



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Bases de densidad y desintegración de medidas  
para sistemas dinámicos parcialmente hiperbólicos

Carlos di Fiore

**Directores:** Dr. Teresa Krick, Dr. Michael Shub

Marzo 2010



*“Quizá. Pero la Ciencia no me interesa. Me parece presuntuosa, analítica y superficial. Ignora el sueño, el azar, la risa, el sentimiento y la contradicción, cosas todas que me son preciosas.”* Luis Buñuel

*para Marilina*



## *Agradecimientos*

A Teresa, por su paciencia y sus consejos, por las materias que cursé con ella y por confiar en mí; por tanto a cambio de tan poco.

A Mike, por escucharme y responder todas mis dudas, por leer la tesis y por permitirme trabajar al lado suyo.

A Federico, que sin dudarlo dijo que venía.

A Charles, que conocí en mi visita al Fields y me prestó sus notas que tanto me sirvieron para escribir esta tesis.

A Fang, que me consiguió el paper de Rohlin.

A Marilina, que me ayudó con los acentos.

A Santiago, que todos los días lo molesto con un problema nuevo.

A Julian F. B., que me enseñó lo que es una medida.

A mi familia, que siempre está.

A la OMA, especialmente a Flora y a Patricia que me ayudaron a descubrir lo mucho que me gusta “hacer matemática”.

A Ana, que siempre creyó en mí..... inclusive cuando yo no lo hacía.

A Beto, por ser una constante e inagotable fuente de inspiración, por su humildad, su compromiso y sobretodo por su amistad.

A Yue, que fue el primero con quien compartí tantos problemas y quizás, aunque él no lo sepa, de quien y con quien más matemática aprendí.

A Ivan, Leandro, Sergio, Lucas R., Sabiondo, a los olímpicos y a los ex-olímpicos con quienes compartí tantas olimpiadas, entrenamientos, problemas o discusiones.

A Juani F., que me enseñó que lo simple también es lindo.

A la gente del seminario de problemas, por creer en lo mismo que yo y compartir tantas ideas.

A todos los profesores con quienes cursé, especialmente a Fernando, Ariel, Mariela, Julian, Teresa y Gabriel.

A Cintia, Gaby, Javi, Lucas y Magalí que también me escuchan cuando no hablo de matemática.

Y a Miguel de Guzmán por escribir un libro tan lindo!



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Foliaciones Patológicas</b>	<b>15</b>
2.1. La Pesadilla de Fubini . . . . .	16
2.2. El ejemplo de Shub-Wilkinson . . . . .	18
2.3. Foliaciones y bases de densidad . . . . .	21
<b>3. Desintegración de Medidas</b>	<b>29</b>
3.1. Preliminares . . . . .	30
3.2. Particiones y Cocientes . . . . .	32
3.3. Caso particular . . . . .	35
3.4. El Teorema de Rohlin . . . . .	39
<b>4. Diferenciación de Integrales</b>	<b>43</b>
4.1. Diferenciación de Integrales en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	45
4.2. Bases de diferenciación y su maximal asociada . . . . .	48
4.3. La función del halo . . . . .	53
4.4. El teorema de Lebesgue en variedades . . . . .	57
<b>5. Foliaciones y medidas</b>	<b>61</b>
5.1. Foliaciones absolutamente continuas . . . . .	62
5.2. Un criterio para ser base de densidad . . . . .	69
<b>6. Difeomorfismos Hiperbólicos</b>	<b>77</b>
6.1. Definiciones y Ejemplos . . . . .	79
6.2. Teoría Ergódica . . . . .	84
6.3. El argumento de Hopf . . . . .	88
6.4. Exponentes de Lyapunov y la fórmula de Pesin . . . . .	91
6.5. La conjetura de Pugh-Shub . . . . .	94



# Capítulo 1

## Introducción

*“A little hyperbolicity goes a long way toward ergodicity.”*

Sea  $M$  una variedad y supongamos que para cada  $t$  en  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{R}$  tenemos un difeomorfismo  $\phi_t : M \rightarrow M$  de forma que  $\phi_0 = Id$  y  $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ , la familia  $\{\phi_t\}$  es un “sistema dinámico”.

Nosotros vamos a considerar siempre sistemas dinámicos discretos, es decir que tenemos un difeomorfismo  $\phi_t$  para cada  $t$  en  $\mathbb{Z}$ . En este caso, el estudio del sistema dinámico se reduce al del difeomorfismo  $\phi = \phi_1$ .

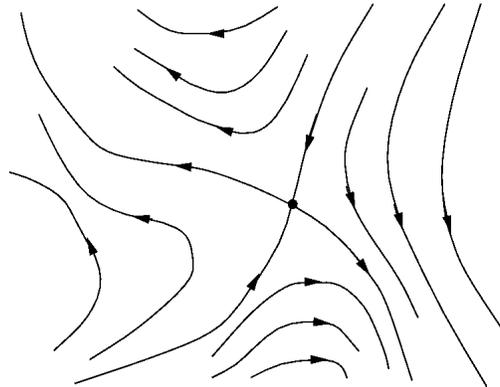


Figura 1.1: Un punto fijo hiperbólico con sus direcciones de contracción y expansión.

Los sistemas dinámicos hiperbólicos son aquellos para los que en cada punto  $p$  de  $M$  hay una dirección, la estable, en donde la variedad se “contrae” y otra dirección

complementaria, la inestable, en donde se “expande”. Esta condición tan sencilla genera una estructura muy rica en la variedad, por ejemplo existe una foliación  $\mathcal{W}^s$  de  $M$  tangente en cada punto a la dirección estable e invariante por el sistema dinámico, es decir que  $\phi$  permuta las hojas de la foliación. Análogamente, existe una foliación  $\mathcal{W}^u$  siempre tangente a la dirección inestable e invariante por  $\phi$ . Las foliaciones anteriores se llaman la foliación estable e inestable del difeomorfismo  $\phi$ .

En su tesis de doctorado, D. V. Anosov demostró que los sistemas dinámicos hiperbólicos que preservan una medida  $\nu$  son ergódicos, es decir que cualquier subconjunto invariante por el sistema dinámico tiene él o su complemento medida nula. Inicialmente Anosov estaba interesado en un caso particular, el flujo geodésico en una variedad de curvatura negativa, ya E. Hopf había tratado de demostrar que tal flujo era ergódico pero sólo lo había conseguido en el caso de curvatura constante o en el de dimensión 2. En su demostración usaba que las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  eran de clase  $C^1$ , cosa que sólo pudo demostrar en los casos anteriores. Anosov se dio cuenta que si bien las foliaciones en cuestión no tenían por qué ser de clase  $C^1$ , sí verificaban cierta condición técnica que le permitía terminar el argumento de Hopf.

Esta “cierta condición técnica” que satisfacen las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  es lo que hoy en día se conoce como que las foliaciones sean absolutamente continuas. En una versión débil, una foliación es absolutamente continua si todo conjunto de medida nula intersecta a cada hoja de la foliación en un conjunto de medida nula.

Los sistemas dinámicos parcialmente hiperbólicos son una generalización de los anteriores, ahora las direcciones estable e inestable no son necesariamente complementarias pero existe una tercera dirección, la central, en donde la contracción/expansión está dominada por las de las direcciones estable e inestable (en el capítulo 5 damos una definición más precisa).

No es difícil ver que no todo sistema dinámico parcialmente hiperbólico es ergódico, el problema está en que puede haber subconjuntos invariantes por  $\phi$  y saturados por las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$ . Sin embargo, C. Pugh y M. Shub conjeturaron que éste es el único obstáculo; digamos que un sistema dinámico es esencialmente accesible si todo subconjunto saturado por  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  tiene él o su complemento medida nula, luego:

**Conjetura:** Los sistemas dinámicos parcialmente hiperbólicos y esencialmente accesibles son ergódicos.

Si uno trata de usar el mismo argumento de Hopf y Anosov para demostrar la conjetura anterior necesita probar que si una función es constante a lo largo de las hojas de  $\mathcal{W}^s$  salvo por un conjunto de medida nula y constante lo largo de las hojas

de  $\mathcal{W}^u$  salvo por un conjunto de medida nula entonces la función es constante salvo por un conjunto de medida nula.

Más precisamente, digamos que un conjunto  $A$  es “esencialmente saturado” por una foliación  $\mathcal{F}$  si existe  $B$  saturado por  $\mathcal{F}$  tal que  $\mu(A \triangle B) = 0$ . Cuando la foliación  $\mathcal{F}$  sea absolutamente continua eso es lo mismo a decir que en cada hoja de  $\mathcal{F}$  el conjunto  $A$  o su complemento tiene medida nula.

**Problema:** Sea  $A$  un subconjunto de  $M$  esencialmente saturado por las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$ , entonces él o su complemento tienen medida nula.

Por empezar, uno puede modificar  $A$  en un conjunto de medida nula para hacerlo saturado por una de las dos foliaciones, el problema es que si ahora lo volvemos a modificar para que sea saturado por la otra podemos perder la saturación por la primera. Lo que precisamos es corregir al conjunto  $A$  en un conjunto de medida nula para que sea saturado por ambas foliaciones. Aquí entra en escena el teorema de densidad de Lebesgue, éste nos da una forma canónica de elegir un representante entre todos los conjuntos de la clase (*mod* 0) de un conjunto dado: sus puntos de densidad respecto de la base  $\mathcal{B}$  de bolas.

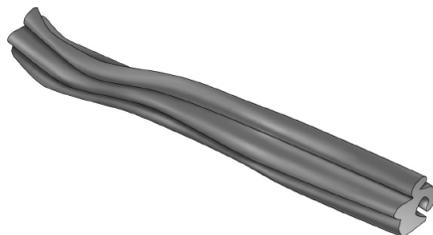


Figura 1.2: Un Julienne 3–dimensional.

En [GPS], Grayson, Pugh y Shub propusieron reemplazar la base de bolas  $\mathcal{B}$  en el teorema de Lebesgue por una base  $\mathcal{J}$  diseñada específicamente a partir del sistema dinámico. El problema con las base  $\mathcal{B}$  es que si bien satisface el teorema de Lebesgue, al no depender del sistema dinámico es demasiado general y no se lleva bien con el mismo. Los conjuntos de la base  $\mathcal{J}$  son los llamados “Juliennes”, éstos se construyen localmente como producto de foliaciones y son alargados en una dirección y redondos en otra.

Otra de las dificultades es que la foliación central  $\mathcal{W}^c$  que complementa a las otras dos puede no existir e inclusive si lo hace puede ser muy patológica. Por ejemplo Shub y Wilkinson construyeron un conjunto abierto de difeomorfismos para los que

su foliación central exhibe la siguiente patología: existe un conjunto  $S$  de medida máxima que interseca a cada hoja de  $\mathcal{W}^c$  en un conjunto de medida nula.

En [PS2], Pugh y Shub lograron probar la conjetura asumiendo que el sistema dinámico es “dinámicamente coherente” y “center-bunched” (ambas definiciones se pueden consultar en el capítulo 5). Más tarde, K.Burns y A. Wilkinson en [BW1] lograron probarla asumiendo solamente que sea “center-bunched” en una forma más débil. En ambos trabajos los Juliennes juegan un rol fundamental.

En esta tesis nos proponemos estudiar los distintos aspectos de la teoría de la medida relacionados con los sistemas dinámicos hiperbólicos y el programa de Pugh-Shub para probar la conjetura anterior. La definición de los Juliennes depende de varios parámetros y una mejor comprensión de la situación puede resultar favorable en función de relajar su construcción.

En particular, la primera pregunta que nos hacemos es “when the foliation product of two spaces with density basis gives rise to a density basis?”. En el capítulo 4 presentamos un criterio que responde la pregunta en la situación ideal en que las dos foliaciones son absolutamente continuas, por otro lado en el capítulo 1 construimos un contraejemplo en donde las foliaciones son solamente continuas.

El primer capítulo son tres ejemplos de foliaciones patológicas. En primer lugar vamos a ver la foliación de Katok-Milnor, ésta es una familia de curvas disjuntas que cubren el cuadrado  $[0, 1]^2$  y un conjunto  $E$  tal que casi todo punto del cuadrado está en  $E$  pero cada curva tiene a lo sumo un punto en  $E$ . A continuación vamos a ver el ejemplo de Shub-Wilkinson mencionado anteriormente, éste es parecido al de Katok-Milnor pero “estable por perturbaciones”. Por último, vamos a construir dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  para las que los rectángulos producto no verifican el teorema de Lebesgue. Todos estos ejemplos, además de ser interesantes por ellos mismos, van a establecer ciertas limitaciones en los resultados que podemos esperar. En este sentido, es quizás el segundo ejemplo el más interesante de los tres ya que sugiere que el obstáculo que la patología presenta es en realidad intrínseco al problema.

El segundo capítulo es básicamente el teorema de desintegración de Rohlin. Este nos permitirá poner una medida  $\nu_F$  en cada hoja  $F$  de una foliación  $\mathcal{F}$  y una medida  $\nu_*$  en el conjunto de hojas de forma que integrar una función es lo mismo que integrar primero en cada hoja  $F$  respecto de  $\nu_F$  y luego integrar todos estos resultados respecto de  $\nu_*$ . Lo anterior es en realidad un caso particular del teorema de Rohlin, en vista de su poca popularidad decidimos presentarlo en toda su generalidad. Damos además varios ejemplos y aplicaciones.

En el capítulo siguiente exploramos el teorema de diferenciación de Lebesgue y la teoría de diferenciación de integrales. Primero vamos a recordar las ideas involucradas

en la demostración del teorema de Lebesgue explicándolas y tratando de aplicarlas a otras bases (como bolas, rectángulos, etc.). Luego adoptamos un punto de vista mucho más general presentando los teoremas clásicos como el de Busseman-Feller o el de la Maximal. Por último vamos a definir la función del halo de una base de diferenciación y a probar que si ésta es finita entonces la base es de densidad.

En el cuarto capítulo definimos las distintas formas en que una foliación puede ser absolutamente continua dando algunos ejemplos y relacionándolas. Luego presentamos un criterio que nos permitirá probar que ciertas bases de diferenciación son de densidad. En particular, se sigue del criterio, que dadas dos foliaciones absolutamente continuas  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$ , los rectángulos producto que éstas definen forman una base de densidad.

Finalmente, en el último capítulo hacemos un breve resumen de los sistemas dinámicos parcialmente hiperbólicos, teoría ergódica y exponentes de Lyapunov. En particular vamos a demostrar el resultado de Anosov (asumiendo que las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  son absolutamente continuas) y a comentar sobre los de Pugh-Shub y Burns-Wilkinson respecto a la conjetura. En este capítulo vamos a hacer especial énfasis en como se articulan los distintos conceptos y teoremas dejando las demostraciones a cargo de la bibliografía.



## Capítulo 2

# Foliaciones Patológicas

En primer lugar vamos a ver un ejemplo de A. Katok de una foliación  $\mathcal{F}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  con la siguiente propiedad: existe un conjunto de medida positiva que intersecta a cada hoja de la foliación en a lo sumo un punto. Este es el fenómeno que L. Flaminio llamó “La pesadilla de Fubini”, motivados por lo anterior hacemos la siguiente definición: una foliación  $\mathcal{F}$  de una variedad  $M$  se dirá absolutamente continua si todo conjunto que intersecte a casi toda hoja de la foliación  $\mathcal{F}$  en un conjunto de medida nula tenga él mismo medida nula.

Luego presentamos algunos resultados de M. Shub y A. Wilkinson, en [SW] ellos demuestran que existe un abierto de difeomorfismos  $g : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  (en la topología  $C^1$ ) con una foliación  $\mathcal{W}_g$  asociada a cada uno de ellos que no es absolutamente continua. Esto muestra que la patología del ejemplo de Katok no es casual sino que al contrario puede ocurrir con bastante naturalidad. En particular, vamos a dar un criterio bastante general de Y. Pesin y M. Hirayama que garantiza que la foliación central de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico no es absolutamente continua. En definitiva, citando a Shub-Wilkinson:

*“These center foliations show that the potential difficulties which limited Brin and Pesin in their study of partially hyperbolic diffeomorphisms and which were finally overcome in great many cases by Grayson, Pugh and Shub do indeed exist.”*

Por último, en “Foliaciones y bases de densidad” vamos a construir dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  para las que los  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ - rectángulos no forman una base de densidad (en el sentido del teorema de Lebesgue).

## 2.1. La Pesadilla de Fubini

El teorema de Fubini dice que para calcular la medida de un subconjunto medible  $A$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  podemos primero calcular cuánto mide la intersección con cada segmento vertical y luego integrar todas estas medidas. Es conocido que la condición de medibilidad sobre  $A$  es necesaria, de hecho W. Sierpinski dio un ejemplo de un subconjunto  $S$  del cuadrado unitario  $[0, 1]^2$  cuya intersección con cualquier recta consiste de a lo sumo dos puntos pero  $\mu(S) = 1$ .

Nos podemos preguntar.. ¿Qué pasa si en el teorema de Fubini cambiamos la familia de segmentos verticales por una familia arbitraria de curvas disjuntas que cubran al cuadrado  $[0, 1]^2$ ? ¿Seguirá valiendo el teorema de Fubini o algo similar? ¿Será cierto que si un conjunto medible intersecta a cada curva en un subconjunto de medida nula entonces él mismo debe tener medida nula?

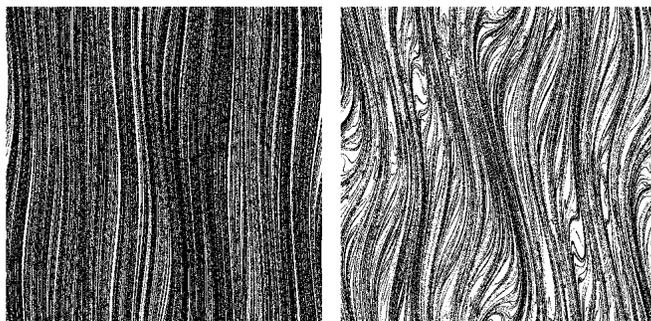


Figura 2.1: Foliaciones del cuadrado  $[0, 1]^2$ .

Una familia  $\mathcal{F}$  de curvas suaves disjuntas que cubren el cuadrado  $[0, 1]^2$  es una foliación. Si las curvas varían de forma continua entonces la foliación  $\mathcal{F}$  se dice continua y si las curvas varían en forma diferenciable diremos que es suave. Cuando la foliación es suave se tiene que vale algo parecido al teorema de Fubini, en particular la segunda pregunta se puede responder afirmativamente. Sin embargo, cuando la foliación es solamente continua ésta puede resultar falsa de forma dramática como lo muestra el siguiente ejemplo de Katok.

Nosotros vamos a seguir la presentación de J. Milnor en “Fubini Foiled” [M].

**Ejemplo (Katok-Milnor):** Existe una foliación continua  $\{\Gamma_t\}$  del cuadrado unitario por curvas suaves y un subconjunto medible  $E$  de  $[0, 1]^2$  con  $\mu(E) = 1$  tal que  $E$  intersecta a cada curva en a lo sumo un punto.

Fijemos  $p$  en  $(0, 1)$  y asociemos a cada  $x$  en  $(0, 1)$  un código  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)_p$  con  $x_n = 0$  o  $1$  de la siguiente manera:

Sean  $I_0 = [0, p]$  y  $I_1 = [p, 1]$ , la primer coordenada  $x_1$  va a ser 0 si  $x$  está en  $I_0$  y 1 si está en  $I_1$ . A continuación vamos a ir dividiendo a cada intervalo en dos más chicos y la siguiente coordenada va a decir en cuál de los dos intervalos está.

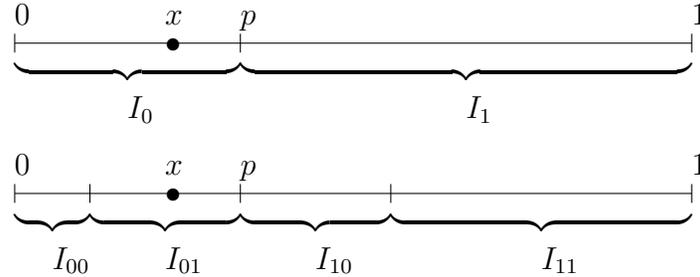


Figura 2.2: El código de  $x$  tiene  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$ .

Más precisamente, en el paso  $n + 1$  dividimos a cada intervalo  $I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}$  en dos subintervalos  $I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n 0}$  y  $I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n 1}$  tales que

$$|I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n 0}| = p|I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}| \text{ y } |I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n 1}| = (1 - p)|I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}|$$

Luego  $x_{n+1} = 0$  si  $x$  está en  $I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n 0}$  y  $x_{n+1} = 1$  en caso contrario. Es decir que

$$x = (x_1 x_2 \dots x_n \dots)_p = I_{x_1} \cap I_{x_1 x_2} \cap \dots \cap I_{x_1 x_2 \dots x_n} \cap \dots$$

Por ejemplo, si  $p = 1/2$  entonces el código de  $x$  no es otra cosa que su expresión en base 2.

Notemos que si  $X_n : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  es la función que asocia a cada  $x$  su  $n$ -ésima coordenada entonces las  $\{X_n\}$  son todas variables aleatorias independientes con distribución  $B(1, p)$ , de donde por la ley de fuerte de los grandes números se tiene que para casi todo  $x$  en el intervalo  $[0, 1]$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 1 - p. \tag{2.1}$$

Sea  $E$  el conjunto de los puntos  $(p, x)$  de  $[0, 1]^2$  tales que el código de  $x$  en base  $p$  satisface (1.1). Es fácil ver que  $E$  es medible y como para casi todo  $x$  se tiene que  $(p, x)$  está en  $E$ , entonces por el teorema de Fubini  $|E| = 1$ .

Ahora, para cada  $t$ , consideremos el gráfico de la función  $f_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que será una curva  $\Gamma_t$ . Donde si  $t = (t_1 t_2 \dots t_n \dots)_2$  entonces  $f_t(p) = (t_1 t_2 \dots t_n \dots)_p$ .

La función  $f_t$  es suave y de hecho analítica, pues por ejemplo si  $t = (0100110\dots)_2$  entonces

$$f_t(p) = p(1-p) + p(1-p)pp(1-p) + p(1-p)pp(1-p)(1-p) + \dots$$

$$f_t(p) = p(1-p) + p^3(1-p)^2 + p^3(1-p)^3 + \dots$$

Es decir que  $f_t(p)$  es una serie de funciones que converge uniformemente, de hecho de la expresión anterior se puede leer fácilmente su serie de Taylor. El caso general es similar, basta notar que se va agregando un sumando por cada 1 en la expresión en base 2 de  $t$  y estos son siempre de la forma  $p^n(1-p)^m$ , cualquier serie de este tipo en donde  $n, m \rightarrow \infty$  converge uniformemente a una función analítica (si  $n$  o  $m$  permanece acotado eso quiere decir que  $t$  tiene finitos unos o finitos ceros en su expresión en base 2 en cuyo caso  $f_t$  es un polinomio en  $p$ ).

La familia de curvas  $\Gamma_t$  es una foliación continua del cuadrado unitario  $[0, 1]^2$ , pues éstas son disjuntas y todo punto  $(p, x)$  de  $[0, 1]^2$  está en exactamente una de la curvas  $\Gamma_t$ ; aquella para la cual  $t = (x_1x_2\dots x_n\dots)_2$  donde  $x = (x_1x_2\dots x_n\dots)_p$ .

Veamos que para cada  $t$  se tiene que  $E \cap \Gamma_t$  consiste de a lo sumo un punto lo que concluye el ejemplo. Si  $(p, x)$  está en  $E \cap \Gamma_t$  entonces  $x = (t_1t_2\dots t_n\dots)_p$ , pero como  $(p, x)$  pertenece a  $E$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_1 + \dots + t_n}{n} = 1 - p.$$

Es decir que  $t$  determina  $p$  que a su vez determina  $x$ , de donde  $E \cap \Gamma_t$  consiste de a lo sumo un punto.

## 2.2. El ejemplo de Shub-Wilkinson

En esta sección vamos a construir un ejemplo un poco más complicado pero más interesante ya que “la patología persiste por pequeñas perturbaciones”.

Antes de continuar fijemos notación. Sea  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  el toro  $n$ -dimensional que es una variedad compacta con su estructura Riemanniana y su medida de Lebesgue  $\mu$  heredadas de  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $A_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  y  $A_3 : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  los automorfismos lineales inducidos por las matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último definamos  $\text{Diff}_\mu^2(\mathbb{T}^3)$  como los difeomorfismos  $C^2$  de  $\mathbb{T}^3$  que preservan la medida  $\mu$  y demosle la topología  $C^1$ .

**Teorema (Shub-Wilkinson [SW]):** Arbitrariamente cerca de  $A_3$  existe un abierto  $U$  de  $\text{Diff}_\mu^2(\mathbb{T}^3)$  tal que para todo  $g$  en  $U$  se tiene que

1. El difeomorfismo  $g$  es ergódico y no-uniformemente hiperbólico.
2. Existe una fibración  $\pi : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^2$  tal que  $\pi g = A_2 \pi$  y la fibras de  $\pi$  son las hojas de una foliación  $\mathcal{W}_g$  de  $\mathbb{T}^3$  por círculos  $C^2$ .
3. Existe  $\lambda > 0$  tal que para  $\mu$ -casi todo  $w$  en  $\mathbb{T}^3$ , si  $v$  está en  $T_w \mathbb{T}^3$  y es tangente a la hoja de  $\mathcal{W}_g$  que contiene a  $w$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_w g^n v\| = \lambda. \tag{2.2}$$

En particular se deduce de lo anterior, que existe un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{T}^3$  con  $\mu(S) = \mu(\mathbb{T}^3)$  tal que  $S$  intersecta a cada hoja de  $\mathcal{W}_g$  en un conjunto de medida cero.

**Idea de la demostración:**

Sea  $g$  un difeomorfismo de  $\mathbb{T}^3$  que verifica la segunda y la tercer condición del enunciado y llamemos  $S$  al conjunto de puntos  $w$  en  $\mathbb{T}^3$  para los que vale (1.2), que resulta  $g$ -invariante. Supongamos que una hoja  $\mathcal{W}_g(w)$  (que es  $\sim \mathbb{S}^1$ ) intersecta a  $S$  en un conjunto de medida positiva y lleguemos a un absurdo.

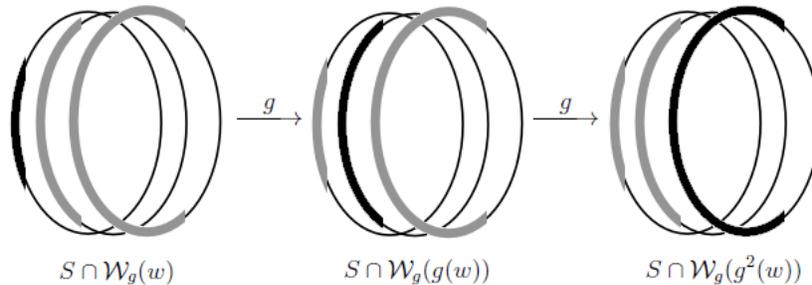


Figura 2.3: Si  $S$  intersecta una hoja  $\mathcal{W}_g(w)$  en un conjunto de medida positiva entonces ésta crece exponencialmente con  $g$ , lo que es absurdo.

Como las hojas de la foliación  $\mathcal{W}_g$  son 1-dimensionales entonces el Jacobiano de  $g^n : \mathcal{W}_g(w) \rightarrow \mathcal{W}_g(g^n(w))$  crece como la norma de los vectores tangentes a  $\mathcal{W}_g(w)$ , que por la tercer condición lo hacen exponencialmente. Luego, si  $S \cap \mathcal{W}_g(w)$  tiene medida

positiva entonces la medida de  $g^n(S \cap \mathcal{W}_g(w))$  crece exponencialmente. Pero esto es absurdo ya que estas medidas siempre están trivialmente acotadas por la medida de las hojas de  $\mathcal{W}_g$  que están acotadas por la segunda condición!

Volviendo al teorema,  $A_3$  satisface la segunda condición tomando  $\pi$  la proyección a las dos primeras coordenadas, sin embargo no satisface la tercera pues en la dirección de las fibras de  $\pi$  actúa como la identidad, es decir que el límite existe pero  $\lambda = 0$ .

En primer lugar, como  $A_3$  es parcialmente hiperbólico, por lo hecho en [HPS], para cualquier perturbación pequeña  $g$  existe una fibración como la de la segunda condición. Definamos entonces para cada  $w$  en  $\mathbb{T}^3$  y  $v$  en  $T_w\mathbb{T}^3$  tangente a la foliación  $\mathcal{W}_g$  su exponente de Lyapunov como

$$\lambda(g, w) = \lim \frac{1}{n} \log \|d_w g^n v\|.$$

El teorema de Osceledets dice que el límite anterior existe para casi todo  $w$  en  $\mathbb{T}^3$ . Más aún, la función  $\lambda(g, -)$  es  $g$ -invariante, luego si  $g$  es ergódico entonces  $\lambda(g, w)$  no depende de  $w$ . Definamos entonces para cada  $g$  ergódico (y para el que exista la fibración) su exponente de Lyapunov  $\lambda(g)$  como el valor del límite anterior. Por ejemplo, para  $g = A_3$  se tiene que  $\lambda(A_3) = 0$ .

Para completar la demostración basta tomar  $f$  en  $\text{Diff}_\mu^2(\mathbb{T}^3)$  arbitrariamente cerca de  $A_3$  que sea establemente ergódico y que su exponente de Lyapunov sea positivo. En efecto, si tenemos tal  $f$ , tomamos un abierto  $U$  de  $\text{Diff}_\mu^2(\mathbb{T}^3)$  que lo contenga y que todo difeomorfismo en él siga siendo ergódico (se puede por ser  $f$  establemente ergódico) y su exponente de Lyapunov siga siendo positivo (se puede por ser  $\lambda(f) > 0$ ).

En [SW], Shub y Wilkinson dan una familia explícita de difeomorfismos  $f_{a,b}$  que verifican las condiciones para  $a, b > 0$  suficientemente pequeños. ‡

Para terminar mencionemos dos resultados de Hirayama y Pesin ([HP]).

**Definición:** Sea  $M$  una variedad Riemanniana compacta y  $f$  un difeomorfismo  $C^2$  de  $M$ . Sea además  $\mathcal{W}$  una foliación  $f$ -invariante de  $M$ . Definimos el exponente de Lyapunov a lo largo de la foliación  $\mathcal{W}$  como

$$\chi_{\mathcal{W}}(x) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log |Jac(d_x f^n |_{T_x \mathcal{W}(x)})|.$$

Con la misma notación que en la definición anterior, vamos a decir que  $f$  es  $\mathcal{W}$ -dissipative si existe un conjunto  $f$ -invariante  $A$  de medida positiva tal que  $\chi_{\mathcal{W}}(x) \neq 0$  para casi todo  $x$  en  $A$ . La condición anterior es bastante “típica”, de

hecho en [HP] muestran que si  $\chi_f^c(x) \leq \alpha$  para casi todo  $x$  en  $M$  entonces todo difeomorfismo suficientemente cerca de  $f$  es  $\mathcal{W}^c$ -dissipative en un conjunto de medida positiva. Por otro lado, si  $\chi_f^c(x) = 0$  para casi todo  $x$  en  $M$  entonces existen difeomorfismos arbitrariamente cerca de  $f$  que son  $\mathcal{W}^c$ -dissipative en un conjunto de medida positiva.

**Teorema (Hirayama-Pesin):** Sea  $M$  una variedad Riemanniana compacta y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo  $C^2$  que preserva una medida suave  $\nu$ . Sea además  $\mathcal{W}$  una foliación  $f$ -invariante tal que casi todas sus hojas tienen volumen finito. Si  $f$  es  $\mathcal{W}$ -dissipative en casi todo punto entonces la foliación  $\mathcal{W}$  no es absolutamente continua.

Recordemos que la foliación  $\mathcal{W}$  no es absolutamente continua cuando existe un subconjunto  $A$  de  $M$  de medida positiva que intersecta a casi todas las hojas de  $\mathcal{W}$  en un conjunto de medida nula. Si se tiene que  $A$  intersecta a cada hoja de  $\mathcal{W}$  en finitos puntos entonces  $\mathcal{W}$  se dice “absolutamente singular” (en los términos del capítulo 4 esto quiere decir que las medidas desintegradas son singulares respecto de las Riemannianas).

**Teorema:** Sea  $f$  un difeomorfismo  $C^2$  parcialmente hiperbólico de una variedad Riemanniana y compacta  $M$  que preserva una medida suave  $\nu$ . Supongamos que la distribución central  $E^c$  es integrable a una foliación  $\mathcal{W}^c$  con hojas suaves y compactas. Luego si  $f$  tiene exponentes de Lyapunov positivos (negativos) en las direcciones centrales entonces  $\mathcal{W}^c$  no es absolutamente continua. Más aún, si  $\nu$  es ergódica, entonces  $\mathcal{W}$  es absolutamente singular.

## 2.3. Foliosiones y bases de densidad

Consideremos un subconjunto medible  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , por el teorema de diferenciación de Lebesgue, sabemos que para casi todo  $x$  si consideramos la familia de cubos  $\mathcal{Q}$  que contienen a  $x$  y vamos calculando la concentración de  $A$  en ellos, cuando los cubos se van haciendo más y más pequeños, ésta tiende a 1 si  $x$  estaba en  $A$  y a 0 si  $x$  no estaba en  $A$ . Es decir que para casi todo  $x$  se tiene que

$$\lim_{\mathcal{Q} \searrow x} \frac{\mu(A \cap \mathcal{Q})}{\mu(\mathcal{Q})} = \chi_A(x).$$

Lo anterior dice que la familia de cubos sirve para calcular la densidad de un conjunto medible (y ésta va a resultar casi siempre 0 o 1). Decimos entonces que los cubos son “base de densidad”.

Un famoso ejemplo de O. Nikodym (un subconjunto  $N$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  tal que  $\mu(N) = 1$  y para todo  $x$  en  $N$  existe una recta que interseca a  $N$  solamente en  $x$ ) muestra que si reemplazamos a los cubos por rectángulos entonces el teorema deja de ser cierto. Por otro lado, S. Saks demostró que la familia de rectángulos con lados paralelos a los ejes sí es base de densidad.

Consideremos ahora dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  y definamos un  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -rectángulo como la región comprendida entre dos curvas de  $\mathcal{F}$  y dos curvas de  $\mathcal{G}$ . ¿Será cierto que el teorema de Saks sigue valiendo para esta clase de “rectángulos”?

A continuación vamos a ver un ejemplo de dos foliaciones para las que sus rectángulos no forman una base de densidad. Más aún, una de ellas va a ser la foliación  $\mathcal{H}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  por segmentos horizontales (paralelos al eje  $x$ ) y la otra va a ser una foliación por “curvas verticales” (éstas son curvas continuas que intersecan a cada segmento horizontal en exactamente un punto).

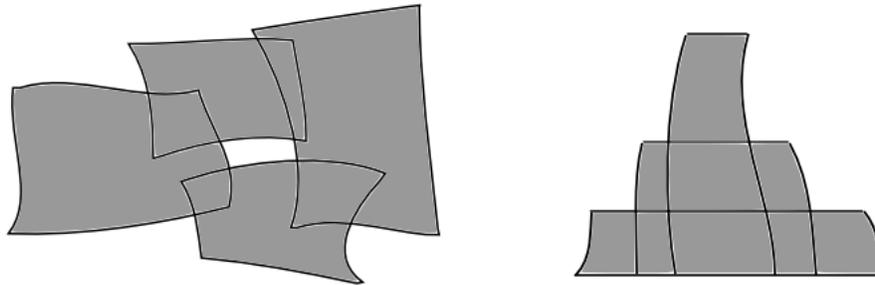


Figura 2.4: Un par de  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -rectángulos y una torre

Para construir nuestro ejemplo vamos a necesitar de un par de lemas previos, al primero de ellos como es un poco técnico y no tiene tanto que ver con la construcción lo demostramos al final.

**Lema 1:** Sea dada una familia de curvas verticales  $\mathcal{F}'$  con la siguiente propiedad: para todo  $n$  existe un subfamilia finita  $\mathcal{F}'_n$  tal que al intersecarla con cualquier segmento horizontal, éste queda dividido en segmentos de largo  $< \frac{1}{n}$ . Luego, existe una foliación continua  $\mathcal{F}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  que contiene a  $\mathcal{F}'$ .

Definamos un rectángulo como la región comprendida entre dos rectas paralelas al eje  $x$  y dos curvas verticales. Una torre  $T$ , es la unión de finitos rectángulos con la misma base tales que para cualesquiera dos de ellos, el que tenga el lado horizontal más alto tiene sus dos lados verticales entre los dos lados verticales del otro.

**Definición:** Una  $n$ -torre  $T$  con base  $A$ , es una torre  $T$  que es unión de los rectángulos  $R_1, R_2, \dots, R_m$  de forma que

1. La base  $A$  es un abierto contenido en  $T$  con  $\mu(T) > 2^{n+1}\mu(A)$
2. Para todo  $i$  se tiene que

$$\frac{\mu(A \cap R_i)}{\mu(R_i)} \geq \frac{1}{3}$$

La idea de una torre  $T$  es que todo punto en ella esté contenido en un rectángulo en el que la concentración de  $A$  es  $\geq \frac{1}{3}$  pero  $T$  sea “mucho más grande” que  $A$ .

El siguiente lema es fundamental para nuestra construcción:

**Lema 2:** Dado un rectángulo  $R$ , para todo  $n$ , existe una  $n$ -torre  $T$  contenida en  $R$  tal que

$$\mu(T) \geq \frac{1}{2}\mu(R).$$

**Demostración:**

La demostración está contenida en el dibujo.

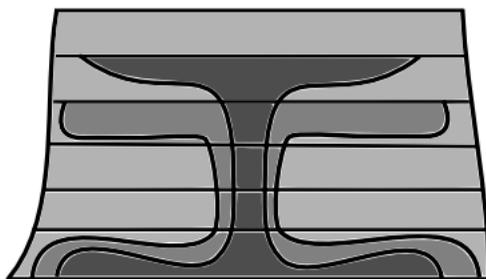


Figura 2.5: El dibujo muestra dos de los rectángulos,  $R_i$  y  $R_{i+1}$ , de un árbol  $T$  contenido en un rectángulo  $R$ .

La idea es la siguiente: sean  $l_0$  y  $l_{k+1}$  las rectas horizontales entre las que está comprendido  $R$  y tracemos  $k$  rectas horizontales adicionales  $l_1, \dots, l_k$  que lo dividan en  $k+1$  rectángulos  $N_1, N_2, \dots, N_{k+1}$  de igual área. La base  $A$  será el interior de  $N_1$  y la torre  $T$  va a ser la unión de  $k+1$  rectángulos  $R_1, \dots, R_{k+1}$  que verifiquen lo siguiente: el rectángulo  $R_1$  es  $N_1$  y si  $i > 1$  entonces  $R_i$  está comprendido entre  $l_0$  y  $l_{i+1}$ , ocupa

casi toda el área de  $N_1$  y  $N_{i+1}$  pero suficientemente poca de  $N_2, \dots, N_i$ . Lo anterior se va a poder construir básicamente “porque nada lo impide”.

La torre  $T$ , ocupará casi toda el área de  $R$  pero su base solamente la  $k+1$ -ésima parte, basta tomar entonces  $k+1 > 2^{n+1}$  para que  $T$  verifique las condiciones del enunciado. ‡

A continuación vamos a construir una foliación  $\mathcal{F}$  y un abierto  $A$  de medida  $\leq \frac{1}{2}$  tal que para casi todo punto del cuadrado  $[0, 1]^2$  exista una sucesión de  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ -rectángulos que lo contengan, se vayan haciendo más y más chicos y en todos ellos el abierto  $A$  tenga concentración  $\geq \frac{1}{3}$ . Se deduce de lo anterior que el teorema de Lebesgue no es cierto para  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ -rectángulos.

Para construir la foliación  $\mathcal{F}$  y el abierto  $A$  vamos a hacer lo siguiente, para cada  $n$  vamos a tomar una familia finita de  $n$ -torres de diámetro  $\leq \frac{1}{n}$  de forma que casi todo punto esté en infinitas torres pero la unión  $A$  de todas las bases de todas las torres tenga medida  $< \frac{1}{2}$ . Notemos que si un punto  $x$  está en una torre  $T$  entonces existe un rectángulo asociado a ella que lo contiene y en el que  $A$  tiene concentración  $\geq \frac{1}{3}$ . Basta entonces encontrar una foliación  $\mathcal{F}$  de forma que todos los rectángulos de todas las torres involucradas sean  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ -rectángulos.

La idea será ir construyendo las familias de torres y las hojas de la foliación  $\mathcal{F}$  de a poco. Primero tomamos una 1-torre  $T$  contenida en el cuadrado  $[0, 1]^2$  y extendamos los lados de sus rectángulos a curvas verticales y segmentos horizontales que dividan al cuadrado en pequeños rectángulos. Sea  $\mathcal{F}_1$  la familia de curvas verticales obtenidas y  $\mathcal{H}_1$  la de segmentos horizontales. Luego tomamos una 2-torre por cada pequeño rectángulo en que había quedado dividido el cuadrado y extendemos las familias  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{H}_1$  de forma que sus hojas contengan a los lados de los rectángulos de las torres recién puestas y las llamamos  $\mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente. Continuamos con este proceso indefinidamente, es decir, en cada paso ponemos una torre por cada rectángulo en que esté dividido el cuadrado y extendemos nuestras foliaciones “parciales” de forma que contengan los lados de las torres que agregamos.

**Proposición:** Existe una foliación continua  $\mathcal{F}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  por curvas verticales y un abierto  $A$  con  $\mu(A) < \frac{1}{2}$  tal que para casi todo  $x$  en  $[0, 1]^2$  existe una sucesión de  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ -rectángulos  $\beta^n$  que lo contienen,  $diam(\beta^n) < \frac{1}{n}$  y

$$\frac{\mu(A \cap \beta^n)}{\mu(\beta^n)} \geq \frac{1}{3}.$$

**Demostración:**

Por empezar, sea  $R_1^1$  el cuadrado  $[0, 1]^2$  y definamos  $\mathcal{F}_1$  como sus dos lados verticales y  $\mathcal{H}_1$  como sus dos lados horizontales. Por último tomemos una 1–torre  $T_1^1$  contenida en  $R_1^1$  tal que  $\mu(T_1^1) \geq \frac{1}{2}\mu(R_1^1)$  (que existe por el lema 2!).

Sean ahora  $\mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{H}_2$  familias finitas de curvas verticales y segmentos horizontales que contengan a  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{H}_1$  respectivamente, a todos los lados de los rectángulos de  $T_1^1$  y dividan al cuadrado  $[0, 1]^2$  en  $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{H}_2$ –rectángulos  $R_i^2$  de diámetro  $< \frac{1}{2}$ . A continuación tomemos por cada rectángulo  $R_i^2$  una 2–torre  $T_i^2$  contenida en él tal que  $\mu(T_i^2) > \frac{1}{2}\mu(R_i^2)$ .

En general, en el  $n$ –ésimo paso tomamos familias  $\mathcal{F}_n$  y  $\mathcal{H}_n$  que contengan a las anteriores, a todos los lados de los rectángulos de las torres del paso anterior y de forma que el cuadrado  $[0, 1]^2$  quede dividido en  $\mathcal{F}_n \times \mathcal{H}_n$ –rectángulos  $R_i^n$  de diámetro  $< \frac{1}{n}$ . Luego tomemos por cada uno de ellos una  $n$ –torre  $T_i^n$  con  $\mu(T_i^n) > \frac{1}{2}\mu(R_i^n)$ .

Si  $\mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}_n$  entonces  $\mathcal{F}'$  verifica la condición del lema 1, pues cualquier segmento horizontal queda dividido en segmentos de largo  $< \frac{1}{n}$  por las curvas verticales de  $\mathcal{F}_n$ . Sea entonces  $\mathcal{F}$  la foliación continua cuya existencia garantiza el lema 1. En particular, todo rectángulo de cualquier árbol  $T_i^n$  es un  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ –rectángulo de diámetro  $< \frac{1}{n}$ .

Definamos  $A$  como la unión de las bases  $A_i^n$  de todas las torres  $T_i^n$ . Si fijamos  $n$ , las torres  $T_i^n$  son disjuntas, luego como  $\mu(T_i^n) > 2^{n+1}\mu(A_i^n)$  para todo  $i$  entonces:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_n \bigcup_i A_i^n\right) \leq \sum_n \sum_i \mu(A_i^n) \leq \sum_n \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Ahora, si probamos que casi todo  $x$  en  $[0, 1]^2$  está contenido en infinitas torres la proposición quedará probada pues si  $x$  está en la torre  $T_i^n$  entonces existe un rectángulo  $\beta^n$  (asociado a  $T_i^n$ ) que lo contiene, de donde

$$\frac{\mu(A \cap \beta^n)}{\mu(\beta^n)} \geq \frac{\mu(A_i^n \cap \beta^n)}{\mu(\beta^n)} \geq \frac{1}{3}.$$

Pero el rectángulo  $\beta^n$  de  $T_i^n$  es un  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ –rectángulo de diámetro  $< \frac{1}{n}$ . Es decir que la familia  $\{\beta^n\}$  verifica la condición del enunciado.

Probemos entonces que casi todo punto  $x$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  está contenido en infinitas torres  $T_i^n$ . Por empezar el conjunto  $Z_1$  de puntos que no están en la primer 1–torre tiene medida  $\leq \frac{1}{2}$ . Ahora, el conjunto  $Z_1$  fue subdividido en pequeños rectángulos por  $\mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{H}_2$  y en cada uno de ellos pusimos una 2–torre que ocupaba al menos la mitad del área del rectángulo. Se deduce de lo anterior que el conjunto  $Z_2$  de

puntos en ninguna 1-torre ni ninguna 2-torre tiene medida  $\leq \frac{1}{4}$ . Análogamente, el conjunto  $Z_n$  de puntos en ninguna  $k$ -torre con  $1 \leq k \leq n$  debe tener medida  $\leq \frac{1}{2^n}$ , de donde el conjunto  $Z$  de puntos en ninguna torre tiene medida nula. Hemos probado entonces que casi todo punto está en alguna torre, pero por el mismo argumento, para todo  $n_0$ , si empezamos con las  $n_0$ -torres, luego agregamos las  $n_0 + 1$ -torres y así... entonces casi todo punto está en alguna  $n$ -torre con  $n \geq n_0$ . Se deduce de lo anterior que casi todo punto está en infinitas torres, como queríamos. ‡

La construcción anterior se puede mejorar de forma que en casi todo punto, la densidad superior de  $A$  (es decir, el límite superior de las concentraciones de  $A$  en los rectángulos) sea igual a 1.

### Demostración del Lema 1:

Tomemos una curva cualquiera  $\Gamma$  de  $\mathcal{F}'$  y supongamos que corta al eje  $x$  en el punto  $(t, 0)$ , llamemos a esta curva  $\Gamma_t$ . Podemos pensar que  $\Gamma_t = \{(f_t(y), y) : 0 \leq y \leq 1\}$  donde  $f_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es una función continua con  $f_t(0) = t$ . Luego  $\mathcal{F}' = \{\Gamma_t\}$  con  $t$  en cierto subconjunto  $T$  del intervalo  $[0, 1]$ . Notemos que por la condición del enunciado el conjunto  $T$  debe ser denso en  $[0, 1]$ .

La familia de funciones  $\{f_t\}$  es de Cauchy en el siguiente sentido:

“Para todo  $t$  (no necesariamente en  $T$ ) y para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta$  tal que si  $t_1$  y  $t_2$  están en  $T$  y  $|t_1 - t|, |t_2 - t| \leq \delta$  entonces  $|f_{t_1}(y) - f_{t_2}(y)| \leq \epsilon$ .”

Para probar lo anterior, basta tomar  $n$  suficientemente grande tal que  $\epsilon < \frac{1}{2^n}$  y  $\delta > 0$  tal que exista a lo sumo una curva  $\Gamma_{t'}$  en  $\mathcal{F}_n$  con  $|t' - t| < \delta$ .

Ahora, como la familia  $\{f_t\}$  con  $t$  en  $T$  es de Cauchy, entonces para cada  $t_0$  que no esté en  $T$ , podemos definir

$$f_{t_0}(y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f_t(y).$$

Más aún, como la propiedad anterior se va a seguir verificando ahora para todas las funciones  $f_t$  (con el mismo  $\delta$  para cada  $\epsilon$ ) entonces tenemos convergencia uniforme lo que nos asegura que la función  $f_t$  es continua para todo  $t$ . Veamos ahora que las curvas  $\Gamma_t = \{(f_t(y), y) : 0 \leq y \leq 1\}$  forman una foliación del cuadrado  $[0, 1]^2$ .

En primer lugar, las curvas son disjuntas pues en caso contrario existen  $t_1 < t_2$  tales que  $f_{t_1}(y) = f_{t_2}(y)$ , para algún  $y$  en  $[0, 1]$ . Tomemos  $t < t'$  en  $T$  tales que  $t_1 < t < t' < t_2$ , luego como  $f_{t_1}(y) \leq f_t(y) \leq f_{t'}(y) \leq f_{t_2}(y)$ , entonces  $f_t(y) = f_{t'}(y)$ , lo que es absurdo ya que las curvas originales eran disjuntas.

Sólo resta ver que las curvas  $\{\Gamma_t\}$  cubren el cuadrado  $[0, 1]^2$ , para ello tomemos  $(x, y)$  en  $[0, 1]^2$  y definamos  $\pi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  donde  $\pi(t) = f_t(y)$ . La misma condición que garantiza la convergencia uniforme de la familia  $\Gamma_t$  nos dice que  $\pi$  es continua, como  $\pi(0) = 0$  y  $\pi(1) = 1$  entonces existe  $t$  tal que  $\pi(t) = x$ , es decir que  $f_t(y) = x$  o lo que es lo mismo,  $(x, y)$  está en  $\Gamma_t$ . †



# Capítulo 3

## Desintegración de Medidas

*“...but anyhow, it is a fact that the language which seems to be specially made for entropy theory was created ten years earlier, mainly thanks to the analysis of the foundations of measure theory.” D. Anosov*

En el capítulo anterior vimos que si reemplazamos los segmentos verticales del cuadrado  $[0, 1]^2$  por una familia de curvas  $\Gamma = \{\Gamma_t\}$ , el teorema de Fubini no tiene porqué seguir siendo cierto. Pero.... ¿qué pasa si decidimos medir en cada curva de forma distinta? Más precisamente, ¿existirá una familia de medidas  $\{v_t\}$ , una por cada curva, de forma que para integrar una función podamos primero integrar sobre cada curva  $\Gamma_t$  respecto de su nueva medida  $v_t$  y luego integrar todos los resultados?

Podemos inclusive aventurarnos a tratar de probar algo todavía mucho más general, ¿qué pasa si tenemos un espacio de medida cualquiera partido en varias partes? ¿Será posible poner una medida en cada parte de forma de tener un teorema de Fubini?

**Definición:** Dado un espacio de medida  $(X, v)$  y una partición  $\mathcal{P}$  en subconjuntos medibles, una familia de medidas  $\{v_P\}$  (una en cada átomo  $P$  de  $\mathcal{P}$ ) se dice un sistema canónico de medidas si existe una medida  $v_*$  en  $\mathcal{P}$  de forma que para toda función integrable  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que

$$\int \varphi dv = \int_{\mathcal{P}} \left( \int \varphi dv_P \right) dv_*$$

En su “Fundamentals Ideas of Measure Theory” ([Ro]), V. A. Rohlin demostró que cuando  $X$  es un espacio de Lebesgue y la partición  $\mathcal{P}$  verifique cierta condición

entonces existe un sistema canónico de medidas y más aún, éste es esencialmente único.

La idea de un sistema canónico de medidas parece que es de A. Kolmogorov pero fue Rohlin el primero en demostrar su existencia en un contexto tan general (anteriormente P. R. Halmos, S. Kakutani y W. Ambrosio habían demostrado un caso particular pero su demostración era incorrecta como señala Rohlin en [Ro]). Nosotros vamos a llamar al sistema canónico de medidas “la familia de medidas desintegradas” y a la medida  $v_*$  “la medida cociente”.

Por ejemplo, se sigue del teorema de Rohlin, que para cualquier foliación del cuadrado  $[0, 1]^2$  por curvas  $\Gamma_t$  existe una familia de medidas desintegradas  $\{v_t\}$  en ellas de forma que para calcular la medida de un conjunto basta calcular primero su medida en cada curva  $\Gamma_t$  según la medida  $v_t$  e integrar todos estos resultados. En el ejemplo de Katok-Milnor, cada medida desintegrada  $v_t$  está concentrada en un punto de la curva  $\Gamma_t$ .

A continuación vamos a hacer las definiciones necesarias y vamos a probar el teorema de Rohlin, primero en el caso particular del intervalo  $[0, 1]$  y luego en toda su generalidad. La demostración del caso del intervalo  $[0, 1]$  es esencialmente la misma que la de las notas de M. Viana [Vi] o las de C. Pugh [Pu] (en donde lo demuestran para cualquier espacio métrico compacto).

### 3.1. Preliminares

Empecemos con algunas definiciones

**Definición:** Un espacio de medida  $(X, \mathcal{B}, \nu)$  se dice separable si existe una sucesión  $\{A_n\}$  de medibles que generan la  $\sigma$ -álgebra y para todo  $x$  e  $y$  en  $X$ , existe un  $A_n$  que contiene a uno pero no al otro.

A una sucesión  $\{A_n\}$  como la anterior se la llama una base del espacio de medida. La segunda condición dice que los  $A_n$  separan puntos y es equivalente a

“Si  $B_n = A_n$  o  $A_n^c$  entonces  $\bigcap B_n$  contiene a lo sumo un punto.”

Si se tiene que en la condición anterior, para cualquier elección de los  $B_n$  la intersección consiste de exactamente un punto entonces se dice que la base es completa.

**Ejemplo:** Sea  $\Omega = \{0, 1\}^\infty$  el espacio de todas las sucesiones  $w = (w_i)$  con  $w_i = 0$  o  $w_i = 1$ , con la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos (respecto de la topología producto) y la

medida usual. Definamos  $\Omega_n$  como los  $w$  en  $\Omega$  tales que  $w_n = 0$ . Como los  $\Omega_n$  generan la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos luego  $\{\Omega_n\}$  es una base completa.

Un isomorfismo entre dos espacios de medida  $(X_1, \mathcal{B}_1, v_1)$  y  $(X_2, \mathcal{B}_2, v_2)$  es una función biyectiva  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(A)$  es medible si y sólo si  $A$  lo es y en tal caso  $v_2(f(A)) = v_1(A)$ . Un isomorfismo (*mod* 0) entre dos espacios es un isomorfismo entre  $X_1/Z_1$  y  $X_2/Z_2$  donde  $Z_1$  y  $Z_2$  son de medida nula.

**Definición:** Un espacio de medida es de Lebesgue si es isomorfo (*mod* 0) con un espacio de probabilidad que tiene una base completa.

**Ejemplo:** Sea  $I = [0, 1]$  con la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos y la medida de Lebesgue y veamos que es isomorfo (*mod* 0) con  $\Omega$ . Podemos definir  $f : I \rightarrow \Omega$  que manda cada  $x$  en  $[0, 1]$  a su expresión en base 2. Ésta función está bien definida salvo para numerables puntos, si removemos estos puntos y las sucesiones correspondientes de  $\Omega$  (las que se vuelven constantes) entonces  $f$  es un isomorfismo. Como en ambos espacios los conjuntos numerables son de medida nula entonces hemos probado que el intervalo  $[0, 1]$  con la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos y la medida usual es un espacio de Lebesgue.

Puede dar la impresión que la condición de ser un espacio de Lebesgue es algo extraña y que se da para espacios muy particulares. Esto no es así, la mayoría de los espacios de probabilidad que aparecen en la práctica son de Lebesgue, por ejemplo todo espacio métrico separable con una medida boreliana de probabilidad es de Lebesgue así como todo cociente de un espacio de Lebesgue por una partición medible.

**Teorema:** Si un espacio de medida es Lebesgue y sin átomos entonces es isomorfo (*mod* 0) al intervalo  $[0, 1]$  con la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos y la medida de Lebesgue.

**Demostración:**

Alcanza probar que si un espacio de probabilidad  $(X, \mathcal{B}, v)$  tiene una base completa y no tiene átomos entonces es isomorfo (*mod* 0) con el intervalo  $[0, 1]$ . Sea entonces  $\{A_n\}$  una base completa de tal espacio y definamos

$$C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n} = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n.$$

donde  $B_k = A_k$  si  $\epsilon_k = 0$  y  $B_k = A_k^c$  si  $\epsilon_k = 1$ . Ahora vamos a ir construyendo de a pasos intervalos cerrados  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$  tales que

1.  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n} = I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 0} \cup I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 1}$
2.  $\mu(I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}) = v(C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n})$

Primero construimos  $I_0$  y  $I_1$ , simplemente partimos el intervalo  $[0, 1]$  en dos intervalos cerrados que midan  $v(C_0)$  y  $v(C_1)$  que como  $v(C_0) + v(C_1) = 1$  entonces se puede.

Análogamente, una vez construido  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$ , para construir  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 0}$  y  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 1}$  sólo tenemos que partirlo en dos intervalos que midan  $v(C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 0})$  y  $v(C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 1})$ .

Con los intervalos  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$  es fácil establecer el isomorfismo (*mod* 0). Cada  $x$  en  $X$  está en una intersección de la forma

$$C_{\epsilon_1} \cap C_{\epsilon_1, \epsilon_2} \cap \dots \cap C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n} \cap \dots$$

Más aún, como los  $A_n$  forman una base completa entonces cada  $x$  está en exactamente una de tales intersecciones y cada una de ellas está asociada a exactamente un  $x$ . Definamos ahora  $f : X \rightarrow [0, 1]$  de la siguiente manera, si

$$x = C_{\epsilon_1} \cap C_{\epsilon_1, \epsilon_2} \cap \dots \cap C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n} \cap \dots$$

entonces

$$f(x) = I_{\epsilon_1} \cap I_{\epsilon_1, \epsilon_2} \cap \dots \cap I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n} \cap \dots$$

Notemos que como la sucesión de intervalos  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$  es una sucesión de intervalos cerrados encajados cuya medida tiende a cero (pues la medida de los  $C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$  lo hace ya que  $X$  no tiene átomos) entonces  $f$  está bien definida. Por lo dicho antes,  $f$  es sobreyectiva, el único problema que tiene es que puede no ser inyectiva ya que los intervalos  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$  no son necesariamente disjuntos pues  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 0} \cap I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 1}$  consiste de un punto. Si quitamos estos puntos del  $[0, 1]$  (que serán numerables) y las correspondientes preimágenes en  $X$  entonces  $f$  queda biyectiva. Más aún, como

$$f(C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}) = I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n} \text{ y } v(C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}) = \mu(I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}).$$

y tanto los  $C_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$  como los  $I_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$  generan sus respectivas  $\sigma$ -álgebras entonces  $f$  preserva medida y la  $\sigma$ -álgebra. ‡

## 3.2. Particiones y Cocientes

Dar una partición  $\mathcal{P}$  de  $X$  es dar una relación de equivalencia “ $\sim$ ” o lo que es lo mismo, una familia de subconjuntos disjuntos cuya unión es todo  $X$ . Cuando  $X$  sea un espacio de medida vamos a asumir que los subconjuntos son medibles y los vamos a llamar átomos de la partición.

En el caso anterior, podemos definir el cociente de  $X$  por la relación de equivalencia y obtener un nuevo espacio de medida  $X/\sim$ , que por abuso de notación vamos a notar  $\mathcal{P}$ , cuyas  $\sigma$ -álgebra y medida son las empujadas de las de  $X$ .

Más precisamente, sea  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  la proyección al cociente, entonces un subconjunto  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{P}$  es medible si y sólo si  $\pi^{-1}(\mathcal{F})$  lo es y en cuyo caso definimos  $v_*(\mathcal{F}) = v(\pi^{-1}(\mathcal{F}))$ . A la medida  $v_*$  así obtenida la llamaremos “la medida cociente” y se puede pensar como una medida en el conjunto de átomos de la partición.

Decimos que  $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$  si todo átomo de  $\mathcal{P}_2$  está contenido en uno de  $\mathcal{P}_1$ . Dada una sucesión de particiones  $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \dots < \mathcal{P}_n < \dots$  definimos el límite de la sucesión como la partición  $\mathcal{P}$  cuyos átomos  $P$  se obtienen de elegir un átomo  $P_n$  de cada  $\mathcal{P}_n$  tal que  $P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$  y poner  $P = \bigcap P_n$  (lo notamos como  $\mathcal{P}_n \uparrow \mathcal{P}$ ).

**Lema:** Dado un espacio de medida  $X$ , las siguientes condiciones son equivalentes

1. Tiene una base completa
2. Existe un sucesión de particiones finitas  $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \dots < \mathcal{P}_n < \dots$  cada una de las cuales se obtiene partiendo cada átomo de la anterior en dos, tales que: sus átomos generan la  $\sigma$ -álgebra y si elegimos un átomo  $P_n$  de cada  $\mathcal{P}_n$  de forma que  $P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$  entonces  $\bigcap P_n$  consiste de exactamente un punto.
3. Existe un sucesión de particiones finitas  $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \dots < \mathcal{P}_n < \dots$  tales que sus átomos generan la  $\sigma$ -álgebra y si elegimos un átomo  $P_n$  de cada  $\mathcal{P}_n$  de forma que  $P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$  entonces  $\bigcap P_n$  consiste de exactamente un punto.

Dado un espacio de medida  $X$ , una partición (*mod* 0) es una partición del complemento de un conjunto de medida nula. De ahora en adelante todas las particiones las vamos a suponer (*mod* 0).

**Definición:** Dado un espacio de medida  $X$ , una partición  $\mathcal{P}$  se dice medible si existen particiones finitas  $\mathcal{P}_n$  tales que  $\mathcal{P}_n \uparrow \mathcal{P}$  en  $X/Z$  donde  $Z$  es un subconjunto de  $X$  de medida nula que es unión de átomos de  $\mathcal{P}$ .

Otra forma equivalente de decir que una partición  $\mathcal{P}$  es medible es que exista una familia numerable de medibles saturados de  $X$  que separe los átomos de  $\mathcal{P}$  ( $A$  es saturado si  $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ ).

**Ejemplos:**

1. Dado un espacio de medida  $X$ , la partición cuyos átomos son los puntos de  $X$  es medible si y sólo si existe una familia numerable de medibles que separe casi todos los puntos, esto se da por ejemplo si  $X$  es un espacio de medida separable.

2. Si  $X$  es un espacio de medida y  $f : X \rightarrow [0, 1]$  es medible entonces la partición de  $X$  en las preimágenes  $f^{-1}(t)$  es medible. De forma más general, si tenemos espacios de medida  $X$  e  $Y$ , una partición medible  $\mathcal{Q}$  de  $Y$  y una función medible  $f : X \rightarrow Y$  entonces la partición  $\mathcal{P}$  de  $X$  en las preimágenes de los átomos de  $\mathcal{Q}$  es medible.

Por ejemplo, si  $Y$  es separable entonces las preimágenes  $f^{-1}(y)$  definen una partición medible de  $X$ .

3. La partición  $\mathcal{P}$  del cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$  en segmentos verticales es medible, pues  $\mathcal{P}_n \uparrow \mathcal{P}$  donde  $\mathcal{P}_n$  es la partición del cuadrado en  $2^n$  rectángulos verticales iguales. Este ejemplo puede parecer demasiado tonto pero Rohlin demostró que toda partición medible de un espacio de Lebesgue es isomorfa (*mod* 0) a la partición anterior!!
4. Dado  $\xi$  en  $\mathbb{S}^1$  que no sea una raíz de la unidad, sea  $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  donde  $T(z) = \xi z$  y consideremos la partición  $\mathcal{P}$  en órbitas del automorfismo  $T$ . Como todo átomo  $P_n$  de una partición finita  $\mathcal{P}_n < \mathcal{P}$  es unión de átomos de  $\mathcal{P}$ , entonces debe ser un medible  $T$ -invariante. Pero como  $T$  es ergódico luego  $\mu(P_n) = 0$  o  $\mu(P_n) = 1$ . Es decir que  $\mathcal{P}_n$  es (*mod* 0) la partición en un sólo átomo, de donde  $\mathcal{P}$  no puede ser límite de particiones finitas y resulta no medible!
5. Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y  $\mathcal{F}$  una foliación de dimensión  $k$ . Dada una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  que trivialice a  $\mathcal{F}$ , si partimos al abierto  $U$  en las hojas de la foliación entonces la partición es isomorfa (via  $\varphi$ ) a la partición de un abierto de  $\mathbb{R}^n$  por subespacios afines  $k$ -dimensionales todos paralelos entre sí que es claramente medible.

Es buena idea contrastar los dos últimos ejemplos, consideremos en el toro  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  una partición  $\mathcal{P}$  por líneas paralelas de pendiente irracional. Como el flujo que éstas definen es ergódico, por el mismo argumento que en el ejemplo 4, la partición  $\mathcal{P}$  resulta no medible. Es decir que globalmente, la partición definida por un flujo en una variedad puede no ser medible y sin embargo localmente sí lo es.

6. Se tiene el siguiente teorema:

**Teorema:** El cociente de un espacio de Lebesgue por una partición  $\mathcal{P}$  es Lebesgue si y sólo si  $\mathcal{P}$  es medible.

### 3.3. Caso particular

El plan para demostrar el teorema de desintegración es sencillo, primero vamos a probarlo en el caso en que  $X = [0, 1]$  y luego valiéndonos del último teorema de la primer sección lo deduciremos para todo espacio de Lebesgue.

Una de las ventajas del  $[0, 1]$  es que al ser un espacio métrico compacto, por el teorema de Riesz, dar una medida  $\mu_P$  en él es equivalente a dar un funcional lineal  $e_P : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continuo y positivo. La idea para construir el funcional  $e_P$  para cada  $P$  en  $\mathcal{P}$  es la siguiente: como  $\mathcal{P}$  es una partición medible entonces  $\mathcal{P}_n \uparrow \mathcal{P}$  con las  $\mathcal{P}_n$  finitas, si denotamos  $L_n(P)$  al átomo de  $\mathcal{P}_n$  que contiene a  $P$  entonces definimos

$$e_P(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(L_n(P))} \int_{L_n(P)} \varphi(x) dx.$$

La primer parte de la demostración consiste en justificar que para cada  $\varphi$  el límite en cuestión existe para casi todo  $P$ . El problema es que debido al “para casi todo”, no podemos decir nada de un  $P$  en particular, por ejemplo podría ocurrir que para todo  $P$  exista  $\varphi$  en  $L^1[0, 1]$  en la que el límite no existe. Para solucionar esto vamos a quedarnos (por un rato) sólo con las funciones continuas y usar que  $C[0, 1]$  es separable con la norma de la convergencia uniforme.

El resto de la demostración será ver que la familia de medidas así construidas verifican las condiciones, primero las funciones continuas y luego todas las integrables.

**Teorema:** Dada una partición medible  $\mathcal{P}$  de  $([0, 1], \mu)$  existe una familia de medidas borelianas de probabilidad  $\{v_P; P \text{ en } \mathcal{P}\}$  tales que

- Para casi todo  $P$  en  $\mathcal{P}$  se tiene  $v_P(P) = 1$
- Para toda función integrable  $\varphi$  su integral se puede calcular como

$$\int \varphi(x) dx = \int_{\mathcal{P}} \left( \int \varphi dv_P \right) dv_*.$$

**Demostración:**

Antes de empezar fijemos un poco de notación, cuando hablemos de  $P$  en  $\mathcal{P}$  nos podemos referir, dependiendo del contexto, tanto al elemento de la partición  $\mathcal{P}$  como al subconjunto de  $[0, 1]$  que éste define. Esperamos que esto no lleve a ninguna confusión, por ejemplo si  $\mu$  denota la medida de Lebesgue en  $[0, 1]$  y  $v_*$  la medida cociente en  $\mathcal{P}$  entonces por nuestro abuso de notación  $\mu(P) = v_*(P)$ .

Por otro lado, como la partición  $\mathcal{P}$  es medible entonces existe una familia de particiones finitas  $\{\mathcal{P}_n\}$  tales que  $\mathcal{P}_n \uparrow \mathcal{P}$  módulo un conjunto de medida nula  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}$ .

Denotemos además  $L_n(P)$  al átomo de  $\mathcal{P}_n$  que contiene a  $P$ , que podemos suponer siempre de medida positiva (ya que si alguna  $\mathcal{P}_n$  tiene un átomo de medida nula, podemos agregar éste a  $\mathcal{Z}$ ).

Ahora empecemos la demostración, para cada función medible  $\varphi$  vamos a definir una función medible  $T_n\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera:

$$T_n\varphi(P) = \frac{1}{\mu(L_n(P))} \int_{L_n(P)} \varphi(x) dx.$$

Lo anterior siempre que  $\mathcal{P}$  no esté en  $\mathcal{Z}$ , en caso contrario  $T_n\varphi(P) = 0$ . A la función  $T_n\varphi$  se la puede pensar como un “promedio” de  $\varphi$  relativo a la partición  $\mathcal{P}_n$ . Más precisamente,  $T_n\varphi(P)$  es el promedio de  $\varphi$  en el átomo de  $\mathcal{P}_n$  que contiene a  $P$ . Como  $\mathcal{P}_n$  es una partición finita entonces  $T_n\varphi$  es una función simple (es constante en la proyección de cada átomo de  $\mathcal{P}_n$ ) y como promediar los promedios es lo mismo que promediar directamente entonces

$$\int_{\mathcal{P}} T_n\varphi(P) dv_* = \int \varphi(x) dx. \quad (3.1)$$

Ahora vamos a probar que si fijamos una función medible  $\varphi$  entonces para casi todo  $P$  en  $\mathcal{P}$  se tiene que  $\lim T_n\varphi(P)$  existe cuando  $n \rightarrow \infty$ . Escribiendo a cada función  $\varphi$  como suma de su parte positiva  $\varphi^+$  y su parte negativa  $\varphi^-$  podemos restringirnos al caso  $\varphi \geq 0$ .

Sea  $\varphi$  una función medible con  $\varphi \geq 0$  y supongamos que existe un conjunto de medida positiva en donde el límite no existe, entonces existen números racionales  $0 < r < s$  y un conjunto  $U \subset \mathcal{P}$  de medida positiva tal que para todo  $P$  en  $U$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T_n\varphi(P) < r < s < \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n\varphi(P).$$

Es decir que para todo  $P$  en  $U$  existen enteros

$$r(1, P) < s(1, P) < r(2, P) < \dots < r(l, P) < s(l, P) < \dots$$

tales que el promedio de  $\varphi$  es menor a  $r$  en cada átomo  $L_{r(l,P)}(P)$  y mayor a  $s$  en cada  $L_{s(l,P)}(P)$ .

Definamos ahora

$$R_l = \bigcup_{P \in U} L_{r(l,P)}(P) \quad \text{y} \quad S_l = \bigcup_{P \in U} L_{s(l,P)}(P).$$

Luego  $R_1 \supseteq S_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots \supseteq R_l \supseteq S_l \supseteq \dots \supseteq U$  de donde  $U \subset V = \bigcap R_l = \bigcap S_l$ . Notemos que como  $U$  tiene medida positiva entonces también la tiene  $V$ . Por otro lado, como cualesquiera dos átomos son disjuntos o uno está contenido en el otro entonces  $R_l$  es unión disjunta de átomos en donde el promedio de  $\varphi$  es menor a  $r$ , de forma que

$$\frac{1}{\mu(R_l)} \int_{R_l} \varphi(x) dx < r.$$

Pero como  $V$  tiene medida positiva y los  $R_l$  decrecen monótonamente a  $V$ , entonces tomando límite obtenemos:

$$\frac{1}{\mu(V)} \int_V \varphi(x) dx \leq r.$$

Es decir que el promedio de  $\varphi$  en  $V$  es menor o igual a  $r$ , pero análogamente podemos demostrar que debe ser mayor o igual a  $s$ , lo que es absurdo ya que  $0 < r < s$ . Hemos probado entonces que si fijamos  $\varphi$  entonces  $\lim T_n \varphi(P)$  existe cuando  $n \rightarrow \infty$  para casi todo  $P$  en  $\mathcal{P}$ .

Para cada función medible  $\varphi$ , el límite existe para casi todo punto pero si fijamos un  $P$  en  $\mathcal{P}$  no podemos decir nada ya que éste podría estar en el conjunto de medida nula en el que no existe el límite; peor aún, este conjunto puede no ser el mismo para distintas funciones. Para solucionar esto vamos a quedarnos sólo con las funciones continuas y vamos a usar que  $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  es separable.

Sea  $\{\varphi_n\}$  un denso numerable de  $C[0, 1]$  y llamemos  $\mathcal{F}_n$  al conjunto de puntos de  $\mathcal{P}$  en donde el límite existe para  $\varphi_n$ . Por último definamos  $\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}_n$ , como por lo anterior casi todo punto está en  $\mathcal{F}_n$  entonces casi todo punto está en  $\mathcal{F}$ . El conjunto de funciones continuas para las que el límite existe para todo  $P$  en  $\mathcal{F}$  es cerrado por convergencia uniforme y contiene a las  $\varphi_n$  de donde éste debe ser todo  $C[0, 1]$ . Es decir que existe un conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$  de medida máxima tal que para todo  $P$  en  $\mathcal{F}$  y toda función continua  $\varphi$  existe el límite

$$T\varphi(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \varphi(P).$$

Ahora vamos a definir una medida  $\mu_P$  para cada  $P$  en  $\mathcal{F}$ . Si ponemos  $e_P(\varphi) = T\varphi(P)$  entonces  $e_P : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional lineal continuo pues

$$|e_P(\varphi)| = |\lim T_n \varphi(P)| \leq \sup \varphi = \|\varphi\|_\infty.$$

Como además se tiene que  $e_P(1) = 1$  y  $e_P(\varphi) \geq 0$  si  $\varphi \geq 0$  entonces por el teorema de Riesz existe una medida boreliana de probabilidad  $\nu_P$  tal que para toda función continua  $\varphi$

$$T\varphi(P) = e_P(\varphi) = \int \varphi dv_P.$$

Hasta el momento sólo definimos  $v_P$  cuando  $P$  está en  $\mathcal{F}$ , para el resto de los  $P$  elijamos una medida boreliana de probabilidad arbitraria. Probemos ahora que esta familia de medidas  $\{v_P : P \text{ en } \mathcal{P}\}$  verifica la fórmula del enunciado para calcular la integral de una función integrable.

Si  $\varphi$  es continua, como  $T_n\varphi \rightarrow T\varphi$  en casi todo punto y  $\sup T_n\varphi < \sup \varphi$  entonces por (2.1) y el teorema de convergencia dominada

$$\int_{\mathcal{P}} T\varphi(P) dv_* = \int \varphi(x) dx.$$

O lo que es lo mismo

$$\int_{\mathcal{P}} \left( \int \varphi dv_P \right) dv_* = \int \varphi(x) dx \quad (3.2)$$

Es decir que la fórmula del enunciado vale para las funciones continuas, pero la clase de funciones para las que vale es cerrada por convergencia puntual dominada de donde vale para toda función integrable  $\varphi$  como queríamos.

Para ver que  $v_P(P) = 1$  notemos que por la misma demostración de la fórmula (2.2), para todo átomo  $L$  de  $\mathcal{P}_n$  y toda función medible  $\varphi$

$$\int_L \left( \int \varphi dv_P \right) dv_* = \int \chi_L(x) \varphi(x) dx.$$

Si tomamos  $\varphi = \chi_L$  entonces

$$\int_L \left( \int \chi_L dv_P \right) dv_* = \int \chi_L(x) \chi_L(x) dx.$$

$$\int_L \mu_P(L) dv_* = \mu(L) = v_*(L)$$

Es decir que  $v_P(L) = 1$  para casi todo  $P$  en  $L$ . Como hay numerables átomos  $L$ , entonces para casi todo  $P$  se tiene  $v_P(L_n(P)) = 1$ ; de donde  $v_P(P) = 1$  para casi todo  $P$  pues  $L_n(P) \searrow P$ . ‡

### Notas:

1. Si cambiamos al intervalo  $([0, 1], \mu)$  por un espacio métrico compacto  $X$  y  $\mu$  por una medida boreliana de probabilidad entonces vale la misma demostración pues  $(C(X), \|\cdot\|_{\infty})$  sigue siendo separable y el teorema de Riesz sigue valiendo.

2. Hay otras demostraciones, como mencionamos antes Rohlin demostró que en realidad toda partición medible de un espacio de Lebesgue es equivalente a las partición del cuadrado por segmentos verticales de donde se puede deducir el teorema en toda su generalidad directamente.

### 3.4. El Teorema de Rohlin

Estamos ahora en condiciones de enunciar y probar el teorema de desintegración de Rohlin en toda su generalidad

**Teorema de desintegración de Rohlin:** Dado un espacio de Lebesgue  $(X, \mathcal{B}, \nu)$  y una partición medible  $\mathcal{P}$ , existe una familia  $\{\nu_P; P \text{ en } \mathcal{P}\}$  de medidas de probabilidad tales que

- Para casi todo  $P$  en  $\mathcal{P}$  se tiene  $\nu_P(P) = 1$
- Para toda función integrable  $\varphi$  su integral se puede calcular como

$$\int \varphi d\nu = \int_{\mathcal{P}} \left( \int \varphi d\nu_P \right) d\nu_*.$$

Más aún, esta familia es “esencialmente” única, es decir si  $\{\mu_P; P \text{ en } \mathcal{P}\}$  verifica las mismas condiciones entonces  $\nu_P = \mu_P$  para casi todo  $P$  en  $\mathcal{P}$ .

**Demostración:**

La existencia de la familia de medidas de probabilidad  $\{\nu_P; P \text{ en } \mathcal{P}\}$  sale del teorema anterior usando que  $(X, \mathcal{B}, \nu)$  es isomorfo (*mod* 0) al intervalo  $[0, 1]$  con la medida de Lebesgue y la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos. Sólo hay que verificar la unicidad.

Ahora, supongamos que tenemos otra familia  $\{\mu_P; P \text{ en } \mathcal{P}\}$  de medidas de probabilidad que verifican las mismas condiciones y es “esencialmente distinta”. Entonces existe un subconjunto  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{P}$  de medida positiva y una función integrable  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_{\mathcal{W}} \left( \int \varphi d\nu_P \right) d\nu_* \neq \int_{\mathcal{W}} \left( \int \varphi d\mu_P \right) d\nu_*.$$

De donde:

$$\int_{\mathcal{P}} \left( \int \varphi \chi_{\mathcal{W}} d\nu_P \right) d\nu_* \neq \int_{\mathcal{P}} \left( \int \varphi \chi_{\mathcal{W}} d\mu_P \right) d\nu_*.$$

Lo que es absurdo ya que ambas integrales deben coincidir con  $\int \varphi \chi_{\mathcal{W}} d\nu$ , de donde  $\nu_P = \mu_P$  para casi todo  $P$  en  $\mathcal{P}$ . †

Notemos que como  $v_P(P) = 1$  entonces la medida  $v_P$  se puede pensar en realidad como una medida en  $P$ . El teorema lo que dice es que dada una partición medible  $\mathcal{P}$ , la medida  $v$  se descompone en una familia de medidas  $v_P$ , una en cada átomo de  $\mathcal{P}$ . Siendo un poco informales podemos decir que

$$v = \int_{\mathcal{P}} v_P dv_*$$

Para ser completos mencionamos el siguiente resultado: Dado un espacio  $(X, \mathcal{B}, v)$  de Lebesgue y una partición  $\mathcal{P}$ , si existe la familia  $\{\mu_P : P \text{ en } \mathcal{P}\}$  entonces la partición  $\mathcal{P}$  es medible.

### Ejemplos:

1. (Particiones Finitas) Toda partición finita o numerable es medible, si  $\mathcal{P} = \{A_n\}$  entonces las medidas desintegradas no son otras que las probabilidades condicionales respecto de los  $A_i$ . Es decir que si  $P = A_n$  entonces

$$v_P(C) = \frac{v(C \cap A_n)}{v(A_n)}.$$

2. (Esperanza Condicional) Dado un espacio de probabilidad, es fácil definir probabilidades condicionales respecto de eventos de probabilidad positiva pero no queda claro cómo uno debería definir las cuando uno condiciona a eventos de probabilidad nula. El teorema anterior propone una respuesta cuando el espacio es de Lebesgue y se tiene una partición medible, sin embargo notemos que la probabilidad condicional no depende solamente del átomo sino de toda la partición!

Algo parecido pasa con la esperanza condicional: dadas dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , la esperanza condicional  $E(X|Y)$  es la variable aleatoria  $\sigma(Y)$ -medible que mejor aproxima a  $X$  ("la mejor apuesta para  $X$  conociendo el valor de  $Y$ ").

Cuando el espacio de probabilidad es de Lebesgue no hay mucho misterio, basta considerar la partición (medible!) inducida por la variable aleatoria  $Y$ . Más precisamente, dado un evento  $w$  sea  $v_w$  la medida de probabilidad asociada al átomo  $Y^{-1}(Y(w))$ , entonces

$$E(X|Y)(w) = \int X dv_w.$$

3. (Foliaciones) Si consideramos el cuadrado unitario y la partición en segmentos verticales entonces ésta es medible y las medidas desintegradas no son otras

que las de Lebesgue en los segmentos (las 1–dimensionales). La fórmula para calcular la integral de una función  $\varphi$  no es otra cosa que el teorema de Fubini.

De forma más general, si tenemos una foliación continua de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , cuando la partición que induce es medible, el teorema nos dice que podemos poner una medida en cada hoja de la foliación de forma que integrar una función en  $U$  es lo mismo que integrar sobre cada hoja (respecto de estas medidas) y luego integrar todos los resultados respecto de la medida cociente.

Cuando la foliación es diferenciable se pueden dar fórmulas explícitas de quienes son las medidas pero si sólo tenemos continuidad éstas pueden resultar bastante patológicas. Por ejemplo, para la foliación de Katok-Milnor las medidas desintegradas son unipuntuales. Es decir que para cada curva  $\Gamma_t$  existe un punto  $p_t$  en  $\Gamma_t$  tal que  $v_t$  es la medida puntual concentrada en  $p_t$ !!!

4. (Fórmula de coarea) Ya sabemos que si  $X$  e  $Y$  son Lebesgue entonces para toda función medible  $T : X \rightarrow Y$ , la partición  $\mathcal{P} = \{T^{-1}(y)\}$  es medible, entonces existe una familia de medidas  $\{v_y : y \text{ en } Y\}$  y una medida  $v_*$  en  $Y$  tal que para toda función integrable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_X f dv = \int_Y \left( \int_{T^{-1}(y)} f dv_y \right) dv_*.$$

En particular, lo anterior vale cuando  $X = \mathbb{R}^n$  y  $Y = \mathbb{R}^m$ . Si además se tiene que  $n \geq m$  y  $T$  es Lipschitz entonces la fórmula de coarea da una expresión explícita de estas medidas:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{T^{-1}(y)} f(x) (Jac T(x))^{-1} d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy$$

Donde  $Jac T$  es el Jacobiano generalizado de  $T$ , es decir si  $D_x T$  es la matriz diferencial de  $T$  en  $x$  entonces

$$Jac T(x) = \sqrt{Det(D_x T D_x T^t)}.$$

5. (Descomposición ergódica) Sea  $X$  un espacio métrico compacto,  $T : X \rightarrow X$  continua y  $Z$  el conjunto de puntos  $x$  en  $X$  tales que el promedio temporal no está bien definido, es decir que para todo  $x$  que no está en  $Z$  y toda función continua  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$A\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i(x)) \text{ existe.}$$

Por último, sea  $\mathcal{P}$  la partición dada por:  $Z$  es un átomo de la partición y al resto lo partimos de forma que  $x_1$  y  $x_2$  están en el mismo átomo si  $A\varphi(x_1) = A\varphi(x_2)$  para toda función continua  $\varphi$ . Luego  $\mathcal{P}$  es una partición medible para toda medida de probabilidad  $\nu$  en  $X$  y si  $\nu$  es  $T$ -invariante entonces  $\nu(Z) = 0$  y  $\nu_P$  es  $T$ -invariante y ergódica para casi todo  $P$  en  $\mathcal{P}$ .

La partición  $\mathcal{P}$  tiene la siguiente propiedad: es la menor partición “medible” en la que  $x$  y  $T(x)$  están en el mismo átomo para todo  $x$  en  $X$ . Cuando la partición en órbitas de  $T$  es medible entonces hay una medida de probabilidad  $T$ -invariante en casi toda órbita, es decir que casi toda órbita tiene que ser finita. Hemos probado entonces que si la partición en órbitas por un automorfismo  $T$  es medible entonces casi todas las órbitas son finitas.

6. (Entropía) Sea dado un espacio de probabilidad  $(X, \nu)$ , sin entrar en detalle vamos a decir que la definición usual de la entropía  $h_\nu(T, \mathcal{P})$  de una partición  $\mathcal{P}$  respecto de una transformación  $T : X \rightarrow X$  que preserve medida sólo tiene sentido cuando  $\mathcal{P}$  es finita o numerable.

Para extender esta definición al caso de  $\mathcal{P}$  medible se puede proceder de la siguiente manera, recordemos que dadas dos particiones finitas o numerables  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  se define la entropía condicional de  $\mathcal{P}$  respecto de  $\mathcal{Q}$  como

$$H_\nu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \nu_Q(P) \log \nu_Q(P). \quad (3.3)$$

Donde  $\nu_Q$  es la probabilidad condicional en el átomo  $Q$  de  $\mathcal{Q}$ .

**Lema:** Si  $(X, \nu)$  es un espacio de probabilidad,  $T : X \rightarrow X$  una transformación que preserve medida y  $\mathcal{P}$  una partición finita o numerable y creciente ( $T\mathcal{P} \geq \mathcal{P}$ ) entonces

$$h_\nu(T, \mathcal{P}) = H_\nu(T\mathcal{P}|\mathcal{P}). \quad (3.4)$$

La ventaja de la definición (2.3) es que tiene sentido siempre que los átomos de  $\mathcal{P}$  intersecten a los de  $\mathcal{Q}$  en conjuntos de  $\nu_Q$ -medida positiva. Luego cuando  $\mathcal{P}$  sea medible y  $(X, \nu)$  un espacio de Lebesgue, via el teorema de Rohlin podemos tomar (2.4) como definición de la entropía de la partición  $\mathcal{P}$  respecto de  $T$ .

# Capítulo 4

## Diferenciación de Integrales

*“The whole book is a commentary on these three main subjects.”* M. de Guzmán

Este capítulo gira alrededor de los siguientes teoremas de H. Lebesgue, el segundo de los cuales es un simple corolario del primero:

**Teorema de diferenciación de Lebesgue:** Dada una función  $f$  en  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , para casi todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\lim \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} f d\mu = f(x).$$

Donde el límite se toma sobre los cubos  $\mathcal{Q}$  centrados en  $x$  con  $\text{diam}\mathcal{Q} \rightarrow 0$ .

**Teorema de densidad de Lebesgue:** Dado un subconjunto medible  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , para casi todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\lim \frac{\mu(A \cap \mathcal{Q})}{\mu(\mathcal{Q})} = \chi_A(x).$$

Donde el límite se toma sobre los cubos  $\mathcal{Q}$  centrados en  $x$  con  $\text{diam}\mathcal{Q} \rightarrow 0$ .

Es natural preguntarse si se pueden reemplazar los cubos  $\mathcal{Q}$  por otras figuras geométricas. Por ejemplo, es fácil ver que no hace falta que los cubos sean centrados o que el teorema sigue siendo cierto para bolas o cualquier familia de conjuntos con excentricidad acotada. Los dos primeros resultados interesantes son debidos a S. Saks y A. Zygmund respectivamente, el primero demostró que el teorema de densidad es cierto para los rectángulos con lados paralelos a los ejes y el segundo que es falso para rectángulos arbitrarios.

En general, dada una familia de conjuntos  $\mathcal{B}$  nos podemos preguntar qué ocurre si reemplazamos a los cubos por la familia  $\mathcal{B}$  en el teorema de diferenciación o en el de densidad. Como veremos más adelante, ciertas propiedades geométricas de la familia  $\mathcal{B}$  se van a ver reflejadas en la acotación de un operador maximal asociado y en el grado en que es cierto o deja de serlo el teorema de Lebesgue.

Nosotros estamos interesados en el teorema de Lebesgue porque uno de los puntos claves del programa de Pugh-Shub para demostrar que ciertos sistemas dinámicos son ergódicos pasa por construir una familia  $\mathcal{J}$  de conjuntos que se lleven bien con el sistema dinámico en cuestión y para la que siga valiendo el teorema de Lebesgue. La dificultad está en que estos conjuntos, los Juliennes, si bien son bastante redondos en una dirección pueden resultar muy alargados en otra.

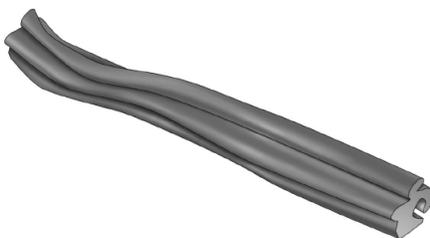


Figura 4.1: Un Julienne 3–dimensional.

En este capítulo nos proponemos estudiar las propiedades de diferenciación de una familia  $\mathcal{B}$  a través de su operador maximal asociado y su función del halo. En primer lugar vamos a repasar brevemente los ejemplos clásicos en  $\mathbb{R}^n$  ilustrando el tipo de dificultades que pueden surgir y cómo se pueden superar. En la segunda sección adoptamos un punto de vista mucho más general, hacemos las definiciones básicas como bases de diferenciación y operadores maximales y probamos algunos resultados relacionando estos conceptos. A continuación, vamos a definir la función del halo de una familia  $\mathcal{B}$  y probaremos que si ésta es finita entonces la base  $\mathcal{B}$  es de densidad. Por último, vamos a probar el teorema de Lebesgue en variedades Riemannianas que nos sirve como excusa para introducir el lema de Besicovitch.

La mayoría del material de este capítulo (y mucho más!) se puede encontrar en el excelente libro de Miguel de Guzman al que hace referencia la frase que abre el capítulo ([Gu1]).

*“The differentiation theory we shall present here appears as an interaction between covering properties of families of sets in  $\mathbb{R}^n$ , differentiation properties similar to that of Lebesgue theorem, and estimations for an adequate extension of wellknown maximal operator of Hardy and Littlewood. The whole book is a commentary on these three main subjects.” M. de Guzmán*

## 4.1. Diferenciación de Integrales en $\mathbb{R}^n$

A continuación repasemos algunas de las ideas involucradas en la demostración del teorema de Lebesgue.

El teorema es fácil cuando la función  $f$  es continua, la dificultad está en extender el resultado a todas las funciones localmente integrables. Como lo que se quiere probar es algo local, alcanza probarlo para las funciones integrables. Tomemos entonces  $f$  en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  y sea  $g$  en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  una función continua cualquiera. Luego tenemos que:

$$\left| \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} f d\mu - f(x) \right| \leq \left| \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} f - g d\mu \right| + \left| \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} g d\mu - g(x) \right| + |g(x) - f(x)|.$$

Ahora, como ya sabemos cierto el teorema para  $g$  continua, haciendo  $\text{diam}(\mathcal{Q}) \rightarrow 0$  obtenemos:

$$\lim \left| \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} f d\mu - f(x) \right| \leq \sup \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f - g| d\mu + |g(x) - f(x)|. \quad (4.1)$$

Si queremos probar que el límite del lado izquierdo es igual a 0 para casi todo  $x$ , basta ver que para todo  $\epsilon$  el conjunto  $A_\epsilon$  de puntos  $x$  en donde es mayor a  $\epsilon$  tiene medida nula. Para ello vamos a usar la siguiente desigualdad,

**Lema (Hardy-Littlewood):** Dada una función  $f$  en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  si definimos la maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f| d\mu.$$

donde el supremo es sobre todos los cubos  $\mathcal{Q}$  centrados en  $x$ . Entonces existe una constante  $c = c(n)$ , independiente de  $f$ , tal que si  $\delta > 0$  entonces

$$|\{x : Mf(x) > \delta\}| \leq \frac{c}{\delta} \|f\|_1.$$

Si el límite (3.1) es mayor a  $\epsilon$  entonces alguno de los dos términos de la derecha debe ser mayor a  $\frac{\epsilon}{2}$ , luego

$$|A_\epsilon| \leq |\{x : M(f - g)(x) > \frac{\epsilon}{2}\}| + |\{x : |f - g|(x) > \frac{\epsilon}{2}\}|.$$

$$|A_\epsilon| \leq \frac{2c}{\epsilon} \|f - g\|_1 + \frac{2}{\epsilon} \|f - g\|_1.$$

$$|A_\epsilon| \leq \frac{2(c+1)}{\epsilon} \|f - g\|_1.$$

Pero como lo anterior es para cualquier  $g$  continua y éstas son densas en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\|f - g\|_1$  es arbitrariamente pequeño de donde  $M_\epsilon$  debe tener medida nula.

Una forma de demostrar la desigualdad de Hardy-Littlewood es via el lema de Vitali.

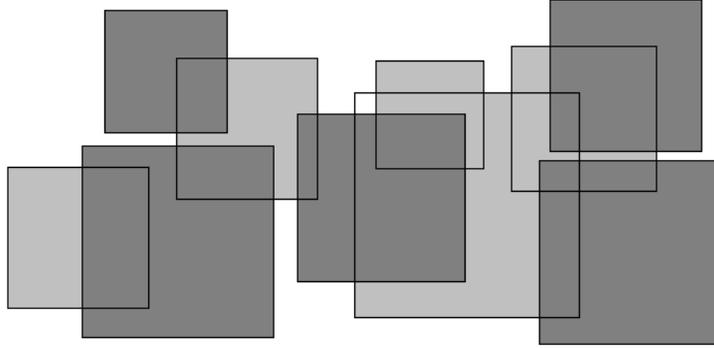


Figura 4.2: Los cuadrados más oscuros son disjuntos y representan una buena proporción del área sombreada.

**Lema (de Vitali):** Existe una constante  $c = c(n)$ , que depende solamente de  $n$ , tal que para toda colección arbitraria de cubos  $\{Q_i\}$  en  $\mathbb{R}^n$  con  $E = \bigcup Q_i$  de medida finita, existen finitos cubos disjuntos  $Q_1, \dots, Q_m$  de la colección tales que

$$\sum_{j=1}^m |Q_j| \geq c|E|.$$

Una vez probado el teorema de Lebesgue surge la pregunta de si se pueden reemplazar los cubos centrados por otras figuras geométricas como bolas o cubos no necesariamente centrados. Por ejemplo, el teorema de diferenciación sigue valiendo si reemplazamos a los cubos centrados en  $x$  por una familia  $\mathcal{B}_x$  tal que  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_x$  es “poco excéntrica”.

**Definición:** Una familia  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_x$  de conjuntos medibles se dice “poco excéntrica” si existe una constante  $k$  tal que cada  $B \in \mathcal{B}_x$  tiene medida positiva, contiene a  $x$  y

$$|B| \geq k(\text{diam}(B))^n \tag{4.2}$$

Al conjunto  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_x$  lo vamos a llamar base de diferenciación, verifique o no la condición (3.2). El teorema de diferenciación de Lebesgue dice que la base  $\mathcal{Q}_1$  de cubos centrados “diferencia la integral de cualquier función  $f$  en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ”. Por lo anterior, lo mismo vale para la base  $\mathcal{B}_1$  de bolas centradas o  $\mathcal{Q}_2$  de cubos no necesariamente centrados.

La base  $\mathcal{R}_2$  de rectángulos de lados paralelos a los ejes no verifica la condición (3.2) y de hecho no diferencia la integral de cualquier función en  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , sin embargo sí lo hace con las funciones acotadas. En particular se tiene que si  $A$  es un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$\lim \frac{\mu(A \cap R)}{\mu(R)} = \chi_A(x) \text{ para casi todo } x \quad (4.3)$$

A una base  $\mathcal{B}$  que verifique (3.3) se le dice que es “de densidad”. Para probar que la base  $\mathcal{R}_2$  es de densidad hacen falta ideas nuevas.

**Definición:** Dado un subconjunto medible  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , definimos su  $\lambda$ -halo  $A(\lambda)$  de la siguiente manera

$$A(\lambda) = \{x : \text{Existe } R \text{ en } \mathcal{R}_2 \text{ tal que } \mu(A \cap R) \geq \lambda\mu(R) \text{ y } x \text{ está en } R\}$$

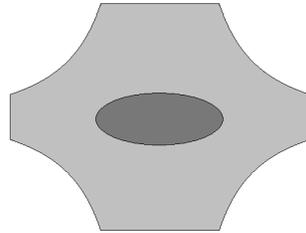


Figura 4.3: El halo de una elipse

**Lema:** Existe una constante  $c = c(n)$  tal que para todo medible acotado  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\mu(A(\lambda)) \leq c\mu(A)$$

La demostración del lema y de cómo usarlo para demostrar que  $\mathcal{R}_2$  es base de densidad no son difíciles pero las postergamos para más adelante cuando los probaremos en un contexto ligeramente más general.

Por último, vale la pena mencionar que la base  $\mathcal{R}_1$  de rectángulos arbitrarios no es de densidad como lo muestra el ejemplo de Nikodym [Ni].

## 4.2. Bases de diferenciación y su maximal asociada

Dado un espacio de medida  $(X, \nu)$ , una base de diferenciación  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_x$  es una familia de conjuntos medibles tales que cada  $B$  en  $\mathcal{B}_x$  tiene medida positiva, contiene a  $x$  y  $\bigcap B = \{x\}$  donde la intersección es sobre todos los  $B$  en  $\mathcal{B}_x$ .

**Definición:** Una base de densidad es una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  tal que para todo medible  $A$  se tiene

$$\lim \frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)} = \chi_A(x) \quad \text{para casi todo } x \text{ en } X.$$

Donde el límite anterior es sobre todos los  $B$  en  $\mathcal{B}_x$  con  $B$  “contrayéndose a  $x$ ”. Cuando  $X$  es un espacio métrico esto significa  $\text{diam}(B) \rightarrow 0$ .

### Ejemplos:

1. Por el teorema de diferenciación de Lebesgue, las bases  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{Q}_1$  de bolas y cubos centrados son de densidad.
2. La bases  $\mathcal{R}_1$  de rectángulos en el plano no es de densidad como lo muestra el ejemplo de Nikodym [Ni], sin embargo, Saks demostró que la base  $\mathcal{R}_2$  de rectángulos con lados paralelos a los ejes sí es base de densidad.
3. En el primer capítulo vimos un ejemplo de dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{H}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  para las que los  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ -rectángulos no son una base de densidad.

Dada una base  $\mathcal{B}$  y una función integrable  $f$  definamos

$$\underline{D}(f, x) = \liminf \frac{1}{\nu(B)} \int_B f d\nu \quad \text{y} \quad \overline{D}(f, x) = \limsup \frac{1}{\nu(B)} \int_B f d\nu.$$

donde el límite se toma sobre todos los  $B$  en  $\mathcal{B}_x$  contrayéndose a  $x$ . En el caso en que  $X$  sea un espacio métrico, como el límite significa  $\text{diam}(B) \rightarrow 0$ , la definición tiene sentido para cualquier función localmente integrable.

**Definición:** Vamos a decir que  $\mathcal{B}$  diferencia a  $\int f$  (o directamente que diferencia a  $f$ ) si se tiene que:

$$\underline{D}(f, x) = \overline{D}(f, x) = f(x) \quad \text{para casi todo } x.$$

**Ejemplos:**

1. Si  $X$  es un espacio métrico entonces toda base  $\mathcal{B}$  diferencia a cualquier función continua  $f$ .
2. La base  $\mathcal{B}$  es de densidad si y sólo si diferencia a todas las funciones características.
3. El teorema de diferenciación de Lebesgue dice que la base  $\mathcal{B}_1$  de bolas centradas diferencia a toda función localmente integrable y el teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund (pag. 49) dice que la base  $\mathcal{R}_2$  de rectángulos de lados paralelos a los ejes lo hace con toda función acotada pero no con las integrables.

**Teorema (Busseman-Feller):** Dado un espacio de medida  $(X, \nu)$ , si una base  $\mathcal{B}$  es de densidad entonces diferencia a toda función acotada.

**Demostración:**

Como  $\mathcal{B}$  es base de densidad entonces por el segundo ejemplo  $\mathcal{B}$  diferencia a las funciones características de donde también lo hace con las funciones simples.

Dada una función acotada  $f$ , siempre existe una sucesión creciente de funciones simples  $\{f_n\}$  tales que  $f_n \nearrow f$ , luego como  $\mathcal{B}$  diferencia a las  $\{f_n\}$

$$f_n(x) = \underline{D}(f_n, x) \leq \underline{D}(f, x) \text{ para casi todo } x.$$

Tomando lím con  $n \rightarrow \infty$  obtenemos  $f(x) \leq \underline{D}(f, x)$  para casi todo  $x$  y de forma completamente análoga se prueba que  $\overline{D}(f, x) \leq f(x)$  para casi todo  $x$ .

Es decir que

$$\underline{D}(f, x) = \overline{D}(f, x) = f(x) \text{ para casi todo } x.$$

Hemos probado entonces que  $\mathcal{B}$  diferencia a toda función acotada. ‡

El siguiente corolario es fácil de probar pero bastante útil.

**Corolario:** Dado un espacio de medida  $(X, \nu)$  y una base de densidad  $\mathcal{B}$ , si  $f \geq 0$  entonces para casi todo  $x$  en  $X$  se tiene que:

$$f(x) \leq \underline{D}(f, x).$$

**Demostración:**

Sea  $f_n(x) = \min\{f(x), n\} \leq f(x)$ , luego como  $f_n(x) \leq n$  para todo  $x$  entonces  $f_n$  es acotada y  $\mathcal{B}$  la diferencia, de donde para casi todo  $x$  en  $X$

$$f_n(x) = \underline{D}(f_n, x) \leq \underline{D}(f, x).$$

Pero  $f_n \rightarrow f$  puntualmente de donde haciendo  $n \rightarrow \infty$

$$f(x) \leq \underline{D}(f, x) \text{ para casi todo } x.$$

Como se quería demostrar. ‡

**Corolario:** Dado un espacio de medida  $(X, \nu)$ , una base de densidad  $\mathcal{B}$  y funciones  $f_0 \leq f_1 \leq f_2$  si  $\mathcal{B}$  diferencia a  $f_0$  y  $f_2$  entonces también diferencia a  $f_1$ .

**Demostración:**

Tenemos que  $0 \leq f_1 - f_0, f_2 - f_1$  de donde, por el corolario anterior se tiene que para casi todo  $x$

$$f_1(x) - f_0(x) \leq \underline{D}(f_1 - f_0, x) \text{ y } f_2(x) - f_1(x) \leq \underline{D}(f_2 - f_1, x).$$

Pero como  $\mathcal{B}$  diferencia a  $f_0$  y  $f_2$ , entonces para casi todo  $x$

$$f_1(x) \leq \underline{D}(f_1, x) \leq \overline{D}(f_1, x) \leq f_1(x).$$

Es decir que  $\mathcal{B}$  diferencia a  $f_1$ . ‡

El corolario anterior muestra que el ser diferenciable por una base de densidad  $\mathcal{B}$  es en parte una cuestión del tamaño de la función  $f$ . Es por eso que uno está interesado en resultados del tipo “ $\mathcal{B}$  diferencia a las funciones acotadas o integrables o en  $L^p$  para algún  $p$ ”. Es interesante hacer acá el siguiente comentario, que se relaciona con lo dicho antes: es sabido que la base  $\mathcal{R}_2$  de rectángulos con lados paralelos a los ejes no diferencia la integral de cualquier función integrable  $f$ , sin embargo, Besicovitch demostró que para casi todo  $x$  si  $\underline{D}(f, x)$  y  $\overline{D}(f, x)$  son finitos entonces son iguales y coinciden con  $f(x)$ .

Ahora probemos un lema muy sencillo que nos servirá más adelante.

**Lema:** Dado un espacio de medida  $(X, \mu)$ , una base de densidad  $\mathcal{B}$  y una medida  $\nu$  absolutamente continua respecto de  $\mu$ , si  $d\nu = h d\mu$  y  $\mathcal{B}$  diferencia la integral de la función  $h$  entonces  $\mathcal{B}$  es base de densidad para  $(X, \nu)$ .

**Demostración:**

Sea  $A$  un subconjunto medible de  $X$ . Luego si  $\mathcal{B}$  diferencia la integral de  $h$  entonces también lo hace con la de  $\chi_A h$  por el corolario anterior. Consideremos ahora el siguiente límite.

$$\lim \frac{\int_{\beta} \chi_A h d\mu}{\mu(\beta)} / \frac{\int_{\beta} h d\mu}{\mu(\beta)}.$$

Como  $\mathcal{B}$  diferencia la integral de  $h$  y de  $\chi_A h$  entonces el límite converge para  $\mu$ -casi todo  $x$  a  $\chi_A h/h = \chi_A$ , siempre y cuando  $h > 0$ . Pero como  $h \geq 0$  y la igualdad se da en un conjunto de  $\nu$ -medida nula entonces, reescribiendo el límite usando  $d\nu = h d\mu$ ,

$$\lim \frac{1}{\nu(\beta)} \int_{\beta} \chi_A d\nu = \lim \frac{\int_{\beta} \chi_A h d\mu}{\int_{\beta} h d\mu} = \chi_A(x) \text{ para } \nu - \text{casi todo } x.$$

Es decir que  $\mathcal{B}$  diferencia la integral de todas las funciones características en  $(X, \nu)$ , o dicho de otra forma  $\mathcal{B}$  es base de densidad, como queríamos demostrar. ‡

De forma análoga a lo hecho en  $\mathbb{R}^n$  con la base  $\mathcal{Q}_1$  de cubos centrados, para cualquier base de diferenciación  $\mathcal{B}$  vamos a definir la maximal asociada a la base de la siguiente manera:

**Definición:** Dado un espacio de medida  $(X, \nu)$  y una base de diferenciación  $\mathcal{B}$ , definimos la maximal  $M_{\mathcal{B}}$  como un operador que asocia a cada función integrable  $f$  una función medible  $M_{\mathcal{B}}f$  de la siguiente manera

$$M_{\mathcal{B}}f(x) = \sup \left\{ \frac{1}{\nu(B)} \int_B |f| d\nu : B \text{ en } \mathcal{B}_x \right\}.$$

La idea es que la continuidad de la maximal en un espacio de funciones se ve reflejada en propiedades de diferenciación de funciones en ese espacio por la base  $\mathcal{B}$ . Por ejemplo, si  $M_{\mathcal{B}}$  es continua de  $L^p$  en  $L^p$  para  $p \geq 1$  entonces  $\mathcal{B}$  diferencia la integral de cualquier función en  $L^p$ . Lamentablemente, la maximal casi nunca es continua en  $L^1$  (de hecho generalmente  $M_{\mathcal{B}}f$  ni siquiera es integrable), sin embargo, como dice el teorema que sigue, alcanza con que verifique una desigualdad de tipo débil.

**Teorema:** Sea  $X$  un espacio métrico localmente compacto,  $\nu$  una medida de Radon y  $\mathcal{B}$  una base de diferenciación. Supongamos además que existe una constante  $c$  tal que la maximal verifique la siguiente desigualdad de tipo débil: para todo  $\delta > 0$  se tiene que

$$\nu(\{x : M_{\mathcal{B}}f(x) > \delta\}) \leq \frac{c}{\delta} \|f\|_1. \quad (4.4)$$

Luego  $\mathcal{B}$  diferencia la integral de cualquier función integrable.

**Demostración:**

Alcanza probarlo para  $X$  compacto. La demostración es la misma que en  $\mathbb{R}^n$  con la base  $\mathcal{Q}_1$ . En primer lugar el teorema es trivial para las funciones continuas, veamos que  $\mathcal{B}$  también diferencia la integral de cualquier función integrable  $f$ . Tomemos  $g$  una función continua

$$\left| \frac{1}{v(B)} \int_B f dv - f(x) \right| \leq \left| \frac{1}{v(B)} \int_B f - g dv \right| + \left| \frac{1}{v(B)} \int_B g dv - g(x) \right| + |g(x) - f(x)|.$$

Ahora, como ya sabemos cierto el teorema para  $g$  continua, haciendo  $\text{diam}(B) \rightarrow 0$  obtenemos:

$$\lim \left| \frac{1}{v(B)} \int_B f dv - f(x) \right| \leq \sup \frac{1}{v(B)} \int_B |f - g| dv + |g(x) - f(x)|.$$

Si queremos probar que el límite del lado izquierdo es igual a 0 para casi todo  $x$ , basta ver que para todo  $\epsilon$  el conjunto  $A_\epsilon$  de puntos  $x$  en donde es mayor a  $\epsilon$  tiene medida nula. Si el límite de la izquierda es mayor a  $\epsilon$  entonces alguno de los dos términos de la derecha debe ser mayor a  $\frac{\epsilon}{2}$ , luego

$$|A_\epsilon| \leq |\{x : M_{\mathcal{B}}(f - g)(x) > \frac{\epsilon}{2}\}| + |\{x : |f - g|(x) > \frac{\epsilon}{2}\}|.$$

$$|A_\epsilon| \leq \frac{2c}{\epsilon} \|f - g\|_1 + \frac{2}{\epsilon} \|f - g\|_1.$$

$$|A_\epsilon| \leq \frac{2(c+1)}{\epsilon} \|f - g\|_1.$$

Pero como lo anterior es para cualquier  $g$  continua y éstas son densas en  $L^1(X)$  entonces  $\|f - g\|_1$  es arbitrariamente pequeño de donde  $A_\epsilon$  tiene medida nula. ‡

Hay un teorema muy lindo de M. de Guzmán y G. Welland que dice que si  $X = \mathbb{R}^n$  y la base  $\mathcal{B}$  es invariante por traslaciones entonces vale la vuelta, es decir que si la base diferencia la integral de todas las funciones en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces existe una constante  $c$  tal que vale la desigualdad (3.4).

Por ejemplo, consideremos la base  $\mathcal{R}_1$  de rectángulos en el plano y supongamos que diferencia la integral de todas las funciones integrables. Luego sea  $\mathcal{Q}$  el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , sabemos por lo recién dicho, que existe una constante  $c$  tal que para todo  $\delta > 0$

$$|\{x : M_{\mathcal{R}_1} \chi_{\mathcal{Q}}(x) > \delta\}| \leq \frac{c}{\delta} \|\chi_{\mathcal{Q}}\|_1 = \frac{c}{\delta} \quad (4.5)$$

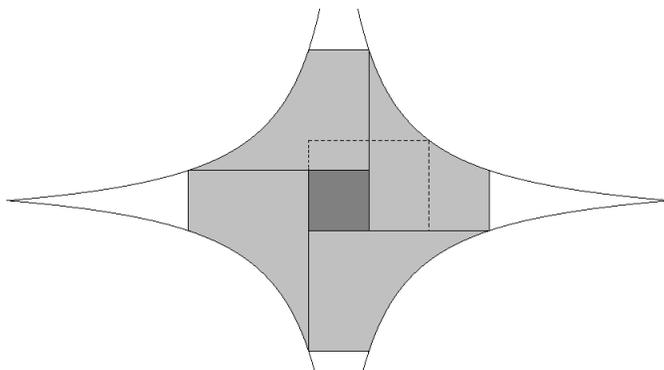


Figura 4.4: El  $\frac{1}{3}$ -halo del cuadrado  $[0, 1]^2$  respecto de la base  $\mathcal{R}_1$

Pero el conjunto  $\{x : M\chi_Q(x) > \delta\}$  en particular contiene a todos los rectángulos de área  $\frac{1}{\delta}$  que cubren al cuadrado de donde

$$|\{x : M\chi_Q > \delta\}| \geq 1 + 4 \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{t\delta} dt = 1 + \frac{4}{\delta} \log \frac{1}{\delta}.$$

Lo que contradice (3.5), es decir que  $\mathcal{R}_1$  no diferencia la integral de todas las funciones en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Si bien por lo recién hecho, la maximal asociada a la base  $\mathcal{R}_2$  no verifica una desigualdad como la del teorema anterior, N.Fava [Fa] y M. de Guzmán [Gu2] demostraron que existe una constante  $c > 0$  tal que

$$|\{x : Mf(x) > \delta\}| \leq c \int \frac{|f|}{\delta} (1 + \log^+ \frac{|f|}{\delta})^{n-1} d\mu.$$

De lo anterior se deduce:

**Teorema(Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund):** La base  $\mathcal{R}_2$  de rectángulos con lados paralelos a los ejes diferencia la integral de todas las funciones  $f$  en  $L(\log^+ L)^{n-1}$ , en particular diferencia funciones de  $L^p$  para todo  $p > 1$ .

### 4.3. La función del halo

La base  $\mathcal{R}_2$  de rectángulos con lados paralelos a los ejes es base de densidad pero no diferencia la integral de todas las funciones en  $L^1$  de donde la maximal asociada no verifica la desigualdad (3.4). ¿Cómo probar entonces que  $\mathcal{R}_2$  es base de densidad? La idea es probar la desigualdad pero para una clase más chica de funciones. En particular vamos a probar que para la base en cuestión, existe una constante  $c$  que hace cierta a la desigualdad siempre y cuando  $f$  sea una función característica.

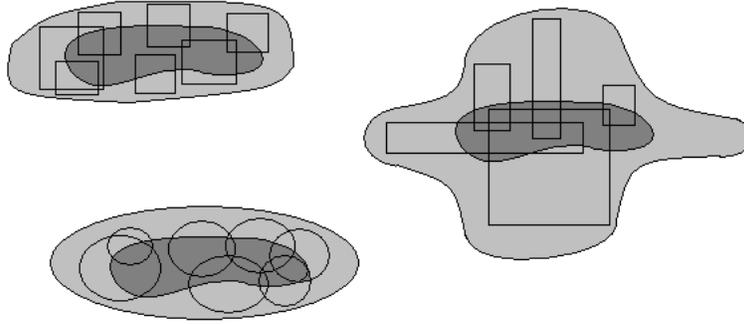


Figura 4.5: El  $\frac{1}{3}$ -halo de la misma figura respecto de las bases  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{B}_1$ .

**Definición:** Dado un espacio de medida  $(X, v)$  y una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  vamos a definir el  $\lambda$ -halo de un medible  $A$  como

$$A(\lambda) = \{x / \text{Existe } B \text{ en } \mathcal{B}_x \text{ con } \frac{v(A \cap B)}{v(B)} \geq \lambda\}.$$

**Definición:** Dado un espacio de medida  $(X, v)$  y una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  definimos su función del halo  $\phi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  como

$$\phi(\lambda) = \inf\{c : v(A(\lambda)) \leq cv(A) \text{ para todo } A \text{ medible}\}.$$

Un par de aclaraciones: en la definición anterior puede ocurrir que no exista ningún  $c$  tal que  $v(A(\lambda)) \leq cv(A)$  para todo medible  $A$ , en ese caso ponemos  $\phi(\lambda) = \infty$ . Cuando la función del halo de una base  $\mathcal{B}$  sea finita para todo  $\lambda$  en  $(0, 1)$  vamos a decir que  $\mathcal{B}$  “tiene función del halo finita”. Por lo general no vamos a estar interesados en el valor exacto de la función del halo sino en su orden de magnitud.

### Ejemplos:

1. Por el lema de Vitali, las bases  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{Q}_1$  de cubos y bolas centradas en  $\mathbb{R}^n$  tienen función del halo  $\phi$  con  $\phi(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}$ .
2. La base  $\mathcal{R}_2$  de rectángulos de lados paralelos a los ejes en  $\mathbb{R}^n$  tiene función del halo  $\phi$  con  $\phi(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda})^{n-1}$ .
3. El ejemplo de Nikodym al que hacíamos referencia antes muestra que la base  $\mathcal{R}_1$  de rectángulos tiene función del halo infinita en todo punto, es decir que  $\phi(\lambda) = \infty$  para todo  $\lambda$  en  $(0, 1)$ .

4. En el ejemplo de “Foliaciones y bases de densidad” del primer capítulo, si  $\phi$  es la función del halo de la base de  $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ -rectángulos entonces  $\phi(\frac{1}{3}) = \infty$ .

Notemos que en los dos primeros ejemplos la función del halo es finita y las bases son de densidad y en cambio en los dos últimos la función del halo no es finita y las bases no son de densidad. Lo anterior no es un hecho casual, a continuación vamos a probar que si una base  $\mathcal{B}$  tiene función del halo finita entonces es base de densidad.

**Teorema:** Dado un espacio métrico  $X$  y una medida de Radon  $\nu$ , si una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  tiene función del halo finita entonces  $\mathcal{B}$  es base de densidad.

**Demostración:**

Veamos que dado un medible  $A$ , para casi todo  $x$  que no está en  $A$  el límite es 0. Para ello basta probar que para todo  $\lambda > 0$  el conjunto  $F$  de puntos que no están en  $A$  y el límite superior es  $> \lambda$  tiene medida nula.

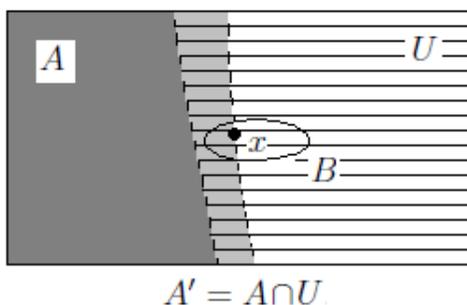


Figura 4.6: Si  $x$  está en  $F$ , entonces siempre existe  $B$  suficientemente pequeño tal que está contenido en  $U$  y la densidad relativa de  $A$  en  $B$  es  $> \lambda$ .

Tomemos un abierto  $U$  que contiene a  $A^c$  y sea  $A' = A \cap U$ . Si  $x$  está en  $F$  entonces  $x$  está en  $U$  y existe  $B$  en  $\mathcal{B}_x$  arbitrariamente pequeño cuya densidad relativa respecto de  $A$  es  $> \lambda$ , en particular podemos suponer que  $B$  está contenido en  $U$  de donde  $x$  está en  $A'(\lambda)$ . Hemos probado entonces que  $F$  está contenido en  $A'(\lambda)$  luego

$$\nu(F) \leq \nu(A'(\lambda)) \leq \phi(\lambda)\nu(A') = \phi(\lambda)\nu(A \cap U).$$

Pero como  $\nu$  es una medida de Radon entonces podemos tomar  $U$  que cubra a  $A^c$  con  $\nu(A \cap U)$  arbitrariamente pequeña, de donde  $\nu(F) = 0$  como queríamos.

Para terminar la demostración basta intercambiar  $A$  por  $A^c$  y concluir que para todo  $x$  en  $A$  el límite es 1. ‡

Vamos a decir que una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  es de Busemann-Feller si  $B$  está en  $\mathcal{B}_x$  para todo  $B$  en  $\mathcal{B}$  que contenga a  $x$ . En [BF], Busemann y Feller demostraron que si  $X = \mathbb{R}^n$  y la base es invariante por homotecias entonces lo anterior es un si y sólo si. Uno de los problemas abiertos más importantes de la teoría de diferenciación de integrales es el “problema del halo”, éste dice que si una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  es invariante por homotecias y Busemann-Feller entonces su función del halo  $\phi$  determina el mayor espacio de funciones a las que  $\mathcal{B}$  diferencia su integral.

A continuación vamos a relacionar la función del halo  $\phi$  de una base  $\mathcal{B}$  que se obtiene como producto de dos bases  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  con sus funciones del halo  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . En particular el siguiente teorema nos va a servir para demostrar que ciertas bases que son producto de bases de densidad son también base de densidad.

**Teorema:** Dados espacios de medida  $X$  y  $Y$  con bases de diferenciación  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ , si sus funciones del halo  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son finitas entonces la base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$  de  $X \times Y$  también tiene función del halo  $\phi$  finita. Más aún, vale que si  $0 < \lambda, \lambda_1, \lambda_2 < 1$  son tales que  $(1 - \lambda) \leq (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$  entonces

$$\phi(\lambda) \leq \phi_1(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2) \quad (4.6)$$

**Demostración:**

Para cada subconjunto  $A$  de  $X \times Y$  y cada  $y$  en  $Y$  vamos a denotar  $A_y$  a la sección horizontal de  $A$  a altura  $y$ , más precisamente  $A_y = \{x \mid (x, y) \text{ está en } A\}$ . Análogamente se define  $A_x$  para  $x$  en  $X$ .

La desigualdad (3.6) implica que  $\phi$  es finita para todo  $\lambda$  en  $(0, 1)$ , de forma que nos concentraremos en probarla directamente. Para ello basta ver que para todo medible  $A$  de  $X \times Y$  se tiene que

$$|A(\lambda)| \leq \phi_1(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2)|A| \quad (4.7)$$

Dado  $A$  en  $X \times Y$  sea  $B$  el conjunto que se obtiene de  $A$  al reemplazar cada sección  $A_y$  por su inflada  $A_y(\lambda_1)$ . Es decir

$$\text{Si } A = \bigcup A_y \text{ entonces } B = \bigcup A_y(\lambda_1).$$

Notemos que como la medida de cada sección se multiplicó por a lo sumo  $\phi_1(\lambda_1)$  entonces por el teorema de Fubini

$$|B| \leq \phi_1(\lambda_1)|A|.$$

De la misma forma que antes definimos  $C$  a partir de  $B$  reemplazando cada sección  $B_x$  por su inflada  $B_x(\lambda_2)$ . Luego

$$|C| \leq \phi_2(\lambda_2)|B| \leq \phi_1(\lambda_1)\phi_2(\lambda_2)|A|.$$

Para probar la desigualdad (3.7) alcanza con ver que  $A(\lambda)$  está contenido en  $C$ . Sea  $(x, y)$  un punto en  $A(\lambda)$ , luego existen  $\beta_1$  y  $\beta_2$  en  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  respectivamente tales que  $(x, y)$  está en  $\beta_1 \times \beta_2$  y

$$|A \cap (\beta_1 \times \beta_2)| \geq \lambda|\beta_1 \times \beta_2|.$$

Por otro lado, para calcular la medida de  $A \cap (\beta_1 \times \beta_2)$  debemos integrar sobre todos los  $y'$  en  $\beta_2$  la medida de  $A_{y'} \cap \beta_1$ . Para esto nos dividimos en dos casos

- Si  $y'$  está en  $B_x \cap \beta_2$  entonces  $|A_{y'} \cap \beta_1| \leq |\beta_1|$ .
- Si  $y'$  no está en  $B_x \cap \beta_2$  entonces  $|A_{y'} \cap \beta_1| \leq \lambda_1|\beta_1|$ .

De donde

$$|A \cap (\beta_1 \times \beta_2)| \leq |\beta_1||B_x \cap \beta_2| + \lambda_1|\beta_1|(|\beta_2| - |B_x \cap \beta_2|).$$

$$\lambda|\beta_1||\beta_2| \leq (1 - \lambda_1)|\beta_1||B_x \cap \beta_2| + \lambda_1|\beta_1||\beta_2|.$$

$$(\lambda - \lambda_1)|\beta_2| \leq (1 - \lambda_1)|B_x \cap \beta_2|.$$

$$\lambda_2|\beta_2| \leq |B_x \cap \beta_2|.$$

Es decir que  $y$  está en  $B_x(\lambda_2)$ , de donde  $(x, y)$  está en  $C$  como se quería demostrar. ‡

## 4.4. El teorema de Lebesgue en variedades

El objetivo de esta sección es introducir el lema de Besicovitch y usarlo para demostrar el teorema de Lebesgue para variedades Riemannianas.

**Lema de cubrimiento de Besicovitch:** Existe una constante  $b = b(n)$  tal que si se tiene un subconjunto acotado  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  cubierto por una colección  $\mathcal{K}$  de bolas de forma que para todo  $x$  en  $A$  hay una bola de  $\mathcal{K}$  centrada en  $x$  entonces existen subcolecciones de bolas disjuntas  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_b$  tales que

$$E \subset \bigcup_j \bigcup_{B_i \in \mathcal{K}_j} B_i.$$

Es importante notar que el lema de Besicovitch es “geométrico”, la medida de Lebesgue  $\mu$  no juega ningún rol en él y de ahí su utilidad: lo vamos a poder usar, en principio, para cualquier medida.

**Teorema:** Si se tiene un espacio de medida  $(X, \nu)$  y una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  que verifique el lema de Besicovitch con constante  $b$ , entonces para toda función integrable  $f$  y para todo  $\delta > 0$  se tiene que

$$\nu(\{x : Mf(x) > \delta\}) \leq \frac{b}{\delta} \|f\|_1.$$

**Demostración:**

Sea  $f$  una función integrable y fijemos  $\delta > \delta' > 0$ , ahora tomemos por cada  $x$  en  $\{x : Mf(x) > \delta\}$  un elemento  $B_x$  de  $\mathcal{B}_x$  tal que

$$\int_{B_x} |f| d\nu \geq \delta' \nu(B_x).$$

Sea  $\mathcal{K}$  la colección de todos los conjuntos  $B_x$  elegidos y tomemos las  $b$  subcolecciones  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_b$  que garantiza el lema de Besicovitch.

$$\nu(\{x : Mf(x) > \delta\}) \leq \sum_j \nu\left(\bigcup_{B_i \in \mathcal{K}_j} B_i\right) \leq \sum_j \frac{1}{\delta'} \int |f| d\nu \leq \frac{b}{\delta'} \int |f| d\nu.$$

Como la desigualdad anterior vale para todo  $\delta' < \delta$  entonces

$$\nu(\{x : Mf(x) > \delta\}) \leq \frac{b}{\delta} \|f\|_1.$$

Como se quería demostrar.  $\ddagger$

**Corolario:** Para cualquier medida de Radon  $\nu$  en  $\mathbb{R}^n$ , la base de bolas centradas  $\mathcal{B}_1$  diferencia la integral de cualquier función en  $L^1(X, \nu)$ . En particular, es base de densidad.

Ahora tratemos de extender el lema de Besicovitch a variedades Riemannianas, la idea es probarlo en pequeños abiertos  $U$  que sean muy parecidos a  $\mathbb{R}^n$ . Para ello vamos a precisar un lema de cubrimiento como el de Besicovitch para conjuntos muy parecidos a bolas.

**Lema:** Para cada  $c \geq 1$ , existe una constante  $b = b(n, c)$  tal que si se tiene un subconjunto acotado  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  cubierto por una colección  $\mathcal{K}$  de conjuntos de forma

que para todo  $x$  en  $A$  existe un subconjunto  $B$  en  $\mathcal{K}$  que lo contiene y  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset B \subset B(x, cr)$  entonces existen subcolecciones de conjuntos disjuntos  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_b$  tales que

$$E \subset \bigcup_j \bigcup_{B_i \in \mathcal{K}_j} B_i.$$

Estamos ahora en condiciones de probar el lema de Besicovitch para variedades Riemannianas, lamentablemente éste no va a ser cierto para cualquier variedad (hay contraejemplo) pero va a alcanzar restringirnos a un subconjunto compacto de ella. En particular, para cada variedad compacta  $M$ , existirá una constante  $b = b(M)$  para la que vale el lema de Besicovitch.

**Lema:** Dada una variedad Riemanniana compacta  $M$ , la base  $\mathcal{B}_1$  de bolas centradas verifica el lema de Besicovitch.

**Demostración:**

Tomemos un punto  $x$  en  $M$  y consideremos  $exp_x : T_x M \rightarrow M$  con  $exp_x(0) = x$ . Como se tiene que  $d_0 exp_x = Id$  entonces existe  $\delta > 0$  y un entorno  $U$  de  $x$  en  $M$  tal que  $exp_x : B(0, \delta) \rightarrow U$  es un difeomorfismo 2-bilipschitz. Se deduce entonces, usando el lema anterior, que la base  $\mathcal{B}_1$  de bolas verifica el lema de Besicovitch en  $U$ .

Para probar que vale el lema en toda la variedad  $M$ , basta cubrirla por finitos abiertos como los anteriores y tomar como constante de Besicovitch, la suma de todas las constantes de Besicovitch de todos los abiertos involucrados en el cubrimiento. ‡

**Corolario:** Dada una variedad Riemanniana  $M$ , la base  $\mathcal{B}_1$  de bolas centradas diferencia la integral de cualquier función localmente integrable. En particular,  $\mathcal{B}_1$  es base de densidad.

En el caso de  $M$  compacta, el corolario se puede demostrar usando el lema de Vitali ya que la medida Riemanniana  $\mu$  verifica que existe una constante  $K$  tal que  $\mu(B(x, 2r)) \leq K\mu(B(x, r))$ . La hipótesis de compacidad sobre  $M$  es necesaria ya que existen variedades Riemannianas no compactas para las que las bolas tienen crecimiento exponencial. Sin embargo, en el caso compacto la ventaja de proceder “a la Vitali” está en que esto demuestra que la base  $\mathcal{B}_2$  de bolas no necesariamente centradas también diferencia la integral de cualquier función localmente integrable.



# Capítulo 5

## Foliaciones y medidas

En 1939 el austríaco E. Hopf demostró que el flujo geodésico es ergódico en variedades de curvatura negativa constante y en superficies de curvatura negativa arbitraria. Para extender su resultado a variedades de curvatura negativa arbitraria, Hopf necesitaba probar que ciertas foliaciones eran de clase  $C^1$ , cosa que sólo pudo demostrar en los casos de más arriba. En su tesis, Anosov logró superar este obstáculo demostrando que las foliaciones en cuestión, si bien podían no ser de clase  $C^1$ , tenían cierta propiedad que le servía para continuar el argumento de Hopf.

En sus propias palabras ([An]):

“One of the main results of this paper, namely Theorem 10, is a technical theorem which allows us to bypass this technical difficulty. It turns out that this transformation, even if it is not smooth, takes a set of measure zero into a set of measure zero, and for ergodic theory we do not need more.”

Cuando una foliación tenga esta “cierta propiedad” se dirá que es absolutamente continua. El mérito de Anosov estuvo en darse cuenta exactamente qué información de la foliación utilizar para hacer andar el argumento de Hopf. Citando a Pugh-Shub en [PS3]:

“This is Theorem 10 in Anosov’s thesis, and as he correctly remarks, it is the cornerstone to his analysis. He refers to it as a technical result because it addresses the technical issue of the degree of smoothness of a foliation. Previously, mathematicians had felt that showing that the stable and unstable manifolds were of class  $C^1$  for manifolds of dimension  $\geq 3$  was mainly a matter of working harder. Anosov realized this was

not so and that the generalization lay in a different direction. What Hopf saw as  $C^1$  foliations were actually the one-dimensional embodiment of absolutely continuous foliations whose holonomy maps have continuous Radon-Nikodym derivatives.”

## 5.1. Foliaciones absolutamente continuas

Dada una variedad Riemanniana  $M$ , toda subvariedad inmersa  $N$  hereda una estructura Riemanniana que a su vez induce una medida  $\mu_N$ , en particular si  $M = N$  se tiene que  $\mu_M = \mu$ .

Es natural preguntarse, dada una foliación  $\mathcal{F}$  de una variedad  $M$ , cómo se relacionan la medida Riemanniana  $\mu$  con la familia de medidas  $\{\mu_F : F \text{ en } \mathcal{F}\}$ . Cuando la foliación es suave, la respuesta la tiene el teorema de Fubini pero cuando ésta es solamente continua la cuestión se vuelve un poco más complicada.

Una posibilidad es recurrir al teorema de desintegración de Rohlin, más precisamente, sabemos por lo hecho en el capítulo 2 que existe un cubrimiento de  $M$  por abiertos  $U$  dentro de los cuales se les puede poner una medida  $\nu_F$  a las hojas locales en  $U$  y una medida cociente  $\nu_*$  a la familia de hojas, tales que integrar una función sobre  $U$  equivale a integrarla en cada hoja  $F$  respecto de la medida  $\nu_F$  y luego integrar todos estos resultados respecto de la medida  $\nu_*$ .

El problema con esto es que, como nos enseñan los ejemplos de Katok-Milnor y Shub-Wilkinson, nadie nos asegura que las medidas desintegradas  $\{\nu_F\}$  tengan algo que ver con las medidas Riemannianas  $\{\mu_F\}$ .

Antes de seguir, unas breves aclaraciones sobre la notación. En primer lugar, las medidas Riemannianas (o de Lebesgue) van a estar siempre denotadas por la letra  $\mu$ , por ejemplo  $\mu$  es la medida Riemanniana en  $M$  y  $\mu_F$  es la medida Riemanniana en la hoja  $F$  inducida por la estructura Riemanniana de  $M$ . Por otro lado, las medidas desintegradas y cocientes de  $\mu$  por una foliación  $\mathcal{F}$  se van a denotar por  $\nu$ , por ejemplo  $\nu_F$  es la medida desintegrada en la hoja  $F$  y  $\nu_*$  denota la medida cociente en la familia de hojas de la foliación (entiéndanse éstas siempre restringidas a un abierto  $U$  en donde la partición en hojas locales de  $\mathcal{F}$  sea medible).

A continuación vamos a definir las distintas formas en que una foliación puede ser absolutamente continua y luego vamos a ver cómo éstas se relacionan entre sí y qué tienen que ver con lo anterior.

Para la siguiente definición, sea  $\mathbb{D}^k$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^k$ .

**Definición:** Una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $k$  de una variedad  $M$  es una partición  $\mathcal{F}$  tal que para todo  $x$  en  $M$

1. El átomo  $\mathcal{F}(x)$  de  $\mathcal{F}$  que contiene a  $x$  es una variedad suave  $k$ -dimensional inmersa de forma inyectiva en  $M$ .
2. Existe un abierto  $U$  que contiene a  $x$  y una función continua  $\phi_U : U \rightarrow C^1(\mathbb{D}^k, M)$  tal que para cada  $y$  en  $U$ , la componente conexa de  $U \cap \mathcal{F}(y)$  que contiene a  $y$  es la imagen de la función  $\phi_U(y) : \mathbb{D}^k \rightarrow M$ .

Dado un abierto  $U$  como el del enunciado y un punto  $y$  en él, vamos a decir que la componente conexa de  $\mathcal{F}(y) \cap U$  que contiene a  $y$  es la hoja local de  $y$  en  $U$  y vamos a denotar por  $\mathcal{F}_U$  al conjunto de ellas. En particular  $\mathcal{F}_U$  es una foliación de  $U$  y  $\mathcal{F}_U(y)$  es la hoja local de  $\mathcal{F}$  en  $U$  por  $y$ . No es difícil ver que a partir de la función  $\phi_U$  podemos construir una carta  $(U, \varphi)$  con  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua tal que si  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  entonces para todo  $y_1$  y  $y_2$  en  $U$  se tiene que

$$\mathcal{F}_U(y_1) = \mathcal{F}_U(y_2) \text{ si y sólo si } \varphi_{k+1}(y_1) = \varphi_{k+1}(y_2), \dots, \varphi_n(y_1) = \varphi_n(y_2)$$

Cuando las funciones  $\varphi$  se puedan tomar suaves diremos que la foliación es suave, más generalmente la foliación será  $C^r$  si las  $\varphi$  se pueden tomar  $C^r$ .

**Pregunta:** Dada una foliación  $\mathcal{F}$ ... ¿Es cierto que todo medible  $A$  de  $M$  de medida positiva intersecta a casi toda hoja de  $\mathcal{F}$  en un subconjunto de medida positiva?

Cuando la foliación  $\mathcal{F}$  es suave se sigue del teorema de Fubini que sí es cierto, pero el ejemplo de Katok-Milnor muestra que cuando la foliación es solamente continua puede resultar falso.

**Definición:** Dada una foliación  $\mathcal{F}$  de una variedad Riemanniana  $M$ , vamos a decir que  $\mathcal{F}$  es absolutamente continua en forma débil si para todo medible  $A$  de medida positiva se tiene que para casi todo  $x$  en  $A$

$$\mu_{\mathcal{F}(x)}(A \cap \mathcal{F}(x)) > 0.$$

Si queremos probar que una foliación  $\mathcal{F}$  es absolutamente continua en forma débil lo que podemos hacer es considerar la partición de  $M$  que define  $\mathcal{F}$  y mirar las medidas desintegradas de  $\mu$  sobre cada hoja de  $\mathcal{F}$ . El problema con esto es que la partición que define  $\mathcal{F}$  no es necesariamente medible como vimos en el ejemplo 5 de la sección 2.2. Lo que se puede hacer es restringirnos a un abierto  $U$  que trivialice a la foliación

en donde la partición en hojas locales de  $\mathcal{F}$  sí será medible y ahora comparar para cada hoja local  $\mathcal{F}_U(y)$  su medida desintegrada y su medida Riemanniana.

**Definición:** Dada una foliación  $\mathcal{F}$  de una variedad Riemanniana  $M$ , vamos a decir que  $\mathcal{F}$  es absolutamente continua en forma fuerte si para casi toda hoja local  $\mathcal{F}_U(y)$  de un abierto trivializante  $U$  su medida desintegrada es absolutamente continua respecto de su medida Riemanniana.

Nosotros vamos a estar interesados en las foliaciones estables e inestables,  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  respectivamente, de un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  parcialmente hiperbólico. Si bien éstas no son suaves, Anosov y Sinai demostraron que son absolutamente continuas en un sentido todavía más fuerte que el anterior que involucra su holonomía.

Dados  $x_1$  y  $x_2$  en la misma hoja local de un abierto  $U$  tomemos subvariedades  $T_1$  y  $T_2$  transversales a la foliación con  $x_1$  en  $T_1$  y  $x_2$  en  $T_2$ . Luego definamos la holonomía  $\phi : T_1 \rightarrow T_2$  tal que para cada  $y$  en  $T_1$

$$\phi(y) = \mathcal{F}_U(y) \cap T_2.$$

Como  $T_1$  y  $T_2$  son transversales a la foliación,  $\pi$  está bien definido y es un homeomorfismo entre un entorno de  $x_1$  en  $T_1$  y un entorno de  $x_2$  en  $T_2$ .

**Definición:** Dada una foliación  $\mathcal{F}$  de una variedad Riemanniana  $M$ , vamos a decir que  $\mathcal{F}$  es absolutamente continua si la holonomía  $\pi$  siempre es absolutamente continua (respecto de las medidas Riemannianas en  $T_1$  y  $T_2$ ), con jacobiano acotado que varía de forma continua al variar  $T_1$  y  $T_2$ .

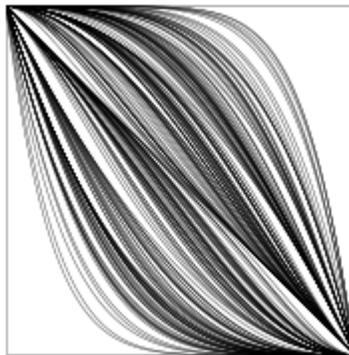


Figura 5.1: La foliación del ejemplo de Katok-Milnor no es absolutamente continua en forma débil.

**Ejemplos:**

1. Si la foliación  $\mathcal{F}$  es suave entonces para cualesquiera dos transversales  $T_1$  y  $T_2$  la holonomía  $\pi$  es suave y en particular absolutamente continua.
2. En el tercer ejemplo del primer capítulo, la holonomía de la foliación  $\mathcal{F}$  no es absolutamente continua. Esto se ve en los rectángulos que componen cada torre, sus lados primero se acercan mucho entre sí, casi hasta tocarse, para luego volver a separarse.
3. La foliación  $\mathcal{F}$  puede no ser absolutamente continua inclusive cuando consista de líneas rectas.

Para ver esto tomemos cualquier homeomorfismo  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que sea estrictamente monótono pero no absolutamente continuo y consideremos la foliación  $\mathcal{F}$  del cuadrado  $[0, 1]^2$  por segmentos  $\Gamma_t = \{((1 - y)t + yf(t), y) : y \text{ en } [0, 1]\}$ .

Para el siguiente lema, recordemos que cuando tenemos un abierto  $U$  que trivializa una foliación  $\mathcal{F}$  entonces  $\mathcal{F}_U$  denota el conjunto de hojas locales en  $U$ . Como éste es a su vez una partición de  $U$  entonces tenemos la medida cociente  $v_*$  en  $\mathcal{F}_U$  dada por  $v_*(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$  donde  $\pi : U \rightarrow \mathcal{F}_U$  es tal que asocia a  $x$  en  $U$  su hoja local  $\mathcal{F}_U(x)$ .

**Lema:** Dada una foliación  $\mathcal{F}$  absolutamente continua, un abierto  $U$  que la trivializa y una variedad transversal  $T$ , si  $\pi_T : (T, \mu_T) \rightarrow (\mathcal{F}_U, v_*)$  entonces  $\pi_T$  es absolutamente continua. Más aún, dado un subconjunto  $A$  de  $T$ , se tiene que

$$\mu_T(A) = 0 \text{ si y sólo si } v_*(\pi_T(A)) = 0.$$

**Demostración:**

En primer lugar construyamos una foliación suave  $\mathcal{G}$  que sea transversal a  $\mathcal{F}$  y  $T$  sea una de sus hojas. Para ello basta tomar una carta que mande  $T$  a un subespacio afín y luego “traer para atrás” la foliación por subespacios paralelos.

Ahora, dada una hoja  $T'$  de  $\mathcal{G}$ , la holonomía  $\phi : T \rightarrow T'$  es tal que para todo subconjunto  $A$  de  $T$  se tiene que:

$$\phi(A) = \pi^{-1}\pi_T(A) \cap T'.$$

Como  $\mathcal{F}$  tiene holonomía absolutamente continua entonces  $A$  tiene medida nula en  $T$  si y solo si  $\pi^{-1}\pi_T(A)$  tiene medida nula en cada hoja  $T'$  de  $\mathcal{G}$ . En particular,

como  $\mathcal{G}$  es suave, se sigue del teorema de Fubini que  $\pi^{-1}\pi_T(A)$  tiene medida nula. Es decir que

$$\mu_T(A) = 0 \implies \mu(\pi^{-1}\pi_T(A)) = 0 \implies v_*(\pi_T(A)) = 0.$$

Por otro lado, como todas las implicaciones son reversibles entonces vale la vuelta, es decir que  $A$  tiene medida nula en  $T$  si y sólo si  $\pi_T(A)$  la tiene en  $\mathcal{F}$ . $\dagger$

El teorema que sigue relaciona las tres formas en que una foliación puede ser absolutamente continua, vale la pena notar que las implicaciones son estrictas.

**Teorema:** Dada una foliación  $\mathcal{F}$  de una variedad Riemanniana  $M$  se tiene que  
abs. continua  $\implies$  abs. continua en forma fuerte  $\implies$  abs. continua en forma débil

**Demostración:**

1) abs. continua en forma fuerte  $\implies$  abs. continua en forma débil

En primer lugar, alcanza ver que si para casi todo  $x$  en un medible  $A$  se tiene que

$$\mu_{\mathcal{F}(x)}(A \cap \mathcal{F}(x)) = 0. \tag{5.1}$$

entonces

$$\mu(A) = 0.$$

En efecto, para todo medible  $A$  el subconjunto  $B$  de puntos  $x$  que verifiquen (4.1) debe tener medida cero por hipótesis (pues  $B$  está contenido en  $A$ ).

Ahora, si tenemos un conjunto  $A$  que mide cero en casi toda hoja, entonces para todo abierto trivializante  $U$ , el conjunto  $A$  debe medir cero para casi todas las medidas desintegradas (pues por hipótesis éstas son absolutamente continuas respecto a las Riemannianas). Pero como la medida de  $A$  se puede calcular integrando las medidas de  $A$  respecto de las desintegradas entonces  $\mu(A \cap U) = 0$  para todo abierto trivializante  $U$ , de donde  $\mu(A) = 0$  como se quería.

2)abs. continua  $\implies$  abs. continua en forma fuerte

Vamos a empezar por un caso más sencillo, supongamos que existe una foliación suave  $\mathcal{G}$  transversal a  $\mathcal{F}$  tal que cualquier hoja de  $\mathcal{F}$  y cualquier hoja de  $\mathcal{G}$  se cortan en exactamente un punto. Supongamos además que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son ambas triviales.

Para cada  $f$  en  $\mathcal{F}$  y  $g$  en  $\mathcal{G}$ , denotemos por  $(f, g)$  el punto de  $M$  en donde se interseca la hoja  $f$  y la hoja  $g$ . Recordemos que tenemos una familia de medidas  $\{v_f\}$ , cada una de ellas soportada en su respectiva hoja y una medida cociente  $v_*^{\mathcal{F}}$

en  $\mathcal{F}$  que verifican las condiciones del teorema de desintegración (como  $\mathcal{F}$  es trivial, entonces en particular  $\mathcal{F}$  es una partición medible). Análogamente se definen la familia de medidas  $\{v_g\}$  y la medida cociente  $v_*^{\mathcal{G}}$ .

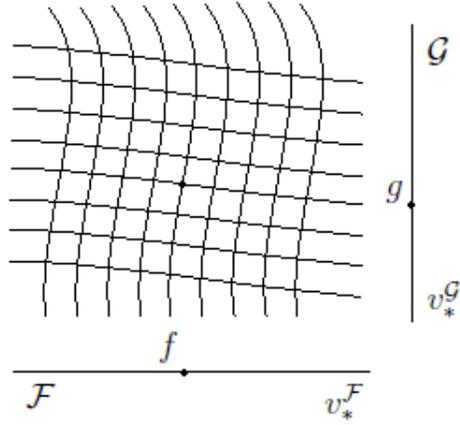


Figura 5.2: Dos foliaciones completamente transversales.

Como la foliación  $\mathcal{G}$  es suave, por el teorema de Fubini, las medidas desintegradas  $\{v_g\}$  son todas absolutamente continuas respecto de sus Riemannianas que a su vez son absolutamente continuas respecto de  $v_*^{\mathcal{F}}$  (por el lema anterior). Luego, se tiene que para todo función medible  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu &= \int_{\mathcal{G}} \int_g \varphi(-, g) dv_g dv_*^{\mathcal{G}}. \\ \int \varphi d\mu &= \int_{\mathcal{G}} \int_{\mathcal{F}} \varphi(f, g) h_g(f) dv_*^{\mathcal{F}} dv_*^{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donde  $h_g$  es la derivada de Radon-Nikodym de  $v_g$  respecto de  $v_*^{\mathcal{F}}$ . Si definimos  $h(f, g) = h_g(f)$  entonces intercambiando el orden de integración en (4.2)

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu &= \int_{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{G}} \varphi(f, g) h(f, g) dv_*^{\mathcal{G}} dv_*^{\mathcal{F}}. \\ \int \varphi d\mu &= \int_{\mathcal{F}} \int_f \varphi(f, -) dv_f dv_*^{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Donde  $v_f$  es una medida en la hoja  $f$ , absolutamente continua con  $v_*^{\mathcal{G}}$  tal que su derivada de Radon-Nikodym es  $h_f(g) = h(f, g)$ . Luego, por la unicidad del teorema

de desintegración, la familia  $\{v_f\}$  son las medidas desintegradas de  $\mu$  respecto a  $\mathcal{F}$  que resultan absolutamente continuas con  $v_*^{\mathcal{G}}$ .

Pero por otro lado, como  $\mathcal{G}$  es suave, entonces las Riemannianas de cualquier transversal a  $\mathcal{G}$  es absolutamente continua con  $v_*^{\mathcal{G}}$ . En particular lo son las Riemannianas de las hojas de  $\mathcal{F}$ . Hemos probado entonces que las medidas desintegradas de las hojas de  $\mathcal{F}$ , las medidas Riemannianas de las hojas de  $\mathcal{F}$  y  $v_*^{\mathcal{G}}$  son todas absolutamente continuas entre sí, de donde  $\mathcal{F}$  es absolutamente continua en forma fuerte.

Para el caso general, no es difícil ver que alcanza probar que la foliación es localmente absolutamente continua en forma fuerte. Para ello, dado  $x$  en  $M$  tomemos un abierto  $U$  que lo contenga y trivialice a  $\mathcal{F}$ . A continuación tomemos una transversal  $T$  a la foliación  $\mathcal{F}$  por  $x$  y luego extendamosla a una foliación  $\mathcal{G}$  también transversal a  $\mathcal{F}$  como en la demostración del lema anterior. Quedándonos con un abierto más chico  $V$  contenido en  $U$  que contenga a  $x$  podemos asegurarnos estar en las condiciones anteriores como se quería. ‡

Por último, probemos que cuando se tienen dos foliaciones absolutamente continuas y transversales entonces la medida Riemanniana  $\mu$  es absolutamente continua respecto de una medida producto.

**Definición:** Vamos a decir que un abierto  $U$  de una variedad  $M$  es producto de dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  si éstas son dos foliaciones transversales de  $U$  tales que cualquier hoja de  $\mathcal{F}$  y cualquier hoja de  $\mathcal{G}$  se intersectan en exactamente un punto.

**Teorema:** Dado un abierto  $U$  de una variedad Riemanniana, si  $U$  es el producto de dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  absolutamente continuas entonces se tiene que la medida Riemanniana  $\mu$  es absolutamente continua respecto de la medida producto  $v_*^{\mathcal{F}} \times v_*^{\mathcal{G}}$ .

**Demostración:**

Para cada  $f$  en  $\mathcal{F}$  y  $g$  en  $\mathcal{G}$ , denotemos por  $(f, g)$  el punto de  $M$  en donde se intersecta la hoja  $f$  y la hoja  $g$ . Recordemos que las medidas desintegradas  $\{v_g\}$  de  $\mu$  respecto de  $\mathcal{G}$  son todas absolutamente continuas respecto a la medida cociente  $v_*^{\mathcal{F}}$ . En realidad, sabemos que las medidas Riemannianas de las hojas de  $\mathcal{G}$  son todas absolutamente continuas con  $v_*^{\mathcal{F}}$  por  $\mathcal{F}$  tener holonomía absolutamente continua, pero por otro lado por ser  $\mathcal{G}$  absolutamente continua en forma fuerte entonces las medidas Riemannianas son absolutamente continuas respecto de las desintegradas.

Luego se tiene que para todo función medible  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int \varphi d\mu = \int_{\mathcal{G}} \int_g \varphi(-, g) dv_g dv_*^{\mathcal{G}}.$$

$$\int \varphi d\mu = \int_{\mathcal{G}} \int_{\mathcal{F}} \varphi(f, g) h(f, g) dv_*^{\mathcal{F}} dv_*^{\mathcal{G}}.$$

Donde  $h(f, g) = h_g(f)$  es la derivada de Radon-Nikodym de  $v_g$  respecto de  $v_*^{\mathcal{F}}$ . Pero la formula anterior dice que

$$d\mu = h(f, g) dv_*^{\mathcal{F}} dv_*^{\mathcal{G}}.$$

Es decir que  $\mu$  es absolutamente continua respecto de la medida producto  $v_*^{\mathcal{F}} \times v_*^{\mathcal{G}}$  con derivada de Radon-Nikodym  $h(f, g)$ . ‡

Notemos que por la demostración anterior en realidad sólo hace falta que una foliación tenga holonomía absolutamente continua y la otra sea absolutamente continua en forma fuerte.

Cuando  $U$  es producto de dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , en cada hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  podemos poner tres medidas distintas, la desintegrada  $v_F$ , la Riemanniana  $\mu_F$  y la cociente  $v_*^{\mathcal{G}}$ . Cuando la foliación  $\mathcal{F}$  es absolutamente continua las dos primeras son equivalentes y cuando  $\mathcal{G}$  es absolutamente continua las dos últimas lo son. En particular, se deduce de la demostración anterior, que si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son absolutamente continuas entonces existen constantes  $k_1, k_2$  y  $k_3$  (independientes de  $F$ ) tales que para toda  $F$  en  $\mathcal{F}$  se tiene que

$$v_F \leq k_1 \mu_F \leq k_2 v_*^{\mathcal{G}} \leq k_3 v_F.$$

## 5.2. Un criterio para ser base de densidad

En [PS], Pugh y Shub demostraron que si un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f$  verifica ciertas condiciones técnicas entonces es ergódico. Uno de los puntos claves en su demostración es la construcción de una base de densidad  $\mathcal{J}$  que se lleve bien con la dinámica de  $f$ . Los elementos de la base  $\mathcal{J}$  son los Juliennes, éstos son conjuntos definidos localmente como producto de las foliaciones estable, central e inestable de  $f$  y la dificultad está en que pueden ser muy chicos en una dirección pero alargados en otra.

En vista de remover algunas de esas condiciones técnicas es que estamos interesados en estudiar cuándo ciertos conjuntos definidos a partir de foliaciones forman una base de densidad. Los resultados del primer capítulo establecen algunas limitaciones, por ejemplo: no es cierto que para cualesquiera dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  los  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -rectángulos sean base de densidad.

En esta sección vamos a dar un criterio para tratar con este tipo de conjuntos construidos a partir de dos foliaciones en la situación ideal en que ambas son absolutamente continuas. En particular, vamos a probar que cuando se tienen dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R}^2$ , si son absolutamente continuas entonces la base de  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -rectángulos es base de densidad.

**Definición:** Dada una variedad Riemanniana  $M$  y foliaciones transversales  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , vamos a decir que la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  es tipo-producto si para todo  $\beta$  en  $\mathcal{B}_x$ , toda hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  que intersecta a  $\beta$  también intersecta a su eje  $G(\beta) = \beta \cap \mathcal{G}(x)$ .

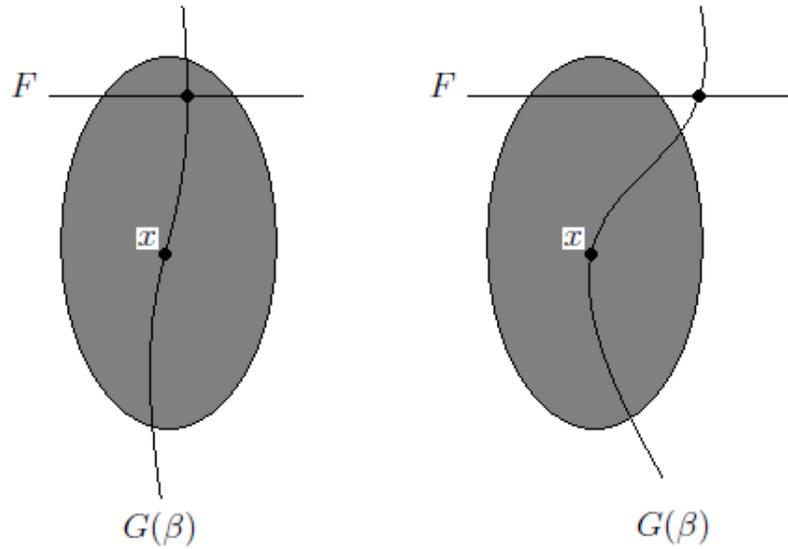


Figura 5.3: Un ejemplo y un no-ejemplo.

La idea de la definición anterior es pensar a cada  $\beta$  en  $\mathcal{B}_x$  como la unión de sus secciones por  $\mathcal{F}$  que se unen a través del eje  $G(\beta)$ . Para cualquier base  $\mathcal{B}$  como la anterior definamos las siguientes bases de diferenciación.

$$\mathcal{B}^{\mathcal{F}} = \bigcup \mathcal{B}_x^{\mathcal{F}} \text{ donde si } x \text{ está en la hoja } F \text{ entonces } \mathcal{B}_x^{\mathcal{F}} = \{\beta \cap F : x \text{ está en } G(\beta)\}.$$

$$\mathcal{B}^{\mathcal{G}} = \bigcup \mathcal{B}_x^{\mathcal{G}} \text{ donde si } x \text{ está en la hoja } G \text{ entonces } \mathcal{B}_x^{\mathcal{G}} = \{\beta \cap G : \beta \text{ está en } \mathcal{B}_x\}.$$

Típicamente, una base  $\mathcal{B}$  como la anterior es tal que sus conjuntos  $\beta$  se obtienen de la siguiente manera: para cada punto  $x$  tomamos primero un subconjunto  $G(\beta)$  de  $\mathcal{G}(x)$  y luego para cada  $y$  en  $G(\beta)$  ponemos un subconjunto de  $\mathcal{F}(y)$  que lo contenga.

**Criterio:** Sean dadas una variedad Riemanniana  $M$ , foliaciones absolutamente continuas  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  y una base de diferenciación  $\mathcal{B}$  tipo-producto. Supongamos además que existe un cubrimiento por abiertos  $U$  tales que para cada uno de ellos existen funciones  $\phi_{\mathcal{F}}, \phi_{\mathcal{G}} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  y una constante  $k$  tales que:

1. Para cada hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$ , la base  $\mathcal{B}^F$  de  $(F, \mu_F)$  tiene función del halo finita  $\phi_F$  tal que  $\phi_F(\lambda) \leq \phi_{\mathcal{F}}(\lambda)$  para todo  $\lambda$  en  $(0, 1)$ .
2. Para cada hoja  $G$  de  $\mathcal{G}$ , la base  $\mathcal{B}^G$  de  $(G, \mu_G)$  tiene función del halo finita  $\phi_G$  tal que  $\phi_G(\lambda) \leq \phi_{\mathcal{G}}(\lambda)$  para todo  $\lambda$  en  $(0, 1)$ .
3. Para todo  $\beta$  en  $\mathcal{B}$  y cualesquiera hojas  $F_1$  y  $F_2$  que intersecten a  $\beta$  se tiene que

$$\mu_{F_1}(\beta) < k\mu_{F_2}(\beta).$$

Luego la base  $\mathcal{B}$  de  $(M, \mu)$  es de densidad.

**Demostración:**

Probemos que  $\mathcal{B}$  tiene función del halo finita en  $(U, \mu)$  de donde en particular es base de densidad.

En primer lugar, como  $\mathcal{F}$  es absolutamente continua, las medidas Riemannianas  $\mu_F$  en las hojas  $F$  de  $\mathcal{F}$  son comparables con sus medidas desintegradas  $v_F$  por una constante independiente de  $x$ , de donde la tercer condición del criterio sigue siendo cierta (digamos para una constante  $k'$ ) si reemplazamos las medidas Riemannianas en las hojas de  $\mathcal{F}$  por sus desintegradas.

Se deduce de lo anterior que existe  $\phi'_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  para la que vale la primer condición del criterio cambiando las medidas Riemannianas  $\mu_F$  por las desintegradas  $v_F$ . Análogamente, existe  $\phi'_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  para la que vale la segunda condición cambiando las medidas Riemannianas  $\mu_G$  por las desintegradas  $v_G$ .

Por último, las medidas desintegradas  $v_G$  son comparables a las medidas riemannianas  $\mu_G$  (por ser  $\mathcal{G}$  absolutamente continua) que a su vez son comparables a la medida cociente  $v_*^{\mathcal{F}}$  (por ser  $\mathcal{F}$  absolutamente continua). Existen entonces constantes  $k_1, k_2 > 0$  tales que  $k_1 v_*^{\mathcal{F}} \leq v_G \leq k_2 v_*^{\mathcal{F}}$ .

Ahora, fijemos  $\lambda > 0$  y tomemos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tales que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{k'}\right) \leq (1 - \lambda_1)\left(1 - \frac{k_2 \lambda_2}{k_1}\right).$$

Vamos a probar que para todo subconjunto  $A$  de  $U$ , su  $\lambda$ -halo  $A(\lambda)$  en  $(U, \mu)$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  satisface

$$\mu(A(\lambda)) \leq \phi'_1(\lambda_1)\phi'_2(\lambda_2)\mu(A).$$

Dado un subconjunto  $A$  de  $U$ , sea  $B$  el conjunto que se obtiene al reemplazar, para cada hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$ , a  $A \cap F$  por su  $\lambda_1$ -halo en  $(F, v_F)$  respecto de la base  $\mathcal{B}^F$ . Es decir

$$\text{Si } A = \bigcup(A \cap F) \text{ entonces } B = \bigcup(A \cap F(\lambda_1)).$$

Como la medida desintegrada en cada hoja de  $\mathcal{F}$  se multiplicó a lo sumo por  $\phi'_1(\lambda_1)$  (por la primer condición del criterio) y como la medida de un conjunto es la integral de las medidas desintegradas en cada hoja, entonces

$$\mu(B) \leq \phi'_1(\lambda_1)\mu(A).$$

De la misma forma que antes definimos  $C$  a partir de  $B$  reemplazando, para cada  $G$  en  $\mathcal{G}$ , a  $B \cap G$  por su  $\lambda_2$ -halo en  $(G, v_G)$  respecto de la base  $\mathcal{B}^G$ . Luego, análogamente al caso anterior se tiene que

$$\mu(C) \leq \phi'_2(\lambda_2)\mu(B) \leq \phi'_1(\lambda_1)\phi'_2(\lambda_2)\mu(A).$$

Todo se reduce entonces a probar que  $A(\lambda)$  está contenido en  $C$ . Sea entonces  $x$  en  $A(\lambda)$ , luego existe  $\beta$  en  $\mathcal{B}_x$  tal que

$$\lambda\mu(\beta) \leq \mu(A \cap \beta).$$

Para calcular la medida de  $A \cap \beta$  podemos proceder de la siguiente manera, para cada  $x'$  en  $G(\beta) = \beta \cap \mathcal{G}(x)$  debemos calcular la medida desintegrada de  $A \cap \beta$  en  $\mathcal{F}(x')$  y después integrar todos estos resultados en  $(G(\beta), \mu_*)$ . Nos dividimos en dos casos

- Si  $x'$  está en  $B$  entonces  $v_{x'}(A \cap \beta) \leq v_{x'}(\beta)$ .
- Si  $x'$  no está en  $B$  entonces  $v_{x'}(A \cap \beta) \leq \lambda_1 v_{x'}(\beta)$ .

De donde

$$\begin{aligned} \mu(A \cap \beta) &= \int_{G(\beta)} v_{x'}(A \cap \beta) d\mu_*. \\ \lambda\mu(\beta) &\leq \int_{B \cap G(\beta)} v_{x'}(\beta) d\mu_* + \lambda_1 \int_{B^c \cap G(\beta)} v_{x'}(\beta) d\mu_*. \end{aligned}$$

Ahora, sea  $t = \inf\{v_{x'}(\beta) : x' \text{ en } G(\beta)\}$ , luego

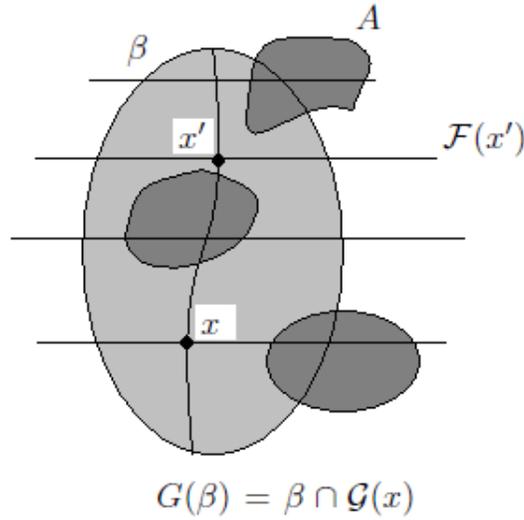


Figura 5.4: Para calcular la medida de  $A \cap \beta$  podemos calcular sus medidas desintegradas en las hojas de  $\mathcal{F}$  y luego integrar respecto de la medida cociente.

$$\lambda t\mu_*(G(\beta)) \leq k't\mu_*(B \cap G(\beta)) + \lambda_1 k't\mu_*(B^c \cap G(\beta)).$$

$$\lambda\mu_*(G(\beta)) \leq (1 - \lambda_1)k'\mu_*(B \cap G(\beta)) + \lambda_1 k'\mu_*(G(\beta)).$$

$$k_2\lambda_2\mu_*(G(\beta)) \leq k_1\mu_*(B \cap G(\beta)).$$

$$\lambda_2 v_G(G(\beta)) \leq v_G(B \cap G(\beta)).$$

Como  $G(\beta) = \mathcal{G}(x) \cap \beta$  hemos probado entonces que si  $G = \mathcal{G}(x)$  entonces  $x$  está en el  $\lambda_2$ -halo de  $B$  respecto de la base  $\mathcal{B}^G$  de  $(G, v_G)$ . Luego  $x$  está en  $C$ , es decir que  $A(\lambda)$  está contenido en  $C$  como queríamos.

Luego  $\mathcal{B}$  es base de densidad de  $(U, \mu)$  y cubriendo a la variedad  $M$  por tales abiertos se deduce que  $\mathcal{B}$  es base de densidad de  $(M, \mu)$ . ‡

### Ejemplos:

1. Consideremos dos foliaciones absolutamente continuas  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R}^2$  y probemos que la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -rectángulos es de densidad.

Por empezar, las dos primeras condiciones del criterio valen trivialmente ya que para toda medida absolutamente continua con la de Lebesgue en  $\mathbb{R}$  la

base de intervalos tiene función del halo finita  $\leq \frac{4}{\lambda}$ . Por otro lado, como  $\mathcal{G}$  es absolutamente continua entonces se verifica la tercer condición.

Hemos probado entonces que si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son absolutamente continuas entonces la base de  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ —rectángulos está en las condiciones del criterio de donde es de densidad.

2. De forma más general, cuando la base  $\mathcal{B}$  se obtiene como producto de dos bases  $\mathcal{B}_F$  y  $\mathcal{B}_G$  de  $(\mathcal{F}, \mu_*^{\mathcal{F}})$  y  $(\mathcal{G}, \mu_*^{\mathcal{G}})$  respectivamente, si éstas tienen funciones del halo finita entonces se está en las condiciones del teorema anterior. Es decir, se tiene que:

**Proposición:** Sea  $U$  un abierto de una variedad Riemanniana que es el producto de dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  absolutamente continuas. Supongamos además que tenemos bases de densidad  $\mathcal{B}_F$  y  $\mathcal{B}_G$  en  $(\mathcal{F}, v_*^{\mathcal{F}})$  y  $(\mathcal{G}, v_*^{\mathcal{G}})$  con función del halo finita, entonces la base producto  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \times \mathcal{B}_G$  de  $U$  es de densidad.

**Demostración:**

En vez de verificar las condiciones del criterio vamos a demostrarlo directamente.

Por el teorema de la página 50 la base  $\mathcal{B}$  es de densidad en  $(U, v_*^{\mathcal{F}} \times v_*^{\mathcal{G}})$ . Pero por otro lado, la medida Riemanniana  $\mu$  es absolutamente continua respecto de la medida producto  $v_*^{\mathcal{F}} \times v_*^{\mathcal{G}}$ , es decir

$$d\mu = h dv_*^{\mathcal{F}} \times dv_*^{\mathcal{G}}.$$

Luego, como  $h$  es acotada por hipótesis, entonces  $\mathcal{B}$  diferencia la integral de  $h$  y se sigue del lema de la página 44 que  $\mathcal{B}$  es base de densidad para  $(U, \mu)$ . ‡

3. Dadas dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  de una variedad  $M$  definamos la base  $\tilde{\mathcal{J}}$  de la siguiente manera. Para cada  $x$  en  $M$  y cualesquiera  $r, s > 0$  sea

$$\tilde{\mathcal{J}}(x, r, s) = \bigcup_{B(x, r, \mathcal{G})} B(x', s, \mathcal{F}).$$

Donde la unión es sobre los  $x'$  en  $B(x, r, \mathcal{G})$  y para una foliación  $\mathcal{H}$  denotamos por  $B(x, t, \mathcal{H}) = B(x, t) \cap \mathcal{H}(x)$ .

La base  $\tilde{\mathcal{J}}$  se define entonces como  $\tilde{\mathcal{J}} = \bigcup \tilde{\mathcal{J}}_x$  donde  $\tilde{\mathcal{J}}_x = \{\tilde{\mathcal{J}}(x, r, s) : r, s > 0\}$ . Es fácil ver que  $\tilde{\mathcal{J}}$  es tipo-producto, por otro lado las dos primeras condiciones del criterio se satisfacen debido al siguiente lema.

**Lema:** Sea  $M$  una variedad Riemanniana y  $\mathcal{H}$  una foliación cualquiera. Dada una hoja  $H$  de  $\mathcal{H}$ , definamos la base de diferenciación  $\mathcal{B}$  de  $(H, \mu_H)$  como

$$\mathcal{B}_x = \{B(x, r, \mathcal{H}) : r > 0\}.$$

Luego, en un abierto suficientemente pequeño, la base  $\mathcal{B}$  verifica el lema de Besicovitch con constante  $b$  independiente de la hoja  $H$ .

**Demostración:**

Tomemos un abierto  $U$  que trivialice a la foliación  $\mathcal{H}$  y tenga constante de Besicovitch  $b$  (para la base de las bolas  $B(x, r)$ ). Luego la misma constante tiene que funcionar para nuestra base de  $\mathcal{B}$  de  $(H, \mu_H)$  pues basta notar que si  $x_1$  y  $x_2$  están en la misma hoja de  $\mathcal{H}$  entonces  $B(x_1, r_1)$  y  $B(x_2, r_2)$  se intersectan si  $B(x_1, r_1, \mathcal{H})$  y  $B(x_2, r_2, \mathcal{H})$  lo hacen. ‡

En definitiva, cuando las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  sean absolutamente continuas, lo único que hace falta para que la base  $\mathcal{J}$  sea de densidad es que verifique la tercer condición del criterio.

4. Dadas dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  de una variedad  $M$  definamos la base  $\mathcal{J}$  de la siguiente manera. Para cada  $x$  en  $M$  y cualesquiera  $r, s > 0$  sea

$$J(x, r, s) = \{\mathcal{F}(x_1) \cap \mathcal{F}(x_2) : x_1 \text{ en } B(x, r, \mathcal{G}) \text{ y } x_2 \text{ en } B(x_2, s, \mathcal{F})\}.$$

La base  $\mathcal{J}$  se define entonces como  $\mathcal{J} = \bigcup \mathcal{J}_x$  donde  $\mathcal{J}_x = \{J(x, r, s) : r, s > 0\}$ . Es fácil ver que  $\mathcal{J}$  es tipo-producto, por otro lado la primer condición del criterio se satisface por el lema anterior y la tercera por ser  $\mathcal{G}$  absolutamente continua.



# Capítulo 6

## Difeomorfismos Hiperbólicos

En su tesis [An] “Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature”, D. V. Anosov demostró que los sistemas dinámicos hiperbólicos tienen las siguientes propiedades

- Son ergódicos, es decir que cualquier subconjunto invariante tiene él o su complemento medida nula.
- Son estructuralmente estables, es decir que cualquier perturbación suficientemente pequeña es un sistema dinámico topológicamente conjugado al original.

Cuando decimos que dos sistemas dinámicos son topológicamente conjugados nos referimos a que son el mismo salvo homeomorfismo, más precisamente en el caso discreto  $f, f' : M \rightarrow M$  son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que  $fg = gf'$ . Quizás la propiedad es más clara en el caso continuo que dice lo mismo pero se puede poner en palabras como “tienen el mismo dibujo”.

*“It is an important concept for the engineer who studies qualitative differential equations, since in engineering the differential equations one works with are only approximations of the real equations. The engineer wants the qualitative conclusion he makes to be valid for the actual differential equation which describes his world. In fact the original idea of structural stability was the joint work of an engineer A. Andronov, and a mathematician L. Pontryagin.”* S. Smale en [Sm].

La definición formal de un sistema dinámico hiperbólico la daremos más tarde, por el momento basta con la idea de que éstos son tales que para todo punto  $x$  de  $M$ , el sistema actúa achicando distancias en una dirección y agrandándolas en otra. Esta condición geométrica tan simple genera una estructura muy rica que es la que permitió a Anosov probar los dos resultados antes mencionados.

Por ejemplo, para todo  $x$  existe una subvariedad  $\mathcal{W}^s(x)$  que lo contiene y en todo punto es tangente a la dirección en que el sistema achica las distancias. El sistema dinámico deja invariante esta familia de subvariedades  $\{\mathcal{W}^s(x)\}$ , más precisamente actúa permutándolas siempre achicando distancias entre puntos de la misma subvariedad. La subvariedad  $\mathcal{W}^s(x)$  se llama la variedad estable de  $x$  y como conjunto admite una descripción bastante sencilla

$$\mathcal{W}^s(x) = \{y : d(f^t x, f^t y) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}.$$

Otra forma de describir la variedad estable  $\mathcal{W}^s(x)$  sería como “los puntos  $y$  con el mismo futuro que  $x$ ” (notemos que ni siquiera es obvio que este conjunto sea una subvariedad). Análogamente se define la variedad inestable  $\mathcal{W}^u(x)$  como “los puntos con el mismo pasado”.

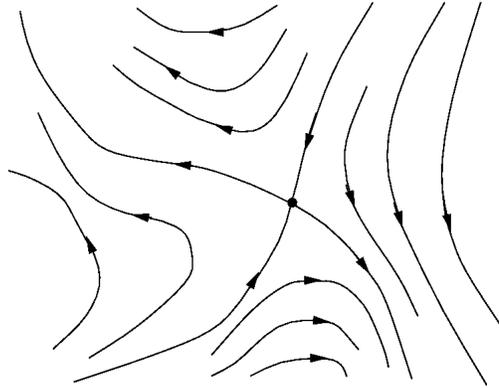


Figura 6.1: Un punto fijo hiperbólico.

Uno de los primeros ejemplos de sistema dinámico hiperbólico es el “Smale’s Horseshoe”, éste es un difeomorfismo  $f$  de la esfera  $\mathbb{S}^2$  que tiene un subconjunto invariante  $H$  tal que  $f|_H$  es topológicamente conjugado al shift  $S : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . El ejemplo es interesante porque  $f|_H$  es completamente caótico pero estructuralmente estable, es decir “caos estructuralmente estable” !

Por lo general los sistemas dinámicos hiperbólicos tienen un comportamiento bastante caótico, esto se puede ver por ejemplo vía la fórmula de Pesin que relaciona la entropía del sistema (una medida de su complejidad) con sus exponentes de Lyapunov (básicamente, los factores con que el difeomorfismo agranda o achica distancias en cada dirección).

En lo que sigue, hacemos un breve repaso sin demostraciones de las definiciones y teoremas más importantes. Nos vamos a restringir al caso de sistemas dinámicos discretos, es decir difeomorfismos.

“I believe there is a second and more important reason for studying the diffeomorphism problem (besides its great natural beauty). That is, the same phenomena and problems of the qualitative theory of ordinary differential equations are present in their simplest form in the diffeomorphism problem. Having first found theorems in the diffeomorphism case, it is usually a secondary task to translate the results back into the differential equations framework.” S. Smale en [Sm].

De ahora en adelante, una variedad  $M$  quiere decir una variedad Riemanniana, compacta y conexa y todos los difeomorfismos se suponen de clase  $C^1$ .

## 6.1. Definiciones y Ejemplos

Ahora vamos a definir los sistemas dinámicos parcialmente hiperbólicos y comentaremos algunas de sus propiedades. Al final de la sección hay algunos ejemplos.

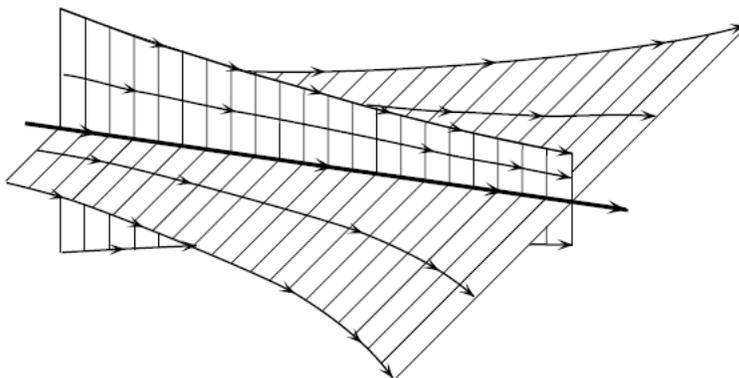


Figura 6.2: Una vista local de un sistema dinámico hiperbólico

**Definición:** Un difeomorfismo  $f$  de una variedad Riemanniana compacta  $M$  se dice parcialmente hiperbólico si existen constantes  $C > 1$  y  $\lambda_s < \gamma_0 < 1 < \gamma_1 < \lambda_u$  y una partición del fibrado tangente  $T_x M = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x)$  tal que

1. Las distribuciones  $E^u$ ,  $E^c$  y  $E^s$  son continuas y  $Tf$ -invariantes.
2. El difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  expande en la dirección de  $E^u(x)$  y contrae en la dirección de  $E^s(x)$ , más precisamente

$$\begin{array}{lll}
 C^{-1}\lambda_u^n \|v\| < \|Tf^n v\| & & \text{para } v \text{ en } E^u(x) \setminus \{0\} \\
 C^{-1}\gamma_0^n \|v\| < \|Tf^n v\| < C\gamma_1^n \|v\| & & \text{para } v \text{ en } E^c(x) \setminus \{0\} \\
 \|Tf^n v\| < C\lambda_s^n \|v\| & & \text{para } v \text{ en } E^s(x) \setminus \{0\}
 \end{array}$$

**Notas:**

1. Vamos a suponer además que  $E^s$  y  $E^u$  no son triviales. Por otro lado, si se tiene  $E^c = \{0\}$  entonces se dice que el difeomorfismo es “hiperbólico” o de “Anosov”.
2. Como la variedad es compacta se puede ver que si se cambia la estructura Riemanniana entonces  $f$  sigue siendo parcialmente hiperbólico, quizás con otras constantes. Más aún, existe una estructura Riemanniana, no necesariamente suave, para la que  $C = 1$ .
3. A las distribuciones  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  sólo le pedimos que sean continuas, sin embargo si  $f$  es de clase  $C^2$  se puede demostrar que resultan Hölder-continuas.

Se sabe que las distribuciones  $E^s$  y  $E^u$  son integrables a foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  respectivamente. Notemos que como las distribuciones no son necesariamente suaves no podemos usar el teorema de Frobenius para probar su integrabilidad. Más precisamente se tiene el siguiente resultado:

**Teorema (de la variedad estable):** Dada una variedad  $M$  y un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f$ , todo punto  $x$  en  $M$  está contenido en una subvariedad suave  $\mathcal{W}_{loc}^s(x)$  tangente a  $E^s$  con la siguiente propiedad: para todo  $\epsilon > 0$  existe una constante  $C(\epsilon)$  tal que si  $y$  está en  $\mathcal{W}_{loc}^s(x)$  entonces

$$d(f^n(y), f^n(x)) < C(\epsilon)(\lambda_s + \epsilon)^n d(y, x).$$

A la subvariedad suave  $\mathcal{W}_{loc}^s(x)$  la llamaremos la variedad estable local de  $x$ . A partir de ella se define la variedad estable como

$$\mathcal{W}^s(x) = \bigcup f^{-n}(\mathcal{W}_{loc}^s(f^n(x))).$$

**Proposición:** Dado un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f$  de una variedad  $M$ , para todo  $x$  en  $M$  se tiene que

$$\text{Si } y \text{ está en } \mathcal{W}^s(x) \text{ entonces } d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0$$

Cuando el difeomorfismo  $f$  es hiperbólico entonces la proposición anterior es un si y sólo si, es decir que la variedad estable de un punto  $x$  “son los  $y$  con el mismo futuro”.

Análogamente se define la variedad inestable local  $\mathcal{W}_{loc}^u(x)$  y la variedad inestable  $\mathcal{W}^u(x)$  que tienen las mismas propiedades cambiando  $n$  por  $-n$  (más generalmente,

cambiando  $f$  por  $f^{-1}$  se intercambian la variedad estable e inestable de forma que todo lo que vale para una vale para la otra).

Por último se tienen las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  cuyas hojas son las variedades estables e inestables respectivamente, éstas resultan continuas (de hecho Hölder-continuas). Si bien  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  no son necesariamente suaves, sí son absolutamente continuas, lo que ayudo a Anosov a usar el argumento de Hopf para demostrar que todo difeomorfismo hiperbólico es ergódico.

**Teorema:** Sea  $f$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico de una variedad  $M$ . Luego si  $f$  es de clase  $C^2$  entonces las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  son absolutamente continuas.

La distribución central  $E^c$  presenta una dificultad mayor, en principio no siempre es integrable pero incluso cuando lo es puede resultar bastante patológica: por ejemplo puede no ser absolutamente continua ni siquiera en forma débil. Este es uno de los principales obstáculos para extender el argumento de Hopf al caso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Vamos a decir que  $f$  es dinámicamente-coherente si  $E^c$ ,  $E^c + E^s$  y  $E^c + E^u$  son todas integrables a foliaciones  $\mathcal{W}^c$ ,  $\mathcal{W}^{cs}$  y  $\mathcal{W}^{cu}$  respectivamente.

### Ejemplos:

1. (Transformaciones Lineales) Sea  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$  el toro 2-dimensional y tomemos  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  el difeomorfismo inducido por la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean  $\lambda_s < 1 < \lambda_u$  los dos autovalores de  $A_2$  y sean  $v_s$  y  $v_u$  autovectores asociados respectivamente. Luego  $A_2$  contrae por  $\lambda_s$  en la dirección de  $v_s$  y expande por  $\lambda_u$  en la dirección de  $v_u$ . El difeomorfismo  $f$  resulta hiperbólico con  $E^s(x) = x + v_s$  y  $E^u(x) = x + v_u$ . La variedad estable (inestable) de un punto  $x$  es la proyección al toro de la recta paralela a  $v_s$  ( $v_u$ ) por él.

Más generalmente, cualquier transformación lineal inversible  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con al menos un autovalor de módulo  $< 1$  y tal que  $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$  induce un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ . En efecto, basta tomar  $E^s$  el autoespacio asociado a los autovalores de módulo  $< 1$ ,  $E^u$  el autoespacio asociado a los autovalores de módulo  $> 1$  y  $E^c$  el autoespacio de autovalores de módulo  $= 1$ .

Cuando la transformación lineal  $A$  no tenga autovalores de módulo 1 diremos que es hiperbólica en cuyo caso  $f$  resulta un difeomorfismo hiperbólico.

2. (Productos cruzados) Si  $f : M \rightarrow M$  y  $g : N \rightarrow N$  son parcialmente hiperbólicos entonces  $f \times g : M \times N \rightarrow M \times N$  también lo es (las distribuciones se suman bien). Ahora, sean  $M$  y  $N$  variedades compactas,  $f : M \rightarrow M$  hiperbólico y consideremos una familia de difeomorfismos  $g_m : N \rightarrow N$  que varía de forma suave con  $m$  en  $M$ . Supongamos además que

$$\max_m \|Tf|_{E^s(f(m))}\| < \min_{m,n} \|Tg_m(n)\| \leq \max_{m,n} \|Tg_m(n)\| < \min_m \|Tf|_{E^u(f(m))}\|$$

Luego  $T : M \times N \rightarrow M \times N$ , definido por  $T(m, n) = (f(m), g_m(n))$ , es parcialmente hiperbólico.

3. (Perturbaciones) Cualquier pequeña perturbación  $f'$  de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f : M \rightarrow M$  sigue siendo parcialmente hiperbólico. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema:** Los difeomorfismos hiperbólicos y los parcialmente hiperbólicos son subconjuntos abiertos de  $\text{Diff}^r(M)$  con la topología  $C^r$ .

La demostración es muy sencilla, las condiciones que hacen a un difeomorfismo hiperbólico o parcialmente hiperbólico son básicamente desigualdades de forma que para cualquier perturbación suficientemente pequeña van a seguir valiendo.

4. (Flujo Geodésico) Consideremos una variedad Riemanniana compacta  $M$ , para todo  $x$  en  $M$  y  $v$  en  $T_x M$  se tiene una única geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma'(0) = v$ , definamos entonces el flujo  $\phi_t(x, v) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ . Notemos que  $\phi_t$  no es un flujo en la variedad  $M$  sino en su tangente  $TM$ . Ahora, como toda geodésica está parametrizada por longitud de arco, entonces el flujo no cambia la longitud de los vectores tangentes es decir que si  $SM = \{(x, v)/\|v\| = 1\}$  entonces podemos pensar que  $\phi_t : SM \rightarrow SM$ , éste es el flujo geodésico. En  $SM$  hay una medida natural llamada la medida de Liouville que resulta invariante para el flujo geodésico.

Si  $M$  tiene curvatura negativa (esto quiere decir que para todos  $v_1$  y  $v_2$  en  $T_x M$ , la curvatura seccional  $K(v_1, v_2)$  es negativa) y ponemos  $\phi = \phi_1 : SM \rightarrow SM$  entonces  $\phi$  resulta parcialmente hiperbólico con distribución central la inducida por el flujo.

En realidad, se tiene que  $\phi_t$  es un flujo hiperbólico, que se define de forma similar a un difeomorfismo hiperbólico pero con una dirección central que es la del flujo. En su tesis Anosov generalizó un resultado de Hopf y probó el siguiente teorema

**Teorema (Anosov):** En una variedad Riemanniana compacta de curvatura negativa el flujo geodésico es ergódico.

Esto dice, entre otras cosas, que casi siempre, si nos paramos en un punto y empezamos a caminar siguiendo una geodésica entonces vamos a volver a pasar muy cerca del punto con una dirección muy parecida. Más aún vamos a volver a pasar infinitas veces, arbitrariamente cerca y con dirección arbitrariamente parecida a cualquier dirección dada e inclusive vamos a poder estimar con qué frecuencia.

5. (Difeomorfismos Hiperbólicos) Sea  $N$  un grupo de Lie nilpotente y simplemente conexo,  $\Gamma$  un subgrupo discreto con cociente compacto y  $A : N \rightarrow N$  un automorfismo de  $N$  tal que  $A(\Gamma) = \Gamma$ . Luego  $f : N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$  es un difeomorfismo afín que resulta hiperbólico si y sólo si la transformación lineal  $T_e A : T_e N \rightarrow T_e N$  es hiperbólica.

En [Sm], Smale preguntó si éstos eran todos los ejemplos posibles de difeomorfismos hiperbólicos salvo conjugación topológica, Shub construyó el siguiente contraejemplo:

Sea  $N/\Gamma$  como antes y  $\pi : N/\Gamma \rightarrow M$  un revestimiento finito (es decir que  $M$  se obtiene cocientando  $N/\Gamma$  por un grupo finito de simetrías). Tal variedad  $M$  se llama una infranilvariedad y el difeomorfismo  $f : N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$  induce un difeomorfismo  $f' : M \rightarrow M$  que llamaremos un infranil-difeomorfismo.

**Conjetura:** Todo difeomorfismo hiperbólico es topológicamente conjugado a un infranil-difeomorfismo.

6. (Restricciones Topológicas) No cualquier variedad Riemanniana compacta  $M$  admite un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  parcialmente hiperbólico. La sola presencia de la partición  $T_x M = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x)$  por distribuciones continuas ya impone condiciones topológicas sobre  $M$  pero éstas no son suficientes. Por ejemplo, la esfera  $\mathbb{S}^3$  admite una descomposición como la anterior pero sin embargo no tiene difeomorfismos parcialmente hiperbólicos como lo prueba el siguiente teorema de Brin, Burago e Ivanov:

**Teorema:** Si una variedad compacta  $M$  de dimensión 3 admite un difeomorfismo parcialmente hiperbólico entonces  $\pi_1(M)$  es infinito.

## 6.2. Teoría Ergódica

La teoría ergódica surgió cuando el físico L. Boltzmann estaba estudiando las ecuaciones de la mecánica estadística que gobiernan el movimiento de un sistema de partículas bajo la acción de ciertas fuerzas. Para poder deducir que el “promedio temporal” es igual al “promedio espacial” en el flujo que estaba analizando, Boltzmann formuló cierta hipótesis. Lo que él quería probar era que, a la larga, el tiempo que una partícula pasa en cierta región era lo mismo que el volumen relativo de ésta. Sin embargo, en la forma en que formuló su hipótesis, ésta resultó falsa, la propiedad que el flujo necesitaba para poder deducir lo que quería es lo que hoy se conoce como que el flujo sea “ergódico”.

De forma más general, supongamos que tenemos un espacio de medida finita  $X$  y una transformación  $T : X \rightarrow X$  ¿Cuándo podemos asegurar que el promedio en el tiempo es lo mismo que el promedio en el espacio?

Es decir, si  $f$  es una función en  $L^1(X)$ , queremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots + f(T^n x)}{n + 1} = \frac{1}{v(X)} \int_X f dv. \quad (6.1)$$

Por ejemplo, sea  $X$  un espacio de medida finita y  $T$  una transformación que preserve medida (es decir que  $v(E) = v(T^{-1}(E))$  para todo medible  $E$ ). El teorema de recurrencia de Poincaré dice que para todo medible  $E$  y casi todo  $x$  en  $E$  existen infinitos enteros positivos  $n$  tales que  $T^n x$  está en  $E$ . Cuando la transformación  $T$  sea ergódica, no sólo vamos a poder decir que  $x$  vuelve a  $E$  sino que vamos a poder estimar con qué frecuencia. Más precisamente, si tomamos  $f = \chi_E$  en (5.1) entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i : 0 \leq i \leq n, T^i x \text{ está en } E\}}{n + 1} = \frac{v(E)}{v(X)}.$$

Es decir que, a la larga, la frecuencia relativa con la que  $x$  pasa por  $E$  es  $v(E)/v(X)$ .

**Teorema (Birkhoff):** Sea  $X$  un espacio de medida finita,  $T : X \rightarrow X$  una transformación que preserve medida y  $f$  en  $L^1(X)$ , entonces se tiene que para casi todo  $x$  el siguiente límite existe

$$S^+(f, T)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+(f, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots + f(T^n x)}{n + 1}.$$

Más aún,  $S^+(f, T)$  es  $T$ -invariante, está en  $L^1(X)$  y

$$\int_X S^+(f, T) dv = \int_X f dv.$$

**Nota:** Si  $T$  es inversible, entonces se define de forma análoga el promedio temporal “hacia atrás”  $S^-(f, T)(x)$  y se prueba que verifica las mismas condiciones y para casi todo  $x$  se tiene que  $S^+(f, T)(x) = S^-(f, T)(x)$ . De ahora en más vamos a denotar a este valor en común como  $S(f, T)(x)$  cuando  $T$  sea inversible, en caso contrario  $S(f, T)(x) = S^+(f, T)(x)$ .

El teorema anterior dice que el promedio en el tiempo está bien definido pero no asegura que éste sea igual al promedio en el espacio.

**Definición:** Sea  $(X, v)$  un espacio de medida finita y  $T : (X, v) \rightarrow (X, v)$  una transformación medible que preserva medida, decimos que  $T$  es ergódica si para todo subconjunto  $T$ -invariante  $A$  de  $X$  se tiene  $v(A) = 0$  o  $v(A) = v(X)$ .

**Teorema:** Sea  $(X, v)$  un espacio métrico compacto con una medida finita  $v$  y  $T : X \rightarrow X$  una transformación medible que preserva medida, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. La transformación  $T$  es ergódica.
2. Las únicas funciones  $f$  en  $L^1(X)$  que son  $T$ -invariantes son las constantes.
3. Para toda función continua  $f$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, T)(x) = \frac{1}{v(X)} \int_X f dv \text{ para casi todo } x$$

4. Para toda función  $f$  en  $L^1(X)$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, T)(x) = \frac{1}{v(X)} \int_X f dv \text{ para casi todo } x$$

### Ejemplos:

1. Sea  $T_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  la rotación de ángulo  $\alpha$  (notar que preserva la longitud de arco). Probemos que  $T_\alpha$  es ergódica si y sólo si  $\alpha$  es irracional.

Si  $\alpha$  es racional, digamos  $\alpha = \frac{m}{n}\pi$  entonces tomemos un  $n$ -ágono regular cualquiera en  $\mathbb{S}^1$  y marquemos pequeños arcos de longitud  $\epsilon > 0$  alrededor de cada uno de los  $n$  vértices formando un conjunto  $A$ . Es fácil ver que  $A$  es

$T_\alpha$ -invariante y si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño entonces  $0 < \mu(A) < 2\pi$ , es decir que  $T_\alpha$  no es ergódica.

Si  $\alpha$  es irracional, entonces el conjunto  $\{n\alpha\}$  es denso en  $\mathbb{S}^1$  de donde cualquier función continua y  $T_\alpha$ -invariante debe ser constante. Ahora, sea  $A$  un subconjunto  $T_\alpha$ -invariante y definamos para cada  $t$  con  $0 \leq t \leq 1$  la función  $f_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $f_t(x) = \mu(A \cap [x, x+t])$ . Como la función  $f_t$  es continua y  $T_\alpha$ -invariante entonces debe ser constante de donde  $f_t(x) = f(t) = \mu(A \cap [0, t])$  para todo  $x$ .

Pero ahora, la función  $f$  es continua y para todos  $0 < x, y, x+y < 1$ ,

$$f(x+y) = \mu(A \cap [0, x+y]) = \mu(A \cap [0, x]) + \mu(A \cap [x, x+y]) = f(x) + f(y)$$

Se sigue de lo anterior que  $f$  es lineal, entonces  $f(t) = t\mu(A)$  para todo  $t$ . Es decir que  $A$  tiene la misma concentración en cualquier subintervalo, de donde ésta debe ser 0 o 1. Hemos probado entonces que  $\mu(A) = 0$  o  $\mu(A) = 1$ .

De forma más general, sea  $\mathbb{T}^n$  el toro  $n$ -dimensional. Para cada  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  en  $\mathbb{T}^n$  definamos la traslación  $T_\alpha : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  por

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \alpha_1, \dots, x_n + \alpha_n).$$

Se tiene el siguiente teorema

**Teorema:** Sea  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , luego la traslación  $T_\alpha$  es ergódica si y sólo si  $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son  $\mathbb{Q}$ -linealmente independientes.

**Demostración:**

Vamos a probar sólo la parte del “sí”. Sea  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible acotada  $T_\alpha$ -invariante y veamos que  $f$  debe ser constante. Escribamos a  $f$  en su serie de Fourier, es decir

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{(k_1, \dots, k_n)} e^{2\pi i \sum k_j x_j}.$$

Luego,  $f$  es  $T$ -invariante si y sólo si para todo  $(k_1, \dots, k_n)$  en  $\mathbb{Z}^n$  se tiene que

$$a_{(k_1, \dots, k_n)} = a_{(k_1, \dots, k_n)} e^{2\pi i \sum k_j \alpha_j}.$$

Pero por la hipótesis del enunciado, esto pasa si y sólo si  $a_{(k_1, \dots, k_n)} = 0$  para todo  $(k_1, \dots, k_n) \neq (0, \dots, 0)$ . Es decir que  $f$  es constante. †

2. Los difeomorfismos  $T_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dados por  $T(\xi) = \xi^n$  preservan la medida de Lebesgue en  $\mathbb{S}^1$  y son ergódicos.

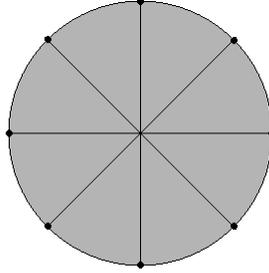


Figura 6.3: La partición  $\mathcal{P}_3$  de  $\mathbb{S}^1$  en 8 arcos semiabiertos de la misma longitud.

Demostremos que  $T_2$  es ergódico, sea  $\mathcal{P}_n$  la partición de  $\mathbb{S}^1$  en  $2^n$  arcos semiabiertos de la misma longitud, uno de los cuales empieza en 1. Consideremos un conjunto medible  $A$  que sea  $T_2$ -invariante y de medida positiva. Por el teorema de diferenciación de Lebesgue, para todo  $\epsilon > 0$  debe existir un arco  $I$  que sea un átomo de algunas de las particiones anteriores, digamos de  $\mathcal{P}_n$ , tal que

$$\mu(A \cap I) \geq (1 - \epsilon)\mu(I).$$

Ahora, como  $T^{2^n} : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una biyección continua con jacobiano constante (e igual a  $2^n$ ), entonces

$$\mu(T(A \cap \mathbb{S}^1)) \geq (1 - \epsilon)\mu(T(I)).$$

De donde, como  $A$  es  $T_2$ -invariante,  $\mu(A) \geq \mu(T(A)) \geq 1 - \epsilon$ . Pero lo anterior era para cualquier  $\epsilon > 0$ , de donde  $\mu(A) = 1$ . Es decir que todo conjunto  $T_2$ -invariante tiene él o su complemento medida nula.

La siguiente pregunta de H. Furstenberg es interesante: ¿Es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{S}^1$  la única medida  $T_2$  y  $T_3$ -invariante sin átomos?

3. El difeomorfismo  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dado por  $T(x, y) = (2x + y, x + y)$  es ergódico. Recordemos que en el ejemplo 1 de la sección anterior vimos que  $T$  que contrae por  $\lambda_s$  en la dirección del autovector  $v_s$  y expande por  $\lambda_u$  en la dirección del autovector  $v_u$ .

Probemos que  $T$  es ergódico, sea  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua y tomemos  $x$  e  $y$  en  $\mathbb{T}^2$  tales que  $x - y = \lambda v_s$ . Entonces  $d(T^n x, T^n y) \rightarrow 0$ , y como el toro es compacto entonces  $f$  es uniformemente continua y concluimos que

$$d(f(T^n x), f(T^n y)) \rightarrow 0 \Rightarrow S_n^+(f, x) - S_n^+(f, y) \rightarrow 0.$$

Hemos probado que si  $x - y = \lambda v_s$  entonces  $S^+(f, x)$  existe si y sólo si  $S^+(f, y)$  lo hace en cuyo caso coinciden. Análogamente si  $y - z = \lambda v_u$  entonces  $S^-(f, y)$  existe si y sólo si  $S^-(f, z)$  lo hace en cuyo caso coinciden. Ahora, por el teorema de Birkhoff existe un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{T}^2$  con  $\mu(S) = 1$  en donde  $S^+(f, -)$  y  $S^-(f, -)$  existen y coinciden. Si  $x$  y  $z$  están en  $S$ , entonces tomemos  $y$  como la intersección de  $\mathcal{W}^s(x)$  y  $\mathcal{W}^u(z)$ , luego

$$S(f, x) = S^+(f, x) = S^+(f, y) = S^-(f, y) = S^-(f, z) = S(f, z).$$

Es decir que  $S(f, -)$  es constante en  $S$  para toda  $f$  continua, de donde por el punto 3 del último teorema  $T$  es ergódica.

Más generalmente, si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal inversible con  $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$  y  $T$  es el difeomorfismo que induce en el toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n$  entonces  $T$  es ergódico si y sólo si, la transformación lineal  $A$  no tiene ningún autovalor que sea una raíz de la unidad.

### 6.3. El argumento de Hopf

En 1939 Hopf demostró que el flujo geodésico en una variedad Riemanniana compacta de curvatura constante y no negativa es ergódico. En su demostración usó un argumento que luego Anosov volvió a usar cuando extendió el resultado de Hopf a variedades con curvatura negativa (no necesariamente constante). La idea es que para probar que el flujo es ergódico, basta probar que cualquier conjunto invariante por él y saturado por las foliaciones estable e inestable tiene que tener medida nula o medida máxima.

Nosotros vamos a usar este argumento en el caso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos.

**Teorema:** Sea  $T$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico de una variedad  $M$  y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, luego se tiene que el promedio temporal hacia adelante  $S^+(f, T)$  es constante en las variedades estables  $\mathcal{W}^s(x)$  y el promedio temporal hacia atrás  $S^-(f, T)$  es constante en las variedades inestables  $\mathcal{W}^u(x)$ .

**Demostración:**

Vamos a probar el caso de las variedades estables, el otro es análogo. Para ello basta probar que para todo  $x$  y todo  $y$  en  $\mathcal{W}^s(x)$  se tiene que  $S^+(f, T)(x) = S^+(f, T)(y)$ . Recordemos que si  $y$  está en  $\mathcal{W}^s(x)$  entonces se tiene que

$$d(T^n y, T^n x) \rightarrow 0.$$

Pero como  $f$  es continua y  $M$  compacta entonces  $f$  es uniformemente continua, de donde

$$d(f(T^n y), f(T^n x)) \rightarrow 0.$$

Pero de lo anterior se deduce que  $S^+(f, T)(x) = S^+(f, T)(y)$ , como queríamos. ‡

Para el teorema que sigue precisamos una definición, vamos a decir que un conjunto  $A$  de una variedad  $M$  es esencialmente saturado por una foliación  $\mathcal{W}$  si existe un conjunto  $B$  saturado por  $\mathcal{W}$  tal que  $\mu(A \triangle B) = 0$ . Cuando la foliación  $\mathcal{W}$  sea absolutamente continua en forma débil, esto es equivalente a que cada hoja de  $\mathcal{W}$  intersekte a  $A$  o a  $M \setminus A$  en un conjunto de medida nula.

**Teorema(Argumento de Hopf):** Sea  $T$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico de una variedad  $M$  y supongamos que  $T$  preserva una medida suave  $v$ . Luego  $T$  es ergódico si y sólo si cualquier conjunto  $T$ -invariante  $A$  esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  tiene él o su complemento medida nula.

**Demostración:**

Si  $T$  es ergódico, como  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  son absolutamente continuas en forma débil, entonces cualquier medible  $T$ -invariante satisface la condición del enunciado. Ahora supongamos que tenemos un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $T$  que satisface la condición del enunciado y probemos que  $T$  es ergódico.

Por el último teorema de la sección anterior, basta ver que para toda función continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que

$$S(f, T) = \frac{1}{v(x)} \int_X f dv.$$

Ahora, supongamos que  $S(f, T)$  no es constante y sea  $r$  en  $\mathbb{R}$  tal que el conjunto  $A = \{x : S(f, T)(x) > r\}$  verifique  $0 < v(A) < v(M)$ . Como  $S(f, T)$  es  $T$ -invariante entonces  $A$  también lo es. Por otro lado, como  $S^+(f, T)(x) = S(f, T)(x)$  para casi todo punto entonces por el teorema anterior  $A$  es esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  y

análogamente es esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^u$ . Pero por hipótesis, cualquier conjunto  $T$ -invariante esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  tiene él o su complemento medida nula. Lo que es absurdo, que viene de suponer que  $S(f, T)$  no era constante.

Pero si  $S(f, T)(x) = t$  para casi todo  $x$ , por el teorema de Birkhoff se tiene

$$tv(x) = \int_X S(f, T)dv = \int_X f dv.$$

Es decir que

$$S(f, T) = t = \frac{1}{v(X)} \int_X f dv.$$

Como queríamos. ‡

Con lo hecho hasta ahora resulta sencillo probar el teorema de Anosov que dice que todo difeomorfismo hiperbólico que preserve una medida suave  $v$  es ergódico.

**Teorema (Anosov [An]):** Todo difeomorfismo hiperbólico  $T$  que preserve una medida suave  $v$  es ergódico.

### Demostración:

Por el argumento de Hopf, basta probar que si  $A$  es un conjunto  $T$ -invariante esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  entonces  $v(A) = 0$  o  $v(M \setminus A) = 0$ . Notemos que como  $v$  es absolutamente continua respecto de la medida Riemanniana  $\mu$  entonces basta probar que  $\mu(A) = 0$  o  $\mu(M \setminus A) = 0$ .

Como  $A$  es esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  entonces existe un conjunto  $B$  saturado por  $\mathcal{W}^s$  tal que  $\mu(A \triangle B) = 0$ . Como  $A$  era esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^u$  entonces  $B$  lo sigue siendo, es decir que cada hoja de  $\mathcal{W}^u$  intersecta a  $B$  o a  $M \setminus B$  en un conjunto de medida nula.

Ahora, al ser  $B$  saturado por  $\mathcal{W}^s$  y como  $\mathcal{W}^s$  tiene holonomía absolutamente continua, entonces “siempre ocurre lo mismo”, es decir:  $B$  intersecta a todas las hojas de  $\mathcal{W}^u$  en un conjunto de medida nula o  $M \setminus B$  intersecta a todas las hojas de  $\mathcal{W}^u$  en un conjunto de medida nula.

En el primer caso, como  $\mathcal{W}^u$  es absolutamente continua en forma débil entonces  $B$  tiene medida nula. En el segundo caso, se deduce de forma análoga que  $M \setminus B$  tiene medida nula. Como  $\mu(A \triangle B) = 0$  entonces  $\mu(A) = 0$  o  $\mu(M \setminus A) = 0$ . ‡

## 6.4. Exponentes de Lyapunov y la fórmula de Pesin

Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  es hiperbólico si contrae en una dirección y expande en otra. De forma más general, podemos tratar de definir para un difeomorfismo arbitrario  $f$  de clase  $C^1$ , la tasa exponencial con que crece un vector  $v$  en  $T_x M$ . Esto es lo que se conoce como exponentes de Lyapunov y nos proponemos resumir las definiciones básicas en esta sección.

Una forma de estudiar la complejidad de un sistema dinámico es tratando de cuantificar su sensibilidad a las condiciones iniciales. Más precisamente, dado un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ , para cada  $x$  en  $M$  y  $v$  en  $T_x M$  el exponente de Lyapunov  $\chi(x, v)$  mide infinitesimalmente cuánto se van separando dos puntos inicialmente cercanos a  $x$  formando un segmento de dirección  $v$ . Por ejemplo, la presencia de un exponente de Lyapunov positivo es suficiente para garantizar cierta complejidad en el dibujo de las órbitas de  $f$ .

Los exponentes de Lyapunov se pueden ver como una alternativa no uniforme a los difeomorfismos (parcialmente) hiperbólicos. Por ejemplo, un difeomorfismo  $f$  se dice no-uniformemente hiperbólico si existe una medida  $\nu$  para la que casi todo punto  $x$  tiene exponentes de Lyapunov no nulos. Fue Pesin el primero en estudiar este caso trasladando los resultados clásicos a este contexto. Uno de los primeros logros de esta teoría es la “fórmula de Pesin” que mencionamos al final de esta sección.

**Definición:** Sea  $f$  un difeomorfismo  $C^1$  de una variedad Riemanniana y compacta  $M$ . Para cada  $x$  en  $M$  y  $v$  en  $T_x M$  se define el exponente de Lyapunov  $\chi(x, v)$  como el siguiente límite cuando existe:

$$\chi(x, v) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Tf_x^n(v)\|.$$

Es fácil ver que cuando  $\chi(x, v) > 0$  entonces  $Tf_x^n$  expande en la dirección de  $v$  con tasa exponencial positiva y cuando  $\chi(x, v) < 0$  entonces  $Tf_x^n$  contrae en la dirección de  $v$  con tasa exponencial negativa.

**Definición:** Se dice que  $x$  en  $M$  es regular si existe una descomposición

$$T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_{m(x)}(x).$$

tal que para todo  $1 \leq j \leq m(x)$  se tiene que

$$\chi(x, v) = \lambda_j(x) \text{ para todo } v \text{ en } E_j(x) \setminus \{0\}.$$

Vamos a tomar siempre  $\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \dots > \lambda_{m(x)}(x)$  y los llamaremos los “exponentes de Lyapunov” de  $x$  y a los subespacios  $E_j(x)$  los subespacios invariantes. Notar que de ser  $x$  regular, el entero positivo  $m(x)$ , los exponentes  $\{\lambda_j(x)\}$  y los subespacios  $\{E_j(x)\}$  están unívocamente determinados y se puede probar que son funciones medibles  $f$ -invariantes (no necesariamente continuas).

**Teorema (Oseledec):** Dado  $f$ , un difeomorfismo  $C^1$  de una variedad Riemanniana compacta  $M$ , el conjunto  $\Lambda$  de puntos regulares es tal que  $v(\Lambda) = 1$  para toda medida de probabilidad invariante por  $f$ .

El teorema anterior también se conoce como “teorema ergódico multiplicativo” por su semejanza con el teorema de Birkhoff. Para lo que sigue denotemos por  $\Sigma$  al subconjunto de puntos regulares que no tienen ningún exponente de Lyapunov nulo.

**Definición:** Dado un punto regular  $x$  en  $\Sigma$  definimos el subespacio estable  $E^s(x)$  y el subespacio inestable  $E^u(x)$  como

$$E^s(x) = \bigoplus_{j:\lambda_j(x)<0} E_j(x) \quad \text{y} \quad E^u(x) = \bigoplus_{j:\lambda_j(x)>0} E_j(x).$$

Notemos que si  $x$  está en  $\Sigma$  entonces  $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ .

**Definición:** Dado un punto  $x$  en  $M$  definimos su conjunto estable  $\mathcal{W}^s(x)$  y su conjunto inestable  $\mathcal{W}^u(x)$  como

$$\mathcal{W}^s(x) = \{y : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\} \text{ y } \mathcal{W}^u(x) = \{y : \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}.$$

Como en la sección 1, se prueba que si  $f$  es un difeomorfismo de clase  $C^{1+\delta}$  entonces para todo  $x$  en  $\Sigma$  se tiene que  $\mathcal{W}^s(x)$  y  $\mathcal{W}^u(x)$  son subvariedades inmersas tangentes a  $E^s$  y  $E^u$  (se llaman subespacio estable e inestable respectivamente).

La fórmula de Pesin que relaciona la entropía métrica de un difeomorfismo  $f$  con sus exponentes de Lyapunov. Recordemos que una medida suave  $v$  en una variedad Riemanniana es una equivalente a la medida Riemanniana  $\mu$  y que  $a^+ = \max\{a, 0\}$ .

**Teorema (Fórmula de Pesin):** Sea  $M$  una variedad Riemanniana compacta y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^{1+\delta}$  que deja fija una medida de probabilidad suave  $v$ . Luego, se tiene que

$$h_v(f) = \int_X \sum \dim E_i(x) \chi_i^+(x) dv.$$

**Comentarios y Ejemplos:**

1. En general, el integrando  $\sum \dim E_i(x)\chi_i^+(x)$  es la tasa exponencial de crecimiento de la medida en la dirección inestable. Más precisamente, si denotamos por  $J_x^u f$  al jacobiano de  $f$  en la variedad inestable  $E^u(x)$  entonces se tiene

$$\log |J_x^u f| = \sum \dim E_i(x)\chi_i^+(x).$$

2. Cuando la medida  $\nu$  es boreliana e invariante por  $f$  entonces se tiene que la entropía  $h_\nu(f)$  está acotada por arriba por la integral anterior. Esta es la desigualdad de Margulis-Ruelle que relaciona dos medidas de la complejidad de  $f$ , su entropía  $h_\nu(f)$  por un lado y los exponentes de Lyapunov por otro.

Más tarde, F. Ledrappier y L. S. Young demostraron que si  $f : M \rightarrow M$  es de clase  $C^2$  y preserva una medida boreliana de probabilidad  $\nu$  entonces: vale la igualdad si y sólo si la foliación inestable es absolutamente continua en forma fuerte (respecto de  $\nu$ ).

3. Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es inducida por una transformación lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces sus exponentes de Lyapunov son los autovalores de  $A$  (más precisamente sus logaritmos). Se deduce de lo anterior que

$$h_\nu(f) = m(\chi_A(x)).$$

Donde  $\chi_A(x)$  es polinomio característico de  $\chi_A$  y  $m(\chi_A(x))$  es su medida de Mahler.

4. Si  $f : M \rightarrow M$  es de clase  $C^{1+\delta}$  y tiene entropía topológica positiva entonces se sigue de la desigualdad de Margulis-Ruelle que existe una medida boreliana de probabilidad invariante con al menos un coeficiente de Lyapunov positivo y al menos uno negativo. En particular, todo difeomorfismo como el anterior de una superficie admite una medida hiperbólica.

Por último, mencionamos el siguiente teorema el cual tampoco demostramos.

**Teorema:** Dada una variedad Riemanniana compacta  $M$  y un difeomorfismo hiperbólico  $f : M \rightarrow M$  que preserva una medida suave  $\nu$  entonces se tiene que: la foliación estable  $\mathcal{W}^s$  es una partición medible (globalmente) si y sólo si  $h_\nu(f) = 0$ .

## 6.5. La conjetura de Pugh-Shub

*“A little hyperbolicity goes a long way toward ergodicity.”*

En esta sección vamos a hacer un breve resumen de los resultados de Pugh-Shub ([PS2] y [PS3]) y de Burns-Wilkinson ([BW1]).

En vista del resultado de Anosov es natural preguntarse si todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico es ergódico. Es fácil ver que esto no es así, si  $f : M \rightarrow M$  es hiperbólico entonces  $f \times Id : M \times N \rightarrow M \times N$  es parcialmente hiperbólico pero no ergódico, pues para todo subconjunto  $A$  de  $N$  se tiene que  $M \times A$  es un subconjunto invariante.

Es interesante analizar qué pasa con el argumento de Hopf en el ejemplo anterior. Para todo  $(m, n)$  en  $M \times N$  las variedades  $\mathcal{W}^s(m, n)$  y  $\mathcal{W}^u(m, n)$  están contenidas en  $M \times \{n\}$ , luego en particular cualquier subconjunto de la forma  $M \times A$  es saturado por  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$ .

**Definición:** Sea  $M$  una variedad compacta y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Se dice que  $f$  es “esencialmente accesible” si todo conjunto saturado por  $\mathcal{W}^s$  y por  $\mathcal{W}^u$  tiene él o su complemento medida nula.

**Conjetura (Pugh-Shub):** Sea  $M$  una variedad compacta y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico de clase  $C^2$  que preserva una medida suave  $\nu$ . Luego si  $f$  es esencialmente accesible entonces es ergódico.

Por el argumento de Hopf, basta probar que todo conjunto esencialmente saturado por las foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  tiene él o su complemento medida nula. Sea entonces  $A$  un conjunto como el anterior, la idea es modificar  $A$  en un conjunto de medida nula para obtener uno saturado por ambas foliaciones y usar que  $f$  es esencialmente accesible. Sea entonces  $A' = A \pmod{0}$  y saturado por  $\mathcal{W}^s$ , luego  $A'$  debe ser esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^u$ . Análogamente, tomemos  $A'' = A' \pmod{0}$  tal que  $A''$  sea saturado por  $\mathcal{W}^u$ . El problema es que  $A''$  no tiene por qué ser saturado por  $\mathcal{W}^s$ .

Al corregir  $A'$  para que sea saturado por una de las foliaciones podemos, sin quererlo, destruir su saturación por la otra. Una posibilidad es usar el teorema de densidad de Lebesgue, éste da una forma de elegir entre todos los representantes de la clase  $\pmod{0}$  de un conjunto  $A$  un representante canónico  $A^*$ , sus puntos de densidad. En [GPS] Grayson, Pugh y Shub propusieron usar en vez de la base  $\mathcal{B}$  de bolas, una base  $\mathcal{J}$  especialmente diseñada a partir de la dinámica de  $f$ . A los conjuntos de la base  $\mathcal{J}$  los llamaron Juliennes y como bien dicen

“Juliennes are the natural shapes to use when analyzing holonomy maps”

A continuación vamos a definir la base  $\mathcal{J}$  de Juliennes, supongamos  $f$  es dinámicamente coherente y sean  $0 < \tau < \sigma < 1$  ciertas constantes cuidadosamente elegidas a partir de  $\lambda_s, \lambda_u, \gamma_0$  y  $\gamma_1$ . En primer lugar, para cada  $p$ , sean

$$J_n^c(p) = \mathcal{W}^c(p, \sigma^n), \quad J_n^s(p) = f^n(\mathcal{W}^s(f^{-n}(p), \tau^n)) \text{ y } J_n^u(p) = f^{-n}(\mathcal{W}^u(f^n(p), \tau^n)).$$

Los Juliennes  $J_n^{cs}(p)$  y  $J_n^{cu}(p)$  y el Julienne sólido  $J_n(p)$  se definen como

$$\begin{aligned} J_n^{cs}(p) &= \{ \mathcal{W}^c(x_1) \cap \mathcal{W}^s(x_2) : x_1 \text{ en } J_n^s(p) \text{ y } x_2 \text{ en } J_n^c(p) \} \subset \mathcal{W}_{loc}^{cs}(p) \\ J_n^{cu}(p) &= \{ \mathcal{W}^c(x_1) \cap \mathcal{W}^u(x_2) : x_1 \text{ en } J_n^u(p) \text{ y } x_2 \text{ en } J_n^c(p) \} \subset \mathcal{W}_{loc}^{cu}(p) \\ J_n(p) &= \{ \mathcal{W}^s(x_1) \cap \mathcal{W}^u(x_2) : x_1 \text{ en } J_n^{cu}(p) \text{ y } x_2 \text{ en } J_n^{cs}(p) \} \end{aligned}$$

La idea es que los Juliennes son “productos locales”. Notar que como  $0 < \tau < \sigma$ , al crecer  $n$  los Juliennes se vuelven más alargados en la dirección central.

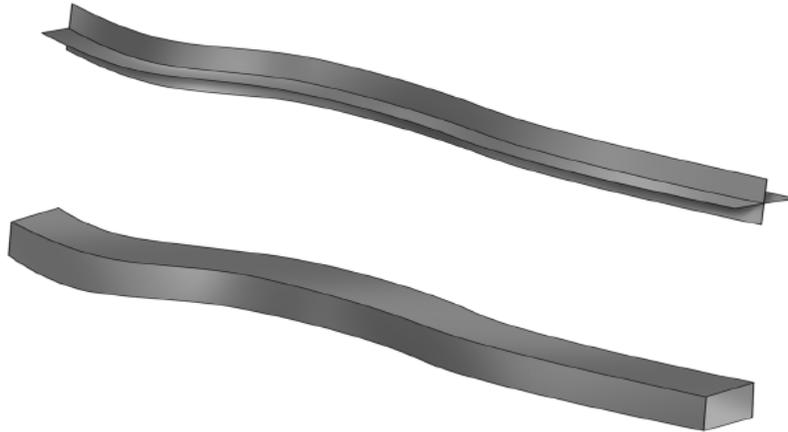


Figura 6.4: Los de arriba son los Juliennes  $J_n^{cs}(p)$  y  $J_n^{cu}(p)$ , el de abajo es el Julienne sólido  $J_n(p)$ .

**Definición:** Dada una variedad compacta  $M$  y un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f$  dinámicamente coherente definimos la base de Juliennes  $\mathcal{J}$  como

$$\mathcal{J} = \bigcup \mathcal{J}_p \text{ donde } \mathcal{J}_p = \{ J_n(p) \}.$$

Análogamente, se definen las bases  $\mathcal{J}^{cs}$  y  $\mathcal{J}^{cu}$ .

De ahora en adelante vamos a suponer que se tiene una variedad compacta  $M$  con un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f$  dinámicamente coherente, esencialmente accesible y “center-bunched”. Si  $\mathcal{W}^c$  es  $\theta$ -hölder continua, entonces la última condición quiere decir que:

$$\lambda_s^{-1} < \min\{\gamma_0, \gamma_1^{-1}\}^{2+\frac{2}{\theta}}.$$

**Teorema [PS2]:** La base de Juliennes  $\mathcal{J}$  de  $(M, \mu)$  es de densidad.

La demostración del lema anterior no es muy difícil, la idea es usar que  $f$  es center-bunched para demostrar que existe  $k$  tal que si  $J_{n+k}(p)$  y  $J_{n+k}(p')$  se intersectan entonces ambos están contenidos en  $J_n(p)$ . Análogamente, para cada  $p$  en  $M$  las bases  $\mathcal{J}^{cs}$  y  $\mathcal{J}^{cu}$  de  $\mathcal{W}^{cs}(p)$  y  $\mathcal{W}^{cu}(p)$  respectivamente son de densidad.

Por lo hecho en el capítulo 3, la base  $\mathcal{B}$  de bolas  $\{B(p, r)\}$  también es base de densidad. La ventaja de los Juliennes es que “se llevan bien con la dinámica de  $f$ ”.

**Lema 1 [PS2]:** La holonomía estable preserva puntos de “ $\mathcal{J}^{cu}$ -densidad”. Análogamente, la holonomía inestable preserva puntos de “ $\mathcal{J}^{cs}$ -densidad”.

**Lema 2 [PS2]:** Sea  $A$  un subconjunto medible de  $M$  saturado por  $\mathcal{W}^s$ . Luego un punto  $p$  es de densidad respecto de  $\mathcal{J}$  si y sólo si  $p$  es de densidad para  $\mathcal{J}^{cu}$  en  $\mathcal{W}^{cu}(p)$ .

Los dos lemas anteriores nos permiten “corregir” un conjunto esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  de forma “canónica”.

**Teorema [PS2]:** Si  $A$  es un subconjunto medible de  $M$  esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  entonces sus puntos de densidad respecto a  $\mathcal{J}$  son saturados por  $\mathcal{W}^s$ .

### **Demostración:**

Es fácil ver que podemos suponer que  $A$  es saturado por  $\mathcal{W}^s$  ya que modificar  $A$  en un conjunto de medida nula no altera sus puntos de densidad.

Sea  $p$  un punto de densidad de  $A$  respecto a  $\mathcal{J}$  y tomemos  $q$  en  $\mathcal{W}_{loc}^s(p)$ . Luego se tiene que por el lema 2,  $p$  es densidad en  $\mathcal{W}^{cu}(p)$  respecto de  $\mathcal{J}^{cu}$ . Como  $A$  es saturado por  $\mathcal{W}^s$  entonces por el lema 1,  $q$  tiene que ser de densidad en  $\mathcal{W}^{cu}(q)$  respecto de  $\mathcal{J}^{cu}$ . Pero ahora, por el lema 1 otra vez, se deduce que  $q$  es un punto de densidad de  $A$  respecto de  $\mathcal{J}$ .

Hemos probado entonces que los puntos de densidad de  $A$  son saturados por la foliación  $\mathcal{W}^s$ . †

Estamos finalmente en condiciones de probar el teorema de Pugh-Shub.

**Teorema (Pugh-Shub [PS2]):** Sea  $M$  una variedad Riemanniana compacta y  $f$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico que preserva una medida suave  $\nu$ . Si  $f$  es dinámicamente coherente, center-bunched y esencialmente accesible entonces  $f$  es ergódico.

**Demostración:**

Por el argumento de Hopf basta ver que todo conjunto  $f$ -invariante esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$  tiene él o su complemento medida nula. Sea entonces  $A$  tal conjunto y sea  $A^*$  el conjunto de sus puntos de densidad respecto de la base de Juliennes  $\mathcal{J}$ . Por el teorema anterior, se tiene que  $A^*$  es saturado por  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$ , de donde como  $f$  es esencialmente accesible se tiene que  $A^*$  tiene él o su complemento medida nula.

Por otro lado, como  $\mathcal{J}$  es base de densidad entonces  $A$  y  $A^*$  difieren en un conjunto de medida nula de donde lo anterior también es cierto para  $A$ . Es decir que  $A$  o  $M \setminus A$  tienen medida nula. ‡

En [BW], K. Burns y A. Wilkinson mejoraron el resultado anterior pidiendo sólo que  $f$  sea esencialmente accesible y sea center-bunched de forma débil, es decir que

$$\lambda_s < \gamma_0 \gamma_1^{-1} < 1 < \gamma_1 \gamma_0^{-1} < \lambda_u.$$

**Teorema:** Sea  $A$  un subconjunto medible de  $M$  esencialmente saturado por  $\mathcal{W}^s$  y por  $\mathcal{W}^u$ , luego el conjunto de puntos de densidad de  $A$  respecto de la base de bolas  $\mathcal{B}$  es saturado por  $\mathcal{W}^s$  y por  $\mathcal{W}^u$ .

De lo anterior se deduce que

**Teorema (Burns-Wilkinson [BW1]):** Sea  $M$  una variedad Riemanniana compacta y  $f$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico que preserva una medida suave  $\nu$ . Si  $f$  es center-bunched de forma débil y esencialmente accesible entonces  $f$  es ergódico.



# Bibliografía

- [An] Anosov D.V. Geodesic Flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Steklov. Inst. Math. 90 (1967).
- [BP] Barreira L. y Pesin Y. Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory, Uni. Lec. Series, AMS, Vol. 23 (2001).
- [BF] Busemann H. y Feller W. Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale, Fund. Math. Vol. 22 (1934) 226-256.
- [BW1] Burns K. y Wilkinson A. On the ergodicity of partially hyperbolic systems, Ann. Math.
- [BW2] Burns K. y Wilkinson A. Better center bunching.
- [CK] Climenhaga V. y Katok A. Measure Theory through dynamical eyes.
- [Fa] Fava N. Weak type inequalities for product operators, Studia Math. 42 (1972), 271-288.
- [GPS] Grayson M., Pugh C. and Shub M. Stably ergodic diffeomorphisms, Ann. Math. 140 (1994), 295-329.
- [Gr] Gromov, M. Groups of polynomial growth and expanding maps, Inst. des Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 53 (1981).
- [Gu1] de Guzmán, M. Differentiation of Integrals in  $\mathbb{R}^n$ . Lect. Notes Math. 481. Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1975)
- [Gu2] de Guzmán, M. An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to a product of differentiation bases. Studia Math. 49 (1973/74), 185-194
- [HK] Hasselblatt, B y Katok A. Introduction to the Modern theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press (1995)

- [HPS] Hirsch, M., Pugh C. and Shub M. Invariant manifolds, Lecture Notes in Mathematics, 583, Springer-Verlag, (1977)
- [LY] Ledrappier F. y Young, L. S. The Metric entropy of Diffeomorphism Ann. of Math (2) 122 (1985) 509-539
- [Mi] Milnor, J. Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory, Math. Intelligencer 19 (1997), 30-32
- [Ni] Nikodym, O. Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinearment accessibles, Fund. Math. 10, 1927, 116-168.
- [Pu] Pugh, C. Geometric Lebesgue Integration, en preparacion
- [PS1] Pugh, C. and Shub M. Ergodicity of Anosov actions, Invent. Math. 15 (1972), 1-23.
- [PS2] Pugh, C. and Shub M. Stable ergodicity and julienne quasiconformality, J. Eur.Math. Soc. 2 (2000)
- [PS3] Pugh, C. and Shub M. Stable ergodicity, Bull. American Mathematical Society Vol 41,1,1-41
- [Ro] Rohlin, V. On The fundamentals ideas of Measure Theory Translations (American Mathematical Society) Series 1,10, 1-54.
- [SW] Shub, M. and Wilkinson A. Pathological foliations and removable zero exponents, Invent. Math. 139 (2000), 495-508.
- [Sm] Smale, S., Differentiable dynamical systems, Bull. AMS 73 (1967), 747-817.
- [St] Stein, E. Harmonic Analysis. Princeton, N.J.: Princeton University Press (1993)
- [Vi] Viana, M. Disintegration into conditional measures: Rokhlin's theorem.