two seminars given in 2006 at the University of South Carolina.

También vale la recíproca del Lema: si U es un ultrafiltro no principal σ-completo en S, entonces μ: P(S) $\rightarrow$ {0,1} definida por $\mu(X) = 1$ si $X \in S$, $\mu(X) = 1$ si $X \notin S$ es una medida bi-valuada en S. Así el problema de la existencia de medidas bi-valuadas en S es equivalente al de la existencia de un ultrafiltro no principal σ-completo en S. Ampliamos el estudio de esta cuestión generalizando la definición de σ-completitud.

17. 2. 7. 13. Definición. Sea κ un cardinal no numerable.

- Un filtro F sobre un conjunto S es *κ-completo* si $\forall \lambda < \kappa \; \{X_\nu\}_{\nu<\lambda} \subseteq F \Rightarrow \bigcap_{\nu<\lambda} X_\nu \in F$.
- Un ideal J sobre un conjunto S es *κ-completo* si $\forall \lambda < \kappa \; \{X_\nu\}_{\nu<\lambda} \subseteq J \Rightarrow \bigcup_{\nu<\lambda} X_\nu \in J$.

Un filtro F es κ-completo sii su ideal dual J es κ-completo. La σ-completitud vista más arriba puede caracterizarse ahora como $\aleph_1$-completitud. El siguiente lema nos dice que, si existe, la σ-completitud no agota las posibilidades de completitud:

17. 2. 7. 14. Lema. Si existe un ultrafiltro no principal σ-completo, entonces existen un cardinal no numerable κ y un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ.

Demostración. Sea κ el mínimo (y, necesariamente, no numerable) cardinal para el que existe un ultrafiltro no principal U que sea σ-completo. Probamos a continuación que U es κ-completo: sea J el ideal dual de U, $J = P(\kappa) \setminus U$; J es no principal, σ-completo y *primo* (cf. 8. 7.). También es κ-completo: si no lo fuera, existirían $\lambda < \kappa$ y una familia $\{X_\nu\}_{\nu<\lambda} \subseteq J$ mutuamente disjuntos tales que $\bigcup_{\nu<\lambda} X_\nu \notin J$. En ese caso, sea $L = \{\alpha \subseteq \lambda: \bigcup_{\nu<\alpha} X_\nu \in J\}$. L sería un ideal primo σ-completo sobre λ y no principal, pues $X_\nu \in J \; \forall \; \nu$. El dual de L, entonces, sería un ultrafiltro no principal σ-completo sobre $\lambda < \kappa$, contradiciendo la minimalidad de κ. Entonces J es ideal no principal y κ-completo y su dual U es ultrafiltro no principal κ-completo. ▌

Llegamos por fin a los cardinales medibles, de gran importancia para (HC):

17. 2. 7. 15. Definición. Un cardinal no numerable κ es *medible* si existe un ultrafiltro no principal σ-completo sobre κ.

Lo visto a partir de 17. 2. 7. 1. nos muestra la íntima conexión entre estos cardinales y el problema de la medida: *la existencia de un cardinal medible es equivalene a la existencia de una medida bivaluada σ-aditiva no trivial*. La completitud (8. 10. 4.) de un ultrafiltro no principal σ-completo U sobre un conjunto S es siempre un cardinal medible. Los cardinales medibles también tienen una estrecha relación con los cardinales inaccesibles (13. 2.):

17. 2. 7. 16. Teorema. Todo cardinal medible κ es fuertemente inaccesible.

Demostración. Recordemos que un cardinal es fuertemente inaccesible si es no numerable, regular y límite fuerte. Sea κ medible (y, por lo tanto, no numerable) para el que existe un ultrafiltro no principal U que sea κ-completo y J su ideal dual; el singleton $\{\alpha\} \in J \ \forall\ \alpha \in \kappa$ y, por κ-completitud, todo $X \subset \kappa$ de cardinalidad $< \kappa \in J$. Si κ fuera singular, entonces κ también estaría en J por κ-completitud: κ es *regular*.

Supongamos que κ no es límite fuerte; entonces $\exists\ \lambda < \kappa$: $2^{\lambda} \geq \kappa$ (13. 2. a-4.) $\Rightarrow$ $\exists\ S \subseteq \{0, 1\}^{\lambda}$ de cardinalidad κ; en S también hay un ultrafiltro no principal κ-completo V. Para cada $\alpha < \lambda$ vale una y sólo una de las siguientes posibilidades: $\{f \in S: f(\alpha) = 0\} \in V$ o $\{f \in S: f(\alpha) = 1\} \in V$. Cualquiera que sea la posibilidad que vale, llamamos X_α a ese conjunto. Así $X_\alpha \in V\ \forall\ \alpha < \lambda$, y por κ-completitud debe ser $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in V$. Pero existe *a lo sumo una función´f* en X, que es la prescripta por las condiciones $f(\alpha) = 0$ o $f(\alpha) = 1$ según cuál sea α. Entonces $|X| \leq 1$, absurdo porque V es no principal: κ es *límite fuerte*. ▌

17. 2. 8. Determinación (II). La teoría (ZFC) no es lo suficientemente fuerte para probar que todos los subconjuntos analíticos $A \subseteq [0, 1]$ están determinados (17. 2. 6. 1.): sin apelar a nuevos axiomas, lo más que podemos probar es que todos los *borelianos* están determinados (Teorema de Martin, mencionado al final de 17. 2. 6. 2.). Aquí es donde entran los *axiomas de grandes cardinales*, el más conocido de los cuales es quizás el que garantiza la existencia de un cardinal *medible* (17. 2. 7. 15.). Recordemos que un cardinal no numerable κ es *medible* si existe un ultrafiltro no principal U definido en $P(\kappa)$ tal que U es κ-completo, es decir: si $X \subset U$ y $\mathrm{card}(X) < \kappa$, entonces $\bigcap\{A \subset \kappa: A \in X\} \in U$.

Casi cinco años antes de probar la determinación de los borelianos *dentro de (ZFC)*[183], Donald A. Martin demostró:

17. 2. 8. 1. Teorema. Si existe un cardinal medible, entonces todo conjunto analítico está determinado. [184] ▌

Desde luego todo boreliano es analítico de modo que este teorema también prueba la determinación de los borelianos, pero *por fuera de (ZFC)*, al suponer la existencia de un cardinal medible.

Para ilustrar la relación entre el Axioma of Determinación (AD; 17. 2. 6. 2.) y la teoría de los grandes cardinales, citamos el siguiente sorprendente:

17. 2. 8. 2. Teorema. Si vale (AD), entonces:

- $\aleph_1$ es un cardinal *medible* y su filtro cerrado y no acotado es un *ultrafiltro*.
- $\aleph_2$ es un cardinal *medible*. [185] ▌

---

[183] Martin, Donald A. *Borel Determinacy*. Ann. of Math. 102 (1975), 363–371.

[184] Martin, Donald A. *Measurable Cardinals and Analytic Games*. Fund. Math. LXVI (1970), pp. 287 - 291. Recogido en Sacks. *Mathematical Logic in the 20th Century*. Singapore University Press, 2003, pp. 264 - 268.

[185] Jech, Thomas J. *Set Theory*. Corrected 4th printing. Springer Monographs in Mathematics, 2006, p. 633.

A pesar de las poderosas relaciones entre medibilidad y determinación, hay algo que falta: Solovay demostró[186] que la existencia de un cardinal medible no alcanza para demostrar la Determinación Proyectiva (DP). Nuevamente esto se debe a una falta de fortaleza teórica:

$$[(\mathrm{ZFC}) + (\mathrm{DP})] \Rightarrow \text{consistencia de } [(\mathrm{ZFC}) + \text{“existe un cardinal medible”}];$$

por el Segundo Teorema de incompletitud de Gödel ninguna teoría puede probar su propia consistencia, luego

$$\neg\big\{[(\mathrm{ZFC}) + \text{“existe un cardinal medible”}] \Rightarrow [(\mathrm{ZFC}) + (\mathrm{DP})]\big\}.$$

Hacía falta postular axiomas más fuertes de grandes cardinales. En vez de probar la determinación de *todo* conjunto proyectivo, en 1978 Martin demostró que $A \subseteq [0, 1]$ es determinado si es de tipo $\underset{\sim}{\Sigma}{}_2^1$ (17. 2. 6. 3.); para lograrlo, tuvo que usar la hipótesis más fuerte de grandes cardinales conocida en su momento. Finalmente, en 1983 Woodin demostró (DP) usando una jerarquía infinita de axiomas de grandes cardinales que arrancan con el de Martin.[187]

Se estaba forzando demasiado la maquinaria de los axiomas de grandes cardinales, y empleando axiomas mucho más fuertes de lo necesario. Finalmente se dio con un gran cardinal de "moderado" tamaño, el *cardinal de Woodin*, que permitió resolver varias cuestiones a la vez.

17. 2. 8. 3. Definición. Un cardinal δ es *de Woodin* si $\forall\, A \subset V_\delta$ existen cardinales arbitrariamente grandes $\kappa < \delta$ tales que $\forall\, \lambda < \delta\ \exists\, j: V \to M$ inmersión elemental[188] con punto crítico κ: $j(\kappa) > \lambda$, $V_\lambda \subset M$ y $A \cap V_\lambda = j(A) \cap V_\lambda$.

Los cardinales de Woodin son inaccesibles (y Mahlo), pero no son "tan" grandes: el menor cardinal de Woodin no llega a ser débilmente compacto, y todos los cardinales fuertemente compactos son de Woodin (no definiremos los conceptos de compacidades débil y fuerte). Los siguientes tres teoremas, que no tendremos ocasión de probar, indican la utilidad de los cardinales de Woodin:

17. 2. 8. 4. Teorema (Shelah-Woodin, 1984)**.** Si existen infinitos cardinales de Woodin, entonces todo conjunto proyectivo es medible Lebesgue. ▌

17. 2. 8. 5. Teorema (Martin-Steel, 1985 [189])**.** Si existen infinitos cardinales de Woodin, entonces todo conjunto proyectivo está determinado. ▌

---

[186] *Real-valued measurable cardinals*. En *Axiomatic Set Theory* (D. S. Scott, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, pp. 397–428.

[187] Woodin, W. Hugh. *Aspects of determinacy*. En: Marcus, Dorn, and Weingartner (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII*. Proceedings of the 1983 International Congress, Salzburg. Amsterdam, North-Holland 1986, 171–181.

[188] Ver (15. 6. 1.)

[189] Martin & Steel. *A Proof of Projective Determinacy*. J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 71–125.

17. 2. 8. 6. Teorema (Woodin, 1987). Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) (DP).

ii) $\forall$ k $\in$ N $\exists$ M conjunto numerable y transitivo: (M, $\in$) ~ [(ZFC) + "$\exists$ k cardinales de Woodin"]. ▌

17. 2. 9. Axiomas de Forzamiento.

Nos acercamos al final de nuestro tratamiento de la estructura H(ω_1); agrupamos a continuación una serie de definiciones, axiomas y teoremas (que no demostraremos) que ligan a la Teoría Avanzada de Conjuntos con la Topología General; después, haremos una discusión conjunta de todos ellos. En lo que sigue denotaremos por Ω a un *espacio compacto Hausdorff*.

17. 2. 9. 1. Definición. Un abierto U de Ω es *regular* si coincide con el interior de su clausura.

Ejemplo: si Ω = [0, 1], U = (a, b) es regular; V = ($\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ no es regular.

Los abiertos regulares ordenados por inclusión forman un *reticulado* y generan un álgebra de Boole completa (15. 7. 2. 2), el *álgebra abierta regular de Ω*.

17. 2. 9. 2. Definición. X $\subset$ Ω es *nunca denso* si el interior de su clausura es $\emptyset$. Y $\subset$ Ω es *magro* o *de primera categoría* si es unión numerable de nunca densos.

17. 2. 9. 3. Definición. Ω es *ccc* si toda colección disjunta de abiertos es numerable.

Ejemplo: Ω = [0, 1] es ccc.

17. 2. 9. 4. Axioma de Forzamiento I (Axioma de Martin ω_1) [190]**.** Si Ω es ccc, entonces Ω no es unión de $\aleph_1$ subconjuntos magros de Ω.

Recordemos que en un álgebra de Boole completa **B**, todo S $\subseteq$ **B** tiene un *ínfimo* $\wedge$S y un *supremo* $\vee$S.

17. 2. 9. 5. Definición.[191] Un álgebra de Boole completa **B** *preserva conjuntos estacionarios* si $\forall$ b $\in$ **B**, $\forall$ {b_α} $\subseteq$ **B**, α < ω_1, $\exists$ 0 < c $\leq$ b: vale una y sólo una de las siguientes propiedades:

---

[190] Fuentes:

- Martin & Solovay: *Internal Cohen extensions.* Annals of Mathematical Logic 2 (1970), pp. 143-178.
- Rudin, M. E.: *Martin's axiom*, en: Barwise. *Handbook of Mathematical Logic* (North-Holland, Amsterdam, 1977), pp. 491-501.
- Shoenfield, J. R. *Martin's axiom*. The American Mathematical Monthly 82 (1975), pp. 610-617.

[191] Fuentes:

1. $c \wedge b_\alpha = 0$ para algún α.
2. $\exists\ C \subset \omega_1$: $\forall\ \gamma \in C$, $c \wedge (\wedge_{\alpha<\gamma} (\vee_{\alpha<\eta<\gamma} b_\eta)) \neq 0$.

17. 2. 9. 6. Teorema. (Foreman, Magidor & Shelah). Si $\forall\ U \subseteq \Omega$ abierto $\neq \emptyset$, U no es unión de $\aleph_1$ subconjuntos magros de Ω, entonces el álgebra abierta regular de Ω preserva conjuntos estacionarios. ▌

17. 2. 9. 7. Axioma de Forzamiento II (Axioma de Máximo de Martin) [192]**.** Si el álgebra abierta regular de Ω preserva conjuntos estacionarios, entonces Ω no es unión de $\aleph_1$ subconjuntos magros de Ω.

17. 2. 9. 8. Teorema. (Foreman, Magidor & Shelah). Si vale (17. 2. 9. 7.), entonces $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. ▌

17. 2. 9. 9. Axioma de Forzamiento III [Axioma de Máximo de Martin(c)]. Si el álgebra abierta regular de Ω preserva conjuntos estacionarios y la topología de Ω admite una base de cardinalidad a lo sumo **c**, entonces Ω no es unión de $\aleph_1$ subconjuntos magros de Ω.

17. 2. 9. 10. Teorema. (Woodin) [193]**.** Si vale (17. 2. 9. 9.), entonces vale (DP). ▌

Comentamos lo expuesto en (17. 2. 9. 1-10). Como sugiere (17. 2. 9. 2.), los axiomas de forzamiento son generalizaciones del Teorema de Categoría de Baire. La conexión está en la costrucción de Cohen del forzamiento (15. & ss.), por la cual se construyen extensiones de modelos de (ZFC).

Supongamos que M es un modelo de (ZFC), y tomemos un álgebra **B** de Boole en M que sea completa en M (cf. 15. 7. 2. 4.). Si **B** es trivial (por ejemplo si es finita), entonces la extensión de Cohen de M es el propio M: no hemos ganado nada. Pero si **B** es el álgebra de medida[194] del espacio producto $\prod_{\omega_2}[0,1]$, entonces obtenemos la *extensión de Solovay* de M, con las siguientes propiedades [195]:

- (HC) es falsa.

- Foreman, Magidor & Shelah. *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters I*. Ann. of Math. 127 (1988), pp. 1–47.
- Foreman, Magidor & Shelah. *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters I* (errata). Ann. of Math. 129 (1989), p. 651.
- Foreman, Magidor & Shelah. *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters II*. Ann. of Math. 127 (1988), pp. 521–545.

[192] Foreman, Magidor & Shelah. *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters I*. Ann. of Math. 127 (1988), pp. 1–47.

[193] *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*. Ser. Logic Appl., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1999.

[194] Esta es el álgebra de los borelianos módulo los conjuntos de medida cero.

[195] cf. (17. 2. 5. 1.); ver Solovay, Robert. *A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals Is Lebesgue Measurable*. Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.

- En R^3 existe una medida μ, numerablemente aditiva e invariante por traslaciones, que extiende a la medida de Lebesgue y en la que todo proyectivo es medible.
- No hay particiones paradójicas de la esfera en partes proyectivas.

Si el álgebra de Boole B es la regular abierta del espacio producto $\prod_{\omega_2}[0,1]$, obtenemos una extensión, debida a Cohen, en la que vale la siguiente interesante extensión del Teorema de Categoría de Baire: *el intervalo* [0, 1] *no es unión de* $\aleph_1$ *subconjuntos magros*. Esto sugiere el Axioma de Forzamiento I (Axioma de Martin ω_1 17. 2. 9. 4.). Una motivación sencilla para este axioma es la siguiente: si (HC) ha de ser falsa, entonces los conjuntos de cardinalidad $\aleph_1$ debieran comportarse, en la medida de lo posible, como si fueran conjuntos numerables. La pregunta de cuál es la clase más general de espacios compactos Hausdorff en la que vale (17. 2. 9. 4.) condujo a la Definición (17. 2. 9. 5.), que los caracteriza: los espacios en cuestión son aquéllos cuya álgebra abierta regular preserva los conjuntos estacionarios. Esto sugiere la definición del Axioma de Forzamiento II (Axioma de Máximo de Martin, 17. 2. 9. 7.); este axioma, más fuerte que el anterior, permite describir con precisión en qué sentido falla (HC); esta descripción viene dada por (17. 2. 9. 8.). Subsiguientes investigaciones han revelado que la igualdad $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ para cualquier axioma que refuerce de modo no trivial al axioma de Martin ω_1; curiosamente, ésta es la consecuencia de pedir que los conjuntos de cardinalidad $\aleph_1$ se parezcan a los numerables. El ciclo de los axiomas de forzamiento se cierra resolviendo la cuestión de la determinación proyectiva, en el teorema de Woodin (17. 2. 9. 10.). Observemos que, por (17. 2. 6. 5.), si vale (17. 2. 9. 9.), entonces todo X proyectivo no numerable $\subseteq$ R tiene cardinal **c**.

En resumen: (DP) es el axioma correcto para los conjuntos proyectivos; los axiomas de (ZFC) son incompletos, de un modo esencial. Si aceptamos (DP) no hay necesidad de (AC): en la estructura standard para la Teoría de Números de Segundo Orden (P(N), N, +, $\cdot$, $\in$) podemos prescindir del Axioma de Elección si utilizamos el Axioma de Determinación Proyectiva. Nos preguntamos si la comprensión de esta estructura, lograda a través del hallazgo de los axiomas adecuados, se puede extender a la de H(ω_2); si tenemos éxito en la empresa, debiera ser posible resolver la Hipótesis del Continuo. A estudiar esta cuestión dedicamos la sección siguiente.

17. 3. La Estructura H(ω_2). Los axiomas de Determinación y Determinación Proyectiva (17. 3. 6. & ss.) resultaron ser de gran importancia para encontrar propiedades fundamentales de la estructura H(ω_1); nos preguntamos si será posible hallar axiomas similares a (DP) para H(ω_2), que nos ayude a resolver (HC).

Podemos decir que las dos cuestiones esenciales que (ZFC) deja sin constestar son:

- ¿"Cuántos" subconjuntos tiene un conjunto dado?
- ¿Cuán "grandes" pueden llegar a ser los números cardinales? A estas preguntas podemos añadir otra:
- ¿Qué información puede darnos la respuesta a una cualquiera de estas preguntas para responder a la otra?

Resultó que los axiomas "fuertes" de infinito tradicionalmente considerados no tuvieron efecto alguno en la cuestión del cardinal de P(X) para X un conjunto cualquiera y ni siquiera han permitido resolver la cuestión de si un conjunto dado tiene subconjuntos no constructibles[196]. Sin embargo, si aceptamos el axioma de la existencia de un cardinal *medible*, la situación cambia radicalmente: Dana Scott probó que la existencia de cardinales medibles implica la existencia de conjuntos *no definibles*; Silver y Solovay mejoraron estos resultados, al probar que la existencia de cardinales medibles implica que *ω posee gran cantidad de subconjuntos no definibles* [197]. ¿Podemos, usando las mismas hipótesis, probar que existen más de $\aleph_1$ subconjuntos de ω, refutando así (HC)? Por desgracia, el método de forzamiento de Cohen implica que ningún axioma de grandes cardinales puede ser de gran ayuda para esta tarea: en un paper fundamental[198], Levy y Solovay demuestran el siguiente teorema:

17. 3. 1. Teorema. Sea (CM) la proposición "existe un cardinal medible" y supongamos que (ZFC) + (CM) es una teoría consistente. Entonces tanto (HC) como $\neg$(HC) pueden agregarse a esta teoría sin perturbar la consistencia. ▌

El estudio de $H(\omega_2)$ es, quizás, bastante más complicado que el de $H(\omega_1)$, debido a las sutilezas a que se presta; consideremos el siguiente teorema relativo a la estructura $H(\omega_2)$:

17. 3. 2. Teorema (Woodin, 1991). Si vale (17. 2. 9. 7.), entonces existe una suryección ρ: R $\to \omega_2$: el conjunto $\{(x, y): \rho(x) < \rho(y)\}$ es proyectivo[199]. ▌

Esta ρ puede considerarse como un *contraejemplo proyectivo a (HC)* si interpretamos a (HC) de la siguiente manera: si π: R $\to \alpha$ es una suryección entre R y $\alpha \in$ Ord, entonces $\alpha < \omega_2$. Por otra parte repetimos que, por (17. 2. 6. 5.), si vale (17. 2. 9. 9.), entonces todo X proyectivo no numerable $\subseteq$ R tiene cardinal **c**; esto puede considerarse como una *confirmación proyectiva de (HC)* si interpretamos a (HC) de la siguiente manera: un subconjunto de R es, o bien finito, o bien numerable, o bien tiene cardinal **c**.

Para extender a $H(\omega_2)$ los resultados relativos a $H(\omega_1)$ hará falta crear una nueva lógica, la Ω-lógica, que extiende la lógica ordinaria de primer orden. A su vez, la Ω-lógica requerirá la introducción de una nueva categoría de conjuntos, los conjuntos *universalmente Baire*, o Baire (U).

17. 3. 3. Definición[200]. Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff. Un conjunto A $\subseteq R^n$ es *universalmente Baire*, o Baire (U), si $\forall$ F: $\Omega \to R^n$ continua vale

[196] Estos resultados se deben a Cohen y Gödel; ver Cohen, Paul. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, especialmente sus "Conclusions" en pp. 150 & ss.

[197] Scott, Dana. *Measurable Cardinals and Constructible Sets*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. des Sci. Math., Astr. et Phys., 9 (1961), pp. 521-524. Silver, J. *The Consistency of the Generalized Continuum Hypothesis with the Existence of a Measurable Cardinal*. Notices Amer. Math. Soc., 13 (1966), p. 721. Solovay, Robet. *Independence Results in the Theory of Cardinals I & II*. Notices Amer. Math. Soc., 10 (1963), p. 595.

[198] Levy & Solovay. *Measurable cardinals and the continuum hypothesis*. Israel J. Math. 5 (1967), 234–248.

[199] Woodin, W. Hugh. *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*. Ser. Logic Appl., vol. 1, de Gruyter, 1999.

que $F^{-1}(A)$ tiene la *propiedad de Baire*: $\exists$ U $\subseteq \Omega$ abierto tal que $F^{-1}(A) \supseteq$ U (la diferencia simétrica entre $F^{-1}(A)$ y U) es de primera categoría (cf. 17. 2. 5. 1.).

Valen los siguientes hechos:

- Todo boreliano $A \subseteq R^n$ es Baire (U).
- Los conjuntos Baire (U) forman una σ-álgebra cerrada por preimágenes de funciones medibles Borel f: $R^n \to R^m$.
- Todo conjunto Baire (U) es medible Lebesgue (!).
- Todo conjunto *analítico* es Baire (U).

17. 3. 4. Teorema (Feng-Magidor-Woodin, 1992). Si todo conjunto proyectivo es Baire (U), entonces todo subconjunto *analítico* de [0, 1] está determinado; la hipótesis *no* implica (DP). ▌

17. 3. 5. Teorema (Neeman). Si existe un cardinal de Woodin (cf. 17. 2. 8. 3.), entonces todo subconjunto Baire (U), de [0, 1] está determinado. ▌

(17. 3. 5.) extiende a (17. 3. 4.) y refina a uno similar demostrado en (Feng-Magidor-Woodin, 1992), que exigía la existencia de *dos* cardinales de Woodin. Una especie de límite de (17. 3. 5.) es el siguiente:

17. 3. 6. Teorema. Si existen infinitos cardinales de Woodin, entonces todo conjunto proyectivo es Baire (U). ▌

A veces es más práctico trabajar, no con todo R, sino con ciertos subconjuntos especiales de $[0, 1] \subset R$. En lo que sigue, K denotará al *conjunto ternario de Cantor*, es decir el subconjunto de [0, 1] formado por aquéllos números reales cuyo desarrollo ternario carece de 1's. Como sabemos, K es compacto Hausdorff, no numerable, nunca denso y *perfecto*: todos sus puntos son de acumulación[201]. Estaremos interesados en los subconjuntos *Universalmente Baire* (17. 3. 3.) de K; la familia de todos estos conjuntos se denotará por $P_{UB}(K)$.

17. 3. 7. Definición. Sean A, B subconjuntos de K; decimos que:

- A es *reducible* a B ($A \approx B$) si $\exists$ una función *continua* f: $K \to K$ tal que $A = f^{-1}(B)$.
- A es *fuertemente reducible* a B ($A \approx_f B$) si $A \approx B$ y f es *estrictamente contractiva*: $\forall$ x, y $\in$ K, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$, con $0 < \lambda < 1$ (normalmente tomaremos $\lambda = \frac{1}{2}$).

[200] Feng, Magidor & Woodin. *Universally Baire sets of reals,* en *Set Theory of the Continuum* (H. Judah, W. Just & H. Woodin, eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 26, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992, pp. 203–242.

[201] Para lo que sigue, K puede ser cualquier conjunto no numerable y nunca denso; empleamos al ternario de Cantor para fijar ideas por medio de un conjunto familiar.

Observemos que toda f estrictamente contractiva tiene al menos un punto fijo, de modo que $\forall\ S \subseteq K\ \neg(S \approx_f K\backslash S)$.

17. 3. 8. Teorema (Wadge[202]). Sean A, B subconjuntos *proyectivos* de K. Si vale (DP) (17. 2. 6. 5.), entonces vale una y sólo una de las siguientes propiedades:

- $A \approx B$.
- $B \approx_f K\backslash A$. ▌

La demostración del lema de Wadge sólo exige que exista una $F: [0, 1] \to R^2$ boreliana y un $D \subseteq [0, 1]$ determinado tal que $D = F^{-1}(C)$, siendo $C = [A \times (K\backslash B)] \cup [(K\backslash A) \times B]$. Un tal D es necesariamente Baire (U) si A y B lo son. Apelando a 17. 3. 5. y combinando con 17. 3. 8., tenemos:

17. 3. 9. Teorema. Sean $A, B \in P_{UB}(K)$. Si existe un cardinal de Woodin (cf. 17. 2. 8. 3.), entonces entonces vale una y sólo una de las siguientes propiedades:

- $A \approx B$.
- $B \approx_f K\backslash A$. ▌

Sean $A, B \in P_{UB}(K)$. Como ningún subconjunto de K puede ser fuertemente reducible a su complemento, (17. 3. 9.) conduce a las siguientes situaciones, mutuamente excluyentes:

1. $(A \approx_f B) \wedge (K\backslash A \approx_f B) \wedge \neg(B \approx A) \wedge \neg(B \approx K\backslash A) =: A <_w B$; $<_w$ es un *orden total* en $P_{UB}(K)$.
2. $(B \approx_f A) \wedge (K\backslash B \approx_f A) \wedge \neg(A \approx B) \wedge \neg(A \approx K\backslash B)$.
3. $(A \approx B) \wedge (B \approx A) \vee (K\backslash A \approx B) \wedge (B \approx K\backslash A) =: A \sim_w B$; $\sim_w$ es *relación de equivalencia* en $P_{UB}(K)$.

La relación $<_w$ es predicable en P(K), pero sin hipótesis adicionales no podemos afirmar que esté bien fundada (3. 5. 3.); $<_w$ es bien fundada en $P_D(K)$, la familia de todos los subconjuntos *determinados* de K[203]. En ausencia de (AD), consideremos el siguiente teorema de Martin[204].

17. 3. 10. Teorema. Sea $\{A_k\}_{k \in N} \subseteq P(K)$: $\forall\ k \in N\ (A_{k+1} \approx_f A_k) \wedge (K\backslash A_{k+1} \approx_f A_k)$. Entonces $\exists\ g: K \to K$ continua tal que $A = g^{-1}(A_1)$ no tiene la propiedad de Baire. ▌

De (17. 3, 10.) sigue que la relación $<_w$ es bien fundada en $P_{UB}(K)$, pues la preimagen continua de todo $S \in P_{UB}(K)$ debe tener la propiedad de Baire.

---

[202] W. Wadge: *Degrees of complexity of subsets of the Baire space*. Notices Amer. Math. Soc. 19 (1972), A-714.

[203] Moschovakis, Yiannis. *Descriptive Set Theory*. (Studies in logic and the foundations of mathematics; v. 100). North-Holland Publishing Company, 1980, p. 425.

[204] D. A. Martin. *Projective sets and cardinal numbers*. J. Symbolic Logic, 1980.

Tenemos entonces que, en presencia de grandes cardinales, $P_{UB}(K)$ forma una jerarquía bien ordenada por una adecuada noción de complejidad. Por ejemplo:

- Los conjuntos proyectivos forman un segmento inicial de $<_w$ pues $A \approx P$ (P proyectivo) $\Rightarrow$ A proyectivo.
- Los borelianos forman el segmento inicial de longitud ω_1 de $<_w$.

Ahora definiremos una nueva clase de conjuntos, las conjuntos *A-cerrados*, que nos llevará a la *Ω-lógica*, una lógica más fuerte que la tradicional; de ella pasaremos al *Axioma (*)* , con el que podremos generalizar (DP) a la estructura $H(\omega_2)$.

Sea M un conjunto transitivo tal que $(M, \in)$ un modelo de (ZFC) y sea $(\Omega, F, \tau) \in M$:

- τ es una topología en Ω.
- $(M, \in) \sim$ "Ω es compacto Hausdorff en τ".
- $(M, \in) \sim$ "$F \in C(\Omega, R)$".

17. 3. 11. Definición. Sea $A \in P_{UB}(R)$; si M es un conjunto transitivo con $(M, \in) \sim$ (ZFC), decimos que M es *A-cerrado* si $\forall$ (Ω, F, τ) tal como describimos recién vale que $\tau_A \in M$, siendo $\tau_A = \{U \in \tau\text{: } U \backslash F^{-1}(A) \text{ es nunca denso}\}$.

Ahora definimos la Ω-lógica; una de nuestras hipótesis será que *existe una clase propia de cardinales de Woodin*.

17. 3. 12. Definición. Si φ es una sentencia, diremos que (ZFC) *satisface fuertemente a φ* [(ZFC) δ_Ω φ] si $\exists$ $A \in P_{UB}(R)$: $(M, \in) \sim \varphi$ $\forall$ M numerable transitivo y A-cerrado: $(M, \in) \sim$ (ZFC).

17. 3. 13. Teorema de Invariancia Genérica. Si existe una clase propia de cardinales de Woodin y φ es una sentencia, entonces para cada álgebra de Boole completa **B** (15. 7. 2. 2.) (ZFC) δ_Ω φ sii $V^B \sim$ "(ZFC) δ_Ω φ", donde V^B es un modelo transitivo standard de (ZFC) (ver 15. 7. 4. 1.). ▌

Los resultados obtenidos en relación con $(H(\omega_1), \in)$ permanecen con la nueva lógica:

17. 3. 14. Teorema. Si existe una clase propia de cardinales de Woodin entonces $\forall$ sentencia φ (ZFC) δ_Ω "$(H(\omega_1), \in) \sim \varphi$" sii $(H(\omega_1), \in) \sim \varphi$. ▌

El siguiente corolario demuestra que la Ω-lógica es más fuerte que la lógica de primer orden:

17. 3. 15. Corolario. (ZFC) δ_Ω (DP). ▌

Ahora podemos formular con más precisión la pregunta de si puede existir en $(H(\omega_2), \in)$ algún análogo de (DP):

17. 3. 16. Pregunta. ¿Puede existir una sentencia ψ tal que $\forall$ sentencia φ valga una y sólo una de las opciones siguientes:

- [(ZFC) + ψ] δ_Ω "$(H(\omega_1), \in) \sim \varphi$"
- [(ZFC) + ψ] δ_Ω "$(H(\omega_1), \in) \sim \neg\varphi$"

y tal que (ZFC) + ψ sea Ω-consistente?

Tales sentencias ψ serían buenos candidatos a una generalización de (DP) a ($H(\omega_2)$, $\in$). Adoptando axiomas que resuelvan la teoría de ($H(\omega_2)$, $\in$) en la Ω-lógica, la invariancia genérica de la Ω-lógica nos aseguraría para esta estructura la misma completitud *empírica* que actualmente disfruta la teoría ordinaria de números. Además, *se presume* (Woodin presume) que tales axiomas permitirían el desarrollo de una teoría auténticamente rica de la estructura ($H(\omega_2)$, $\in$) que estuviera a la vez libre de los omnipresentes problemas insolubles. Tenemos (Woodin tiene) una base para esta esperanza al comparar la teoría de los conjuntos proyectivos bajo la hipótesis (DP) con la multiplicidad de problemas indecidibles con relación a los conjuntos proyectivos si sólo aceptamos (ZFC).

En sus "Concluding Remarks", Woodin[205] se pregunta:

So, is the Continuum Hypothesis solvable? (I think there is) convincing evidence that there is a solution. Thus, I now believe the Continuum Hypothesis is solvable, which is a fundamental change in my view of set theory. While most would agree that a clear resolution of the Continuum Hypothesis would be a remarkable event, it seems relatively few believe that such a resolution will ever happen. ...

En efecto, la Hipótesis del Continuo es un problema que parece, hoy, tan inatacable como la Conjetura de Riemann. Peor aún, su improbable resolución sólo sería un primer paso en lo que parece una interminable sucesión de dificultades: volviendo a citar a Woodin,

What about the general continuum problem; i.e. what about $H(\omega_n)$, $n > 2$? The view that progress towards resolving the Continuum Hypothesis must come with progress on resolving all instances of the Generalized Continuum Hypothesis seems too strong. The understanding of $H(\omega)$ did not come in concert with an understanding of $H(\omega_1)$, and the understanding of $H(\omega_1)$, failed to resolve even the basic mysteries of $H(\omega_2)$. The universe of sets is a large place. We have just barely begun to understand it.

Digamos, para terminar, que el problema de la Hipótesis del Continuo podría ni siquiera tener sentido: según el notable lógico-matemático Solomon Feferman, (HC) es un problema "inherentemente vago", al igual que casi toda la jerarquía constructiva: la validez de la noción de "todos los subconjuntos de los números naturales" provoca serias dudas en Feferman, que se transforman en un rechazo casi absoluto cuando se trata de invocar al conjunto de "todos los conjuntos de números reales"[206]:

My own view –as is widely known– is that the Continuum Hypothesis is what I have called an "inherently vague" statement, and that the continuum itself, or equivalently the power set of the natural numbers, is not a definite mathematical object. Rather, it's a conception we have of the totality of "arbitrary" subsets of the set of natural numbers, a conception that is clear enough for us to ascribe many evident properties to that supposed object (...) but which cannot be sharpened in any way to determine or fix that object itself. On my view, it follows that the conception of the whole of the cumulative hierarchy, i.e., the transfinitely cumulatively iterated power set operation, is even more so inherently vague, and that one cannot in general speak of what is a fact of the matter under that conception. For example, I deny that it is a fact of the matter whether all projective sets are Lebesgue measurable or have the Baire property, and so on.

---

205 Woodin, W. Hugh. *The Continuum Hypothesis, Part II*. Notices of the AMS, Vol. 48, Nº 7, Agosto 2001, pp. 681-690.

206 Feferman: *Does mathematics need new axioms?* American Mathematical Monthly, vol. 106 (1999), pp. 99-111.

Nuestra tesis tiene, pues, un final abierto. Si, como dijo Bertrand Russell, "Perseguir una idea es más apasionante que perseguir a una ballena", la persecución de la idea del continuo y su *verdadero* cardinal añade, a lo apasionante, la noción del peligro de caer en abismos de interminables deliberaciones incapaces de conducir a otro lugar más que a una completa confusión. A través de la Hipótesis del Continuo, la matemática se revela al fin como lo que es: una riesgosa aventura intelectual, no siempre capaz de ofrecernos el refugio de la certeza.

BIBLIOGRAFÍA

Papers.

1. **Avigad**, Jeremy. *Forcing in Proof Theory*. Bull. Symbolic Logic 10 (2004).

2. **Banach**, Stefan y **Tarski**, Alfred. *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. 6, (1924) 244-277.

3. **Banach**, Stefan & **Kuratowski**, Kaczmier. *Sur une généralisation du probleme de la mesure*. Fundamenta Mathematicae Tom 14 (1929), pp. 127 – 131.

4. **Baire**, René. *Sur les fonctions discontinues qui se rattachment aux fonctions continues*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 129, 1898, pp. 1621-1623.

5. **Baire**, René. *Sur les fonctions de variables réeles*. Annali de Matematica Pura ed Applicata 3(3), 1899, pp. 1-122.

6. **Baire**, René. *Sur le représentation des fonctions discontinues. Première Partie*. Acta Mathematica 30, 1906, pp. 1-48.

7. **Baire**, René. *Sur le représentation des fonctions discontinues. Deuxième Partie*. Acta Mathematica 32, 1909, pp. 97-176.

8. **Bowen**, Kenneth A. *Forcing in a General Setting*. Fund. Math. 81 (1974), 315-329.

9. **Bukovsky**, Lev. *The Continuum Problem and Powers of Alephs*. Comment. Math. Univ. Carolinae, 6 (1965), 181-197.

10. **Cantor**, Georg. *Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von* x *durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion* f(x) *sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt* (*Demostración de que una función* f(x) *dada por una serie trigonométrica para todo valor real de* x *sólo admite una representación con esa forma*. Crelles Journal f. Mathematik 72, pp. 139 - 142, 1870; reproducido en Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 80 - 83. Springer Verlag, 1932).

11. **Cantor**, Georg. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (*Una contribución a la teoría de las multiplicidades)*. Crelles Journal f. Mathematik 84, pp. 242 - 258, 1878; reproducido en Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 119 - 133. Springer Verlag, 1932).

12. **Cantor**, Georg. *Beiträge zur Begründung der tranfiniten Mengenlehre*. (*Contribución a la Fundamentación de la Teoría de los Conjuntos Transfinitos*. Math Annalen 46, pp. 481 - 512, 1895; reproducido en Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, p. 282. Springer Verlag, 1932).

13. **Chow**, Timothy Y. *A Beginner's Guide to Forcing*. Publicación Interna, Princeton University, 2006.

14. **Chow**, Timothy Y. *Basic Forcing*. Publicación Interna, Princeton University, 2001.

15. **Cohen**, Paul. *The Independence of the Continuum Hypothesis I*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 50 (1963) pp. 1143-48.

16. **Cohen**, Paul. *The Independence of the Continuum Hypothesis II*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 51 (1964) pp. 105-10.

17. **Comfort**, W. W. *Ultrafilters: some old and some new results*. Bulletin of the American Mathematical Society 83 (4, 1977), pp. 417–455.

18. **Davis**, Morton: *Infinite Games of Perfect Information*, Annals of Math. Studies, Volume 52, Advances in Game Theory (1964), pp. 85-101

19. **Easton**, William. *Powers of Regular Cardinals*. The Journal of Symbolic Logic 1964. Reeditado en Ann. Math. Logic, 1 (1970), 139-178.

20. **Feferman**, Solomon. Gödel's Program for New Axioms: Why, Where, How and What? Invited lecture, Gödel '96 conference, Brno, 25-29 August 1996.

21. **Feferman**, Solomon. *Does mathematics need new axioms?* American Mathematical Monthly, vol. 106 (1999), pp. 99-111.

22. **Feferman, Friedman, Maddy & Steel.** *Does Mathematics Need New Axioms?*

23. **Feng, Magidor & Woodin.** *Universally Baire sets of reals,* en *Set Theory of the Continuum* (H. Judah, W. Just & H. Woodin, eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 26, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992, pp. 203–242.

24. **Foreman, Magidor & Shelah.** *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters I*. Ann. of Math. 127 (1988), pp. 1–47.

25. **Foreman, Magidor & Shelah.** *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters I* (errata). Ann. of Math. 129 (1989), p. 651.

26. **Foreman, Magidor & Shelah.** *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters II*. Ann. of Math. 127 (1988), pp. 521–545.

27. **Friedman**, Harvey. *Higher Set Theory and Mathematical Practice*. Ann. of Math. Logic 2 (1971), 325–357. Recogido en Sacks. *Mathematical Logic in the 20th Century*. Singapore University Press, 2003.

28. **Gale**, David & **Stewart**, F. M. *Infinite Games with Perfect Information*. Recogido en *Contributions to the Theory of Games* (Harold W. Kuhn and Alan W. Tucker, eds.), Ann. of Math. Stud., vol. 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953, pp. 245–266.

29. **Gödel**, Kurt. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Ann. of Math. Stud., vol. 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1940, pp. 33–101. Reproducido en

Gödel, Kurt. Collected Works, Volume II; Publications 1938-1974. Oxford University Press, 1990.

30. **Gödel**, Kurt. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte fur Mathematik und Physik, 38 (1931), 173-198, reproducido en Gödel, Kurt. *Collected Works, Volume I; Publications 1929-1936*. Este teorema fue recogido en el libro Gödel, Kurt: *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, traducido por b. Meltzer y completado con una introducción de R. B. Braithwaite.

31. **Hechler**, Stephen H. *Powers of singular cardinals and a strong form of the negation of the generalized continuum hypothesis*. Z. Math. Logik Grundlagen Math., 19 (1973), 83-84.

32. **Kanamori**, Akihiro. *The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen*. The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 2, No. 1 (Mar., 1996), pp. 1-71.

33. **Kanamori**, Akihiro. *The Empty Set, the Singleton, and the Ordered Pair*. The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 9, No. 3 (Sep., 2003), pp. 273-298.

34. **König**, Julius, 1905. Zum Kontinuumproblem. Math. Ann. Bd. 60, p. 177.

35. **Kuratowski**, Kaczmier: *Sur la notion d'ordre dans la Théorie des Ensembles*. Fundamenta Mathematicae 2, 1921, pp. 161-171.

36. **Lebesgue**, Henri. *Integrale, longueur, aire*. Annali de Matematica Pura ed Applicata 7(3), 1902, pp. 231-359.

37. **Lebesgue**, Henri. *Sur les fonctions représentables analytiquement*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1(6), 1905, pp. 139-216.

38. **Levy**, A. & **Solovay**, Robert. *Measurable cardinals and the continuum hypothesis*. Israel J. Math. 5 (1967), 234–248.

39. **Luzin**, Nikolai. *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 180 (1925), pp. 1572-1574.

40. **Maddy**, Penelope. *Believing the Axioms. I*. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 53, No. 2. (Jun., 1988), pp. 481-511.

41. **Maddy**, Penelope. *Believing the Axioms. II*. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 53, No. 3. (Sep., 1988), pp. 736-764.

42. **Magidor**, Menahem. *On the Singular Cardinals Problem II*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 106, Nº. 3 (Nov., 1977), pp. 517-547.

43. **Mahlo**, Paul: *Über lineare transfinite Mengen*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse 63 (1911): 187–225.

44. **Mahlo**, Paul: *Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse 64 (1912): 108–112.

45. **Martin**, Donald A. *Measurable Cardinals and Analytic Games*. Fund. Math. LXVI (1970), pp. 287 - 291. Recogido en Sacks 01: *Mathematical Logic in the 20th Century*. Singapore University Press, 2003, pp. 264 - 268.

46. **Martin**, Donald A. *Borel Determinacy*. Ann. of Math. 102 (1975), 363–371.

47. **Martin**, Donald A. *Projective sets and cardinal numbers*. J. Symbolic Logic, 1980.

48. **Martin & Solovay.** *Internal Cohen extensions.* Annals of Mathematical Logic 2 (1970), pp. 143-178.

49. **Martin & Steel.** *A Proof of Projective Determinacy*. J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 71–125.

50. **Moschovakis**, Yiannis: *Uniformisation in a Playful Universe*. Bulletin of the American Mathematical Society Volume 77, Number 5, September 1971, pp. 731 - 736.

51. **Mycielski & Steinhaus.** *A Mathematical Axiom Contradicting the Axiom of Choice*. Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math., Astron. Phys. 10 (1962), 1–3.

52. **Mycielski & Swierczkowski.** *On the Lebesgue Measurability and the Axiom of Determinateness*. Fund. Math. Vol. 54 (1964), pp. 67–71

53. **Nyikos**, Charles. *Himalayan Expedition.* Summary of two seminars given in 2006 at the University of South Carolina.

54. **Poincaré**, Henri. *Les mathématiques et la logique*. Révue de Métaphysique et de morale 14, 1906, pp. 17-34.

55. **Rudin**, M. E. *Martin's axiom*, en: **Barwise.** *Handbook of Mathematical Logic* (North-Holland, Amsterdam, 1977), pp. 491-501.

56. **Scott**, Dana: *Measurable Cardinals and Constructible Sets*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. des Sci. Math., Astr. et Phys., 9 (1961), pp. 521-524.

57. **Scott**, Dana: *A proof of the independence of the continuum hypothesis*, Math. Sys. Theory 1 (1967), 89-111.

58. **Shoenfield**, J. R. *Martin's axiom*. The American Mathematical Monthly 82 (1975), pp. 610-617.

59. **Silver**, Jack H. *The Consistency of the Generalized Continuum Hypothesis with the Existence of a Measurable Cardinal*. Notices Amer. Math. Soc., 13 (1966), p. 721.

60. **Silver**, Jack H. *On the Singular Cardinals Problem*. Proc. Int. Cong. Math. Vancouver (1974), pp. 265-268. Reproducido en Sacks (ed.): Mathematical Logic In The 20th Century, pp. 435-438.

61. **Skolem**, Thoralf: *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begrundung der Mengenlehre*. Proc. 5th Scandinavian Math. Congr., Helsinki (1922), 217-232; traducido al inglés en van Heijenoort. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*.

62. **Solovay**, Robert. *Independence Results in the Theory of Cardinals I & II*. Notices Amer. Math. Soc., 10 (1963), p. 595.

63. **Solovay**, Robert. *Real-valued measurable cardinals*. En "Axiomatic Set Theory" (D. S. Scott, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967. También en Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, pp. 397–428.

64. **Solovay**, Robert. *A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals Is Lebesgue Measurable*. Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.

65. **Stob**, Michael. *Is the Continuum Hypothesis True or False?* Calvin College and the University of Notre Dame, 2006.

66. **Ulam**, Stanislaw. *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre* (*Acerca de la Teoría de la Medida en la Teoría General de Conjuntos*). Fundamenta Mathematicae Tom 16 (1930), pp. 140 – 150.

67. **Wadge**, W. *Degrees of complexity of subsets of the Baire space*. Notices Amer. Math. Soc. 19 (1972), A-714.

68. **Wimmers**, Edward: *The Shelah P-point independence theorem*, Israel Journal of Mathematics (Hebrew University Magnes Press) 43 (1, March 1982), pp. 28–48.

69. **Woodin**, W. Hugh. *Aspects of determinacy*. En: Marcus, Dorn, and Weingartner (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII*. Proceedings of the 1983 International Congress, Salzburg. Amsterdam, North-Holland 1986, 171–181.

70. **Woodin**, W. Hugh. *The Continuum Hypothesis, Part I*. Notices of the AMS, Vol. 48, Nº 6, Junio/Julio 2001, pp. 567-576.

71. **Woodin**, W. Hugh. *The Continuum Hypothesis, Part II*. Notices of the AMS, Vol. 48, Nº 7, Agosto 2001, pp. 681-690.

Libros.

1. **Andersen**, Robert. *Set Theory and the Construction of Numbers*. Department of Mathematics, University of Wisconsin - Eau Claire, 2000.

2. **Bell**, E. T. *The Development of Mathematics*. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. York, London, 1945.

3. **Bell**, John L. *Set theory: Boolean-valued models and independence proofs*. Clarendon Press, Oxford, 2005.

4. **Boolos & Jeffrey.** *Computability and Logic*. Cambridge University Press, 1989.

5. **Borges**, Jorge Luis. *El idioma de los argentinos* (1928). Seix Barral, Buenos Aires, 1994.

6. **Ciesielski**, Krzysztof. *Set Theory for the Working Mathematician*. London Mathematical Society Student Texts 39, 2000.

7. **Cohen**, Paul. *Set Theory And The Continuum Hypothesis*. W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1966.

8. **Comfort**, W. W. & **Negrepontis**, S. *The theory of ultrafilters*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1974.

9. **Conway**, John H. & **Guy**, Richard K. *The Book of Numbers*.

10. **Dales & Woodin.** An Introduction to Independence for Analysts. Cambridge University Press, LMS Lecture Note Series Nº 115, 1987.

11. **Devlin**, Keith J. *Constructibility*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

12. **Devlin**, Keith J. *The Joy Of Sets: Fundamentals Of Contemporary Set Theory*. Springer-Verlag, 1991.

13. **Dixon**, P. G. *Set Theory*. Lecture Notes, 1998-99.

14. **Drake**, Frank. Set Theory. An Introduction to Large Cardinals. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 76, 1974, Elsevier Science Ltd.

15. **Enderton**, Herbert B. *Elements of Set Theory*. Academic Press. New York, San Francisco, London, 1977.

16. **Hausdorff**, Felix: *Mengenlehre*. Walter de Gruyter & Co., 1927.

17. **Hesse**, Hermann: *Der Steppenwolf* (1927). Suhrkamp Verlag, Berlin, 1974.

18. **Hrbacek & Jech.** *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, Inc. 1999.

19. **Jech**, Thomas J. *Lectures in Set Theory, with Particular Emphasis on the Method of Forcing*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

20. **Jech**, Thomas J. *Set Theory*. Corrected 4th printing. Springer Monographs in Mathematics, 2006.

21. **Jech**, Thomas J. *The Axiom of Choice*. North-Holland Publishing Company, 1973.

22. **Kunen**, Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Elsevier. 1980.

23. **Luzin**, Nikolai: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* (Gauthier-Villars et C^{ie}, Éditeurs. Paris, 1930).

24. **Mac Lane & Moerdijk.** *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag, 1992.

25. **Monastyrsky**, Michael. *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals* (2º ed. A. K. Peters, 1998).

26. **Mostowski**, Andrzej. *Constructible Sets with Applications*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969.

27. **Munkres**, James R. *Topology. A First Course.* Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

28. **Nagel & Newman.** *Gödel's Proof*. New York University Press, 2001.

29. **Newman**, Donald: *Analytic Number Theory*. Springer Verlag, 1998.

30. **Scalabrini Ortiz, Raúl**. *El hombre que está solo y espera* (1931). Librerías Anaconda, Buenos Aires, 1933.

31. **Smullyan & Fitting.** *Set Theory and the Continuum Problem*. Oxford University Press, 1996.

32. **von Neumann & Morgenstern.** Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1955.

33. **Woodin**, W. Hugh. *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*. Ser. Logic Appl., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1999.