



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

## ROADMAPS EN CONJUNTOS SEMI-ALGEBRAICOS

María Laura Barbagallo

Directora de tesis: Dra. Gabriela Jeronimo

Marzo de 2010



# Agradecimientos

Hay mucha gente que hizo y hace posible que yo esté acá, escribiendo mi tesis de licenciatura. Mucha gente que me ayudó y acompañó todos estos años, de cerca o de lejos, a nivel académico, familiar y brindándome su amistad. En particular, quiero agradecer:

– A mi familia, que me ayudó cuando decidí empezar este camino, que aguantó mis nervios antes de cada parcial. A mí papá, por mostrarme con el ejemplo que si quiero, puedo. A mí mamá, por tener esa fuerza que la hizo salir adelante. A Majo, porque calladita te pone los puntos, por su compañía...

– A Tita Rina, Tita Mari y a Tito, por estar en cada uno de mis recuerdos de la infancia. Fueron mis compañeros de juegos, amigos y abuelos...

– A mi amiga de la vida, Laura. Por ser mi compañera de aventuras en aquellos años donde todo era más fácil. Por ser mi confidente y darme un empujoncito cada vez que me estaba por rendir. Una charla con ella me baja a la tierra en segundos...

– A Gabriela, por aceptar trabajar conmigo y hacerme un lugar en su equipo, por pensar y discutir de igual a igual, por responder preguntas y repetir las respuestas... A Daniel P., por ayudar a aclarar dudas...

– A los chicos y chicas de la facu: Georgi, Pau, Ana F., Lucas, Marce, Ro, Caro M., Lean, Carito, Juli, Pablo T., Jime, Isa, Sol, Maga K... sin ustedes no estaría acá. Lo más importante que logré al entrar (y vivir) en el pabellón 1 es su amistad. Por compartir interminables horas de cursada y de estudio, la desesperación pre-parcial y la angustia post-parcial, los viajes, las “salidas tranquilas que mañana quiero estudiar” y las que no lo fueron tanto... En particular a Julián, que me ayudó a poner a punto la compu, y a Lean y Sandra, que me ayudaron con los dibujos.

– A mi prima Nati, a Mari y a Osvi, por escuchar, entender y compartir, por esas charlas profundas con muuucho mate de por medio...



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Nociones de geometría algebraica real</b>	<b>7</b>
1.1. Cuerpos reales cerrados . . . . .	7
1.1.1. Definiciones y propiedades elementales . . . . .	7
1.1.2. Series de Puiseux . . . . .	11
1.2. Conjuntos semi-algebraicos y funciones . . . . .	12
1.2.1. Conjuntos algebraicos y semi-algebraicos . . . . .	13
1.2.2. Principio de Tarski-Seidenberg y transferencia . . . . .	14
1.2.3. Funciones semi-algebraicas . . . . .	17
1.2.4. Descomposición de conjuntos semi-algebraicos . . . . .	21
1.3. Propiedades topológicas . . . . .	22
1.3.1. Conjuntos semi-algebraicos cerrados y acotados . . . . .	22
1.3.2. Conexión semi-algebraica . . . . .	23
<b>2. Roadmaps de conjuntos semi-algebraicos</b>	<b>27</b>
2.1. Topología de conjuntos algebraicos . . . . .	28
2.1.1. Conjuntos algebraicos regulares y acotados . . . . .	28
2.1.2. Conjuntos algebraicos no regulares . . . . .	34
2.2. Roadmaps . . . . .	43
2.2.1. Roadmap de un conjunto algebraico acotado . . . . .	43
2.2.2. Roadmap de un conjunto algebraico no acotado . . . . .	45
2.2.3. Roadmap de conjuntos semi-algebraicos . . . . .	49

<b>3. Algoritmos para el cálculo de roadmaps</b>	<b>53</b>
3.1. Algoritmos y codificación . . . . .	53
3.2. Cálculo de roadmaps de conjuntos algebraicos . . . . .	56
3.2.1. Conjuntos algebraicos acotados . . . . .	56
3.2.2. Conjuntos algebraicos no acotados . . . . .	66
3.3. Aplicación . . . . .	68
3.4. Roadmaps uniformes . . . . .	71
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

# Introducción

Diversos problemas concretos de las áreas más diversas pueden plantearse en términos de sistemas de ecuaciones e inecuaciones polinomiales con coeficientes en  $\mathbb{R}$ : estos sistemas modelizan problemas de robótica, procesamiento de señales, biología molecular, diseño por computadora, estadística y teoría de juegos, entre otras áreas. La resolución de estos problemas involucra el estudio del conjunto de las soluciones en  $\mathbb{R}^n$  de los sistemas que los describen. En los últimos años, ha cobrado interés el tratamiento computacional de estos problemas debido a los avances recientes de la informática.

El conjunto de los puntos de  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen un sistema finito de ecuaciones e inecuaciones dadas por polinomios en  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  es un *conjunto semi-algebraico* de  $\mathbb{R}^n$ . Más generalmente, un conjunto semi-algebraico es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  definido por una fórmula booleana cuyos átomos son ecuaciones e inecuaciones polinomiales.

En algunas ocasiones, es suficiente con poder determinar algorítmicamente si un sistema de ecuaciones e inecuaciones dado tiene una solución o no, pero frecuentemente la resolución del problema subyacente requiere el cálculo de (algunas de) las soluciones del sistema. Más aún, para algunas aplicaciones resulta fundamental un análisis o descripción más específico del conjunto semi-algebraico que define el sistema.

Por ejemplo, ciertos problemas de robótica han motivado el estudio, desde el punto de vista efectivo, de cuestiones de conexión en conjuntos semi-algebraicos. El problema general consiste en guiar un robot automáticamente en un ambiente con obstáculos: dados dos puntos, se busca determinar si hay un camino que los une evitando los obstáculos y, en caso afirmativo, construir uno. En la mayoría de las situaciones las restricciones para el movimiento del robot son polinomiales y el conjunto en el que pueden elegirse los parámetros para moverlo es semi-algebraico.

Un procedimiento para resolver este problema fue propuesto en [15] en base al método de *descomposición cilíndrica* de conjuntos semi-algebraicos de Collins [7]. Sin embargo, el uso de este método tan general (de hecho, permite resolver el problema de la eliminación de cuantificadores en la teoría de primer orden sobre  $\mathbb{R}$ ) lleva a

complejidades (es decir, cantidad de operaciones y comparaciones a realizar por el algoritmo) doblemente exponenciales en la cantidad de variables.

Con el objeto de diseñar un procedimiento específicamente adaptado a la resolución del problema, en [4], se introdujo la noción de *roadmap* de un conjunto semi-algebraico. Un *roadmap* en un conjunto semi-algebraico  $S \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto semi-algebraico de  $S$  de dimensión menor o igual que 1 que tiene intersección no vacía con cada componente conexa de  $S$  y que es conexo dentro de cada una de ellas. Canny desarrolló un algoritmo para el cálculo de roadmaps en ciertos conjuntos semi-algebraicos y lo aplicó para construir un procedimiento que decide si dados dos puntos de un conjunto semi-algebraico arbitrario pertenecen a la misma componente conexa con la misma complejidad.

Esta nueva herramienta introducida por Canny ha sido utilizada desde entonces en el estudio de diversos problemas de conexión desde el punto de vista efectivo, obteniéndose asimismo mejoras sucesivas a su algoritmo ([10], [9], [11], [8], [5], [6],[12]). El algoritmo más eficiente para el cálculo de roadmaps en conjuntos semi-algebraicos arbitrarios se encuentra en [2]. Para el caso particular de una hipersuperficie compacta con finitos puntos singulares, recientemente, en [14] se obtuvo un procedimiento con mejores cotas de complejidad. Sin embargo, es todavía un problema abierto el determinar si el cálculo de roadmaps en subconjuntos semi-algebraicos de  $\mathbb{R}^n$  puede efectuarse con complejidad *polinomial* en el tamaño de la representación de los polinomios que describen al conjunto por medio de sus vectores de coeficientes.

Esta tesis se centra en el problema del cálculo algorítmico de roadmaps de conjuntos semi-algebraicos de  $\mathbb{R}^n$ .

En el capítulo 1 se introducen algunas nociones básicas y se establecen algunas propiedades geométricas y topológicas fundamentales de los conjuntos semi-algebraicos y de las funciones entre estos conjuntos, que se utilizan a lo largo de todo el trabajo. El capítulo 2 presenta un análisis detallado de los aspectos teóricos subyacentes al algoritmo de [2] (ver también [3, Capítulo 15]) para el cálculo de roadmaps de conjuntos algebraicos de  $\mathbb{R}^n$  (es decir, conjuntos definidos sólo por ecuaciones polinomiales): en primer lugar, se considera el caso de conjuntos acotados y, posteriormente, se extienden los resultados al caso no acotado. Al final del capítulo se incluye una breve descripción de las técnicas fundamentales que permiten el tratamiento del problema para conjuntos semi-algebraicos (ver [2] y [3, Capítulo 16]).

Finalmente, en el capítulo 3 se describen de manera más precisa los algoritmos analizados en el capítulo previo y se enuncian los resultados sobre las complejidades de estos algoritmos. Por otra parte, se exhibe el desarrollo completo del algoritmo principal en un ejemplo. Como aplicación, se describe un algoritmo que permite determinar si dos puntos dados de un conjunto pertenecen a la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto.



# Capítulo 1

## Nociones de geometría algebraica real

En toda la tesis, notaremos  $\mathbb{N}$  al conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}_0$  a  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{Z}$  al anillo de los números enteros,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$  el cuerpo de los números racionales y reales respectivamente.

Escribiremos  $K[X_1, \dots, X_n]$  para denotar el anillo de los polinomios en las variables  $X_1, \dots, X_n$  con coeficientes en  $K$ . Dado un monomio  $m = \prod_{i=1}^n X_i^{d_i}$ , con  $d_i \in \mathbb{N}_0$ , llamaremos grado de  $m$  al número  $\sum_{i=1}^n d_i$ , y dado un polinomio  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ , llamaremos grado total de  $f$ , o simplemente grado de  $f$ , al máximo de los grados de todos los monomios que aparecen en  $f$ . Lo notaremos  $gr(f)$ .

Comenzaremos introduciendo algunas definiciones y resultados básicos de geometría algebraica real que utilizaremos. Nuestra presentación se basa en [1] y [3].

### 1.1. Cuerpos reales cerrados

#### 1.1.1. Definiciones y propiedades elementales

Un *cuerpo ordenado*  $(F; \leq)$  es un cuerpo  $F$  provisto de un orden total  $\leq$  que satisface:

- i)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ,
- ii)  $0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$ .

Dados dos cuerpos ordenados  $F \subset E$ , donde el orden de  $E$  extiende al orden de  $F$ , un elemento  $x \in E$  se dice *infinitesimal sobre  $F$*  si es positivo y menor que cualquier elemento positivo  $y \in F$ .

Llamaremos *cono propio* de un cuerpo  $F$  a un subconjunto  $P$  de  $F$  que verifica:

- i)  $x, y \in P \Rightarrow x + y, xy \in P$ ,
- ii)  $x \in F \Rightarrow x^2 \in P$ ,
- iii)  $-1 \notin P$ .

**Proposición 1.1** *Sea  $F$  un cuerpo y  $P$  un cono propio de  $F$  que verifica  $F = P \cup (-P)$ . Entonces  $F$  puede ser ordenado por*

$$x \leq y \iff y - x \in P.$$

*Más aún, si  $P$  es un cono propio de  $F$ , existe un cono propio  $Q$  de  $F$  que contiene a  $P$  y verifica  $F = Q \cup (-Q)$ .*

*Demostración.* Como  $F = P \cup (-P)$ , se tiene que la relación  $x \leq y \iff y - x \in P$  es una relación de orden total en  $F$ . Para  $x, y, z \in F$ :

- $x \leq y \iff y - x \in P \iff y + z - (x + z) \in P \iff x + z \leq y + z$ ,
- $0 \leq x, 0 \leq y \iff x, y \in P \Rightarrow xy \in P \iff 0 \leq xy$ .

Luego  $F$  es un cuerpo ordenado con esta relación.

Supongamos ahora que  $P$  es un cono propio arbitrario de  $F$ . Consideremos el conjunto  $\Sigma = \{C \text{ cono propio de } F / P \subset C\}$  con el orden dado por la inclusión.

Toda cadena creciente  $\{C_i\}_{i \in I}$  en  $\Sigma$  está acotada superiormente por  $\bigcup_{i \in I} C_i \in \Sigma$ . Por el Lema de Zorn existe un elemento maximal  $Q \in \Sigma$ . En particular,  $P \subset Q$ .

Veamos que  $Q \cup (-Q) = F$ : Sea  $a \in F$ . Si  $a \in Q$ , no hay nada que probar.

Si  $a \notin Q$ , entonces  $Q[-a] = \{x - ay/x, y \in Q\}$  resulta ser un cono propio de  $F$  que contiene a  $Q$ : Si  $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in Q$  y  $c \in F$ :

- $(x - ay) + (\tilde{x} - a\tilde{y}) = (x + \tilde{x}) - a(y + \tilde{y}) \in Q[-a]$ .
- $c^2 \in Q$ , pues  $Q$  es un cono propio de  $F$ . Luego  $c^2 \in Q[-a]$ .
- $(x - ay)(\tilde{x} - a\tilde{y}) = (x\tilde{x} + a^2y\tilde{y}) - a(y\tilde{x} + x\tilde{y}) \in Q[-a]$ , pues  $a^2 \in Q$ .
- $-1 \notin Q[-a]$ . De lo contrario,  $-1 = x - ay$ , con  $x, y \in Q$ . Como  $-1 \notin Q$ ,  $y \neq 0$ . Luego  $a = (1 + x)\frac{1}{y} = (1 + x)(\frac{1}{y})^2 y \in Q$ , lo cual es un absurdo pues  $a \notin Q$ .

Por la maximalidad de  $Q$  se tiene que  $-a \in Q$ , y por lo tanto  $a \in -Q$ . □

**Teorema 1.2** *Sea  $F$  un cuerpo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i)  $F$  es un cuerpo ordenado.
- ii)  $F$  tiene un cono propio.
- iii)  $-1 \notin \sum F^2 = \{x \in F / x \text{ es suma de cuadrados de elementos de } F\}$ .
- iv) Para cualesquiera  $x_1, \dots, x_n \in F$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0$ .

Un cuerpo que satisface alguna, y por lo tanto todas las propiedades anteriores se llama un cuerpo real.

Notar que un cuerpo real tiene característica 0.

*Demostración.* Probaremos  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$  y  $iii) \Leftrightarrow iv)$ .

$i) \Rightarrow ii)$  El conjunto  $P = \{x \in F / 0 \leq x\}$  resulta ser un cono propio de  $F$ , pues la suma y el producto de elementos de  $P$  está en  $P$ ,  $F^2 \subset P$ , pues producto de elementos positivos es positivo, y  $-1 \notin P$ .

$ii) \Rightarrow iii)$  Sea  $C$  el cono propio en  $F$ . Si  $-1 \in \sum F^2 \subset C$ , se tiene que  $-1 \in C$ , que es un absurdo pues  $C$  es un cono propio.

$iii) \Rightarrow i)$  Como  $-1 \notin \sum F^2$  se tiene que  $\sum F^2$  es un cono propio y luego, por la proposición 1.1,  $F$  puede ordenarse.

$iii) \Rightarrow iv)$  Supongamos  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ . Si existe  $x_j \neq 0$  entonces  $-1 = \sum_{i \neq j} (\frac{x_i}{x_j})^2 \in \sum F^2$ , lo cual es un absurdo.

$iv) \Rightarrow iii)$  Si  $-1 \in \sum F^2$  entonces  $-1 = \sum_i x_i^2$  por lo que  $1^2 + \sum_i x_i^2 = 0$ , contradiciendo  $iv)$ .

□

**Definición 1.3** Un cuerpo real cerrado es un cuerpo real  $F$  que no admite una extensión real algebraica no trivial  $F_1 \supset F$ ,  $F_1 \neq F$ .

**Teorema 1.4** Sea  $F$  un cuerpo. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- $i)$   $F$  es un cuerpo real cerrado.
- $ii)$  Existe un orden en  $F$  para el cual los elementos positivos de  $F$  son cuadrados en  $F$  y todo polinomio en  $F[X]$  de grado impar tiene una raíz en  $F$ .
- $iii)$   $F[i] = F[Z] / \langle Z^2 + 1 \rangle$  es un cuerpo algebraicamente cerrado.

*Demostración.*

$i) \Rightarrow ii)$  Probaremos que  $F = \sum F^2 \cup (-\sum F^2)$ , con lo cual se tiene el orden en  $F$  definido por:  $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \sum F^2$ .

Sea  $a \in F$ . Si  $a$  no es un cuadrado en  $F$ , se tiene que  $F[\sqrt{a}] = F[X] / \langle X^2 - a \rangle$  es una extensión algebraica de  $F$  no trivial y por lo tanto no real. Luego  $-1 \in \sum (F[\sqrt{a}])^2$ . Entonces se tiene que

$$-1 = \sum_{j=1}^n (x_j + \sqrt{a}y_j)^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + a \sum_{j=1}^n y_j^2 + 2\sqrt{a} \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Por unicidad de escritura en base  $\{1, \sqrt{a}\}$ ,  $\sum_{j=1}^n x_j y_j = 0$  y como  $F$  es real,  $-1 \neq \sum_{j=1}^n x_j^2$ , luego se tiene  $\sum_{j=1}^n y_j^2 \neq 0$ . Se sigue que

$$-a = \left(1 + \sum_{j=1}^n x_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)^{-1} \in \sum F^2.$$

Luego  $a \in -\sum F^2$ . Esto implica que  $F = F^2 \cup (-\sum F^2)$  y, además, que si  $a$  no es un cuadrado, entonces  $a$  es negativo para el orden definido en  $F$ .

Supongamos que existe  $f \in F[X]$ , de grado impar  $d > 1$  que no admite raíz en  $F$ . Podemos suponer que  $f$  es mónico y el de menor grado impar que verifica esto. Entonces  $f$  es irreducible en  $F[X]$ , y se tiene que  $F[X]/\langle f \rangle$  es una extensión algebraica no trivial de  $F$  y, por lo tanto, no real. Luego  $-1 \in \sum (F[X]/\langle f \rangle)^2$ . Se tiene que  $-1 = \sum h_j^2 + fg$ , con  $gr(h_j) < gr(f) = d$ ; por lo tanto  $gr(\sum h_j^2) \leq 2d - 2$  y es par puesto que  $F$  es real. Luego,  $gr(g) \leq d - 2$  y es impar, y por lo tanto  $g$  admite una raíz  $x$  en  $F$ . Evaluando en  $x$  se obtiene  $-1 = \sum h_j^2(x) \in \sum F^2$ , lo cual es un absurdo.

ii)  $\Rightarrow$  iii) En primer lugar, probaremos que todo  $f \in F[X]$  admite una raíz en  $F[i]$ .

Si el grado de  $f$  es  $2^m n$ , con  $n$  impar, lo probaremos por inducción en  $m$ : Si  $m = 0$ , el grado de  $f$  es impar y por hipótesis admite una raíz en  $F$ . Supongamos que el resultado vale para polinomios de grado  $2^{m-1}n$ , con  $n$  impar. Sea  $f \in F[X]$  de grado  $d = 2^m n$ , con  $n$  impar. Sean  $y_1, \dots, y_d$  las raíces de  $f$  en una clausura algebraica de  $F$ . Para cada  $h \in \mathbb{Z}$ , consideremos el polinomio  $g_h = \prod_{\lambda < \mu} (X - y_\lambda - y_\mu - h y_\lambda y_\mu)$ . Observemos que  $g_h$  es simétrico en  $y_1, \dots, y_d$ , por lo tanto  $g_h \in F[X]$ , y tiene grado  $\frac{d(d-1)}{2} = 2^{m-1} \underbrace{n(2^m n - 1)}_{\text{impar}}$ .

Por hipótesis inductiva  $g_h$  admite una raíz en  $F[i]$ . Luego existen  $\lambda, \mu$  que verifican  $y_\lambda + y_\mu + h y_\lambda y_\mu \in F[i]$ . Como  $h$  toma infinitos valores y  $\lambda, \mu \in \{1, \dots, d\}$ , existen  $\lambda, \mu$  y  $h_1 \neq h_2$  que verifican  $y_\lambda + y_\mu + h_1 y_\lambda y_\mu \in F[i]$  y  $y_\lambda + y_\mu + h_2 y_\lambda y_\mu \in F[i]$ . Restando se concluye que  $y_\lambda y_\mu, y_\lambda + y_\mu \in F[i]$ ; luego son raíces de un polinomio en  $F[i][X]$  de grado 2.

Ahora, todo polinomio en  $F[i][X]$  de grado 2 tiene sus raíces en  $F[i]$ : en efecto, como todo elemento de  $F[i]$  es un cuadrado (se procede igual que para ver que todo elemento en  $\mathbb{C}$  es un cuadrado) y la característica de  $F$  es 0, vale:  $aX^2 + bX + c = 0 \Leftrightarrow X = \frac{-b \pm q}{2a}$ , con  $q \in F[i]$  tal que  $q^2 = b^2 - 4ac$ .

Por lo tanto,  $f$  admite raíces en  $F[i]$ .

Para el caso general, sea  $f = \sum_{j=0}^d a_j X^j \in F[i][X]$ . Sea  $\bar{f} = \sum_{j=0}^d \bar{a}_j X^j$ , donde  $\bar{a}$  es el conjugado de  $a$ . Se tiene que  $f\bar{f} \in F[X]$  y entonces, por el caso previo, admite una raíz  $x \in F[i]$ . Luego  $x$  ó  $\bar{x}$  es raíz de  $f$ .

iii)  $\Rightarrow$  i) Si vemos que en  $F$  una suma de cuadrados es un cuadrado, como  $-1$  no es un cuadrado en  $F$  (pues  $F[i]$  es un cuerpo), se tiene que  $F$  es un cuerpo real. Sean  $a, b \in F$ . Veamos  $a^2 + b^2$  es un cuadrado en  $F$ : Consideramos  $X^2 - (a + bi) \in F[i][X]$ . Por hipótesis admite una raíz  $x = c + di \in F[i]$ . Entonces  $a + bi = (c + di)^2$  y, calculando normas, se tiene que  $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$ .

Para ver que es un cuerpo real cerrado alcanza con notar que  $F[i]$  es la única extensión algebraica no trivial de  $F$ , pues es una extensión algebraicamente cerrada y de grado 2.

□

**Ejemplo 1.5** *El cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales es un cuerpo real cerrado. El cuerpo de los números reales algebraicos sobre  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo real cerrado que denotaremos  $\mathbb{R}_{alg}$ .*

Observamos que todo cuerpo ordenado  $(F; \leq)$  tiene una (única salvo isomorfismos) *clausura real*, es decir, una extensión algebraica  $R$  de  $F$  que es un cuerpo real cerrado y cuyo orden extiende al orden de  $F$  ([3, Theorem 1.3.2]).

Con la notación usual de intervalos, el siguiente teorema generaliza al Teorema de Bolzano en  $\mathbb{R}$  para polinomios con coeficientes en un cuerpo real cerrado arbitrario:

**Teorema 1.6** *Sean  $R$  un cuerpo real cerrado,  $f \in R[X]$ ,  $a, b \in R$  con  $a < b$ . Si  $f(a)f(b) < 0$ , entonces existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = 0$ .*

*Demostración.* Por el teorema 1.4, los factores irreducibles de  $f$  son lineales o tienen la forma  $(X - c)^2 + d^2 = (X - c - di)(X - c + di)$ . Estos últimos siempre son positivos o cero sobre  $R$ . Entonces, si  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos,  $g(a)$  y  $g(b)$  también los tendrán para algún factor lineal  $g$  de  $f$ . Luego, existe una raíz  $x \in (a, b)$  de  $g$ , y por lo tanto de  $f$ . □

### 1.1.2. Series de Puiseux

Sea  $K$  un cuerpo y  $\xi$  una variable. El anillo de series de potencias formales en  $\xi$  con coeficientes en  $K$ , que denotaremos  $K[[\xi]]$ , consiste de las series de la forma  $a = \sum_{i \geq 0} a_i \xi^i$ , con  $i \in \mathbb{N}_0$  y  $a_i \in K$ . Su cuerpo cociente, que denotaremos  $K((\xi))$ , es el cuerpo de series de Laurent en  $\xi$  con coeficientes en  $K$ , y sus elementos son las series de la forma  $a = \sum_{i \geq k} a_i \xi^i$ , con  $i, k \in \mathbb{Z}$  y  $a_i \in K$ .

Una *serie de Puiseux* en la variable  $\xi$  con coeficientes en  $K$  es una serie de la forma

$$\bar{a} = \sum_{i \geq k} a_i \xi^{i/q} \text{ con } k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}, a_i \in K \text{ y } q \text{ un entero positivo.}$$

Si  $k = \min \{i \in \mathbb{Z} / a_i \neq 0\}$ , llamamos *orden* de  $\bar{a}$  a  $\text{ord}(\bar{a}) = \frac{k}{q}$  y *coeficiente inicial* de  $\bar{a}$  a  $\text{in}(\bar{a}) = a_k$ .

Observar que las series de Puiseux son las series formales de Laurent en  $\xi^{1/q}$  para algún entero positivo  $q$ . Dadas dos series de Puiseux  $\bar{a} = \sum_{i \geq k_1} a_i \xi^{i/q_1}$  y  $\bar{b} = \sum_{j \geq k_2} a_j \xi^{j/q_2}$ , podemos escribirlas como una serie de Laurent en  $\xi^{1/q}$ , donde  $q$  es el mínimo común múltiplo entre  $q_1$  y  $q_2$ . Luego la suma y la multiplicación de series de Puiseux es la heredada de las series de Laurent.

El cuerpo de las series de Puiseux en la variable  $\xi$  con coeficientes en  $K$  será denotado  $K \langle\langle \xi \rangle\rangle$ .

Si  $K$  es un cuerpo ordenado, definimos un orden en  $K \langle\langle \xi \rangle\rangle$  como sigue: dada una serie  $\bar{a} = \sum_{i \geq k} a_i \xi^{i/q}$  con  $a_k \neq 0$ ,

$$0 < \bar{a} \iff 0 < a_k.$$

En este cuerpo y con este orden,  $\xi \in K \langle\langle \xi \rangle\rangle$  resulta ser un elemento positivo e infinitesimal sobre  $K$ .

El cuerpo  $R \langle\langle \xi \rangle\rangle$  de las series de Puiseux con coeficientes en un cuerpo real cerrado  $R$  es un cuerpo real cerrado (ver, por ejemplo, [3, Theorem 2.91]).

Más aún, si consideramos el cuerpo  $R(\xi)$  de funciones racionales en la variable  $\xi$  con coeficientes en  $R$  con el orden

$$\frac{p(\xi)}{q(\xi)} > 0 \iff p(\xi)q(\xi) > 0,$$

el cuerpo de las series de Puiseux algebraicas sobre  $R(\xi)$ , que notaremos  $R \langle \xi \rangle$ , es la clausura real de  $R(\xi)$ .

Si notamos  $R \langle\langle \xi \rangle\rangle_A$  al conjunto formado por los elementos de  $R \langle\langle \xi \rangle\rangle$  que tienen orden no negativo, es decir, a los elementos de la forma  $\bar{a} = \sum_{i \geq 0} a_i \xi^{i/q}$ , podemos definir un morfismo de anillos  $\lim_{\xi} : R \langle\langle \xi \rangle\rangle_A \rightarrow R$  de la siguiente manera:

$$\lim_{\xi} \left( \sum_{i \geq 0} a_i \xi^{i/q} \right) = a_0.$$

Otra forma de interpretar los elementos de  $R \langle\langle \xi \rangle\rangle_A$  es que son los elementos de  $R \langle\langle \xi \rangle\rangle$  de valor absoluto acotado por un elemento positivo de  $R$ . La función  $\lim_{\xi}$  simplemente reemplaza  $\xi$  por 0 en las series de Puiseux acotadas sobre  $R$ .

## 1.2. Conjuntos semi-algebraicos y funciones

En esta sección introducimos los objetos con los que trabajaremos a lo largo de esta tesis: conjuntos semi-algebraicos y funciones semi-algebraicas. Presentamos también algunas de sus propiedades básicas y resultados geométricos fundamentales.

A partir de ahora, y durante toda la tesis,  $R$  denotará un cuerpo real cerrado.

### 1.2.1. Conjuntos algebraicos y semi-algebraicos

Sea  $B$  un subconjunto finito de  $R[X_1, \dots, X_n]$ . Llamaremos *conjunto algebraico* y denotaremos  $Z(B)$  a un subconjunto de  $R^n$  que es de la forma

$$Z(B) = \{x \in R^n / f(x) = 0 \text{ para todo } f \in B\}.$$

En algunos casos convendrá utilizar la notación  $Z(B, R^n)$ , enfatizando el espacio ambiente del conjunto algebraico. Observemos que todo conjunto algebraico de  $R^n$  puede ser definido por una sola ecuación polinomial; basta para ello tomar la suma de los cuadrados de los elementos del conjunto de polinomios  $B$  que lo define.

**Definición 1.7** *Un subconjunto semi-algebraico de  $R^n$  es un subconjunto de la forma  $\bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in R^n / f_{i,j} *_{i,j} 0\}$ , donde  $f_{i,j} \in R[X_1, \dots, X_n]$  y  $*_{i,j}$  es  $>$  ó  $=$ , para  $i = 1, \dots, s$  y  $j = 1, \dots, r_i$ .*

Notar que la clase de subconjuntos semi-algebraicos es cerrada bajo intersecciones finitas, uniones finitas y complementos.

**Proposición 1.8** *Los subconjuntos semi-algebraicos de  $R$  son exactamente las uniones finitas de puntos y de intervalos abiertos (acotados o no acotados).*

*Demostración.* Alcanza con verlo para conjuntos de la forma  $\{x \in R / f * 0\}$  con  $*$   $\in \{>, =\}$ . Para esto hay que notar que por el teorema 1.6, se tiene que el conjunto  $\{x \in R / f(x) = 0\}$  es finito ó vacío y que el conjunto  $\{x \in R / f(x) > 0\}$  es unión finita de intervalos abiertos, acotados o no.  $\square$

Consideraremos en  $R^n$  la topología euclídeana, heredada del orden en  $R$ .

Si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $r \in R$  positivo, denotaremos  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ,

$$B_n(x, r) = \{y \in R^n / \|y - x\| < r\} \quad (\text{bola abierta}),$$

$$\overline{B}_n(x, r) = \{y \in R^n / \|y - x\| \leq r\} \quad (\text{bola cerrada}),$$

y cuando quede claro por el contexto, suprimiremos el subíndice  $n$ .

Las bolas abiertas forman una base de abiertos para la topología euclídeana. Los conjuntos  $B_n(x, r)$  y  $\overline{B}_n(x, r)$  son claramente conjuntos semi-algebraicos. Los polinomios son funciones continuas con esta topología.

### 1.2.2. Principio de Tarski-Seidenberg y transferencia

A continuación enunciamos el Principio de Tarski-Seidenberg, una herramienta esencial para la geometría algebraica real. Una demostración de este resultado puede hallarse en [1, Theorem 1.4.2].

**Teorema 1.9** *Sea  $F$  un cuerpo real. Sean  $f_i(X, Y)$  para  $i = 1, \dots, s$  polinomios en  $n + 1$  variables con coeficientes en  $F$ , donde  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  y  $*_j \in \{>, =, <\}$  para  $j = 1, \dots, s$ . Entonces existe una combinación booleana  $B(Y)$  (es decir, una composición finita de disyunciones, conjunciones y negaciones) de ecuaciones e inecuaciones polinomiales en las variables  $Y$  con coeficientes en  $F$  tal que para todo cuerpo real cerrado  $R$  que contiene a  $F$  y para todo  $y \in R^n$ , el sistema*

$$\begin{cases} f_1(X, y) *_1 0 \\ \vdots \\ f_s(X, y) *_s 0 \end{cases}$$

*tiene una solución  $x \in R$  si y sólo si  $B(y)$  es verdadera en  $R$ .*

Este resultado puede ser reformulado en términos geométricos como sigue:

**Teorema 1.10** *Sea  $A$  un subconjunto semi-algebraico de  $R^{n+1}$  y  $\pi : R^{n+1} \rightarrow R^n$  la proyección al espacio de las primeras  $n$  coordenadas. Entonces  $\pi(A)$  es un subconjunto semi-algebraico de  $R^n$ .*

*Demostración.* Es suficiente probar el teorema para los conjuntos semi-algebraicos de la forma

$$\{(y, x) \in R^n \times R / f_1(y, x) = \dots = f_l(y, x) = 0, g_1(y, x) > 0, \dots, g_m(y, x) > 0\}.$$

Por el teorema 1.9, existe una combinación booleana de ecuaciones e inecuaciones polinomiales  $B(Y)$  en las variables  $Y$  con coeficientes en  $R$  tal que, para todo  $y \in R^n$ , el sistema

$$\begin{cases} f_1(y, X) = \dots = f_l(y, X) = 0 \\ g_j(y, X) > 0, j = 1, \dots, s \end{cases}$$

tiene una solución  $x \in R$  si y sólo si  $B(y)$  es verdadera en  $R$ . Luego,  $\pi(A)$  es el conjunto de los  $y$  en  $R^n$  que satisfacen  $B(Y)$ ; por lo tanto es semi-algebraico.  $\square$

Utilizando un argumento inductivo, el enunciado anterior se extiende a la proyección  $\pi : R^n \rightarrow R^p$  con  $p < n$ . Esto permite probar la siguiente proposición:

**Proposición 1.11** *La clausura  $\overline{A}$  y el interior  $A^\circ$  de un conjunto semi-algebraico  $A$  son conjuntos semi-algebraicos.*



*Demostración.* Dado  $A$  un subconjunto semi-algebraico de  $R^n$ , se tiene que  $\overline{A} = \{x \in R^n / \forall t \in R \exists y \in A (\|y - x\|^2 < t^2 \text{ ó } t = 0)\}$  o, equivalentemente:

$$\overline{A} = R^n - \pi_2(R^{n+1} - \pi_1(\{(x, y, t) \in R^{2n+1} / y \in A \wedge (\|y - x\|^2 < t^2 \text{ ó } t = 0)\})),$$

donde  $\pi_1 : R^{2n+1} \rightarrow R^{n+1}$  es la proyección  $\pi_1(x, y, t) = (x, t)$  y  $\pi_2 : R^{n+1} \rightarrow R^n$  la proyección  $\pi_2(x, t) = x$ . Luego por el teorema 1.10,  $\overline{A}$  es semi-algebraico. Para ver que  $A^\circ$  es semi-algebraico alcanza con notar que el complemento de  $\overline{A^c}$  resulta ser  $A^\circ$ .  $\square$

En ocasiones nos será de utilidad describir conjuntos semi-algebraicos por medio de fórmulas que involucran igualdades y desigualdades polinomiales y cuantificadores. Más precisamente, una *fórmula de primer orden del lenguaje de cuerpos ordenados con parámetros en  $R$*  es una fórmula escrita con una cantidad finita de conjunciones, disyunciones, negaciones y cuantificadores (universales  $\forall$  o existenciales  $\exists$ ) sobre variables, empezando por fórmulas atómicas del tipo  $f(X_1, \dots, X_n) * 0$ , con  $*$   $\in \{>, =\}$  y  $f$  un polinomio con coeficientes en  $R$ . Las *variables libres* de la fórmula son aquellas variables de los polinomios que no están cuantificadas. Notaremos  $L(R)$  al lenguaje de primer orden de cuerpos ordenados con parámetros en  $R$ .

Por definición, los conjuntos semi-algebraicos están descriptos por fórmulas libres de cuantificadores de  $L(R)$ . El principio de Tarski-Seidenberg da lugar al siguiente resultado:

**Proposición 1.12** *Sea  $\Phi(X_1, \dots, X_n)$  es una fórmula de  $L(R)$  con variables libres  $X_1, \dots, X_n$ . Entonces  $\{x \in R^n / \Phi(x)\}$  es un conjunto semi-algebraico.*

*Demostración.* Lo probaremos por inducción en la construcción de la fórmula, empezando por las fórmulas atómicas. Los casos conjunciones, disyunciones y negaciones son inmediatos. Si  $\Phi(x)$  tiene la forma  $\exists y \theta(x, y)$ , con  $S = \{(x, y) \in R^{n+1} / \theta(x, y)\}$  un conjunto semi-algebraico, se tiene que  $\{x \in R^n / \Phi(x)\} = \pi(S)$  (donde  $\pi$  es la proyección a las primeras  $n$  coordenadas) y, por el teorema 1.10, resulta ser semi-algebraico. Para ver el caso del cuantificador universal, alcanza con notar que  $\forall y \theta(x, y)$  es equivalente a *no*  $\exists y$  *no*  $\theta(x, y)$ .  $\square$

Si  $K$  una extensión real cerrada de  $R$ , dado un conjunto semi-algebraico  $A$  de  $R^n$ , notaremos  $Ext(A, K)$  al subconjunto de  $K^n$  definido por la misma combinación booleana que  $A$ , es decir, si  $A = \{x \in R^n / B(x)\}$  entonces

$$Ext(A, K) = \{x \in K^n / B(x)\}.$$

Este conjunto semi-algebraico se llama la *extensión de  $A$  a  $K$* , y se puede probar que depende sólo de  $A$  y no de la combinación booleana que lo describa (ver [1, Proposition 5.1.1]).

**Proposición 1.13** *Sea  $A$  es un conjunto algebraico de  $R^{n+1}$ , y sean  $\pi : R^{n+1} \rightarrow R^n$  y  $\pi_K : K^{n+1} \rightarrow K^n$  las proyecciones a las primeras  $n$  coordenadas. Entonces  $\pi_K(\text{Ext}(A, K)) = \text{Ext}(\pi(A), K)$ .*

*Demostración.* Si  $A$  está dado por una combinación booleana  $B(X, Y)$  de condiciones de signo sobre polinomios en  $R[X, Y]$ , donde  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , por el teorema 1.9, existe una combinación booleana  $C(X)$  de condiciones de signos sobre polinomios en  $R[X]$  tal que, para todo  $x \in K^n$ ,  $B(x, Y)$  tiene solución en  $K$  si y sólo si  $C(x)$  es verdadera en  $R$ . Luego,  $\pi(A) = \{x \in R^n / C(x)\}$  y  $\pi_K(\text{Ext}(A, K)) = \{x \in K^n / C(x)\} = \text{Ext}(\pi(A), K)$ .  $\square$

**Proposición 1.14 (Eliminación de cuantificadores)** *Sea  $\Phi$  es una fórmula de  $L(R)$ . Entonces existe una fórmula libre de cuantificadores  $\Psi$  de  $L(R)$ , con las mismas variables libres  $X_1, \dots, X_n$  que  $\Phi$ , tal que, para toda extensión real cerrada  $K$  de  $R$  y para todo  $x \in K^n$ ,  $\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)$ .*

*Demostración.* Lo haremos por inducción en la construcción de la fórmula  $\Phi$ , empezando por las fórmulas atómicas. Los casos de conjunciones, disyunciones y negaciones son inmediatos. Si  $\Phi$  tiene la forma  $\exists y \theta(x, y)$ , con  $\theta$  fórmula sin cuantificadores, se tiene que

$$\{x \in K^n / \exists y \theta(x, y)\} = \pi_K(\{(x, y) \in K^{n+1} / \theta(x, y)\}),$$

que, por la proposición 1.13, es el conjunto  $\text{Ext}(\pi(\{(x, y) \in R^{n+1} / \theta(x, y)\}), K)$ . Por el teorema 1.10,  $\pi(\{(x, y) \in R^{n+1} / \theta(x, y)\})$  es un conjunto semi-algebraico, por lo que está descrito por una fórmula  $\Psi$  de  $L(R)$  libre de cuantificadores, que por lo tanto también define a  $\{x \in K^n / \exists y \theta(x, y)\}$ . Para ver el caso del cuantificador universal, alcanza con notar que  $\forall y \Phi(x, y)$  es equivalente a  $\text{no } \exists y \text{ no } \Phi(x, y)$ .  $\square$

En vista de poder probar que las extensiones de conjuntos semi-algebraicos conservan propiedades del conjunto original, introducimos el siguiente resultado, que resultará una herramienta fundamental en lo que sigue:

**Proposición 1.15 (Principio de Transferencia)** *Sea  $\Phi$  una fórmula de  $L(R)$  sin variables libres, y sea  $K$  una extensión real cerrada de  $R$ . Entonces  $\Phi$  es verdadera en  $R$  si y sólo si  $\Phi$  es verdadera en  $K$ .*

*Demostración.* La proposición 1.14 nos da una fórmula  $\Psi$  de  $L(R)$  libre de cuantificadores sin variables libres equivalente a  $\Phi$ . Como  $\Psi$  no tiene variables,  $\Psi$  es verdadera en  $K$  si y sólo si lo es en  $R$ . Luego, lo mismo ocurre para  $\Phi$ .  $\square$

### 1.2.3. Funciones semi-algebraicas

Como nuestro objeto de estudio son los conjuntos semi-algebraicos, queremos trabajar con funciones que preserven la propiedad de serlo. Para ello, introducimos la noción de funciones semi-algebraicas.

**Definición 1.16** Sean  $A \subset \mathbb{R}^m$  y  $B \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos semi-algebraicos. Una función  $f : A \rightarrow B$  es semi-algebraica si su gráfico es un subconjunto semi-algebraico de  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

Observar que la composición de funciones semi-algebraicas es semi-algebraica. Las funciones semi-algebraicas con valores en  $\mathbb{R}$  forman un anillo con la suma y el producto punto a punto.

**Proposición 1.17** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos semi-algebraicos y sea  $f : A \rightarrow B$  una función semi-algebraica.

- i) Si  $S \subset A$  es semi-algebraico, entonces  $f(S)$  es semi-algebraico.
- ii) Si  $T \subset B$  es semi-algebraico, entonces  $f^{-1}(T)$  es semi-algebraico.

*Demostración.* El conjunto  $f(S)$  (resp.  $f^{-1}(T)$ ) es la imagen del conjunto semi-algebraico  $(S \times B) \cap \text{graf}(f)$  (resp.  $(A \times T) \cap \text{graf}(f)$ ) por la proyección  $A \times B \rightarrow B$  (resp.  $A \times B \rightarrow A$ ).  $\square$

Veremos ahora que puede generalizarse el Teorema de Bolzano en  $\mathbb{R}$  para funciones continuas semi-algebraicas sobre un cuerpo real cerrado:

**Proposición 1.18** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y semi-algebraica definida en un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Si  $f(a)f(b) < 0$ , existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = 0$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $f(a) > 0$  y  $f(b) < 0$ . El conjunto  $A = \{x \in [a, b] / f(x) > 0\}$  resulta ser semi-algebraico, no vacío y abierto en  $[a, b]$  pues  $f$  es continua. Por la proposición 1.8,  $A = [a, b_1) \cup \dots \cup (a_l, b_l]$ , y por la continuidad de  $f$ , concluimos que  $f(b_1) = 0$ .  $\square$

Así como un conjunto semi-algebraico de  $\mathbb{R}^n$  puede extenderse a un conjunto semi-algebraico de  $K^n$  si  $K$  es una extensión real de  $\mathbb{R}$ , el principio de transferencia permite extender funciones semi-algebraicas:

**Proposición 1.19** Sean  $A \subset \mathbb{R}^m$  y  $B \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos semi-algebraicos, y sea  $f : A \rightarrow B$  una función semi-algebraica. Llamemos  $G = \text{graf}(f)$ . Si  $K$  es una extensión real cerrada de  $\mathbb{R}$ , entonces:

- i) Existe una función semi-algebraica  $\tilde{f} : Ext(A, K) \rightarrow Ext(B, K)$  tal que su gráfico es el conjunto  $Ext(G, K)$ . La función  $\tilde{f}$  se llama extensión de  $f$  a  $K$ . Usaremos la notación  $\tilde{f} = Ext(f, K)$ .
- ii) La función  $f$  es continua si y sólo si  $\tilde{f}$  lo es.

*Demostración.*

- i) El hecho de que  $G$  sea el conjunto de puntos del gráfico de una función de  $A$  en  $B$  se expresa con la fórmula  $\forall x \in R^m, (x \in A \Leftrightarrow \exists y \in R^n (x, y) \in G) \wedge (\forall y \in R^n (x, y) \in G \Rightarrow y \in B) \wedge (\forall y, y' \in B (x, y) \in G, (x, y') \in G \Rightarrow y = y')$ . Por la proposición 1.15, esta fórmula es verdadera en  $R$  si y sólo si es verdadera en  $K$ . Se sigue que el conjunto  $G$  es el conjunto de puntos del gráfico de una función de  $A$  en  $B$  si y sólo si  $Ext(G)$  es el conjunto de puntos del gráfico de una función de  $Ext(A, K)$  en  $Ext(B, K)$ .
- ii) La continuidad de  $f$  en  $A$  puede expresarse de la siguiente manera:

$$\forall x \in A \forall \epsilon > 0 \text{ en } R, \exists \delta > 0 \text{ en } R / \forall \tilde{x} \in A, \|x - \tilde{x}\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(\tilde{x})\| < \epsilon.$$

Por la proposición 1.15 esta fórmula es verdadera en  $R$  si y sólo si es verdadera en  $K$ . Esto dice que  $f$  es continua en  $A$  si y sólo si  $\tilde{f}$  es continua en  $Ext(A, K)$ .

□

Los gérmenes de funciones semi-algebraicas y continuas a la derecha del origen que introducimos a continuación nos dan una nueva interpretación para las series de Puiseux algebraicas y, en consecuencia, para la extensión de conjuntos y funciones semi-algebraicas a  $R\langle\xi\rangle$ :

El conjunto de *gérmenes de funciones semi-algebraicas y continuas a la derecha del origen* es el conjunto de funciones semi-algebraicas y continuas con valores en  $R$  definidas en un intervalo de la forma  $(0, t)$ , con  $t \in R$ , módulo la relación de equivalencia

$$f_1 \approx f_2 \iff \exists t > 0 \forall t' 0 < t' < t f_1(t') = f_2(t').$$

Este conjunto es un cuerpo real cerrado que resulta ser una clausura real de  $R(\xi)$  equipado con el orden que hace a  $\xi$  un elemento positivo e infinitesimal (ver [3, Proposition 3.13]). Como consecuencia de la unicidad de la clausura real, se tiene que:

**Teorema 1.20** *El cuerpo real cerrado de los gérmenes de funciones continuas y semi-algebraicas a la derecha del origen es isomorfo a  $R\langle\xi\rangle$ , el cuerpo de las series de Puiseux algebraicas sobre  $R(\xi)$ .*

Sea  $\phi$  un germen de funciones continuas y semi-algebraicas a la derecha del origen, y sea  $f$  definida en  $(0, t)$  un representante de  $\phi$ . Si  $g$  es una función continua y semi-algebraica definida en la imagen de  $f$ , notaremos  $g \circ \phi$  al germen de la función  $g \circ f$  definida en  $(0, t)$ . Notemos que la definición de  $g \circ \phi$  no depende de  $f$ . Además,  $f \circ \xi = \phi$  pues  $\xi$  es el germen de la función identidad.

El siguiente resultado nos da la interpretación de la extensión de conjuntos semi-algebraicos y de funciones semi-algebraicas de  $R$  a  $R \langle \xi \rangle$ :

**Proposición 1.21** Sean  $S \subset R^n$  un conjunto semi-algebraico y  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in R \langle \xi \rangle^n$ . Sean  $f_1, \dots, f_n$  funciones continuas y semi-algebraicas definidas en un intervalo  $(0, t)$  que representan a  $\phi_1, \dots, \phi_n$ , y  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Entonces:

$$\phi \in \text{Ext}(S, R \langle \xi \rangle) \iff \exists t > 0 \text{ tal que } \forall t', 0 < t' < t, f(t') \in S.$$

Además, si  $\phi \in \text{Ext}(S, R \langle \xi \rangle)$  y  $g$  es una función semi-algebraica definida sobre  $S$ , se tiene que  $\text{Ext}(g, R \langle \xi \rangle)(\phi) = g \circ \phi$ . En particular,  $\text{Ext}(f, R \langle \xi \rangle)(\xi) = \phi$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $S$  es intersección finita de conjuntos de la forma  $\{x \in R^n / P(x) * 0\}$ , con  $P \in R[X_1, \dots, X_n]$  y  $*$   $\in \{=, >, <\}$ . Para ver la primera parte del enunciado sólo hay que notar que  $P(\phi_1, \dots, \phi_n) * 0$  en  $R \langle \xi \rangle$  si y sólo si existe un intervalo  $(0, t) \subset R$  tal que  $\forall t' \in (0, t) P(f_1(t'), \dots, f_n(t')) * 0$ . Luego,

$$\phi \in \text{Ext}(S, R \langle \xi \rangle) \Leftrightarrow f(t') = (f_1(t'), \dots, f_n(t')) \in S, \forall t', 0 < t' < t.$$

La segunda parte se deduce de la buena definición de la extensión de  $g$ . La última parte es consecuencia de la segunda, tomando  $S = R \langle \xi \rangle$ ,  $\phi = \xi$ ,  $f = id$  y  $g = f$ ), y usando que  $f \circ \xi = \phi$ .  $\square$

Una propiedad importante de  $R \langle \xi \rangle$  es que las sentencias con coeficientes en  $R[\xi]$  que son verdaderas en  $R \langle \xi \rangle$  también lo son en un intervalo de  $R$  suficientemente pequeño, de la forma  $(0, r)$ . Esto es lo que afirma la siguiente proposición:

**Proposición 1.22** Sean  $\Phi$  una fórmula sin variables libres en el lenguaje de cuerpos ordenados con coeficientes en  $R[\xi]$  y  $\Phi'(t)$  la fórmula obtenida al reemplazar  $t \in R$  por  $\xi$  en  $\Phi$ . Entonces,  $\Phi$  es verdadera en  $R \langle \xi \rangle$  si y sólo si existe un  $t_0 \in R$  tal que  $\Phi'(t)$  es verdadera para todo  $t \in (0, t_0)$ .

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $A = \{t \in R / \Phi'(t)\}$ . Si  $A$  contiene un intervalo de la forma  $(0, t_0)$  con  $t_0 \in R$ , se tiene que  $\text{Ext}((0, t_0), R \langle \xi \rangle) \subset \text{Ext}(A, R \langle \xi \rangle)$ . En particular,  $\xi \in \text{Ext}(A, R \langle \xi \rangle)$  y por lo tanto,  $\Phi = \Phi'(\xi)$  es verdadera en  $R$ . Recíprocamente, si  $A$  no contiene un intervalo de esa forma, como  $A$  es unión finita de puntos e intervalos, existe  $t_0 \in R$ ,  $t_0 > 0$  tal que  $(0, t_0) \cap A = \emptyset$ , y por lo tanto,  $\text{Ext}((0, t_0) \cap A, R \langle \xi \rangle) = \emptyset$ . En particular  $\xi \notin \text{Ext}(A, R \langle \xi \rangle)$ , lo cual significa que  $\Phi$  no es verdadera en  $R \langle \xi \rangle$ .  $\square$

**Proposición 1.23** *Sea  $f : (0, r] \rightarrow R$  una función continua, acotada y semi-algebraica. Entonces  $f$  puede ser extendida a 0 de forma continua.*

*Demostración.* Sea  $M$  una cota del valor absoluto de  $f$  en  $(0, r]$ . Si  $\phi \in R\langle\xi\rangle$  representa al germen de  $f$ , por la proposición 1.21 tomando  $S = B(0, M)$ , se tiene que  $M$  también es una cota para el valor absoluto de  $\phi$ . Luego,  $\lim_{\xi} \phi$  está bien definido. Si  $b = \lim_{\xi} \phi$ , definimos  $\bar{f} : [0, r] \rightarrow R$  de la siguiente manera:

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} b & \text{si } t = 0 \\ f(t) & \text{si } t \in (0, r] \end{cases}.$$

Veamos que  $\bar{f}$  es continua en 0: para  $\varepsilon \in R$ ,  $\varepsilon > 0$ , sea  $A_{\varepsilon} = \{t \in R / |f(t) - b| \leq \varepsilon\}$ . Se tiene que  $\xi \in \text{Ext}(A_{\varepsilon}, R\langle\xi\rangle)$  para todo  $\varepsilon > 0$ , pues  $\text{Ext}(f, R\langle\xi\rangle)(\xi) - b = \phi - b$  que es infinitesimal. Luego, por la proposición 1.22 aplicada a  $|f(\xi) - b| \leq \varepsilon$ , el conjunto  $A_{\varepsilon}$  contiene un intervalo en  $R$  de la forma  $(0, \delta_{\varepsilon})$ .  $\square$

Como consecuencia de estos resultados, tenemos el siguiente teorema que establece que los puntos de la clausura de un conjunto semi-algebraico pueden ser alcanzados mediante curvas contenidas en el conjunto.

**Teorema 1.24 (Lema de selección de curvas)** *Sea  $A \subset R^n$  un subconjunto semi-algebraico y sea  $x \in \bar{A}$ . Entonces existe una función continua semi-algebraica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow R^n$  tal que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma((0, 1]) \subset A$ .*

*Demostración.* Si  $x \in \bar{A}$ , para todo  $r \in R$ ,  $r > 0$ , se tiene que  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ . Luego, por el teorema 1.15,  $\text{Ext}(A, R\langle\xi\rangle) \cap B(x, \xi) \neq \emptyset$ . Sea  $\phi \in \text{Ext}(A, R\langle\xi\rangle) \cap B(x, \xi)$ . Por la proposición 1.21, existe una función continua y semi-algebraica  $f$  definida en  $(0, t)$  que representa a  $\phi$  tal que, para todo  $t' \in R$  con  $0 < t' < t$ ,  $f(t') \in A$ . En particular,  $f : (0, t_0] \rightarrow \cap A$  para  $t_0 < t$ . Por la proposición 1.23,  $f$  se extiende de forma continua a  $\bar{f} : [0, t_0] \rightarrow A$  definiendo  $\bar{f}(0) = \lim_{\xi} \phi = x$ . Reparametrizando en el intervalo  $[0, 1]$  a  $\bar{f}$  obtenemos la función  $\gamma$  buscada.  $\square$

Se puede probar, aunque no incluiremos la demostración, que la curva dada por el teorema anterior puede tomarse de clase  $C^{\infty}$  (ver [1, Proposition 8.1.13]).

**Proposición 1.25** *Sean  $S$  un conjunto semi-algebraico cerrado y acotado de  $R^n$  y  $g : S \rightarrow R$  una función continua y semi-algebraica. Si  $\phi \in \text{Ext}(S, R\langle\xi\rangle)$ , se tiene que  $g \circ \phi$  es acotada sobre  $R$ . Además,  $g(\lim_{\xi}(\phi)) = \lim_{\xi}(g \circ \phi)$ .*

*Demostración.* Sea  $f = (f_1, \dots, f_n)$  una función continua y semi-algebraica definida en  $(0, t)$  que represente a  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in R\langle\xi\rangle^n$ . Llamemos  $\bar{f}$  a la extensión de  $f$  a  $[0, t)$  que existe por la proposición 1.23. Más aún, como vimos en su demostración,

$\bar{f}(0) = \lim_{\xi}(\phi)$ . Luego, se tiene que  $\phi - \bar{f}$  es infinitesimal, y como  $S$  es cerrado,  $\bar{f}(0) \in S$ . Esto prueba que  $g$  es continua en  $\bar{f}(0)$ . Luego, para todo  $r \in R$ ,  $r > 0$ , existe  $\delta \in R$ ,  $\delta > 0$  tal que si  $z \in S$  y  $\|z - \bar{f}(0)\| < \delta$  entonces  $\|g(z) - g(\bar{f}(0))\| < r$ . Aplicando el teorema 1.15, como  $\phi \in \text{Ext}(S, R \langle \xi \rangle)$  y  $\phi - \bar{f}(0)$  es infinitesimal sobre  $R$ , se tiene que  $\|g \circ \phi - g(\bar{f}(0))\| < r$ , para cualquier  $r > 0$ . Luego,  $g \circ \phi$  está acotada sobre  $R$  e infinitesimalmente cerca de  $g(\bar{f}(0))$ , lo cual prueba que  $g(\lim_{\xi}(\phi)) = \lim_{\xi}(g \circ \phi)$ .  $\square$

### 1.2.4. Descomposición de conjuntos semi-algebraicos

En esta sección veremos que todo conjunto semi-algebraico puede descomponerse en subconjuntos semi-algebraicos más simples. El siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [1, Theorem 2.3.1], es la herramienta fundamental para obtener dicha descomposición.

**Teorema 1.26** Sean  $f_1(X, Y), \dots, f_s(X, Y)$  polinomios en  $n + 1$  variables con coeficientes en  $R$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . Existe una partición de  $R^n$  en finitos conjuntos semi-algebraicos  $A_1, \dots, A_m$  y finitas funciones continuas semi-algebraicas  $\xi_{i,1} < \dots < \xi_{i,l_i} : A_i \rightarrow R$  que verifican:

- i) Para todo  $x \in A_i$ ,  $\{\xi_{i,1}(x), \dots, \xi_{i,l_i}(x)\}$  es el conjunto de raíces de los polinomios  $f_1(x, Y), \dots, f_s(x, Y)$  que no sean nulos.
- ii) Para todo  $x \in A_i$ , los signos de  $f_k(x, y)$ ,  $k = 1, \dots, s$ , dependen sólo de los signos de  $y - \xi_{i,j}(x)$ , para  $j = 1, \dots, l_i$ .

Además, si notamos  $\xi_{i,0} = -\infty$  y  $\xi_{i,l_i+1} = +\infty$ , cada conjunto

$$(\xi_{i,j}, \xi_{i,j+1}) = \{(x, y) \in R^{n+1} / x \in A_i \text{ y } \xi_{i,j}(x) < y < \xi_{i,j+1}(x)\}$$

es semi-algebraico y semi-algebraicamente homeomorfo a  $A_i \times (0, 1)$ .

Diremos que una colección  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, l_i})_{i=1, \dots, m}$  que satisface las propiedades i) y ii) del teorema anterior es una *partición de  $R^n$  compatible con  $f_1, \dots, f_s$* .

Observamos que si un conjunto semi-algebraico de  $R^n$  está definido por una combinación booleana de fórmulas del tipo  $f_k(x) *_{\epsilon} 0$ , con  $*_{\epsilon} \in \{<, =, >\}$ , entonces es una unión finita de algunos de los gráficos de las funciones  $\xi_{i,j}$  y algunos de los conjuntos  $(\xi_{i,j}, \xi_{i,j+1})$  para la partición de  $R^n$  compatible con los polinomios  $f_k$  involucrados en su definición.

**Teorema 1.27** Todo conjunto semi-algebraico de  $R^n$  es unión disjunta de un número finito de conjuntos semi-algebraicos cada uno de los cuales es semi-algebraicamente homeomorfo al hipercubo abierto  $(0, 1)^d$ , para algún  $d \in \mathbb{N}_0$  (con  $(0, 1)^0$  igual a un punto).

*Demostración.* Por inducción en  $n$ : Para  $n = 1$  el resultado vale por la proposición 1.8. Supongamos que vale para  $n$  y sea  $A$  un subconjunto semi-algebraico de  $R^{n+1}$  dado por una combinación booleana de signos sobre polinomios  $f_1, \dots, f_s$ . Sea  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, l_i})_{i=1, \dots, m}$  una partición de  $R^n$  compatible con  $f_1, \dots, f_s$ . Entonces  $A$  es una unión finita de algunos de los gráficos de las funciones  $\xi_{i,j}$  y algunos de los conjuntos  $(\xi_{i,j}, \xi_{i,j+1})$ , que son semi-algebraicamente homeomorfos a  $A_i$  y a  $A_i \times (0, 1)$  respectivamente. Por hipótesis inductiva, todos los  $A_i$  son semi-algebraicamente homeomorfos a hipercubos abiertos. Luego  $A$  es unión finita de conjuntos semi-algebraicos semi-algebraicamente homeomorfos a hipercubos abiertos.  $\square$

A continuación enunciaremos el teorema de trivialización semi-algebraica de Hardt (ver [3, Teorema 5.46]).

**Teorema 1.28** Sean  $S \subset R^k$  y  $T \subset R^m$  conjuntos semi-algebraicos. Dada una función continua semi-algebraica  $f : S \rightarrow T$  y  $S_1, \dots, S_q$  subconjuntos semi-algebraicos de  $S$ , existe una partición finita de  $T$  en conjuntos semi-algebraicos  $T = \bigcup_{i=1}^r T_i$  tal que para cada  $i$ , para todo  $x_i \in T_i$ , el conjunto  $T_i \times f^{-1}(x_i)$  es semi-algebraicamente homeomorfo a  $f^{-1}(T_i)$ .

Más aún, si  $F_i = f^{-1}(x_i)$ , existen subconjuntos semi-algebraicos  $F_{i,1}, \dots, F_{i,q}$  de  $F_i$  y un homeomorfismo semi-algebraico  $\theta_i : T_i \times F_i \rightarrow f^{-1}(T_i)$  tal que  $f \circ \theta_i$  es la proyección  $T_i \times F_i \rightarrow T_i$  y se verifica  $\theta_i(T_i \times F_{i,j}) = S_j \cap f^{-1}(T_i)$ .

## 1.3. Propiedades topológicas

### 1.3.1. Conjuntos semi-algebraicos cerrados y acotados

Un conjunto semi-algebraico de  $R^n$ , cerrado y acotado, no necesariamente es compacto. Por ejemplo, el intervalo  $[0, 1]$  no es compacto en  $\mathbb{R}_{alg}$ : la familia  $\{[0, r) \cup (s, 1]\}$  para  $0 < r < \frac{\pi}{4} < s < 1$ ,  $r, s \in \mathbb{R}_{alg}$ , es un cubrimiento de  $[0, 1]$  por conjuntos semi-algebraicos abiertos de  $\mathbb{R}_{alg}$  del cual es imposible extraer un subcubrimiento finito. Aún así, estos conjuntos preservan algunas propiedades usualmente derivadas de la compacidad.

**Teorema 1.29** Sea  $A$  un subconjunto semi-algebraico de  $R^n$  cerrado y acotado. Sea  $f : A \rightarrow R^p$  una función continua semi-algebraica. Entonces  $f(A)$  es un subconjunto semi-algebraico de  $R^p$  cerrado y acotado.

En particular, si  $f : A \rightarrow R$ , entonces  $f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $A$ .

*Demostración.* En primer lugar, y suponiendo que  $n \geq 2$ , vamos a probar el resultado para la proyección  $\pi : R^n \rightarrow R^{n-1}$  sobre las primeras  $n - 1$  coordenadas: Claramente  $\pi(A)$  es acotado, y semi-algebraico por el teorema 1.10.



Sea  $x \in \overline{\pi(A)}$ . Si el conjunto  $A$  está dado por una combinación booleana de condiciones de signos sobre polinomios  $f_1, \dots, f_s$ , sea  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, l_i})_{i=1, \dots, m}$  una partición de  $R^{n-1}$  compatible con  $f_1, \dots, f_s$  (ver teorema 1.26). Se tiene que  $x \in \overline{A_i}$  para algún  $i$ ; supongamos  $i = 1$ . Como  $A$  es cerrado y acotado, existe  $j$  tal que  $A$  contiene al gráfico de  $\xi_{1,j}$ . Por el teorema 1.24, existe  $\varphi : [0, 1] \rightarrow R^{n-1}$  tal que  $\varphi(0) = x$  y  $\varphi((0, 1]) \subset A_1$ . Consideremos  $\psi = \xi_{1,j} \circ (\varphi|_{(0,1]})$ . Esta función resulta ser acotada, pues  $A$  lo es; luego, por la proposición 1.23, se puede extender continuamente a cero. Pero entonces  $(x, \psi(0)) \in A$ , pues  $A$  es cerrado, y por lo tanto,  $x \in \pi(A)$ .

Inductivamente, se deduce que el resultado vale para  $\pi : R^n \rightarrow R^p$  la proyección a  $p$  coordenadas.

Para el caso general, basta probar que  $\text{graf}(f) \subset R^n \times R^p$  es un conjunto semi-algebraico cerrado y acotado, y aplicar lo anterior para deducir que  $f(A)$  es un conjunto semi-algebraico cerrado y acotado. Ya sabemos que  $\text{graf}(f)$  es semi-algebraico, pues  $f$  es semi-algebraica, y como  $A$  es cerrado,  $\text{graf}(f)$  es cerrado. Para ver que es acotado, alcanza con mostrar que  $\{\|f(x)\| / x \in A\} \subset R$  es acotado. Consideremos el conjunto  $A' = \{((1 + \|f(x)\|)^{-1}x, (1 + \|f(x)\|)^{-1}) \in R^{n+1} / x \in A\}$  y el homeomorfismo semi-algebraico  $h : A' \rightarrow A$  dado por  $h(x, t) = (\frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_n}{t})$ . Si  $\{\|f(x)\| / x \in A\}$  no fuese acotado, el punto  $(0, 0) \in \overline{A'}$ , y por el teorema 1.24, existiría una función continua y semi-algebraica  $\varphi : [0, 1] \rightarrow R^{n+1}$  tal que  $\varphi(0) = (0, 0)$  y  $\varphi((0, 1]) \subset A'$ . Como cada coordenada de  $\psi = h \circ (\varphi|_{(0,1]})$  es acotada, por la proposición 1.23 puede ser continuamente extendida a 0. Entonces, como  $A$  es cerrado,  $\psi(0) \in A$ ; pero  $h^{-1}(\psi(0)) = \varphi(0) = (0, 0) \notin A'$ , lo cual es un absurdo. Luego el  $\text{graf}(f)$  es acotado. Si  $f$  toma valores en  $R$ , se tiene que  $f(A)$  es un conjunto semi-algebraico cerrado y acotado en  $R$ . Entonces por la proposición 1.8,  $f(A) = \bigcup_{i=1}^s [a_i, b_i]$ , donde  $-\infty < a_i \leq b_i < a_{i+1} < +\infty$  para todo  $i = 1, \dots, s-1$ . Luego el mínimo y el máximo de  $f$  en  $A$  son  $a_1$  y  $b_s$  respectivamente.  $\square$

### 1.3.2. Conexión semi-algebraica

Un cuerpo real cerrado arbitrario  $R$  no resulta conexo con la topología euclidea. Sin embargo, no es posible encontrar dos conjuntos semi-algebraicos cerrados disjuntos que lo cubran (ver proposición 1.8). Esto da lugar a la siguiente noción:

**Definición 1.30** *Un conjunto semi-algebraico  $A \subset R^n$  es semi-algebraicamente conexo si para todo par de conjuntos semi-algebraicos  $F_1$  y  $F_2$  cerrados en  $A$ , disjuntos, que verifiquen  $F_1 \cup F_2 = A$  se tiene que  $F_1 = A$  ó  $F_2 = A$ .*

**Ejemplo 1.31** *El hipercubo abierto  $(0, 1)^d$  es semi-algebraicamente conexo.*

En efecto, de lo contrario, existirían dos conjuntos semi-algebraicos, cerrados, disjuntos y no vacíos  $F_1$  y  $F_2$  tales que  $F_1 \cup F_2 = (0, 1)^d$ . Sean  $x_i \in F_i$  para  $i = 1, 2$ , y

$S$  el segmento que los une. Los conjuntos  $S \cap F_1$  y  $S \cap F_2$  sirven para contradecir el hecho de que  $S$  es semi-algebraicamente conexo.

**Teorema 1.32** *Todo subconjunto semi-algebraico  $A \subset \mathbb{R}^n$  es unión disjunta de finitos conjuntos semi-algebraicamente conexos  $C_1, \dots, C_s$  abiertos y cerrados en  $A$ . Estos conjuntos se llaman las componentes semi-algebraicamente conexas de  $A$ .*

*Demostración.* Por el teorema 1.27 sabemos que  $A$  es unión disjunta de finitos conjuntos semi-algebraicos  $S_i$ , cada uno semi-algebraicamente homeomorfo a un hipercubo abierto  $(0, 1)^{d_i}$ , y por lo tanto, semi-algebraicamente conexos. Consideremos la menor relación de equivalencia  $\approx$  sobre los conjuntos  $S_i$  generada por:

$$S_i \approx S_j \iff S_i \cap \overline{S_j}^A \neq \emptyset, \text{ donde } \overline{S_j}^A \text{ es la clausura de } S_j \text{ en } A.$$

Sean  $C_1, \dots, C_s$  las uniones de los conjuntos  $S_j$  en una misma clase de equivalencia. Los conjuntos  $C_k$  son disjuntos y su unión es  $A$ . Además son cerrados en  $A$ : pues si  $x \in \overline{C_k} \cap A$  se tiene que existen  $i$  y  $j$  tal que  $x \in S_i$  (pues  $x \in A$ ),  $x \in \overline{S_j}$  para  $S_j \subset C_k$ . Se tiene entonces que  $x \in S_i \cap \overline{S_j}$  y por lo tanto  $S_i \approx S_j$ . Luego  $x \in S_i \subset C_k$ . También son semi-algebraicamente conexos: Si  $C_k = F_1 \cup F_2$  con  $F_1$  y  $F_2$  disjuntos, semi-algebraicos y cerrados en  $C_k$ , como cada  $S_i$  es semi-algebraicamente conexo, se tiene que  $S_i \subset C_k \Rightarrow S_i \subset F_1$  ó  $S_i \subset F_2$ . Como  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) es cerrado en  $C_k$ , si  $S_j \subset F_1$  (resp.  $F_2$ ) y  $S_i \cap \overline{S_j}^A \neq \emptyset$ , entonces  $S_i \subset F_1$  (resp.  $F_2$ ). Luego, por definición de  $C_k$ ,  $C_k = F_1$  ó  $C_k = F_2$ .  $\square$

Observamos que, en el caso que  $R = \mathbb{R}$ , como un hipercubo abierto es conexo tenemos que un subconjunto semi-algebraico  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  es semi-algebraicamente conexo si y sólo si es conexo.

**Definición 1.33** *Un subconjunto semi-algebraico  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice semi-algebraicamente arco-conexo si, para todo  $x, y \in A$ , existe una función continua semi-algebraica  $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$  tal que  $\varphi(0) = x$  y  $\varphi(1) = y$ .*

**Proposición 1.34** *Un conjunto semi-algebraico es semi-algebraicamente conexo si y sólo si es semi-algebraicamente arco-conexo.*

*Demostración.* Es claro que semi-algebraicamente arco-conexo implica semi-algebraicamente conexo. Veamos la otra implicación: Sea  $A$  un conjunto semi-algebraicamente conexo. Por el teorema 1.27,  $A$  es unión disjunta de conjuntos semi-algebraicos  $S_i$  cada uno semi-algebraicamente homeomorfo a  $(0, 1)^{d_i}$  y por lo tanto, semi-algebraicamente arco-conexo. Además, como  $A$  es semi-algebraicamente conexo y según lo que vimos en la demostración del teorema 1.32, se tiene que para todo  $i$  existe un  $j$  tal que  $S_i \cap \overline{S_j}^A \neq \emptyset$ . Como cada conjunto es semi-algebraicamente arco-conexo, sólo

falta probar que si  $x \in S_i$  e  $y \in S_j$ , entonces existe un arco en  $S_i \cup S_j$  que los une. Sea  $z \in S_i \cap \overline{S_j}^A$ . Existe  $\gamma_1$  un arco semi-algebraico en  $S_i$  que une  $x$  con  $z$ . Como  $z \in \overline{S_j}^A$ , por el teorema 1.24, existe un arco semi-algebraico  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow R^n$  tal que  $\gamma_2(0) = z$  y  $\gamma_2((0, 1]) \subset S_j$ . Finalmente, como  $S_j$  semi-algebraicamente arco-conexo, existe un arco semi-algebraico  $\gamma_3$  en  $S_j$  que une  $\beta(1) \in S_j$  con  $y \in S_j$ . Concatenando  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$  se obtiene un arco  $\gamma$  semi-algebraico y continuo en  $S_i \cup S_j$  que une  $x$  e  $y$ .  $\square$

**Proposición 1.35** *Sea  $A \subset R^n$  un conjunto semi-algebraico. Se tiene que  $A$  es semi-algebraicamente conexo si y sólo si  $Ext(A, R \langle \xi \rangle)$  lo es.*

*Más aún, si  $C$  es una componente semi-algebraicamente conexas de  $A$ , entonces  $Ext(C, R \langle \xi \rangle)$  es una componente semi-algebraicamente conexas de  $Ext(A, R \langle \xi \rangle)$ .*

*Demostración.* Por el teorema 1.27, existen conjuntos semi-algebraicos  $A_i$  y homeomorfismos semi-algebraicos  $\phi : (0, 1)^{d_i} \rightarrow A_i$  con  $A = \bigcup_{i=1}^l A_i$ . Las extensiones  $Ext(\phi, R \langle \xi \rangle) : Ext((0, 1)^{d_i}, R \langle \xi \rangle) \rightarrow Ext(A_i, R \langle \xi \rangle)$ , para cada  $i = 1, \dots, l$ , siguen siendo homeomorfismos semi-algebraicos y los conjuntos  $Ext(A_i, R \langle \xi \rangle)$  parten  $Ext(A, R \langle \xi \rangle)$ . La caracterización de las componentes semi-algebraicamente conexas que da la demostración del teorema 1.32 dice que  $Ext(A_i, R \langle \xi \rangle)$  es una componente semi-algebraicamente conexas.  $\square$



## Capítulo 2

# Roadmaps de conjuntos semi-algebraicos

Este capítulo se centra en el análisis, desde el punto de vista teórico y efectivo, de *roadmaps* de conjuntos semi-algebraicos. Los roadmaps constituyen una herramienta básica para el estudio de problemas relacionados con la conexión semi-algebraica en conjuntos semi-algebraicos. Entre otras aplicaciones, permiten calcular la cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas de un conjunto semi-algebraico y resolver el problema de determinar si dos puntos dados de un conjunto semi-algebraico pertenecen a la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto.

Comenzaremos introduciendo de manera precisa la noción de roadmap. A continuación, en la sección 2.1, analizaremos la relación entre puntos críticos de funciones sobre conjuntos algebraicos y cambios en la topología del conjunto. Finalmente, en la sección 2.2, describiremos procedimientos para la obtención de roadmaps de conjuntos algebraicos y semi-algebraicos basados en el cálculo de puntos críticos de funciones semi-algebraicas. El desarrollo del presente capítulo se basa en [2] y [3, Capítulo 15].

Sea  $R$  un cuerpo real cerrado y  $S$  un conjunto semi-algebraico de  $R^n$ .

En lo que sigue,  $\pi : R^n \rightarrow R$  denotará la proyección sobre la primera coordenada.

Dado un conjunto  $A \subset R$ , notaremos

$$S_A = S \cap \pi^{-1}(A).$$

En particular, abreviaremos  $S_x = S_{\{x\}}$ ,  $S_{<c} = S_{(-\infty, c)}$  y  $S_{\leq c} = S_{(-\infty, c]}$ .

**Definición 2.1** *Sea  $S$  un conjunto semi-algebraico de  $R^n$ . Un roadmap de  $S$ , que denotaremos  $R(S)$ , es un conjunto semi-algebraico de dimensión a lo sumo uno, contenido en  $S$  y que satisface las dos condiciones siguientes:*

**RM1** Para toda componente semi-algebraicamente conexa  $C$  de  $S$ ,  $C \cap R(S)$  es semi-algebraicamente conexo.

**RM2** Para todo  $x \in R$ , y para toda componente semi-algebraicamente conexa  $C'$  de  $S_x$ ,  $C' \cap R(S) \neq \emptyset$ .

## 2.1. Topología de conjuntos algebraicos

Sea  $Q$  un polinomio en  $R[X_1, \dots, X_n]$ . Diremos que  $Z(Q) \subset R^n$  es un *conjunto algebraico regular* si el gradiente

$$\text{grad}(Q)(p) = \left( \frac{\partial Q}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial Q}{\partial X_n}(p) \right)$$

no se anula en ningún punto  $p \in Z(Q)$ .

Si  $\pi : R^n \rightarrow R$  es la proyección a la primera coordenada, un *punto crítico* de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$  es un punto de  $Z(Q)$  en el cual el gradiente de  $Q$  es paralelo al eje  $X_1$ , y un *valor crítico* de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$  es la proyección sobre el eje  $X_1$  de un punto crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$ .

Por el Teorema de Sard semi-algebraico (ver, por ejemplo, [1, Theorem 9.6.2]), se tiene que el conjunto de valores críticos de  $\pi : R^n \rightarrow R$  sobre el conjunto algebraico regular  $Z(Q)$  es semi-algebraico y de dimensión estrictamente menor que 1, y por lo tanto, de dimensión 0. Luego debe ser un conjunto finito de puntos.

### 2.1.1. Conjuntos algebraicos regulares y acotados

Comenzaremos viendo que, en el caso en que  $Z(Q) \subset R^n$  sea un conjunto algebraico regular, los puntos críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$  proveen puntos en toda componente semi-algebraicamente conexa y acotada de  $Z(Q)$ .

**Proposición 2.2** Sea  $Z(Q)$  un conjunto algebraico regular y acotado. Si  $p \in Z(Q)_{p_1}$  no es punto crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$ , entonces existe  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in R$  tal que  $Z(Q) \cap B(p, \epsilon)_{<p_1} \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Como  $\text{grad}(Q)(p)$  no es cero ni múltiplo de  $(1, 0, \dots, 0)$ , existe  $j$ , supongamos  $j = n$ , tal que  $\frac{\partial Q}{\partial X_n}(p) \neq 0$ . Por el teorema de la función implícita semi-algebraica ([1, cor. 2.9.8]), existen abiertos  $U \subset R^{n-1}$  y  $V \subset R$ , y una función diferenciable  $\varphi : U \rightarrow V$  tales que

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n \Leftrightarrow Q(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U \wedge \forall x_n \in V.$$

En particular,  $p \in U \times V$ . Luego, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(p, \epsilon) \subset U \times V$  y  $Z(Q) \cap B(p, \epsilon)_{<p_1} \neq \emptyset$ .  $\square$

**Proposición 2.3** *Sea  $Z(Q)$  un conjunto algebraico regular. El conjunto de puntos críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$  interseca toda componente semi-algebraicamente conexa acotada de  $Z(Q)$ .*

*Demostración.* Sea  $C$  una componente semi-algebraicamente conexa acotada de  $Z(Q)$ . Como  $C$  es semi-algebraica, cerrada y acotada, por el teorema 1.29,  $\pi(C) = [a_1, b_1]$ , donde  $\pi$  es la proyección a la primera coordenada y  $a_1 \leq b_1$ , por lo tanto existe  $p \in C$  tal que  $\pi(p) = a_1$ . Por la proposición 2.2,  $p \in C_{a_1}$  resulta ser un punto crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$ .  $\square$

Si  $Z(Q)$  es un conjunto algebraico regular y acotado, veremos ahora que los valores críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q)$  son los lugares donde la cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas de los conjuntos  $Z(Q)_d$  puede cambiar al ir recorriendo  $Z(Q)$  a lo largo del eje  $X_1$ . Más precisamente:

**Proposición 2.4** *Sea  $Z(Q) \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto algebraico regular y acotado. Supongamos que  $\pi$  no tiene valores críticos en  $[a, b]$ . Si  $d \in [a, b]$ , entonces:*

- i) La cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q)_{[a,b]}$  y de  $Z(Q)_d$  es la misma.*
- ii) Si  $C$  es una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q)_{[a,b]}$ , entonces  $C_d$  es un conjunto semi-algebraicamente conexo.*

Para demostrar esta proposición, probaremos primero que el resultado vale sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales. Luego, mediante el Principio de Transferencia (proposición 1.15), mostraremos que también es válido para cualquier cuerpo real cerrado.

Con el objeto de probar la proposición sobre  $\mathbb{R}$  utilizaremos un lema previo, conocido como Lema de Morse, que enunciamos y demostramos a continuación:

**Lema 2.5 (Lema de Morse)** *Sea  $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  tal que  $Z(Q, \mathbb{R}^n)$  es un conjunto algebraico regular, y sea  $[a, b]$  un intervalo donde  $\pi : Z(Q, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  no contiene valores críticos. Entonces los conjuntos*

$$Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a,b]} \quad \text{y} \quad Z(Q, \mathbb{R}^n)_a \times [a, b]$$

*son homeomorfos.*

*Demostración.* Como el conjunto de valores que no son valores críticos de  $\pi$  es abierto, existen  $a', b' \in \mathbb{R}$  tales que  $[a, b] \subset (a', b')$  y  $\pi$  no tiene puntos críticos en  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{(a', b')}$ .

Consideremos el campo vectorial  $C^\infty$  definido en  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{(a', b')}$  por

$$\Gamma(p) = \frac{1}{\sum_{2 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial Q}{\partial X_i}(p)\right)^2} \left( - \sum_{2 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial Q}{\partial X_i}(p)\right)^2, \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial Q}{\partial X_2}(p), \dots, \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial Q}{\partial X_n}(p) \right).$$

Notar que  $\Gamma$  está bien definido, puesto que  $\sum_{2 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial Q}{\partial X_i}(p)\right)^2 \neq 0$  para todo  $p \in Z(Q, \mathbb{R}^n)_{(a', b')}$ , dado que  $\pi$  no tiene puntos críticos en este conjunto, y  $\Gamma(p) \neq 0$  es tangente a  $Z(Q, \mathbb{R}^n)$  en  $p$ , para cada  $p \in Z(Q, \mathbb{R}^n)$ .

Para cada  $x \in Z(Q, \mathbb{R}^n)_{(a', b')}$ , existe un abierto  $U_x \subset \mathbb{R}^n$ , un intervalo  $I_x \subset \mathbb{R}$  y una aplicación diferenciable  $\gamma : I_x \times U_x \rightarrow Z(Q, \mathbb{R}^n)_{(a', b')}$  tal que (ver [16, Teo 1.48]):

- $\gamma(0, q) = q \ \forall q \in U_x$
- $\gamma_q : I_x \rightarrow U_x$  definida por  $\gamma_q(t) = \gamma(t, q)$  verifica  $\frac{\partial \gamma_q}{\partial t}(t) = \Gamma(\gamma_q(t))$  y  $\gamma_q(0) = q$ . Esta curva se conoce como curva integral, y es única si la pensamos definida en un dominio maximal.

Como  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a, b]}$  es compacto, y los abiertos  $\{U_x\}_{x \in Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a, b]}}$  cubren  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a, b]}$ , podemos tomar un intervalo  $I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$  que no dependa de  $x$ .

Para cada  $t \in [0, b - a]$  definimos una función  $C^\infty$ ,  $\alpha_t : Z(Q, \mathbb{R}^n)_b \rightarrow Z(Q, \mathbb{R}^n)_{\leq b}$  de la siguiente manera: sea  $x \in Z(Q, \mathbb{R}^n)_b$ ,

- si  $0 \leq t \leq \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\alpha_t(x) = \gamma_x(t)$ .
- si  $t = k \frac{\epsilon}{2} + \delta$ , con  $k \in \mathbb{N}_0$  y  $0 \leq \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\alpha_t(x) = \overbrace{\alpha_{\frac{\epsilon}{2}} \circ \dots \circ \alpha_{\frac{\epsilon}{2}}}^{k \text{ veces}} \circ \alpha_\delta(x)$ .

Se tienen las siguientes propiedades:

- $\forall x \in Z(Q, \mathbb{R}^n)_b$ ,  $\alpha_0(x) = x$ .
- Por construcción,  $\frac{\partial \alpha_t(x)}{\partial t} = \Gamma(\alpha_t(x))$ .
- Como  $\pi(\Gamma(\alpha_t(x))) = -1$ , por lo anterior,  $\pi(\alpha_t(x)) = \pi(x) - t = b - t$ .
- Cada  $\alpha_t$  es inyectiva, por la unicidad de curvas integrales. Por lo anterior,  $\alpha_t(Z(Q, \mathbb{R}^n)_b) \subset Z(Q, \mathbb{R}^n)_{b-t}$ , pero por la existencia de curvas integrales se tiene que vale

$$\alpha_t(Z(Q, \mathbb{R}^n)_b) = Z(Q, \mathbb{R}^n)_{b-t}.$$

Luego,  $\alpha_t : Z(Q, \mathbb{R}^n)_b \rightarrow Z(Q, \mathbb{R}^n)_{b-t}$  es una biyección.

Definimos entonces, la función  $f : Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a, b]} \rightarrow Z(Q, \mathbb{R}^n)_a \times [a, b]$  de la siguiente manera:

$$f(x) = (\alpha_{b-a} \circ \alpha_{b-\pi(x)}^{-1}(x), \pi(x)).$$

Esta aplicación resulta ser un homeomorfismo, con inversa  $f^{-1}(y, t) = \alpha_{b-t} \circ \alpha_{b-a}^{-1}(y)$ .

□



**Observación 2.6** Una consecuencia inmediata del lema anterior es que, bajo las mismas hipótesis, también resultan homeomorfos los conjuntos

$$Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a,b]} \text{ y } Z(Q, \mathbb{R}^n)_b \times [a, b].$$

Sólo hay que notar que si  $\tilde{Q}(X_1, \dots, X_n) = Q(a + b - X_1, X_2, \dots, X_n)$  se tiene que

$$Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a,b]} = Z(\tilde{Q}, \mathbb{R}^n)_{[a,b]} \text{ y } Z(Q, \mathbb{R}^n)_b = Z(\tilde{Q}, \mathbb{R}^n)_a.$$

Podemos ahora demostrar la proposición 2.4:

*Demostración.* Probemos primero el resultado para el caso  $R = \mathbb{R}$ : basta con aplicar el lema 2.5, la observación 2.6 y el hecho que  $[a, b]$  y  $[d, b]$  son homeomorfos, los que implican que:

- $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a,b]}$  y  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_b \times [a, b]$  son homeomorfos,
- $Z(Q, \mathbb{R}^n)_b \times [a, b]$  y  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_b \times [d, b]$  son homeomorfos,
- $Z(Q, \mathbb{R}^n)_b \times [d, b]$  y  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[d,b]}$  y son homeomorfos,
- $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[d,b]}$  y  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_d \times [d, b]$  son homeomorfos,
- $Z(Q, \mathbb{R}^n)_d \times [d, b]$  y  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_d \times [a, b]$  son homeomorfos.

Se concluye así que  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a,b]}$  y  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_d \times [a, b]$  son homeomorfos, de donde se desprende el resultado *i*). Para ver *ii*), basta notar que, por el homeomorfismo inducido por la construcción del lema 2.5, las componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_{[a,b]}$  se corresponden con las componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_d \times [a, b]$  y, por lo tanto, de  $Z(Q, \mathbb{R}^n)_d$ .

Ahora veamos el caso general:

- i*) Sea  $\{m_1, \dots, m_s\}$  la lista ordenada de todos los monomios en las variables  $X_1, \dots, X_n$  de grado a lo sumo el grado de  $Q$ , usando, por ejemplo, el orden lexicográfico. A un elemento  $c = (c_1, \dots, c_s) \in R^s$  le asociamos el polinomio  $P(c) = \sum_{i=1}^s c_i m_i$ . En particular, llamaremos  $c(Q)$  a la  $s$ -upla de coeficientes de  $Q$ .

Consideremos el cuerpo  $\mathbb{R}_{alg}$  de los números reales algebraicos y definamos el conjunto

$$W = \{(c, a', b', x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{alg}^{s+2+n} / x_1 \in [a', b'], P(c)(x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

que convendrá interpretar como la familia de conjuntos

$$Z(P(c), \mathbb{R}_{alg}^{s+2+n})_{[a', b']}, \text{ parametrizada por } (c, a', b') \in \mathbb{R}_{alg}^{s+2},$$

y el conjunto

$$W' = \{(c, d', x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{alg}^{s+1+n} / P(c)(d', x_2, \dots, x_n) = 0 \wedge x_1 = d'\},$$

que será útil interpretar como la familia de conjuntos

$$Z(P(c), \mathbb{R}_{alg}^{s+1+n})_{d'}, \text{ parametrizada por } (c, d') \in \mathbb{R}_{alg}^{s+1}.$$

Por el teorema 1.28 aplicado a  $\Pi : W \rightarrow \mathbb{R}_{alg}^{s+2}$ , la proyección a las primeras  $s + 2$  coordenadas, existe una partición finita  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}_{alg}^{s+2}$  en conjuntos semi-algebraicos tal que para cada  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\forall (c, a', b'), (\tilde{c}, \tilde{a}', \tilde{b}') \in \gamma$ , los conjuntos  $Z(P(c), \mathbb{R}_{alg}^{s+2+n})_{[a', b']}$  y  $Z(P(\tilde{c}), \mathbb{R}_{alg}^{s+2+n})_{[\tilde{a}', \tilde{b}]}$  son semi-algebraicamente homeomorfos. Luego, se tiene que estos conjuntos tienen la misma cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas acotadas. Llamemos a esta cantidad  $l(\gamma)$ .

Por la proposición 1.15, para todo cuerpo real cerrado  $R$  y para todo  $(c, a', b') \in Ext(\gamma, R)$ , el conjunto  $Z(P(c), R^{s+2+n})_{[a', b]}$  también tiene  $l(\gamma)$  componentes semi-algebraicamente conexas acotadas. Más aún, como las componentes semi-algebraicamente conexas de

$$W_\gamma = \{(c, a', b', x_1, \dots, x_n) \in W / (c, a', b') \in \gamma\}$$

son conjuntos semi-algebraicos definidos sobre  $\mathbb{R}_{alg}$ , para cada  $\gamma \in \Gamma$  existen  $l(\gamma)$  fórmulas libres de cuantificadores  $\Phi_i(\gamma)(c, a', b', x_1, \dots, x_n)$ , tal que, para cualquier cuerpo real cerrado  $R$  y para todo  $(c, a', b') \in Ext(\gamma, R)$ , los conjuntos semi-algebraicos

$$C_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n / \Phi_i(\gamma)(c, a', b', x_1, \dots, x_n)\},$$

para  $i = 1, \dots, l(\gamma)$ , son las componentes semi-algebraicamente conexas acotadas de  $Z(P(c), R^{s+2+n})_{[a', b]}$ .

Análogamente procedemos con  $W'$ : Existe una partición finita  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}_{alg}^{s+1}$  en conjuntos semi-algebraicos tal que para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\forall (c, d'), (\tilde{c}, \tilde{d}') \in \lambda$ , los conjuntos  $Z(P(c), \mathbb{R}_{alg}^{s+1+n})_{d'}$  y  $Z(P(\tilde{c}), \mathbb{R}_{alg}^{s+1+n})_{\tilde{d}'}$  son semi-algebraicamente homeomorfos. Luego, tienen la misma cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas acotadas. Llamemos a esta cantidad  $l(\lambda)$ .

Por la proposición 1.15, para todo cuerpo real cerrado  $R$ , y para todo  $(c, d') \in Ext(\lambda, R)$ , el conjunto  $Z(P(c), R^{s+1+n})_{d'}$  también tiene  $l(\lambda)$  componentes semi-algebraicamente conexas acotadas.

Sean  $\gamma \in \Gamma$  y  $\lambda \in \Lambda$  los conjuntos que contienen a  $(c(Q), a, b) \in Ext(\gamma, R)$  y  $(c(Q), d) \in Ext(\lambda, R)$  respectivamente. Consideremos el conjunto semi-algebraico  $E \subset \mathbb{R}_{alg}^{s+3}$  cuyos elementos son los  $(c, a', b', d')$  tales que:

- $(c, a', b') \in \gamma$  y  $(c, d') \in \lambda$ ,
- $Z(P(c), \mathbb{R}_{alg}^{s+2+n})$  es un conjunto algebraico regular,
- $\pi$  no tiene valores críticos en  $[a', b']$ ,
- $d' \in [a', b']$ .

Se tiene que  $Ext(E, R) \neq \emptyset$ , pues contiene a  $(c(Q), a, b, d)$ . Entonces, por la proposición 1.15,  $E \neq \emptyset$  y, luego,  $Ext(E, \mathbb{R}) \neq \emptyset$ .

Sea  $(c, a', b', d') \in Ext(E, \mathbb{R})$ . Como ya probamos que el enunciado vale para  $\mathbb{R}$ , se tiene que la cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas acotadas de los conjuntos  $Z(P(c), \mathbb{R}_{alg}^{s+2+n})_{[a', b']}$  y  $Z(P(c), \mathbb{R}_{alg}^{s+2+n})_{d'}$  coinciden. Pero estos números son  $l(\gamma)$  y  $l(\lambda)$  respectivamente, que son a su vez las cantidades de componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q, R^n)_{[a, b]}$  y  $Z(Q, R^n)_d$  respectivamente.

ii) Sea  $E$  como en i). Como el ítem ii) vale para  $\mathbb{R}$ , la fórmula:

$$\forall (c', a', b', d') \in Ext(E, \mathbb{R}) \exists (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Phi_j(\gamma)(c', a', b', d', x_2, \dots, x_n)$$

es verdadera en  $\mathbb{R}$ . Luego, por el teorema 1.15, se tiene que es verdadera sobre todo cuerpo real cerrado  $R$ . Se sigue que si

$$D_j = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \Phi_j(\gamma)(c(Q), a, b, x_1, \dots, x_n)\} \neq \emptyset$$

entonces  $(D_j)_d \neq \emptyset$ , para todo  $j = 1, \dots, l$ . Esto dice que cada componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)_{[a, b]}$  aporta por lo menos una componente semi-algebraicamente conexa distinta al conjunto  $Z(Q, R^n)_d$ . Por otro lado,  $Z(Q, R^n)_{[a, b]}$  y  $Z(Q, R^n)_d$  tienen la misma cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas. Luego, cada  $D_j$  aporta exactamente una componente semi-algebraicamente conexa a  $Z(Q, R^n)_d$ . En particular, como existe  $j = 1, \dots, l$  tal que  $C = D_j$ , se tiene que  $C_d$  debe ser semi-algebraicamente conexo.

□

**Proposición 2.7** *Sea  $Z(Q, R^n)$  un conjunto algebraico regular y acotado. Sea  $C$  una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)_{[a, b]}$ . Si  $C_{[a, b]}$  no es semi-algebraicamente conexo, entonces  $b$  es un valor crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $b$  no es un valor crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ . Podemos suponer que  $[a, b]$  no contiene valores críticos, pues sino tomamos  $a'$  que verifique  $\max\{v \in [a, b] / v \text{ valor crítico de } \pi \text{ sobre } Z(Q, R^n)_{[a, b]}\} < a' < b$  y  $C'$  la componente semi-algebraicamente conexa de  $C_{[a', b]}$  tal que  $C'_{[a', b]}$  no es semi-algebraicamente conexa. Veamos que tal  $C'$  existe: como  $C_{[a, b]}$  no es semi-algebraicamente conexo,

existen dos puntos distintos  $x, y \in C_{[a,b]}$  tal que no se conectan en  $C_{[a,b]}$  pero sí deben hacerlo en  $C = C_{[a,b]}$ . Supongamos que los conecta el arco  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ , con  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(1) = y$ . Debe existir un  $t \in [0, 1]$  tal que  $\pi \circ \gamma(t) = b$ , pues si no el arco los uniría en  $C_{[a,b]}$ . Sea  $t_0 = \min \{t \in [0, 1] / \pi \circ \gamma(t) = b\}$ . Como  $\pi(x), \pi(y) \neq b$ , se tiene que  $\gamma(t) \neq y$  si  $t \in [0, t_0]$ . Luego la imagen de  $\gamma$  interseca a dos componentes semi-algebraicamente conexas distintas de  $C_{[a',b]}$  que se conectan en  $\gamma(t_0)$ . Si las llamamos  $C_1$  y  $C_2$ , alcanza con tomar  $C'$  como la componente semi-algebraicamente conexa de  $C_{[a',b]}$  que contenga a  $C_1 \cup C_2$ .

Como  $C_{[a,b]}$  no es semi-algebraicamente conexo, existen  $x$  e  $y$  en  $C_{[a,b]}$  tales que no se conectan en ese conjunto. Si  $\pi(x) = \pi(y)$ , por la proposición 2.4, se tiene que  $x$  e  $y$  se conectan en  $C_{\pi(x)}$ , y por lo tanto en  $C_{[a,b]}$ , lo cual es un absurdo. Podemos suponer entonces que  $\pi(x) < \pi(y)$ . Los puntos  $x$  e  $y$  se conectan por un arco  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C_{[a,b]}$ , con  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(1) = y$ . Existe  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $\gamma(t_0) = z \in C_b$ , si no se conectarían en  $C_{[a,b]}$ . Si consideramos la función continua y semi-algebraica  $f : [0, t_0] \rightarrow R$ ,  $f(t) = \pi \circ \gamma(t) - \pi(y)$ , se tiene que en  $f(0) < 0$  y  $f(t_0) > 0$ . Por la proposición 1.18, existe un  $t \in (0, t_0)$  tal que  $f(t) = 0$ . Luego,  $\gamma(t)$  se conecta con  $y$  en  $C_{\pi(y)}$  con un arco  $\phi$ . Si tomamos  $\gamma|_{[0,t_0]}$  yuxtaposición  $\phi$ , se obtiene un arco en  $C_{[a,\pi(y)]}$ , y por lo tanto en  $C_{[a,b]}$ , que conecta  $x$  con  $y$ . Esto es un absurdo.  $\square$

### 2.1.2. Conjuntos algebraicos no regulares

Si el conjunto algebraico  $Z(Q) \subset R^n$  no fuese un conjunto algebraico *regular*, la idea será perturbar al polinomio  $Q$  para que el conjunto de ceros del nuevo polinomio sí lo sea. Utilizaremos para ello infinitesimales, de manera que podamos seguir controlando las propiedades de conexión de  $Z(Q)$ .

Trabajaremos en  $R\langle\xi\rangle$ , el cuerpo de las series de Puiseux en  $\xi$  y coeficientes en  $R$  algebraicas sobre  $R(\xi)$ . Más precisamente, en

$$R\langle\xi\rangle_A = \{\bar{a} \in R\langle\xi\rangle / \text{ord}(\bar{a}) \geq 0\}.$$

Recordemos que en este conjunto está bien definida la aplicación  $\lim_\xi : R\langle\xi\rangle_A \rightarrow R$ ,  $\lim_\xi(\bar{a}) = a_0$ , donde  $\bar{a} = \sum_{i \geq k} a_i \xi^{i/q}$ ,  $k \geq 0$ . Hay que observar que con esta notación, un elemento  $\bar{a}$  es infinitesimal sobre  $R$  si y sólo si  $\lim_\xi(\bar{a}) = 0$ .

Si  $A \subset R\langle\xi\rangle^n$ , notaremos  $\lim_\xi : A \rightarrow R^n$  a la función que aplica  $\lim_\xi$  coordenada a coordenada.

El siguiente resultado nos permitirá deducir propiedades del conjunto original a partir de información del conjunto obtenido al perturbar el polinomio que lo define.

**Proposición 2.8** *Sea  $A \subset R\langle\xi\rangle^n$  un conjunto semi-algebraico. Entonces  $\lim_\xi(A)$  es un conjunto semi-algebraico y cerrado de  $R^n$ . Si además  $A$  es acotado y semi-algebraicamente conexo,  $\lim_\xi(A)$  es semi-algebraicamente conexo.*

*Demostración.* Sea  $\Phi$  una fórmula de primer orden con coeficientes en  $R[\xi]$  libre de cuantificadores tal que  $A = \{x \in R \langle \xi \rangle^n / \Phi(x, \xi)\}$ . Consideremos el conjunto

$$P = \{(x, y) \in R^{n+1} / \Phi(x, y) \wedge y > 0\}.$$

Veamos que  $\lim_{\xi}(A) = \{x \in R^n / (x, 0) \in \overline{P}\}$ , lo que prueba que  $\lim_{\xi}(A)$  es semi-algebraico y cerrado:

Sea  $z = (z_1(\xi), \dots, z_n(\xi)) \in A$ . Entonces,  $(z_1(\xi), \dots, z_n(\xi), \xi) \in \text{Ext}(P, R \langle \xi \rangle)$ . Por la proposición 1.21, existe un intervalo de la forma  $(0, \delta) \subset R$  tal que cada  $z_i$  define una función en ese intervalo y tal que

$$(z_1(t), \dots, z_n(t), t) \in P \quad \forall t \in (0, \delta).$$

Se tiene entonces que  $(x, 0) = \lim_{\xi}(z_1(\xi), \dots, z_n(\xi), \xi) = \lim_{t \rightarrow 0}(z_1(t), \dots, z_n(t), t) \in \overline{P}$ . Esto prueba una inclusión.

Sea ahora  $(x, 0) \in \overline{P}$ . Por el teorema 1.24, existe una función semi-algebraica y de clase  $C^\infty$ ,  $\varphi : [0, \delta) \rightarrow R^{n+1}$ , tal que

$$\varphi(0) = (x, 0) \quad \text{y} \quad \varphi(t) = (z_1(t), \dots, z_{n+1}(t)) \in P, \quad \forall t \in (0, \delta).$$

En particular se tendrá que  $\left\{v \in (0, \delta) / \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t}(v) = 0\right\}$  no contiene un intervalo de la forma  $(0, \delta')$ , de lo contrario  $z_{n+1}$  sería constante y positiva, pero  $\lim_{t \rightarrow 0} z_{n+1}(t) = 0$ . Luego, existe  $\tau_1 > 0$  tal que  $\frac{\partial z_{n+1}}{\partial t} > 0$  en  $(0, \tau_1)$ . Sea  $\tau_2 > 0$  tal que existe la inversa de  $z_{n+1} : (0, \tau_1) \rightarrow (0, \tau_2)$  y resulta ser continua y semi-algebraica. Consideremos el cambio de variables  $u = z_{n+1}(t)$ . Definimos las funciones

$$\gamma_i(u) = z_i \circ z_{n+1}^{-1}(u) \quad \text{con} \quad u \in (0, \tau_2), \quad \text{para cada} \quad i = 1, \dots, n.$$

Se tiene que  $\gamma_i : (0, \tau_2) \rightarrow R$  es continua y semi-algebraica. Luego, podemos considerar su germen  $\gamma_i \in R \langle \xi \rangle$ , y vale  $(\gamma_1(\xi), \dots, \gamma_n(\xi)) \in A$ . Entonces

$$x = \lim_{t \rightarrow 0}(z_1(t), \dots, z_n(t)) = \lim_{u \rightarrow 0}(\gamma_1(u), \dots, \gamma_n(u)) = (\lim_{\xi}(\gamma_1), \dots, \lim_{\xi}(\gamma_n)) \in \lim_{\xi}(A).$$

Supongamos ahora que  $A$  es acotado y semi-algebraicamente conexo. Sea  $M > 0$  tal que  $A \subset B(0, M)$ .

Por el teorema 1.28, aplicado a la proyección a la última coordenada  $\pi_{n+1} : P \rightarrow R$ , se tiene que existe  $t_0 > 0$  tal que  $P \cap \{x \in R^{n+1} / 0 < x_{n+1} < t_0\}$  es homeomorfo a  $P \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = t\} \times (0, t_0)$  para todo  $t \in (0, t_0)$ . Luego, para  $t \in (0, t_0)$ ,

$$\text{Ext}(P \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = t\}, R \langle \xi \rangle)$$

es homeomorfo a  $\text{Ext}(P, R \langle \xi \rangle) \cap \{x \in R \langle \xi \rangle^{n+1} / x_{n+1} = \xi\} = A$ , que es semi-algebraicamente conexo, por lo que  $\text{Ext}(P \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = t\}, R \langle \xi \rangle)$  también lo es. En consecuencia, por la proposición 1.35, resulta que el conjunto

$$P \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = t\}$$

también es semi-algebraicamente conexo.

Veamos entonces que si  $P \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = t\}$  son semi-algebraicamente conexos para todo  $t \in (0, t_0)$ , entonces también lo es

$$\lim_{\xi}(A) = \overline{P} \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = 0\}.$$

Supongamos que no lo sea. Como las componentes semi-algebraicamente conexas del conjunto son cerradas y acotadas (pues  $A$  es acotado, luego  $\lim_{\xi}(A)$  lo es), para cada par de componentes  $C_1, C_2$ , la función  $d : C_1 \times C_2 \rightarrow R$ ,  $d(x, y) = \text{dist}(x, y)$  alcanza su mínimo por la proposición 1.29. Se tiene entonces que existe  $d > 0$  menor que la mínima distancia entre dos componentes semi-algebraicamente conexas de  $\overline{P} \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = 0\}$ .

Sean  $C_1, C_2$  dos componentes distintas de  $\overline{P} \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = 0\}$ . Se tiene que  $\text{dist}(C_1, C_2) > d$ . Sea  $p_i \in C_i$ . Consideremos  $D_i = \{y \in R^{n+1} / \text{dist}(y, C_i) < \frac{d}{2}\} \cap P$ . Como  $C_i \subset \overline{P}$ , existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $(0, \delta_0) \subset \pi_{n+1}(D_i)$ , para  $i = 1, 2$ , pues los elementos de  $C_i$  se conectan con  $P$  (teorema 1.24). Luego,  $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ , existe  $p_i(\delta) \in D_i \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = \delta\}$  y un arco  $\gamma_{\delta}$  que une  $p_1(\delta)$  con  $p_2(\delta)$  en  $P \cap \{x \in R^{n+1} / x_{n+1} = \delta\}$ . Se tiene entonces que  $\text{dist}(p_2(\delta), C_1) > \frac{d}{2}$ ; si no, existe  $p \in C_1$  tal que  $\text{dist}(p, p_2(\delta)) \leq \frac{d}{2}$ . Pero  $d < \text{dist}(p, p_2) \leq \text{dist}(p, p_2(\delta)) + \text{dist}(p_2(\delta), p_2) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$ , lo cual es un absurdo.

Para cada  $\delta \in (0, \delta_0)$ , consideremos la función continua y semi-algebraica

$$f_{\delta} : [0, 1] \rightarrow R, \quad f_{\delta}(t) = \text{dist}(\gamma_{\delta}(t), C_1).$$

Se tiene que  $f_{\delta}(0) = \text{dist}(p_1(\delta), C_1) < \frac{d}{2}$  y  $f_{\delta}(1) = \text{dist}(p_2(\delta), C_1) > \frac{d}{2}$ . Luego, por el teorema 1.18, existe un  $t_0(\delta)$  tal que  $\text{dist}(\gamma_{\delta}(t_0(\delta)), C_1) = \frac{d}{2}$ .

Así, para cada  $\delta \in (0, \delta_0)$ , tenemos un punto  $p_{\delta} = \gamma_{\delta}(t_0(\delta))$  tal que

$$p_{\delta} \in P, \quad \text{dist}(p_{\delta}, C_1) = \frac{d}{2} \quad \text{y} \quad \pi_{n+1}(p_{\delta}) = \delta.$$

Miremos ahora el conjunto

$$B = \left\{ y \in \overline{P} \cap \overline{B}(0, M') / \text{dist}(y, C_1) = \frac{d}{2} \right\},$$

donde  $M' \geq M + d$ . Este conjunto resulta ser cerrado y acotado. Luego, por la proposición 1.29,  $\pi_{n+1}(B)$  también lo es, y por lo anterior contiene a  $(0, \delta_0)$ . Se tiene entonces que  $0 \in \pi_{n+1}(B)$ . Por lo tanto, existe  $p \in B$  tal que  $\text{dist}(p, C_1) = \frac{d}{2} < d$ , lo cual es un absurdo por definición de  $d$ .  $\square$

Supongamos que  $Z(Q)$  es acotado y que  $Q(x) \geq 0$  para todo  $x \in R^n$  (esta última condición no es restrictiva, pues podemos reemplazar  $Q$  por  $Q^2$ ).

Sean  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$  que verifican  $d_1 \geq \dots \geq d_n$ ,  $gr(Q) \leq d_1$  y que los monomios de  $Q$  en los que aparece la variable  $X_i$  tienen grado total menor o igual que  $d_i$ , para  $i = 2, \dots, n$ . Aquí podemos hacer la aclaración de que, reordenando las variables  $X_1, \dots, X_n$ , podemos suponer que  $d_i$  es igual al mayor grado total de los monomios de  $Q$  en los que aparece la variable  $X_i$ . Tomemos un número par  $\bar{d}_i > d_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $\bar{d} = (\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n)$ .

Definimos los polinomios

$$\begin{aligned} G(X_1, \dots, X_n) &= X_1^{\bar{d}_1} + \dots + X_n^{\bar{d}_n} + X_2^2 + \dots + X_n^2 + 2n \in R[X_1, \dots, X_n], \\ Q_1(X_1, \dots, X_n) &= -\xi G(X_1, \dots, X_n) + Q(X_1, \dots, X_n) \in R[\xi][X_1, \dots, X_n], \\ Q_2(X_1, \dots, X_{n+1}) &= Q_1(X_1, \dots, X_n) + X_{n+1}^2 \in R[\xi][X_1, \dots, X_{n+1}]. \end{aligned}$$

Observar que  $G(x) > 0 \forall x \in R^n$  y, por lo tanto,  $Q_1(x) < 0 \forall x \in Z(Q, R^n)$ .

**Proposición 2.9** *Los conjuntos  $Z(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$  y  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})$  son conjuntos algebraicos regulares.*

*Demostración.* Consideremos la función  $\phi : R^n \rightarrow R$ ,  $\Phi(X) = \frac{Q(X)}{G(X)}$ .

Por el teorema de Sard semi-algebraico, el conjunto de valores críticos de  $\Phi$  es finito. Luego existe  $a \in R$ ,  $a > 0$ , tal que el intervalo  $(0, a)$  no contiene valores críticos. Para cada  $b \in (0, a)$  llamemos  $Q_b = Q - bG$ . Se tiene que  $Z(Q_b, R^n) = \{x \in R^n / \Phi(x) = b\}$ .

Veamos que  $grad(Q_b)(x) \neq 0$  para todo  $x \in Z(Q_b, R^n)$ : sea  $x \in Z(Q_b, R^n)$ . Si  $\frac{\partial Q_b}{\partial X_i}(x) = 0 \forall i = 1, \dots, n$ , se tiene que  $\frac{\partial Q}{\partial X_i}(x) = b \frac{\partial G}{\partial X_i}(x) \forall i = 1, \dots, n$ ; luego

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}(x) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial X_i}(x)G(x) - Q(x)\frac{\partial G}{\partial X_i}(x)}{G^2(x)} = \frac{\partial G}{\partial X_i}(x) \frac{bG(x) - Q(x)}{G^2(x)} = 0 \forall i = 1, \dots, n,$$

lo cual resulta ser un absurdo.

En consecuencia, la fórmula

$$\forall b \forall x (0 < b < a \wedge Q_b(x) = 0) \Rightarrow grad(Q_b)(x) \neq 0$$

es verdadera sobre  $R$ . Por el teorema 1.9 se sigue que también lo es sobre  $R \langle \xi \rangle$ . Luego, como  $0 < \xi < a$ ,  $Z(Q_\xi, R \langle \xi \rangle^n)$  es un conjunto algebraico regular. Pero como  $Q_\xi = Q_1$ , se deduce que  $Z(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$  es regular.

Veamos que  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})$  es regular: tomemos  $(x, x_{n+1}) \in Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})$ , con  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Se tiene que  $Q_1(x) = -x_{n+1}^2$ .

Si  $grad(Q_2)(x, x_{n+1}) = (\frac{\partial Q_1}{\partial X_1}(x), \dots, \frac{\partial Q_1}{\partial X_n}(x), 2x_{n+1}) = 0$  entonces  $grad(Q_1)(x) = 0$  y  $x_{n+1} = 0$ , y por lo tanto,  $Q_1(x) = 0$  y  $grad(Q_1)(x) = 0$ . Esto es un absurdo.  $\square$

Notaremos  $Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$  a la unión de las componentes semi-algebraicamente conexas y acotadas sobre  $R$  de  $Z(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$ . Luego, estará bien definida la función  $\lim_\xi : Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n) \rightarrow R^n$ .

**Proposición 2.10** *Con las hipótesis y notación anteriores, se tiene que*

$$\lim_{\xi} Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n) = Z(Q, R^n).$$

*Demostración.* Sea  $y = \lim_{\xi}(x)$ , con  $x = (x_1, \dots, x_n) \in Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$ . Aplicando  $\lim_{\xi}$  a ambos lados de la ecuación  $Q_1(x) = 0$  se obtiene  $Q(y) = 0$ . Luego  $y \in Z(Q)$ . Veamos la otra inclusión: sea  $x \in Z(Q, R^n)$ . Como  $Q \neq 0$ , para todo  $r \in R$ ,  $r > 0$ , existe  $y \in B(x, r)$  tal que  $Q(y) > 0$ . Luego  $x \in \overline{\{y / Q(y) > 0\}}$ . Se tiene entonces, por el teorema 1.24, que existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow R^n$  continua semi-algebraica tal que  $\gamma(0) = x$  y  $Q(\gamma(t)) > 0$  para todo  $t \in (0, 1]$ . Consideremos  $\tilde{\gamma}$  la extensión de  $\gamma$  a  $R \langle \xi \rangle$ . Por la proposición 1.19,  $\tilde{\gamma}$  es semi-algebraica y continua y, por el teorema 1.29, su imagen es acotada. Se tiene que

$$Q_1(\tilde{\gamma}(0)) = Q_1(x) = -\xi G(x) < 0 \text{ y}$$

$$Q_1(\tilde{\gamma}(t)) = Q(\tilde{\gamma}(t)) - \xi G(\tilde{\gamma}(t)) > 0 \text{ para todo } t \in (0, 1] \cap R,$$

pues  $\frac{Q}{G}(\tilde{\gamma}(t)) > \xi$  dado que  $G > 0$  y que  $Q > 0$  sobre la imagen de  $\gamma$ . Por la proposición 1.18 aplicada a  $Q_1 \circ \tilde{\gamma}$ , existe  $c \in \text{Ext}((0, 1), R \langle \xi \rangle)$  tal que  $Q_1(\tilde{\gamma}(c)) = 0$ . Más aún, podemos elegir  $c$  infinitesimal sobre  $R$ : en efecto, como el conjunto  $\{t \in \text{Ext}((0, 1), R \langle \xi \rangle) / Q_1 \circ \tilde{\gamma}(t) < 0\}$  es semi-algebraico, abierto y no vacío, por la proposición 1.8, es de la forma  $(0, b_1) \cup \dots \cup (a_l, b_l)$ , con  $b_1$  infinitesimal sobre  $R$  (si no habría otra raíz de  $Q_1 \circ \tilde{\gamma}$  en  $(0, b_1)$ ), y por la continuidad de  $Q_1 \circ \tilde{\gamma}$ , se tiene que  $Q_1 \circ \tilde{\gamma}(b_1) = 0$ . En particular, tomando  $c = b_1$  se verifica, por la proposición 1.25, que  $\lim_{\xi}(\tilde{\gamma}(c)) = \gamma(0) = x \in Z(Q, R^n)$ .

Veamos que la componente semi-algebraicamente conexa  $D$  de  $Z(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$  que contiene a  $\tilde{\gamma}(c)$  es acotada sobre  $R$ :

Supongamos que  $Z(Q, R^n) \subset B(0, r)$ . Sea  $D'$  la componente semi-algebraicamente conexa de  $D \cap \text{Ext}(B(0, r), R \langle \xi \rangle)$  que contiene a  $\tilde{\gamma}(c)$ . Supongamos que existe un elemento  $z \in D - D'$ . Tomemos un arco  $\Gamma$  que conecte a  $\tilde{\gamma}(c)$  con  $z$  en  $D$ , con  $\Gamma(0) = \tilde{\gamma}(c)$  y  $\Gamma(1) = z$ . Como  $z \notin D'$ , la imagen de  $\Gamma$  no está contenida en  $\text{Ext}(B(0, r), R \langle \xi \rangle)$ . Sea

$$t_0 = \min \{t \in \text{Ext}([0, 1], R \langle \xi \rangle) / \Gamma(t) \notin \text{Ext}(B(0, r), R \langle \xi \rangle)\}.$$

Notemos que  $\|\Gamma(t_0)\| = r$ . Como la imagen  $\Gamma([0, t_0])$  es acotada, por la proposición 2.8, se tiene que  $\lim_{\xi}(\Gamma([0, t_0]))$  es semi-algebraicamente conexo. Además, está contenido en  $Z(Q, R^n)$  y contiene a  $\lim_{\xi}(\Gamma(t_0))$ . Pero  $\|\lim_{\xi}(\Gamma(t_0))\| = r$ , contradiciendo el hecho de que  $Z(Q, R^n) \subset B(0, r)$ . Concluimos que  $D \subset \text{Ext}(B(0, r), R \langle \xi \rangle)$ .  $\square$

En caso de que el conjunto algebraico sea no regular, la siguiente noción jugará el mismo papel que los valores y puntos críticos de  $\pi$  sobre conjuntos regulares.



**Definición 2.11** Sea  $Z(Q, R^n)$  un conjunto algebraico acotado. Un punto pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$  es el  $\lim_{\xi}$  de un punto crítico de  $\pi$  sobre  $Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$ . Un valor pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$  es la proyección sobre el eje  $X_1$  de un punto pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ .

Notemos que la proyección a las primeras  $n$  coordenadas de un punto crítico de  $\pi$  sobre  $Z_A(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})$  es un punto crítico de  $\pi$  sobre  $Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$ .

**Proposición 2.12** El conjunto de puntos pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$  interseca toda componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)$ .

*Demostración.* Por las proposiciones 2.9 y 2.3, el conjunto de puntos críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$  interseca toda componente semi-algebraicamente conexa de  $Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$ . Como la función  $\lim_{\xi}$  aplica conjuntos semi-algebraicos conexos y acotados en conjuntos semi-algebraicos conexos y acotados (ver proposición 2.8), el resultado se deduce de la proposición 2.10.  $\square$

El conjunto algebraico  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})$  tiene una ventaja respecto del conjunto algebraico  $Z(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$ : nos permite recuperar más información sobre las componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q, R^n)$ .

**Lema 2.13** Sea  $Z(Q, R^n)$  un conjunto algebraico acotado. Para toda componente semi-algebraicamente conexa  $C$  de  $Z(Q, R^n)_{[a,b]}$  existe una componente semi-algebraicamente conexa  $D$  de  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$  acotada sobre  $R$  tal que  $\lim_{\xi}(D) = C \times \{0\}$ .

*Demostración.* Sea  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \text{Ext}(C, R \langle \xi \rangle)$ . Como  $G(y) > 0$  se tiene que  $Q_1(y) < 0$ . Luego el polinomio  $Q_2(y_1, \dots, y_n, X_{n+1}) = Q_1(y) + X_{n+1}^2 \in R \langle \xi \rangle [X_{n+1}]$  admite una única raíz  $z_y > 0$  en  $R \langle \xi \rangle$ .

Consideremos la aplicación  $f : \text{Ext}(C, R \langle \xi \rangle) \rightarrow R \langle \xi \rangle$ ,  $f(y) = z_y$ . Esta función resulta ser continua, pues  $f(y) = \sqrt{-Q_1(y)}$ , y es semi-algebraica pues

$$\text{graf}(f) = \{(y, z) / y \in \text{Ext}(C, R \langle \xi \rangle) \wedge z > 0 \wedge Q_2(y, z) = 0\}$$

es semi-algebraico. Además, si  $y \in C$  se tiene que  $f(y)$  es un infinitesimal sobre  $R$ , pues  $Q_1(y) = Q(y) - \xi G(y) = -\xi G(y)$  con  $G(y) > 0$ , luego  $-Q_1(y)$  es infinitesimal sobre  $R$ , y por lo tanto  $f(y)$  lo es.

Sea  $x \in C$  fijo. En particular,  $f(x)$  es infinitesimal sobre  $R$ . Llamemos  $D$  a la componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$  que contiene a  $(x, f(x))$ .

-  $D$  es acotada sobre  $R$ :

La demostración de que  $Z(Q, R^n) \subset \lim_{\xi} Z_A(Q_1, R \langle \xi \rangle^n)$  (ver la proposición 2.10, ítem *i*) se adapta a nuestra situación. Tomar como  $D$  la componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$  que contiene a  $(x, f(x))$ , es decir, a la  $D$  de esta demostración.

- $\lim_{\xi}(D) = C \times \{0\}$ : Como  $f$  es semi-algebraica y continua, y  $C$  es semi-algebraicamente arco-conexo, los puntos de la forma  $(y, f(y))$ , con  $y \in C$  están en la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$  que está  $(x, f(x))$ . Luego para todo  $y \in C$ ,  $(y, f(y)) \in D$  y vale  $(y, 0) = \lim_{\xi}(y, f(y))$ . Veamos la otra inclusión: se tiene que  $\lim_{\xi}(D) \subset Z(Q, R^n) \times \{0\}$  (pues si  $Q_2(x, x_{n+1}) = 0$ , aplicando  $\lim_{\xi}$ , se tiene que  $Q(\lim_{\xi} x) + (\lim_{\xi} x_{n+1})^2 = 0$  en  $R$  y por lo tanto,  $\lim_{\xi}(x) \in Z(Q, R^n)$  y  $\lim_{\xi}(x_{n+1}) = 0$ ). Además, es semi-algebraicamente conexo (por la proposición 2.8, pues  $D$  es acotada) y contiene a  $(x, f(x))$ . Luego,  $\lim_{\xi}(D) \subset C \times \{0\}$ .

□

Los siguientes resultados son los análogos a las proposiciones 2.4 y 2.7 para el caso no regular, mostrando que los valores pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$  son los únicos lugares en donde la cantidad de componentes semi-algebraicamente conexas de las fibras  $Z(Q, R^n)_d$  pueden cambiar.

**Proposición 2.14** *Sea  $Z(Q, R^n)$  un conjunto algebraico acotado y sea  $C$  una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)_{[a,b]}$ . Si  $v \in [a, b]$  y  $[a, b] - \{v\}$  no contiene valores pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ , entonces  $C_v$  es semi-algebraicamente conexo.*

*Demostración.* Por el lema 2.13 existe una componente semi-algebraicamente conexa  $D$  de  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$  acotada sobre  $R$  tal que  $\lim_{\xi}(D) = C \times \{0\}$ .

Supongamos que  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$  tiene valores críticos, los llamamos  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ; entonces  $\lim_{\xi}(\lambda_i) \notin [a, b] - \{v\}$ . Luego, existe un infinitesimal  $\beta$  tal que, si existen valores críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$ , están en  $[v - \beta, v + \beta]$ .

Veamos que  $D_{[v-\beta, v+\beta]}$  es semi-algebraicamente conexo:

Sean  $x, y \in D_{[v-\beta, v+\beta]}$ . Vamos a mostrar que existe un arco semi-algebraico en  $D_{[v-\beta, v+\beta]}$  que los une: Como  $D$  es semi-algebraicamente conexo, existe un arco semi-algebraico  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  tal que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(1) = y$ . Si  $\gamma(t) \in D_{[v-\beta, v+\beta]}$  para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma$  sirve. Si no, es unión de un número finito de arcos conexas cerrados cada uno de los cuales está en  $D_{[a, v-\beta]}$ ,  $D_{[v-\beta, v+\beta]}$  ó  $D_{[v+\beta, b]}$ . La proposición 2.4 nos dice que las componentes semi-algebraicamente conexas de  $D_{v-\beta}$  (resp.  $D_{v+\beta}$ ) están en biyección con las componentes semi-algebraicamente conexas de  $D_{[a, v-\beta]}$  (resp.  $D_{[v+\beta, b]}$ ) que las contienen. Luego, cada par de arcos  $\gamma_1, \gamma_2$  en  $D_{[a, v-\beta]}$  (resp.  $D_{[v+\beta, b]}$ ) con extremos  $\gamma_1(0), \gamma_2(1) \in D_{v-\beta}$  (resp.  $D_{v+\beta}$ ) se puede reemplazar por un arco  $\tilde{\gamma}$  en la componente semi-algebraicamente conexa de  $D_{v-\beta}$  (resp.  $D_{v+\beta}$ ) que contiene a  $\gamma_1(0)$ , de manera que conecte a  $\gamma_1(0)$  con  $\gamma_2(1)$  en  $D_{v-\beta}$  (resp.  $D_{v+\beta}$ ). Obtenemos así un nuevo arco semi-algebraico  $\tilde{\gamma}$  que conecta a  $x$  con  $y$  en  $D_{[v-\beta, v+\beta]}$ .

Luego por la proposición 2.8,  $C_v \times \{0\} = \lim_{\xi}(D_{[v-\beta, v+\beta]})$  es semi-algebraicamente conexo. □

**Proposición 2.15** *Sea  $Z(Q, R^n)$  un conjunto algebraico acotado y  $C$  una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)_{[a,b]}$ . Si  $C_{[a,b]}$  no es semi-algebraicamente conexo, entonces  $b$  es un valor pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ .*

*Demostración.* Por la proposición 2.13, existe una componente semi-algebraicamente conexa  $D$  de  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$  acotada sobre  $R$  tal que  $\lim_{\xi}(D) = C \times \{0\}$ . Si vemos que existe  $c_0$  que verifica que  $\lim_{\xi}(c_0) = b$ ,  $D_{[a,c_0]}$  es semi-algebraicamente conexo y  $D_{[a,c_0]}$  no lo es, por la proposición 2.7,  $c_0$  será valor crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q_2, R \langle \xi \rangle^{n+1})_{[a,b]}$ , y por lo tanto,  $b$  un valor pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ .

Veamos primero que existe  $a' \in [a, b)$  tal que para todo  $d \in [a', b)$  se tiene que  $C_{[a,d]}$  no es semi-algebraicamente conexo:

Por el teorema 1.28 aplicado a la función  $\pi : C_{[a,b]} \rightarrow [a, b)$  existe  $a' \in [a, b)$  tal que para todo  $d \in [a', b)$  se tiene que existe un homeomorfismo semi-algebraico  $\theta : [a', b) \times C_d \rightarrow C_{[a',b]}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [a', b) \times C_d & \xrightarrow{\theta} & C_{[a',b]} \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ & & [a', b) \end{array}$$

es conmutativo, es decir, tal que  $\pi \circ \theta(t, x) = t$  para todo  $t \in [a', b)$  y  $x \in C_d$ .

Veamos que  $C_{[a,d]}$  es un retracto por deformación fuerte semi-algebraico de  $C_{[a,b]}$ ; luego, como  $C_{[a,b]}$  no es semi-algebraicamente conexo,  $C_{[a,d]}$  tampoco lo será. Para esto, definiremos una función continua y semi-algebraica  $H : C_{[a,b]} \times [0, 1] \rightarrow C_{[a,b]}$  tal que:

- i)  $H(x, 0) = x \ \forall x \in C_{[a,b]}$ ,
- ii)  $H(x, 1) \in C_{[a,d]} \ \forall x \in C_{[a,b]}$ ,
- iii)  $H(x, t) = x \ \forall x \in C_{[a,d]}, \ \forall t \in [0, 1]$ .

Si  $(x, t) \in C_{[a,a']} \times [0, 1]$ , definimos  $H(x, t) = x$ . Falta definir  $H$  en  $C_{[a',b]} \times [0, 1]$ .

Primero consideremos las funciones continuas  $\Pi_1 : [a', b) \times C_d \rightarrow [a', b)$  y  $\Pi_2 : [a', b) \times C_d \rightarrow C_d$  definidas como  $\Pi_1(s, x) = s$  y  $\Pi_2(s, x) = x$ , con  $s \in [a', b)$  y  $x \in C_d$ .

Definimos también la función continua  $K : [a', b) \times [0, 1] \rightarrow [a', b)$  de la siguiente manera:

$$K(s, t) = \begin{cases} s & \text{si } s \in [a', d] \\ t(d - s) + s & \text{si } s \in (d, b) \end{cases} .$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, donde  $i : C_{[a',d]} \rightarrow C_{[a',b]}$  es la inclusión,  $\varphi : [a', b) \times C_d \rightarrow [a', d] \times C_d$ ,  $\varphi(s, x) = (K(s, 1), x)$  y con abuso de notación,  $\theta$  es la restricción correspondiente:

$$\begin{array}{ccc}
C_{[a',d]} & \xleftarrow{\theta} & [a',d] \times C_d \\
i \downarrow & & \uparrow \varphi \\
C_{[a',b]} & \xrightarrow{\theta^{-1}} & [a',b] \times C_d
\end{array}$$

Si  $(x, t) \in C_{[a',b]} \times [0, 1]$ , definimos  $H(x, t) = \theta(K(\Pi_1 \circ \theta^{-1}(x), t), \Pi_2 \circ \theta^{-1}(x))$ . Veamos que cumple las tres condiciones para  $x \in C_{[a',b]}$ :

- i)  $H(x, 0) = \theta(K(\Pi_1 \circ \theta^{-1}(x), 0), \Pi_2 \circ \theta^{-1}(x)) = \theta(\Pi_1 \circ \theta^{-1}(x), \Pi_2 \circ \theta^{-1}(x)) = \theta \circ \theta^{-1}(x) = x$ .
- ii)  $H(x, 1) = \theta(\underbrace{K(\Pi_1 \circ \theta^{-1}(x), 1)}_{\in [a',d]}, \underbrace{\Pi_2 \circ \theta^{-1}(x)}_{\in C_d}) \in C_{[a',d]}$ .
- iii) Si  $x \in C_{[a',d]}$ ,  $H(x, t) = \theta(\underbrace{K(\Pi_1 \circ \theta^{-1}(x), t)}_{=\Pi_1 \circ \theta^{-1}(x)}, \Pi_2 \circ \theta^{-1}(x)) = \theta \circ \theta^{-1}(x) = x$ .

Notar que la función  $H$  así definida resulta continua.

Quedó probado entonces que para todo  $d \in [a', b)$ ,  $C_{[a,d]}$  no es semi-algebraicamente conexo. Se sigue de la proposición 2.8, que  $D_{[a,c]}$  tampoco lo es para cualquier  $c \in R \langle \xi \rangle$  con  $\lim_{\xi}(c) = d$ . Consideremos el conjunto

$$A = \{c \in Ext([a', b], R \langle \xi \rangle) / D_{[a,c]} \text{ es semi-algebraicamente conexo} \}.$$

Sabemos que  $A \subset \{x \in Ext([a', b], R \langle \xi \rangle) / \lim_{\xi}(x) = b\}$ , pues si  $d \in [a', b)$  y  $d = \lim_{\xi}(c)$ , entonces  $c \notin A$ . Por el teorema 1.28 aplicado a la función  $\pi : D \rightarrow [a, b]$ , existe una partición finita de  $[a, b] = \bigcup_{i=1}^l T_i$  en conjuntos semi-algebraicos tal que  $D_{T_i}$  es semi-algebraicamente homeomorfo a  $D_{c_i} \times T_i$ ,  $\forall c_i \in T_i, \forall i$ . Luego, si  $c, c' \in T_i$  se tiene que  $D_{[a,c]}$  y  $D_{[a,c']}$  son homeomorfos y entonces, para cada  $i$ ,  $T_i \subset A$  o  $T_i \cap A = \emptyset$ . Podemos suponer que cada  $T_i$  es o bien un punto o bien un intervalo. Como  $b \in A$ , existe  $i_0$  tal que  $T_{i_0} \cap A = \emptyset$  y  $T_i \subset A \forall i = i_0 + 1, \dots, l$ .

- Si  $T_{i_0} = [c, d)$  o  $(c, d)$ , se tiene que  $D_{[a,d]}$  es semi-algebraicamente conexo (pues  $d \in A$ ) pero  $D_{[a,d)}$  no lo es, pues tomando  $c' \in T_{i_0}$  y procediendo como antes, probaríamos que  $D_{[a,c']}$  es retracto por deformación fuerte de  $D_{[a,d)}$ , y  $D_{[a,c']}$  no es semi-algebraicamente conexo pues  $c' \notin A$ .

Luego alcanza con tomar  $c_0 = d \in A$ .

- Si  $T_{i_0} = [c, d]$  o  $(c, d]$  tenemos la siguiente situación:  $D_{[a,d]}$  no es semi-algebraicamente conexo (pues  $d \notin A$ ) pero  $D_{[a,d+\delta]}$  sí lo es para  $0 < \delta \leq b - d$ . Veamos que esto es un absurdo: Sea  $d$  la mínima distancia entre dos componentes semi-algebraicamente conexas distintas de  $D_{[a,d]}$ . Sean  $C_1$  y  $C_2$  las componentes donde se realiza esta distancia y tomemos un punto en cada una de ellas,  $p_i \in C_i$ ,

tal que  $\text{dist}(p_1, p_2) = d$ . Para cada  $\delta$ , existe un arco  $\gamma_\delta : [0, 1] \rightarrow D_{[a, d+\delta]}$  que une a  $p_1$  con  $p_2$ . Consideremos la función  $f_\delta : [0, 1] \rightarrow R$ ,  $f_\delta(t) = \text{dist}(\gamma_\delta(t), C_1)$ . Se tiene que  $f_\delta(0) = 0$  y  $f_\delta(1) = d$ . Como  $f_\delta$  es continua y semi-algebraica, por el teorema de 1.18, existe  $t_0$  tal que  $f_\delta(t_0) = \frac{d}{2}$ . Sea  $p_\delta = \gamma_\delta(t_0) \in D_{[a, d+\delta]}$ . Observamos que  $p_\delta \notin D_{[a, d]}$ , dado que  $\text{dist}(p_\delta, C_1) = \frac{d}{2}$ ; luego  $\pi(p_\delta) \in (d, d + \delta]$ . Sea  $B = \{z \in D / \text{dist}(z, C_1) = \frac{d}{2}\}$ . Este conjunto resulta ser cerrado, acotado y no vacío, luego por la proposición 1.29,  $\pi(B) \subset R$  es cerrado, acotado y no vacío. Además contiene puntos en  $(d, d + \delta)$  para todo  $0 < \delta \leq b - d$ . Luego,  $d \in \pi(B)$ . Entonces existe  $p \in D$  tal que  $\pi(p) = d$  y  $\text{dist}(p, C_1) = \frac{d}{2}$ , pero por la elección de  $d$ ,  $p$  no pertenece a ninguna componente semi-algebraicamente conexa de  $D_{[a, d]}$ , lo cual es un absurdo.

□

## 2.2. Roadmaps

A continuación veremos cómo las propiedades de los puntos críticos y pseudo-críticos de proyecciones estudiadas en la sección anterior dan lugar a procedimientos para la obtención de roadmaps.

### 2.2.1. Roadmap de un conjunto algebraico acotado

Sea  $Q \in R[X_1, \dots, X_n]$ . Supondremos que  $Q(x) \geq 0$  para todo  $x \in R^n$  (de no serlo, reemplazar  $Q$  por  $Q^2$ ), y que  $Z(Q, R^n)$  es un conjunto algebraico acotado. En esta sección describiremos la construcción de un roadmap de  $Z(Q, R^n)$ , con la condición extra de que contenga un conjunto finito  $N$  de puntos de  $Z(Q, R^n)$  fijado previamente.

Básicamente la construcción es la siguiente: llamando  $\tilde{Q}$  al polinomio  $Q$  visto en  $R[X_1][X_2, \dots, X_n]$ , primero se construyen de forma paramétrica sobre el eje  $X_1$  los puntos pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(\tilde{Q}, R^{n-1})$ . Con esto se obtienen segmentos de curvas en  $Z(Q, R^n)$  parametrizadas en intervalos abiertos del eje  $X_1$ , cuyos puntos finales están en la fibra del extremo del intervalo donde están definidas.

Para todo  $x \in R$ , el conjunto de curvas y sus puntos finales contienen a los puntos pseudo-críticos de la proyección sobre  $Z(Q, R^n)_x$ ; luego, por la proposición 2.12, intersecan a toda componente semi-algebraicamente conexa de este conjunto. Por lo tanto, el conjunto construido verifica la propiedad RM2.

Sólo considerando estas curvas, no es cierto que se verifique la propiedad RM1, por lo que deberemos agregar nuevos segmentos de curvas. En vista de ello, introducimos la siguiente definición:

**Definición 2.16** *Un valor distinguido es un elemento  $v \in R$  que es un valor pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ , o la primera coordenada de algún punto de  $N$  o la primera coordenada de algún punto final de algún segmento de curva de la construcción anterior. Cada uno de los valores distinguidos  $v$ , define un hiperplano distinguido de ecuación  $X_1 = v$ .*

*Los puntos distinguidos son los elementos de  $N$  junto con los puntos finales de los segmentos de curvas y las intersecciones de estos segmentos con los hiperplanos distinguidos.*

La idea es, entonces, la siguiente: se construyen y ordenan los valores distinguidos  $v_1 < \dots < v_l$ . En cada intervalo  $(v_i, v_{i+1})$  se construye una colección de segmentos de curvas  $C_i$  que intersecan toda componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)_v$ , para todo  $v \in (v_i, v_{i+1})$ . Encima de cada valor distinguido  $v_i$ , se construye un conjunto de puntos distinguidos, que llamaremos  $N_i$ , es decir, un conjunto de puntos distinguidos en  $Z(Q, R^n)_{v_i}$ . Cada curva de  $C_i$  tiene un punto final en  $N_i$  y otro en  $N_{i+1}$ . Además, se tiene que  $N \subset \bigcup_{i=1}^{l-1} N_i$ . Luego, se itera este procedimiento en cada hiperplano distinguido  $H_i : X_1 = v_i$ , con input  $Q(v_i, X_2, \dots, X_n)$ . Es decir que se trabaja en un espacio ambiente de dimensión  $n - 1$ . Se continúa iterando el mismo procedimiento hasta que el espacio ambiente tenga dimensión 0.

**Teorema 2.17** *Si  $M$  es el conjunto de segmentos de curvas y sus respectivos puntos finales obtenidos por la construcción anterior, entonces  $M$  es un roadmap para  $Z(Q, R^n)$ .*

*Demostración.* La demostración se hará por inducción en la dimensión del espacio ambiente. Tenemos que ver que  $M$  verifica RM1, pues ya sabemos que verifica RM2. Si  $n = 1$ , entonces  $Z(Q, R)$  es finito ó vacío. Luego  $M = Z(Q, R)$  verifica claramente RM1. Supongamos ahora que la construcción produce un roadmap de conjuntos algebraicos de  $R^m$ , con  $m \leq n - 1$ .

Sea  $C$  una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)$ . Tenemos que ver que  $M \cap C$  es semi-algebraicamente conexo. Sean  $x, y \in M \cap C$ . Existe un arco continuo y semi-algebraico  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  que une  $x$  con  $y$ . Vamos a mostrar que podemos reemplazarlo por un arco en  $M \cap C$ . La idea es partir el arco  $\gamma$  en subarcos de manera que la proyección al eje  $X_1$  de cada uno de ellos contenga exactamente un valor distinguido.

Sean  $v_1 < \dots < v_l$  el conjunto de valores distinguidos. Tomemos  $u_i \in R$  tales que  $u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \dots < v_l < u_{l+1}$ . Entonces existen  $x = x_0, x_1, \dots, x_h, x_{h+1} = y$  en  $C$  y arcos continuos semi-algebraicos  $\gamma_i$  tales que:

- $\gamma_i$  une  $x_i$  con  $x_{i+1}$ ,
- $\gamma$  es la yuxtaposición de los  $\gamma_i$ ,

$$\blacksquare \gamma_i : [0, 1] \rightarrow C_{[u_{k_i}, u_{k_{i+1}}]}.$$

Llamemos  $C_i$  a la componente semi-algebraicamente conexa de  $C_{[u_{k_i}, u_{k_{i+1}}]}$  que contiene a  $\gamma_i$ . Se tiene que  $C_i \cap C_{i+1}$  es unión de algunas de las componentes semi-algebraicamente conexas de  $C_{\pi(x_{i+1})}$ , y cada una de ellas interseca a  $M$ , pues ya sabemos que RM2 se verifica. Luego,  $M \cap C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ . Tomemos un elemento en cada uno de estos conjuntos:  $y_0 = x, \dots, y_i \in M \cap C_i \cap C_{i+1}, \dots, y_{h+1} = y$ .

Se tiene que  $y_i, y_{i+1} \in M \cap C_{i+1}$ . Si vemos que  $M \cap C_{i+1}$  es semi-algebraicamente conexo, existirá un arco  $\tilde{\gamma}_i$  que une  $y_i$  con  $y_{i+1}$  en  $M \cap C_{i+1}$ . Luego tomando  $\tilde{\gamma}$  la yuxtaposición de los  $\tilde{\gamma}_i$ , con  $i = 0, \dots, l$ , se obtiene un arco en  $M \cap C$  que une a  $x$  con  $y$ .

Veamos entonces que  $M \cap C_i$  es semi-algebraicamente conexo para cada  $i$ :

Como el conjunto  $[u_{k_i}, u_{k_{i+1}}] - \{v_{k_i}\}$  no contiene valores pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ , por la proposición 2.14, se tiene que  $(C_i)_{v_{k_i}}$  es semi-algebraicamente conexo. Más aún, se tiene que todas las curvas de  $M \cap C_i$  tienen algún punto final en el hiperplano  $X_1 = v_{k_i}$ . Aplicando hipótesis inductiva al conjunto  $Z(Q, R^n)_{v_{k_i}} \subset R^{n-1}$ , los puntos finales de estas curvas se conectan por el roadmap que se calcula en la recursión en la fibra  $X_1 = v_{k_i}$ .  $\square$

### 2.2.2. Roadmap de un conjunto algebraico no acotado

En el caso en que  $Z(Q, R^n)$  no sea un conjunto acotado, donde nuevamente  $Q$  es un polinomio en  $R[X_1, \dots, X_n]$ , lo que haremos es modificarlo introduciendo dos nuevas variables  $\epsilon$  y  $X_{n+1}$ . La variable  $\epsilon$  será interpretada en ocasiones como un infinitesimal, lo que nos permitirá ver al conjunto definido por el nuevo polinomio como un conjunto algebraico acotado.

Consideraremos el polinomio  $Q_\epsilon \in R[\epsilon][X_1, \dots, X_{n+1}]$  definido como

$$Q_\epsilon(X_1, \dots, X_{n+1}) = Q^2 + (\epsilon(X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2) - 1)^2.$$

**Proposición 2.18** *Se tiene que:*

- i) El conjunto algebraico  $Z(Q_\epsilon, R\langle\epsilon\rangle^{n+1})$  es acotado.*
- ii) Si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in Z(Q, R^n)$ , entonces existe un único  $x_{n+1} \in R\langle\epsilon\rangle$  con  $x_{n+1} > 0$  tal que  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in Z(Q_\epsilon, R\langle\epsilon\rangle^{n+1})$ . Además se tiene que  $(x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$  también está en  $Z(Q_\epsilon, R\langle\epsilon\rangle^{n+1})$ .*

*Demostración.*

- i) Si  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in Z(Q_\epsilon, R\langle\epsilon\rangle^{n+1})$  se tiene que  $Q(x_1, \dots, x_n) = 0$  y  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \frac{1}{\epsilon}$ . Luego,  $\|x\| = (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}$ .*

Esto prueba que  $Z(Q_\epsilon, R\langle\epsilon\rangle^{n+1}) \subset \left\{x \in R\langle\epsilon\rangle^{n+1} / \|x\| = (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}\right\}$ .

ii) Si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in Z(Q, R^n)$ , de la ecuación  $Q_\epsilon(x_1, \dots, x_n, X_{n+1}) = 0$  se obtiene  $X_{n+1}^2 = \frac{1}{\epsilon} - \|x\|^2 > 0$ , por lo cual el resultado vale.

□

Sean  $\pi_{n+1} : R^{n+1} \rightarrow R$  la proyección a la última coordenada y  $\pi_{\leq n} : R^{n+1} \rightarrow R^n$  la proyección a las primeras  $n$  coordenadas. Dado  $a \in R$ ,  $a > 0$ , consideremos el conjunto  $Z(Q_a, R^{n+1})$ , donde

$$Q_a(X_1, \dots, X_{n+1}) = Q^2 + (a(X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2) - 1)^2.$$

Al igual que lo visto en la demostración de la proposición 2.18, este conjunto está acotado; más precisamente, está incluido en  $\overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ . Además, si  $x \in Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ , existe un único  $x_{n+1} \in R$ ,  $x_{n+1} \geq 0$ , tal que  $(x, x_{n+1}), (x, -x_{n+1}) \in Z(Q_a, R^{n+1})$ .

Podemos relacionar componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q, R^n)$  con las componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q_a, R^{n+1})$  mediante el siguiente resultado:

**Proposición 2.19** *Sea  $a \in R$ ,  $a > 0$ , y para cada componente semi-algebraicamente conexa  $C$  de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ , consideremos los conjuntos*

$$C^+ = \{p \in Z(Q_a, R^{n+1}) / \pi_{n+1}(p) \geq 0 \text{ y } \pi_{\leq n}(p) \in C\} \text{ y}$$

$$C^- = \{p \in Z(Q_a, R^{n+1}) / \pi_{n+1}(p) < 0 \text{ y } \pi_{\leq n}(p) \in C\}.$$

Entonces:

- i)  $Z(Q_a, R^{n+1}) = \bigcup_C C^+ \cup C^-$ , donde la unión recorre las componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ .
- ii) Los conjuntos  $C^+$  y  $C^-$  son semi-algebraicos, semi-algebraicamente arco-conexos y disjuntos.
- iii) Si  $C_1$  y  $C_2$  son dos componentes semi-algebraicamente conexas distintas de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ , y  $*, \bullet \in \{+, -\}$ , se tiene que  $C_1^*$  y  $C_2^\bullet$  están incluidos en componentes semi-algebraicamente conexas distintas de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ .
- iv) Dada una componente semi-algebraicamente conexa  $C$  de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ , tenemos tres opciones:

a) Si  $C \subset \{x \in R^n / \|x\| = a^{-\frac{1}{2}}\}$ , entonces  $C^- = \emptyset$  y  $C^+$  es una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ .

b) Si  $C \cap \{x \in R^n / \|x\| = a^{-\frac{1}{2}}\} \neq \emptyset$  y  $C \cap B(0, a^{-\frac{1}{2}}) \neq \emptyset$ , entonces  $C^- \cup C^+$  es una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ .



- c) Si  $C \subset B(0, a^{-\frac{1}{2}})$ , entonces  $C^+$  y  $C^-$  son componentes semi-algebraicamente conexas distintas de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ .

*Demostración.*

- i) Por definición  $C^+ \cup C^- \subset Z(Q_a, R^{n+1})$ . Por otro lado, si  $p \in Z(Q_a, R^{n+1})$ , de la ecuación  $Q_a(p) = 0$  se tiene que  $\pi_{\leq n}(p) \in Z(Q, R^n)$ , y por lo tanto pertenece a alguna componente semi-algebraicamente conexa  $C$  de ese conjunto. Luego  $p \in C^+$  si  $\pi_{n+1}(p) \geq 0$  o  $p \in C^-$  en otro caso.
- ii) Claramente  $C^+$  y  $C^-$  son semi-algebraicos y disjuntos. Veamos que son semi-algebraicamente arco-conexos. Sean  $p, q \in C^+$ . Como  $\pi_{\leq n}(p), \pi_{\leq n}(q) \in C$ , existe un arco  $\gamma$  en  $C$  que los conecta. Luego el arco  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \sqrt{\frac{1}{a} - \|\gamma(t)\|^2})$  es un arco en  $C^+$  que conecta a  $p$  con  $q$ . Análogamente se procede con  $C^-$ .
- iii) Si estuvieran incluidos en la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto  $Z(Q_a, R^{n+1})$ , proyectando a las primeras  $n$  coordenadas tendríamos un absurdo.
- iv) a) Si  $C \subset \left\{ x \in R^n / \|x\| = a^{-\frac{1}{2}} \right\}$ , entonces  $\pi_{n+1}(C^+) = \{0\}$ . Si existiera  $p \in C^-$  entonces  $\pi_{n+1}(p) < 0$  y  $(\pi_{\leq n}(p), -\pi_{n+1}(p)) \in C^+$ , por lo tanto,  $0 \neq -\pi_{n+1}(p) \in \pi_{n+1}(C^+) = \{0\}$ , lo cual es un absurdo. Aplicando iii), se tiene que  $C^+$  es una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ .
- b) Si  $C \cap \left\{ x \in R^n / \|x\| = a^{-\frac{1}{2}} \right\} \neq \emptyset$  y  $C \cap B(0, a^{-\frac{1}{2}}) \neq \emptyset$ , entonces existen  $p, q \in C^+$  tal que  $0 < s = \pi_{n+1}(q)$  y  $0 = \pi_{n+1}(p)$ . Se tiene que  $\pi_{\leq n}(p), \pi_{\leq n}(q) \in C$  y por lo tanto se conectan en  $C$  con un arco  $\gamma$ . Luego por se tiene que  $\tilde{q} = (\pi_{\leq n}(q), -s) \in C^-$  y que  $(\gamma(t), -\sqrt{\frac{1}{a} - \|\gamma(t)\|^2})$  conecta  $p$  con  $\tilde{q}$  en  $C^- \cup C^+$ . Esto prueba que  $C^- \cup C^+$  es semi-algebraicamente arco-conexo, y por iii) resulta ser una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ .
- c) Si  $C \subset B(0, a^{-\frac{1}{2}})$ , entonces  $0 \notin \pi_{n+1}(C^+)$ . Si existiera una curva  $\gamma$  en  $C^+ \cup C^-$  que conecta un punto  $p \in C^+$  con un punto  $q \in C^-$  se tendría que  $\pi_{n+1}(\gamma)$  toma valores positivos y negativos pero nunca se anula, lo cual es un absurdo por el teorema 1.18.

□

**Proposición 2.20** *La construcción de un roadmap para un conjunto acotado que detallamos en la sección 2.2.1 aplicado al conjunto  $Z(Q_\epsilon, R \langle \epsilon \rangle^n)$ , con input  $N = \emptyset$ , produce un roadmap simétrico respecto del hiperplano  $X_{n+1} = 0$ .*

Este resultado sigue valiendo si el conjunto  $N$  es un conjunto simétrico respecto al hiperplano  $X_{n+1} = 0$ .

*Demostración.* Lo probamos por inducción en  $n$ .

Si  $n = 1$ ,  $Z(Q_\epsilon, R \langle \epsilon \rangle^2) = \left\{ (x, y) / x \text{ es raíz real de } Q \wedge y = \pm \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - x} \right\}$ , que es finito y simétrico respecto a  $Y = 0$ . El roadmap con esta construcción resulta ser el mismo conjunto.

Supongamos que vale para dimensión del espacio ambiente  $\leq n - 1$ .

Sea  $Q$  que dependa de  $n$  variables. Como  $Q_\epsilon$  es simétrico respecto de  $X_{n+1} = 0$ , si  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$  es un segmento de curva obtenido en la primera iteración, se tiene que  $(\gamma_1, \dots, -\gamma_{n+1})$  también lo será. Esto sucede pues el polinomio

$$(Q_\epsilon)_1(X_1, \dots, X_{n+1}) = -\xi G(X_1, \dots, X_n) + Q_\epsilon(X_1, \dots, X_{n+1})$$

verifica que su derivada respecto de  $X_{n+1}$  es de la forma  $X_{n+1}F(X_1, \dots, X_{n+1})$ , donde  $F$  es un polinomio cuyas potencias de  $X_{n+1}$  son pares. Cuando hagamos recursión en cada hiperplano distinguido, por hipótesis inductiva, el output del procedimiento aplicado en esa fibra también será simétrico.  $\square$

**Proposición 2.21** *Sea  $N$  un conjunto finito de puntos de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ . Sea  $N_a = \{p \in Z(Q_a, R^{n+1}) / \pi_{\leq n}(p) \in N\}$ . Supongamos que  $RM_a$  es un roadmap del conjunto  $Z(Q_a, R^{n+1})$  que pasa por los puntos de  $N_a$ . Entonces  $\pi_{\leq n}(RM_a)$  es un roadmap para el conjunto  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$  que pasa por los puntos de  $N$ .*

*Demostración.* Tenemos que ver tres cosas:

- Como  $RM_a$  pasa por  $N_a$  se tiene que  $\pi_{\leq n}(RM_a)$  pasa por  $N$ .
- Sea  $C$  una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ . Tenemos que ver que  $C \cap \pi_{\leq n}(RM_a)$  es semi-algebraicamente conexo:
  - Si  $C$  induce dos componentes semi-algebraicamente conexas de la forma  $C^+$  y  $C^-$ , se tiene que la intersección de cada una de estas componentes con  $RM_a$  es semi-algebraicamente conexa, pues  $RM_a$  es un roadmap de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ . Luego proyectando a las primeras  $n$  coordenadas se obtienen conjuntos semi-algebraicamente conexos. Veamos que  $\pi_{\leq n}(RM_a \cap C^+) = \pi_{\leq n}(RM_a) \cap C$ : Si  $x \in RM_a \cap C^+$  claramente se tiene que  $\pi_{\leq n}(x) \in \pi_{\leq n}(RM_a) \cap C$ . Al revés, si  $x \in \pi_{\leq n}(RM_a) \cap C$  se tiene que  $x = \pi_{\leq n}(q)$ , con  $q \in RM_a$ . Luego  $q \in C^+$  o  $q \in C^-$ , por lo cual  $q \in RM_a \cap C^+$  o  $q \in RM_a \cap C^-$ . Pero como  $\pi_{\leq n}(RM_a \cap C^+) = \pi_{\leq n}(RM_a \cap C^-)$ , en ambos casos,  $x = \pi_{\leq n}(q) \in \pi_{\leq n}(RM_a \cap C^+)$ .

- Si  $C$  induce una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q_a, R^{n+1})$  de la forma  $C^- \cup C^+$  (con  $C^-$  vacío o no), como antes, se tiene que  $(C^- \cup C^+) \cap RM_a$  es semi-algebraicamente conexo. Luego,  $\pi_{\leq n}((C^- \cup C^+) \cap RM_a)$  es semi-algebraicamente conexo, y procediendo como antes, se prueba que  $\pi_{\leq n}((C^- \cup C^+) \cap RM_a) = \pi_{\leq n}(RM_a \cap C)$ , con lo cual queda probado lo que queríamos.

- Para todo  $x \in R$ , para toda componente semi-algebraicamente conexa  $D$  de  $(Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}}))_x$ , tenemos que ver que  $\pi_{\leq n}(RM_a) \cap D \neq \emptyset$ .

Razonando de la misma forma que en la demostración de la proposición 2.19, se deduce que las componentes semi-algebraicamente conexas de  $(Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}}))_x$  están en biyección con las componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q_a, R^{n+1})_x \cap \{X_{n+1} \geq 0\}$ : para cada  $D$  componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})_x$  existe una componente semi-algebraicamente conexa  $C$  de  $Z(Q_a, R^{n+1})_x \cap \{X_{n+1} \geq 0\}$  tal que  $D = \pi_{\leq n}(C)$ . Como  $C \cap RM_a \neq \emptyset$  se tiene que  $\emptyset \neq \pi_{\leq n}(C \cap RM_a) \subset \pi_{\leq n}(C) \cap \pi_{\leq n}(RM_a) = D \cap \pi_{\leq n}(RM_a)$ . Se deduce de aquí lo que queríamos probar.

□

Teniendo en cuenta este resultado, un roadmap de un conjunto algebraico  $Z(Q, R^n)$  no acotado constará de dos familias de curvas. La primera familia se construye proyectando un roadmap de  $Z(Q_a, R^{n+1})$  para un valor de  $a$  convenientemente elegido, y esencialmente contiene un roadmap para todas las componentes semi-algebraicamente conexas acotadas del conjunto. A continuación, se agrega una segunda familia de curvas, obtenida básicamente haciendo decrecer el parámetro  $a$  hacia 0, de manera de extender el roadmap a las componentes no acotadas del conjunto.

En el capítulo 3, haremos una descripción más precisa del procedimiento.

### 2.2.3. Roadmap de conjuntos semi-algebraicos

En esta sección haremos un esbozo de cómo se adapta la teoría desarrollada para conjuntos algebraicos con el objeto de construir un roadmap para un tipo de conjuntos semi-algebraicos en particular, los conjuntos semi-algebraicos cerrados y básicos. Estos son los conjuntos de la forma

$$S = \{x \in R^n / Q(x) = 0 \wedge \bigwedge_{P \in \mathfrak{S}} P(x) \geq 0\},$$

donde  $\mathfrak{S} \cup \{Q\} \subset R[X_1, \dots, X_n]$ . En este caso pediremos además que  $Z(Q, R^n)$  sea acotado.

Para poder calcular un roadmap de un conjunto semi-algebraico acotado necesitamos el resultado análogo a la proposición 2.14 para este tipo de conjuntos. El problema es

que la noción de valor pseudo-crítico no nos es suficiente para probar esta propiedad, por lo que tendremos que introducir un nuevo concepto.

Dado un polinomio  $F \in R[X_1, \dots, X_n]$  tal que  $F(x) \geq 0$  para todo  $x \in R^n$ , consideremos como siempre el polinomio

$$F_1(X_1, \dots, X_n) = -\xi(X_1^{\bar{d}_1} + \dots + X_n^{\bar{d}_n} + X_2^2 + \dots + X_n^2 + 2n) + F(X_1, \dots, X_n),$$

donde  $gr(F) \leq d_1$ ,  $d_1 \geq \dots \geq d_n$ ,  $d_i$  una cota superior del grado de los monomios en los que aparece  $X_i$ ,  $\bar{d}_i$  un elemento par mayor que  $d_i$  y  $\bar{d} = (\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n)$ .

Seguiremos notando  $\pi : R^n \rightarrow R$  a la proyección a la primera coordenada.

**Definición 2.22** Un valor especial de  $\pi$  sobre  $Z(F, R^n)$  a un elemento  $c \in R$  para el cual existe un elemento  $y \in Z(F_1, R\langle \xi \rangle^n)$  que verifica  $\lim_\xi(\pi(y)) = c$ ,  $y$  es un mínimo local de  $g$  sobre  $Z(F_1, R\langle \xi \rangle^n)$  y  $g(y)$  es infinitesimal, donde la función  $g : Z(F_1, R\langle \xi \rangle^n) \rightarrow R\langle \xi \rangle$  se define como

$$g(X) = \frac{\sum_{2 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial X_i}\right)^2}{\sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial X_i}\right)^2}.$$

Notemos que un valor pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(F, R^n)$  resulta ser un valor especial de  $\pi$  sobre el mismo conjunto, pues si  $x$  es un punto pseudo-crítico de  $\pi$  sobre  $Z(F, R^n)$  se tiene que existe  $y$  punto crítico de  $\pi$  sobre  $Z(F_1, R\langle \xi \rangle^n)$  con  $\lim_\xi(y) = x$ . Luego,  $y \in Z(F_1, R\langle \xi \rangle^n)$ ,  $c = \pi(x) = \pi(\lim_\xi y) = \lim_\xi \pi(y)$  y  $g(y) = 0$ .

Si  $S$  es un conjunto semi-algebraico cerrado y básico de la forma

$$\{x \in R^n / Q(x) = 0 \wedge \bigwedge_{P \in \mathfrak{S}} P(x) \geq 0\},$$

llamaremos *valor especial de  $\pi$  sobre  $S$*  a un valor especial de  $\pi$  sobre  $Z(\mathfrak{S}' \cup \{Q\}, R^n)$  donde  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ , donde  $Z(\mathfrak{S}' \cup \{Q\}, R^n)$  es el conjunto algebraico definido por el polinomio  $Q^2 + \sum_{P \in \mathfrak{S}'} P^2$ .

El siguiente resultado es el análogo a la proposición 2.14 para conjuntos de este tipo y valores especiales:

**Proposición 2.23** Sean  $Z(Q, R^n)$  un conjunto algebraico acotado y  $S$  un conjunto semi-algebraico cerrado y básico definido por

$$S = \{x \in R^n / Q(x) = 0 \wedge \bigwedge_{P \in \mathfrak{S}} P(x) \geq 0\}.$$

Sea  $v \in [a, b]$ . Si  $C$  es una componente semi-algebraicamente conexa de  $S_{[a,b]}$  y  $[a, b] - \{v\}$  no contiene valores especiales de  $\pi$  sobre  $S$ , entonces  $C_v$  es semi-algebraicamente conexo.

Una demostración de este resultado puede hallarse en [3, Prop. 16.1].

Para calcular los valores especiales de  $\pi$  sobre un conjunto  $Z(F, R^n)$  sólo hay que notar que el conjunto

$$Z = \left\{ (x, \lambda) \in R \langle \xi \rangle^n \times R \langle \xi \rangle / F_1(x) = 0, \frac{\partial F_1}{\partial X_i}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial X_i}(x), i = 1, \dots, n \right\}$$

resulta ser un conjunto algebraico tal que su proyección a las primeras  $n$  coordenadas contiene a los mínimos locales de  $g$  sobre  $Z(F_1, R \langle \xi \rangle^n)$ .

Se puede probar (ver por ejemplo [3, Prop. 16.6]), que si  $C$  es una componente semi-algebraicamente conexa de  $Z$  sobre la cual  $g$  tiene un mínimo local infinitesimal, entonces  $\lim_{\xi} \pi(C)$  es un conjunto de un solo elemento. Esto nos da el siguiente procedimiento para calcular un conjunto que contenga a los valores especiales de  $\pi$  sobre  $Z(F_1, R \langle \xi \rangle^n)$ :

- Calcular un conjunto finito  $N$  formado por al menos un punto de cada componente semi-algebraicamente conexa de  $Z$ .
- Calcular el conjunto  $\lim_{\xi} N$ .
- Calcular  $\pi(\lim_{\xi} N)$ .

En realidad, el cálculo de valores especiales y puntos distinguidos sobre hiperplanos definidos por estos valores efectuado de manera paramétrica (en forma análoga a lo visto para puntos pseudo-críticos en el caso de conjuntos algebraicos) permite no sólo la obtención de un roadmap del conjunto  $S$  sino también de todos los posibles conjuntos no vacíos definidos por desigualdades no estrictas de los polinomios en  $\mathfrak{S}$  a 0. Esto da lugar a la noción de *roadmap uniforme* que presentamos a continuación (ver [3, Capítulo 16]). Utilizaremos la siguiente notación:

Sea  $Q \in R[X_1, \dots, X_n]$  un polinomio tal que  $Z(Q, R^n)$  es acotado. Consideremos  $\mathfrak{S} = \{P_1, \dots, P_s\}$  un conjunto de  $s$  polinomios de  $R[X_1, \dots, X_n]$ . Una *condición débil de signo*  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_s)$  sobre  $\mathfrak{S}$  es una  $s$ -upla de elementos de  $\{\leq, =, \geq\}$ . Notaremos

$$S_{\sigma} = \{x \in R^n / Q(x) = 0 \wedge P_i(x) \sigma_i 0 \forall i = 1, \dots, s\}.$$

Cada uno de los conjuntos  $S_{\sigma}$  resulta ser un conjunto semi-algebraico, cerrado y básico contenido en  $Z(Q, R^n)$ . Diremos que  $\sigma$  es una condición de signo *realizable sobre*  $Z(Q, R^n)$  si  $S_{\sigma} \neq \emptyset$ .

**Definición 2.24** *Un roadmap uniforme de  $(Q, \mathfrak{S})$  es un conjunto finito  $R(Q, \mathfrak{S})$  de segmentos de curvas abiertos y puntos en  $Z(Q, R^n)$  que verifica las siguientes condiciones:*

**URM1** *Los signos de los polinomios de  $\mathfrak{S}$  son constantes en cada segmento de curva.*

**URM2** *La intersección de  $R(Q, \mathfrak{S})$  con  $S_\sigma$  es un roadmap para  $S_\sigma$ , para toda condición débil de signo  $\sigma$  sobre  $\mathfrak{S}$  realizable sobre  $Z(Q, R^n)$ .*

En particular, si  $S = \{x \in R^n / Q(x) = 0 \wedge \wedge_{P \in \mathfrak{S}} P(x) \geq 0\}$  y  $\sigma = (\geq, \dots, \geq)$ , se tiene que  $R(Q, \mathfrak{S}) \cap S$  es un roadmap para  $S$ .

# Capítulo 3

## Algoritmos para el cálculo de roadmaps

En este capítulo nos ocuparemos del aspecto algorítmico del cálculo de roadmaps. En primer lugar, introducimos algunas nociones básicas sobre algoritmos y precisamos cómo se codifican los objetos con los que trabajarán nuestros algoritmos. A continuación, detallaremos los algoritmos para el cálculo de roadmaps presentados en el capítulo 2. Como aplicación, mostraremos cómo puede determinarse algorítmicamente si dos puntos de un conjunto algebraico pertenecen a la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto.

### 3.1. Algoritmos y codificación

Un algoritmo es un procedimiento que toma un conjunto finito de datos, que llamaremos *input*, y luego de una cantidad finita de pasos, en cada uno de los cuales efectúa ciertas operaciones prefijadas, produce otro conjunto finito de datos, que llamaremos *output*.

En nuestro caso, un input típico será un polinomio  $Q$  (o un conjunto finito de polinomios) que cumpla determinadas condiciones, como por ejemplo, que  $Z(Q, R^n)$  sea acotado, junto con, por ejemplo, uno o más puntos en este conjunto algebraico. Trabajaremos en un subcuerpo  $K$  efectivo de un cuerpo real cerrado  $R$ , es decir, un subcuerpo en el cual las operaciones aritméticas  $(+, -, \times, \div)$  y comparaciones  $(a < b, a = b)$  pueden realizarse algorítmicamente.

La *complejidad* de un algoritmo es una noción que se define para evaluar la eficiencia con la que se lleva a cabo la ejecución de este algoritmo en función de los datos ingresados como input. Es decir, es una medida por la que un algoritmo resultará mejor que otro.

Concretamente, la complejidad de un algoritmo es una cota superior para la cantidad de operaciones aritméticas y comparaciones en el algoritmo que se realizan para

obtener el output medida en función del tamaño del input.

A la hora de precisar un algoritmo que ejecutará una computadora, uno de los problemas a considerar es cómo ingresar los datos en la máquina. Para ello se necesita una manera de codificar los datos del input.

Por ejemplo, para codificar un polinomio en una variable de grado  $d$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}$  podremos pensar en la  $(d + 1)$ -upla de sus coeficientes, es decir, el  $i$ -ésimo elemento de la upla corresponde al coeficiente en el monomio de grado  $i - 1$ . De manera análoga podremos representar un polinomio de grado  $d$  en  $n$  variables. Teniendo en cuenta que hay  $N = \binom{d+n}{n}$  monomios de grado a lo sumo  $d$  en  $n$  variables, estableciendo un orden entre estos monomios (por ejemplo el lexicográfico), el polinomio puede codificarse como la  $N$ -upla de sus coeficientes (incluyendo los nulos) en este orden.

Si en cambio buscáramos una codificación para el número  $\sqrt{2}$ , podríamos pensar en un polinomio con coeficientes en  $\mathbb{Q}$  que lo tenga como raíz, digamos  $Q(X) = X^2 - 2$ , pero todavía faltaría diferenciar sus dos raíces. Para esto podríamos pensar en el signo de la primera derivada, que distingue a la raíz positiva de la negativa. Justamente esta idea para codificar elementos es la que queremos generalizar a cualquier cuerpo real cerrado  $R$  y a elementos de  $R^n$ . Para ello, introducimos lo siguiente:

Sea  $x \in R$ . Notamos el *signo de  $x$*  como  $sg(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $sg(x) = 0$  si  $x = 0$  y  $sg(x) = -1$  si  $x < 0$ . La siguiente proposición nos dice, en particular, que, como en el ejemplo anterior, se puede distinguir las raíces en  $R$  de un polinomio en  $R[X]$  por medio de sus derivadas.

**Proposición 3.1** *Sea  $f \in R[X]$  un polinomio de grado  $s$ , y  $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_s)$  una  $(s + 1)$ -upla de elementos de  $\{-1, 0, 1\}$ . Si  $f^{(0)} = f$  y  $f^{(i)}$  es la derivada  $i$ -ésima de  $f$ , el conjunto  $\sigma(f) = \{x \in R / sg(f^{(i)}(x)) = \sigma_i, \text{ para } i = 0, \dots, s\}$  es vacío, o un punto o un intervalo abierto.*

*Demostración.* Por inducción en  $s = gr(f)$ . Si  $s = 0$ , como  $f$  es una constante,  $\sigma(f)$  resulta ser vacío o  $R$ . Supongamos que la proposición vale para polinomios de grado menor o igual que  $s$ . Sea  $f$  con  $gr(f) = s + 1$  y  $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{s+1}) \in \{1, 0, -1\}^{s+2}$ . Consideremos el conjunto  $A = \{x \in R / sg(f^{(i)}(x)) = \sigma_i, \text{ para } i = 1, \dots, s + 1\}$ . Por hipótesis inductiva aplicada a  $f^{(1)}$ , este conjunto es vacío, o un punto o un intervalo abierto. Además se tiene que  $f^{(1)}$  tiene signo constante en  $A$  y por lo tanto,  $f$  es constante o estrictamente monótona en  $A$ . Se sigue que  $\{x \in A / sg(f(x)) = \sigma_0\}$  es vacío o un punto o un intervalo abierto. Como la intersección de intervalos abiertos es un intervalo abierto, se tiene que  $\sigma(f) = A \cap \{x \in R / sg(f(x)) = \sigma_0\}$  es vacío, o un punto o un intervalo abierto.  $\square$



**Definición 3.2** Sea  $f \in R[X]$  de grado  $s$  y  $x$  una raíz de  $f$  en  $R$ . Si  $\sigma_i = sg(f^{(i)}(x))$ , para  $i = 0, \dots, s$ , se tiene que  $\sigma(f) = \{x\}$ . En este caso llamamos a  $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_s)$  la codificación de Thom de  $x$ .

Finalmente, necesitaremos codificar conjuntos algebraicos finitos y curvas en  $R^n$ . Esto se hace habitualmente también por medio de polinomios univariados. Las nociones involucradas son las siguientes:

**Definición 3.3** Una  $n$ -representación univariada es una  $(n+2)$ -upla

$$u = (f(T), g_0(T), \dots, g_n(T))$$

de polinomios en  $R[T]$ , donde  $gr(g_i) < gr(f)$  y  $g_0$  es coprimo con  $f$ . Diremos que el punto  $p = (p_1, \dots, p_n) \in R[i]^n$  está asociado a  $u$  si existe una raíz  $t$  de  $f$  en  $R[i]$  tal que  $p_j = \frac{g_j(t)}{g_0(t)}$  para  $j = 1, \dots, n$ . Diremos que  $u$  representa al conjunto

$$\left\{ \left( \frac{g_1(t)}{g_0(t)}, \dots, \frac{g_n(t)}{g_0(t)} \right) \in R[i]^n / f(t) = 0 \right\}.$$

Una  $n$ -representación univariada real es un par  $(u, \sigma)$  donde  $u$  es una  $n$ -representación univariada y  $\sigma$  es la codificación de Thom de una raíz  $t_\sigma \in R$  de  $f$ . En este caso diremos que  $(u, \sigma)$  representa al punto  $p = \left( \frac{g_1(t_\sigma)}{g_0(t_\sigma)}, \dots, \frac{g_n(t_\sigma)}{g_0(t_\sigma)} \right)$ .

**Definición 3.4** Una  $n$ -representación univariada real sobre un intervalo  $(a, b)$  está especificada por  $(A, \alpha, B, \beta, u, \sigma)$ , donde:

- $a$  (resp.  $b$ ) es raíz de un polinomio univariado  $A$  (resp.  $B$ ) con codificación de Thom  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ),
- $u = (f(Y, T), g_0(Y, T), \dots, g_n(Y, T))$  es una  $n$ -representación univariada paramétrica, es decir, para cada  $y \in R$ ,  $u(y) = (f(y, T), g_0(y, T), \dots, g_n(y, T))$  es una  $n$ -representación univariada,
- $\sigma$  es una  $gr(f)$ -upla de elementos de  $\{-1, 0, 1\}$  tal que, para todo  $y \in (a, b)$ , existe una raíz real  $t_\sigma(y)$  de  $f(y, T)$  con codificación de Thom  $\sigma$ .

A una  $n$ -representación univariada sobre  $(a, b)$  le asociamos un segmento de curva parametrizado por el intervalo  $(a, b)$  sobre el eje  $Y$ , más precisamente, una función continua semi-algebraica  $\phi : (a, b) \rightarrow R^n$  tal que  $\phi(y) = \left( \frac{g_1(y, t_\sigma(y))}{g_0(y, t_\sigma(y))}, \dots, \frac{g_n(y, t_\sigma(y))}{g_0(y, t_\sigma(y))} \right)$ .

## 3.2. Cálculo de roadmaps de conjuntos algebraicos

### 3.2.1. Conjuntos algebraicos acotados

El algoritmo que detallamos a continuación es la piedra fundamental en el cálculo de un roadmap para un conjunto algebraico. Nos permitirá construir los segmentos de curvas en cada paso de la recursión del algoritmo.

---

#### ALGORITMO [CCS]: Cálculo de segmentos de curvas

##### Input:

- Un polinomio  $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ , donde  $K$  es un subcuerpo efectivo de  $R$ , tal que  $Q \geq 0$  y  $Z(Q, R^n)$  es acotado, y
- un conjunto finito  $N$  de puntos contenidos en  $Z(Q, R^n)$ .

##### Output:

- Puntos ordenados  $v_1 < \dots < v_l$ , que son los valores distinguidos, representados por una lista ordenada  $(f_1, \sigma_1), \dots, (f_l, \sigma_l)$  donde  $v_j$  es raíz del polinomio  $f_j$  y  $\sigma_j$  la codificación de Thom de  $v_j$ .
- Para cada  $j = 1, \dots, l$ 
  - a) Un conjunto finito de puntos  $P_j$  en  $Z(Q, R^n)_{v_j}$  cuyos elementos son los puntos distinguidos en la fibra  $X_1 = v_j$ , codificados por un conjunto finito  $D_j$  de  $n$ -representaciones univariadas reales.
  - b) Un conjunto finito  $\Gamma_j$  de curvas de la forma

$$\gamma : (v_j, v_{j+1}) \rightarrow Z(Q, R^n)_{(v_j, v_{j+1})},$$

Esto se hará a partir de los segmentos de curvas de un conjunto finito  $C_j$  de  $n$ -representaciones univariadas sobre el intervalo  $(v_j, v_{j+1})$ .

- c) Una lista de pares formados por una curva de segmento y un punto distinguido que pertenezca a la clausura de la curva. Esto se hará a partir de una lista de pares de un elemento de  $C_j$  y otro de  $D_j$ .

El conjunto de valores distinguidos, puntos distinguidos y curvas distinguidas que se obtienen verifican las siguientes propiedades:

- CS1: Para todo  $v \in R$  el conjunto de puntos de  $a$ ) y curvas distinguidas de  $b$ ) intersecan toda componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)_v$ , siempre que  $Z(Q, R^n)_v \neq \emptyset$ .
- CS2: Para cada curva distinguida de  $b$ ) sobre un intervalo con punto final un valor distinguido  $v_j$  del output, existe un punto distinguido  $p$  de  $a$ ) en  $Z(Q, R^n)_{v_j}$  que pertenece a la clausura de dicha curva.
- CS3: El conjunto de valores distinguidos contiene a la proyección a la primera coordenada de todos los elementos del conjunto  $N$ .

**Procedimiento:**

1. Calcular los valores pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ . Los ponemos en un conjunto que llamaremos  $V$ .
2. Pensando que  $Q \in R[X_1][X_2, \dots, X_n]$ , calcular el conjunto de los puntos pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^{n-1})$ . Obtenemos representaciones univariadas parametrizadas por  $X_1$  y a partir de la subrutina de determinación de signos, una partición del eje  $X_1$ . Esto nos permite interpretar las representaciones univariadas como curvas definidas en cada intervalo de la partición. Llamemos  $P$  al conjunto de los puntos finales de las curvas.
3. Calcular las proyecciones al eje  $X_1$  de los elementos de  $P$  y de los elementos del input  $N$ . Agregar estas proyecciones al conjunto  $V$  del paso 1.
4. Ordenar en forma creciente los elementos del conjunto  $V$ . Los notaremos  $v_1 < \dots < v_l$  y serán los valores distinguidos.
5. Para cada  $j = 1, \dots, l - 1$ , interpretar el output de paso 2) como segmentos de curvas definidas en el intervalo  $(v_j, v_{j+1})$ . Para cada  $j$ , sea  $\Gamma_j$  el conjunto finito de curvas definidas en el intervalo  $(v_j, v_{j+1})$ . El conjunto de todas estas curvas, para todo  $j = 1, \dots, l - 1$ , forma el conjunto  $\Gamma$  de curvas distinguidas.
6. Para cada  $j = 1, \dots, l$ , calcular  $P_j$ , el conjunto de intersecciones de los hiperplanos  $X_1 = v_j$  con las curvas distinguidas junto con los puntos de  $N_{v_j}$ . Estos serán los conjuntos de puntos distinguidos en la fibra de  $v_j$ .
7. Para cada  $j = 2, \dots, l$ , para cada  $p \in P_j$ , calcular el conjunto de curvas  $\gamma$  en  $\Gamma_{j-1}$  tales que  $p$  es un extremo de  $\gamma$ . Para cada  $j = 1, \dots, l - 1$ , para cada  $p \in P_j$ , calcular el conjunto de curvas  $\gamma$  en  $\Gamma_j$  tales que  $p$  es un extremo de  $\gamma$ .

---

A continuación explicamos brevemente cómo llevar a cabo los pasos más importantes del algoritmo:

- Cálculo de puntos pseudo-críticos de  $\pi$  sobre  $Z(Q, R^n)$ :

Primero tenemos que encontrar los puntos críticos del polinomio  $Q_1$  sobre  $Z(Q_1, R(\xi)^n)$ . Esto corresponde a resolver el siguiente sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial X_i} = 0, \text{ para } i = 2, \dots, n \end{cases} .$$

Recordemos que debe haber finitas soluciones por el teorema de Sard semi-algebraico. A cada una de las soluciones le aplicamos  $\text{lím}_\xi$ , obteniendo así los puntos buscados.

Este procedimiento lo hacemos en el paso 1 y lo volvemos a repetir en el paso 2 pero trabajando en forma paramétrica, es decir, tomando a  $X_1$  como parámetro.

Un algoritmo específico para efectuar este procedimiento puede verse en [3, Algoritmos 12.10 y 12.14] (ver también [13]).

- Determinación de signos ([3, Algoritmo 12.18]):

Si tomamos como input un subconjunto finito  $S$  de  $R$  y una familia finita  $P$  de polinomios de  $R[X]$ , el output de esta subrutina es la lista de condiciones de signo no vacías de la familia  $P$  en los elementos de  $S$ .

En particular, esta subrutina permite calcular la codificación de Thom de un elemento  $x \in R$  que es raíz de un polinomio  $f$ : basta tomar  $S = \{x\}$  y  $P = \{f, f^{(1)}, \dots, f^{(d)}\}$ , donde  $d$  es el grado de  $f$ .

Esta subrutina se aplica cada vez que haya que calcular la codificación de Thom de algún elemento, como en los pasos 1) y 3).

- Raíces reales parametrizadas ([3, Algoritmo 11.19]):

Esta subrutina tiene como input una  $n$ -representación univariada  $u$  parametrizada por el parámetro  $Y$ . El output es una familia finita  $A_u$  de polinomios en  $R[Y]$ , cuyas raíces producen una partición finita del eje  $Y$ , y un conjunto finito de  $n$ -representaciones univariadas sobre intervalos y puntos de esta partición.

Si  $u = (f, g_0, \dots, g_n)$ , donde  $f, g_i \in R[Y, T]$ , se tiene que en cada intervalo de la partición se mantienen:

- los signos de los polinomios de  $A_u$ ,
- el número de raíces de  $f$  y
- la codificación de Thom de las raíces reales de  $f(-, T)$ .

La familia  $A_u$  consiste de las subresultantes principales entre  $f$  y cada una de sus sucesivas derivadas respecto a  $T$ .

Básicamente lo que hace es partir el conjunto de curvas asociado a  $u$  en segmentos de curvas definidos en intervalos de  $R$  más pequeños donde para cada valor del parámetro  $Y$  en un intervalo se conserva la cantidad de segmentos de curvas.

Esta rutina es la que aplicamos al output de paso 2).

Ahora que ya vimos cómo construir los segmentos de curvas, detallamos el algoritmo para el cálculo del roadmap de un conjunto algebraico acotado:

---

**ALGORITMO [CRCAA]: Cálculo del roadmap de un conjunto algebraico acotado.**

**Input:**

- Un polinomio  $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ , donde  $K$  es un subcuerpo efectivo de  $R$ ,  $Q \geq 0$  y  $Z(Q, R^n)$  es acotado y
- un conjunto finito  $N$  de puntos contenidos en  $Z(Q, R^n)$ , a partir de un conjunto finito de  $n$ -representaciones univariadas reales.

**Output:**

- Un roadmap  $R(Z(Q, R^n), N)$  del conjunto  $Z(Q, R^n)$  que contiene los puntos de  $N$ .

**Procedimiento:**

1. Aplicar al input dado el algoritmo [CCS] para el cálculo de segmentos de curvas.  
Obtenemos así  $l \in \mathbb{N}$ ,  $v_1 < \dots < v_l$  en  $R$  y para cada  $j = 1, \dots, l$ , los conjuntos  $P_j$  y  $\Gamma_j$  de puntos y curvas distinguidas.
  2. Para cada  $j = 1, \dots, l$ , aplicar recursión con input  $Q(v_j, X_2, \dots, X_n)$  y  $N = P_j$ .
- 

El análisis de la complejidad del algoritmo excede el contenido de esta tesis, pero puede hallarse en [3, Algoritmo 15.3]. El resultado es el siguiente:

**Teorema 3.5** *Existe un algoritmo que, dado un polinomio  $Q \in D[X_1, \dots, X_n]$  de grado  $d$  con  $Z(Q, \mathbb{R}^n)$  acotado y un conjunto finito  $N$  de puntos en  $Z(Q, \mathbb{R}^n)$ , calcula un roadmap para el conjunto  $Z(Q, \mathbb{R}^n)$  que pasa por  $N$ . El número total de operaciones aritméticas en  $K$  que efectúa el algoritmo es de orden  $d^{O(n^2)}$ .*

Veamos cómo funciona el algoritmo en un ejemplo en  $\mathbb{R}^3$  haciendo las cuentas a mano:

**Ejemplo.** *Cálculo de un roadmap para un toro en  $\mathbb{R}^3$ .*

Consideremos el polinomio

$$Q(X_1, X_2, X_3) = (X_1^2 + X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 3)^2 - 16(X_1^2 + X_2^2),$$

y llamemos  $Z$  al conjunto  $Z(Q, \mathbb{R}^3)$ . Este conjunto es lo que conocemos como un toro en  $\mathbb{R}^3$ . Será conveniente pensarlo como girar alrededor del eje  $X_3$  el círculo de centro  $(0, 2, 1)$  y radio 1 incluido en el plano  $X_2 = 0$ . En particular,  $Q(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^3$  y  $Z$  resulta ser acotado.

Notemos que este conjunto es regular, luego alcanzará con trabajar con el conjunto de valores críticos de  $\pi$  sobre  $Z$ . Consideremos el punto  $(2, 0, 2) \in Z$  y construyamos un roadmap para el conjunto  $Z$  que pase por este punto utilizando el algoritmo que antes detallamos:

Input: El polinomio  $Q$  y el conjunto  $N = \{(2, 0, 2)\}$ .

- 1) Calculamos los valores críticos de  $\pi$  sobre  $Z$ :

Buscamos los  $x = (x_1, x_2, x_3) \in Z$  tales que  $\frac{\partial Q}{\partial X_i}(x) = 0$ , para  $i = 2, 3$ , es decir, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} (X_1^2 + X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 3)^2 - 16(X_1^2 + X_2^2) = 0 \\ 2(X_1^2 + X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 3)2X_2 - 32X_2 = 0 \\ 2(X_1^2 + X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 3)2(X_3 - 1) = 0 \end{cases} .$$

Las soluciones de este sistema son los puntos  $(3, 0, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)$  y  $(-3, 0, 1)$ . Luego,  $V = \{-3, -1, 1, 3\}$ .

- 2) Para cada  $X_1$  calculamos los valores críticos de  $\pi$  sobre  $Z$ . Tenemos que resolver en  $Z$  la ecuación  $\frac{\partial Q}{\partial X_3} = 0$ : se obtiene el sistema

$$\begin{cases} (X_1^2 + X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 3)^2 - 16(X_1^2 + X_2^2) = 0 \\ 2(X_1^2 + X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 3)2(X_3 - 1) = 0 \end{cases} .$$

Las soluciones son los puntos de la forma  $(x_1, x_2, 1) \in Z$ , lo que nos lleva a la ecuación

$$(X_1^2 + X_2^2 - 9)(X_1^2 + X_2^2 - 1) = 0.$$

Se tiene entonces que, para cada  $X_1$ , los puntos buscados son de la forma  $(X_1, \pm\sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ , con  $X_1 \in (-3, -1)$ ,  $X_1 \in (1, 3)$  y  $(X_1, \pm\sqrt{1 - X_1^2}, 1)$ , con  $-1 \leq X_1 \leq 1$ . Nuestros intervalos serán entonces  $(-3, -1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(1, 3)$  y los puntos sobre los extremos del intervalo son  $(-3, 0, 1)$ ,  $(-1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  y  $(3, 0, 1)$ . Estos puntos forman el conjunto  $P$ .

3) Calculamos las proyecciones al eje  $X_1$  de los puntos de  $P$  y de  $N$  y los agregamos a  $V$ , ahora obtenemos un nuevo conjunto  $V = \{-3, -1, 1, 2, 3\}$ .

4) Llamamos  $v_1 = -3$ ,  $v_2 = -1$ ,  $v_3 = 1$ ,  $v_4 = 2$  y  $v_5 = 3$ .

5) Tenemos las curvas

- $\gamma_1^1 : (-3, -1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_1^1(X_1) = (X_1, \sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_1^2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_1^2(X_1) = (X_1, \sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_1^3 : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_1^3(X_1) = (X_1, \sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_1^4 : (2, 3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_1^4(X_1) = (X_1, \sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_2^1 : (-3, -1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_2^1(X_1) = (X_1, -\sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_2^2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_2^2(X_1) = (X_1, -\sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_2^3 : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_2^3(X_1) = (X_1, -\sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_2^4 : (2, 3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_2^4(X_1) = (X_1, -\sqrt{9 - X_1^2}, 1)$ ,
- $\gamma_3^2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_3^2(X_1) = (X_1, \sqrt{1 - X_1^2}, 1)$  y
- $\gamma_4^2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_4^2(X_1) = (X_1, -\sqrt{1 - X_1^2}, 1)$ .

Luego obtenemos los conjuntos  $\Gamma_j = \{\gamma_i^j : i\}$ .

6) Obtenemos los conjuntos:

- $P_1 = \{(-3, 0, 1)\}$ ,
- $P_2 = \{(-1, 0, 1), (-1, \sqrt{8}, 1), (-1, -\sqrt{8}, 1)\}$ ,
- $P_3 = \{(1, 0, 1), (1, \sqrt{8}, 1), (1, -\sqrt{8}, 1)\}$ ,
- $P_4 = \{(2, 0, 2), (2, \sqrt{5}, 1), (2, -\sqrt{5}, 1)\}$  y
- $P_5 = \{(3, 0, 1)\}$ .

7) Obtenemos las adyacencias de:

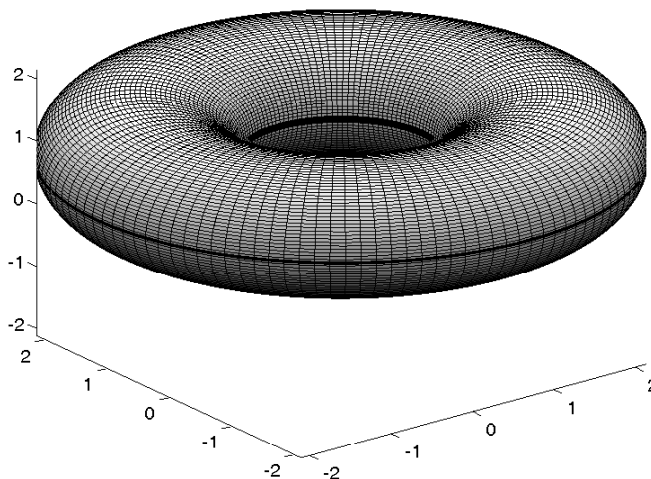
- $(-3, 0, 1)$  con  $\gamma_1^1$ ,
- $(-3, 0, 1)$  con  $\gamma_2^1$ ,

- $(-1, 0, 1)$  con  $\gamma_3^2$ ,
- $(-1, 0, 1)$  con  $\gamma_4^2$ ,
- $(-1, \sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_1^3$ ,
- $(-1, -\sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_2^3$ ,
- $(1, \sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_1^3$ ,
- $(1, -\sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_2^3$ ,
- $(2, \sqrt{5}, 1)$  con  $\gamma_1^4$  y
- $(2, -\sqrt{5}, 1)$  con  $\gamma_2^4$ .

y de:

- $(-1, -\sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_1^1$ ,
- $(-1, \sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_2^1$ ,
- $(1, 0, 1)$  con  $\gamma_3^2$ ,
- $(1, 0, 1)$  con  $\gamma_4^2$ ,
- $(1, -\sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_1^2$ ,
- $(1, \sqrt{8}, 1)$  con  $\gamma_2^2$ ,
- $(2, \sqrt{5}, 1)$  con  $\gamma_1^3$ ,
- $(2, -\sqrt{5}, 1)$  con  $\gamma_2^3$ ,
- $(3, 0, 1)$  con  $\gamma_1^4$  y
- $(3, 0, 1)$  con  $\gamma_2^4$ .

Observar que las curvas calculadas hasta ahora no pasan por el punto del input  $N$ .





Ahora hay que aplicar recursión en cada  $v_j$ :

- Para  $j = 1, 5$ ,  $Z(Q, R^n)_{v_j}$  es un punto: los correspondientes a  $P_1$  y a  $P_5$ .
- Para  $j = 2, 3$ , por la simetría del conjunto los cálculos para ambos valores son análogos. Haremos solamente el caso  $j = 3$ : Hay que trabajar en el conjunto  $Z(Q, R^3)_{v_3}$ . El input será ahora el polinomio

$$\tilde{Q}(X_2, X_3) = Q(1, X_2, X_3) = (X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 4)^2 - 16(1 + X_2^2)$$

y el conjunto

$$N = P_3 = \{(1, 0, 1), (1, \sqrt{8}, 1), (1, -\sqrt{8}, 1)\}.$$

1) Hay que resolver

$$\begin{cases} X_1 = 1 \\ \tilde{Q}(X_2, X_3) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial X_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_3 = 1 \\ X_2^2(X_2^2 - 8) = 0 \end{cases},$$

lo que nos da como solución los puntos  $(1, \pm\sqrt{8}, 1)$  y  $(1, 0, 1)$ .

2) Para cada  $X_2$  hay que resolver el sistema  $\begin{cases} X_1 = 1 \\ \tilde{Q}(X_2, X_3) = 0 \end{cases}$ .

Las soluciones son entonces los puntos de la forma

$$(1, X_2, \pm\sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 1} - (4 + X_2^2) + 1}), \text{ con } X_2 \in (-\sqrt{8}, 0) \text{ o } X_2 \in (0, \sqrt{8}).$$

3) Obtenemos el conjunto  $V = \{-\sqrt{8}, 0, \sqrt{8}\}$ .

4) Llamamos  $v_1 = -\sqrt{8}$ ,  $v_2 = 0$  y  $v_3 = \sqrt{8}$ .

5) Obtenemos las curvas:

$$\begin{aligned} & - \gamma_{1,1}^1 : (-\sqrt{8}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ & \quad \gamma_{1,1}^1(X_2) = (1, X_2, \sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 1} - (4 + X_2^2) + 1}), \\ & - \gamma_{1,2}^1 : (-\sqrt{8}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ & \quad \gamma_{1,2}^1(X_2) = (1, X_2, -\sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 1} - (4 + X_2^2) + 1}), \\ & - \gamma_{1,1}^2 : (0, \sqrt{8}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ & \quad \gamma_{1,1}^2(X_2) = (1, X_2, \sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 1} - (4 + X_2^2) + 1}) \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \gamma_{1,2}^2 : (0, \sqrt{8}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\
 & \gamma_{1,2}^2(X_2) = (1, X_2, -\sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 1} - (4 + X_2^2) + 1}).
 \end{aligned}$$

6) Obtenemos los conjuntos:

$$\begin{aligned}
 & - P_1 = \{(1, -\sqrt{8}, 1)\}, \\
 & - P_2 = \{(1, 0, 1)\} \text{ y} \\
 & - P_3 = \{(1, \sqrt{8}, 1)\}.
 \end{aligned}$$

7) Obtenemos las adyacencias:

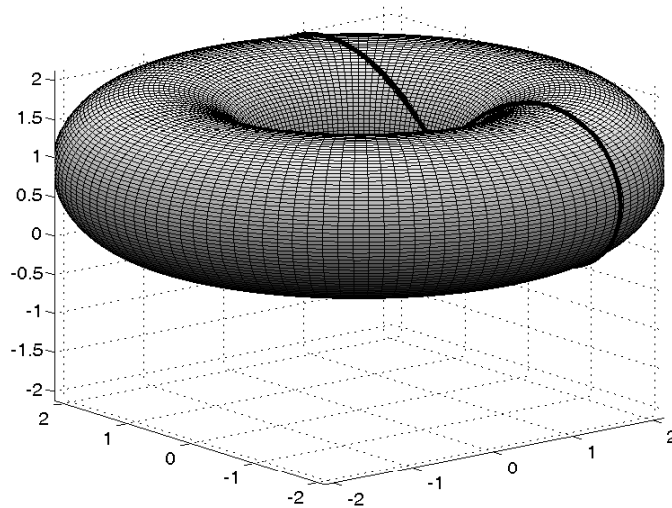
$$\begin{aligned}
 & - (1, -\sqrt{8}, 1) \text{ con } \gamma_{1,1}^1, \\
 & - (1, -\sqrt{8}, 1) \text{ con } \gamma_{1,2}^1, \\
 & - (1, 0, 1) \text{ con } \gamma_{1,1}^2 \text{ y} \\
 & - (1, 0, 1) \text{ con } \gamma_{1,2}^2.
 \end{aligned}$$

y de:

$$\begin{aligned}
 & - (1, 0, 1) \text{ con } \gamma_{1,1}^1, \\
 & - (1, 0, 1) \text{ con } \gamma_{1,2}^1, \\
 & - (1, \sqrt{8}, 1) \text{ con } \gamma_{1,1}^2 \text{ y} \\
 & - (1, \sqrt{8}, 1) \text{ con } \gamma_{1,2}^2.
 \end{aligned}$$

Ahora hay que hacer recursión en el conjunto de soluciones de:

$$\begin{aligned}
 & - Q(1, -\sqrt{8}, X_3) = 0, \text{ pero éste es el conjunto } \{(1, -\sqrt{8}, 1)\}. \\
 & - Q(1, \sqrt{8}, X_3) = 0, \text{ pero éste es el conjunto } \{(1, \sqrt{8}, 1)\}. \\
 & - Q(1, 0, X_3) = 0, \text{ pero éste es el conjunto } \{(1, 0, 1)\}.
 \end{aligned}$$



- Para  $j = 4$ : el input es ahora el polinomio

$$\widehat{Q}(X_2, X_3) = Q(2, X_2, X_3) = (X_2^2 + (X_3 - 1)^2 + 7)^2 - 16(4 + X_2^2)$$

y el conjunto

$$N = \{(2, 0, 2), (2, \sqrt{5}, 1), (2, -\sqrt{5}, 1)\}.$$

- 1) Hay que resolver

$$\begin{cases} X_1 = 2 \\ \widehat{Q}(X_2, X_3) = 0 \\ \frac{\partial \widehat{Q}}{\partial X_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 2 \\ X_3 = 1 \\ (X_2^2 + 3)(X_2^2 - 5) = 0 \end{cases},$$

lo que nos da como solución los puntos  $(2, \pm\sqrt{5}, 1)$ .

- 2) Para cada  $X_2$  hay que resolver el sistema  $\begin{cases} X_1 = 2 \\ \widehat{Q}(X_2, X_3) = 0 \end{cases}$ .

La soluciones son entonces los puntos de la forma

$$(2, X_2, \pm\sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 4} - (7 + X_2^2) + 1}), \text{ con } X_2 \in (-\sqrt{5}, 0) \text{ o } X_2 \in (0, \sqrt{5}).$$

- 3) Obtenemos el conjunto  $V = \{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$ .

- 4) Llamamos  $v_1 = -\sqrt{5}$ ,  $v_2 = 0$  y  $v_3 = \sqrt{5}$ .

- 5) Obtenemos las curvas:

$$- \gamma_{4,1}^1 : (-\sqrt{5}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma_{4,1}^1(X_2) = (2, X_2, \sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 4} - (7 + X_2^2) + 1}),$$

$$- \gamma_{4,2}^1 : (-\sqrt{5}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma_{4,2}^1(X_2) = (2, X_2, -\sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 4} - (7 + X_2^2) + 1}),$$

$$- \gamma_{4,1}^2 : (0, \sqrt{5}) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma_{4,1}^2(X_2) = (2, X_2, \sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 4} - (7 + X_2^2) + 1}) \text{ y}$$

$$- \gamma_{4,2}^2 : (0, \sqrt{5}) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma_{4,2}^2(X_2) = (2, X_2, -\sqrt{4\sqrt{X_2^2 + 4} - (7 + X_2^2) + 1}).$$

- 6) Obtenemos los conjuntos:

$$- P_1 = \{(2, -\sqrt{5}, 1)\},$$

- $P_2 = \{(2, 0, 2), (2, 0, 0)\}$ . Acá podemos observar que el punto  $(2, 0, 0)$  aparece por pedir que el roadmap pase por el punto  $(2, 0, 2)$ .

$$- P_3 = \{(2, \sqrt{5}, 1)\}.$$

7) Obtenemos las adyacencias:

$$- (2, -\sqrt{5}, 1) \text{ con } \gamma_{4,1}^1,$$

$$- (2, -\sqrt{5}, 1) \text{ con } \gamma_{4,2}^1,$$

$$- (2, 0, 2) \text{ con } \gamma_{4,1}^2 \text{ y}$$

$$- (2, 0, 0) \text{ con } \gamma_{4,2}^2.$$

y de:

$$- (2, 0, 2) \text{ con } \gamma_{4,1}^1,$$

$$- (2, 0, 0) \text{ con } \gamma_{4,2}^1,$$

$$- (2, \sqrt{5}, 1) \text{ con } \gamma_{4,1}^2 \text{ y}$$

$$- (2, \sqrt{5}, 1) \text{ con } \gamma_{4,2}^2.$$

Ahora hay que hacer recursión en los conjuntos:

$$- Q(2, -\sqrt{5}, X_3) = 0, \text{ pero éste es el conjunto } \{(2, -\sqrt{5}, 1)\}.$$

$$- Q(2, \sqrt{5}, X_3) = 0, \text{ pero éste es el conjunto } \{(2, \sqrt{5}, 1)\}.$$

$$- Q(2, 0, X_3) = 0, \text{ pero éste es el conjunto } \{(2, 0, 2), (2, 0, 0)\}.$$

Output: El conjunto de curvas

$$\{\gamma_i^j : i, j\} \cup \{\gamma_{i,k}^j : i, j, k\},$$

junto con los conjuntos de puntos

$$\{(-3, 0, 1)\}, \{(-1, 0, 1), (-1, \sqrt{8}, 1), (-1, -\sqrt{8}, 1)\}, \{(1, 0, 1), (1, \sqrt{8}, 1), (1, -\sqrt{8}, 1)\},$$

$$\{(3, 0, 1)\} \text{ y } \{(2, 0, 2), (2, 0, 0), (2, \sqrt{5}, 1), (2, -\sqrt{5}, 1)\},$$

que forman un roadmap para el conjunto  $Z(Q, \mathbb{R}^3)$ .

### 3.2.2. Conjuntos algebraicos no acotados

Como vimos en la sección 2.2.2, cuando  $Z(Q, R^n)$  no es acotado, considerando el polinomio

$$Q_\epsilon(X_1, \dots, X_{n+1}) = Q^2 + (\epsilon(X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2) - 1)^2$$

obtenemos un conjunto algebraico acotado  $Z(Q_\epsilon, R \langle \epsilon \rangle^{n+1})$ . Más aún, para cada  $a \in R$ ,  $a > 0$ ,  $Z(Q_a, R^{n+1})$  es acotado, y un roadmap para este conjunto nos permite obtener uno de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$  (ver proposición 2.20).

Al elegir el valor del parámetro en  $a \in R$  requeriremos que satisfaga una condición adicional que permite un mayor control de las componentes semi-algebraicamente conexas de  $Z(Q, R^n) \cap \overline{B}(0, a^{-\frac{1}{2}})$ . Esto está garantizado por la siguiente proposición, cuya demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [11, Proposición 10].

**Proposición 3.6** *Existe un elemento  $r_0 \in R$ ,  $r_0 > 0$  tal que para todo  $r \geq r_0$  y para toda componente semi-algebraicamente conexa  $C$  de  $Z(Q, R^n)$  se tiene que  $C \cap B(0, r)$  es un conjunto semi-algebraicamente conexo. En particular se puede tomar  $r$  que satisfaga lo anterior y tal que  $B(0, r)$  contenga a toda componente semi-algebraicamente conexa acotada de  $Z(Q, R^n)$ .*

El siguiente resultado nos permitirá obtener un roadmap de  $Z(Q_a, R^{n+1})$ , para  $a \in R$ ,  $a > 0$ , convenientemente elegido, a partir de un roadmap de  $Z(Q_\epsilon, R \langle \epsilon \rangle^{n+1})$ :

**Proposición 3.7** *Sea  $P(X) = a_p X^p + \dots + a_q X^q \in R[X]$ , con  $p > q$  y  $a_p, a_q \neq 0$ . Denotemos  $C(P) = \sum_{q \leq i \leq p} \left| \frac{a_i}{a_p} \right|$  y  $c(P) = \left( \sum_{q \leq i \leq p} \left| \frac{a_i}{a_q} \right| \right)^{-1}$ . Entonces, si  $x \in R$  es una raíz no nula de  $P$ , se tiene que  $c(P) \leq |x| \leq C(P)$ .*

*Demostración.* Si  $x$  es raíz no nula de  $P$  se tiene que  $a_p x = -\sum_{q \leq i \leq p-1} a_i x^{i-p+1}$ .

- Si  $|x| \geq 1$ ,  $|a_p x| \leq \sum_{q \leq i \leq p-1} |a_i| |x|^{i-p+1} \leq \sum_{q \leq i \leq p-1} |a_i|$ . Luego, vale el resultado.
- Si  $|x| \leq 1$  se tiene que  $|x| \leq 1 \leq \left| \frac{a_p}{a_p} \right| \leq C(P)$ .

Para ver el resultado con  $c(P)$ , basta con tomar el polinomio recíproco  $F(X) = X^p P(\frac{1}{X})$ : como  $x$  es raíz de  $P$  si y sólo si  $\frac{1}{x}$  es raíz de  $F$  se tiene que  $\frac{1}{x} \leq C(F) = c(P)^{-1}$  y por lo tanto  $c(P) \leq x$ .  $\square$

### ALGORITMO [CRCANA]: Cálculo del roadmap de un conjunto algebraico no acotado.

#### Input:

- Un polinomio  $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ , donde  $K$  es un subcuerpo efectivo de  $R$  y  $Q \geq 0$  y
- un conjunto finito  $N$  de puntos contenidos en  $Z(Q, R^n)$ , a partir de un conjunto finito de  $n$ -representaciones univariadas reales.

#### Output:

- Un roadmap  $M$  del conjunto  $Z(Q, R^n)$  que contiene los puntos de  $N$ .

#### Procedimiento:

1. Calcular el conjunto  $N_\epsilon = \{x \in R \langle \epsilon \rangle^{n+1} / Q_\epsilon(x) = 0 \text{ y } \pi_{\leq n}(x) \in N\}$ .

2. Aplicar el algoritmo [CRCAA] (cálculo del roadmap de un conjunto algebraico acotado) con input  $Q_\epsilon$  y  $N_\epsilon$ .
3. Si llamamos  $\Delta$  al conjunto de todos los polinomios en  $R[\xi]$  cuyos signos han sido determinados en el paso 2), calcular  $a' = \min \{c(P) / P \in \Delta\}$ . Sea  $r > 0$  como en la proposición 3.6. Tomar  $a = \min \left\{ a', r^{-\frac{1}{2}} \right\}$ .
4. Reemplazar  $\epsilon$  por  $a$  en el roadmap obtenido en el paso 2. Llamamos a este conjunto  $RM_a$ .
5. Calcular  $\pi_{\leq n}(RM_a)$ , la proyección a las primeras  $n$  coordenadas del conjunto  $RM_a$ .
6. Calcular todos los puntos del roadmap del conjunto  $Z(Q_\epsilon, R\langle \epsilon \rangle^{n+1})$  que verifican  $\epsilon(y_1^2 + \dots + y_n^2) = 1$ . Cada uno de ellos está descrito por una representación univariada que depende de  $\epsilon$ . Agregar al conjunto  $\pi_{\leq n}(RM_a)$  obtenido en el paso 5 las curvas que se obtienen al considerar a  $\epsilon$  como una variable en el intervalo  $(0, a]$  en el segmento de curva asociado a estas representaciones.

El conjunto  $M$  está formado por las curvas y puntos obtenidos al completar los pasos 5 y 6.

La correctitud del algoritmo es consecuencia de los resultados probados en la sección 2.2.2, la elección del valor de  $a$  y la correctitud del algoritmo [CRCAA]:

**Proposición 3.8** *Sea  $Q \in R[X_1, \dots, X_n]$  y sea  $N$  un conjunto finito de puntos en  $Z(Q, R^n)$ . Entonces, el conjunto  $M$  que calcula el algoritmo [CRCANA] resulta ser un roadmap del conjunto  $Z(Q, R^n)$  que contiene a los puntos de  $N$ .*

El análisis de la complejidad del algoritmo puede encontrarse en [3, pág. 580]:

**Teorema 3.9** *Existe un algoritmo que, dado un polinomio  $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$  de grado  $d$  y un conjunto finito  $N$  de puntos en  $Z(Q, R^n)$ , calcula un roadmap para el conjunto  $Z(Q, R^n)$  que pasa por  $N$ . El número total de operaciones aritméticas en  $K$  está acotada por  $d^{O(n^2)}$ .*

### 3.3. Aplicación

Una de las aplicaciones del cálculo de roadmaps de conjuntos semi-algebraicos es decidir de manera algorítmica si dos puntos dados de un conjunto de este tipo pertenecen a la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto.

A continuación, veremos cómo puede aplicarse el algoritmo [CRCAA] para resolver este problema en el caso de conjuntos algebraicos *acotados*. Asimismo, dados dos puntos que resulten estar en la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto, mostraremos cómo obtener algorítmicamente un arco semi-algebraico, incluido en el conjunto, que los una. Necesitaremos primero introducir algunas definiciones y notación.

Un roadmap  $RM$  de  $Z(Q, R^n)$  tiene asociado un conjunto finito  $D$  de todos los puntos distinguidos de  $Z(Q, R^n)$  y un conjunto  $\Xi$  de todos los segmentos de curvas que están en  $RM$ , que vamos a suponer reparametrizados en el intervalo  $[0, 1]$  de manera inyectiva.

Dado un punto distinguido  $p$  de  $Z(Q, R^n)$ , definimos inductivamente los conjuntos:

- $D_0(p) = \{p\}$
- $D_{i+1}(p) = \{q \in D / q \notin \bigcup_{j \leq i} D_j \wedge \exists r \in D_i(p), \gamma \in \Xi \text{ con } r, q \text{ extremos de } \gamma\}$ .

Notar que los elementos de  $D(p) = \bigcup_{i \geq 0} D_i(p)$  están en la misma componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)$  que contiene a  $p$  y que los conjuntos  $D_i(p)$  son disjuntos.

Dado  $q \in D(p)$ , definimos la distancia  $l(p, q)$  como el número natural  $i$  tal que  $q \in D_i(p)$ , es decir, como la mínima cantidad de segmentos de curvas del roadmap que se necesitan para unir  $p$  con  $q$ .

Definimos también una aplicación  $\gamma(p, -)$  que le asigna a cada  $q \in D(p)$  una curva semi-algebraica inyectiva  $\gamma(p, q)$  en  $RM$ , parametrizada en  $[0, l(p, q)]$ , que une  $p$  con  $q$ . Esta curva se obtiene al yuxtaponer curvas  $\gamma_i \in \Xi$ , donde  $\gamma_1$  es una curva que une  $p$  con algún  $q_1 \in D_1(p)$  y, para  $i = 2, \dots, l(p, q)$ ,  $\gamma_i$  es la curva que une  $q_{i-1} \in D_{i-1}(p)$  con algún  $q_i \in D_i(p)$ , con  $q_{l(p, q)} = q$ .

La función  $l(p, -)$  se extiende a  $C(p) \cap RM$ , para  $C(p)$  la componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)$  que contiene a  $p$ . Dado un punto  $q$  en  $(C(p) \cap RM) - D(p)$ , existe  $\phi \in \Xi$  y un único  $t \in (0, 1)$  tal que  $\phi(t) = q$  (es decir, una curva de  $RM$  que pasa por  $q$ ). Tomando un extremo  $r$  de  $\phi$  tal que  $l(p, r)$  sea mínima (la elección de  $r$  debe ser la misma para cualquier punto en la imagen de  $\gamma$ ), se define  $l(p, q) = l(p, r) + t$ . De la misma manera se extiende la correspondiente aplicación  $\gamma(p, -)$  a  $(C(p) \cap RM) - D(p)$ : si  $q \in (C(p) \cap RM) - D(p)$ , se define  $\gamma(p, q)$  como  $\gamma(p, r)$  yuxtaposición  $\phi|_{[0, t]}$ .

Si  $D(p) \neq D$ , se toma un punto  $p' \in D - D(p)$  y se repite la construcción. Se procede de esta manera hasta que todos los puntos distinguidos pertenezcan a la unión de los conjuntos construidos.

Así, se obtiene una partición de  $D$  en conjuntos  $D(p)$ , cada uno de los cuales contiene a los puntos distinguidos que están en una misma componente semi-algebraicamente

conexa del conjunto, y las correspondientes aplicaciones  $\gamma(p, -)$  que dan lugar a caminos semi-algebraicos que conectan al punto distinguido  $p \in RM$  con los restantes puntos de  $RM$  que pertenecen a su misma componente conexa.

### ALGORITMO [AC]: CONEXIÓN

#### Input:

- Un polinomio  $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ , donde  $K$  es un subcuerpo efectivo de  $R$ ,  $Q \geq 0$  y  $Z(Q, R^n)$  es acotado y
- un punto  $x \in Z(Q, R^n)$ , a partir de una  $n$ -representación univariada real cuyo punto asociado es  $x$ .

#### Output:

- Un arco  $\gamma(x)$  en  $Z(Q, R^n)$  que conecta un punto distinguido de  $RM(Z(Q, R^n))$  con  $x$ .

#### Procedimiento:

1. Calcular un roadmap  $RM(x)$  de  $Z(Q, R^n)$  que contenga a  $x$  aplicando el algoritmo [CRCAA] con input  $Q$  y  $N = \{x\}$ .
2. Obtener a partir de  $RM(x)$  el arco  $\gamma(p, x)$ , donde  $p$  es un punto distinguido de  $RM(Z(Q, R^n))$  que está en la misma componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)$  que  $x$ .

Este algoritmo puede adaptarse al caso en que  $Z(Q, R^n)$  no sea acotado, utilizando el algoritmo para el cálculo de un roadmap de un conjunto algebraico arbitrario.

Aplicando los procedimientos anteriores es posible dar un algoritmo para decidir si dos puntos  $x, y \in Z(Q, R^n)$  pertenecen a la misma componente semi-algebraicamente conexa del conjunto: en primer lugar, se aplica a  $x$  e  $y$  el algoritmo [AC] de manera de conectarlos a puntos distinguidos  $p_x$  y  $p_y$  del roadmap  $RM(Z(Q, R^n))$  respectivamente. Luego, se utiliza el procedimiento descrito previamente para determinar si los dos puntos distinguidos  $p_x, p_y \in RM(Z(Q, R^n))$  pueden conectarse dentro de  $RM(Z(Q, R^n))$ .

El siguiente teorema establece la complejidad de los algoritmos descritos ([3, Theorem 15.13]).



**Teorema 3.10** *Existe un algoritmo que, dado un polinomio  $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$  de grado total  $d$  y un punto  $x \in Z(Q, R^n)$ , calcula un arco que conecta a  $x$  con un roadmap de  $Z(Q, R^n)$ . La complejidad del algoritmo es de orden  $d^{O(n^2)}$ .*

*Más aún, si  $x, y \in Z(Q, R^n)$ , existe un algoritmo que decide si  $x$  e  $y$  están o no en la misma componente semi-algebraicamente conexa de  $Z(Q, R^n)$  con complejidad de orden  $d^{O(n^2)}$ .*

### 3.4. Roadmaps uniformes

Para concluir, veremos cómo calcular un roadmap uniforme de  $(Q, \mathfrak{S})$ , donde  $Q \in R[X_1, \dots, X_n]$  un polinomio tal que  $Z(Q, R^n)$  es acotado y  $\mathfrak{S}$  un conjunto de  $s$  polinomios de  $R[X_1, \dots, X_n]$  (ver definición 2.24). Recordemos que dicho roadmap uniforme permite obtener, en particular, un roadmap del conjunto semi-algebraico  $S = \{x \in R^n / Q(x) = 0 \wedge \wedge_{P \in \mathfrak{S}} P(x) \geq 0\}$ . Notaremos  $\text{card}(A)$  al cardinal de un conjunto finito  $A$ .

Además del procedimiento mencionado para el cálculo de valores especiales, este algoritmo utiliza como subrutinas:

- A Un procedimiento que dado un punto  $p \in Z(Q, R^n)$  calcula una familia de arcos semi-algebraicos que conectan a  $p$  con toda componente semi-algebraicamente conexa de cada condición de signo débil sobre una familia de polinomios  $\mathfrak{S}$  en  $Z(Q, R^n) \cap B(p, r)_{<p}$ , para  $r$  suficientemente chico (ver [3, Algoritmo 16.3])
- B Un procedimiento que dado un punto  $p \in Z(Q, R^n)$  produce un arco semi-algebraico que conecta a  $p$  con  $RM(Z(\{Q\} \cup \mathfrak{S}', R^n))$  para algún  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$  dentro de la realización de la condición de signo de  $\mathfrak{S}$  que satisface  $p$  (ver [3, Algoritmo 16.2])

---

#### ALGORITMO [CRU]: Cálculo de roadmap uniforme

##### Input:

- Un polinomio  $Q \in R[X_1, \dots, X_n]$  tal que  $Z(Q, R^n)$  es acotado y
- un conjunto  $\mathfrak{S}$  de polinomios de  $R[X_1, \dots, X_n]$  con  $\text{card}(\mathfrak{S}) = s$ .

##### Output:

- Un roadmap uniforme de  $(Q, \mathfrak{S})$ .

##### Procedimiento:

1. Para cada  $j = 0, 1, \dots, s$ , para cada subconjunto  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$  con  $\text{card}(\mathfrak{S}') = j$ :
  - Correr el algoritmo para calcular segmentos de curvas con input  $Q + \sum_{P \in \mathfrak{S}'} P^2$  y un conjunto vacío de puntos. Llamaremos puntos distinguidos de  $\mathfrak{S}'$  a los puntos finales de estas curvas. Su proyección a la primera coordenada serán los valores distinguidos de  $\mathfrak{S}'$ .
  - Calcular valores especiales con input  $Q + \sum_{P \in \mathfrak{S}'} P^2$ . Cada uno de ellos define un hiperplano. Intersecar las curvas obtenidas en el paso anterior con cada uno de estos hiperplanos. Esto da una partición de la curva. Agregar estos puntos al conjunto de puntos distinguidos de  $\mathfrak{S}'$ . Agregar sus proyecciones a la primera coordenada al conjunto de valores distinguidos de  $\mathfrak{S}'$ .
  - Para cada curva obtenida en 1. calcular su intersección con  $Z(P, R^n)$ , para cada  $P \in \mathfrak{S}$ . Esta intersección puede ser vacía, un conjunto finito de puntos o toda la curva. Si es un conjunto finito, agregar estos puntos al conjunto de puntos distinguidos de  $\mathfrak{S}' \cup \{P\}$ . Hacer lo mismo con las proyecciones a la primera coordenada. En caso contrario, ignorar la situación.
2. Calcular los signos de los polinomios de  $\mathfrak{S}$  sobre cada una de las curvas y puntos distinguidos calculados hasta ahora.
3. Para cada  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ , para cada uno de sus valores distinguidos  $v$ , agregar al conjunto de puntos distinguidos las intersecciones del hiperplano  $X_1 = v$  con las curvas construidas para  $\mathfrak{S}''$ , donde  $\mathfrak{S}''$  varía entre los subconjuntos de  $\mathfrak{S}'$  con  $\text{card}(\mathfrak{S}'') \leq s - \text{card}(\mathfrak{S}') - 1$ .
4. Para cada valor distinguido  $v$  hacer recursión de este algoritmo con input:
  - $Q = Q + \sum_{P \in \mathfrak{S}'} P^2$
  - $\mathfrak{S} = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}'$ , para cada posible  $\mathfrak{S}'$ .

en el hiperplano  $X_1 = v$ .

5. Para cada punto distinguido  $p$ , aplicar la subrutina A. Si  $L$  es el conjunto de extremos distintos de  $p$  de las curvas obtenidas, aplicar la rutina B para conectar estos puntos con  $Z(\{Q\} \cup \mathfrak{S}', R^n)$  para algún  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ .

El conjunto de todas las curvas y todos los puntos distinguidos calculados en todas las recursiones forman un roadmap uniforme de  $(Q, \mathfrak{S})$ .

---

En [3, Section 16.2] puede encontrarse una demostración de la correctitud de este algoritmo, así como también estimaciones para su complejidad.



# Bibliografía

- [1] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy. *Real algebraic geometry*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 36. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [2] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy. Constructing roadmaps of semi-algebraic sets on a variety, *J. Am. Math. Soc.* 13 (2000), No. 1, 55-82.
- [3] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. Springer-Verlag (2006), versión electrónica, 2009.
- [4] J. Canny. *The Complexity of Robot Motion Planning*. MIT Press, 1987.
- [5] J. Canny. Computing roadmaps in general semi-algebraic sets, *Comput. J.* 36 (1993), No. 5, 504-514.
- [6] J. Canny, D. Grigoriev, N. Vorobjov. Finding connected components of a semi-algebraic set in subexponential time, *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* 2 (1992), No. 4, 217-238.
- [7] G. E. Collins, Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition, *Lect. Notes Comput. Sci.* 33 (1975), 515-532.
- [8] L. Gournay, J. J. Risler. Construction of roadmaps of semi-algebraic sets, *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* 4 (1993), No. 4, 239-252.
- [9] D. Grigoriev, N. Vorobjov. Counting connected components of a semialgebraic set in subexponential time. *Comput. Complexity* 2 (1992), No. 2, 133-186.
- [10] J. Heintz, M.-F. Roy, P. Solernó. Single exponential path finding in semialgebraic sets. I: The case of a regular bounded hypersurface. *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes*, Proc. 8th Int. Conf., AAEECC-8, Tokyo/Jap. 1990, *Lect. Notes Comput. Sci.* 508 (1991), 180-196.
- [11] J. Heintz, M.-F. Roy, P. Solernó. Single exponential path finding in semialgebraic sets II: The general case. En Chandrajit L. Bajaj, ed., *Algebraic geometry and its applications*, pp. 449-465. Springer-Verlag, 1994.

- [12] J. Heintz, M.-F. Roy, P. Solernó. Description of the connected components of a semialgebraic set in single exponential time, *Discrete Comput. Geom.* 11 (1994), No. 2, 121-140.
- [13] G. Jeronimo, D. Perrucci, J. Sabia. On sign conditions over real multivariate polynomials. Aparecerá en *Discrete and Computational Geometry*, DOI 10.1007/s00454-009-9200-4.
- [14] M. Safey El Din, E. Schost. A baby steps/giant steps Monte Carlo algorithm for computing roadmaps in smooth compact real hypersurfaces. Disponible en arXiv:0902.1612.
- [15] J. Schwartz, M. Sharir. On the piano movers'problem II. General techniques for computing topological properties of real algebraic manifolds. *Adv. in Appl. Math.* 4 (1983), No. 3, 298-351.
- [16] F. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag, 1983.