



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

**LA DIMENSIÓN DE MENDÈS FRANCE.
RELACIÓN ENTRE SU ESPECTRO MULTIFRACTAL
Y EL FORMALISMO TERMODINÁMICO.
APLICACIÓN A SISTEMAS TIPO HÉNON.**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad
de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Roberta Hansen

Director de tesis: Dra. María N. Piacquadio Losada.

Consejero de estudios: Dra. Ana Forte.

Lugar de trabajo: Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, UBA.

Buenos Aires, 2009.

**LA DIMENSIÓN DE MENDÈS FRANCE.
RELACIÓN ENTRE SU ESPECTRO MULTIFRACTAL
Y EL FORMALISMO TERMODINÁMICO.
APLICACIÓN A SISTEMAS TIPO HÉNON.**

Resumen

En la primera parte de este trabajo realizamos un estudio comparativo entre dos familias de curvas en \mathbb{R}^n . Las primeras, son fractales que se obtienen mediante procesos contractivos y poseen una dimensión no entera, como la de Hausdorff, o la de caja, etc. Las segundas, por el contrario, no son necesariamente fractales, se obtienen mediante procesos expansivos, y se les puede asociar una dimensión fraccionaria, definida por M. Mendès France. Presentamos una forma de relacionar ambas clases de curvas, y comparar sendas dimensiones. Así, para una misma curva fractal, logramos asociar un abanico, en principio finito, de dimensiones de Mendès France, identificando la dimensión minimal y la maximal. Mostramos que este espectro discreto se puede hacer continuo, lo que nos permite compararlo con algunos espectros multifractales conocidos en la literatura. En la segunda parte, aplicamos algunos de los resultados al refinamiento del estudio computacional de atractores caóticos tipo Hénon. Para un intervalo de sus parámetros, la razón de rotación de las órbitas accesibles de estos atractores, describe una función que caracteriza los cambios y bifurcaciones de sus regímenes caóticos en ruta a la crisis terminal. Mostramos que la dimensión de Mendès France, como función del mismo parámetro, presenta una fuerte conexión con la anterior.

Palabras claves: dimensión de Hausdorff, dimensión de Mendès France, curvas autosemejantes, espectro multifractal, atractor de Hénon, órbitas accesibles.

**THE DIMENSION OF MENDÈS FRANCE.
RELATION BETWEEN ITS MULTIFRACTAL SPECTRUM
AND THE THERMODYNAMICAL FORMALISM.
APPLICATION TO HÉNON TYPE SYSTEMS.**

Abstract

In the first part of this work, we make a comparative study between two families of curves in \mathbb{R}^n . The former, are fractals obtained by contractive processes, and have a non integer dimension as Hausdorff's dimension, or box-counting, etc. On the contrary, the latter are not necessarily of fractal type, they are obtained by expansive processes, and they may be provided with a fractional dimension defined by M. Mendès France. We present a way to relate the two types of curves, and how their dimensions can be compared. Thus, for one fractal curve, we can associate, at first, a finite range of Mendès France dimensions, identifying the minimal and the maximal ones. Later we show that this discrete spectrum can be made continuous, allowing it to be compared to some other multifractal spectra encountered in the literature. In the second part, we apply some of these results to the refinement of the computational study of chaotic attractors of Hénon type. For an interval of parameter values, the rotation rates of accessible orbits describe a function that characterizes the bifurcations and changes of chaotic regimes on route to final crisis. We show that there is a strong connection between this function and the Mendès France dimension, in terms of the same parameter values.

Key words: Hausdorff dimension, Mendès France dimension, self similar curves, multifractal spectrum, Hénon type attractors, accessible rotation rates.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi directora, Dra. María N. Piacquadio Losada, por tener confianza en mí, por su esmerada dedicación y disposición en todo este tiempo. Trabajar con ella no sólo permitió la realización de esta tesis, sino que mi aprendizaje y formación se vieron incrementados en gran medida, tanto por su experiencia como por su calidad de persona.

A Ana Forte, mi consejera de estudios, le agradezco haber sido tan buena “consejera”.

En el ámbito de la FIUBA, quiero agradecer en general a todos mis compañeros de trabajo. En particular, a Jorge Busch, por ayudarme con unos programas en lenguaje C, que utilicé en la última parte de la tesis (y que me ahorraron mucho tiempo), y por discutir generosamente algunos temas. A Germán Drazer, y a Silvita Gigola, por conseguirme y proporcionarme parte de la bibliografía utilizada. Muy en especial, a Graciela González, por su constante aliento y valoración de mi trabajo, y sobre todo por su “oreja” en los momentos más difíciles. Al director del Dpto. de Matemática, Ing. Nicolás Patetta, por darme la posibilidad de dedicar el cuatrimestre a teminar de escribir la tesis.

Un gracias enorme a Cristina López (¡qué haríamos sin ella!) por facilitar en toda oportunidad que los trámites pudieran hacerse, finalmente, en tiempo y forma.

A Gautam Dutt, por su apreciación y crítica constructiva.

A Fernanda G. y Fabián S., ellos saben...

Para Claudio, mi amor y compañero de la vida, no me alcanza el agradecimiento a su infinita paciencia, su contención en los malos momentos y su alegría compartida en los buenos. Este trabajo no hubiera sido posible sin su apoyo incondicional.

También quiero agradecer a mis amigas y amigos, por eso, por serlo. En especial, a Marisa, a Nora, y a mis “brujas” amadas: Claudia, Luciana, Mariana y Susana. A todas ellas les debo tanto...

A Mariana y Federica, mis hermanas, por quererme y bancarme siempre. A mis sobrinos: Carola, Lorenzo, Ian y Zoe, por la alegría que trajeron a mi vida. Y especialmente a mi vieja, por su entereza, por inculcarme el amor hacia el conocimiento, y por enseñarme a tener fuerza y templanza frente a las dificultades de la vida.

A la memoria de

*Tío “Egar” (Popeye),
por sus alas,*

y

*Oscar R. Hansen (Coco),
por sus huellas.*

Índice general

I	Dimensiones Fractales y Dimensión de Mendès France	1
1.	Introducción a la Primera Parte	2
1.1.	Objetivos y organización de la primera parte	5
2.	Elementos de Geometría Fractal	8
2.1.	Dimensiones fractales geométricas	8
2.1.1.	Dimensión de caja o ‘box-counting’	8
2.1.2.	Dimensión de Minkowski	9
2.1.3.	Dimensión de Hausdorff	10
2.1.4.	Propiedades básicas de las dimensiones	12
2.1.5.	‘Divider dimension’	13
2.2.	Dimensiones fractales de medidas	14
2.3.	Curvas construidas por similaridades	15
2.3.1.	Similaridades	15
2.3.2.	Generatriz de curvas autosemejantes	16
2.3.3.	Condición de Cerrado	17
2.3.4.	Condición de Abierto	18
2.3.5.	Dimensión fractal de curvas autosemejantes	19
3.	Dimensión de Mendès France	23
3.1.	Idea intuitiva	23
3.2.	La dimensión de una curva	24
3.2.1.	Dimensión de una curva en \mathbb{R}^2	25
3.2.2.	Dimensión de una curva en \mathbb{R}^n	27
3.2.3.	Propiedades de la dimensión de Mendès France	27
3.2.4.	Curvas resolubles	31
4.	Curvas autosemejantes	33
4.1.	Curvas estrictamente autosemejantes	33
4.1.1.	Construcción	33
4.1.2.	Relación entre \dim_H y \dim_{MF}	34
4.2.	Curvas autosemejantes	35
4.2.1.	Descripción geométrica	35
4.2.2.	Dimensión de Mendès France para el caso resoluble	36
4.2.3.	Relación entre \dim_H y \dim_{MF}	37

4.2.4. Observación	40
4.2.5. Relación con \dim_{div}	42
4.3. Conclusiones	43
4.A. Demostración del Teorema 4.2.3	44
5. Relación con Espectros Multifractales	49
5.1. Continuización del espectro de dimensiones de Mendès France	49
5.2. Multifractalidad	53
5.2.1. Consideraciones previas/resultados básicos	54
5.2.2. Dimensiones de Rényi	58
5.2.3. Análisis multifractal de medidas autosemejantes	61
5.3. Obtención del espectro multifractal en forma paramétrica	63
5.4. Relación entre el espectro de Mendès France y espectros multifractales	69
5.5. Interpretación del parámetro Ω	73
5.5.1. Fórmula de inversión	74
5.5.2. Fórmula de inversión para curvas $F \in \mathcal{F}_H$	76
5.6. Conclusiones	77
5.A. Maximalidad de $\bar{\lambda}$	80
II Una Aplicación a Sistemas tipo Hénon	84
6. Introducción a la Segunda Parte	85
6.1. Breve marco referencial	85
6.2. Objetivos y organización de la segunda parte	88
6.3. Definiciones básicas	89
7. El atractor de Hénon	93
7.1. La familia de mapas de Hénon, $H_{\mu,b}$	93
7.2. El atractor de Hénon como curva fractal	95
7.3. Peines cantorianos	99
7.4. Autosemejanza de \mathcal{H}	101
7.4.1. El “borde” A^∞	102
7.4.2. Número de líneas en $A_k \cap s$	102
7.5. La curva expandida $\Gamma^{\mathcal{H}}$ asociada a \mathcal{H}	105
7.5.1. $\Gamma^{\mathcal{H}}$ es resoluble	107
7.5.2. $\Gamma^{\mathcal{H}}$ y $\Upsilon^{\mathcal{H}}$ comparten la misma $\Gamma^{\mathcal{H}}(\varepsilon)$	108
7.6. Conclusiones	109
8. Parámetros fractales para el estudio de atractores tipo Hénon	111
8.1. Introducción	111
8.2. Números de rotación de órbitas accesibles	112
8.3. Parámetros para la dimensión de Hausdorff de \mathcal{H}_μ	115
8.3.1. Encastre	119
8.3.2. Sensibilidad	120

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
8.3.3. Invariabilidad	122
8.4. Conclusiones	126
A. Otra posible aplicación	127
A.1. Polímeros	127
Índice de Figuras	133
Índice de Tablas	134
Bibliografía	135

Parte I

Dimensiones Fractales y Dimensión de Mendès France

Capítulo 1

Introducción a la Primera Parte

...The scientist does not study nature because it is useful; he studies it because he delights in it, and he delights in it, because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not be worth living.

Henri Poincaré.

Unas de las características importantes de los fenómenos físicos son sus propiedades geométricas. Por muchos años se ha utilizado la geometría Euclidiana o Riemanniana para describir las propiedades geométricas de los fenómenos naturales. Esto produjo modelos que se describían mediante funciones suaves, analíticas, etc. El éxito de estos modelos es indisputable, pero existen muchos objetos en la naturaleza que no estaban bien descritos mediante el lenguaje tradicional de la geometría. Esponjas, coliflores, nubes, y conjuntos atractores o repulsores de los sistemas dinámicos, movimiento Browniano, distribución de materia en el universo, y tantísimos más; todos ellos han encontrado, desde hace poco tiempo, un lenguaje que los describe mucho más ajustadamente: la geometría fractal.

Mientras que la geometría Euclídeo–Riemanniana se enfoca en la estructura localmente suave de un objeto, la geometría fractal examina sus propiedades de *autosimilaridad* y *escalamiento*. El término *fractal* es algo nebuloso, en el sentido en que es difícil dar una definición precisa sin dejar afuera algunos ejemplos interesantes. B. Mandelbrot lo define como un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff excede estrictamente a su dimensión topológica ([Man 82]). Sin embargo, Falconer intenta una descripción de las características que comparten muchos de los conjuntos que se consideran fractales ([Fal 90]), mediante una lista que, de ninguna manera, se puede considerar exhaustiva:

- (1) Tener características de autosimilaridad, al menos de forma estadística,
- (2) tener una estructura “fina”, esto es, contener detalles a escalas cada vez más pequeñas,

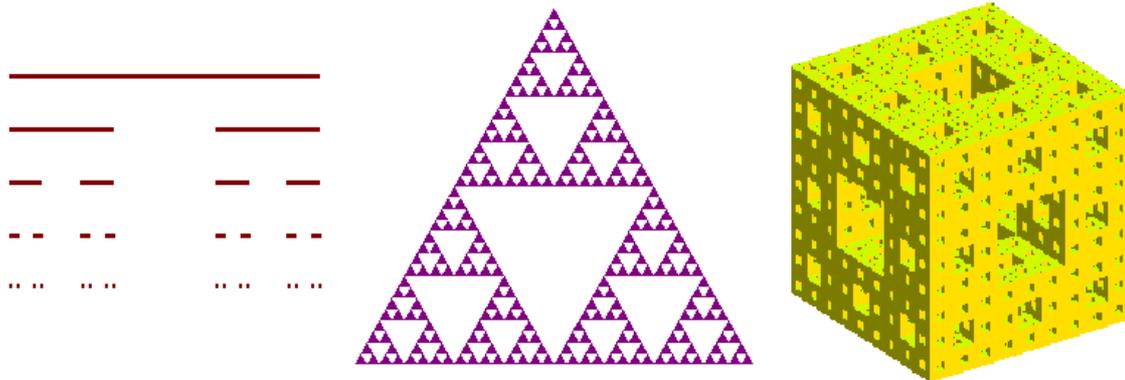


Figura 1.1: *Conjunto de Cantor* (en \mathbb{R}), *Triángulo de Sierpinski* (en \mathbb{R}^2), y *esponja de Sierpinski–Menger* (en \mathbb{R}^3).

- (3) a pesar de tener una estructura compleja, estar descrito o generado de una manera simple o directa,
- (4) ser obtenidos por un proceso recursivo,
- (5) no poder ser descrito fácilmente por la geometría clásica,
- (6) tener una geometría local intrincada e irregular.

Las diversas formulaciones de dimensión fractal son la herramienta más popular para describir la estructura fractal de estos conjuntos. Rápidamente hablando, la dimensión fractal es un número que representa la “cantidad” de espacio ocupada por el conjunto. Generaliza la idea intuitiva de que un punto tiene dimensión cero, una recta dimensión uno, etc. Si una curva tiene longitud infinita y área cero, entonces debe tener una dimensión entre uno y dos. Las dos definiciones más usadas comúnmente son la dimensión de Hausdorff y la dimensión de caja. La primera está basada en la construcción de una medida, y por eso es más usada dentro del ámbito de las matemáticas. La segunda está basada en la noción de medición a escalas cada vez más pequeñas y es más usada en la física y demás ciencias. Cuando los conjuntos son “razonablemente” regulares los valores de ambas suelen coincidir, como es el caso de los tres ejemplos siguientes.

En la Figura 1.1, se muestran tres ejemplos clásicos de este tipo de conjuntos: el *Conjunto de Cantor*, es subconjunto del intervalo $[0, 1]$, y se obtiene como límite del proceso de remover en cada paso, el tercio del medio de cada segmento del subconjunto del paso anterior, llamado *prefractal*. Su dimensión fractal es $\log 2 / \log 3 \approx 0,63092$. El *Triángulo de Sierpinski*, subconjunto del plano, también se obtiene como límite de un proceso similar, removiendo el triángulo central de cada triángulo del paso anterior. Sin embargo, este conjunto también puede obtenerse como límite de otro proceso, el cual, en vez de partir de un conjunto inicial al que se le va removiendo una parte, se comienza con un polígono a la que se le van reemplazando los segmentos por poligonales semejantes a la original (ver Figura 2.6); por lo tanto, este conjunto también

puede verse como una *curva fractal* y su dimensión es $\log 3 / \log 2 \approx 1,5849$. La *Esponja de Sierpinski–Menger* es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , también se obtiene por un proceso iterativo de remoción, en este caso de 7 cubos, uno central y uno de cada cara (6), de cada cubo del paso anterior; su dimensión fractal es $\log 20 / \log 3 \approx 2,72683$.

El universo de estos conjuntos y sus aplicaciones es muy vasto. Nosotros nos restringiremos a una clase bastante amplia de ellos: las curvas fractales, y dentro de ella, las que son *autosemejantes*. También trataremos otro tipo de curvas que no pertenecen a este universo. Esta primera parte de la tesis se dedica al estudio y relación entre las dos clases de curvas, sus características geométricas, y sus dimensiones fractales.

¿Por qué estudiar curvas? Tal vez una respuesta la da Claude Tricot, en su libro “Curves and Fractal Dimensions” [Tri 95], dedicado exclusivamente al estudio exhaustivo de curvas en el plano: “*In fact, nothing is more unknown than curves, especially their geometrical and analytical properties. Yet the subject is so wide that we felt the need to restrict ourselves to the notion of **simple curves** drawn in the **plane**. For a topologist, these curves have the same characteristics as a line segment. But as soon as we leave the stratosphere of the analysis situ, we must realize that there are infinitely many varieties of curves that are defined in mathematical models of trajectories, boundaries of aggregates, geographical lines, and profiles of rough surface. Moreover, we need to know how to classify them and to characterize them*”.

Existen dos clases de curvas, las de longitud finita o *rectificables* y las de longitud infinita o *no rectificables*. Dentro de estas últimas tenemos, a su vez, las acotadas y las no acotadas. Las acotadas, forzosamente han de tener que “arrugar”, o “quebrar”, o “plegar” su infinita longitud, al estar confinadas en un recinto (su cápsula convexa, por ejemplo). Las no acotadas, en cambio, tienen la libertad de esplayarse, de desplegar su infinita longitud, por el plano o el espacio n -dimensional. Precisamente, la manera en que lo hacen, es lo que las diferencia entre sí, lo que las caracteriza.

¿Por qué estudiar otras dimensiones fractales que las ya existentes? Los diferentes conceptos de dimensión fractal han sido desarrollados a partir de problemas que se querían resolver, tanto teóricos como prácticos. La dimensión de Hausdorff es una excelente herramienta matemática, pero no tiene casi aplicación práctica en el estudio de curvas originadas en otras ciencias como la física, la biología o la ingeniería. La dimensión de caja es, tal vez, la más conocida y usada por otras ciencias, pero su cálculo, a veces, puede complicarse en el caso de dimensiones muy altas, o al aplicarse a conjuntos o curvas generados, por ejemplo, por un proceso caótico. La dimensión de Mendès France introduce interesantes particularidades propias. Mientras que las dimensiones fractales usuales son, en algún sentido una generalización o refinamiento del concepto de dimensión topológica, ya que permiten valores no enteros, y se mantienen enteros para los conjuntos clásicos; la dimensión de Mendès France, que “mira” los conjuntos (las curvas) “desde el infinito”, permite, en cambio, que una curva (de longitud infinita) con dimensión topológica y fractal igual a 1, tenga dimensión mayor estricto que la unidad. Además, para una misma curva, la dimensión de Hausdorff resulta ser menor o igual que las otras dimensiones fractales conocidas; mientras que, (si el conjunto reúne ciertas características), existe un abanico de dimensiones de

Mendès France que se pueden “asociar” a esa curva, de las cuales la mayor resulta ser igual a la de Hausdorff. La clave está en el cambio de “perspectiva” con que se mira el fenómeno de escalamiento. Las dimensiones fractales lo hacen “hacia adentro”, es decir, miran el objeto a escalas cada vez más pequeñas. En cambio, la dimensión de Mendès France escala “hacia afuera”, es decir, va tomando distancia del objeto en cuestión. Desde un punto de vista teórico, esta suerte de “dualidad” entre ambas dimensiones, resulta ya interesante por derecho propio, como para abordarse un estudio comparativo. En la práctica, los conjuntos topológicamente unidimensionales, como las curvas, se avienen mejor a ser descriptos o caracterizados, por una dimensión que las “recorre desde adentro”, como una suerte de parametrización, más que por una dimensión que precisa tapizarlo todo con cubrimientos. Es el caso, por ejemplo, de los atractores caóticos como el de Hénon, o también, el caso de las cadenas poliméricas.

Una propiedad de las dimensiones fractales es que suelen ser invariantes por transformaciones bi-Lipschitzianas del conjunto. Es decir aquellas f para las que existen $c_1, c_2 > 0$:

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| .$$

Esto hace que sean invariantes geométricos, i.e., la dimensión de un conjunto F es igual a la de $f(F)$, sea f una contracción o una dilatación. No sucede lo mismo con la dimensión de Mendès France, como veremos.

También se ha estudiado el comportamiento de las dimensiones fractales bajo intersecciones, proyecciones y productos ([Fal 90], [Fal 97]), pero no bajo procesos de expansión de sus “prefractales”. R. Strichartz, en su artículo “Fractals in the Large” ([Stz 96]), aborda el problema de mirar una estructura fractal a escalas cada vez más grandes, definiendo lo que él llama un “sistema iterado revertido de funciones” (r.i.f.s.) (‘reverse iterated function system’) que es básicamente, invertir el sistema (finito) iterado de funciones contractivas que determina al fractal original. Esta propuesta invierte y usa todas las similaridades al mismo tiempo, y construye un conjunto límite que también es un fractal cuya dimensión es igual a la del fractal original. Nuestra propuesta, en cambio, se basa en construir una curva límite no fractal, a partir de la expansión de un prefractal (poligonal generatriz), invirtiendo una sola contracción. De esta manera, cada elección produce una curva límite, cuyas características son muy distintas entre sí, resultando en un abanico de dimensiones distintas, capaces de ser comparadas con la dimensión del fractal original.

1.1. **Objetivos y organización de la primera parte**

En esta primera parte de la tesis estudiamos fundamentalmente dos familias de curvas en \mathbb{R}^n . La primera, que llamamos \mathcal{F}_H , está compuesta por curvas fractales acotadas, de longitud infinita y, por lo tanto, infinitamente “arrugadas”; con una estructura autosemejantes determinada por un Sistema Iterado de Funciones (IFS), formado por N similaridades de razones de contracción a_1, a_2, \dots, a_N ($0 < a_i < 1$, $i = 1, \dots, N$), y que además satisfacen un criterio llamado la Condición de Abierto (OSC), el cual garantiza cierto “no solapamiento” de las mismas. A estas curvas les es posible asociar

una dimensión fractal, la dimensión de Hausdorff \dim_H , que en este caso viene dada por la ecuación:

$$\sum_{i=1}^N a_i^{\dim_H} = 1 .$$

La segunda familia, que denotamos con \mathcal{F}_{MF} , está compuesta por curvas no acotadas, de longitud infinita, y localmente rectificables, esto es, una bola cerrada de \mathbb{R}^n contiene un tramo, siempre de longitud finita, de la curva. A estas últimas, que no son curvas fractales, también se les puede asociar una dimensión no entera, \dim_{MF} , introducida por M. Mendès France en [MF 91], la cual definimos e interpretamos.

Las dos familias antes mencionadas no tienen ninguna curva en común. Más aun, éstas tienen características absolutamente contrarias; pero describimos procesos de construcción geométrica que nos permiten “emparentar” a ciertas curvas de ambas familias. Esto es, básicamente, que con un mismo proceso se puede obtener una curva en \mathcal{F}_H , y otra en \mathcal{F}_{MF} . En todos los casos el objetivo es comparar las dimensiones asociadas a cada curva, respectivamente, y obtener conclusiones.

En el Capítulo 2 se hace un repaso, dando brevemente las definiciones y las propiedades de las dimensiones fractales más conocidas y usadas en la literatura, y a las que hacemos referencia en esta tesis; tanto de las dimensiones geométricas, es decir, aplicadas a conjuntos en sí, como de las dimensiones definidas para medidas. Luego, introducimos el concepto de generatriz de una curva autosemejante, y caracterizamos a la familia \mathcal{F}_H . En el Capítulo 3, comenzamos dando una idea intuitiva de la dimensión no entera para curvas no fractales, y la definición que Mendès France da para curvas planas. Luego, nosotros introducimos un pequeño cambio en la definición, de manera que ésta resulta equivalente a la suya para curvas en \mathbb{R}^2 , y que nos permite generalizarla para curvas en \mathbb{R}^n .

Los resultados de esta parte de la tesis se concentran en los últimos dos capítulos.

En el Capítulo 4, describimos el proceso geométrico que relaciona las curvas de ambas familias, viendo que, una misma curva F en \mathcal{F}_H , puede ser relacionada, en un principio, con un abanico de hasta N curvas distintas en \mathcal{F}_{MF} (tantas como contracciones distintas hayan intervenido en la generación de la curva fractal). Estudiamos las características de estas curvas lo que produce un espectro discreto de dimensiones de Mendès France asociadas al abanico de curvas, el cual es relacionado con la única dimensión de Hausdorff de F . Los resultados que se presentan aquí, dieron lugar a un primer trabajo publicado en la Revista de la Unión Matemática Argentina [HP 01].

En el Capítulo 5, mostramos que el proceso antes mencionado permite, en realidad, contruir un abanico no numerable de curvas en \mathcal{F}_{MF} a partir del mismo fractal, y por lo tanto se tiene un espectro continuo de dimensiones de Mendès France asociadas. El objetivo es comparar este espectro con dos espectros multifractales de amplio conocimiento en la literatura: uno relacionado con las dimensiones generalizadas de Rényi, y otro con las medidas autosemejantes, de soporte en un fractal con las características de F . Para esto se obtiene una fórmula o expresión del espectro multifractal, en términos de un parámetro relacionado con las “frecuencias” con que se distribuyen pesos y longitudes, y que generaliza, al caso de contractores distintos, el resultado

de Everst y Mandelbrot [EM 92] para contractores iguales. También se da una interpretación de este parámetro, habilitada por la obtención de un espectro inverso al anterior, el cual es, a su vez una generalización de la fórmula de inversión para medidas en el intervalo $[0, 1]$, de Riedi y Mandelbrot [RM 97]. Los resultados de este trabajo están siendo preparados para ser enviados para su posible publicación.

Capítulo 2

Elementos de Geometría Fractal

... “Fractal” is a new science and we need to wait a half century before the really good ideas can be filtered out.

Claude Tricot.*

En este capítulo introduciremos las ideas básicas de geometría fractal que necesitaremos en el desarrollo de la presente tesis. Haremos un breve repaso de las definiciones de dimensiones fractales más conocidas en la literatura, definidas para conjuntos E (no necesariamente curvas) en \mathbb{R}^n .

2.1. Dimensiones fractales geométricas

¿Cómo podemos capturar la dimensión de un objeto geométrico? Un requerimiento para una definición útil de dimensión es que ésta sea *intrínseca*; es decir, que no dependa del espacio ambiente, digamos \mathbb{R}^n , donde está inmerso el objeto. La dimensión topológica de un conjunto, por ejemplo, cumple con este requisito.

La mayoría de las definiciones de dimensión fractal dependen de una “medición a escala ε ” de un conjunto E , la cual cuantifica, de alguna manera, la irregularidad del conjunto visto en esa escala. La dimensión es, entonces, usualmente definida en términos del escalamiento del comportamiento de estas mediciones, cuando $\varepsilon \searrow 0$.

Dentro de estas definiciones, las más conocidas en la literatura, son la *dimensión de Hausdorff*, la *dimensión de caja* o ‘*box-counting dimension*’ y la *dimensión de Minkowski* (equivalente a la anterior), entre otras. Es importante notar que el valor de la dimensión de un mismo conjunto puede variar de acuerdo a la definición usada; sin embargo, este valor coincide para conjuntos “razonablemente regulares”.

2.1.1. Dimensión de caja o ‘box-counting’

Como dijimos anteriormente, la dimensión de caja es la más simple desde un punto de vista conceptual, y por eso tal vez, la más utilizada en las aplicaciones. Su defini-

*[Tri 95]

ción se remonta a 1930, y ha recibido diferentes nombres: dimensión de Kolmogorov, dimensión de entropía, dimensión de capacidad, densidad logarítmica y dimensión de información.

Sea $E \in \mathbb{R}^n$ un subconjunto. Se define el *diámetro* de E , como

$$\text{diam}(E) = |E| = \sup \{ \text{dist}(x, y) : x, y \in E \}$$

es decir, la mayor distancia entre dos puntos de E .

Para E acotado y no vacío, sea $N_\varepsilon(E)$ el menor número de conjuntos de diámetro igual a ε capaces de cubrir a E . Se definen la *dimensión inferior de caja* y la *dimensión superior de caja* de E respectivamente, como

$$\underline{\dim}_{\text{box}}(E) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(E)}{-\log \varepsilon} \quad (2.1)$$

$$\overline{\dim}_{\text{box}}(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(E)}{-\log \varepsilon} \quad (2.2)$$

Si ambos límites coinciden, el valor común se denomina *dimensión de caja* de E

$$\dim_{\text{box}}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(E)}{-\log \varepsilon} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el número $N_\varepsilon(E)$, de conjuntos de diámetro ε que cubren a E , escala aproximadamente como ε^{-d} , donde $d = \dim_{\text{box}}(E)$.

Existen formas equivalentes a estas definiciones, las cuales resultan, muchas veces, de utilidad. El valor de los límites (2.1) y (2.2) (y, por lo tanto, el valor de (2.3), cuando existe), no cambian si tomamos a $N_\varepsilon(E)$ como cualquiera de las siguientes cantidades:

- (i) el menor número de conjuntos de diámetro ε que cubren a E ,
- (ii) el menor número de bolas cerradas de radio ε que cubren a E ,
- (iii) el menor número de n -cubos de lado ε que cubren a E ,
- (vi) el mayor número de bolas disjuntas de radio ε con centros en E ,
- (v) el número de cubos de una ε -grilla que intersecan a E , (de ahí el nombre ‘box-counting’).

La equivalencia de estas definiciones alternativas, siguen de la comparación de los valores de $N_\varepsilon(E)$ en cada caso, ver [Fal 90].

2.1.2. Dimensión de Minkowski

Existe otra definición, equivalente a la dimensión de caja, de expresión bastante diferente, y que requiere del concepto de *conjunto ε -paralelo* $E(\varepsilon)$ de E , o *ε -entorno* de E , o *ε -engordado* de E :

$$E(\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \varepsilon, \text{ con } y \in E \} .$$

Si E es una curva, $E(\varepsilon)$ se lo suele llamar también, ε -salchicha de Minkowski. Lo que se considera en este caso, es la razón de “encogimiento” del volumen n -dimensional de $E(\varepsilon)$, $\mu^n(E(\varepsilon))$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 , si E es un punto, entonces $E(\varepsilon)$ es una bola con $\mu^3(E(\varepsilon)) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$; si E es un segmento de longitud ℓ , entonces $E(\varepsilon)$ es una salchicha con $\mu^3(E(\varepsilon)) \sim \pi\ell\varepsilon^2$; si E es un conjunto “chato” de área a , entonces $\mu^3(E(\varepsilon)) \sim 2a\varepsilon$. En cada caso, $\mu^3(E(\varepsilon)) \sim c\varepsilon^{3-d}$, con c constante positiva, y donde el entero d es la dimensión de E . Luego, el exponente de ε es indicativo de la dimensión. La idea se extiende a dimensiones fractales. Si E es un subconjunto de \mathbb{R}^n , y para algún d , $\mu^n(E(\varepsilon))/\varepsilon^{n-d}$ tiende a un límite finito y positivo, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces tiene sentido mirar a E como d -dimensional. Si este límite no existe, igualmente se puede extraer este exponente crítico y relacionarlo con los límites (2.1) y (2.2), es decir

$$\underline{\dim}_{box}(E) = n - \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu^n(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \quad (2.4)$$

$$\overline{\dim}_{box}(E) = n - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu^n(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \quad (2.5)$$

Si ambos límites coinciden,

$$\dim_{box}(E) = n - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu^n(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} . \quad (2.6)$$

En este contexto la dimensión de caja suele llamarse *dimensión de Minkowski*.

2.1.3. Dimensión de Hausdorff

La dimensión de Hausdorff es más refinada que la dimensión de caja, puesto que está definida en términos de una medida. Posee la ventaja de estar definida para cualquier tipo de conjuntos, lo que es matemáticamente conveniente; pero al mismo tiempo posee la desventaja de que en muchos casos, es muy difícil de calcular y/o estimar por métodos computacionales.

Dijimos que si d es la dimensión de caja de E , entonces para ε pequeño se tiene, por (2.3)

$$N_\varepsilon(E) \propto \text{cte} \cdot \varepsilon^{-d} ,$$

luego, la dimensión de caja puede definirse como

$$\begin{aligned} \dim_{box}(E) &= \inf \{s : N_\varepsilon(E)\varepsilon^s = 0\} \\ &= \sup \{s : N_\varepsilon(E)\varepsilon^s = \infty\} . \end{aligned}$$

Pero esto puede ser escrito como

$$\dim_{box}(E) = \inf \left\{ s : \sum_i \varepsilon^s = 0 \right\} = \inf \left\{ s : \sum_i |U_i|^s = 0 \right\} ,$$

donde la suma se toma sobre todas las bola U_i del cubrimiento, tal que $|U_i| = \varepsilon$. Si ahora permitimos cubrimientos más generales, de conjuntos con diámetros arbitrariamente pequeños, podemos generalizar la expresión anterior.

Medida de Hausdorff

Diremos que una colección finita o contable de subconjuntos $\{U_i\}$ de \mathbb{R}^n es un δ -cubrimiento de un conjunto $E \in \mathbb{R}^n$, si $\text{diam}(U_i) = |U_i| \leq \delta$, para todo i , y $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$. Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^n y $s \geq 0$. Para todo $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } E \right\}. \quad (2.7)$$

A medida que δ decrece, la clase de δ -cubrimientos de E se reduce; luego, este ínfimo crece y se aproxima a un límite cuando $\delta \searrow 0$. Por lo tanto, se define

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(E). \quad (2.8)$$

Este límite existe para todo $E \in \mathbb{R}^n$, y puede ser 0 o ∞ . Llamamos a $\mathcal{H}^s(E)$, la *medida de Hausdorff s -dimensional* de E .

Puede verse que $\mathcal{H}^s(E)$ es una medida Boreliana regular sobre \mathbb{R}^n ([Fal 90]).

Las medidas de Hausdorff generalizan a las medidas de Lebesgue, luego, $\mathcal{H}^1(E)$ da la “longitud” de E , $\mathcal{H}^2(E)$ el “área” (normalizada), etc. En general, $\mathcal{H}^n(E)$ son, salvo un factor constante, los n -volúmenes $\mu^n(E)$, $n \geq 1$.

También vale una propiedad de escalamiento. Si $\lambda > 0$

$$\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E),$$

donde $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$.

Dimensión de Hausdorff

De (2.7) es claro que, si $\delta < 1$, $\mathcal{H}_{\delta}^s(E)$ es no-creciente con s . Luego, por (2.8), $\mathcal{H}^s(E)$ también es no-creciente. Más aun, vale que si $t > s$ y $\{U_i\}$ es un δ -cubrimiento de E , se tiene

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s,$$

luego, tomando ínfimos, $\mathcal{H}_{\delta}^t(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_{\delta}^s(E)$. Tomando $\delta \rightarrow 0$, vemos que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Entonces, $\mathcal{H}^t(E) = 0$ para $t > s$. Por lo tanto, el gráfico de $\mathcal{H}^s(E)$ en función de s (ver Figura 2.1), muestra que hay un valor crítico de s donde \mathcal{H}^s “salta” de ∞ a 0. Este valor crítico se llama la *dimensión de Hausdorff* de E , y la notamos $\dim_H(E)$. Formalmente,

$$\dim_H(E) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\},$$

luego

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H(E), \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(E). \end{cases} \quad (2.9)$$

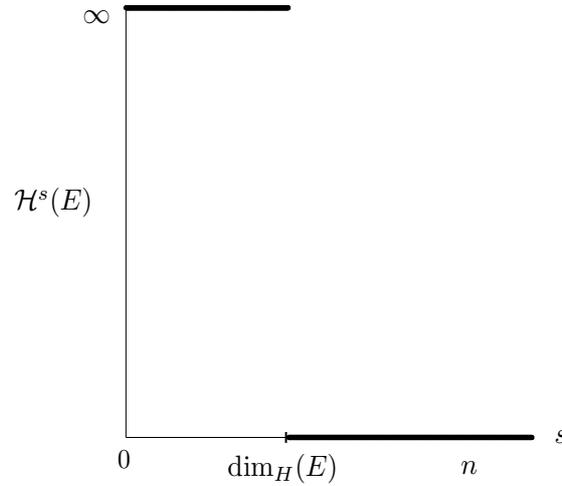


Figura 2.1: La dimensión de Hausdorff es el valor de s donde $\mathcal{H}^s(E)$ salta de ∞ a 0.

2.1.4. Propiedades básicas de las dimensiones

Listaremos aquí brevemente, las propiedades más generales e importantes que caracterizan a las dimensiones que definimos. Las demostraciones pueden verse en [Fal 90] o [Fal 97].

Las siguientes propiedades valen para la dimensión de Hausdorff, y dimensiones inferior y superior de caja y de Minkowski, las cuales denotaremos, simplemente, por \dim .

Monotonicidad. Si $E_1 \subset E_2$, entonces $\dim(E_1) \leq \dim(E_2)$.

Conjuntos finitos. Si $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \emptyset$, E abierto, entonces $\dim(E) = n$.

Variedades. Si E es una variedad suave m -dimensional de \mathbb{R}^n , entonces $\dim(E) = m$.

Mapas Lipschitzianos. Si $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es Lipschitz, entonces $\dim(f(E)) \leq \dim(E)$.

Invariancia bi-Lipschitziana. Si $f: E \rightarrow f(E)$ es bi-Lipschitz, entonces $\dim(f(E)) = \dim(E)$.

Invariancia Geométrica. En particular, si f es una similaridad (ver Sección 2.3) o una transformación afín, entonces $\dim(f(E)) = \dim(E)$.

Las dimensiones \dim_H y $\overline{\dim}_{\text{box}}$ son *finitamente estables*, esto es

$$\dim\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \max_{1 \leq i \leq k} \dim(E_i),$$

para una colección finita de conjuntos $\{E_1, \dots, E_k\}$. Sin embargo, $\underline{\dim}_{\text{box}}$ no lo es.

La dimensión \dim_H es *numerablemente estable*, esto es

$$\dim\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim(E_i),$$

para una colección numerable de conjuntos $\{E_i\}_{i \geq 1}$.

Esta es una de las principales ventajas de la dimensión de Hausdorff por sobre la de caja. En particular, implica que todo conjunto numerable tiene dimensión de Hausdorff nula. Lo que no es cierto para la dimensión de caja, puesto que vale

$$\underline{\dim}_{\text{box}}(E) = \underline{\dim}_{\text{box}}(\overline{E}) \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_{\text{box}}(E) = \overline{\dim}_{\text{box}}(\overline{E}),$$

donde \overline{E} es la clausura de E . Esto resulta una desventaja, pues si E es un subconjunto denso en un abierto de \mathbb{R}^n , entonces E tendrá dimensión de caja completa. Por lo tanto, y como ejemplo, si $E = \mathbb{Q}$, se tiene que $\dim_H(E) = 0$ y $\dim_{\text{box}}(E) = 1$.

Por último, una desigualdad básica entre las dimensiones. Sea E acotado y no vacío, entonces

$$\dim_H(E) \leq \underline{\dim}_{\text{box}}(E) \leq \overline{\dim}_{\text{box}}(E).$$

En particular, cuando \dim_{box} existe

$$\dim_H(E) \leq \dim_{\text{box}}(E). \quad (2.10)$$

La igualdad, en general es válida para conjuntos con ciertas características de “regularidad” como la autosemejanza.

2.1.5. ‘Divider dimension’

Esta dimensión, está definida para curvas, y está basada en la idea intuitiva de cómo estimar la longitud de la misma, a escalas cada vez más pequeñas. Es el clásico ejemplo de cómo estimar el perímetro de la costa de Gran Bretaña.

Se define una *curva de Jordan* C a la imagen de un intervalo $[a, b]$ por una biyección continua $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ (por lo tanto son curvas que no se autointersecan). Para $\varepsilon > 0$, sea $M_\varepsilon(C)$ el máximo número de puntos x_0, x_1, \dots, x_m en C (en ese orden), tal que $|x_k - x_{k-1}| = \varepsilon$ para $k = 1, 2, \dots, m$ (ver Figura 2.2). Por lo tanto, $\varepsilon(M_\varepsilon(C) - 1)$ puede pensarse como la “longitud” de la curva medida por “pasos de compás” de longitud ε . Así la *divider dimension* es ([Fal 90]):

$$\dim_{\text{div}}(C) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log M_\varepsilon(C)}{-\log \varepsilon} \quad (2.11)$$

si este límite existe (si no, se define la dimensión superior e inferior, tomando, como es usual en estos casos, límite superior e inferior, respectivamente).

Es fácil ver que el valor $\dim_{\text{div}}(C)$ es al menos igual a $\dim_{\text{box}}(C)$ (asumiendo que ambos existen); y que en ejemplos sencillos de autosemejanza, como la curva de von Koch (Figura 2.3), éstos coinciden (y por consiguiente, también coinciden con $\dim_H(C)$).

Nota

Existe en la literatura, otra definición elegante de dimensión fractal, conocida con el nombre de *dimensión de empaquetamiento* o ‘*Packing dimension*’ ([Fal 90], [Fal 97],

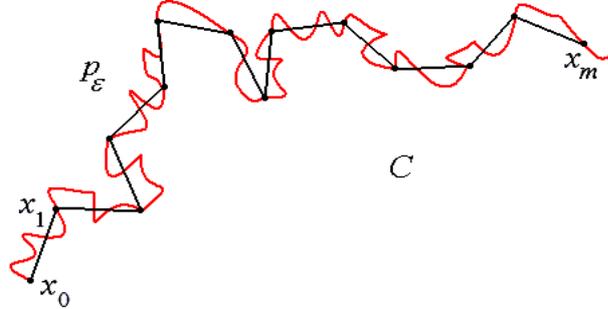


Figura 2.2: Método del compás sobre la curva C (roja).

[Tri 95], etc.). Es más reciente que las dimensiones que hemos descrito, fue introducida por C. Tricot en 1982. Como la de Hausdorff, también está definida a partir de una medida, la cual juega un rol importante, por ejemplo, dentro de la Teoría Geométrica de la Medida. Nosotros no la introduciremos en este trabajo, simplemente porque no haremos uso de ella.

2.2. Dimensiones fractales de medidas

Obtener cotas superiores o inferiores para estimar la dimensión de un conjunto, es usualmente difícil. Para tal fin, existen métodos que estudian el comportamiento de alguna medida μ adecuada con soporte en el conjunto. Algunos resultados al respecto son

Proposición 2.2.1 (Principio de distribución de masa). *Sea $E \in \mathbb{R}^n$ y sea μ una medida finita con $\mu(E) > 0$. Supongamos que existen números $\alpha \geq 0$, $c > 0$ y $\delta_0 > 0$, tal que*

$$\mu(U) \leq c|U|^\alpha,$$

para todo U con $|U| \leq \delta_0$. Entonces $\mathcal{H}^\alpha(E) \geq \mu(E)/c$, y

$$\alpha \leq \dim_H(E) \leq \underline{\dim}_{box}(E) \leq \overline{\dim}_{box}(E).$$

Luego, si uno puede encontrar una medida μ que satisfaga ciertas condiciones de “densidad local” sobre E , podemos obtener las siguientes estimaciones para la dimensión de Hausdorff.

Proposición 2.2.2 *Sea E un conjunto de Borel, μ de Borel finita, y $0 < c < \infty$.*

- (i) *Si $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(B_\varepsilon(x))/\varepsilon^\alpha \leq c$ para todo $x \in E$, entonces $\mathcal{H}^\alpha(E) \geq \mu(E)/c$.*
- (ii) *Si $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(B_\varepsilon(x))/\varepsilon^\alpha \geq c$ para todo $x \in E$, entonces $\mathcal{H}^\alpha(E) \leq 2^\alpha \mu(E)/c$.*

Existe una versión de la Proposición 2.2.2 para dimensiones, que debe ser expresada convenientemente, en términos de la dimensión local de una medida

Definición 2.2.3 Definimos las dimensiones locales inferior y superior de μ en x (también llamada la dimensión puntual o exponente de Hölder) a

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_\varepsilon(x))}{\log \varepsilon}, \\ \overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_\varepsilon(x))}{\log \varepsilon},\end{aligned}$$

respectivamente. Si estos límites coinciden, se define la dimensión local de μ en x

$$\dim_{\text{loc}}\mu(x) = \underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) = \overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x).$$

Estas dimensiones locales expresan el escalamiento de $\mu(B_\varepsilon(x))$ para ε pequeños, con $\dim_{\text{loc}}\mu(x)$ también pequeña si μ está “altamente concentrada” alrededor de x .

Proposición 2.2.4 Sea E un conjunto de Borel, μ de Borel finita.

- (i) Si $\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) \geq \alpha$ para todo $x \in E$ y $\mu(E) > 0$, entonces $\dim_H(E) \geq \alpha$.
- (ii) Si $\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) \leq \alpha$ para todo $x \in E$, entonces $\dim_H(E) \leq \alpha$.

2.3. Curvas construidas por similitudes

2.3.1. Similitudes

En esta sección haremos un repaso de la descripción de una construcción general de fractales, de la cual son ejemplos algunos de los fractales más conocidos en la literatura, como son el *Conjunto de Cantor* en \mathbb{R} , la *curva de von Koch* en \mathbb{R}^2 , la *esponja de Sierpinski* en \mathbb{R}^3 , etc. Estos fractales están hechos de partes propias que son copias semejantes o similares de sí mismos.

Sea D un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n . Una función $S: D \rightarrow D$ se llama una contracción en D , si existe un número a , $0 < a < 1$, tal que $|S(x) - S(y)| \leq a|x - y|$, para todo $x, y \in D$. Claramente, una contracción es una función continua. Si vale la igualdad, es decir, $|S(x) - S(y)| = a|x - y|$, entonces, S transforma conjuntos en conjuntos semejantes. En ese caso, llamamos a S una *similitud*, y a a la *razón de similitud* S .

Sean S_1, S_2, \dots, S_N contracciones, $N \geq 2$. Un subconjunto $F \subset D$ se dice *invariante* por las S_i si

$$F = \bigcup_{i=1}^N S_i(F)$$

Estos conjuntos invariantes suelen ser fractales, como puede apreciarse en la Figura 2.3.

El siguiente teorema, referido en inglés como ‘contraction mapping theorem’ [Fal 97] dice que una familia de contracciones, también llamada esquemas de funciones iteradas (IFS, por sus siglas en inglés: *iterated function schemes*), definen únicos conjuntos

invariantes, compactos, no vacíos. Para establecer esto, definimos una distancia entre subconjuntos de D . Sea \mathcal{S} la clase de todos los subconjuntos compactos no vacíos de D . Sea ρ una distancia definida sobre D , por

$$\rho(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subset B(\varepsilon) \text{ y } B \subset A(\varepsilon)\}$$

donde $A(\varepsilon)$ es el conjunto ε -paralelo de A . Puede verse que ρ satisface los tres requerimientos para ser una métrica, y que \mathcal{S} resulta un espacio *completo* con esta métrica, llamada *métrica de Hausdorff* sobre \mathcal{S} , (ver [Fal 90]).

Teorema 2.3.1 Sean S_1, S_2, \dots, S_N contracciones sobre $D \subset \mathbb{R}^n$, tal que $|S_i(x) - S_i(y)| \leq a_i |x - y|$, con $a_i < 1$ ($i = 1, \dots, N$), para todo $x, y \in D$. Entonces existe un único conjunto compacto no vacío, F , que es invariante por las S_i , es decir,

$$F = \bigcup_{i=1}^N S_i(F) . \quad (2.12)$$

Más aun, si definimos las contracciones S_i por

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^N S_i(E)$$

para $E \in \mathcal{S}$, entonces tenemos que para todo E , $S^k(E) \rightarrow F$, en la distancia ρ , cuando $k \rightarrow \infty$, donde $S^k(E)$ es la k -ésima composición de S . Además, si $S_i(E) \subset E$ para cada i , entonces

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E) .$$

Para una demostración completa del teorema, ver por ejemplo [Fal 90].

Se dice que el conjunto F tiene estructura *autosemejante* (o es *autosemejante*) si satisface (2.12); y en el contexto de los sistemas dinámicos, se llama conjunto *atractor* del IFS $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$. En el caso en que todas las razones de las similitudes sean iguales, es decir, $a_i = a < 1$ para todo i , entonces F se llama *estrictamente autosemejante*.

2.3.2. Generatriz de curvas autosemejantes

Describiremos un método geométrico de aproximación por sucesivas poligonales, que permite construir curvas límite Γ en \mathbb{R}^n , cuyas características serán de interés para esta tesis.

Sean $A = A_1, A_2, \dots, A_{N+1} = B$, $N + 1$ puntos distintos en \mathbb{R}^n , que satisfacen $\text{dist}(A_i, A_{i+1}) < \text{dist}(A, B)$, para todo $i = 1, \dots, N$. Sea p_1 la poligonal cuyos vértices son A_1, A_2, \dots, A_{N+1} , que llamaremos la *generatriz* de Γ . Está formado por N segmentos $A_i A_{i+1}$, y es la primera aproximación poligonal de la curva límite Γ . La poligonal p_2 se obtiene reemplazando cada segmento $A_i A_{i+1}$ por su copia $S_i(p_1)$, la cual

tiene los mismos puntos extremos A_i y A_{i+1} . Luego, p_2 tiene N^2 segmentos y

$$p_2 = \bigcup_{i=1}^N S_i(p_1)$$

y así siguiendo. Asumiendo construida la poligonal p_{k-1} , sus extremos son A y B , pasa por todos los puntos A_i y tiene N^{k-1} segmentos. Como el arco de poligonal $S_i(p_{k-1})$ tiene extremos A_i y A_{i+1} , reemplazamos al segmento $A_i A_{i+1}$ por aquél. Esto produce una poligonal p_k de N^k segmentos, tal que

$$p_k = \bigcup_{i=1}^N S_i(p_{k-1}) .$$

Al representar p_k y p_{k+1} (en el caso de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3), para un valor de k grande, vemos que ellas son indistinguibles. Esto es así porque las poligonales convergen, según la distancia de Hausdorff, a una curva límite Γ , que verifica

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^N S_i(\Gamma) ,$$

por lo tanto, Γ es una curva fractal *autosemejante*. La demostración de la existencia de esta curva límite y la caracterización anterior, pueden verse en [Tri 95].

Nota

Observemos que p_1 no es, por sí misma, suficiente para determinar completamente la curva Γ . Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 , dados cuatro puntos $A \neq B$, $C \neq D$, existen dos similitudes tal que $S(A)=C$ y $S(B)=D$ (una con determinante positivo y otra con determinante negativo). Análogamente, existen dos similitudes tal que $S(A)=D$ y $S(B)=C$. Luego, hay cuatro similitudes distintas tal que $S(AB)=CD$ (ver Figura 2.4). En este caso, p_1 correspondería a 4^N posibles familias de diferentes similitudes $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$. Luego, salvo posibles simetrías, se pueden construir hasta 4^N curvas límite a partir de la generatriz p_1 , todas ellas con la misma dimensión fractal.

2.3.3. Condición de Cerrado

La construcción de la curva límite a partir de su generatriz p_1 , permite obtener buenas representaciones de curvas autosemejantes, pero no nos permite predecir algunos aspectos, como por ejemplo, si Γ tendrá o no puntos múltiples. Muchas curvas que modelan fenómenos (líneas geográficas, conjuntos caóticos, etc.) deben ser curvas simples. Luego, dadas N similitudes como antes, es importante disponer de un criterio simple, aplicable a las condiciones iniciales, que permita predecir si la curva límite será simple. Este criterio es referido en [Tri 95, p. 187], como la *Condición de Cerrado* (*Closed Set Criterion*).

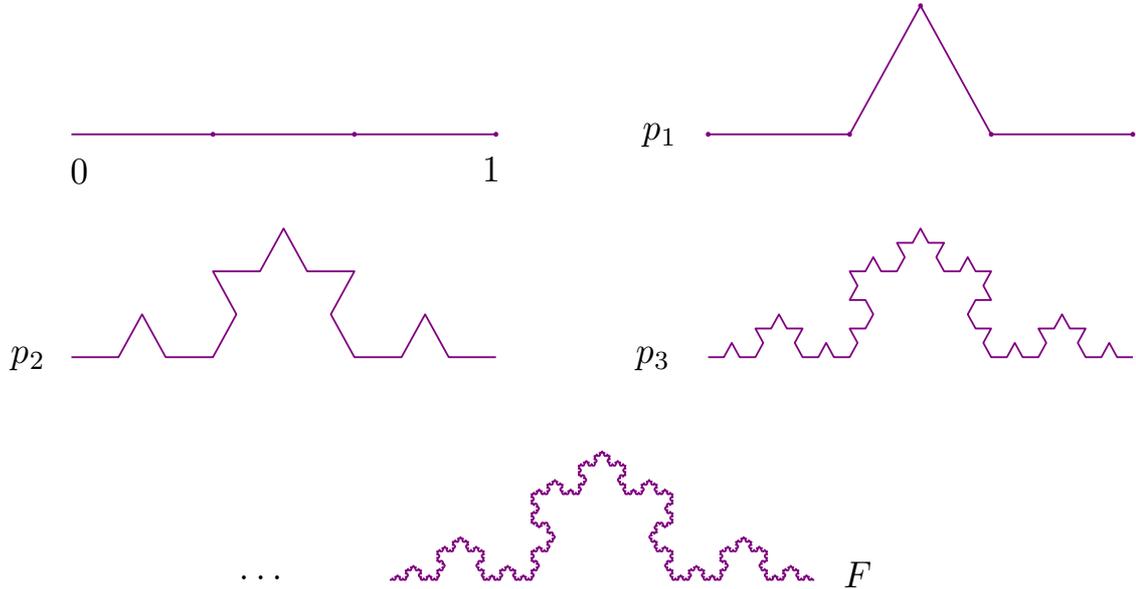


Figura 2.3: Aproximación poligonal de la curva de von Koch ($A=(0,0), B=(1,0)$).

Proposición 2.3.2 Condición de Cerrado: Sean $N+1$ puntos A_1, A_2, \dots, A_{N+1} y N similitudes S_1, S_2, \dots, S_N como antes. Sea Γ la curva autosemejante definida por estos puntos y similitudes. Asumamos que existe un conjunto cerrado y acotado D , de interior no vacío, que satisface:

- i) $S_i(D) \subset D$, para todo $i=1, \dots, N$;
 - ii) $S_i(D) \cap S_{i+1}(D) = \{A_{i+1}\}$, para todo $i=1, \dots, N-1$;
 - iii) $S_i(D) \cap S_j(D) = \emptyset$, siempre que $|i-j| \geq 2$;
- entonces Γ es simple.

2.3.4. Condición de Abierto

Una de las ventajas que poseen los fractales autosemejantes, y en particular, las curvas de nuestro interés, es que la dimensión fractal puede calcularse fácilmente, en términos de las razones de las similitudes involucradas. Pero para que esto sea posible, se requiere que las componentes $S_i(F)$ no se solapen “demasiado”. En el caso de curvas que satisfacen el criterio anterior (Condición de Cerrado), es claro tal solapamiento no sucede. Sin embargo, la condición que veremos a continuación, es válida para una clase más amplia de curvas, no necesariamente simples, pero que cumplen con el siguiente criterio menos restrictivo que el anterior [Fal 90]:

Definición 2.3.3 Condición de Abierto: Un IFS $\{S_1, \dots, S_N\}$ satisface la Condición de Abierto (‘Open Set Condition’), si existe un conjunto abierto, acotado y no

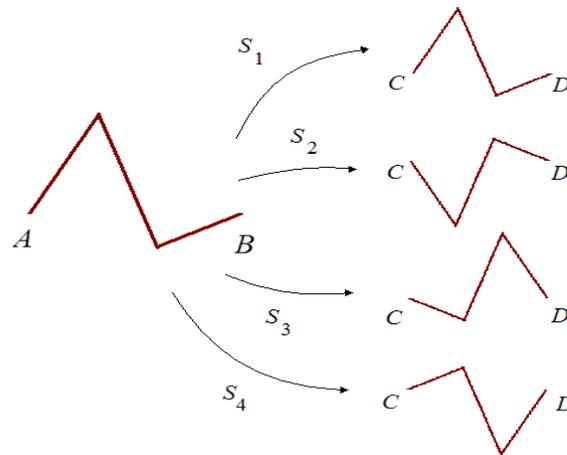


Figura 2.4: *Distintas similitudes a partir de una misma generatriz en \mathbb{R}^2 .*

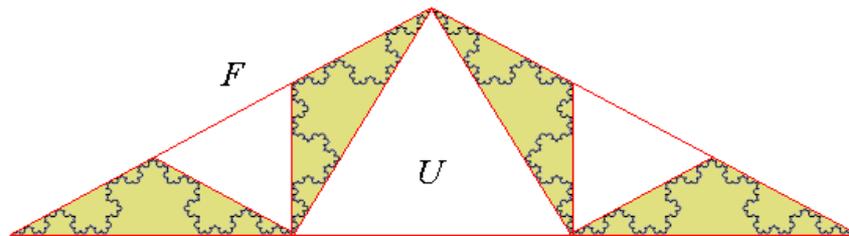


Figura 2.5: *La Condición de Abierto para la curva de von Koch se cumple para U el triángulo (abierto) que cubre a F . La Condición de Cerrado se cumple para $D=U\cup\partial U$.*

vacío, $U \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\bigcup_{i=1}^N S_i(U) \subset U$$

donde la unión es disjunta.

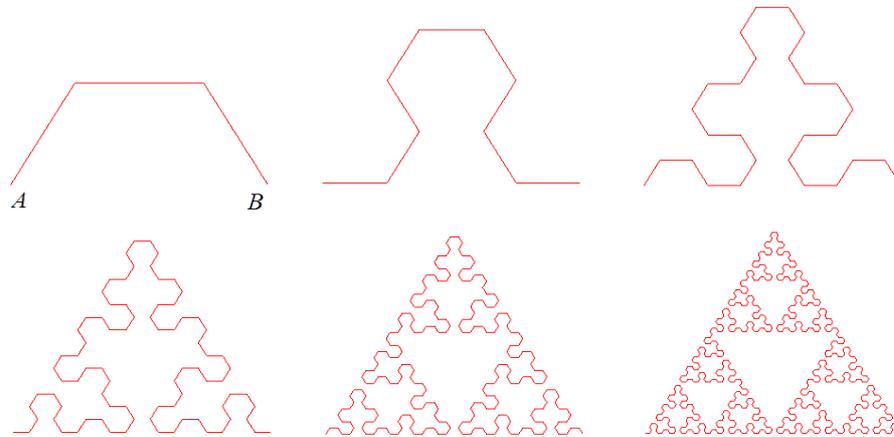
Este criterio incluye al anterior, tomando como abierto U al interior de D (por ejemplo, ver Figura 2.5), pero incluye otros fractales autosemejantes, como el triángulo de Sierpinski, que pueden describirse como curvas límite que no son simples (ver Figura 2.6).

En lo que sigue, llamaremos \mathcal{F}_H a la familia compuesta por estas curvas límite Γ , construidas por similitudes contractivas (o contracciones) S_1, S_2, \dots, S_N , de razones de similitud (o factores de contracción) $0 < a_i < 1$, $i = 1, \dots, N$, y que cumplan con este criterio. Luego, las curvas de \mathcal{F}_H , serán acotadas, fractales y autosemejantes.

2.3.5. Dimensión fractal de curvas autosemejantes

Es conocido en la literatura ([Fal 90], [Fal 97], [Tri 95]), el siguiente teorema que proporciona una ecuación sencilla para la dimensión fractal en estos casos.

(a)



(b)

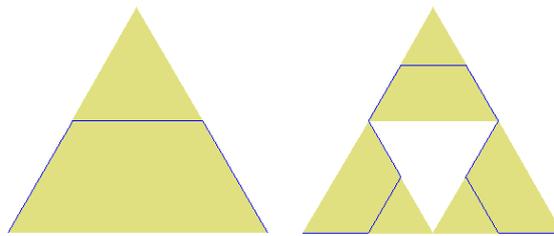


Figura 2.6: (a) *Triángulo de Sierpinski como curva autosemejante* ($A=(0,0)$, $B=(1,0)$). (b) *Satisface la condición de abierto, pero no la Condición de Cerrado.*

Teorema 2.3.4 *Sea F un fractal construido por N similitudes S_1, S_2, \dots, S_N de razones a_1, a_2, \dots, a_N respectivamente, y que satisfacen la Condición de Abierto. Entonces $d = \dim_H(F) = \dim_{\text{box}}(F)$ satisface*

$$\sum_{i=1}^N a_i^d = 1 \tag{2.13}$$

Corolario 2.3.5 *Si $a_1 = \dots = a_N = a$, con $0 < a < 1$, es decir F es estrictamente autosemejante, entonces*

$$d = \frac{\log N}{-\log a} . \tag{2.14}$$

Ejemplos:

1. En la Figura 2.3, se puede ver que la curva de von Koch F es una curva fractal simple, estrictamente autosemejante, y está construida mediante 4 similitudes, todas de razón o factor de contracción igual a $1/3$. Luego,

$$\dim_H(F) = \dim_{\text{box}}(F) = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,261859 \dots$$

2. En la Figura 2.7 se muestra la aproximación poligonal de una curva simple, autosemejante, pero construida a partir de distintos factores de contracción: tres similitudes S_1, S_2 y S_3 con $a_1 = a_2 = a_3 = 1/7$; S_4 con $a_4 = 2/7$ y S_5 con $a_5 = 4/7$. Luego $d = \dim_H(F) = \dim_{\text{box}}(F)$ es el único valor que satisface la ecuación

$$3 \left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1,$$

lo que da $d \approx 1,2213$. Este ejemplo lo usaremos más adelante, en el Capítulo 4.

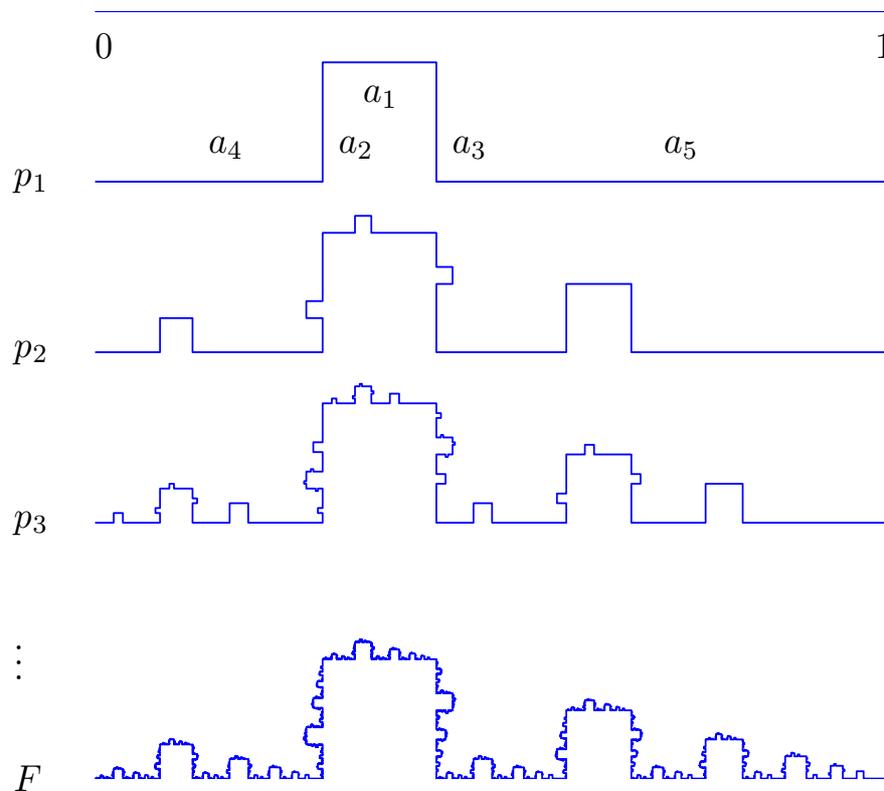


Figura 2.7: Curva autosemejante; $a_1 = a_2 = a_3 = 1/7$, $a_4 = 2/7$ y $a_5 = 4/7$

3. Existen ejemplos conocidos en la literatura, de curvas fractales autosemejantes de dimensión “plena”, como son la curva de Peano en \mathbb{R}^2 , de $d=2$; o la curva de Hilbert en \mathbb{R}^3 , de $d=3$. Pero estas curvas no son simples, ni cumplen con la Condición de Abierto, como puede verse en la Figura 2.8. En cambio, el ejemplo de la Figura 2.9, muestra la construcción de una curva autosemejante en \mathbb{R}^3 que no es simple, pero que cumple con la Condición de Abierto, tomando como conjunto abierto U , al interior de la pirámide formada por la primera poligonal. Se puede apreciar que esa estructura es una curva, notando que concurren una cantidad par de aristas a cada vértice de las sucesivas poligonales, lo que

garantiza que la curva (pensada como imagen de una parametrización) “entre” y “salga” de cada uno. La auto semejanza puede verse en que la segunda poligonal está formada por 8 contracciones de la primera; es decir, hay 8 similitudes de razón igual a $1/3$; luego $d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,892789\dots$

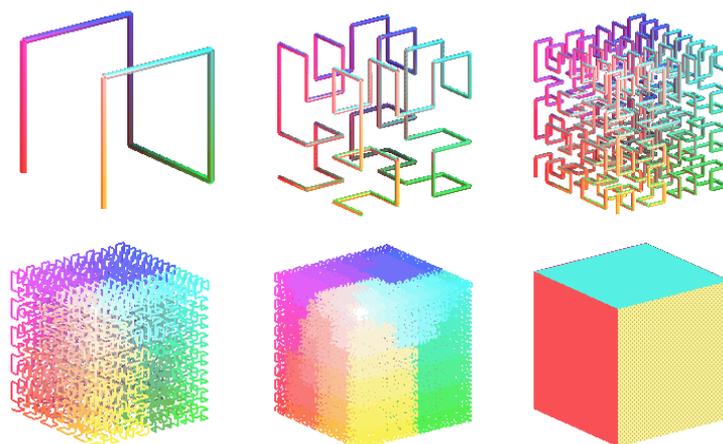


Figura 2.8: *Curva de Hilbert en \mathbb{R}^3*

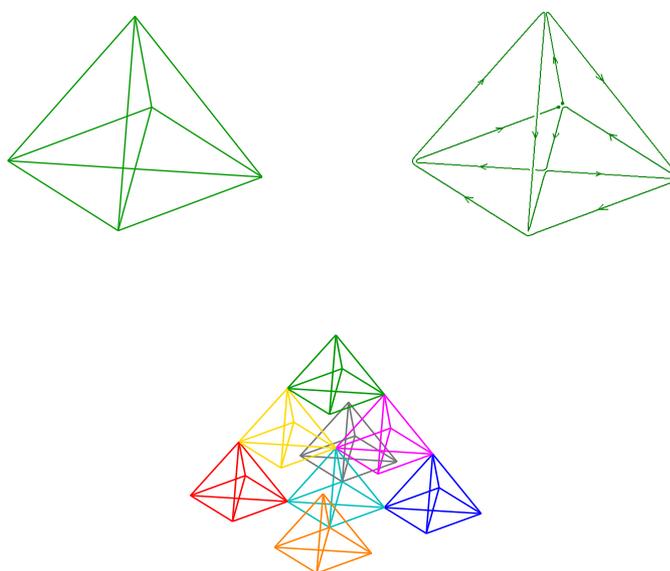


Figura 2.9: *Curva auto semejante en \mathbb{R}^3*

Capítulo 3

Dimensión de Mendès France

...The reader may feel surprised that there is no mention of Benoît Mandelbrot in these notes. His objects are fractals, i.e., locally irregular. Mine, on the contrary are locally smooth. The curves I discuss are locally rectifiable. My topic could be thought of “anti-Mandelbrotian” within “Mandelbrotmania”. I was, I am, and I hope to remain influenced by B. Mandelbrot.

Michel Mendès France.*

En esta sección interpretaremos y definiremos una dimensión para curvas, introducida por M. Mendès France en varios de sus artículos, siendo, según él, la versión en [MF 91], la más ampliada y mejorada; y a la cual nos referiremos.

Lo nuevo de esta dimensión, es la de ser también una dimensión *fraccionaria*, o *fractal*, pero independiente de la noción de conjunto fractal. De hecho, veremos que curvas perfectamente suaves y localmente rectificables, cuya dimensión topológica y fractal es igual a 1, pueden tener dimensiones no enteras. Por supuesto, existen profundas conexiones que son el núcleo de esta primera parte de la tesis, y que desarrollaremos a lo largo de este capítulo.

3.1. Idea intuitiva

Para introducir una idea intuitiva de lo que cuantifica esta dimensión, imaginemos una curva plana Γ , como un río hipotético de longitud L , su lecho de amplitud ε : $\Gamma_L(\varepsilon)$, y C_L el perímetro de la cuenca de este río que supondremos convexa. Asumiendo que L es grande, se define la “dimensión” d del río Γ , aproximadamente por la fórmula:

$$\mu^2(\Gamma_L(\varepsilon)) \approx (\mu^1(C_L))^d$$

donde μ^2 indica el área y μ^1 la longitud. Esta relación dice que, si el río es más bien recto, entonces $\mu^1(C_L)$ (la longitud del perímetro de la cuenca) se puede aproximar

*[MF 91]

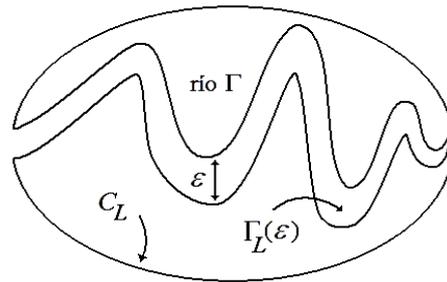
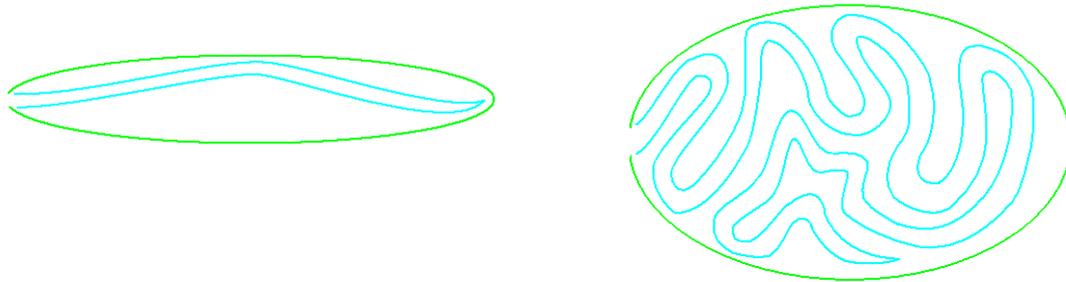
Figura 3.1: Río Γ , su lecho y su cuenca.

Figura 3.2: Ríos longitudinal y meandroso.

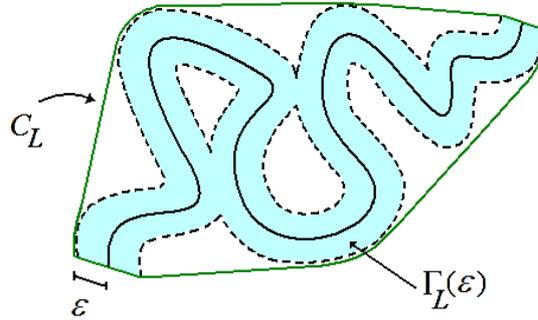
por $2L$, y el área del lecho, $\mu^2(\Gamma_L(\varepsilon))$, por εL . En este caso, claramente la dimensión d es igual a 1. En cambio, si el río es más bien meandroso, de manera que su lecho parece llenar la cuenca, entonces $\mu^2(\Gamma_L(\varepsilon))$ se puede aproximar por el área de ésta, que a su vez, es comparable con $(\mu^1(C_L))^2$. En este caso, d es igual a 2. Esta primera ilustración con ríos y cuencas nos describe algunas de las características que tienen las curvas que nos interesan: continuas, de longitud infinita, no acotadas, no autointersectantes, localmente rectificables, y que cada bola cerrada de \mathbb{R}^n contiene un tramo de Γ de longitud finita (una misma bola que deslicemos a lo largo de Γ , podrá contener tramos más y más largos, pero siempre de longitud finita). Estas curvas formarán la familia que llamaremos \mathcal{F}_{MF} .

3.2. La dimensión de una curva

Una curva puede, y suele, ser caracterizada vía el uso de parametrizaciones. Otra manera de caracterizar una curva es mediante la “salchicha de Minkowski”.

Sea $\varepsilon > 0$, con $\Gamma(\varepsilon)$ denotamos el conjunto de los puntos $P \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia a Γ no excede dicho ε :

$$\Gamma(\varepsilon) = \bigcup_{P \in \Gamma} B(P, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^n / \text{dist}(P, \Gamma) \leq \varepsilon\} ,$$

Figura 3.3: Representación de $\Gamma_L(\varepsilon)$ y C_L .

conocido como la ε -salchicha de Minkowski, también llamado ε -engordado de Minkowski, o conjunto ε -paralelo.

Claramente

$$\Gamma = \bigcap_{\varepsilon > 0} \Gamma(\varepsilon) .$$

Para una curva Γ perteneciente a \mathcal{F}_{MF} , fijamos un origen y consideramos un tramo Γ_L de longitud L de Γ . Sea $\Gamma_L(\varepsilon)$ la ε -salchicha de Minkowski del tramo Γ_L , es decir

$$\Gamma_L(\varepsilon) = \bigcup_{P \in \Gamma_L} B(P, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^n / \text{dist}(P, \Gamma_L) < \varepsilon\} .$$

Para cada sucesión creciente $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y ε fijo, la familia $\{\Gamma_{L_k}(\varepsilon)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente respecto de la inclusión, y sus respectivos volúmenes $\mu^n(\Gamma_{L_k}(\varepsilon))$ forman una sucesión creciente que tiende a infinito.

3.2.1. Dimensión de una curva en \mathbb{R}^2

Inspirado por las ideas concernientes a ríos y cuencas, M. Mendès France propone en el artículo de referencia [MF 91], la dimensión para curvas Γ (con las características ya descritas), dando la definición para curvas planas, es decir, $\Gamma \in \mathbb{R}^2$, de la siguiente manera: sea $\Gamma_L(\varepsilon)$ como antes, y sea C_L la frontera de la cápsula convexa del tramo Γ_L , entonces

Definición 3.2.1 La dimensión de Mendès France de la curva Γ es

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \liminf_{L \nearrow \infty} \frac{\log \mu^2(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \mu^1(C_L)} , \quad (3.1)$$

donde por μ^n denotamos el volumen o medida n -dimensional. Allí, el autor también deja pendiente la generalización de esta definición para el caso de curvas no acotadas en \mathbb{R}^n :... ‘The theory we shall develop concerns unbounded curves Γ in the

n -dimensional Euclidean space \mathbb{R}^n . We shall however restrict our study to the case $n=2$ which is somehow more appealing. The general case should then cause no trouble' ([MF 91, p. 327]).

La propuesta de generalización a \mathbb{R}^n de la definición (3.1) que resulta “inmediata”, sería reemplazar el área de la ε -salchicha de Minkowski, por su volumen n -dimensional (i.e. μ^2 por μ^n); y el perímetro de la cápsula convexa, por la superficie o volumen $n-1$ -dimensional de la misma (i.e. μ^1 por μ^{n-1}). La fórmula quedaría

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \liminf_{L \nearrow \infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \mu^{n-1}(C_L)} ;$$

el problema con esta expresión, como veremos luego, es que su valor no queda comprendido entre 1 y n (lo que sería natural esperar de una dimensión sobre conjuntos de \mathbb{R}^n).

En la definición de las dimensiones fractales más conocidas, como la de Hausdorff, la de caja (*box-counting dimension*) o la de Minkowski (equivalente a la de caja), etc., típicamente se consideran cubrimientos del conjunto $F \in \mathbb{R}^n$ (al que se le quiere calcular la dimensión). Estos cubrimientos están formados por bolas, o cuadrados de una grilla de lados paralelos a los ejes, etc.; de radios, o lados, o diámetros, que no superen una magnitud pequeña, digamos $\delta > 0$. Dependiendo de cada definición, la dimensión (cuando existe) se estima como el comportamiento de un cociente log-log, donde se compara el escalamiento de alguna cantidad que depende de δ , respecto de esa magnitud δ , cuando $\delta \rightarrow 0$. Lo que queremos resaltar es que δ representa una magnitud unidimensional. Estas dimensiones sí toman valores que van de 1 a n .

Luego, con esa idea, y para poder generalizar la dimensión de Mendès France a \mathbb{R}^n , primero vamos a proponer una definición para curvas planas, alternativa y equivalente a (3.1).

Recordemos que el *diámetro* de un conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ es la mayor de las distancias entre dos de sus puntos

$$\text{diam}(E) = \sup_{x,y \in E} \text{dist}(x,y)$$

y que el diámetro de E es siempre igual al diámetro de su cápsula convexa, $C(E)$. Para una curva acotada, el diámetro es la longitud de la su cuerda más larga.

Proposición 3.2.2 *Sea Δ_L el diámetro de la cápsula convexa C_L del tramo Γ_L . Entonces*

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \liminf_{L \nearrow \infty} \frac{\log \mu^2(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L} . \quad (3.2)$$

Demostración: En efecto, C_L está incluida en una circunferencia de diámetro igual a Δ_L . Claramente, la proposición se infiere de

$$\Delta_L \leq \mu^1(C_L) \leq \pi \Delta_L .$$

QED.

3.2.2. Dimensión de una curva en \mathbb{R}^n

Ahora estamos en condiciones de pasar a curvas en \mathbb{R}^n , ya que el diámetro Δ_L es una magnitud unidimensional de la cápsula convexa $n-1$ -dimensional, C_L . Luego, nuestra propuesta de generalización es

Definición 3.2.3 *La dimensión de Mendès France de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma \in \mathcal{F}_{MF}$ es*

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \liminf_{L \nearrow \infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L}. \quad (3.3)$$

3.2.3. Propiedades de la dimensión de Mendès France

A continuación daremos algunas propiedades, y la interpretación geométrica de esta dimensión.

Observar que la función $\mu^n(\Gamma(\varepsilon))$ tiene la ventaja de ser independiente de la parametrización de una curva, y claramente depende de ε . Sin embargo, la siguiente observación dice que la definición no depende de ε , y será de suma importancia para el cómputo de la misma

Observación 3.2.4 *El límite*

$$d(\varepsilon) = \liminf_{L \nearrow \infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L}$$

no depende de ε .

Demostración: Para probarlo, veremos que $d(\varepsilon)$ resulta ser un valor constante. En efecto, sea $N_L(\varepsilon)$ la mínima cantidad de bolas de radio ε necesarias para cubrir el tramo Γ_L . Si las bolas están centradas en Γ_L , entonces $\Gamma_L(\varepsilon)$ puede cubrirse con bolas concéntricas a éstas, pero de radio 2ε . Por lo tanto, tenemos

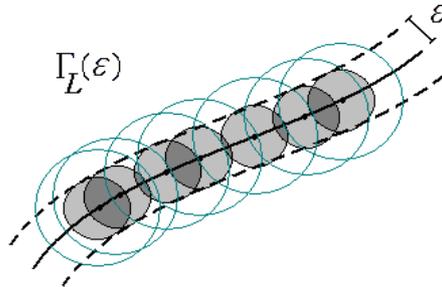


Figura 3.4: Cubrimiento de $\Gamma_L(\varepsilon)$ por bolas de radio ε y radio 2ε .

$$c_n \varepsilon^n N_L(\varepsilon) \leq \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon)) \leq c_n (2\varepsilon)^n N_L(\varepsilon)$$

donde c_n es el volumen de la bola unitaria en \mathbb{R}^n . Además, es claro que $N_L(\varepsilon) \geq N_L(\varepsilon')$ si $\varepsilon < \varepsilon'$. Luego,

$$c_n(2\varepsilon)^n N_L(\varepsilon) \leq c_n(2\varepsilon)^n N_L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = c_n 4^n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n N_L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 4^n \mu^n\left(\Gamma_L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

por lo tanto,

$$\mu^n\left(\Gamma_L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leq \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon)) \leq 4^n \mu^n\left(\Gamma_L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

tomando logaritmos y dividiendo por $\log \Delta_L$ (que no depende de ε)

$$\frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\frac{\varepsilon}{2}))}{\log \Delta_L} \leq \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L} \leq \frac{\log 4^n + \log \mu^n(\Gamma_L(\frac{\varepsilon}{2}))}{\log \Delta_L}$$

tomando ahora límite inferior cuando $L \rightarrow +\infty$, obtenemos que

$$d(\varepsilon) = d\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Como $d(\varepsilon)$ decrece cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, necesariamente $d(\varepsilon)$ es constante. QED.

Como consecuencia, el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es innecesario en la definición (3.3). Matemáticamente, nada nos impide considerar $\varepsilon = 1$, o cualquier otro valor arbitrario que nos permita efectuar cálculos para obtener la dimensión en un caso particular. Por lo tanto, la expresión de $d(\varepsilon)$ será la expresión simplificada de la dimensión de Mendès France de una curva Γ , es decir,

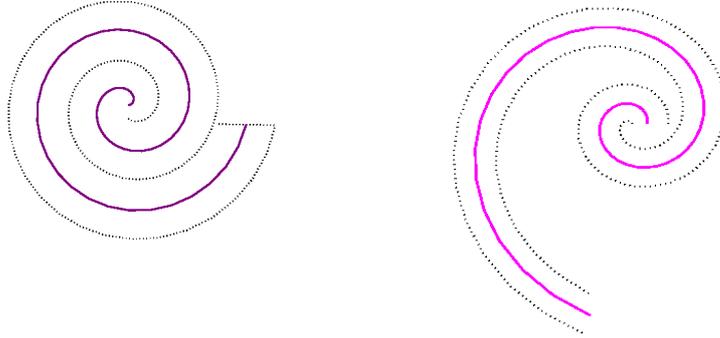
$$\dim_{MF}(\Gamma) = \liminf_{L \nearrow \infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L} \quad (3.4)$$

Esta observación es muy importante, porque nos está indicando que no importa cuán “ancho” es el río (o cuán “gorda” es la ε -salchicha), sino que lo importante, lo que cuenta en definitiva, es de qué manera va llenando el espacio \mathbb{R}^n a medida que crece la longitud de Γ_L (recordemos que Γ es no acotada).

Este hecho caracteriza a esta dimensión como una dimensión que no “mira de cerca” una curva, como lo hacen las dimensiones fractales clásicas (de Hausdorff, o de caja o Minkowski, etc.) observando el conjunto a escalas cada vez más pequeñas. Por el contrario, “mira de lejos” el comportamiento de la curva cuando su longitud tiende a infinito.

Para ilustrar esto consideremos dos curvas planas conocidas. Por un lado, la espiral arquimedea de paso ε , i.e., Γ es la imagen de la función $\rho(\theta) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\theta$ (coord. polares) (Fig. 3.5). Cuando la longitud L tiende a infinito, debemos alejarnos cada vez más del plano para ver su comportamiento, ya que el diámetro de su cápsula convexa también tiende a infinito; y si nos alejamos lo suficiente, veremos que el paso ε ya no se distingue. En este caso $\Gamma(\varepsilon)$ cubre todo el plano, y por lo tanto $\dim_{MF}(\Gamma)$ igual a 2.

Por otro lado, si Γ es una espiral de tipo exponencial, $\rho(\theta) = \exp \theta$, entonces, para cualquier valor de ε elegido, al alejarnos veremos siempre un tramo de curva de la misma forma (un trazo de dimensión de Hausdorff igual a 1), y $\Gamma(\varepsilon)$ incapaz de llenar el plano. Más aun, la $\dim_{MF}(\Gamma)$ es igual a 1.

Figura 3.5: *Espiral arquimediana y espiral exponencial.*

Proposición 3.2.5 Para toda curva $\Gamma \in \mathcal{F}_{MF}$, $1 \leq \dim_{MF}(\Gamma) \leq n$.

Demostración: Sea $C_L(\varepsilon)$ la cápsula convexa de $\Gamma_L(\varepsilon)$. Luego, el volumen $\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))$ está acotado superiormente por el volumen $\mu^n(C_L(\varepsilon))$.

La cápsula convexa C_L está contenida en una bola n -dimensional de diámetro igual Δ_L . Luego, $C_L(\varepsilon)$ está contenida en una bola de diámetro igual a $\Delta_L + 2\varepsilon$, y por lo tanto

$$\mu^n(C_L(\varepsilon)) \leq c_n \left(\frac{\Delta_L + 2\varepsilon}{2} \right)^n = \tilde{c}_n \Delta_L^n + o(\Delta_L^n),$$

donde c_n y \tilde{c}_n son constantes apropiadas que dependen de n . Luego

$$\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon)) \leq \tilde{c}_n \Delta_L^n + o(\Delta_L^n),$$

tomando logaritmos

$$\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon)) \leq \log(\Delta_L^n) + \log \left(\tilde{c}_n + \frac{o(\Delta_L^n)}{\Delta_L^n} \right).$$

Dividiendo por $\log \Delta_L$ y tomando límite inferior cuando $L \rightarrow +\infty$

$$\dim_{MF}(\Gamma) \leq n.$$

Por otro lado, claramente $\Delta_L \leq L$. Luego, para el volumen del diámetro “engordado” en ε vale

$$c_n \varepsilon^n + c_{n-1} \varepsilon^{n-1} \Delta_L \leq \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))$$

Tomando logaritmos, dividiendo por $\log \Delta_L$ y tomando límite como antes, resulta

$$1 \leq \dim_{MF}(\Gamma).$$

QED.

Es importante notar que, en el caso en que existe el límite superior cuando $L \rightarrow +\infty$ del cociente de la definición (3.4), y coincide con el límite inferior (i.e. existe el límite), es suficiente considerar sucesiones crecientes L_k , tales que $\Delta_{L_{k+1}} \geq c \Delta_{L_k}$ para alguna constante $c > 1$; en particular $\Delta_{L_k} = c^k$.

Observación 3.2.6 *En la situación anterior*

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_k}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_k}}$$

Demostración: Para ver esto, notar que si $\Delta_{L_k} < \Delta_L \leq \Delta_{L_{k+1}}$, entonces

$$\frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L} \leq \frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_{k+1}}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_k}} = \frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_{k+1}}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_{k+1}} + \log(\Delta_{L_k}/\Delta_{L_{k+1}})} = \frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_{k+1}}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_{k+1}} - \log c}$$

donde $c > 1$, luego,

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_{k+1}}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_{k+1}}}.$$

Análogamente,

$$\frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_k}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_{k+1}}} = \frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_k}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_k} + \log c} \leq \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L},$$

y

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_{L_k}(\varepsilon))}{\log \Delta_{L_k}} \leq \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))}{\log \Delta_L}.$$

QED.

Se sabe que poder estimar el volumen de $\Gamma_L(\varepsilon)$, y calcular la dimensión para cualquier tipo de curva (y en gral. para cualquier conjunto, incluso en \mathbb{R}^2) es materia muy difícil, y muchos esfuerzos se han hecho en pos de este propósito, tanto desde un punto de vista teórico, como numérico.

Es posible en este caso, sin embargo, obtener fácilmente una cota superior para la dimensión de una curva $\Gamma \in \mathcal{F}_{MF}$

Proposición 3.2.7

$$\dim_{MF}(\Gamma) \leq \liminf_{L \nearrow +\infty} \frac{\log L}{\log \Delta_L}. \quad (3.5)$$

Demostración: Claramente, $\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))$ está acotado por el volumen de la ε -salchicha de Minkowski de una recta de longitud L , es decir,

$$\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon)) \leq c_n \varepsilon^n + c_{n-1} \varepsilon^{n-1} L.$$

QED.

En el párrafo siguiente, veremos un tipo de curvas para las cuales la dimensión es igual a la cota superior de marras, lo que facilita su cálculo.

3.2.4. Curvas resolubles

Sea $B_L(P, \varepsilon)$ una bola centrada en $P \in \Gamma_L$, de radio ε . Sea $L_{P, \varepsilon}$ la longitud de la intersección de la bola con Γ_L , es decir

$$L_{P, \varepsilon} = \mu^1(B_L(P, \varepsilon) \cap \Gamma_L) .$$

Dijimos anteriormente que, fijado $\varepsilon > 0$, si “deslizamos” una bola a lo largo de Γ , ésta contendría siempre un tramo de longitud finita; es decir, $L_{P, \varepsilon} < \infty$, para todo P , y para todo tramo Γ_L . La estimación del comportamiento de $\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))$, a medida que crece L , se dificulta, justamente, cuando el promedio de aquella longitud aumenta a medida que crece la longitud de Γ_L . En cambio, si este promedio permanece acotado, es posible estimar la longitud Γ_L como $\mu^1(\Gamma_L) \approx \text{cte.} \Delta_L$; y por lo tanto, el volumen $\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))$ también. En este caso, el cálculo de la dimensión se simplifica. Distinguiremos a las curvas que cumplen con esta característica con el nombre de *resolubles*.

Definición 3.2.8 *Si existe $M > 0$ ($M = M(\varepsilon)$), tal que $L_{P, \varepsilon} < M$, para todo P , y para todo L ; entonces decimos que Γ es una curva resoluble.*

Para estas curvas vale la siguiente proposición

Proposición 3.2.9 *Si Γ es resoluble, entonces*

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \liminf_{L \nearrow +\infty} \frac{\log L}{\log \Delta_L} . \quad (3.6)$$

Nota: La definición de curva resoluble que proponemos, difiere de la definición dada por M. Mendès France en [MF 91]. La definición que introduce allí, para curvas en \mathbb{R}^2 , se basa en un concepto que define como “coeficiente de confusión”; y que está relacionado con el comportamiento, cuando L crece, del número promedio de puntos de intersección entre un círculo $C_L(P, \varepsilon)$ (donde $P \in \Gamma_L(\varepsilon)$) y Γ_L . Así, una curva es resoluble si su coeficiente de confusión (c.c.) es cero. La demostración de la igualdad (3.6) que allí se muestra, utiliza resultados de probabilidad geométrica (como el teorema de Steinhaus y el teorema de Poincaré, (ver citas en [MF 91])).

Sin embargo, las dos definiciones están relacionadas entre sí ya que, si las longitudes $L_{P, \varepsilon}$ no permanecen acotadas cuando L crece, entonces habrá más puntos de intersección entre $C_L(P, \varepsilon)$ y Γ_L . Luego, el c.c. correspondiente será positivo y la curva no resoluble. En cambio, si las longitudes $L_{P, \varepsilon}$ están acotadas, el número de intersecciones estará controlado, el c.c. será cero y la curva resoluble.

Nosotros daremos una demostración de la Proposición, para el caso general, según nuestra definición

Demostración: Debido a (3.5), basta probar que

$$\liminf_{L \nearrow +\infty} \frac{\log L}{\log \Delta_L} \leq \dim_{MF}(\Gamma) .$$

Sea $N_L(\varepsilon)$ el número máximo de bolas disjuntas no rampantes, necesarias para cubrir Γ_L . Luego, se tiene

$$N_L(\varepsilon) 2\varepsilon \leq L + 2\varepsilon = \sum_{j=1}^{N_L(\varepsilon)} L_{P_j, \varepsilon} + 2\varepsilon \leq N_L(\varepsilon)M + 2\varepsilon .$$

Entonces, para los volúmenes se tiene

$$\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon)) \geq c_n \varepsilon^n N_L(\varepsilon) \geq \frac{L}{M} c_n \varepsilon^n ,$$

tomando logaritmos

$$\log(\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))) \geq \log(L) + \log\left(\frac{c_n \varepsilon^n}{M}\right) ,$$

por lo tanto,

$$\liminf_{L \nearrow +\infty} \frac{\log L}{\log \Delta_L} \leq \dim_{MF}(\Gamma)$$

QED.

Corolario 3.2.10 *De la observación 3.2.6, se tiene que, si Γ es resoluble, entonces*

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log L_k}{\log \Delta_{L_k}} . \quad (3.7)$$

Capítulo 4

Curvas autosemejantes

...A straight line is the total negation of the plane whereas a curved line is potentially the plane in that it contains the essence of the plane itself.

Wassily Kandinsky.*

En este capítulo veremos cómo relacionar las curvas fractales F de \mathcal{F}_H con las curvas Γ de \mathcal{F}_{MF} , para poder comparar las dimensiones fraccionarias de ambas.

4.1. Curvas estrictamente autosemejantes

Comencemos con el caso más sencillo, en el que todas las razones de contracción son iguales.

4.1.1. Construcción

Recordemos de la Sección 2.3 que el proceso mediante el cual obtenemos una curva fractal estrictamente autosemejante, es reemplazar el segmento unitario por una poligonal p_1 de N segmentos de longitud igual a $1/m$ ($N > m$) (proceso de reemplazo de m partes iguales por N partes iguales); y que, sucesivamente, las poligonales p_2, p_3, \dots , se obtienen haciendo esta sustitución en cada uno de los segmentos de la poligonal del paso anterior (ver Figura 2.3).

Hay en este proceso involucradas N similaridades, con factores de contracción $a_i = 1/m$, $i = 1, \dots, N$. Iterando el proceso de reemplazo *ad infinitum*, obtenemos una curva F de longitud infinita, acotada e infinitamente “arrugada”, que pertenece a \mathcal{F}_H , cuya dimensión de Hausdorff es, por (2.14):

$$\dim_H(F) = \frac{\log N}{\log m}.$$

*“Point and Line to Plane”, (1926).

Sea ahora, el siguiente proceso de sustitución: partimos del mismo segmento unitario. En la primera iteración lo reemplazamos por una poligonal p'_1 , semejante a p_1 , pero con los N segmentos de longitud igual a 1. Así, p'_1 resulta una ampliación de p_1 por un factor de expansión igual a m (el inverso del único factor de contracción que genera al fractal). Por lo tanto, el diámetro de p'_1 es m veces el diámetro de p_1 . La segunda iteración es una poligonal p'_2 idéntica a p_2 pero de diámetro m^2 veces mayor, y así sucesivamente.

Obtenemos una curva límite Γ continua, localmente rectificable, no acotada, es decir, perteneciente a \mathcal{F}_{MF} (que llamaremos también estrictamente autosemejante), como puede verse en la Figura 4.1.

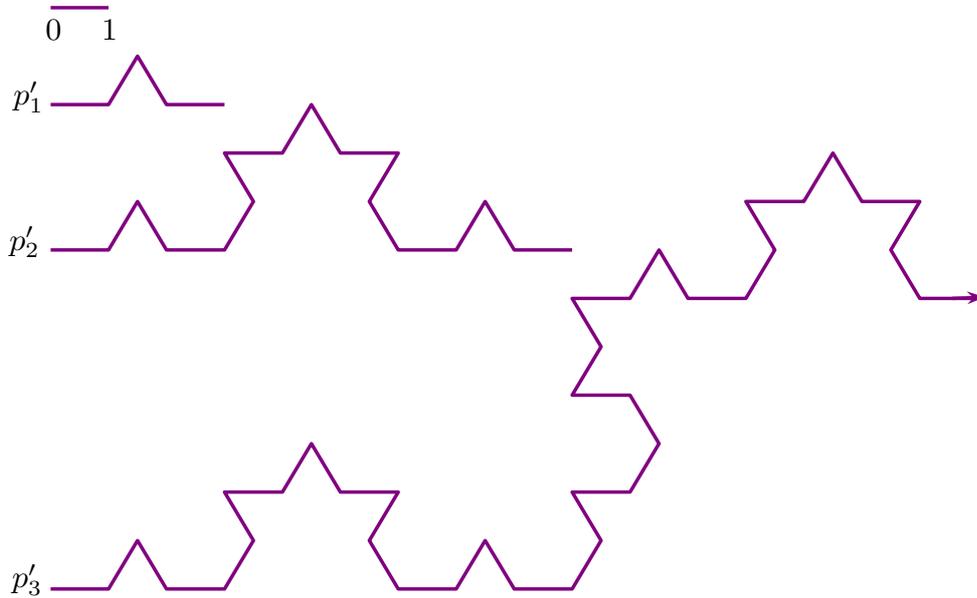


Figura 4.1: Curva de von Koch expandida

4.1.2. Relación entre \dim_H y \dim_{MF}

Es claro que la curva límite Γ es una curva resoluble. Para calcular la dimensión, tomemos como sucesión $\{\Gamma_{L_k}\}_{k \geq 1}$ a la sucesión de poligonales $\{p'_k\}_{k \geq 1}$. La longitud de cada p'_k , L_k , es igual a N^k , y cada diámetro Δ_{L_k} es igual a m^k . Luego, haciendo uso de la observación (3.2.6), y de la proposición (3.2.9), reemplazamos directamente en (3.6) y tenemos que

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log L_k}{\log \Delta_{L_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log N^k}{\log m^k} = \frac{\log N}{\log m} .$$

Como podemos observar entonces, para el caso estrictamente autosemejante la dimensión de Mendès France de Γ coincide con la dimensión de Hausdorff del correspondiente fractal F .

La pregunta que surge naturalmente, es si esta igualdad entre ambas dimensiones se mantiene en el caso en que la autosemejanza de la curva fractal no es estricta; y en caso negativo, qué relaciones se pueden establecer entre las mismas.

4.2. Curvas autosemejantes

En el caso de las curvas estrictamente autosemejantes, vimos que el proceso que las genera construye las sucesivas poligonales p'_k utilizando como factor de expansión las potencias del inverso del único factor de contracción involucrado en la construcción del fractal F .

En esta sección estudiaremos un caso más general, en el que los factores de contracción a_i pueden ser distintos. De esta manera, tenemos la posibilidad de elegir como factores de expansión a cualquiera de sus inversos: $1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_N$, y así construir N curvas $\Gamma^{a_1}, \Gamma^{a_2}, \dots, \Gamma^{a_N}$; cada una de ellas como curva límite de una sucesión $\{p_k^{a_i}\}_{k \rightarrow \infty}$, y todas pertenecientes a \mathcal{F}_{MF} .

Además, analizaremos las diferencias geométricas entre las distintas curvas construidas a partir de una misma curva fractal; la relación que hay entre sus respectivas dimensiones de Mendès France, $\dim_{MF}(\Gamma^{a_i})$ ($1 \leq i \leq N$), y compararemos éstas respecto a la única dimensión de Hausdorff, $\dim_H(F)$, del correspondiente fractal F .

4.2.1. Descripción geométrica

Consideremos un proceso iterativo de reemplazo que genera una curva fractal $F \in \mathbb{R}^n$, con similitudes de razones $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N < 1$. Cada uno de los inversos $1/a_1 \geq 1/a_2 \geq \dots \geq 1/a_N > 1$ produce un curva diferente. A saber, si tomamos $1/a_1$ (el mayor), podemos ver, como en la Figura 4.2, que en cada poligonal $p_k^{a_1}$, el segmento más corto es siempre de longitud igual a 1; y que $p_k^{a_1}$ suma nuevos segmentos más largos que los de $p_{k-1}^{a_1}$. Miremos la curva límite Γ^{a_1} : en $p_1^{a_1}$ el segmento más corto (parte superior de la Figura 4.2) tiene longitud igual a 1, los otros segmentos son más largos o iguales en longitud. $p_2^{a_1}$ exhibe, claramente, que los segmentos más cortos están en la parte superior, y que los demás son mayores o iguales a éstos en longitud. Luego, en Γ^{a_1} , todos los segmentos son más largos o iguales a 1.

Si tomamos $1/a_N$ (el menor), podemos ver ($a_N = a_3$ en la misma figura) que en cada poligonal $p_k^{a_N}$, el segmento más largo es siempre unitario y $p_k^{a_N}$ agrega nuevos segmentos más cortos que los de $p_{k-1}^{a_N}$. Luego, la curva límite Γ^{a_N} tendrá segmentos arbitrariamente pequeños, y la longitud de cada segmento será siempre menor o igual a 1.

Finalmente, si tomamos un factor intermedio, $1/a_i$, $i \neq 1, N$ ($a_i = a_2$ en la misma figura), cada iteración k produce poligonales $p_k^{a_i}$ que tienen, tanto segmentos más largos como más cortos que en la anterior. Por consiguiente, la curva límite Γ^{a_i} tendrá segmentos, tanto arbitrariamente largos como pequeños.

Este hecho hace que las curvas sean muy distintas entre sí, a pesar de ser semejantes, puesto que cada proceso expansivo va “llenando” el espacio (el plano en la Figura 4.2) de diferente manera; es decir, el volumen $\mu^n(p_k^{a_i}(\varepsilon))$ escala distinto respecto a $\Delta_k^{a_i}$ en cada caso. Una de las consecuencias es que de todas las curvas límite Γ^{a_i} , la única resoluble es la primera, o sea Γ^{a_1} ; mientras que las otras son no-resolubles.

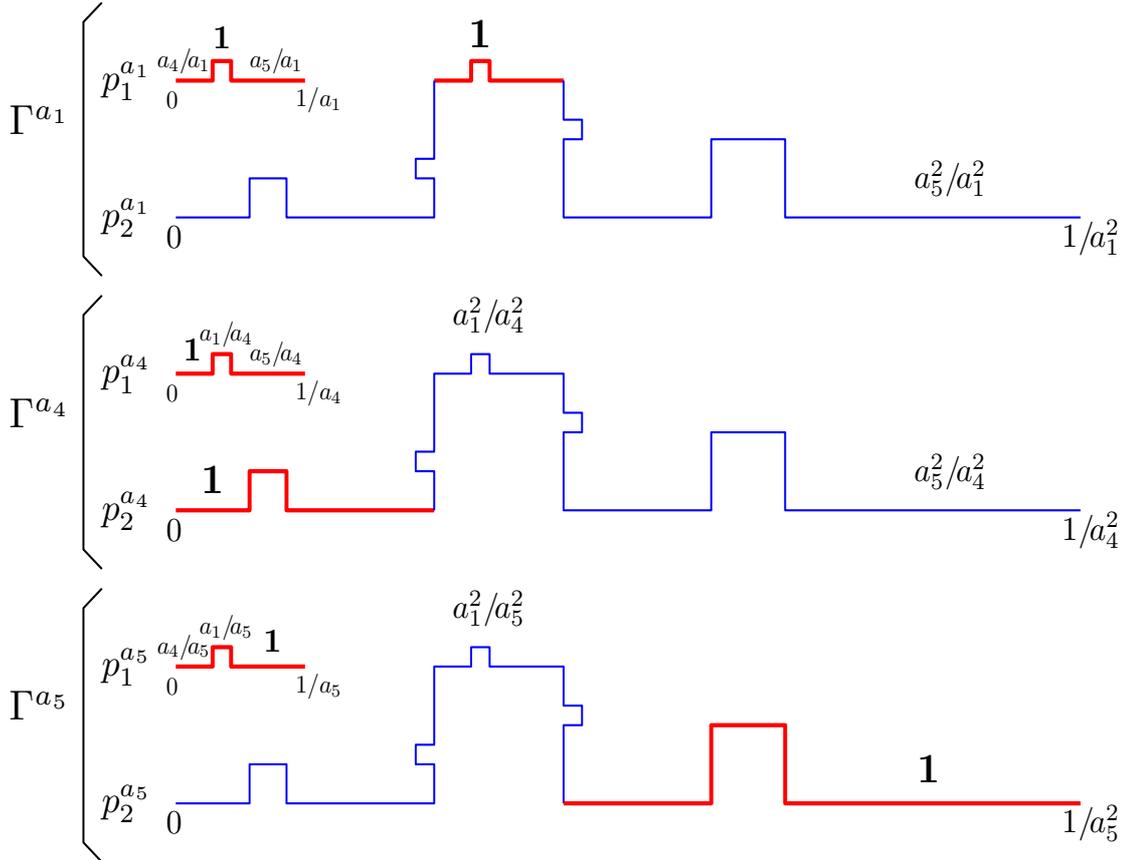


Figura 4.2: Diferentes expansiones de una curva autosemejante

4.2.2. Dimensión de Mendès France para el caso resoluble

Por lo tanto, para la curva resoluble Γ^{a_1} , podemos calcular explícitamente su dimensión, $\dim_{MF}(\Gamma^{a_1})$. Para ello, calculemos para una iteración k , la longitud de la poligonal $p_k^{a_1}$. Recordemos que la primera poligonal del proceso que genera al fractal, p_1 , está formada por N segmentos de longitudes $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N < 1$, tal que $\sum_{i=1}^N a_i > 1$. Luego, si $\ell = \sum_{i=1}^N a_i$, ℓ es la longitud de p_1 . La longitud de $p_1^{a_1}$, $L_1^{a_1}$, es la longitud de p_1 aumentada por el factor $1/a_1$, luego, $L_1^{a_1} = \ell/a_1$. La longitud de p_2 se calcula, por autosemejanza, sabiendo que cada segmento de p_1 se reemplaza por una copia de ésta contraída por a_i . Es decir, la longitud de p_2 es

$a_1\ell + a_2\ell + \dots + a_n\ell = \ell^2$. Luego, la longitud de $p_2^{a_1}$ es igual a la de p_2 ampliada por $(1/a_1)^2$, es decir, $L_2^{a_1} = \ell^2/a_1^2$. Así siguiendo, se tiene que $L_k^{a_1} = \ell^k/a_1^k$. Además se tiene, claramente, que $\Delta_k^{a_1} = (1/a_1)^k$. Por lo tanto, de acuerdo con la observación (3.2.6), reemplazando en la expresión (3.6), de la proposición (3.2.9), se tiene

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log L_k^{a_1}}{\log \Delta_k^{a_1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\frac{\ell^k}{a_1^k} \right)}{\log \left(\frac{1}{a_1} \right)^k} = \frac{\log \left(\frac{\sum_{i=1}^N a_i}{a_1} \right)}{\log \frac{1}{a_1}},$$

o, equivalentemente

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) = 1 + \frac{\log \left(\sum_{i=1}^N a_i \right)}{\log \frac{1}{a_1}}. \quad (4.1)$$

4.2.3. Relación entre \dim_H y \dim_{MF}

Como dijimos anteriormente, en el caso en que las curvas son no-resolubles, la dificultad del cálculo de la dimensión de Mendès France radica en poder estimar el crecimiento de $\mu^n(\Gamma_L(\varepsilon))$. Sin embargo, en nuestro caso, estamos en condiciones de afirmar que, del conjunto de curvas $\Gamma^{a_1}, \Gamma^{a_2}, \dots, \Gamma^{a_N}$, Γ^{a_1} es la que tiene dimensión de Mendès France minimal, Γ^{a_N} la que tiene dimensión maximal; y las demás tienen dimensiones intermedias: mayor es el factor de expansión, menor es la dimensión.

Teorema 4.2.1 *Sea $F \in \mathcal{F}_H$ una curva fractal autosemejante, construida por similitudes de razones $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N < 1$, y los factores de expansión, sus inversos: $1/a_1 \geq 1/a_2 \geq \dots \geq 1/a_N$. Entonces*

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) \leq \dim_{MF}(\Gamma^{a_2}) \leq \dots \leq \dim_{MF}(\Gamma^{a_N}).$$

Demostración: Sea i fijo, $1 \leq i \leq N$, y supongamos que $a_i = a_{i+1}^m$ con $m > 1$. Consideremos en el paso k , la poligonal correspondiente a Γ^{a_i} , $p_k^{a_i}$ cuya longitud es

$$\ell_k = \left(\frac{\sum_{j=1}^N a_j}{a_i} \right)^k = \left(\frac{\ell_0}{a_i} \right)^k,$$

donde $\ell_0 = \sum_{j=1}^N a_j$. El diámetro de $p_k^{a_i}$ es $\left(\frac{1}{a_i} \right)^k$. Consideremos ahora el paso $m.k$; la

poligonal correspondiente a ese paso de $\Gamma^{a_{i+1}}$, $p_{mk}^{a_{i+1}}$, tiene longitud $\ell'_{mk} = \left(\frac{\ell_0}{a_{i+1}} \right)^{mk}$,

y diámetro igual a $\left(\frac{1}{a_{i+1}} \right)^{mk}$.

Entonces,

$$\ell'_{mk} = \frac{\ell_0^{mk}}{a_{i+1}^{mk}} = \frac{\ell_0^k}{a_i^k} \ell_0^{(m-1)k} = \ell_k \ell_0^{(m-1)k},$$

luego, se tiene que

$$\ell'_{mk} > \ell_k.$$

Por lo tanto, para un ε fijo, se tiene

$$\mu^n(\Gamma_k^{a_i}(\varepsilon)) < \mu^n(\Gamma_{mk}^{a_{i+1}}(\varepsilon)).$$

Además

$$\text{diam}(p_{mk}^{a_{i+1}}) = \left(\frac{1}{a_{i+1}}\right)^{mk} = \left(\frac{1}{a_i}\right)^k = \text{diam}(p_k^{a_i}),$$

por lo tanto

$$\frac{\log \mu^n(\Gamma_k^{a_i}(\varepsilon))}{\log \left(\frac{1}{a_i}\right)^k} < \frac{\log \mu^n(\Gamma_{mk}^{a_{i+1}}(\varepsilon))}{\log \left(\frac{1}{a_{i+1}}\right)^{mk}}$$

y tomando límites cuando k tiende a infinito, se tiene:

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_i}) \leq \dim_{MF}(\Gamma^{a_{i+1}}).$$

En el caso en que $a_i = a_{i+1}^m$ con m no entero, la cuenta es análoga considerando el paso $[m.k]$ (parte entera de $m.k$).

QED.

Para establecer una relación entre este abanico de dimensiones de Mendès France y la dimensión de Hausdorff, volvamos sobre las diferencias geométricas entre las curvas expandidas Γ^{a_i} , $1 \leq i \leq N$.

Consideremos Γ^{a_i} , con $i \neq N$ (i.e., $a_i < a_N$). De acuerdo con lo dicho en la sección previa, esta curva tiene segmentos tan largos como se quiera. Para fijar ideas, consideremos $\varepsilon = 1$ y la correspondiente 1-salchicha de Minkowski, $\Gamma^{a_i}(1)$. Supongamos que en cada segmento de esta curva realizamos un proceso de iteración *ad infinitum* del correspondiente fractal F . Obtenemos así una curva fractal Υ^{a_i} , autosemejante y no acotada, que ya no pertenece a \mathcal{F}_{MF} . Tampoco pertenece a \mathcal{F}_H ; sin embargo, tiene dimensión de Hausdorff asociada, $\dim_H(\Upsilon^{a_i}) = \mathbf{d}$ y es exactamente igual a $\dim_H(F)$ (puesto que hay un copia semejante a F donde antes había un segmento de Γ^{a_i}). Lo importante aquí es notar que Υ^{a_i} no está “cubierta” por el conjunto $\Gamma^{a_i}(1)$, ya que para cualquier segmento de Γ^{a_i} que consideremos, de longitud mucho mayor que la unidad, la copia semejante del fractal F que lo reemplaza, no queda ahora cubierto por el 1-engordado del segmento correspondiente. Por esta razón, es evidente que este hecho resulta cierto para cualquier valor de $\varepsilon > 0$ fijado.

Tomemos ahora la curva Γ^{a_N} , obtenida al expandir por $1/a_N$. Todos los segmentos tienen longitud menor o igual a 1. Consideremos de nuevo la 1-salchicha de Minkowski de Γ^{a_N} , y realicemos el mismo proceso de iteración *ad infinitum* del fractal correspondiente, como antes, en reemplazo de cada segmento de Γ^{a_N} . Siguiendo el razonamiento

anterior, la nueva curva Υ^{a_N} , también tiene dimensión de Hausdorff $\mathbf{d} = \dim_H(F)$, pero en este caso Υ^{a_N} sí está completamente cubierta por $\Gamma^{a_N}(1)$. Si tomamos un $\varepsilon < 1$ en lugar de $\varepsilon = 1$, y tenemos en cuenta el simple ejemplo de la Figura 4.2, concluimos que Υ^{a_N} estará también cubierta por $\Gamma^{a_N}(\varepsilon)$, excepto un tramo inicial de longitud finita, es decir, salvo las poligonales de las primeras iteraciones.

Quiere decir que Γ^{a_N} es la única curva de todas las expandidas que “comparte” el $\Gamma(\varepsilon)$ con su correspondiente curva iterada *ad-infinitum*, Υ^{a_N} , para todo ε , “tal como si el ε no distinguiera entre un segmento y un fractal inscripto en él”.

Finalmente, relacionemos esto con la perspectiva con la que interpretamos la dimensión de Mendès France: como Γ^{a_N} es la única curva, entre las otras Γ^{a_i} , que se va “arrugando toda” a medida que crece su cápsula convexa, es la única cuyo aspecto va adquiriendo la forma geométrica del fractal F cuando nos vamos alejando cada vez más de \mathbb{R}^n (del plano donde fueron dibujadas, en el caso de \mathbb{R}^2).

Este hecho nos sugiere que ambas dimensiones, $\dim_H(F)$ y $\dim_{MF}(\Gamma^{a_N})$, sean iguales. De aquí resulta el siguiente teorema:

Teorema 4.2.2 *Sea $F \in \mathcal{F}_H$ un fractal autosemejante construido con similaridades de razones $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N < 1$, y sea Γ^{a_N} la curva límite construida con el factor de expansión $1/a_N$. Entonces*

$$\dim_H(F) = \dim_{MF}(\Gamma^{a_N}) .$$

Demostración: Se sabe que para un fractal autosemejante de estas características, la dimensión de Hausdorff de F es igual a la dimensión de Minkowski

$$\dim_H(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(n - \frac{\log \mu^n(F(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)} \right) , \quad (4.2)$$

siendo $\mu^n(F(\varepsilon))$ el volumen n -dimensional de la ε -salchicha de Minkowski de F .

Sean p_k las poligonales de los sucesivos pasos de la iteración del fractal F , y p'_k las poligonales de los sucesivos pasos de la iteración de la curva límite Γ^{a_N} .

Para un mismo valor de k , tenemos que p_k y p'_k son figuras “semejantes”, es decir, idénticas en forma salvo un cambio de escala.

Luego, si $\ell_k =$ longitud de p_k y $\ell'_k =$ longitud de p'_k , se tiene que

$$\ell'_k = \left(\frac{1}{a_N} \right)^k \ell_k .$$

Además, si consideramos el volumen de una ε -salchicha para p'_k , tenemos que la correspondiente salchicha “semejante” para p_k verifica

$$\mu^n(p'_k(\varepsilon)) = \left(\frac{1}{a_N} \right)^{nk} \mu^n(p_k(\varepsilon a_N^k)) . \quad (4.3)$$

Por otro lado, para toda poligonal p_k , el segmento más largo tiene longitud igual a a_N^k ; por lo tanto, fijando $\varepsilon = a_N^k$, podemos estimar, para cada k

$$\mu^n(p_k(a_N^k)) \approx \mu^n(F(a_N^k)) \quad (4.4)$$

(aproximación que no es válida para un valor de $\varepsilon < a_N$, puesto que, cuando k crece, la diferencia entre ε^k y a_N^k también, dejando así de ser comparables). Luego, tomando ahora $\varepsilon=1$, tenemos de (4.3) y de (4.4) que:

$$\mu^n(p'_k(1)) \approx \left(\frac{1}{a_N}\right)^{nk} \mu^n(F(a_N^k)) .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \dim_{MF}(\Gamma) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu^n(p'_k(1))}{\log \left(\frac{1}{a_N}\right)^k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\left(\frac{1}{a_N}\right)^{nk} \mu^n(F(a_N^k)) \right)}{\log \left(\frac{1}{a_N}\right)^k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(n - \frac{\log \mu^n(F(a_N^k))}{\log(a_N^k)} \right) , \end{aligned}$$

luego en virtud de (4.2)

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_N}) = \dim_H(F) .$$

QED.

El siguiente teorema establece, en particular, la desigualdad estricta entre la dimensión minimal y las demás. La demostración es muy técnica y se encuentra en el Apéndice 4.A.

Teorema 4.2.3 *Sea $2 \leq i \leq N$ fijo (i.e. $i \neq 1$), tal que $a_i > a_1$. Sean Γ^{a_i} y Γ^{a_1} las curvas límite correspondientes a los factores $1/a_i$ y $1/a_1$ respectivamente ($1/a_i < 1/a_1$). Entonces vale la siguiente desigualdad*

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) < \dim_{MF}(\Gamma^{a_i}) .$$

4.2.4. Observación

Las demostraciones de los teoremas anteriores están basadas fuertemente en argumentos e ideas de índole geométrica. Si embargo, para los casos extremales de esta cadena de dimensiones, es decir, para Γ^{a_1} y Γ^{a_N} (dimensión minimal y maximal respectivamente), podemos ofrecer una demostración de la desigualdad estricta $\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) < \dim_{MF}(\Gamma^{a_N})$, de manera independiente, puesto que tenemos ecuaciones para ambas dimensiones.

Lema 4.2.4 $d_{\min} = \dim_{MF}(\Gamma^{a_1})$ satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^N a_i a_1^{x-1} = 1 . \quad (4.5)$$

Demostración: En efecto, sabemos por (4.1) que

$$d_{\min} = 1 + \frac{\log\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)}{\log\frac{1}{a_1}} = \frac{\log\left(\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{a_1}\right)}{\log\frac{1}{a_1}} ,$$

luego,

$$d_{\min} \log(a_1) + \log\left(\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{a_1}\right) = \log\left(a_1^{d_{\min}} \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{a_1}\right) = 0 ,$$

por lo tanto,

$$a_1^{d_{\min}} \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{a_1} = \sum_{i=1}^N a_i a_1^{d_{\min}-1} = 1 .$$

QED.

Proposición 4.2.5 Γ^{a_1} y Γ^{a_N} como antes, entonces vale

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) < \dim_H(\Gamma^{a_N}) .$$

Demostración: En efecto, por el Teorema 4.2.2 sabemos que $\dim_H(\Gamma^{a_N}) = \dim_H(F)$. También sabemos, por (2.13), que la dimensión de Hausdorff de F es el valor $d_H = \dim_H(F)$ que satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^N a_i^x = 1 .$$

Consideremos ahora las siguientes funciones:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^N a_i a_1^{x-1}\right) - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \left(\sum_{i=1}^N a_i^x\right) - 1 .$$

Por el lema anterior, tenemos que:

$$f(d_{\min}) = 0 \quad \text{y} \quad g(d_H) = 0 .$$

Además, como $a_i < 1$, $i = 1, \dots, N$, f y g son funciones decrecientes.

Suponemos, sin pérdida de generalidad, todos los a_i distintos entre sí. Comparando los términos de ambas expresiones, tenemos que, salvo para el primero (igual en ambas),

$$a_1^{x-1} < a_i^{x-1}, \quad \text{para } x > 1, i \neq 1$$

o sea

$$\frac{a_i}{a_1} a_1^x < a_i^x ,$$

luego,

$$f(x) < g(x) \quad \text{para } x > 1 ,$$

en particular,

$$f(d_H) < g(d_H) = f(d_{\min}) ,$$

por lo tanto,

$$d_{\min} < d_H .$$

QED.

4.2.5. Relación con \dim_{div}

En la Sección 2.1, vimos que el “método del compás”, consiste en recorrer una curva C con pasos iguales de tamaño $\varepsilon > 0$. Es decir, para cada ε construimos una poligonal p_ε , con vértices en C y segmentos de longitud ε . Recordemos que $M_\varepsilon(C)$ era el máximo número de puntos x_0, x_1, \dots, x_m en C (en ese orden), tal que $|x_k - x_{k-1}| = \varepsilon$ para $k = 1, 2, \dots, m$. Si ℓ_ε es la longitud de p_ε , entonces $\ell_\varepsilon \approx \varepsilon (M_\varepsilon(C) - 1) \approx \varepsilon M_\varepsilon(C)$. Luego, por (2.11), tenemos que

$$\dim_{div}(C) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log M_\varepsilon(C)}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 + \frac{\log \ell_\varepsilon}{\log \frac{1}{\varepsilon}} . \quad (4.6)$$

Ahora bien, para una curva $F \in \mathcal{F}_H$, y su correspondiente $\Gamma^{a_N} \in \mathcal{F}_{MF}$, sabemos que

$$\dim_{div}(F) = \dim_H(F) = \dim_{MF}(\Gamma^{a_N}) .$$

En lugar de considerar las p_ε , construidas “a partir” de F , consideremos ahora la sucesión de poligonales $\{p_k\}_{k \geq 1}$ responsables de la construcción de la curva límite F (es decir, F se obtiene “a partir” de las p_k). Apliquemos el método del compás a cada p_k , tomando segmentos de longitud $\varepsilon_k = a_1^k$, en cada paso k ($\varepsilon_k \searrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, pues $a_1 < 1$). Recordemos que la longitud de cada p_k es ℓ^k donde $\ell = \sum_{i=1}^N a_i$. Como a_1 es el más chico de los factores de contracción, entonces podemos aproximar la cantidad de segmentos de esa longitud que “caben” en p_k como $M_{\varepsilon_k}(p_k) \approx \ell^k / a_1^k$. Así, reemplazando en (4.6), se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{\log M_{\varepsilon_k}(p_k)}{-\log \varepsilon_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{\ell^k}{a_1^k} \right)}{-\log a_1^k} = 1 + \frac{\log \ell}{\log \frac{1}{a_1}} = \\ &= 1 + \frac{\log \left(\sum_{i=1}^N a_i \right)}{\log \frac{1}{a_1}} , \end{aligned}$$

luego, en virtud de (4.1), nos queda

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{\log M_{\varepsilon_k}(p_k)}{-\log \varepsilon_k} = \dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) .$$

4.3. Conclusiones

En este capítulo hemos asociado N curvas $\Gamma^{a_1}, \dots, \Gamma^{a_N}$ pertenecientes a la familia \mathcal{F}_{MF} (longitud infinita, no acotadas, localmente rectificables) de dimensión topológica y fractal igual a 1, y dimensiones fraccionarias de Mendès France, $1 \leq \dim_{MF}(\Gamma^{a_i}) \leq n$, a una única curva fractal F perteneciente a \mathcal{F}_H (longitud infinita, acotadas, autosemejantes, etc.), de dimensión de Hausdorff $1 \leq \dim_H(F) \leq n$, mediante un proceso geométrico, que consiste en expandir la curva generatriz p_1 (primer prefractal) de F y los sucesivos prefractales, por las sucesivas potencias de un factor de expansión, el cual se puede elegir entre cualquiera de los inversos de las N razones de contracción, $a_1 \leq \dots \leq a_N < 1$, de las similaridades que contruyen a F . Este proceso que “emparenta” a las curvas de ambas familias, nos permite establecer relaciones entre las correspondientes dimensiones. La \dim_H , como toda dimensión fractal, cuantifica un fenómeno de escalamiento de tipo “zoom in”; en cambio, la dimensión de Mendès France cuantifica “zooming out” el escalamiento de una longitud respecto de su cápsula convexa. Si el factor de expansión es chico ($1/a_N$), la curva se “arruga” al mismo tiempo que crece su longitud, de manera que en el infinito, la curva expandida Γ^{a_N} se “ve” tal como el fractal F se ve, digamos, dentro de la n -bola unitaria, y lo que resulta es que sus dimensiones coinciden, es decir, $\dim_H(F) = \dim_{MF}(\Gamma^{a_N})$. Si el factor de expansión es el mayor posible ($1/a_1$), la curva se “desarruga” (o no se arruga tanto) al mismo tiempo que crece su longitud. Es el caso que llamamos resoluble, porque se puede despejar una expresión explícita para su dimensión. Esto no implica, de ninguna manera, que la curva pase a tener dimensión 1; pero sí disminuye respecto del caso anterior. Tenemos así, que $\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) < \dim_H(F)$. Esta dimensión minimal también está relacionada con el proceso de escalamiento de las longitudes de los prefractales de F . El valor $\dim_{MF}(\Gamma^{a_1})$, coincide con lo que podríamos llamar la dimensión compás (‘divider’) del proceso de iteración que construye a F (más que con la dimensión compás de F que es igual a la de Hausdorff). Si el factor es intermedio ($1/a_i$), habrá un compromiso entre el grado de arrugamiento y de estiramiento, según a_i esté más cerca de a_1 ó de a_N , y el resultado es que esta dimensión es intermedia, $\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) < \dim_{MF}(\Gamma^{a_i}) < \dim_{MF}(\Gamma^{a_N})$. Queda así, asociado a F un espectro discreto, no trivial, de dimensiones nuevas, el cual se demostrará que puede hacerse continuo en el rango $[\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}), \dim_{MF}(\Gamma^{a_N})]$ en el capítulo siguiente.

4.A. Demostración del Teorema 4.2.3

Para la demostración necesitaremos algunos resultados técnicos, que enunciaremos como lemas.

Lema 4.A.1 Para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ y $0 \leq x \leq 1$, vale

$$\sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{i} x^i \geq \frac{1}{2} (1+x)^k,$$

donde $\lfloor k/2 \rfloor$ es la parte entera de $k/2$.

Demostración: En efecto, para $0 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$

$$\binom{k}{i} x^i \geq \binom{k}{k-i} x^{k-i},$$

luego

$$\sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{i} x^i \geq \sum_{i=\lfloor k/2 \rfloor+1}^k \binom{k}{k-i} x^{k-i},$$

y, por lo tanto

$$2 \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{i} x^i \geq \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i = (x+1)^k.$$

QED.

Consideremos un paso k en la construcción de la curva límite Γ^{a_i} . Tenemos una poligonal $p_k^{a_i}$, cuyo diámetro es $1/a_i^k$, y su longitud, $\frac{(a_1 + \dots + a_N)^k}{a_i^k}$. Tiene N^k segmentos cuyas longitudes son de la forma

$$\frac{A}{B} = \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_i^{k_i} \dots a_N^{k_N}}{a_i^k},$$

donde $\sum_{j=1}^N k_j = k$. Para una configuración (k_1, k_2, \dots, k_N) fija, se tiene, entonces, que la cantidad total de segmentos de esta longitud, es exactamente el coeficiente multinomial

$$C(k; k_1, k_2, \dots, k_N) = \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2} \dots \binom{k-k_1-\dots-k_{N-1}}{k_N}.$$

Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que $a_1 < a_2$, y consideremos ahora, aquellas configuraciones (o segmentos) tales que la cantidad de a_1 , que hay en el numerador es menor o igual a $k/2$ ($0 \leq k_1 \leq k/2$), y el resto hasta completar k , por combinaciones de los demás a_i ($k/2 \leq k_2 + \dots + k_N \leq k$). Queremos calcular la cantidad de tales segmentos.

Lema 4.A.2 Si $j_1 \in [0, k/2]$, entonces, la cantidad de segmentos cuyas longitudes tienen en el numerador A una configuración con la descripción anterior, es mayor o igual que la mitad de la cantidad total de segmentos, es decir, $\frac{1}{2}N^k$.

Demostración: En efecto, fijemos todos los índices k_j , excepto j_{N-1} que lo hacemos variar entre 0 y $k - k_1 - \dots - k_{N-2}$, y contemos el correspondiente número de tales segmentos

$$\begin{aligned} & \sum_{j_{N-1}=0}^{k-k_1-\dots-k_{N-2}} \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2} \dots \binom{k-k_1-\dots-k_{N-2}}{j_{N-1}} = \\ & = \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2} \dots \binom{k-k_1-\dots-k_{N-3}}{j_{N-2}} \sum_{j_{N-1}=0}^{k-k_1-\dots-k_{N-2}} \binom{k-k_1-\dots-k_{N-2}}{j_{N-1}} = \\ & = \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2} \dots \binom{k-k_1-\dots-k_{N-3}}{j_{N-2}} 2^{k-k_1-\dots-k_{N-2}} . \end{aligned}$$

Ahora, fijemos todos los k_j , excepto j_{N-2} que lo hacemos variar entre 0 y $k - k_1 - \dots - k_{N-3}$, y contemos el correspondiente número de segmentos

$$\begin{aligned} & \sum_{j_{N-2}=0}^{k-k_1-\dots-k_{N-3}} \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2} \dots \binom{k-k_1-\dots-k_{N-3}}{j_{N-2}} 2^{k-k_1-\dots-k_{N-2}} = \\ & = 2^{k-k_1-\dots-k_{N-3}} \binom{k}{k_1} \dots \binom{k-k_1-\dots-k_{N-4}}{j_{N-3}} \sum_{j_{N-1}=0}^{k-k_1-\dots-k_{N-3}} \binom{k-k_1-\dots-k_{N-3}}{j_{N-2}} 2^{-j_{N-3}} = \\ & = 2^{k-k_1-\dots-k_{N-3}} \binom{k}{k_1} \dots \binom{k-k_1-\dots-k_{N-4}}{j_{N-3}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{k-k_1-\dots-k_{N-3}} . \end{aligned}$$

Procedemos de esta manera con todos los demás k_j , hasta que sólo queda fijar k_1 y variar k_2 desde 0 hasta $k - k_1$, queda

$$\binom{k}{k_1} (N-1)^{k-k_1} , \quad (k_1 = k_{N-(N-1)}) .$$

Finalmente, haciendo variar j_1 entre 0 y $k/2$ obtenemos el número de segmentos buscado, y por el Lema 4.A.1, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=0}^{k/2} \binom{k}{k_1} (N-1)^{k-k_1} & = (N-1)^k \sum_{k_1=0}^{k/2} \binom{k}{k_1} \left(\frac{1}{N-1}\right)^{k_1} \geq \\ & \geq (N-1)^k \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^k = \\ & = \frac{1}{2} N^k . \end{aligned}$$

QED.

Observación

En el caso general de haber j ($j \neq N$) contractores iguales a a_1 , es decir, $a_1 = a_2 = \dots = a_j < a_{j+1}$, se puede hacer un razonamiento análogo, y demostrar que el resultado del Lema 4.A.2, cambia el factor $1/2$ por $1/2^j$. Es decir, la cantidad de segmentos con una configuración tal que, $0 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_j \leq k/2$, es mayor o igual que $1/2^j N^k$.

Ahora podemos demostrar el teorema.

Demostración del Teorema 4.2.3

Sea i , $2 \leq i \leq N$, $a_1 < a_2 \leq a_i$, $p_k^{a_i}$ la k -ésima poligonal correspondiente a Γ^{a_i} . Para un $m \in \mathbb{N}$, $m < k$, $p_m^{a_i}$ es la poligonal del paso m . Luego, ésta tiene N^m segmentos, y diámetro igual a $1/a_i^m$. Sea $\bar{p}_m^{a_i}$, una poligonal semejante a $p_m^{a_i}$, pero ampliada por un factor igual a $1/a_i^{k-m}$. Ahora, el diámetro de $\bar{p}_m^{a_i}$ es igual al de $p_k^{a_i}$, es decir, $1/a_i^k$, y las longitudes de sus segmentos son de la forma

$$\left(\frac{1}{a_i}\right)^{k-m} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_i^{k_i} \dots a_N^{m-(j_1+\dots+j_{N-1})}}{a_i^m}.$$

Sea m (más adelante exhibimos el valor explícito de m), tal que cualquier segmento de longitud

$$\left(\frac{1}{a_i}\right)^{k-m} \frac{a_1^{\frac{m}{2}} a_2^{\frac{m}{2}} a_3^0 \dots a_N^0}{a_i^m} = \frac{a_1^{\frac{m}{2}} a_2^{\frac{m}{2}}}{a_i^k} \quad (4.7)$$

(es decir, $j_1 = j_2 = m/2$ y $j_3 = \dots = j_N = 0$) es comparable con la unidad. Esto implica que los segmentos cuyas longitudes tienen una configuración donde $j_1 \leq m/2$ y el resto de los k_j arbitrarios (sumando m) son más largos o iguales que la unidad.

Ahora, por el Lema 4.A.2, el número total de estos segmentos es mayor o igual que $\frac{1}{2} N^m$. Por lo tanto, si ℓ_m es la longitud de $p_m^{a_i}$, y $\bar{\ell}_m$ es la longitud de $\bar{p}_m^{a_i}$, se tiene

$$\bar{\ell}_m = \left(\frac{1}{a_i}\right)^{k-m} \cdot \ell_m = \left(\frac{1}{a_i}\right)^{k-m} \frac{\sum_{j=1}^N a_j}{a_i^m} = \frac{\sum_{j=1}^N a_j}{a_i^k}, \quad (4.8)$$

y también

$$\bar{\ell}_m < \ell_k.$$

Por lo tanto, tomando $\varepsilon = 1$, es cierto que

$$\mu^n(\bar{p}_m^{a_i}(1)) \leq \mu^n(p_k^{a_i}(1)). \quad (4.9)$$

Pero como la mitad o más de los segmentos es mayor o igual que la unidad, se sigue que

$$c \times \frac{1}{2} \bar{\ell}_m \leq \mu^n(\bar{p}_m^{a_i}(1)), \quad (4.10)$$

donde c es el volumen de la bola unitaria $n-1$ -dimensional. Entonces, por (4.8) y (4.9)

$$\frac{c}{2} \frac{\sum_{j=1}^N a_j}{a_i^k} \leq \mu^n(p_k^{a_i}).$$

Por lo tanto

$$\frac{\log\left(\frac{c}{2} \frac{\sum_{j=1}^N a_j}{a_i^k}\right)}{\log\left(\frac{1}{a_i}\right)^k} \leq \frac{\log \mu^n(p_k^{a_i}(1))}{\log\left(\frac{1}{a_i}\right)^k}. \quad (4.11)$$

Pasemos ahora a calcular explícitamente el m requerido para que se cumpla la desigualdad (4.11), esto decir

$$\frac{a_1^{\frac{m}{2}} a_2^{\frac{m}{2}}}{a_i^k} \approx 1.$$

Esto es

$$1 \approx \frac{a_1^{\frac{m}{2}} a_2^{\frac{m}{2}}}{a_i^k} = \frac{a_1^{\frac{m}{2}(1+\log_{a_1} a_2)}}{a_i^k} = \frac{\left(a_1^{\frac{m}{2} \frac{(1+\log_{a_1} a_2)}{k}}\right)^k}{a_i^k},$$

lo que implica

$$a_1^{\frac{m}{2} \frac{(1+\log_{a_1} a_2)}{k}} \approx a_i,$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{(1+\log_{a_1} a_2)}{k} &\approx \frac{1}{\log_{a_i} a_1}, \\ \frac{m}{k} &\approx \frac{2}{\log_{a_i} a_1 (1+\log_{a_1} a_2)} = \frac{2}{\log_{a_i} a_1 + \log_{a_i} a_1 \log_{a_1} a_2}, \\ \frac{m}{k} &\approx \frac{2}{\log_{a_i}(a_1 a_2)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Volviendo a la desigualdad (4.11), tenemos que

$$\frac{\log(c/2) + m \log\left(\sum_{j=1}^N a_j\right) + k \log(1/a_i)}{k \log(1/a_i)} \leq \frac{\log \mu^n(p_k^i(1))}{k \log(1/a_i)}.$$

Reemplazando m/k por (4.12), obtenemos

$$\frac{\log(c/2)}{k \log(1/a_i)} + \frac{2}{\log_{a_i}(a_1 a_2)} \frac{\log\left(\sum_{j=1}^N a_j\right)}{\log(1/a_i)} + 1 \leq \frac{\log \mu^n(p_k^i(1))}{k \log(1/a_i)}, \quad (4.13)$$

y tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$, se tiene

$$\frac{\log\left(\sum_{j=1}^N a_j\right)}{\log(1/\sqrt{a_1 a_2})} + 1 \leq \dim_{MF}(\Gamma^{a_i}).$$

Finalmente, como $a_1 < a_2$, entonces $1/a_1 > 1/\sqrt{a_1 a_2}$, luego

$$1 + \frac{\log\left(\sum_{j=1}^N a_j\right)}{\log(1/a_1)} < 1 + \frac{\log\left(\sum_{j=1}^N a_j\right)}{\log(1/\sqrt{a_1 a_2})},$$

por lo tanto, recordando (4.1)

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) < \dim_{MF}(\Gamma^{a_i}) .$$

QED.

Observación

En el caso general de haber j ($j \neq N$) contractores iguales a a_1 , es decir, $a_1 = a_2 = \dots = a_j < a_{j+1}$, se puede hacer un razonamiento análogo, cambiando en (4.7), a_2 por a_{j+1} ; en (4.10), $\frac{1}{2} \bar{\ell}_m$ por $\frac{1}{2^j} \bar{\ell}_m$; en (4.12), $\log_{a_i}(a_1 a_2)$ por $\log_{a_i}(a_1 a_{j+1})$; y en (4.13) $\log(c/2)$ por $\log(c/2^j)$, sin alterar la afirmación que establece el teorema.

Capítulo 5

Relación con Espectros Multifractales

...Nature exhibits not simply a higher degree but an altogether different level of complexity. The number of distinct scales of length of natural patterns is for all practical purposes infinite.

Benoit B. Mandelbrot.*

5.1. Continuización del espectro de dimensiones de Mendès France

Para explicar el proceso de continuización del espectro de Mendès France vamos a considerar, en primer término, un ejemplo sencillo. El más sencillo es considerar que tenemos una curva $F \in \mathcal{F}_{MF}$ construida a partir de similaridades de sólo dos razones de contracción distintos: $0 < b < a < 1$. O, lo que es lo mismo, la generatriz p_1 , tiene N segmentos cuyas longitudes valen sólo a ó b . Invirtiendo estas razones de contracción, el espectro “discreto” de Mendès France correspondiente, ha de tener solamente dos dimensiones, $\{\dim_{MF}(\Gamma^b), \dim_{MF}(\Gamma^a)\}$, con $\dim_{MF}(\Gamma^b) < \dim_{MF}(\Gamma^a)$. La curva Γ^b es la resoluble, la que no se “arruga”, en cambio, Γ^a es la que se “arruga completamente como el fractal F ”.

Hasta ahora, los procesos expansivos se obtenían eligiendo uno de los contractores, y ampliando en todas las iteraciones por su inverso. Puestos a jugar con la geometría, nada nos impide preguntarnos si se puede, y en ese caso, qué sucedería, si alternamos la elección del factor de expansión, en cada iteración. Por ejemplo, expandir en las iteraciones pares por $1/b$ y en las impares por $1/a$; o, expandir dos veces consecutivas por $1/b$, y luego tres veces consecutivas por $1/a$, etc.

Para ilustrar este caso sencillo, tomemos una generatriz p_1 del fractal F , como indica la Figura 5.1.

*[Man 82]

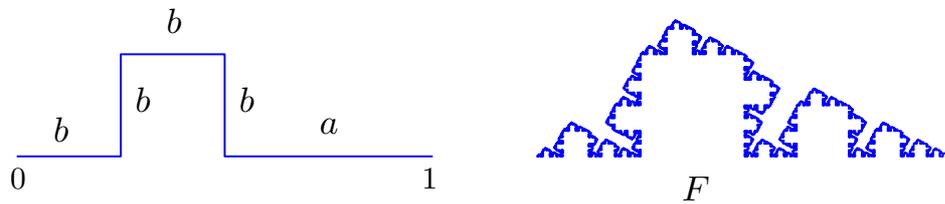


Figura 5.1: *Generatriz p_1 con $b=1/4$, $a=1/2$ y la curva fractal resultante F .*

La primera vez ampliamos por $1/b = 4$, tomando como origen el extremo izquierdo de p_1 . La poligonal p'_1 es semejante a p_1 , pero 4 veces más grande. Esto equivale a tomar el segmento $[0, 1]$, estirarlo a $[0, 4]$ y agregarle el “sombbrero” (cuadrado en este dibujo) de forma proporcional.

La segunda vez ampliamos por $1/a = 2$, de la siguiente manera: tomamos p'_1 , la ampliamos por dos, eligiendo como origen el extremo derecho, y le añadimos los cuadrados o sombreros de manera proporcional. Así obtenemos p'_2 como indica la Figura 5.2.

La poligonal p'_3 se obtiene a partir de p'_2 , ampliando por $1/b = 4$ desde el extremo izquierdo, y “sombbreroando” de manera proporcional. Así siguiendo, la poligonal p'_{k+1} será la ampliación de p'_k por 4, desde el extremo izquierdo, si k es par; o por 2, desde el extremo derecho, si k es impar. Observar que en el proceso de expansión así descrito, cada poligonal p'_{k+1} hereda a la poligonal p'_k , lo que garantiza la existencia de una curva límite Γ .

Luego de k expansiones, tendremos el mismo número de segmentos y de sombreros que si hubiéramos expandido siempre por $1/b$ comenzando por la izquierda, o siempre por $1/a$ comenzando por la derecha como origen. Si lo hubiéramos hecho siempre con $1/b$, k veces, el diámetro de p'_k , Δ_k^b , sería $(1/b)^k = 4^k$; si hubiera sido con $1/a$, Δ_k^a sería $(1/a)^k = 2^k$. Las poligonales p'_k y p'_k serían iguales en forma pero en diferente escala, es decir, semejantes. Los sombreros y los segmentos guardarían las mismas proporciones.

Si al cabo de k iteraciones, expandimos la mitad de veces $(k/2)$ por $1/b$, y la otra mitad por $1/a$, **no importando el orden**, tenemos que p'_k tiene la misma cantidad de segmentos y sombreros que p'_k y p'_k . es decir p'_k , p'_k y p'_k son semejantes entre sí, pero el diámetro de p'_k , Δ_k , es ahora

$$\Delta_k = (1/b)^{\frac{k}{2}}(1/a)^{\frac{k}{2}} = 4^{\frac{k}{2}}2^{\frac{k}{2}} = ((1/b)^{\frac{1}{2}}(1/a)^{\frac{1}{2}})^k = (\sqrt{1/ab})^k,$$

un valor intermedio entre $(1/b)^k$ y $(1/a)^k$. Lo notable o interesante, es que este proceso resulta igual que si hubiéramos tomado como factor de expansión a $1/\sqrt{ab}$ desde el comienzo, salvo que esto no lo habríamos podido hacer, geoméricamente, puesto que no hay ningún segmento de p_1 de longitud \sqrt{ab} (o razón de contracción igual a $\sqrt{ab} < 1$). Esta curva límite, que existe y llamaremos $\Gamma^{\sqrt{ab}}$, es “mitad arrugada” y

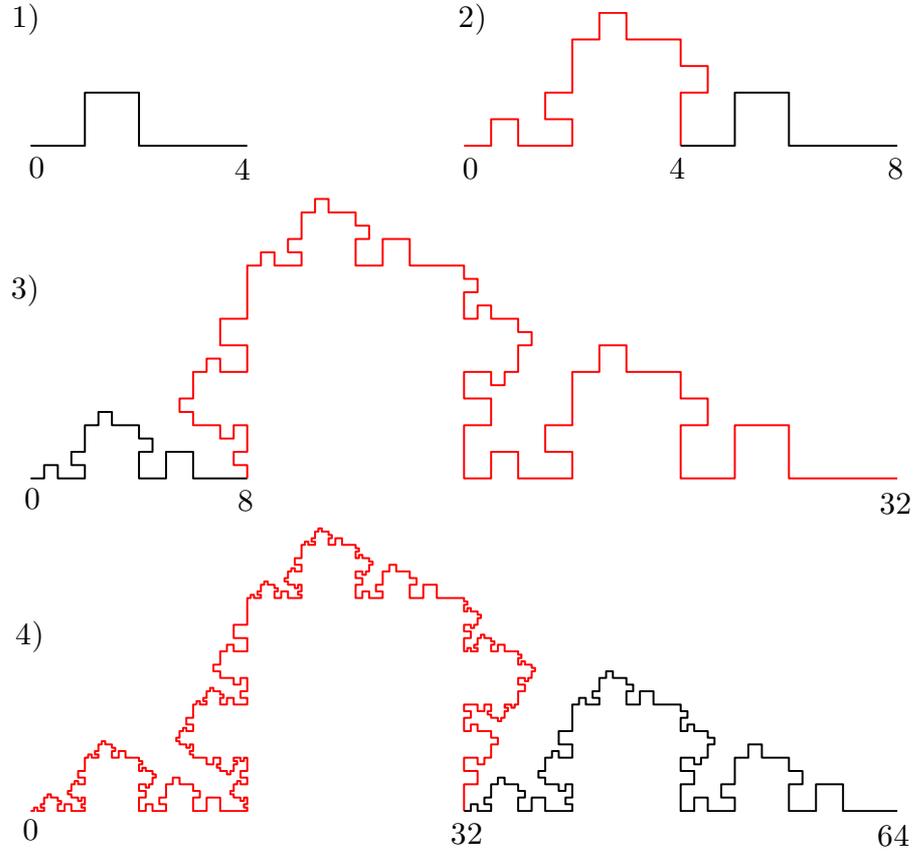


Figura 5.2: Poligonales p'_1 , p'_2 , p'_3 y p'_4 del proceso de expansión correspondiente a la Figura 5.1. Cada poligonal nueva (rojo) hereda a la anterior (negro) (3) y 4) fuera de escala).

“mitad planchada”, y por lo tanto tiene una dimensión intermedia, a saber

$$\dim_{MF}(\Gamma^b) \leq \dim_{MF}(\Gamma^{\sqrt{ab}}) \leq \dim_{MF}(\Gamma^a) .$$

Lo mismo sucedería, por ejemplo, si ampliáramos un tercio de las veces por $1/b$ y dos tercios por $1/a$. En ese caso, para k suficientemente grande, $\Delta_k \approx (1/b)^{\frac{1}{3}k} (1/a)^{\frac{2}{3}k} = (\sqrt[3]{1/a^2b})^k$, y el “factor de expansión” sería $c^{-1} = 1/\sqrt[3]{a^2b}$.

Una observación en la construcción geométrica, es que el hecho de tomar el origen a la izquierda, en el ejemplo que ilustra la Figura 5.2, cuando se amplía por $1/b$, es arbitrario. Se podría haber tomado cualquier vértice de cualquier segmento que tuviese longitud b , lo único que importa es que al ampliar, la poligonal p'_k se “encastre” como un trozo de la poligonal p'_{k+1} , para garantizar la herencia.

Generalizando lo anterior, para el caso de dos contractores b y a , si llamamos $p^{b,a} := p_1$ a la generatriz del fractal F ($p^{b,a}$ tiene sólo segmentos de longitud b ó a), se tiene que

Proposición 5.1.1 *Para todo $c \in \mathbb{R}$, $b < c < a$, existe (salvo traslación) una única curva límite $\Gamma^c \in \mathcal{F}_{MF}$ construida (no de manera única) a partir de $p^{b,a}$. Además vale que*

$$\dim_{MF}(\Gamma^b) \leq \dim_{MF}(\Gamma^c) \leq \dim_{MF}(\Gamma^a) .$$

Demostración: Sea c , $b < c < a$. Como $g(x) = a \left(\frac{b}{a}\right)^x$ es una función estrictamente decreciente, con $g(0) = a$ y $g(1) = b$; entonces existe un único $0 < \lambda < 1$ tal que $g(\lambda) = c$. Es decir $\lambda = \lambda(c)$ satisface la ecuación

$$b^\lambda a^{1-\lambda} = c .$$

Sea $\{r_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión de números naturales, con $0 \leq r_k \leq k$, tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{r_k}{k} = \lambda$ (por ejemplo, $r_k = [\lambda \cdot k]$). Luego, establezcamos un proceso de expansión tal que, en el paso k , se haya aplicado r_k veces el factor $1/b$ y $k - r_k$ veces el factor $1/a$. Es claro que no hay una única manera de hacer esto. El diámetro en cada paso será

$$\Delta_k = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{r_k}{k} k} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{(k-r_k)}{k} k} \sim \left(\frac{1}{b}\right)^{\lambda k} \left(\frac{1}{a}\right)^{(1-\lambda) k} = \left(\frac{1}{c}\right)^k ,$$

(donde $\alpha_k \sim \beta_k$ quiere decir $\alpha_k/\beta_k \rightarrow 1$). Si llamamos p_k^c a la poligonal correspondiente al proceso de expansión del paso k , entonces p_{k+1}^c hereda a p_k^c de manera natural, por la misma construcción, ya que habremos ampliado por $1/b$ ó $1/a$ (como vimos en el ejemplo), lo que garantiza la existencia de la curva límite Γ^c .

QED.

Para el caso general con N contractores $0 < a_1 \leq \dots \leq a_N < 1$, vale todo lo descrito anteriormente tomando a_i y a_{i+1} en vez de b y a . Luego, si p^{a_1, \dots, a_N} es la generatriz del fractal F , se tiene

Corolario 5.1.2 *Para todo $c_i \in \mathbb{R}$, $a_i < c_i < a_{i+1}$, existe una curva límite $\Gamma^{c_i} \in \mathcal{F}_{MF}$ construida a partir de p^{a_1, \dots, a_N} . Además vale que*

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_i}) \leq \dim_{MF}(\Gamma^{c_i}) \leq \dim_{MF}(\Gamma^{a_{i+1}}) .$$

De esta manera, queda continuizado cada tramo $[\dim_{MF}(\Gamma^{a_i}), \dim_{MF}(\Gamma^{a_{i+1}})]$ del espectro discreto $\{\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}), \dots, \dim_{MF}(\Gamma^{a_N})\}$. Luego, se tiene

Corolario 5.1.3 *Para todo $c \in \mathbb{R}$, $a_1 < c < a_N$, existe una curva límite $\Gamma^c \in \mathcal{F}_{MF}$ construida a partir de p^{a_1, \dots, a_N} . Además vale que*

$$\dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) \leq \dim_{MF}(\Gamma^c) \leq \dim_{MF}(\Gamma^{a_N}) .$$

La notable consecuencia de este corolario, es que no se necesitan los contractores intermedios, ya que con a_1 y a_N alcanza para continuizar todo el espectro. Es más, de la Proposición (5.1.1) y el Corolario (5.1.3), se tiene

Corolario 5.1.4 Para cada a_i , $i \neq 1, N$, existe un c , $a_1 < c < a_N$, y una curva Γ^c , límite de un proceso de expansión que combina sólo a $1/a_1$ y $1/a_N$, tal que $\dim_{MF}(\Gamma^{a_i}) = \dim_{MF}(\Gamma^c)$.

Demostración: Es análoga a la demostración de la Proposición (5.1.1). Haciendo $b = a_1$ y $a = a_N$, se sigue tomando $c = a_i$.

QED.

5.2. Multifractalidad

Las dimensiones fractales introducidas hasta el momento, son características muy apropiadas de los conjuntos como tales. Sin embargo, a veces sucede que el objeto de interés no es un conjunto en sí, sino una medida concentrada en él, sea éste fractal o no. Por ejemplo, en el estudio de sistemas dinámicos, uno está usualmente interesado en la estructura y propiedades de la medida invariante soportada por el conjunto atractor de ese sistema. Ninguna de aquellas dimensiones fractales tiene en cuenta los pesos que podría inducir una medida sobre las distintas partes de un conjunto.

Con el objeto de mejorar esto, han sido propuestos dos enfoques. Uno es a través de las *dimensiones de Rényi*, las cuales resultan ser una generalización de la dimensión de caja. Se conocen desde fines de la década del '50, fueron definidas por Rényi ([Ren 59]) como una generalización natural de la dimensión de entropía, pero obtuvieron amplio reconocimiento a partir de las publicaciones de Grassberger, Hentschel y Procaccia [Gra 83], [HPr 83] que, en el contexto de sistemas dinámicos, las estudiaron para diferentes atractores extraños.

Otro enfoque, que surgió de manera independiente, es descomponer el soporte, E , de una medida, en una familia de subconjuntos E_α que tengan el mismo escalamiento local y examinar sus dimensiones, lo que nos conduce al llamado *espectro* $f(\alpha)$. Este parámetro espectral fue propuesto por los físicos para estudiar varios modelos multifractales que surgen de fenómenos naturales (como turbulencia, procesos de agrupamiento en cúmulos, de percolación, etc.), sugiriendo que debía ser una magnitud característica. Para determinar $f(\alpha)$, Hentschel y Procaccia [HPr 83], y Halsey et al. [HJK 86], entre otros, lo relacionaron, en forma heurística, con una función $\tau(q)$ que mide el escalamiento de una suma de momentos de la medida μ . En el trabajo de Halsey et al. [HJK 86], se elaboró una formulación general de los diferentes escenarios de la teoría multifractal con fuertes paralelismos a la teoría de mecánica estadística. Aquella relación es llamada en la literatura *formalismo multifractal*, o también *formalismo termodinámico* por su analogía con los principios variacionales en termodinámica. Es una cuestión matemática básica, entonces, el poder dar condiciones apropiadas y justificaciones para este principio y así revelar propiedades estructurales de los sistemas dinámicos subyacentes. En algunos casos, el formalismo ha sido verificado rigurosamente, y un avance substancial se ha logrado en lo que concierne a medidas multifractales definidas mediante varias formas de autosemejanza. Hasta ahora, se conoce una teoría bastante completa en el caso en que los sistemas de funciones iteradas (IFS) consisten en similaridades que satisfacen ciertas condiciones de separación como, por ejemplo, el criterio de abierto (OSC). En esta situación, así co-

mo en el caso de medidas invariantes de sistemas dinámicos hiperbólicos, se tiene que los dos espectros, el de Rényi, D_q , y el $f(\alpha)$ están conectados, con lo que la teoría cobra, particularmente, una bella estructura mediante la aplicación del formalismo multifractal.

5.2.1. Consideraciones previas/resultados básicos

El análisis multifractal apunta a cuantificar la estructura de las singularidades de las medidas, y proveer un modelo para los fenómenos que poseen un rango de diferentes potencias de escalamiento de esas medidas. Existen muchas dificultades técnicas, tanto al tratar las propiedades matemáticas, como al calcular espectros multifractales en casos específicos. Por ejemplo, no siempre resulta claro si es más apropiado trabajar con dimensiones locales inferiores o superiores; o cuál dimensión fractal se debería usar para definir el espectro $f(\alpha)$. Existen problemas de tipo numérico al querer estimar valores de $\mu(A)^q$, para q negativos y $\mu(A)$ pequeños. Se debe tener cuidado, también, al relacionar el comportamiento de la medida sobre bolas $\mu(B_\varepsilon(x))$, en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y sus valores a escalas pequeñas pero finitas; y esto nos lleva a la teoría de los espectros multifractales ‘*fine*’ y ‘*coarse*’.

Concentración y ‘coarse spectrum’

Como ya hemos visto, en la noción de dimensión de caja de un conjunto E que soporta una medida μ , la idea es cubrir E con una colección $\{B_j(\varepsilon)\}$ de cajas de tamaño ε , y evaluar el número $N(\varepsilon)$ de cajas necesarias para cubrir a E ; se determinaba $D = \dim_{\text{box}}(E)$ mediante la relación de escala $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$, pero este conteo no tiene en cuenta la medida de cada una de esas cajas, por lo tanto D no es suficiente para dar una descripción cuantitativa de la medida soportada por E . Para eso, se debe dar un “peso” a la medida contenida en cada caja.

Para cada caja $B_j(\varepsilon)$ del cubrimiento, se define el cociente

$$\alpha = \frac{\log \mu(B_j(\varepsilon))}{\log \varepsilon},$$

llamado *exponente de Hölder “grueso”* (‘*coarse-grained*’ Hölder exponent) o *concentración*.

Por ejemplo, para una gran clase de medidas autosemejantes se sabe que α varía en un rango $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, con $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < +\infty$; pero algunos fenómenos multifractales como la turbulencia o el agrupamiento de partículas en cúmulos (‘clusters’), a veces requieren que $\alpha_{\min} = 0$ y $\alpha_{\max} = +\infty$ ([Fal 97], [PC 01]).

Este índice sirve para “etiquetar” las cajas del cubrimiento del conjunto que soporta la medida, permitiendo un conteo separado para cada valor de α . Luego, si consideramos, para $\delta > 0$

$$N_\varepsilon^\delta(\alpha) = \# \left\{ B_j(\varepsilon) : \frac{\log \mu(B_j(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \right\},$$

se define

$$f_C(\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon^\delta(\alpha)}{-\log \varepsilon},$$

siempre que los límites existan (si no, se consideran \overline{f}_C y \underline{f}_C espectro superior e inferior, considerando $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ y $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0}$, respectivamente). $f_C(\alpha)$ se conoce como *espectro multifractal "grueso" de μ* ('*coarse multifractal spectrum*'). La definición significa que, el número de cajas correspondientes a una concentración α , escala, aproximadamente, como $N_\varepsilon(\alpha) \sim \varepsilon^{-f_C(\alpha)}$, aunque hay que señalar que este índice $f_C(\alpha)$ no es, necesariamente, una dimensión fractal.

Una herramienta que ha resultado muy útil, tanto teórica como numéricamente, para calcular o estimar el espectro $f(\alpha)$ es la llamada *transformada de Legendre*. Los espectros multifractales están relacionados mediante esta transformada, con cierta suma de momentos de la medida.

Sea μ una medida de probabilidad Boreleana, de soporte compacto en \mathbb{R}^n . Para $q \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$

$$S_\varepsilon(q) = \sum_{\mu(B) \neq 0} \mu(B)^q, \quad (5.1)$$

donde la suma se toma sobre una partición de \mathbb{R}^n de cubos B de lado ε para los cuales $\mu(B) > 0$. Para identificar cómo escala esta magnitud, se define

$$\tau_\mu(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log S_\varepsilon(q)}{\log \varepsilon}, \quad (5.2)$$

asumiendo que el límite existe. $\tau_\mu(q)$ se llama el L^q -espectro de μ .

Asumiendo que $f_C(\alpha)$ existe, de lo dicho anteriormente, se puede hacer una estimación de $S_\varepsilon(q)$, como ([Fal 90])

$$S_\varepsilon(q) \sim \int_0^{+\infty} (\varepsilon^\alpha)^q N_\varepsilon(\alpha) d\alpha = \int_0^{+\infty} \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha.$$

Para ε pequeño ($|\log \varepsilon|$ muy grande), podemos considerar que la contribución principal o dominante a esta integral, proviene del valor de α para el cual $q\alpha - f(\alpha)$ es menor. Por lo tanto se espera que

$$S_\varepsilon(q) \sim \varepsilon^{\inf_\alpha \{q\alpha - f(\alpha)\}},$$

es decir,

$$\tau(q) = \inf_{0 \leq \alpha < +\infty} \{q\alpha - f(\alpha)\}. \quad (5.3)$$

Se pueden establecer más relaciones ([Fal 90]), pero asumiendo otras hipótesis para la función $f_C(\alpha)$, como ser diferenciable donde $f(\alpha) > 0$ y estrictamente convexa, es decir, $f'(\alpha)$ estrictamente decreciente con α . Así, suponiendo que, para cada q , el ínfimo en (5.3) se alcanza en $\alpha = \alpha(q) > 0$, se tiene

$$\frac{d}{d\alpha} \{q\alpha - f(\alpha)\} = 0$$

o sea

$$q = \frac{df}{d\alpha}(\alpha(q)) . \quad (5.4)$$

Así, $\alpha(q)$ es el valor de α para el cual el gráfico de f tiene pendiente q . De (5.3)

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)) , \quad (5.5)$$

y si $\alpha(q)$ es diferenciable como función de q

$$\frac{d\tau}{dq} = \alpha + q \frac{d\alpha}{dq} - \frac{df}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dq} .$$

Poniendo $\alpha = \alpha(q)$, se tiene usando (5.4)

$$\frac{d\tau}{dq}(q) = \alpha(q) . \quad (5.6)$$

Las ecuaciones (5.5) y (5.6) son, esencialmente, un par de *transformadas de Legendre*, las cuales relacionan las variables q y τ con las variables α y f , y permiten representar a $f(\alpha)$ en función de α vía el parámetro q .

Algunos de los valores de q son destacados:

1. para $q=0$, $S_\varepsilon(0) = N_\varepsilon(\text{sop}(\mu))$, luego $\tau(0) = \dim_{\text{box}}(\text{sop}(\mu)) = f(\alpha(0))$ en virtud de (5.5). Por (5.4), $f'(\alpha(0))=0$, luego $\alpha(0)$ corresponde al máximo de $f(\alpha)$.
2. para $q = 1$, $S_\varepsilon(1) = 1$ por (5.1), luego $\tau(1) = 0$ por (5.2), entonces resulta $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$ y $f'(\alpha(1)) = 1$ por (5.5) y (5.4).
3. para $q = +\infty$ y $q = -\infty$, $\alpha_{\min} := \lim_{q \rightarrow +\infty} \alpha(q)$, y $\alpha_{\max} := \lim_{q \rightarrow -\infty} \alpha(q)$, de (5.4) se tiene que

$$f'(\alpha_{\min}) = \frac{df}{d\alpha}(\alpha(+\infty)) = +\infty \quad \text{y} \quad f'(\alpha_{\max}) = \frac{df}{d\alpha}(\alpha(-\infty)) = -\infty$$

Observación: En la literatura matemática ([Fal 97], [CM 92], [Ols 95], [Rie 95]), la relación entre el espectro multifractal y la suma de momentos de la medida, se establece mediante lo que definen como la transformada de Legendre de una función auxiliar “natural” β (que es *ad hoc* para cada medida μ).

Es decir, sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, se define la *transformada de Legendre* de β a la función

$$f_L(\alpha) = \inf_{-\infty < q < +\infty} \{\beta(q) + \alpha q\} .$$

Se puede ver que $f : [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ y que f es continua en α , y de acuerdo a las propiedades que tenga β , se pueden deducir otras propiedades de $f_L(\alpha)$.

Tomando $\beta = -\tau$, se puede establecer una relación entre $f_C(\alpha)$ y $\tau(q)$, mediante transformada de Legendre f_L de τ

$$f_L(\alpha) = \inf_{-\infty < q < +\infty} \{q\alpha - \tau(q)\} , \quad (5.7)$$

la relación está dada por la desigualdad $f_C(\alpha) \leq f_L(\alpha)$, pero hay muchas medidas μ , como las autosemejantes, para las cuales se satisface la igualdad, $f_C(\alpha) = f_L(\alpha)$ ([Fal 97]).

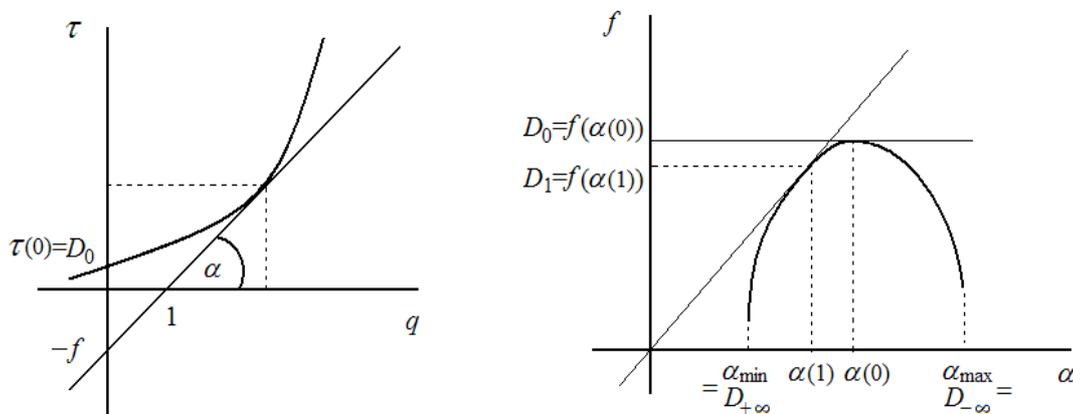


Figura 5.3: Gráficos esquemáticos de τ en función de q y de f en función de α , con los valores significativos correspondientes.

Concentración local y ‘fine spectrum’

La teoría multifractal también estudia las propiedades de escalamiento de una medida de manera local. La idea es analizar una medida μ descomponiendo su soporte E en una familia de subconjuntos E_α , cada uno formado por puntos que tengan la misma “dimensión local” α , y estimar el tamaño o dimensión de estos conjuntos.

Para $x \in E$ se define el *exponente de Hölder local* o “fino” (*‘fine Hölder exponent’*), o también *exponente de singularidad*, o *índice de concentración local*, como

$$\alpha(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_x(\varepsilon))}{\log \varepsilon},$$

donde $B_x(\varepsilon)$ es una bola de diámetro ε , centrada en x . Cuando el límite no existe, se puede decir que el exponente es indefinido, o ampliar el concepto definiendo $\bar{\alpha}(x)$ y $\underline{\alpha}(x)$ mediante el \limsup y el \liminf , respectivamente (ver Definición 2.2.3).

Para cada $\alpha \geq 0$ sea

$$E_\alpha = \{x \in E : \alpha(x) = \alpha\}. \quad (5.8)$$

Es de interés, tanto la estructura de estos conjuntos, como el comportamiento de la función $f_{\dim}(\alpha) := \dim(E_\alpha)$, para alguna dimensión adecuada (por ejemplo, $f_H(\alpha) = \dim_H(E_\alpha)$, para la dimensión de Hausdorff). Esta función $f_{\dim}(\alpha)$ se conoce como *espectro multifractal local* o *espectro “fino” de singularidad* de la medida μ (*‘fine multifractal spectrum’*).

Para \dim_H se tiene claramente que $0 \leq f_H(\alpha) \leq \dim_H(\text{sop}(\mu))$ para todo $\alpha \geq 0$, y por la Proposición 2.2.2(ii), vale que $0 \leq f_H(\alpha) \leq \alpha$.

En los últimos años se han propuesto muchos formalismos multifractales, algunos de los cuales usan diferentes conceptos de dimensión, y se ha estudiado intensamente la relación entre los mismos, para distintas clases de medidas. Así, bajo condiciones bastante generales, vale que el espectro multifractal “grosso” es una cota superior

para el “fino”, es decir, $f_H(\alpha) \leq f_C(\alpha)$. Sin embargo, para ciertas medidas, como las autosemejantes, está demostrado que, bajo ciertas condiciones, vale la igualdad, es decir, $f_H(\alpha) = f_C(\alpha)$ ([Fal 97], [EM 92], [Rie 95]).

De lo anterior, entoces, tenemos que si μ es una medida autosemejante, todos los espectros antes mencionados, coinciden, y por lo tanto, los llamaremos simplemente $f(\alpha)$. Luego,

$$f(\alpha) := f_H(\alpha) = f_C(\alpha) = f_L(\alpha) .$$

5.2.2. Dimensiones de Rényi

Las dimensiones de Rényi están fuertemente relacionadas con el espectro L^q . Tomemos una partición de \mathbb{R}^n en cajas B_i de lado ε , inducida por una ε -grilla. Para una medida de probabilidad μ soportada en $E \subset \mathbb{R}^n$ ($\text{sop}(\mu) = E$), sea $p_i = \mu(B_i)$. Para $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, se definen las *dimensiones de Rényi*, como

$$D_q(\mu) := \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log(\sum_i p_i^q)}{\log \varepsilon} , & \text{para } q \neq 1 , \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q-1} \frac{\log(\sum_i p_i^q)}{\log \varepsilon} , & \text{para } q = 1 , \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\sup_i p_i)}{\log \varepsilon} , & \text{para } q = +\infty , \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\inf_i p_i)}{\log \varepsilon} , & \text{para } q = -\infty , \end{cases} \quad (5.9)$$

donde las sumas se toman sobre todas las cajas B_i para las que $p_i \neq 0$.

Es fácil verificar que, para $q=0$ se tiene la definición (2.3), luego D_0 es la dimensión de caja. También son de particular importancia D_1 , llamada *dimensión de información* o *dimensión de la medida*, por describir cómo la entropía $S = -\sum_i p_i \log p_i$ crece con el cambio de escala, y D_2 o *dimensión de correlación* por ser más fácil de obtener a partir de datos de mediciones, y usualmente usada como estimación inferior de D_1 , ya que $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ si $q_1 \geq q_2$ ([Ott 93]).

Puede ocurrir que los límites en (5.9) no existan, porque dependen de la elección de la ε -partición. En ese caso, podemos refinar la definición tomando ínfimos o supremos (dependiendo de q) sobre todas las posibles ε -particiones, lo que conduce a una generalización de la dimensión de Hausdorff. Alternativamente, se pueden definir dimensiones superiores e inferiores de Rényi definidas, como es usual, tomando límites superior e inferior

$$\underline{D}_q = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log(\sum_i p_i^q)}{\log \varepsilon} ,$$

$$\overline{D}_q = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log(\sum_i p_i^q)}{\log \varepsilon} ,$$

las cuales generalizan la dimensión inferior y superior de caja.

Luego, mirando (5.2) se tiene que para $q \in \mathbb{R}$

$$\tau_\mu(q) = (q-1) D_q , \quad (5.10)$$

(algunos autores dan esta relación como definición del espectro L^q). Podemos, entonces, mediante (5.5), establecer una relación entre el espectro de Rényi y el multifractal $f_C(\alpha)$

$$D_q = \frac{1}{q-1} \left(q\alpha(q) - f_C(\alpha(q)) \right) .$$

Observar que, para $q=0$, $D_0 = f(\alpha(0)) = \dim_{\text{box}}(E)$, para $q=1$, $D_1 = \alpha(1) = f(\alpha(1))$, y para los extremos del rango de variación $q = +\infty$ y $q = -\infty$,

$$D_{+\infty} = \alpha(+\infty) = \alpha_{\min} \quad \text{y} \quad D_{-\infty} = \alpha(-\infty) = \alpha_{\max} , \quad (5.11)$$

ver Figura 5.3. La función D_q es a veces continua, y aun diferenciable, pero no siempre. Daremos tres breves ejemplos para ilustrar. El cambio respecto a q de esta función, es importante y se interpreta como una transición de fase en muchos fenómenos, vía la analogía entre este formalismo multifractal con la termodinámica, donde q es la temperatura inversa de un sistema y $\tau(q)/q$ la energía libre. Así, por (5.10) el estudio de la variación $d\tau(q)/dq$ se refleja en el comportamiento de dD_q/dq .

Ejemplos:

1. Consideremos una medida uniforme sobre un cubo n dimensional de lado ℓ $([0, \ell]^n)$. Luego,

$$\mu(dx) = 1/\ell^n dx .$$

Por lo tanto, para una i -ésima caja de la ε -grilla, tenemos que $p_i = \varepsilon^n/\ell^n$, si la caja es un subconjunto del cubo, y 0 si no (las contribuciones de las cajas que intersecan las caras del cubo pueden ser despreciadas en el límite). De la definición (5.9) se tiene, reemplazando

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \left[\sum_i (\varepsilon^n/\ell^n)^q \right]}{\log \varepsilon} .$$

Como necesitamos aproximadamente $(\ell/\varepsilon)^n$ cajas para cubrir al cubo,

$$\begin{aligned} D_q &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \left[(\ell/\varepsilon)^n (\varepsilon^n/\ell^n)^q \right]}{\log \varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \left[(\ell/\varepsilon)^{n(q-1)} \right]}{\log \varepsilon} = n , \end{aligned}$$

y lo mismo para $q=1, +\infty, -\infty$. Luego $D_q = n$ y por lo tanto diferenciable para todo q .

2. Consideremos en el $[0, 1]$, el paradigmático sistema dinámico unidimensional dado por $f(x) = 4x(1-x)$, conocido como el *mapa logístico*

$$x_{k+1} = 4x_k(1-x_k) ,$$

cuya medida invariante tiene como densidad a la función ([Ott 93], [PJS 92])

$$\varrho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} .$$

Dividiendo a $[0, 1]$ en $2N$ cajas de longitud $\varepsilon = 1/2N$, la probabilidad de que el sistema se encuentre en la i -ésima caja es

$$p_i = \int_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} \varrho(x) dx , \quad i = 1, \dots, 2N.$$

Para $0 < x < 1/2$, se tiene

$$\frac{1}{\pi \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \leq \sqrt{2} \frac{1}{\pi \sqrt{x}} ,$$

por lo tanto

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{\varepsilon} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) \leq p_i \leq \sqrt{2} \frac{2}{\pi} \sqrt{\varepsilon} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) .$$

Como

$$\frac{1}{2\sqrt{i}} \leq \sqrt{i} - \sqrt{i-1} \leq \frac{1}{\sqrt{i}} ,$$

entonces

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{\varepsilon/i} \leq p_i \leq 2 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\varepsilon/i} .$$

Como la densidad es simétrica con respecto a $x = 1/2$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2N} p_i^q &\sim \sum_{i=1}^N (\varepsilon/i)^{q/2} \sim \int_1^{1/(2\varepsilon)} (\varepsilon/i)^{q/2} di = \\ &= \frac{\varepsilon^{q/2}}{\frac{q}{2}-1} [1 - (2\varepsilon)^{q/2-1}] . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_q &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \left(\frac{\varepsilon^{q/2} - 2^{q/2-1} \varepsilon^{q-1}}{\frac{q}{2}-1} \right)}{\log \varepsilon} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } q \leq 2, \\ \frac{q}{2(q-1)} & \text{si } q \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

En este caso puede verse que D_q es continua pero no es diferenciable en $q = 2$. Este comportamiento es análogo a una transición de fase.

3. Sea una medida normalizada en $[0, 1]$, cuya densidad es

$$\varrho(x) = \beta + (1 - \beta)\delta(x) ,$$

donde $\beta \in (0, 1)$ es un parámetro, y δ es la función de Dirac. Dividimos el intervalo en N cajas de longitud $1/N$. Luego,

$$\begin{aligned} p_1 &= \beta/N + 1 - \beta , \\ p_i &= \beta/N , \quad \text{para } i > 1 . \end{aligned}$$

Es muy fácil ver que

$$D_q = \begin{cases} 1 & q < 1 , \\ \beta & q = 1 , \\ 0 & q > 1 . \end{cases}$$

Luego, en este caso el espectro de Rényi no sólo no es diferenciable, sino que tampoco es continuo.

5.2.3. Análisis multifractal de medidas autosemejantes

El concepto de autosemejanza puede extenderse, afortunadamente, de conjuntos a medidas. La idea es construir una medida mediante un proceso recursivo por el cual su soporte se divide en componentes más pequeñas, y al mismo tiempo se reparte esa medida en cada componente. Por ejemplo, si consideramos un conjunto E y una masa unitaria en él, lo fraccionamos en N copias más pequeñas E_1, \dots, E_N y a cada E_i le asignamos una masa p_i , $i = 1, \dots, N$, donde $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Luego, de manera autosemejante, continuamos la subdivisión en cada E_i , de manera que la copia E_j dentro de E_i tiene masa $p_i p_j$, etc.

Sea $\{S_1, \dots, S_N\}$ un IFS en \mathbb{R}^n de razones de contracción $a_i \in (0, 1)$, que satisface el criterio de abierto (OSC). Hemos visto que existe un único conjunto $F \in \mathbb{R}^n$, no vacío, atractor, e invariante para el IFS.

Definición 5.2.1 Una medida de soporte compacto μ se llama medida autosemejante (SSM) si

$$\mu(\cdot) = \sum_{i=1}^N p_i \mu(S_i^{-1}(\cdot)) ,$$

donde $p_i > 0$, y satisfacen $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Hutchinson demostró [Hut 81] que tales medidas existen y son únicas. En ese caso vale que $F = \text{sop}\mu$.

Las medidas autosemejantes (SSM) son, probablemente, las medidas más simples con un espectro multifractal no trivial. Además, si se satisface el criterio de abierto (OSC), se sabe que todas las definiciones razonables de espectros multifractales de μ coinciden ([Rie 95], [CM 92], [Ols 95], [Fal 97]). En particular, todos los espectros

igualan a la transformada de Legendre $f_L(\alpha) = \inf_q (q\alpha - \tau(q))$, y además, para $q \geq 0$, $\tau(q)$ verifica ([Lau 95])

$$\sum_{i=1}^N p_i^q a_i^{-\tau(q)} = 1, \quad (5.12)$$

llamada *función de partición* por la analogía formal con la función de partición en mecánica estadística. Se puede ver (mismas referencias) que, en el caso de las SSM, $f(\alpha)$ es continuo y suave.

Un caso paradigmático y que ha sido estudiado intensamente en la literatura, es cuando los contractores (las particiones) son todos iguales. En este caso, el espectro multifractal $f(\alpha)$ se puede calcular explícitamente mediante fórmulas exactas [EM 92].

Por otro lado, en mecánica estadística, las particiones del conjunto siempre se consideran iguales. El espectro L^q , $\tau_\mu(q)$ es interpretado entonces, como la energía libre del sistema físico descrito por μ como función de la temperatura inversa q (ver, por ejemplo [Ott 93]).

Siguiendo un razonamiento similar al de Evertsz y Mandelbrot en [EM 92], vamos a extender los resultados al caso en que las contracciones son distintas (i.e., las particiones del conjunto tienen tamaños distintos) y calcular el espectro $f(\alpha)$, no en forma explícita pero sí en términos de las “frecuencias” con las que están distribuidos los pesos en cada una de las particiones.

Sea

$$F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F),$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{diam}(F_{i_1, \dots, i_k}) &= |F_{i_1, \dots, i_k}| = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, \\ \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) &= p_{i_1, \dots, i_k} = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}. \end{aligned}$$

Para un $x \in F$, si llamamos $F_k(x)$ al subconjunto de nivel k , F_{i_1, \dots, i_k} que contiene a ese x , puede verse que [Fal 90], para cualquier α vale

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_\delta(x))}{\log \delta} = \alpha \quad \text{sí y sólo si} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(F_k(x))}{\log |F_k(x)|} = \alpha,$$

con lo que F_α puede expresarse

$$F_\alpha = \left\{ x \in F : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(F_k(x))}{\log |F_k(x)|} = \alpha \right\}.$$

Ahora bien,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(F_k(x))}{\log |F_k(x)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(p_{i_1} \dots p_{i_k})}{\log(a_{i_1} \dots a_{i_k})}.$$

Como cada p_{i_j} es alguna de las probabilidades p_1, \dots, p_N , entonces, en un paso k importa contar cuántas veces aparecen cada p_i y cada a_i . Sea r_i esa cantidad (es la misma para p_i y a_i), entonces

$$p_{i_1} \dots p_{i_k} = p_1^{r_1} \dots p_N^{r_N} \quad \text{y} \quad a_{i_1} \dots a_{i_k} = a_1^{r_1} \dots a_N^{r_N},$$

para ciertos r_1, \dots, r_N , tales que $\sum_{i=1}^N r_i = k$. Luego,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(p_{i_1} \cdots p_{i_k})}{\log(a_{i_1} \cdots a_{i_k})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_1 \log p_1 + \cdots + r_N \log p_N}{r_1 \log a_1 + \cdots + r_N \log a_N}.$$

Multiplicando y dividiendo por k , y llamando $\lambda_i^k = r_i/k$ a la proporción de p_i y de a_i que hay en el paso k , tenemos que lo anterior es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^k \log p_1 + \cdots + \lambda_N^k \log p_N}{\lambda_1^k \log a_1 + \cdots + \lambda_N^k \log a_N}.$$

Consideremos $\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k$ como la “frecuencia” con que aparece el subíndice i en la “dirección” final $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots$ de x en F . Cuando el límite existe, se tiene que

$$\alpha = \frac{\lambda_1 \log p_1 + \cdots + \lambda_N \log p_N}{\lambda_1 \log a_1 + \cdots + \lambda_N \log a_N}, \quad (5.13)$$

donde $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$.

Con esta expresión se puede ver que α varía en un rango $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ que se puede calcular explícitamente.

Observación 5.2.2 $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, con

$$\alpha_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} \frac{\log p_i}{\log a_i} \quad \text{y} \quad \alpha_{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\log p_i}{\log a_i}.$$

Demostración: En efecto, usando multiplicadores de Lagrange, se deriva fácilmente que los puntos críticos de la función

$$\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{\lambda_1 \log p_1 + \cdots + \lambda_N \log p_N}{\lambda_1 \log a_1 + \cdots + \lambda_N \log a_N},$$

sujeta a la condición $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, son $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = (0, \dots, i, \dots, 0)$, $i = 1 \dots N$, cuyos valores de α son $\left\{ \frac{\log p_i}{\log a_i} \right\}_{1 \leq i \leq N}$.

QED.

5.3. Obtención del espectro multifractal en forma paramétrica

Para $x \in F$ sea $\lambda(x) := (\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \lambda$ el vector de frecuencias. El conjunto F_α correspondiente a (5.8), puede expresarse como

$$F_\alpha = \left\{ x \in F / \lambda(x) : \frac{\lambda_1 \log p_1 + \cdots + \lambda_N \log p_N}{\lambda_1 \log a_1 + \cdots + \lambda_N \log a_N} = \alpha \right\}.$$

Si llamamos $F_\lambda = \{x \in F : \lambda(x) = \lambda\}$, entonces

$$F_\alpha = \bigcup_{\lambda / \alpha(\lambda) = \alpha} F_\lambda. \quad (5.14)$$

Caso $N=2$

Por ejemplo, es el caso de una medida binomial, con pesos p_1 y p_2 , y contracciones a_1 y a_2 . En este caso se tiene $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, o bien λ y $1 - \lambda$. Es decir

$$\alpha = \alpha(\lambda) = \frac{\lambda \log p_1 + (1 - \lambda) \log p_2}{\lambda \log a_1 + (1 - \lambda) \log a_2},$$

quiere decir que cada valor de λ entre 0 y 1 determina un único valor de α . En este caso, $F_\alpha = F_\lambda$, y $f(\alpha) = \dim_H(F_\alpha) = \dim_H(F_\lambda)$.

Para cada k ,

$$\begin{aligned} |F_{i_1, \dots, i_k}| &= a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} = a_1^r a_2^{k-r}, \\ \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) &= p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k} = p_1^r p_2^{k-r}. \end{aligned}$$

La cantidad de F_{i_1, \dots, i_k} con igual valor $p_1^r p_2^{k-r}$, es el combinatorio binomial $C(k; r)$. Es decir,

$$N_k(\alpha) = \binom{k}{r}.$$

Por la fórmula de Stirling

$$k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} \quad \text{para } k \rightarrow \infty,$$

(donde $a_k \sim b_k$ significa $a_k/b_k \rightarrow 1$). Podemos aproximar

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!} \sim \frac{k^k}{r^r (k-r)^{k-r}} = \left(\left(\frac{r}{k} \right)^{\frac{r}{k}} \left(1 - \frac{r}{k} \right)^{1 - \frac{r}{k}} \right)^{-k},$$

pero λ es la frecuencia de p 's, y $1 - \lambda$ la de $(1-p)$'s en el límite, entonces,

$$f(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_k(\alpha)}{-\log(a_1^r a_2^{k-r})} = \frac{\lambda \log \lambda + (1 - \lambda) \log(1 - \lambda)}{\lambda \log a_1 + (1 - \lambda) \log a_2},$$

con lo que $f(\alpha) = f(\lambda)$. Así, queda determinada una fórmula explícita, que depende de un parámetro, λ , para calcular el espectro.

Caso $N > 2$

Ahora, para un mismo valor de α , existen infinitas N -uplas $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ que verifican $\alpha(\lambda) = \alpha$ (ver (5.13)).

Para cada k , la cantidad de F_{i_1, \dots, i_k} con igual valor $p_1^{r_1} \cdots p_N^{r_N}$ es el combinatorio multinomial $C(k; r_1, \dots, r_N)$ que, como antes, podemos aproximar,

$$\binom{k}{r_1, \dots, r_N} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_N!} \sim \frac{k^k}{r_1^{r_1} \cdots r_N^{r_N}} = \left(\left(\frac{r_1}{k} \right)^{\frac{r_1}{k}} \cdots \left(\frac{r_N}{k} \right)^{\frac{r_N}{k}} \right)^{-k}.$$

Luego, para cada $\alpha(\lambda)$,

$$f(\alpha(\lambda)) = \frac{\lambda_1 \log \lambda_1 + \cdots + \lambda_N \log \lambda_N}{\lambda_1 \log a_1 + \cdots + \lambda_N \log a_N}. \quad (5.15)$$

Como $f(\alpha(\lambda)) = \dim_H(F_\lambda)$, entoces por (5.14), $f(\alpha) = \sup\{f(\alpha(\lambda)) : \alpha(\lambda) = \alpha\}$.

Luego, maximizamos la función

$$h(\lambda) = f(\alpha(\lambda)) \quad \text{sujeta a} \quad \alpha(\lambda) = \alpha_0 . \quad (5.16)$$

Utilizando multiplicadores de Lagrange, sea $\Lambda \in \mathbb{R}$, α_0 fijo, y la función auxiliar

$$\begin{aligned} g(\lambda, \Lambda) &= h(\lambda) - \Lambda [\alpha(\lambda) - \alpha_0] = \\ &= \frac{\lambda_1 \log \lambda_1 + \cdots + \lambda_N \log \lambda_N}{\lambda_1 \log a_1 + \cdots + \lambda_N \log a_N} - \Lambda \left[\frac{\lambda_1 \log p_1 + \cdots + \lambda_N \log p_N}{\lambda_1 \log a_1 + \cdots + \lambda_N \log a_N} - \alpha_0 \right] . \end{aligned} \quad (5.17)$$

(Una segunda condición es $\sum_i \lambda_i = 1$, pero para simplificar las ecuaciones, no la agregaremos como restricción, y la usaremos directamente).

Derivando g con respecto a cada λ_i e igualando a 0, se tiene, para cada $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} 0 &= (\log \lambda_i + 1) \sum_j \lambda_j \log a_j - \log a_i \sum_j \lambda_j \log \lambda_j - \Lambda \left[\log p_i \sum_j \lambda_j \log a_j - \log a_i \sum_j \lambda_j \log p_j \right] , \\ \text{reagrupando} & \\ 0 &= \left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right) (\log \lambda_i + 1 - \Lambda \log p_i) - \log a_i \left(\sum_j \lambda_j \log \lambda_j - \Lambda \sum_j \lambda_j \log p_j \right) , \end{aligned}$$

dividiendo por $\sum_j \lambda_j \log a_j$

$$0 = \log \lambda_i + 1 - \Lambda \log p_i - \log a_i \left(\frac{\sum_j \lambda_j \log \lambda_j}{\sum_j \lambda_j \log a_j} - \Lambda \frac{\sum_j \lambda_j \log p_j}{\sum_j \lambda_j \log a_j} \right) .$$

Derivando g con respecto a Λ e igualando a 0, se tiene obviamente, la restricción

$$0 = \alpha(\lambda) - \alpha_0 . \quad (5.18)$$

Ahora, para $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N)$ óptimo, reemplazando en (5.18) y en (5.15)

$$0 = \log \bar{\lambda}_i + 1 - \Lambda \log p_i - \log a_i \left(f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0 \right) \quad i = 1, \dots, N ,$$

restando la ecuación correspondiente a, por ejemplo, λ_1 , y restándosela a la de un $i \neq 1$

$$0 = \log \left(\frac{\bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_1} \right) - \Lambda \log \left(\frac{p_i}{p_1} \right) - \log \left(\frac{a_i}{a_1} \right) \left(f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0 \right) ,$$

quitando logaritmos y despejando $\bar{\lambda}_i$

$$\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_1 \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} \left(\frac{p_i}{p_1} \right)^\Lambda , \quad (5.19)$$

usando que $\sum_i \bar{\lambda}_i = 1$ (segunda restricción)

$$1 = \frac{\bar{\lambda}_1}{a_1^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_1^\Lambda} \sum_i a_i^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_i^\Lambda ,$$

despejando $\bar{\lambda}_1$

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{a_1^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_1^\Lambda}{\sum_i a_i^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_i^\Lambda},$$

reemplazando en (5.19), tenemos para cada $i = 1, \dots, N$, la siguiente relación implícita entre $\bar{\lambda}_i$ óptimo, la concentración α_0 y el espectro $f(\alpha_0)$

$$\bar{\lambda}_i = \frac{a_i^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_i^\Lambda}{\sum_j a_j^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_j^\Lambda}. \quad (5.20)$$

Llamando $\Omega = \Omega(\Lambda) := f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0$, y tomando logaritmos

$$\log \bar{\lambda}_i = \log (a_i^\Omega p_i^\Lambda) - \log \left(\sum_j a_j^\Omega p_j^\Lambda \right),$$

llamando $\star := \sum_j a_j^\Omega p_j^\Lambda$ (que no depende de i), y multiplicando por $\bar{\lambda}_i$

$$\bar{\lambda}_i \log \bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i \log (a_i^\Omega p_i^\Lambda) - \bar{\lambda}_i \log(\star),$$

sumando desde $i = 1, \dots, N$, y luego dividiendo por $\sum_i \bar{\lambda}_i \log a_i$

$$\frac{\sum_i \bar{\lambda}_i \log \bar{\lambda}_i}{\sum_i \bar{\lambda}_i \log a_i} = \Omega \frac{\sum_i \bar{\lambda}_i \log a_i}{\sum_i \bar{\lambda}_i \log a_i} + \Lambda \frac{\sum_i \bar{\lambda}_i \log p_i}{\sum_i \bar{\lambda}_i \log a_i} - \frac{\log(\star)}{\sum_i \bar{\lambda}_i \log a_i},$$

es decir

$$f(\alpha_0) = \Omega + \Lambda \alpha_0 - \frac{\log(\star)}{\sum_i \bar{\lambda}_i \log a_i},$$

luego

$$\log(\star) = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_j a_j^\Omega p_j^\Lambda = \sum_j a_j^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_j^\Lambda = 1. \quad (5.21)$$

Ahora, reemplazando en (5.20), la relación implícita para los $\bar{\lambda}_i$ se simplifica a

$$\bar{\lambda}_i = a_i^\Omega p_i^\Lambda = a_i^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_i^\Lambda, \quad (5.22)$$

y reemplazando esto en (5.18), la expresión (5.13) para la concentración, puede escribirse

$$\alpha_0 = \alpha(\bar{\lambda}) = \alpha_0(\Lambda) = \frac{\sum_i a_i^\Omega p_i^\Lambda \log p_i}{\sum_i a_i^\Omega p_i^\Lambda \log a_i} = \frac{\sum_i a_i^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_i^\Lambda \log p_i}{\sum_i a_i^{f(\alpha_0) - \Lambda \alpha_0} p_i^\Lambda \log a_i}. \quad (5.23)$$

Luego, para cada $\Lambda \in \mathbb{R}$, las ecuaciones (5.21) y (5.23) determinan un único par $(\alpha(\Lambda), f(\alpha(\Lambda)))$. Por lo tanto, el espectro multifractal de la medida dada por (p_1, \dots, p_N) puede obtenerse, en el caso general, resolviendo numéricamente (por cualquier método standard) estas ecuaciones: dado Λ , se obtiene un único $\Omega(\Lambda)$ de (5.21); con estos valores, se determina $\alpha(\Lambda)$ de (5.23), y por último, se obtiene $f(\alpha(\Lambda)) = \Omega(\Lambda) + \Lambda\alpha(\Lambda)$, es decir, $f(\alpha) = \Omega(\Lambda) + \Lambda\alpha$. Esto simplifica el problema, respecto de otros métodos que obtienen el espectro $f(\alpha)$ por aproximación, como el de los histogramas, o el de ‘coarse-grained’ (momentos) ([Fal 97], [EM 92]).

Por ser Λ el multiplicador de Lagrange, se tiene que

$$\nabla h(\bar{\lambda}) = \Lambda \nabla \alpha(\bar{\lambda}) ,$$

pero por definición de h (5.16),

$$\nabla h(\bar{\lambda}) = f'(\alpha_0) \nabla \alpha(\bar{\lambda}) , \quad (5.24)$$

luego

$$\Lambda = f'(\alpha_0) ,$$

probado que $\nabla \alpha(\bar{\lambda}) \neq 0$. Pero esto es cierto pues, derivando (5.13) y evaluando en $\bar{\lambda}$, para cada $i = 1, \dots, N$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i}(\bar{\lambda}) = \frac{\log p_i \sum_j \bar{\lambda}_j \log a_j - \log a_i \sum_j \bar{\lambda}_j \log p_j}{\left(\sum_j \bar{\lambda}_j \log a_j \right)^2} = \frac{\log p_i - \log a_i \alpha_0}{\left(\sum_j \bar{\lambda}_j \log a_j \right)} ,$$

luego

$$\nabla \alpha(\bar{\lambda}) = 0 \quad \iff \quad \alpha_0 = \frac{\log p_i}{\log a_i} \quad \forall i = 1, \dots, N ,$$

pero si esto fuera cierto, entonces por (5.13), $\alpha(\lambda)$ sería constante.

La prueba de que, efectivamente, $\bar{\lambda}$ es un máximo de $h(\lambda)$ relativo a $\alpha(\lambda) = \alpha_0$, está en el Apéndice 5.A, al final de este capítulo.

Observar que las ecuaciones (5.4) y (5.5), identifican ahora a $\Omega(\Lambda) = \Omega(f'(\alpha)) = \Omega(q)$ como $-\tau(q)$, y que, entonces, (5.21) es la función de partición (5.12).

En los casos particulares en que las razones de contracción son todas iguales ($F = \text{sop}(\mu)$ estrictamente autosemejante), $a_1 = \dots = a_N = a$; o que las probabilidades son iguales, $p_1 = \dots = p_N = 1/N$, se puede despejar la frecuencia óptima en función de los parámetros frecuenciales Λ u Ω , según el caso, y sí se pueden obtener fórmulas explícitas para $(\alpha(\Lambda), f(\alpha(\Lambda)))$ ó $(\alpha(\Omega), f(\alpha(\Omega)))$.

Contractores iguales

En efecto, si los contractores son todos iguales, de la ecuación (5.20), tenemos que

$$\lambda_i = \frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \quad i = 1, \dots, N ,$$

reemplazando en (5.23)

$$\alpha = \alpha(\Lambda) = \frac{\sum_i \frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \log p_i}{\sum_i \frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \log a} = \sum_i \frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \frac{\log p_i}{\log a},$$

y reemplazando en (5.15)

$$\begin{aligned} f(\alpha) = f(\alpha(\Lambda)) &= \frac{\sum_i \frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \log \left(\frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \right)}{\sum_i \frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \log a} \\ &= \sum_i \frac{p_i^\Lambda}{\sum_j p_j^\Lambda} \frac{\log p_i^\Lambda}{\log a} - \frac{\log \left(\sum_j p_j^\Lambda \right)}{\log a}, \end{aligned}$$

resultado análogo al que se encuentra en [EM 92].

Probabilidades iguales

Si, en cambio, las probabilidades son todas iguales, las frecuencias óptimas son

$$\lambda_i = \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.25)$$

reemplazando en (5.23)

$$\alpha = \alpha(\Omega) = \frac{\sum_i \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \log \frac{1}{N}}{\sum_i \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \log a_i} = \frac{\log \frac{1}{N}}{\sum_i \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \log a_i}, \quad (5.26)$$

y reemplazando en (5.15)

$$\begin{aligned} f(\alpha) = f(\alpha(\Omega)) &= \frac{\sum_i \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \log \left(\frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \right)}{\sum_i \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \log a_i} = \\ &= \Omega - \frac{\log \left(\sum_j a_j^\Omega \right)}{\sum_i \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} \log a_i}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.4. Relación entre el espectro de Mendès France y espectros multifractales

Hemos visto que cada medida μ proporciona un espectro multifractal asociado a ella. Luego, podemos elegir diferentes medidas para comparar sus espectros con el espectro de dimensiones de Mendès France, que no proviene de una medida. Si $\mu = (p_1, \dots, p_N)$ es la medida de probabilidad, nosotros hemos elegido dos casos: 1) dar a cada segmento (o contractor) a_i un peso proporcional a la longitud que tiene respecto de la longitud de la generatriz de la curva fractal; 2) dar a cada segmento igual probabilidad, es decir, no ponderar la importancia o el valor (literalmente, el “peso”) de uno sobre otro, con el objeto de destacar el rol de cada contractor. Además, con el propósito de poder darle una interpretación termodinámica (para la cual necesitamos que la partición del dominio sea en cajas de igual tamaño) via una “fórmula de inversión” (análoga a la definida por [RM 97]) y así poder relacionarlo con otro espectro, en donde las probabilidades sean distintas y las razones de contracción sean iguales.

Primer caso

Encontramos que el espectro de Mendès France cubre exactamente el rango del espectro de dimensiones de Rényi.

Sea $F \in \mathcal{F}_H$, la curva límite obtenida mediante N similaridades de factores de contracción $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N < 1$. Sea P , la generatriz de F , formada por N segmentos F_i de longitudes a_i , $i = 1, \dots, N$ (no necesariamente en ese orden). Sea $L = \sum_i a_i$ la longitud de P .

Sea $[d_{\min}, d_{\max}]$ el rango del espectro continuo de dimensiones de Mendès France obtenido en la Sección 5.1. Consideremos una medida de probabilidad autosemejante $\mu = (p_1, \dots, p_N)$ sobre F (Definición 5.2.1), es $\mu(F_i) = p_i$, $i = 1, \dots, N$. Entonces

Proposición 5.4.1 *Si las p_i se eligen de manera que cada segmento “pese” proporcionalmente a su longitud, es decir, $p_i = a_i/L$, entonces*

$$d_{\min} = D_{+\infty} \quad \text{y} \quad d_{\max} = D_0 .$$

Demostración: En efecto, por la relación (5.11), basta ver que $\alpha_{\min} = d_{\min}$

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= \min_i \frac{\log p_i}{\log a_i} = \min_i \frac{\log(a_i/L)}{\log a_i} = \min_i \left\{ 1 - \frac{\log L}{\log a_i} \right\} = \\ &= \min_i \left\{ 1 + \frac{\log L}{\log(1/a_i)} \right\} = 1 + \frac{\log L}{\log(1/a_1)} . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Luego, de (5.11) se sigue $\alpha_{\min} = \dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) = d_{\min}$.

La otra igualdad es, en verdad, independiente de las probabilidades p_i elegidas. Por ser F un fractal autosemejante, sabemos que $\dim_H(F) = \dim_{\text{box}}(F)$, y por lo anterior, $\dim_{\text{box}}(F) = D_0$. Luego, por el Teorema 4.2.2, $d_{\max} = \dim_{MF}(\Gamma^{a_N}) = D_0$.

QED.

Segundo caso

En la segunda situación, $p_i = 1/N$, para $i = 1, \dots, N$, queremos ver qué rango del espectro multifractal $(\alpha(\Omega), f(\alpha(\Omega)))$ está cubierto. Es decir, hallar, si es posible Ω_{\min} y Ω_{\max} , tal que $f(\alpha(\Omega_{\min})) = d_{\min}$ y $f(\alpha(\Omega_{\max})) = d_{\max}$, respectivamente.

Haciendo $\Omega = D_0$ ($D_0 = \dim_{\text{box}}(F) = \dim_H(F)$), se tiene, reemplazando en (5.25) que las frecuencias óptimas son

$$\lambda_i = \frac{a_i^{D_0}}{\sum_j a_j^{D_0}} = a_i^{D_0}, \quad i = 1, \dots, N,$$

y reemplazando en (5.27)

$$f(\alpha(D_0)) = D_0 - \frac{\log\left(\sum_j a_j^{D_0}\right)}{\sum_i \frac{a_i^{D_0}}{\sum_j a_j^{D_0}} \log a_i} = D_0,$$

es decir, para $\Omega = D_0$ se alcanza el valor máximo del espectro $f(\alpha)$ y el valor de α para el que se alcanza es, por (5.26)

$$\alpha(D_0) = \frac{\log \frac{1}{N}}{\sum_i a_i^{D_0} \log a_i}.$$

Por lo tanto, $f(\alpha(D_0)) = d_{\max} = \dim_{MF}(\Gamma^{a_N})$, luego $\Omega_{\max} = D_0$.

El valor de Ω_{\min} , claramente es el valor de Ω que satisface $f(\alpha(\Omega)) = d_{\min}$, es decir

$$\Omega_{\min} - \frac{\log\left(\sum_j a_j^{\Omega_{\min}}\right)}{\sum_i \frac{a_i^{\Omega_{\min}}}{\sum_j a_j^{\Omega_{\min}}} \log a_i} = d_{\min}.$$

Lamentablemente, este valor no puede despejarse explícitamente, pero sí podemos ver que existe. En efecto, supongamos, que hay m de los N contractores que son iguales al más chico ($1 \leq m < N$). Es decir, $0 < a_1 = \dots = a_m < a_{m+1} \leq \dots \leq a_N < 1$. Si $f(\Omega) := f(\alpha(\Omega))$, entonces se tiene

Lema 5.4.2

$$\lim_{\Omega \rightarrow -\infty} f(\Omega) = \frac{\log(1/m)}{\log a_1}.$$

Demostración: Si $\lambda_i(\Omega) := \frac{a_i^\Omega}{\sum_j a_j^\Omega} = \frac{1}{\sum_j (a_j/a_i)^\Omega}$, entonces

$$\lim_{\Omega \rightarrow -\infty} \lambda_i(\Omega) = \begin{cases} 1/m & i = 1, \dots, m, \\ 0 & i = m+1, \dots, N. \end{cases}$$

Luego,

$$\lim_{\Omega \rightarrow -\infty} \lambda_i(\Omega) \log(\lambda_i(\Omega)) = \begin{cases} 1/m \log(1/m) & i = 1, \dots, m, \\ 0 & i = m+1, \dots, N. \end{cases}$$

Por lo tanto, por (5.27)

$$\lim_{\Omega \rightarrow -\infty} f(\Omega) = \lim_{\Omega \rightarrow -\infty} \frac{\sum_i \lambda_i(\Omega) \log(\lambda_i(\Omega))}{\sum_i \lambda_i(\Omega) \log a_i} = \frac{\log(1/m)}{\log a_1}.$$

QED.

Como $f(\Omega)$ es continua y $f(D_0) = D_0 = d_{\max} > d_{\min}$, entonces, para ver que existe Ω_{\min} ($\Omega_{\min} < D_0$), basta ver que $\frac{\log(1/m)}{\log a_1} < d_{\min}$. Recordemos que la dimensión minimal de Mendès France, corresponde a a_1 , y es

$$d_{\min} = \dim_{MF}(\Gamma^{a_1}) = 1 + \frac{\log \sum a_i}{\log \frac{1}{a_1}} = 1 + \frac{\log L}{\log \frac{1}{a_1}}. \quad (5.29)$$

Pero, claramente

$$\begin{aligned} \frac{\log \frac{1}{m}}{\log a_1} &= \frac{\log m}{\log \frac{1}{a_1}} < \frac{\log \left(\frac{a_1 + \dots + a_m + a_{m+1} + \dots + a_N}{a_1} \right)}{\log \frac{1}{a_1}} = \\ &= \frac{\log \frac{L}{a_1}}{\log \frac{1}{a_1}} = 1 + \frac{\log L}{\log \frac{1}{a_1}} = d_{\min} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Análogamente, si m' es la cantidad de contractores iguales al mayor, es decir, $0 < a_1 \leq \dots \leq a_{N-m'} < a_{N-m'+1} = \dots = a_N < 1$, entonces

Corolario 5.4.3

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} f(\Omega) = \frac{\log(1/m')}{\log a_N}.$$

Observar que en este espectro, al ser las probabilidades iguales a $1/N$, los valores de $\alpha_{\min} = \alpha(\Omega_{-\infty})$ y $\alpha_{\max} = \alpha(\Omega_{+\infty})$ son, por la Observación (5.2.2)

$$\alpha_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} \frac{\log(1/N)}{\log a_i} = \frac{\log N}{\log(1/a_1)} \quad \text{y} \quad \alpha_{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\log(1/N)}{\log a_i} = \frac{\log N}{\log(1/a_N)},$$

luego,

$$f(\alpha_{\min}) = \frac{\log(1/m)}{\log a_1} \quad \text{y} \quad f(\alpha_{\max}) = \frac{\log(1/m')}{\log a_N}.$$

Trataremos de comparar Ω_{\min} con otros valores de Ω a los cuales se les puede hallar el $f(\alpha(\Omega))$ correspondiente.

Haciendo $\Omega=0$ se tiene, reemplazando en (5.25) que las frecuencias óptimas son

$$\lambda_i = \frac{a_i^0}{\sum_j a_j^0} = \frac{1}{N}, \quad i=1, \dots, N$$

y reemplazando en (5.27) y en (5.26)

$$\alpha(0) = \frac{\log \frac{1}{N}}{\sum_i \frac{1}{N} \log a_i},$$

y

$$f(\alpha(0)) = 0 - \frac{\log(\sum_j a_j^0)}{\sum_i \frac{a_i^0}{\sum_j a_j^0} \log a_i} = \frac{-\log N}{\sum_i \frac{1}{N} \log a_i}, \quad (5.30)$$

luego, $f(\alpha(0)) = \alpha(0)$, valor donde la curva $(\alpha, f(\alpha))$ es tangente a la recta $y = \alpha$, donde $f(\alpha) = D_1$ (ver Figura 5.3).

Haciendo $\Omega=1$ se tiene, reemplazando en (5.25), que las frecuencias óptimas son

$$\lambda_i = \frac{a_i}{\sum_j a_j} = \frac{a_i}{L}, \quad i=1, \dots, N,$$

y reemplazando en (5.27) y en (5.26)

$$\alpha(1) = \frac{\log \frac{1}{N}}{\sum_i \frac{a_i}{L} \log a_i},$$

y

$$f(\alpha(1)) = 1 - \frac{\log(\sum_j a_j)}{\sum_i \frac{a_i}{\sum_j a_j} \log a_i} = 1 + \frac{\log L}{\sum_i \frac{a_i}{L} \log \frac{1}{a_i}}, \quad (5.31)$$

luego, $\tilde{D} = f(\alpha(1)) > 1$.

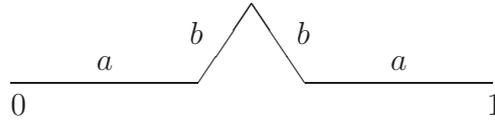
Podemos afirmar que $d_{\min} \leq \tilde{D}$, es decir, $\Omega_{\min} \leq 1$.

En efecto, suponiendo sin pérdida de generalidad, que $a_1 \leq \dots \leq a_N < 1$. Como $1/a_i \leq 1/a_1$ para todo $i=1, \dots, N$, entonces

$$\sum_i \frac{a_i}{L} \log \frac{1}{a_i} \leq \sum_i \frac{a_i}{L} \log \frac{1}{a_1} = \log \frac{1}{a_1} \sum_i \frac{a_i}{L} = \log \frac{1}{a_1},$$

luego, la desigualdad se sigue comparando (5.29) con (5.31).

Lo que no es cierto, es que $D_1 \leq d_{\min}$ siempre. Esto depende de los valores de los a_i , y lo mostraremos con un ejemplo sencillo de dos contractores, cuya generatriz es



Aquí, $N=4$, con $a_1=a_4=a$ y $a_2=a_3=b$. $\sum_i a_i = L = 2a + 2b$ y $2a + b = 1$. Tomando $b=a^p$ con $p \geq 1$ ($1/2 \leq a \leq 1/3$), podemos elegir p para tener dos situaciones distintas:

- 1) Para $p = 2$, entonces $2a + b = 2a + a^2 = 1$, entonces $a = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41421$, $b = a^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,17157$. Se tiene

$$d_{\min} = 1 + \frac{\log L}{\log \frac{1}{b}} = 1 + \frac{\log(2a + 2a^2)}{2 \log \frac{1}{a}} \approx 1,08983.$$

y reemplazando en (5.30)

$$D_1 = f(\alpha(0)) = \frac{-\log 4}{\frac{2}{4} \log a + \frac{2}{4} \log b} = \frac{-\log 4}{\frac{5}{4} \log a} \approx 1,048585.$$

Por lo tanto, en este caso se tiene $D_1 < d_{\min}$.

- 2) Para $p = 1,5$, entonces $2a + b = 2a + a^{1,5} = 1$, entonces $a \approx 0,382$, $b \approx 0,236$. Se tiene que

$$d_{\min} \approx 1,147 \quad \text{y} \quad D_1 \approx 1,152.$$

Por lo tanto, en este caso se tiene $d_{\min} < D_1$.

5.5. Interpretación del parámetro Ω

En el caso en que las particiones del conjunto soporte son iguales (cajas de igual tamaño), las relaciones entre $f_C(\alpha)$ y α por un lado, y D_q y q por otro, via las ecuaciones de la transformada de Legendre ya citada, son sugestivas de la relación entre los conceptos de energía libre y entropía en termodinámica ([Ott 93],[PJS 92]). Según ésta, $\alpha(q)$ es la energía interna (por unidad de volumen), $f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$

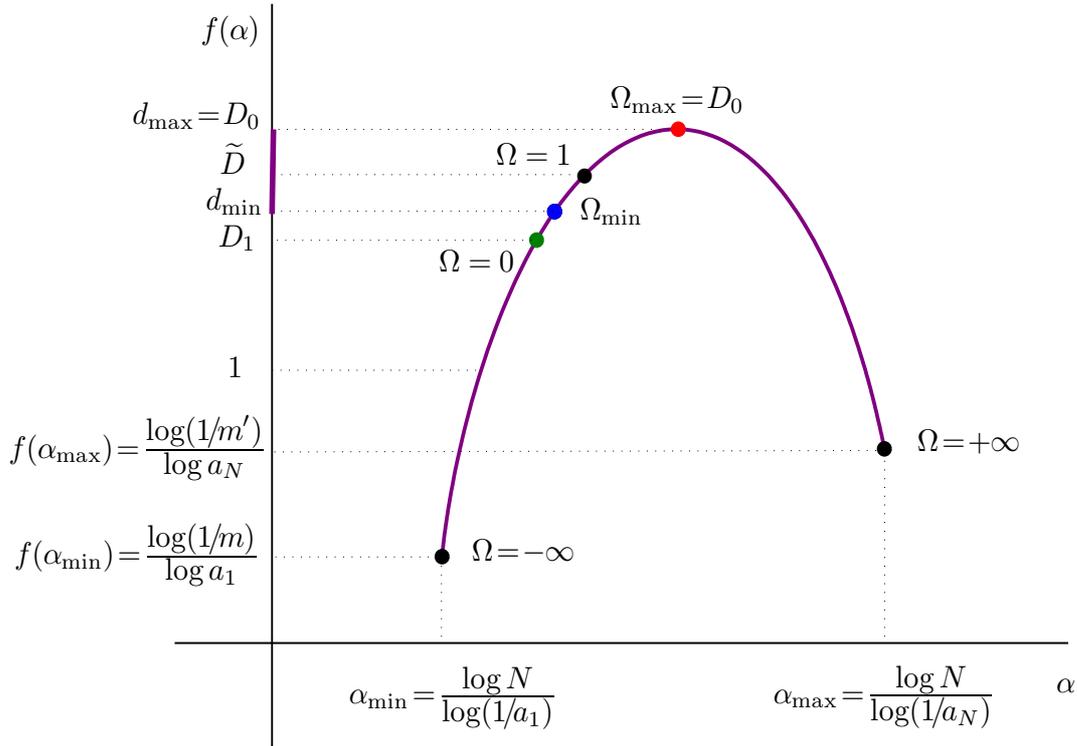


Figura 5.4: Gráfico esquemático de un espectro $(\alpha(\Omega), f(\alpha(\Omega)))$ con sus valores significativos ($d_{\min} > D_1$ en este ejemplo). El espectro de Mendès France cubre el arco que une el punto azul ($\dim_{MF}(\Gamma^{a_1})$) con el rojo ($\dim_{MF}(\Gamma^{a_N})$).

la entropía, $\tau(q)/q$ (emparentada, D_q) es la energía libre, y $1/q$ la temperatura (en unidades de energía).

Para las SSM de la sección anterior, cuando las particiones son iguales ($a_i = a$, $i = 1, \dots, N$), y las probabilidades o pesos p_i distintos (i.e., no todos iguales); como $\Lambda = q = f'(\alpha)$, entonces, el parámetro Λ se puede interpretar como la inversa de la temperatura y $\Omega(\Lambda)$ cumple las mismas propiedades que $-\tau(q)$. La intención, ahora, es relacionar el espectro $f(\alpha(\Omega))$, correspondiente al proceso autosemejante que asigna iguales probabilidades en particiones distintas, con el espectro de alguna otra SSM, asociada a un proceso de partición como el anterior, de manera de poder darle alguna interpretación al parámetro Ω en el nuevo espectro.

5.5.1. Fórmula de inversión

Riedi y Mandelbrot [RM 97], plantaron una “fórmula de inversión”, que relaciona el espectro $(\alpha, f(\alpha))$ de una medida μ soportada en el intervalo $[0, 1]$, con el espectro $(\alpha^*, f^*(\alpha^*))$, de otra medida “inversa” μ^* , también definida en el $[0, 1]$, estableciendo que

$$f^*(\alpha^*) = \alpha^* f\left(\frac{1}{\alpha^*}\right) \quad (5.32)$$

Sea una SSM, $\mu = (p_1, \dots, p_N)$ en el $[0, 1]$, construida mediante un IFS $\{S_1, \dots, S_N\}$, de razones a_1, \dots, a_N , que cumple con la OSC. Supongamos que $\text{sop}(\mu) = [0, 1]$, que μ es continua (i.e., $p_i > 0$ para todo i), y que $[0, 1] = \cup_i^N S_i([0, 1])$. En este caso, la medida inversa μ^* sobre $[0, 1]$, se obtiene simplemente, intercambiando contractores a_i con probabilidades p_i , lo que es posible ya que $\sum_i a_i = 1$. En otras palabras, μ^* es una SSM sobre $[0, 1]$ con vector de probabilidades $(p_1^*, \dots, p_N^*) = (a_1, \dots, a_N)$, construida mediante un IFS $\{S_1^*, \dots, S_N^*\}$, de razones de contracción $\{a_1^*, \dots, a_N^*\} = \{p_1, \dots, p_N\}$, tal que S_i^* tiene la misma orientación que S_i , y $S_i^*([0, 1]) = [p_0 + \dots + p_{i-1}, p_0 + \dots + p_i]$. En efecto, es muy fácil ver que se cumple la fórmula (5.32), usando las expresiones (5.13) y (5.15)

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sum_i \lambda_i \log p_i}{\sum_i \lambda_i \log a_i} = \frac{1}{\frac{\sum_i \lambda_i \log a_i}{\sum_i \lambda_i \log p_i}} = \frac{1}{\frac{\sum_i \lambda_i \log p_i^*}{\sum_i \lambda_i \log a_i^*}} = \frac{1}{\alpha^*(\lambda)},$$

y

$$f(\alpha(\lambda)) = \frac{\sum_i \lambda_i \log \lambda_i}{\sum_i \lambda_i \log a_i} = \frac{\sum_i \lambda_i \log \lambda_i}{\sum_i \lambda_i \log a_i} \frac{\sum_i \lambda_i \log p_i}{\sum_i \lambda_i \log a_i^*} = f^*(\alpha^*(\lambda))\alpha(\lambda),$$

luego

$$f\left(\frac{1}{\alpha^*(\lambda)}\right) = f^*(\alpha^*(\lambda))\frac{1}{\alpha^*(\lambda)}.$$

Así, $f^*(\alpha^*) : [\alpha_{\min}^*, \alpha_{\max}^*] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\alpha_{\min}^* = 1/\alpha_{\max}$ y $\alpha_{\max}^* = 1/\alpha_{\min}$.

Además, si μ es una SSM como la anterior, se sabe que la función $\tau_\mu(q)$ satisface la ecuación

$$\sum_i p_i^q a_i^{-\tau(q)} = 1, \quad (5.33)$$

luego, la función $\tau^*(q^*)$ verifica la ecuación

$$\sum_i p_i^{q^*} a_i^{*\tau^*(q^*)} = \sum_i a_i^{q^*} p_i^{-\tau^*(q^*)} = 1. \quad (5.34)$$

Como (5.33) establece una relación uno a uno entre τ y q , de (5.34) se obtiene fácilmente que

$$\tau^* = -q \quad \text{y} \quad q^* = -\tau.$$

Un caso particular de μ , es cuando los a_i son todos iguales (partición de igual tamaño), con lo que el $[0, 1]$ queda dividido en N partes iguales ($a_i = 1/N$ para $i = 1, \dots, N$); siendo su “caso inverso” (invirtiendo los contractores con las probabilidades), una μ^* con las probabilidades todas iguales, $p_i^* = 1/N$, y los contractores no todos iguales. A su vez, el “caso inverso” de este último, es el de las particiones iguales, en donde existe la interpretación termodinámica de q y $\tau(q)/q$ como la temperatura inversa y la energía libre, como dijimos antes (además de α como energía interna y $f(\alpha)$ como entropía). La fórmula de inversión en este caso, al relacionar τ y q con τ^* y q^* , nos permite una interpretación termodinámica de τ^* y q^* en el espectro inverso.

5.5.2. Fórmula de inversión para curvas $F \in \mathcal{F}_H$

Para las curvas fractales $F \in \mathcal{F}_H$, la situación es distinta, porque ya no se pueden intercambiar los roles entre pesos y contractores, pues ahora $\sum_i a_i > 1$ (y $\sum_i p_i = 1$). Esto es, tomemos una poligonal P , generatriz de F , como en la Sección 2.3.2. P une $N+1$ puntos en \mathbb{R}^n , A_1, A_2, \dots, A_{N+1} que son sus vértices ($\text{dist}(A_i, A_{i+1}) < \text{dist}(A_1, A_N)$, $i = 1, \dots, N$). Luego, el IFS, $\{S_i\}$ está formado por similitudes cuyas razones de contracción cumplen $a_i = \text{dist}(A_i, A_{i+1}) / \text{dist}(A_1, A_N)$, para todo $i = 1, \dots, N$. La longitud de P es $\sum_i a_i$ que es mayor que 1. Si simplemente invirtiéramos pesos con contractores, esto sería un proceso de partición en segmentos de longitud $a_i^* = p_i$, y como $\sum_i a_i^* = 1$, se correspondería con una partición del intervalo $[0, 1]$; pero el peso o masa asignado a cada segmento sería $p_i^* = a_i$ que, replicados de manera autosemejante, representaría una medida μ^* infinita en $[0, 1]$. Es más, la concentración α^* es infinita en cada intervalo de cada iteración.

Para salvar este problema, definimos μ^* una SSM de probabilidad en $[0, 1]$, de la siguiente manera

$$\mu^*(\cdot) = \sum_{i=1}^N p_i^* \mu^*(S_i^{*-1}(\cdot)) ,$$

con $S_i^*([0, 1]) = [p_0 + \dots + p_{i-1}, p_0 + \dots + p_i]$, (i.e. $a_i^* = p_i$). Una forma natural es elegir el vector de probabilidades como $(p_1^*, \dots, p_N^*) = (a_1^{D_0}, \dots, a_N^{D_0})$, donde $D_0 = \dim_H(F)$. Claramente, se verifica ahora que $\sum_i p_i^* = \sum_i a_i^{D_0} = 1$.

La expresión para las concentraciones α^* de μ^* en términos de frecuencias sería, según (5.13)

$$\alpha^* = \frac{\sum_i \lambda_i \log p_i^*}{\sum_i \lambda_i \log a_i^*} = \frac{\sum_i \lambda_i \log a_i^{D_0}}{\sum_i \lambda_i \log p_i} = \frac{D_0}{\frac{\sum_i \lambda_i \log p_i}{\sum_i \lambda_i \log a_i}} = \frac{D_0}{\alpha} , \quad (5.35)$$

donde $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$.

Por un lado, las frecuencias óptimas λ_i^* verifican, por (5.22)

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &= a_i^{*\Omega^*} p_i^{*\Lambda^*} = a_i^{*f^*(\alpha^*) - \Lambda^* \alpha^*} p_i^{*\Lambda^*} \\ &= p_i^{\Omega^*} a_i^{D_0 \Lambda^*} = p_i^{f^*(\alpha^*) - \Lambda^* \alpha^*} a_i^{D_0 \Lambda^*} . \end{aligned}$$

Como $\sum_i \lambda_i^* = 1$, se tiene

$$\sum_i p_i^{\Omega^*} a_i^{D_0 \Lambda^*} = \sum_i p_i^{f^*(\alpha^*) - \Lambda^* \alpha^*} a_i^{D_0 \Lambda^*} = 1 . \quad (5.36)$$

Por otro lado, las frecuencias óptimas λ_i (para $f(\alpha)$), verifican (5.21). Esta ecuación implica una relación uno a uno entre Λ y Ω , por lo tanto, de (5.21) y (5.36), se tiene

$$\Lambda = \Omega^* \quad \text{y} \quad \Omega = D_0 \Lambda^* , \quad (5.37)$$

o, también

$$\Lambda = f^*(\alpha^*) - \Lambda^* \alpha^* \quad \text{y} \quad D_0 \Lambda^* = f(\alpha) - \Lambda \alpha . \quad (5.38)$$

Luego, usaremos estas ecuaciones para encontrar una “fórmula de inversión” que generalice a (5.32).

Usando la segunda igualdad de (5.38)

$$f(\alpha) = D_0 \Lambda^* + \Lambda \alpha = \alpha \left(\frac{D_0}{\alpha} \Lambda^* + \Lambda \right) ,$$

ahora, usando (5.35), y la primera igualdad de (5.38)

$$f(\alpha) = \alpha \left(\alpha^* \Lambda^* + f^*(\alpha^*) - \Lambda^* \alpha^* \right) = \alpha f^*(\alpha^*) ,$$

de nuevo usando (5.35)

$$f\left(\frac{D_0}{\alpha^*}\right) = \frac{D_0}{\alpha^*} f^*(\alpha^*) ,$$

luego

$$f^*(\alpha^*) = \frac{\alpha^*}{D_0} f\left(\frac{D_0}{\alpha^*}\right) . \quad (5.39)$$

Observar que reemplazando D_0 por 1, como es el caso de Riedi y Mandelbrot para medidas SSM continuas y de soporte completo $[0, 1]$, se recupera la fórmula de inversión (5.32). El factor $D_0 = \dim_H(F) > 1$, parece cumplir el rol de un factor de reescalamiento, para que la medida μ^* no “explote” al invertirse pesos con contractores.

De esta manera, volviendo a nuestro caso, donde los contractores a_i sumaban $L > 1$, y las probabilidades asignadas a cada contractor (o a cada segmento de la generatriz de la curva F) eran iguales, vemos que, invirtiendo como explicamos, tenemos ahora, una partición del $[0, 1]$ en N segmentos iguales, cada uno con probabilidad o masa $a_i^{D_0}$. Como aquí las particiones son iguales, el parámetro correspondiente a este nuevo sistema, Λ^* (que es el parámetro del espectro $(\alpha^*, f^*(\alpha^*))$), se interpreta como la temperatura inversa del sistema ($\Lambda^* = q^* = f^{*'}(\alpha^*)$). Luego, el parámetro Ω de nuestro sistema original, admite también una interpretación termodinámica pero en el sistema “invertido”, gracias a la relación (5.37). Esto es, $\Omega = D_0 q^*$ también se puede interpretar como una temperatura inversa, por una constante positiva que es, a su vez, un factor de renormalización.

La fórmula (5.39), es una composición, de una reducción de escala en ambos ejes por un factor igual D_0 , con la fórmula de inversión (5.32). Por (5.35), es fácil ver que

$$\alpha_{\min}^* = \frac{D_0}{\alpha_{\max}} \quad \text{y} \quad \alpha_{\max}^* = \frac{D_0}{\alpha_{\min}} .$$

Cuando nuestro parámetro Ω recorre $\Omega_{\min} \rightarrow D_0$, entonces, $q^* = \Omega/D_0$ recorre $\Omega_{\min}/D_0 \rightarrow 1$, (Figura 5.5)

5.6. Conclusiones

En este capítulo hemos continuizado el espectro discreto de N dimensiones de Mendès France asociado a una curva fractal F , obtenido en el capítulo anterior. Esto nos

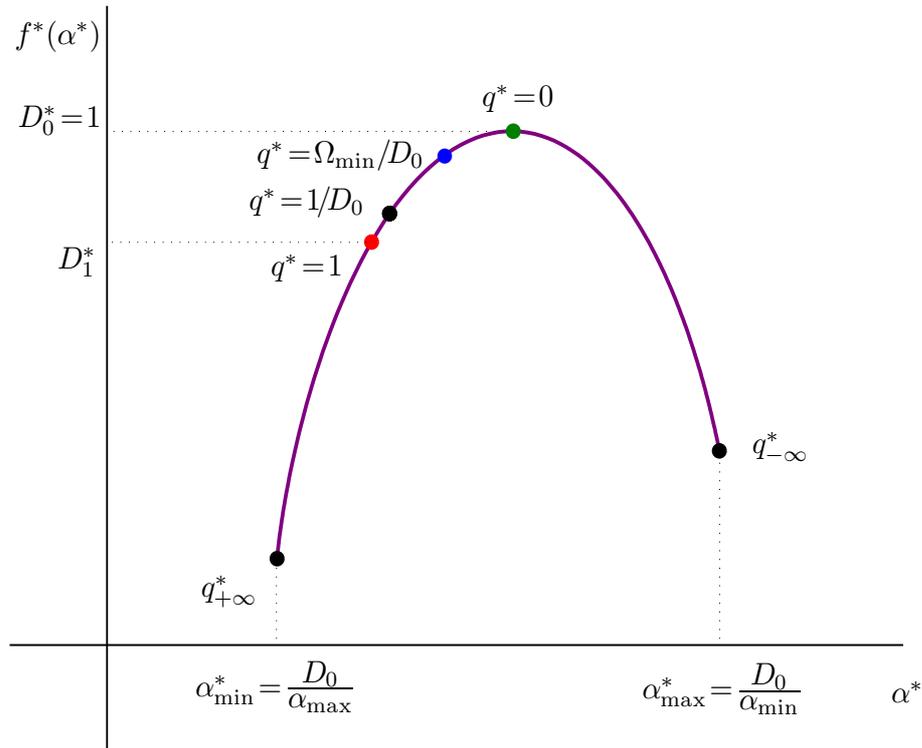


Figura 5.5: Gráfico esquemático del espectro invertido $(\alpha^*, f^*(\alpha^*))$, de la Figura 5.4. Aquí q^* se puede interpretar como las pendientes de las rectas tangentes al gráfico ($q^* = f^*(\alpha^*)$).

permitió investigar las posibles relaciones entre este espectro, $[d_{\min}, d_{\max}]$, y otros espectros multifractales, como el de las medidas $\mu = (p_1, \dots, p_N)$ de probabilidad autosemejantes con soporte en F . Para ello, obtuvimos, para el caso general, una expresión del espectro $(\alpha, f(\alpha))$ en términos de un parámetro relacionado con las frecuencias con que los pesos se distribuyen en las sucesivas particiones. Esta expresión se puede calcular explícitamente, para los casos en que, o las probabilidades son iguales, o los contractores son iguales.

En el caso de considerar las probabilidades, como los contractores a_i normalizados por la longitud de la generatriz de F , $L = \sum_i a_i$, es decir, $(p_i = a_i/L)$, obtenemos fácilmente que el espectro de Mendès France coincide con el espectro de dimensiones generalizadas de Rényi, D_q , para $q \geq 0$, esto es, $[d_{\min}, d_{\max}] = [D_{+\infty}, D_0]$.

En el caso en que todas las probabilidades son iguales, $p_i = 1/N$ $i = 1, \dots, N$, las frecuencias óptimas se pueden despejar en función del parámetro Ω del espectro y, como dijimos, obtener una fórmula para $(\alpha(\Omega), f(\Omega))$. En esta situación, $[d_{\min}, d_{\max}] = [f(\Omega_{\min}), f(\Omega_{\max})]$, donde $\Omega_{\max} = D_0 = \dim_H(F)$, y $f(\Omega_{\max}) = D_0 = \dim_H(F)$ (el parámetro máximo coincide con la dimensión máxima); Ω_{\min} no se puede despejar explícitamente, pero se puede decir que siempre está por debajo de 1, y por lo tanto, $d_{\min} < f(\Omega = 1) = \tilde{D}$. El valor de $\Omega = 1$ es significativo, porque se mantiene indepen-

dientemente de la dimensión del espacio ambiente. Esto es, $D_0 = \dim_H(F)$ bien puede llegar a ser n ($F \in \mathbb{R}^n$) (y n tan grande como uno quiera...). Así, el rango del espectro “mendesfraciano” abarca siempre el tramo parametrizado por $[\Omega = 1, \Omega = D_0]$, es decir, $[d_{\min}, d_{\max}] \supset [\tilde{D}, D_0]$.

Además, este último espectro $f_\mu(\alpha)$ lo “invertimos” poniéndolo en relación con un espectro inverso $f_{\mu^*}(\alpha^*)$ correspondiente a una SSM μ^* soportada en el $[0, 1]$, que nos permitió interpretar termodinámicamente, el parámetro Ω del espectro anterior, como la temperatura inversa del el sistema nuevo, por un factor de reescalamiento, que es justamente, la dimensión de Hausdorff de la curva F .

5.A. Maximalidad de $\bar{\lambda}$

Para ver que las frecuencias críticas $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, N$, halladas en (5.22) son efectivamente máximos de $h(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, usaremos un resultado clásico del análisis en varias variables, como es el criterio de la segunda derivada, en términos de lo que se llama el *hessiano limitado*, para extremos relativos ([MT 91]):

Teorema 5.A.1 (Criterio de la segunda derivada para extremos restringidos). *Sean $h: U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha: U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase \mathcal{C}^2 . Sean $\bar{\lambda} \in U$, $\alpha(\bar{\lambda}) = \alpha_0$ y S el conjunto de nivel α_0 de α . Supongamos que $\nabla\alpha(\bar{\lambda}) \neq 0$ y que existe un número real Λ tal que $\nabla h(\bar{\lambda}) = \Lambda \nabla\alpha(\bar{\lambda})$. Sea la función auxiliar $g(\lambda) = h(\lambda) - \Lambda\alpha(\lambda)$ y el determinante hessiano limitado*

$$|H_{N+1}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_1} & -\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_2} & \cdots & -\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_N} \\ -\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_1\partial\lambda_N} \\ -\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_2\partial\lambda_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_N} & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_1\partial\lambda_N} & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_2\partial\lambda_N} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda_N^2} \end{vmatrix} \quad (5.40)$$

evaluado en $\bar{\lambda}$. Entonces

- (i) si los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3 evaluadas en $\bar{\lambda}$ son todos negativos, $\bar{\lambda}$ es un mínimo local de h restringida a S ,
- (ii) si comienzan con un subdeterminante $|H_3| > 0$ y se alternan los signos ($|H_4| < 0$, $|H_5| > 0, \dots$, etc.), $\bar{\lambda}$ es un máximo local de h restringida a S ,
- (iii) si no son todos cero y no siguen los patrones anteriores, el criterio no concluye.

Proposición 5.A.2 *El vector $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N)$ hallado en (5.22) es un máximo de $h(\lambda)$ (5.15) relativo a $\alpha(\lambda) = \alpha_0$, donde $\alpha(\lambda)$ es la función dada por la ecuación (5.13).*

Demostración: Claramente, las funciones $h(\lambda)$ y $\alpha(\lambda)$ son de clase \mathcal{C}^2 en $U \subset \mathbb{R}^N$, para

$$U = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, N \right\},$$

y $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N)$ verifica $\bar{\lambda} \in U$. También vimos que $\nabla\alpha(\bar{\lambda}) \neq 0$, y que para $\Lambda = f'(\alpha_0)$ (5.24)

$$\nabla h(\bar{\lambda}) = \Lambda \nabla\alpha(\bar{\lambda}). \quad (5.41)$$

Derivadas parciales de $\alpha(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \alpha(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\sum_j \lambda_j \log p_j}{\sum_j \lambda_j \log a_j} \right) = \frac{\log p_i \sum_j \lambda_j \log a_j - \log a_i \sum_j \lambda_j \log p_j}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)^2} = \\
&= \frac{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)^2} \left(\log p_i - \log a_i \frac{\sum_j \lambda_j \log p_j}{\sum_j \lambda_j \log a_j} \right) = \\
&= \frac{1}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)} \left(\log p_i - \log a_i \alpha(\lambda) \right). \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i}(\bar{\lambda}) = \frac{\log p_i - \log a_i \alpha_0}{\sum_j \bar{\lambda}_j \log a_j}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i} \alpha(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left[\frac{1}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)} \left(\log p_i - \log a_i \alpha(\lambda) \right) \right] = \\
&= \frac{-\log a_k}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)^2} \left(\log p_i - \log a_i \alpha(\lambda) \right) + \frac{-\log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_k},
\end{aligned}$$

usando la expresión anterior (5.42), se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i} \alpha(\lambda) = -\frac{\log a_k}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i} - \frac{\log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_k}. \tag{5.43}$$

En particular, para $k=i$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \alpha(\lambda) = -\frac{2 \log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i}. \tag{5.44}$$

Derivadas parciales de $h(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_i} h(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\sum_j \lambda_j \log \lambda_j}{\sum_j \lambda_j \log a_j} \right) = \frac{(\log \lambda_i + 1) \left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right) - \log a_i \sum_j \lambda_j \log \lambda_j}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)^2} = \\
&= \frac{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)^2} \left((\log \lambda_i + 1) - \log a_i \frac{\sum_j \lambda_j \log \lambda_j}{\sum_j \lambda_j \log a_j} \right) = \\
&= \frac{1}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j \right)} \left((\log \lambda_i + 1) - \log a_i h(\lambda) \right). \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Para $k \neq i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i} h(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left[\frac{1}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \left((\log \lambda_i + 1) - \log a_i h(\lambda) \right) \right] = \\ &= \frac{-\log a_k}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)^2} \left((\log \lambda_i + 1) - \log a_i h(\lambda) \right) + \frac{-\log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \frac{\partial h}{\partial \lambda_k}, \end{aligned}$$

usando la expresión anterior (5.45), se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i} h(\lambda) = -\frac{\log a_k}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \frac{\partial h}{\partial \lambda_i} - \frac{\log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \frac{\partial h}{\partial \lambda_k}. \quad (5.46)$$

Para $k = i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} h(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\frac{1}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \left((\log \lambda_i + 1) - \log a_i h(\lambda) \right) \right] = \\ &= \frac{-\log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)^2} \left((\log \lambda_i + 1) - \log a_i h(\lambda) \right) + \frac{1}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \log a_i \frac{\partial h}{\partial \lambda_i} \right), \end{aligned}$$

usando otra vez (5.45)

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} h(\lambda) = \frac{1/\lambda_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} - \frac{2 \log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \frac{\partial h}{\partial \lambda_i}. \quad (5.47)$$

Derivadas parciales de orden 2 de $g(\lambda)$

Para $k \neq i$, $g(\lambda) = h(\lambda) - \Lambda \alpha(\lambda)$, luego, por (5.43) y (5.46)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i} &= \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i} - \Lambda \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i} = \\ &= -\frac{\log a_k}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \left[\frac{\partial h}{\partial \lambda_i} - \Lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i} \right] - \frac{\log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \left[\frac{\partial h}{\partial \lambda_k} - \Lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_k} \right], \end{aligned}$$

entonces, por (5.41)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i}(\bar{\lambda}) = 0. \quad (5.48)$$

Para $k = i$, por (5.44) y (5.47)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} g(\lambda) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} h(\lambda) - \Lambda \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \alpha(\lambda) = \\ &= \frac{1/\lambda_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} - \frac{2 \log a_i}{\left(\sum_j \lambda_j \log a_j\right)} \left[\frac{\partial h}{\partial \lambda_i} - \Lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i} \right], \end{aligned}$$

entonces, por (5.41)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_i^2}(\bar{\lambda}) = \frac{1/\bar{\lambda}_i}{\sum_j \bar{\lambda}_j \log a_j} < 0. \quad (5.49)$$

Ahora, si llamamos $A_i = \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i}(\bar{\lambda})$ y $B_i = \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_i^2}(\bar{\lambda})$, tenemos que el hessiano limitado (5.40) evaluado en $\bar{\lambda}$, es de la forma

$$|H_{N+1}| = \begin{vmatrix} 0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_N \\ -A_1 & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -A_2 & 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_N & 0 & 0 & \cdots & B_N \end{vmatrix} \quad (5.50)$$

Observar que, como $\nabla \alpha(\bar{\lambda}) \neq 0$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A_1 \neq 0$. Entonces

Para $n=2$,

$$\begin{aligned} |H_3| &= \begin{vmatrix} 0 & -A_1 & -A_2 \\ -A_1 & B_1 & 0 \\ -A_2 & 0 & B_2 \end{vmatrix} = B_2 \begin{vmatrix} 0 & -A_1 \\ -A_1 & B_1 \end{vmatrix} + (-A_2) \begin{vmatrix} -A_1 & B_1 \\ -A_2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -B_2 A_1^2 - B_1 A_2^2 = B_2 |H_2| - B_1 A_2^2, \end{aligned}$$

luego, por (5.49)

$$|H_3| > 0.$$

Se puede ver fácilmente que, para $n=3, \dots, N$ se verifica

$$\begin{aligned} |H_{n+1}| &= B_n |H_n| + (-1)^{n-1} A_n^2 \begin{vmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= B_n |H_n| + (-1)^{n-1} A_n^2 \prod_{i=1}^{n-1} B_i, \end{aligned}$$

y por recurrencia que

$$\text{sgn}(|H_n|) = (-1)^{n+1}.$$

Por lo tanto, por el ítem (ii) del Teorema (5.A.1), el vector $\bar{\lambda}$ es un máximo de $h(\lambda)$ condicionada a $\alpha(\lambda) = \alpha_0$.

QED.

Parte II

Una Aplicación a Sistemas tipo Hénon

Capítulo 6

Introducción a la Segunda Parte

...Nothing in Nature is random... A thing appears random only through the incompleteness of our knowledge.

Spinoza

6.1. Breve marco referencial

Sir Isaac Newton trajo al mundo la idea de modelar el movimiento de los sistemas físicos con ecuaciones, y sus métodos son hoy usados para modelar cambios y movimientos en todas las áreas de la ciencia. Las generaciones siguientes de científicos, extendieron el método de usar ecuaciones diferenciales para describir cómo evolucionan los sistemas físicos. Pero el método tenía una limitación, ya que muy a menudo era imposible escribir soluciones con expresiones algebraicas relativamente sencillas. Cuando las soluciones podían ser encontradas, éstas describían comportamientos muy regulares, como estados de equilibrio, debidos, por ejemplo, a alguna pérdida de energía por fricción; o estados oscilatorios, que podían ser periódicos o cuasiperiódicos, éstos últimos, por ejemplo, en sistemas con períodos múltiples inconmensurables. Pero alrededor de 1975, muchos científicos en todo el mundo, comenzaron a darse cuenta de la existencia de un tercer tipo de movimiento, que hoy conocemos con el nombre de “caótico”. Este nuevo movimiento es errático, pero no simplemente cuasiperiódico debido a un número grande de períodos, ni tampoco necesariamente debido a, por ejemplo, un número grande de partículas interactuantes. Más aun, este comportamiento es frecuente en muchos sistemas que son bien simples. Sin embargo, una pequeña cantidad de físicos y matemáticos ya estaban familiarizados para entonces con su existencia: James C. Maxwell, que estudió el movimiento de las moléculas de gas alrededor de 1860, sabía que un sistema, aún siendo compuesto por dos partículas de gas en un recipiente, nunca tendría un movimiento periódico o cuasiperiódico, y que el comportamiento a largo plazo sería, para todo fin práctico, impredecible. También sabía que pequeños cambios en los movimientos iniciales de las partículas, resultarían en inmensos cambios en las trayectorias de las moléculas. Henri Poincaré, en 1890, estudió un sistema solar altamente simplificado, de tres cuerpos, y concluyó que sus movimientos eran, a veces, increíblemente complicados. Sus técnicas fueron aplicadas

a una amplia variedad de sistemas físicos. Importantes contribuciones fueron hechas, posteriormente, por Birkhoff, Cartwright y Littlewood, Levinson, Kolmogorov y sus estudiantes, entre otros. En los años 60s había grupos de matemáticos, particularmente en Berkeley y Moscú, procurando entender esta tercera clase de comportamiento que llamamos caos. Pero recién con el avance de la informática y la aparición de las computadoras personales, con pantallas capaces de mostrar gráficos, fue que los científicos e ingenieros estuvieron en condiciones de “ver” que ecuaciones importantes de sus propias especialidades tenían tales soluciones, por lo menos para algún rango de sus parámetros.

Hoy en día, los científicos saben que el comportamiento caótico puede ser observado tanto en experimentos como en modelos computacionales, en todas las áreas de la ciencia. El requerimiento clave es que el sistema involucre alguna *nolinealidad*. Comportamientos anómalos, que antes eran atribuidos a errores o a la presencia de “ruido”, ahora pueden ser interpretados en nuevos términos; términos que forman un conjunto de principios unificadores que atraviesan las fronteras de varias disciplinas, y que se conoce como Teoría de los Sistemas Dinámicos. Así, uno de los objetivos de esta teoría es captar propiedades globales de distintos fenómenos, para describirlos mediante ecuaciones sencillas y poder modelar sintéticamente un problema.

Si bien los conceptos de escalamiento ya habían sido aplicados a una clase relativamente pequeña de problemas (transiciones de fase y fenómenos críticos, escalamiento en polímeros físicos, etc.), B. Mandelbrot fue el primero en hacer incapié en el contenido geométrico intuitivo de las ideas de ecalamiento. Después de la publicación de sus libros [Man 77] y [Man 82], siguieron múltiples aplicaciones del concepto de fractalidad; y los fractales se volvieron útiles en la mayoría de las disciplinas. Una de estas disciplinas es la Teoría de los Sistemas Dinámicos, donde son muchas las conexiones entre el caos determinístico y los fractales.

La segunda parte de esta tesis, se inscribe dentro de la temática que estudia los atractores extraños en sistemas dinámicos. Para hablar de atractores extraños, tenemos que considerar una clase particular de ellos: los sistemas dinámicos disipativos, es decir, sistemas con alguna suerte de fricción. La característica principal de estos sistemas es la pérdida de energía (por ejemplo, el péndulo forzado) [ASY 97], [Dev 87], [GH 83], [Ott 93], [PJS 92], [Str 94]. Los atractores extraños son aquellos modelos que caracterizan el estado final de los sistemas disipativos que son altamente complejos y muestran todos los signos del caos. Estos atractores son un punto donde el caos y los fractales se encuentran: como modelos geométricos los atractores son conjuntos fractales (de ahí el término “extraño”) y como objetos dinámicos son conjuntos caóticos. En las últimas décadas se ha puesto mucho interés en el estudio teórico y experimental de los atractores extraños, su clasificación, sus propiedades cuantitativas, su reconstrucción a partir de datos experimentales, etc.; pero el entendimiento matemático de los mismos está aun en una etapa incipiente y constituye un gran desafío. A través del estudio de la metamorfosis de los atractores extraños se espera poder comprender fenómenos de interés, como la turbulencia (uno de los grandes problemas no resueltos en la física teórica); o, dentro de la Ingeniería Química, reacciones cuyo comportamiento tiene una dependencia caótica respecto al tiempo, entre

otros.

Como hemos dicho, el comportamiento caótico de las soluciones de sistemas determinísticos es actualmente considerado como un aspecto inherente a muchos sistemas no lineales. Edward Lorenz (meteorólogo del MIT) [Lor 63] propuso en 1963 un sistema finito de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en tres dimensiones, relativamente simples (cuadráticas), y por ende determinístico, diseñado para representar un flujo hidrodinámico disipativo. El sistema de Lorenz es el modelo de convección térmica, el cual incluye no solamente una descripción del movimiento de algunos fluidos viscosos, como por ejemplo la atmósfera, sino también, la información sobre la distribución de calor (fuerza actuante de la convección térmica) [BL 90]. Michel Hénon (astrónomo) propuso en 1975 un sistema bidimensional (o modelo de mapa de Poincaré) para estudiar el sistema tridimensional de Lorenz [Hen 76], [HeP 76], con el propósito de aplicarlo a la modelización de la perturbación sobre asteroides.

La familia de mapas bidimensionales, dependiente de dos parámetros μ y $b \in \mathbb{R}$:

$$H_{\mu,b}(x, y) = (\mu - x^2 + by; x) \quad (6.1)$$

llamada la *familia de Hénon*, es un sistema algebraicamente simple con un comportamiento dinámico muy complejo, y ha recibido considerable atención, tanto desde un punto de vista teórico [LV 03], [BC 91], como experimental [AS 88], [AS 93], [GOY 87], [RAS 99], [TS 00] para citar unos pocos. En efecto, esta familia posee los principales ingredientes que permiten analizar muchos aspectos encontrados en sistemas reales, para los cuales los cálculos son mucho más complicados. En esta familia podemos encontrar estructuras y fenómenos que se estudian en los sistemas dinámicos, a saber: conjuntos hiperbólicos, bifurcaciones, atractores extraños, variedades invariantes, etc. Más aún, el *mapa Logístico* o mapa cuadrático (unidimensional) conocido por su aplicación a la descripción de fenómenos relacionados con dinámicas de crecimiento de poblaciones, está incluido dentro de la dinámica del mapa de Hénon. De todo esto se concluye la relevancia de su estudio.

Es importante destacar que estos resultados son de tipo computacional. Los avances teóricos para “demostrar” la existencia de estos conjuntos, sus características, o sus propiedades, van muy a la zaga de los avances numéricos. Un progreso, que podemos considerar reciente, en la verificación matemática de la existencia de atractores caóticos para la familia de Hénon (6.1), es el de Benedicks y Carleson [BC 91] que demostraron que para valores negativos y pequeños del Jacobiano (es decir, valores fijos pequeños de b), existe un conjunto de valores del parámetro μ de medida de Lebesgue positiva, tal que el conjunto atrayente del sistema (6.1) es caótico. Lo interesante es que los valores particulares de μ con atractores caóticos, no pueden ser especificados. También Benedicks y Young en [BY 93] mostraron que existe una medida natural asociada a estos atractores.

Un punto de interés dentro del estudio de procesos caóticos es la dimensión fractal de conjuntos extraños. Los conjuntos invariantes que aparecen en sistemas dinámicos, como los atractores caóticos, a menudo poseen estructura a escalas arbitrariamente finas (de ahí el término “extraño”). Las dimensiones fractales han probado ser un

camino útil para cuantificar, tanto las estructuras geométricas, como las propiedades dinámicas de estos conjuntos. Desde un punto de vista práctico, éstas también proveen una estimación del mínimo número de grados de libertad necesarios para la evolución dinámica de un sistema caótico.

Sin embargo, la determinación de estas dimensiones es, en la mayoría de los casos, un problema no trivial. Tal vez, la dimensión de caja D_0 , es la más conocida en la literatura, y la más simple de entender intuitivamente: como ya hemos visto, si un conjunto, perteneciente a un espacio euclídeo n -dimensional está completamente cubierto por n -cubos de lado igual a ε , esta dimensión da el escalamiento del número de cubos necesarios para cubrir el conjunto, respecto al tamaño del cubo, ε . Para un fractal generado por un proceso caótico, se puede definir también la dimensión de información D_1 “pesando” cada caja según la frecuencia con la cual es visitada por una trayectoria “típica”. Pero una aplicación directa de estas dimensiones resulta difícil para los sistemas dinámicos caóticos, ya que se vuelve imposible determinar todas las cajas visitadas, a medida que ε decrece, a partir de una cantidad finita de datos. El problema es más severo aun para D_0 , porque depende fuertemente de aquellas regiones infrecuentemente visitadas por una trayectoria típica. Además, el requerimiento de que el conjunto esté inmerso en una grilla de n -cubos se vuelve complicado para altos valores de n .

La conjetura de Kaplan–Yorke, conecta la D_1 con los exponentes de Lyapunov ([You 82], [FKY 83]). Como los algoritmos numéricos para calcular estos exponentes son, en general, más eficientes que los cálculos de dimensiones basados en conteo de cajas, esta conjetura resulta un método más simple y directo para estimar la dimensión de información D_1 . Se han hecho algunos intentos de generalizar esta conjetura para el espectro de dimensiones generalizadas de Rényi D_q (que incluye a D_0 y D_1) ([GBP 88], [OSY 89]), sin embargo, para $q \neq 1$ no parece que D_q pueda ser expresada en términos de un número finito de invariantes de un sistema, como los exponentes de Lyapunov.

De ahí los esfuerzos por encontrar caminos alternativos para calcular dimensiones fractales de atractores extraños. Por ejemplo, en [SBH 99], la dimensión de caja está expresada en términos de una cantidad finita de invariantes del conjunto caótico, tales como las *razones de expansión promedio* (‘average expansion rates’). Este método es muy similar al descrito en [Fal 97], cuya referencia es un resultado de Douday y Oesterlé ([DO 80]).

6.2. **Objetivos y organización de la segunda parte**

En esta parte de la tesis, nosotros exploramos el estudio de atractores extraños tipo Hénon, no en términos de la dimensión de caja, sino de la dimensión de Mendès France. La razón se basa en la posibilidad de estudiar estos atractores como curvas continuas que se desarrollan a partir de mapas continuos. En el Capítulo 7, tratamos el sistema (6.1) con sus valores tradicionales $\mu = 1,4$ y $b = 0,3$. Para estos valores, el mapa es ‘area-contracting’ y posee un conjunto invariante caótico como estado final del sistema. Estudiamos al conjunto atractor de este sistema, \mathcal{H} , como curva

expandida de Mendès France; es decir, como curva fractal “desarrugada” y resoluble, que es límite de curvas continuas planas, $\{H_k\}_{k \geq 1}$, cuando $k \rightarrow \infty$. En la literatura ([Fal 97], [ASY 97], [Ott 93], [PJS 92]) la dimensión de caja de \mathcal{H} se ha estimado aproximadamente en 1.27. Adaptamos las herramientas desarrolladas en el Capítulo 4, para el caso particular de este atractor, y calculamos los parámetros involucrados para la estimación de la dimensión maximal de Mendès France (la cual coincide teóricamente con la de Hausdorff), que resulta un valor inferior al anterior. Interpretamos esta discrepancia.

Por otro lado, para los mapas planos que son ‘area–contracting’, se ha hecho mucho trabajo sobre el estudio del rol crucial que juegan ciertas órbitas periódicas inestables, distinguidas por ser “accesibles”, en el entendimiento de algunas bifurcaciones globales, como por ejemplo, las metamorfosis que sufren las fronteras de las cuencas de atracción de los atractores, o también, las crisis de los mismos atractores. En el Capítulo 8, tratamos el sistema (6.1) para $b = -0,3$ y $\mu \in [2,020, 2,115]$. En esta región del parámetro μ (vinculado al término no lineal), los atractores \mathcal{H}_μ presentan un tipo de cambio discontinuo, caracterizado por un repentino reemplazo de órbitas accesibles al variar μ . Este cambio se cuantifica mediante un “salto” en el correspondiente *número de rotación* de las órbitas. La variación de los números de rotación, con sus saltos, describe una escalera del diablo como función del parámetro μ ([AS 88], [AS 93]). Nosotros estimamos las dimensiones de Hausdorff de los atractores \mathcal{H}_μ (via la dimensión de Mendès France) para el mismo intervalo de valores de μ . Nuestra propuesta es mostrar la fuerte conexión entre ambas funciones: la variación de la dimensión es minimal para los parámetros dentro del mismo ‘plateau’ de la escalera, mientras que es marcadamente mayor cuando el parámetro cambia de un plateau a otro.

Los resultados de este trabajo fueron publicados en dos artículos en la revista International Journal of Bifurcation and Chaos: [PHP 02] y [HP 05].

6.3. Definiciones básicas

En esta sección repasaremos brevemente los términos empleados en los capítulos siguientes. Daremos, tanto el significado del término *caos* al referirse a sistemas dinámicos determinísticos, como la noción de *atractor extraño* y de *medida natural*.

Consideremos un mapa $T : X \mapsto X$, de tipo $\mathcal{C}^r(X)$ ($r \geq 0$), donde $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$x_{k+1} = T(x_k) \quad x_k \in X, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definición 6.3.1

- (i) Sea $x_0 \in X$, la órbita de x bajo T es el conjunto de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. El punto inicial x_0 se llama *condición inicial* de la órbita.
- (ii) Un punto x es un punto fijo de T , si se verifica que $T(x) = x$. x es un punto periódico de período m , si x es punto fijo de T^m , es decir, $T^m(x) = x$, y m es el menor de tales enteros positivos. La órbita de x se llama *órbita periódica de período m* .

Definición 6.3.2 Sea x punto fijo de T , y $DT(x)$ la matriz Jacobiana de T en el punto x .

- (i) x se llama hiperbólico, si $DT(x)$ no posee autovalores de módulo 1. Lo mismo para un punto x m -periódico y los autovalores de $DT^m(x)$,
- (ii) x se llama atractor o sumidero, si todos los autovalores de $DT(x)$ tienen módulo menor que 1 (idem para x m -periódico y los autovalores de $DT^m(x)$),
- (iii) x se llama repulsor o fuente, si todos los autovalores de $DT(x)$ tienen módulo mayor que 1 (idem para x m -periódico y los autovalores de $DT^m(x)$).
- (iv) x se llama punto silla o ‘saddle’, en otro caso, es decir, si algunos de los autovalores tienen módulo menor que 1, y otros mayor que 1 (idem para x m -periódico y los autovalores de $DT^m(x)$),
- (v) x se llama silla alternante o ‘flip-saddle’, si $DT(x)$ tiene al menos un autovalor negativo.

No existe en la literatura una definición unificada del concepto caos; más bien, hay diversas definiciones que varían según los autores. Algunas son más fuertes que otras, pero una amplia variedad de autores coinciden en que un sistema caótico determinístico debe poseer, al menos, tres ingredientes ([Wig 03], [Dev 87], [PJS 92], [Ott 93]):

1. sensibilidad a las condiciones iniciales (impredictibilidad),
2. transitividad topológica (indivisibilidad),
3. órbitas periódicas densas (algún elemento de regularidad).

Definición 6.3.3 $T : X \mapsto X$ se dice sensible a las condiciones iniciales (s.c.i.) sobre X , si existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $x \in X$ y un entorno U de x , existe $y \in U$ y $k \geq 0$, tal que $|T^k(x) - T^k(y)| > \varepsilon$.

En otras palabras, la definición anterior dice que para un punto $x \in X$, existe al menos un punto y , arbitrariamente cerca de x , que diverge de x . Algunos autores requieren que la razón de divergencia sea exponencial, en ese caso se habla de *sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales* (s.e.c.i.).

Definición 6.3.4 $T : X \mapsto X$ se dice topológicamente transitivo (t.t.) sobre X , o X es topológicamente transitivo para T , si para cualquier par de abiertos $U, V \subset X$, existe $k > 0$ tal que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivamente, un sistema topológicamente transitivo tiene puntos que, bajo la dinámica, se mueven desde un entorno arbitrariamente pequeño hasta cualquier otro. Como consecuencia, el sistema no se puede descomponer o dividir en dos subsistemas independientes sobre X .

Definición 6.3.5 $T : X \mapsto X$ se dice caótico sobre X , o X es caótico para T , si:

- (i) T tiene s.e.c.i. sobre X ,
- (ii) T es t.t. sobre X ,
- (iii) Las órbitas periódicas de T forman un conjunto denso en X .

Un concepto importante dentro de los comportamientos de tipo caótico y de nuestro interés, es el de “atractor extraño” (*‘strange attractor’*).

Definición 6.3.6 *Un conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ e invariante por T , se dice un atractor para T , si existe un entorno U de A tal que:*

$$\forall x \in U, \forall k \geq 0, \quad T^k(x) \in U \quad \text{y} \quad T^k(x) \rightarrow A, \quad k \nearrow +\infty .$$

Si tenemos un conjunto atractor es natural preguntar cuáles puntos en el espacio de fases se aproximan asintóticamente a él.

Definición 6.3.7 *El dominio o cuenca de atracción de A (*‘basin of attraction’*), es el conjunto*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k \leq 0} T^k(U)$$

donde U es el de la definición anterior.

Obviamente, $A \subset \mathcal{B}$.

Definición 6.3.8 *A es un atractor caótico o extraño para T , si:*

- (i) *A es atractor para T ,*
- (ii) *T es caótico sobre A .*

Supongamos ahora que T es invertible, x es un punto fijo (o m -periódico) silla de T .

Definición 6.3.9

- (i) *La variedad estable de x , $W^s(x)$, es el conjunto de puntos y , tal que $|T^k(y) - T^k(x)| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.*
- (ii) *La variedad inestable de x , $W^u(x)$, es el conjunto de puntos y , tal que $|T^{-k}(y) - T^{-k}(x)| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.*

Observar que estos conjuntos resultan, por definición, invariantes para T . La existencia y regularidad de estas variedades, se puede probar bajo condiciones muy generales (Teoremas de las Variedades Estable e Inestable (para mapas) [Dev 87]). Más aun, éstas tienen la misma dimensión topológica que, y son tangentes en x a, sendos subespacios E^s y E^u , donde E^s es el autoespacio de $DT(x)$ correspondiente a los autovalores de módulo menor que 1 (estable), y E^u es el autoespacio de $DT(x)$ correspondiente a los autovalores de módulo mayor que 1 (inestable).

Medida natural

Definición 6.3.10 *Sea $T : X \mapsto X$ un mapa y sea μ una medida sobre X . Asumimos que para todo conjunto medible $A \subset X$, la imagen inversa, $T^{-1}(A)$, es medible. Decimos que μ es invariante por T , o que T preserva a μ , si*

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) .$$

El concepto de medida invariante es fundamental en la teoría de los sistemas dinámicos. Muchas veces, la aproximación al cálculo de la dimensión de un conjunto, involucra la estimación de la dimensión de la medida concentrada en él. Por ejemplo, si se quiere graficar en la pantalla de una computadora el atractor de un sistema dinámico $x \rightarrow T(x)$, uno espera representar el conjunto límite, ploteando un número suficientemente grande de iteraciones $\{T^k(x)\}_{k \geq 1}$ de una condición inicial x (ubicada dentro de la cuenca de atracción), y ver que esta órbita “cubre densamente” la silueta del atractor. Si casi toda condición inicial en la cuenca (según la medida de Lebesgue) produce una órbita con estas características, entonces el sistema se dice *ergódico*. En este caso, lo que se está representando, esencialmente, más que el atractor, es su *medida natural*.

Supongamos que $U \subset X$ es una región del espacio de fases, (por ejemplo una caja de la grilla que cubre al atractor A) y se quiere contar el porcentaje de la órbita x_0, x_1, \dots que caen en U . Suponiendo que ese porcentaje se estabiliza, sea

$$\begin{aligned} \mu(U, x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ k : 0 \leq k \leq N, T^k(x) \in U \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \mathbb{1}_U(x_k), \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde $\mathbb{1}_U(\cdot)$ es la función característica de U .

Definición 6.3.11 Sea $A \subset X$ boreliano. Si el valor $\mu(A, x_0)$ de (6.2) es el mismo para casi todo x_0 (Lebesgue), entonces se define

$$\mu(A) = \mu(A; x_0)$$

y se llama la *medida natural de A para el sistema*.

Luego, si A es el atractor de T , se puede probar, usando argumentos de teoría ergódica, que este valor existe y es el mismo para casi toda x_0 en la cuenca de atracción \mathcal{B} . μ define una medida de probabilidad invariante en \mathcal{B} , A es el soporte de μ y $\mu(A) = 1$. Estas condiciones iniciales x_0 que son capaces de “generar” a μ se llaman *típicas*. Así, dado un sistema con medida natural asociada μ , el sistema se llama *ergódico respecto a μ* si casi toda órbita es típica.

Capítulo 7

El atractor de Hénon

...Mathematics is often defined as the science of space and number [...] It was not until the recent resonance of computers and mathematics that a more apt definition become fully evident: mathematics is the science of patterns.

Lynn Arthur Steen

7.1. La familia de mapas de Hénon, $H_{\mu,b}$

Sea $H_{\mu,b}: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ el sistema dinámico discreto dado por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mu - x_k^2 + b y_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (7.1)$$

$H_{\mu,b}$ depende de dos parámetros $\mu, b \in \mathbb{R}$ y se llama el *mapa de Hénon*. Para ciertos valores de μ y b , este sistema es un ejemplo específico de una transformación “estirante y plegante” (*‘stretching and folding’*) del plano. También, para $|b| < 1$, es del tipo *‘area contracting’*, ya que el Jacobiano de este mapa es igual a $-b$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego contrae las áreas a razón constante. Además, salvo un cambio de variables lineal, es la transformación cuadrática del plano más general con esta propiedad.

Para interpretar geoméricamente el sistema (7.1), podemos observar que puede descomponerse en tres transformaciones, es decir, $H_{\mu,b} = h_3 \circ h_2 \circ h_1$, donde:

$$h_1(x, y) = (y, x), \text{ simetría respecto de la diagonal } y=x,$$

$$h_2(x, y) = (bx, y), \text{ contracción en el eje } x \text{ } (|b| < 1),$$

$$h_3(x, y) = (\mu - y^2 + x, y), \text{ curvación en el eje } y \text{ que conserva área (‘area-preserving’).}$$

En la Figura 7.1 se muestra, esquemáticamente, el efecto de aplicar sucesivamente $H_{\mu,b}$ sobre una región del plano, llevando a suponer que existe un conjunto invariante atractor, lo que confirman los gráficos hechos mediante computadoras (ver, por ejemplo, Figura 7.2(b)). Análisis precisos del mapa de Hénon son muy difíciles, y su dinámica aun no está del todo entendida para muchos de los valores de sus parámetros. En particular, el estudio completo de los cambios cualitativos en su comportamiento, que ocurren al variar los parámetros (bifurcaciones), sigue siendo un problema abierto [Fal 90], [Dev 87].

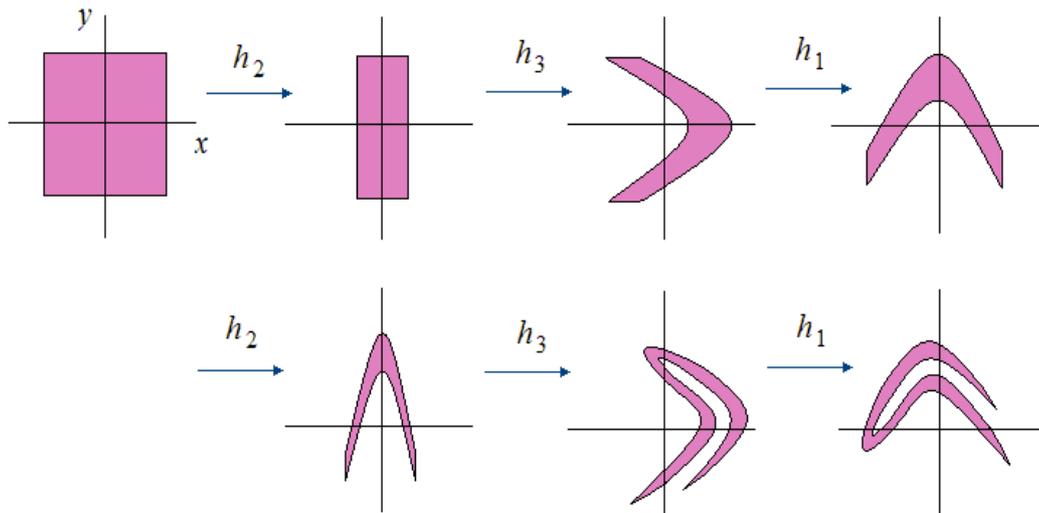


Figura 7.1: Representación esquemática de los efectos de la aplicación sucesiva de las transformaciones h_1, h_2 y h_3 sobre un rectángulo inicial, produciendo un efecto final de forma de herradura.

Puntos fijos

Los puntos fijos del sistema (7.1) son las soluciones de la ecuación

$$H_{\mu,b}(x, y) = (x, y)$$

es decir, los puntos (x, y) que verifican

$$\begin{cases} x = \mu - x^2 + by \\ y = x \end{cases} \quad (7.2)$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, resta hallar las soluciones de la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} x &= \mu - x^2 + bx \\ 0 &= x^2 + (1-b)x - \mu, \end{aligned} \quad (7.3)$$

para $\mu > \frac{-(b-1)^2}{4}$, existen dos soluciones reales distintas de (7.3):

$$x^{+,-} = \frac{(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4\mu}}{2}, \quad (7.4)$$

luego $H_{\mu,b}$ posee dos puntos fijos, ubicados sobre la diagonal $y = x$:

$$P_{\mu,b}^+ = (x^+; x^+) \quad \text{y} \quad P_{\mu,b}^- = (x^-; x^-). \quad (7.5)$$

La matriz Jacobiana de $H_{\mu,b}$, es:

$$DH_{\mu,b}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta$, donde $\tau = -2x$ es la traza y $\Delta = -b$ el determinante; los autovalores son, entonces, de la forma $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$.

Luego, en este caso, tenemos que

$$\lambda_{1,2}^+ = -x^+ \pm \sqrt{(x^+)^2 + b} \quad \text{y} \quad \lambda_{1,2}^- = -x^- \pm \sqrt{(x^-)^2 + b} \quad (7.6)$$

son los autovalores de $DH_{\mu,b}(x, y)$ evaluada en $P_{\mu,b}^+$ y en $P_{\mu,b}^-$, respectivamente.

7.2. El atractor de Hénon como curva fractal

En esta sección, trataremos el sistema (6.1) para los valores usuales de sus parámetros, $\mu = 1,4$ y $b = 0,3$, y lo llamaremos simplemente H . Para estos valores de μ y b , M. Hénon ([Hen 76]) exhibió un cuadrilátero R , para el cual $H(R) \subset R$. Repitiendo la aplicación H sucesivamente, se obtiene un conjunto cerrado, no vacío, \mathcal{H} , invariante para H , que definimos como

$$\mathcal{H} = \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(R)$$

donde H^k es la k -ésima iteración de H .

Características

Esto implica que las órbitas que comiencen dentro de R , deben converger al conjunto límite \mathcal{H} ; luego, por la Definición 6.3.6, \mathcal{H} resulta un conjunto atractor de (6.1).

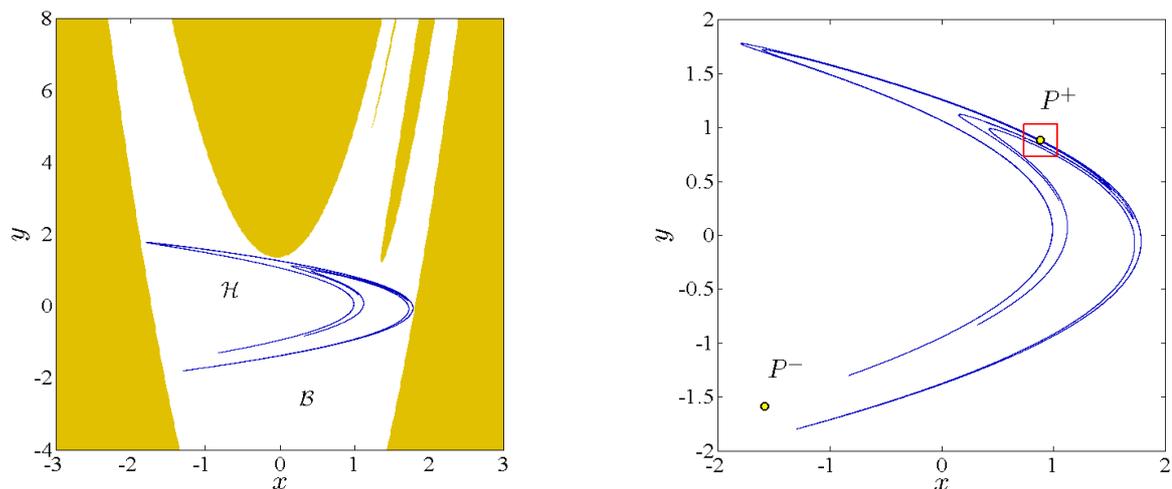


Figura 7.2: (a) El atractor de Hénon, \mathcal{H} ($\mu = 1,4, b = 0,3$) (azul); parte de su cuenca de atracción \mathcal{B} (blanco); y parte de la cuenca de atracción del infinito (amarillo). (b) \mathcal{H} y sus puntos fijos, P^+ y P^- .

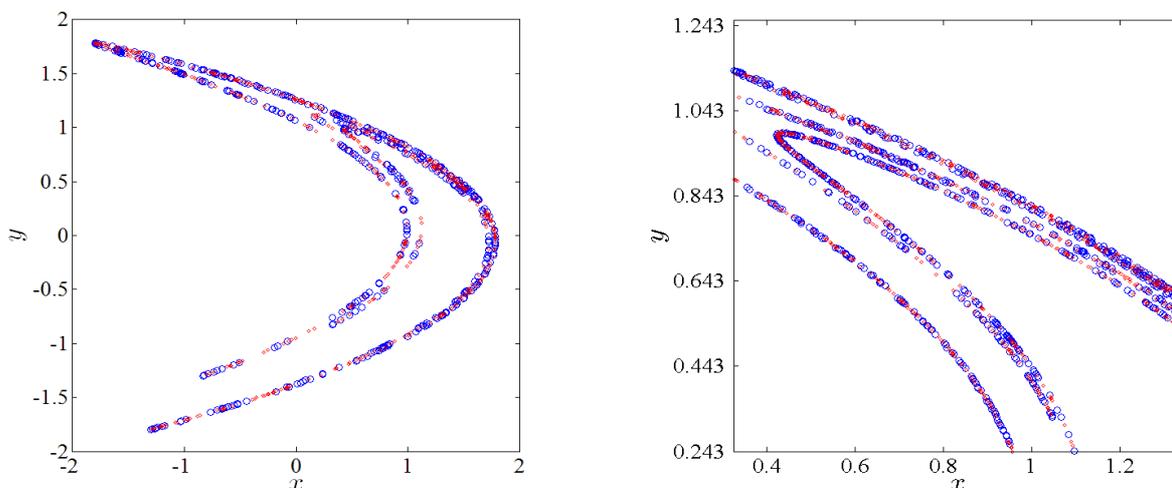


Figura 7.3: (a) 2000 puntos de las órbitas correspondientes a las condiciones iniciales $(0; 0)$ (azul) y $(-0,01; 0,01)$ (rojo). (b) Ampliación de una zona de la figura anterior.

Pero no todas las condiciones iniciales en \mathbb{R}^2 generan órbitas que se aproximan al atractor. En la Figura 7.2(a) se muestra la silueta de \mathcal{H} , junto con una parte de su cuenca de atracción \mathcal{B} ($\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$). El complemento es una parte de las órbitas que se alejan de \mathcal{H} , es decir, para las que $|x_k| \rightarrow \infty$ ó $|y_k| \rightarrow \infty$, cuando $k \rightarrow \infty$, también llamada *cuenca de atracción del infinito*.

El gráfico de \mathcal{H} puede obtenerse partiendo de una sola condición inicial $(x_0; y_0)$ en \mathcal{B} , calculando los valores de su órbita $H(x_0; y_0), H^2(x_0; y_0), \dots, H^k(x_0; y_0), \dots$ para un valor de k suficientemente grande, como para asegurar que la órbita está suficientemente cerca del atractor; luego de descartar los primeros valores, graficamos los últimos, los cuales parecen cubrir de forma densa a \mathcal{H} . Si partiéramos de otra condición inicial dentro de \mathcal{B} , el resultado “visual” sería el mismo. Esto, justamente es posible, por ser \mathcal{H} un conjunto caótico. En efecto, por poseer (s.e.c.i) (Definición 6.3.3), la órbita de otra condición inicial, aun estando muy cerca de $(x_0; y_0)$, tendría valores muy diferentes (más aun, no correlacionados) de los de $\{H^k(x_0; y_0)\}_{k \geq 1}$; pero debido a la propiedad (t.t.) (Definición 6.3.4), ambas órbitas recorren densamente el mismo conjunto límite. Como dijimos anteriormente, lo que se está representando es la medida natural, la que resulta un invariante para casi toda condición inicial x_0 (Lebesgue) (Definición 6.3.11). Como ilustración, en la Figura 7.3 (a) y (b), se muestran las órbitas de dos condiciones iniciales cercanas: $(x_0; y_0) = (0; 0)$ y $(x'_0; y'_0) = (-0,01; 0,01)$ (se computaron 2500 iteraciones y se descartaron los primeros 500 valores).

Si graficamos un número mayor de iteraciones de una órbita, o de varias órbitas (con los costos computacionales que esto requiere), veremos que éstas se distribuyen de manera que el atractor parece estar “foliado”, es decir, compuesto por muchas curvas paralelas (ver Figura 7.5), sugiriendo que \mathcal{H} es como un conjunto tipo Cantor en el sentido transversal, y suave en la dirección longitudinal. O sea, \mathcal{H} parece ser una curva, infinitamente plegada sobre sí misma por la acción del sistema (7.1). La razón de este

hecho es que el atractor está relacionado estrechamente con la variedad inestable de un punto fijo (saddle), situado en el “borde” del atractor (Figura 7.4). Para ser más precisos, Benedicks y Carleson ([BC 91]) probaron que el atractor es la clausura de una rama de esta variedad inestable (ver también [Sim 79]), cuya dimensión topológica es 1.

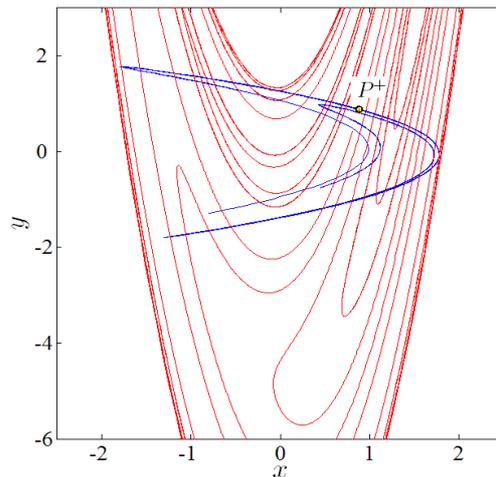


Figura 7.4: Punto fijo P^+ junto con sus variedades estable (rojo), W^s , e inestable (azul), W^u . Notar que W^u tiene la misma forma que \mathcal{H} .

Puntos fijos de \mathcal{H}

Para $\mu=1,4, b=0,3$, reemplazando en (7.4) y en (7.5), tenemos que

$$P^+ \approx (0,8839; 0,8839) \quad \text{y} \quad P^- \approx (-1,5839; -1,5839), \quad (7.7)$$

y reemplazando en (7.6), se tiene que los respectivos autovalores son

$$\lambda_1^+ \approx 0,15595; \quad \lambda_2^+ \approx -1,92374 \quad \text{y} \quad \lambda_1^- \approx -0,09203; \quad \lambda_2^- \approx 3,25982, \quad (7.8)$$

con lo que resultan, ambos, puntos hiperbólicos de tipo silla (saddle) (Definición 6.3.2(iv)), por lo tanto, para cada uno, existen localmente, una dirección estable (atractiva) y otra inestable (repulsora). Como puede verse en la Figura 7.2 (b), $P^+ \in \mathcal{H}$ y $P^- \notin \mathcal{H}$. Por esta razón, nos centraremos, de ahora en más, en el punto fijo P^+ .

Zona de interés

Si hacemos sucesivas ampliaciones de la figura de \mathcal{H} , alrededor del punto P^+ (Figura 7.5), veremos que éste revela poseer una fuerte estructura fractal autosemejante de “líneas” o “rayos” paralelos, que asemejan la forma de un conjunto tipo *Peine cantoriano* (producto cartesiano de un segmento y un conjunto tipo Cantor).

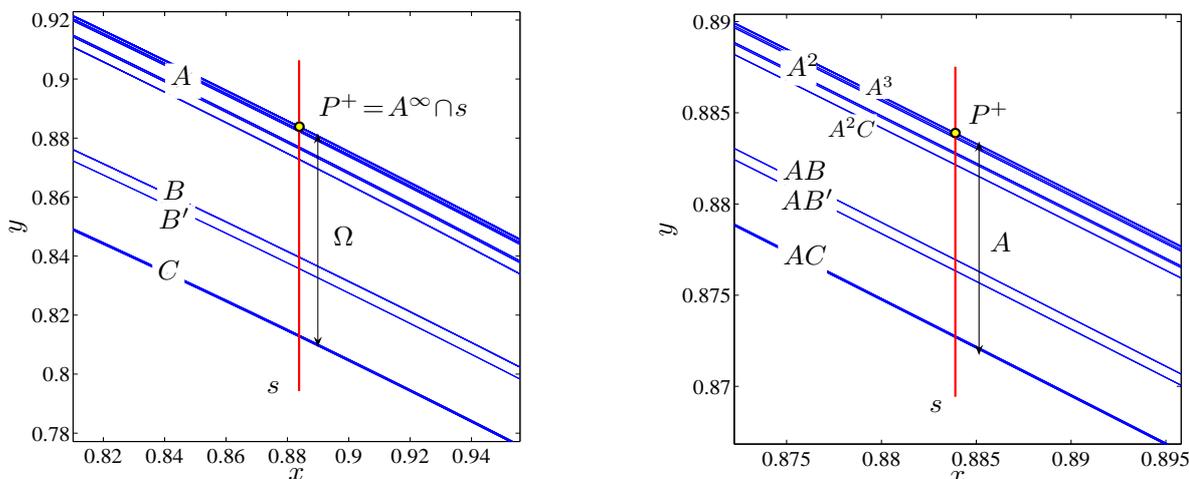


Figura 7.5: (a) Ampliación del rectángulo centrado en P^+ de la Figura 7.2 (b). (b) Ampliación de (a).

\mathcal{H} como curva límite

En la Sección 2.3 vimos un proceso de construcción de curvas fractales autosemejantes, que partía de un segmento inicial I (o de una generatriz), el cual era reemplazado por una poligonal p_1 , etc.. De manera natural, aquí, también partiremos de un segmento inicial (que también llamaremos I), el cual debe estar incluido en la cuenca de atracción de \mathcal{H} , \mathcal{B} . H_0 será I . H_1 será $H(x, y)$ aplicado a H_0 (es decir, $H_1 = H(H_0) = H(I)$) es la primera iteración de I bajo el sistema (7.1). H_2 será $H(x, y)$ aplicado a la curva continua H_1 , y así siguiendo... Todas las H_k serán curvas continuas, ya que $H(x, y)$ es una transformación continua, y porque partimos de un segmento, I , que es continuo. En este sentido, $\{H_k\} \rightarrow \mathcal{H}$, cuando $k \rightarrow \infty$.

Observación

En el Capítulo 4 comenzamos un proceso de expansión de curvas a partir del segmento inicial I (o a partir de una generatriz). En la Figura 4.1 ilustramos cómo la poligonal p'_1 hereda al segmento I , adicionando nuevos segmentos. La poligonal p'_2 hereda a p'_1 , y así siguiendo... Esta herencia asegura la existencia de una curva límite Γ . Las poligonales p'_1, \dots, p'_k, \dots son construidas en base a una forma auto-reproducida, previamente dada por el proceso de reemplazo de I por p_1 (es decir, I por p'_1), reemplazo que denotaremos $I \rightarrow p_1$, para abreviar.

Para poder aplicar ese proceso a la curva \mathcal{H} , no podremos comenzar con I , ya que el reemplazo $I \rightarrow H_1$ (equivalente a $I \rightarrow p_1$) no es heredable: I, H_1, H_2, \dots , etc., son muy diferentes unas de otras: no hay forma auto-reproducida $I \rightarrow p_1$ que genere a H_2, H_3, \dots , pues el atractor está apenas formado. Sólo cuando empecemos desde un k_0 ($k_0 = k_0(I)$) suficientemente grande (por ejemplo, para $I = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathcal{B}$, $k_0 = 8$ alcanza), notaremos que $H_{k_0+1}, H_{k_0+2}, H_{k_0+3}, \dots$ tienen forma similar, pero

H_{k_0+1} tiene más pliegues que H_{k_0} y es considerablemente más larga; H_{k_0+2} es más plegada y más larga que H_{k_0+1} , etc. Estas afirmaciones son las equivalentes de “ p_3 es más arrugada y larga que p_2 , p_4 que p_3 , etc.” (afirmaciones que se pueden ver en las Figuras 2.3 y 2.7). En aquel caso habíamos “planchado” las arrugas via el proceso de expansión heredable. En el caso de \mathcal{H} , en cambio, separaremos los diferentes “folios”, o curvas, o líneas “pegadas” via un proceso de expansión heredable, que describiremos en la siguiente sección.

7.3. Peines cantorianos

...Cantorism is a disease from which mathematics would have to recover.

Henri Poincaré.

En esta sección adaptaremos la dimensión de Mendès France introducida en el Capítulo 3, definida para curvas, a otro tipo de conjuntos que, si bien no lo son, pueden ser tratados como tales. Nos referimos a los conjuntos conocidos como *Peines Cantorianos* (*Cantorian comb-like sets*), subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Su nombre proviene de su forma geométrica, ya que se definen como el producto cartesiano entre un segmento I en \mathbb{R} y un conjunto tipo Cantor *Cantor dust-like set*, Ω , incluido en \mathbb{R} ; es decir, $E = I \times \Omega$. Estos conjuntos también se obtienen como límite de procesos contractivos. La dimensión fractal es ahora no una medida del “arrugamiento” del conjunto, sino más bien, del “apilamiento” de los infinitos segmentos situados en los puntos de Ω (los dientes del peine). La dimensión de Hausdorff de E es, en este caso, ([Fal 90]):

$$\dim_H(E) = 1 + \dim_H(\Omega) .$$

Ejemplo:

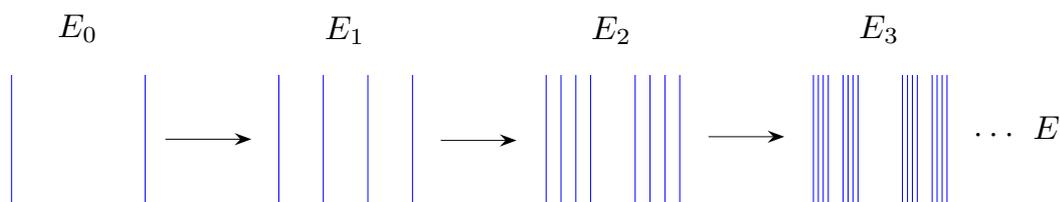


Figura 7.6: *Proceso iterativo de construcción del fractal $E = I \times \mathcal{K}$, donde \mathcal{K} es el Ternario de Cantor, como límite de peines E_k , con $k \rightarrow \infty$.*

Si tomamos, por ejemplo, $\Omega = \mathcal{K}$, donde \mathcal{K} es el *Ternario de Cantor* (Figura 7.6), se tiene:

$$\dim_H(E) = 1 + \dim_H(\mathcal{K}) = 1 + \frac{\log 2}{\log 3} .$$

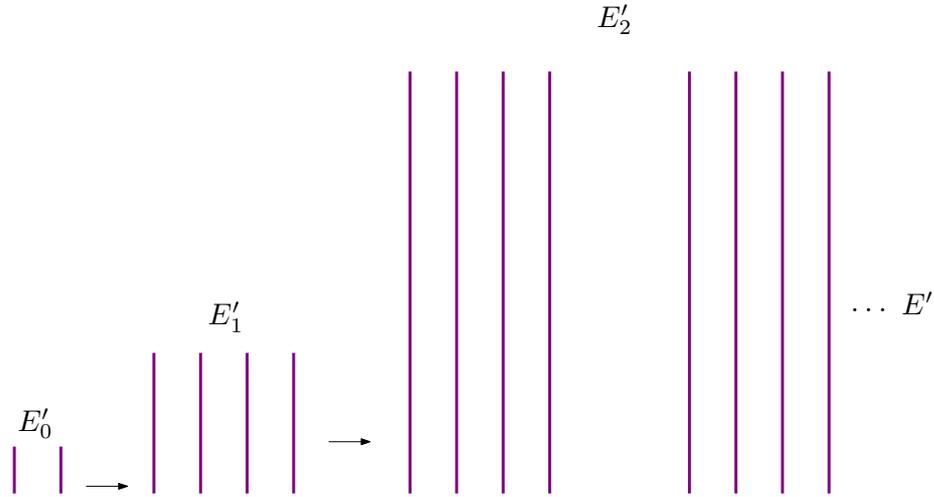


Figura 7.7: Proceso de expansión aplicado a los peines de la Figura 7.6. Cada E'_k es la ampliación de E_k por un factor igual a 3^k .

Procediendo de manera similar que para las curvas F , realizamos un proceso de expansión sobre E , como el descrito en la Sección 4.1.1, invirtiendo también el factor de contracción involucrado. En el ejemplo, $\lambda=3$ como factor de expansión. Este proceso sería el equivalente a “desarrugar” el fractal; sólo que en este caso separamos y extendemos los segmentos de E (Figura 7.7). El límite de este proceso iterativo es un nuevo conjunto E' , compuesto por infinitas semirrectas separadas, las que unimos apropiadamente de forma tal de poder construir una curva continua $\Gamma \in \mathcal{F}_{MF}$ (Figura 7.8). La curva Γ se obtiene como límite de poligonales Γ_k , con $k \rightarrow \infty$. No es difícil ver que, en este caso, Γ resulta una curva resoluble. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea ℓ_k la longitud de Γ_k , y $\varphi(k)$ el número de segmentos en E'_k . Claramente se tiene que

$$\ell_k \approx \varphi(k) \times \lambda^k ,$$

y

$$\Delta_k \approx \text{cte.} \times \lambda^k .$$

Luego, por la ecuación (3.7) tenemos, para Γ resoluble:

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(\varphi(k) \lambda^k)}{\log(\text{cte.} \lambda^k)} = 1 + \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(k)}{k}}{\log \lambda} , \tag{7.9}$$

sabemos, para el ejemplo, los valores de $\varphi(k)$ y λ : $\varphi(k) = 2^{k+1}$, $\lambda = 3$. Por lo tanto, en este caso obtenemos:

$$\dim_{MF}(\Gamma) = 1 + \frac{\log 2}{\log 3} ,$$

es decir,

$$\dim_{MF}(\Gamma) = \dim_H(E) .$$

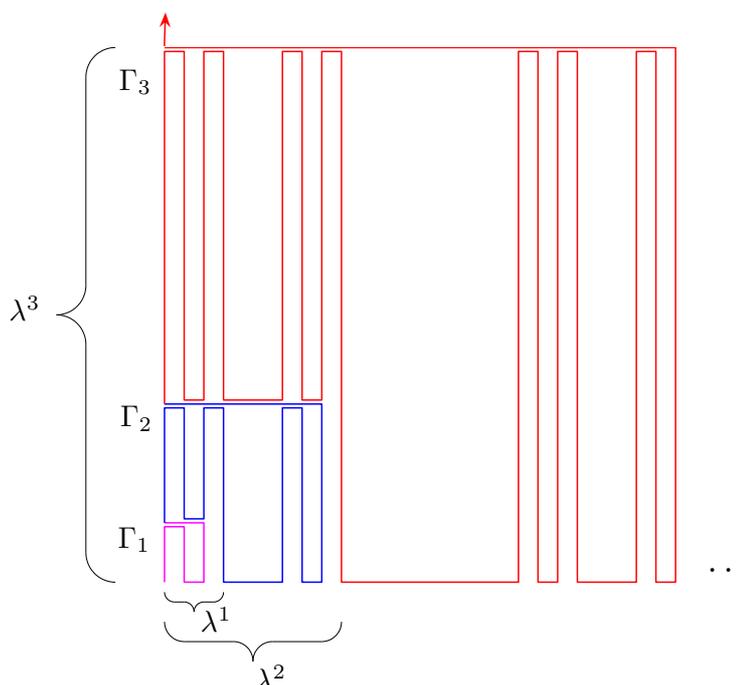


Figura 7.8: Construcción de la curva Γ como límite de curvas Γ_k , $k \rightarrow \infty$, conectando las infinitas rayas del conjunto E' de la Figura 7.7. Cada Γ_k hereda a Γ_{k-1} y agrega más líneas (marcadas con diferente color). La cápsula convexa de cada Γ_k crece como una potencia de λ^k ($\lambda=3$ en este ejemplo).

7.4. Auto semejanza de \mathcal{H}

M. Hénon ([Hen 76]), y luego varios autores [PJS 92], [Fal 90], [Dev 87] (por citar unos pocos), han hecho notar la aparente auto semejanza de \mathcal{H} , en las “bandas” de la parte superior, alrededor de P^+ . Podemos ver esas bandas superiores de \mathcal{H} , ampliadas en la Figura 7.5. Llamaremos a estas bandas A, B, B' y C , como muestra la figura. Con A^2, AA, AB, AB' y AC nos referiremos, respectivamente, a la banda A dentro de A , a B dentro de A , etc. Análogamente, A^3 denotará la banda A dentro de A^2 , etc. Así, con esta notación, A^∞ es el “borde” superior de \mathcal{H} , donde se acumulan las bandas A^j , con $j \rightarrow \infty$. Nosotros asumiremos fuertemente esta A^∞ -autosimilaridad, esto es, aun cuando no podemos comprobarlo para, digamos, H_{100} , o para H_{10^3} o para H_{10^6} , asumiremos que esta característica se mantiene.

En la sección anterior concluimos que los únicos parámetros determinantes, necesarios para calcular la dimensión de Mendès France de un peine Cantoriano, y por lo tanto, de la curva expandida asociada Γ , son: el factor de expansión $1/a$ (como el inverso del factor de contracción a), y la razón de crecimiento de $\varphi(k) \sim \varphi^k$ del número de líneas paralelas en cada iteración k .

7.4.1. El “borde” A^∞

Para graficar a \mathcal{H} como una curva límite, partimos de un segmento inicial I , el cual representamos mediante m puntos equidistantes, interpolados linealmente (*puntos de control*) (en otras palabras, consideramos m condiciones iniciales equidistantes, dentro del segmento I). $I(m)$ es el vector que representa a I . Iteramos el mapa (7.1) sobre los m puntos de $I(m)$ sucesivamente k veces (k suficientemente grande) y luego representamos los m puntos finales, $H^k(I(m))$, también por una interpolación lineal. Obtenemos así una curva (poligonal) continua $H_k(m)$, que es la representación de la curva H_k . Cuanto más grande es k , mayor es la cantidad m de puntos de control necesarios para tener una buena aproximación, debido al estiramiento de la transformación. Con $A_k(m)$ denotamos la banda A de $H_k(m)$, por $AC_k(m)$ la banda C de la banda A de $H_k(m)$..., etc. Cuando no haya necesidad de especificar la cantidad m de puntos en I , simplemente escribimos A_k, AC_k, H_k, \dots , etc. Intersectamos H_k con una recta vertical, s que pasa por P^+ (en $x = x^+ \approx 0,8839$, por (7.7)) como muestra la Figura 7.5, y esta recta hereda las “palabras” $A_k^2, AC_k, A_k^3, \dots$ de manera natural. $\mathcal{H} \cap s$ es un conjunto tipo Cantor, Ω ; luego, Ω_k es la intersección de s con H_k . Los puntos de Ω_k pertenecen a Ω . En la Figura 7.5 (a) puede verse que A_k es una contracción de H_k por un factor $a < 1$. A su vez, en la (b) puede verse que A_k^2 es una contracción de A_k por ese factor a (y una contracción de H_k por un factor a^2), y así siguiendo. Notar que con esta notación, $A_k^\infty \cap s = P^+$. Como ya hemos visto, P^+ es un punto silla. Esto implica que hay una dirección de contracción bien definida, en la estructura local en trono a P^+ (dada por el vector tangente a $W^s(P^+)$ en P^+). Entonces, en nuestro caso encontramos sin sorpresa, que la magnitud del factor de contracción a es justo el valor de λ_1^+ , es decir, $a \approx 0,15595$ por (7.8).

7.4.2. Número de líneas en $A_k \cap s$

Comencemos observando una conexión entre A_k y C_k . Para cada k (suficientemente grande) hemos realizado un conteo de números de rayas, para cada una de las bandas. La que más rayas tiene es A_k (puesto que se “acumulan” en el borde A^∞); la banda que le sigue es C_k , y con muchas menos rayas en comparación, siguen B_k y B'_k . Es decir, $\#A_k > \#C_k \gg \#B_k > \#B'_k$. La explicación tiene que ver con la transformación H y el proceso de plegado descripto esquemáticamente en la Figura 7.1. En las Figuras 7.9 (a) puede verse que \mathcal{H} está doblado sobre sí mismo, y que $C_k = C$ está conectado con a $A_k = A$; esto es, C proviene de A . Sin embargo, $\#C$ es menor que $\#A$, por lo tanto, C tiene que cumplir dos condiciones:

- (i) C tiene que provenir de la parte más exterior de A (por el plegado),
- (ii) C , siendo el que le sigue a A en cantidad de rayas, tiene que provenir de algún subconjunto “abundante” o “gordo” de A .

Ahora bien, la parte más exterior de A , que al mismo tiempo es la más densa en rayas, es precisamente A^2 . La Figura 7.9 (b) muestra que éste es el caso: C proviene de A^2 . Tenemos, entonces, una ecuación tentativa:

$$\#A_k^2 = \#C_k, \quad (7.10)$$

con alguna raya de más o de menos, la cual hemos verificado para $8 \leq k \leq 16$.

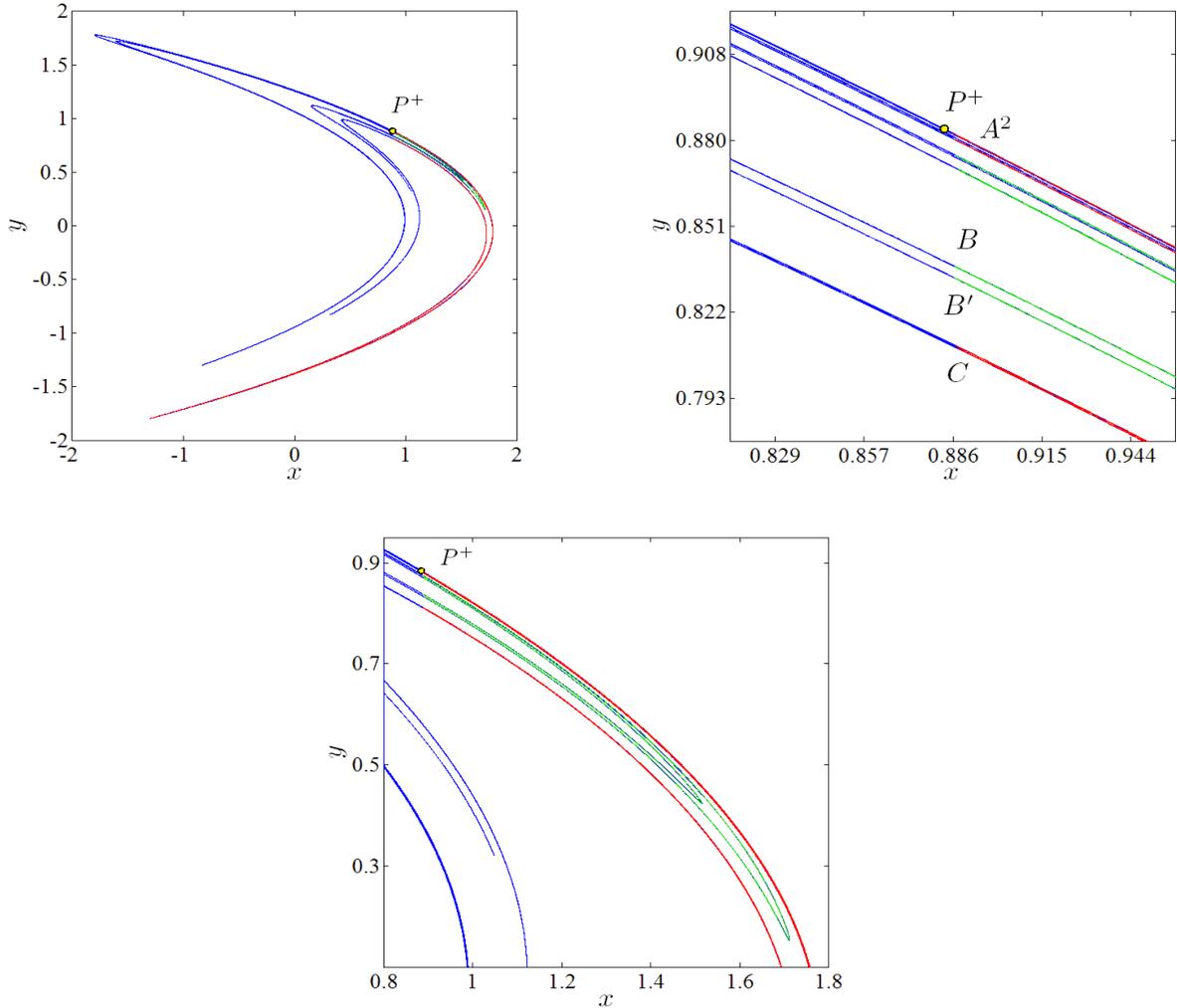


Figura 7.9: (a) Atractor \mathcal{H} (azul), y conexión entre C y las bandas superiores de A (rojo), y entre B y B' (verde). (b) y (c) Ampliación de (a), mostrando que, realmente, las líneas de la banda C provienen de las de A^2 , y las de B' de B .

La cantidad de líneas en B_k y en B'_k , no sólo es mucho menor que en las otras bandas, sino que escalan de manera más “lenta” con k , y esto también se explica (gráficamente) por el efecto de plegado de H . La creciente estrechez de las bandas B y B' , implica que podemos escribir, para k grande:

$$\#H_k \approx \#A_k + \#C_k, \quad (7.11)$$

descartando las pocas rayas en B_k y B'_k (aquí, “pocas” significa: $\#B_k$ crece más lento que $\#A_k$ y $\#C_k$). De (7.10)–(7.11) obtenemos:

$$\#H_k \approx \#A_k + \#A_k^2, \quad \text{o} \quad \#A_k^0 \approx \#A_k^1 + \#A_k^2. \quad (7.12)$$

Ahora, si asumimos la hipótesis de autosimilaridad de \mathcal{H} seriamente, concluimos que las rayas en A_k^j se contraen (con factor de contracción $a \approx 0,156$) a las de A_{k+1}^{j+1} . Esto

es, cuando aplicamos el mapa continuo $H(x, y)$ a los puntos de la curva H_k para obtener H_{k+1} , contraemos todo $H_k \cap s$ en A_{k+1} , todo $A_k = A_k^1$ en $A_{k+1}^2 \dots$, etc.

Por lo tanto, tenemos:

$$\#A_k^0 = \#A_{k+1}^1, \quad (7.13)$$

y

$$A_{k-1}^1 = A_k^2. \quad (7.14)$$

Sustituyendo (7.13)–(7.14) en (7.12) tenemos

$$\#A_{k+1}^1 = \#A_k^1 + \#A_{k-1}^1. \quad (7.15)$$

Ahora bien, si tenemos una sucesión recurrente de la forma:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \alpha_{k-1},$$

comenzando con $\alpha_0 = \alpha$ y $\alpha_1 = \beta$, se tiene entonces

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \alpha_0 = \alpha + \beta, \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \alpha_1 = (\alpha + \beta) + \beta = \alpha + 2\beta, \\ \alpha_4 &= \alpha_3 + \alpha_2 = 2\alpha + 3\beta, \\ \alpha_5 &= 3\alpha + 5\beta, \\ &\vdots \end{aligned}$$

y el término general sería

$$\alpha_k = \mathbf{F}_k \alpha + \mathbf{F}_{k+1} \beta,$$

donde \mathbf{F}_k es el k -ésimo número de Fibonacci, el cual es bien aproximado por $\text{cte.} \times \varphi^k$, donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, la expresión general de α_k sería:

$$\alpha_k = \alpha \text{ cte.} \varphi^k + \beta \text{ cte.} \varphi^{k+1} = \kappa \varphi^k,$$

donde κ es otra constante. Luego, por (7.15), podemos obtener

$$\#A_k^1 = \kappa \varphi^k,$$

y

$$\#C_k = \#A_k^2 = \#A_{k-1}^1 = \kappa \varphi^{k-1} = \bar{\kappa} \varphi^k.$$

Para ver la validez de la ecuación (7.15), mostramos, para 9 iteraciones fractales correspondientes a $8 \leq k \leq 16$ los resultados en la Tabla 7.1 (para $k \geq 17$ es difícil numéricamente, por que el correspondiente $m = m(k)$ es muy grande).

Para ver la exactitud del signo “=” en (7.15), tomamos los valores de la Tabla 7.1, restamos $\#A_{k+1}$ a $\#A_k + \#A_{k-1}$, y dividimos el valor absoluto de esta resta por el mínimo entre $\#A_{k+1}$ and $\#A_k + \#A_{k-1}$ para estimar los errores relativos por exceso. Los resultados se muestran en la Tabla 7.2; y observamos que, cuando $k = 16$ el error está ya casi en el 1%, y descendiendo, mostrando que la validez de (7.15) es confiable.

k	$\#A_{k+1}$	$\#A_k + \#A_{k-1}$
8	12	$6 + 2 = 8$
9	18	$12 + 6 = 18$
10	28	$18 + 12 = 30$
11	44	$28 + 18 = 46$
12	63	$44 + 28 = 72$
13	101	$63 + 44 = 107$
14	161	$101 + 63 = 164$
15	267	$161 + 101 = 262$
16	433	$267 + 161 = 428$

Cuadro 7.1: Comparación entre el número de líneas de las bandas A_{k+1} , A_k y A_{k-1} , para $k: 8 \rightarrow 16$.

7.5. La curva expandida $\Gamma^{\mathcal{H}}$ asociada a \mathcal{H}

Del mismo modo en que definimos curvas expandidas Γ^{a_i} en \mathcal{F}_{MF} asociadas a un fractal F en \mathcal{F}_H , asociaremos aquí al atractor de Hénon \mathcal{H} una curva expandida $\Gamma^{\mathcal{H}}$.

Vamos a considerar, como origen de la expansión, el punto $P^+ = A^\infty \cap s$ en \mathcal{H} (de absisa $x = 0,8839$). Este punto será considerado, por ejemplo, como el punto “0” del intervalo $[0, 1]$ en la Figura 4.1.

Con abuso de notación, en lo que sigue llamaremos A_k a $A_k \cap s$, y lo mismo para las otras “palabras”. El intervalo $I = [0, 1]$, o la generatriz de F , que eran la “unidad” inicial heredada por $p'_1, p'_2, \dots, p'_k, \dots$, será ahora reemplazada por la curva H_8 . Las equivalentes de $p'_1, p'_2, \dots, p'_k, \dots$, las denotaremos con H'_9, H'_{10}, \dots . Ya que la curva de partida es H_8 , H'_9 será H_9 expandida por un factor $\lambda = 1/a$ ($a \approx 0,156$); H'_{10} será H_{10} expandida por $\lambda^2 = 1/a^2$ como factor de expansión, con el mismo origen, y así siguiendo. ¿Cuáles serían las diferencias entre las H'_k , para $k > 8$? Consideremos el proceso en $\Omega = \mathcal{H} \cap s$. Para fijar ideas, consideremos una versión simplificada de Ω , que contenga solamente partes A y C ; es decir, Ω es un polvo de Cantor hecho solamente de A 's y C 's. Miremos el diagrama de la Figura 7.10. En la primera línea tenemos Ω con A y C , y A^∞ a la izquierda, tomando el lugar del origen. La siguiente línea muestra la expansión por $\lambda = 1/a$: A se vuelve Ω , mientras que C se transforma en un “segmento” λC a la derecha de Ω . La tercera línea (expansión por λ^2) aún muestra la primera expansión de Ω por λ^1 , pero ahora dentro de Ω podemos ver A y C , los cuales en la línea anterior fueron A^2 y AC . La línea siguiente muestra la expansión de Ω por λ^3 : tenemos a A (ex A^2) siendo Ω (con A y C dentro); C (ex AC) siendo $\lambda C = C/a$, y $C/a^2 = \lambda^2 C$, un “segmento” a la derecha de λC ; terminando con $\lambda^3 C$. Creemos que esta notación es obvia. La idea subyacente es mostrar la posibilidad de una herencia, aparente en las columnas $\Omega, \lambda C, \lambda^2 C, \lambda^3 C, \dots$ en el diagrama, herencia que muestra la posibilidad de dibujar la curva $\Gamma^{\mathcal{H}}$.

k	$[\#A_k + \#A_{k-1}] - \#A_{k+1} = \Delta_k$	$\Delta_k / \min\{\#A_{k+1}; \#A_k + \#A_{k-1}\}$
8	-4	-0.5
9	0	0.0
10	2	0.071
11	2	0.045
12	9	0.14
13	6	0.0594
14	3	0.018
15	-5	-0.019
16	-5	-0.0116

Cuadro 7.2: Errores (porcentajes) relacionados con (7.15) y con la Tabla 7.1.

Vayamos a los conjuntos de puntos H_8, H_9, \dots , etc., como muestra el diagrama de la Figura 7.11. Para simplificar, a_k denota $\#A_k$, idem c_k . H_8 se muestra en la primera línea del diagrama; P^+ está a la izquierda de H_8 , y a_8 y c_8 están dentro de H_8 . A la derecha de H_8 podemos observar H_9 , con a_9 y c_9 dentro, en una notación que confiamos sea obvia. Dentro de a_9 ubicamos a a_8 y c_8 , a la derecha de los cuales escribimos φc_8 para recordar que, aproximadamente, el número de puntos en C_{k+1} es φ veces el número de puntos en C_k . Ahora, expandiendo por λ vamos a la línea siguiente del diagrama, y observamos que a_9 (con a_8 y c_8 dentro) se convierte en a_8 y c_8 dentro de H_8 , mientras que c_9 se vuelve c_9 expandido en λ , esto es λc_9 . Otra vez, c_9 es, aproximadamente, φc_8 . La notación $\varphi \lambda c_8$ a la derecha de λc_9 en el diagrama, indica que tenemos φc_8 puntos, expandidos o estirados por un factor $\lambda = 1/a$. Una comparación entre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ y $\lambda = 1/a \approx 6,4123$ muestra la magnitud del estiramiento final, eso es, c_9 incorpora puntos, pero finalmente estos puntos terminan separados unos de otros.

Ahora bien, en la Figura 4.1 de la Sección 4.1.1, vimos justamente la manera en que construimos la poligonal p'_1 : tomamos $I = [0, 1]$ (ahora H_8), fijamos un origen “o” (ahora P^+), aplicamos las similaridades a I una vez, para obtener p_1 (ahora aplicamos $H(x, y)$ a H_8 y obtenemos H_9 , incorporada por la recta s), y estiramos p_1 por el recíproco λ del contractor (ahora por $\lambda = 1/a$) para obtener p'_1 (ahora llamado H'_9 , incorporado a s).

Para obtener H'_{10} seguimos el mismo procedimiento que antes, expandiendo por λ^2 , como se muestra en la segunda y tercera línea del diagrama. La “igualdad” $\lambda^2 c_{10} = \varphi^2 \lambda^2 c_8$ significa que tenemos c_8 puntos multiplicados por un factor de $\varphi^2 = 1 + \varphi \approx 2,618$ y estirados por $\lambda^2 = 1/a^2 \approx (6,4123)^2 = 41,1177$.

Mirando en sentido vertical a la derecha del diagrama vemos que a_8 y c_8 serán **siempre heredados**, que tendremos c_9 expandido por λ **siempre**, a la derecha del cual tendremos c_{10} expandido por $\lambda^2 = 1/a^2$ siempre,...

Un momento de reflexión muestra que H'_k (con la correspondiente incorporación en la

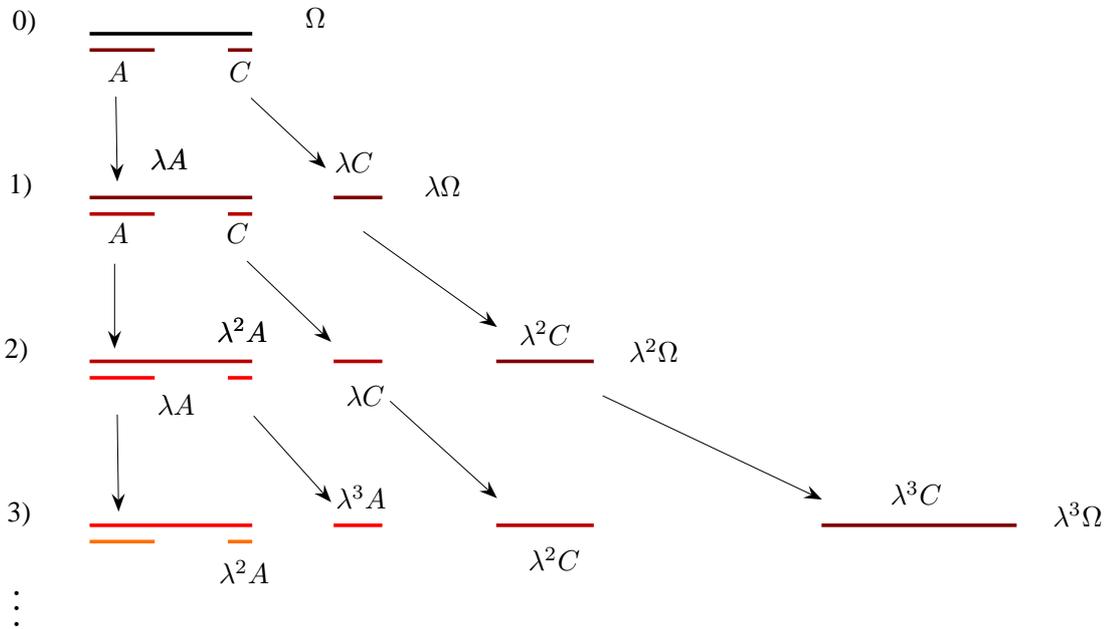


Figura 7.10: Esquema de expansión de $\Omega = \mathcal{H} \cap s$.

recta s) luce más y más como un conjunto tipo peine cantoriano, de tamaño $\lambda^k \times \lambda^k$. La curva límite $\Gamma^{\mathcal{H}}$, entonces, existe, y es una expansión infinita de un peine cantoriano, en el sentido de la Sección 7.3.

7.5.1. $\Gamma^{\mathcal{H}}$ es resoluble

Las últimas observaciones de las secciones precedentes sobre φ y a , muestran por qué $\Gamma^{\mathcal{H}}$ es una curva resoluble en el sentido de la Sección 3.2.4. En cada uno de los sucesivos bloques o “segmentos” en la Figura 7.11 tenemos $\varphi^k c_8$ puntos (rayas en el peine) expandidos o estirados por un factor $1/a^k$, $1/a$ significativamente más grande que φ . Por lo tanto las rayas en $\varphi^k c_8/a^k$ son más separadas unas de otras. Por lo tanto, si $\Gamma_k^{\mathcal{H}}$ es el tramo de $\Gamma^{\mathcal{H}}$ hasta el paso k , asegurado que C_k (y por lo tanto C), tiene una estructura autoreplicante regular, aquella separación asegura que el área de $\Gamma_k^{\mathcal{H}}(\varepsilon)$ es de la forma $\varepsilon \times \text{long. de } \Gamma_k^{\mathcal{H}}$, para un ε fijo. Luego, $\Gamma^{\mathcal{H}}$ es resoluble.

En efecto, C tiene una estructura autoreplicante muy regular, autosemejante en un sentido análogo al de A . Esta autosemejanza se hace evidente vía sus C_k -aproximantes. A está hecha de C 's... como muestran las Figuras 7.10 y 7.11. Pero C está hecha de A 's (donde \bar{A} es cierta deformación de A) también de una forma autosemejante, con razones de contracción bien definidas, y con bandas que se contraen de acuerdo con estos contractores.

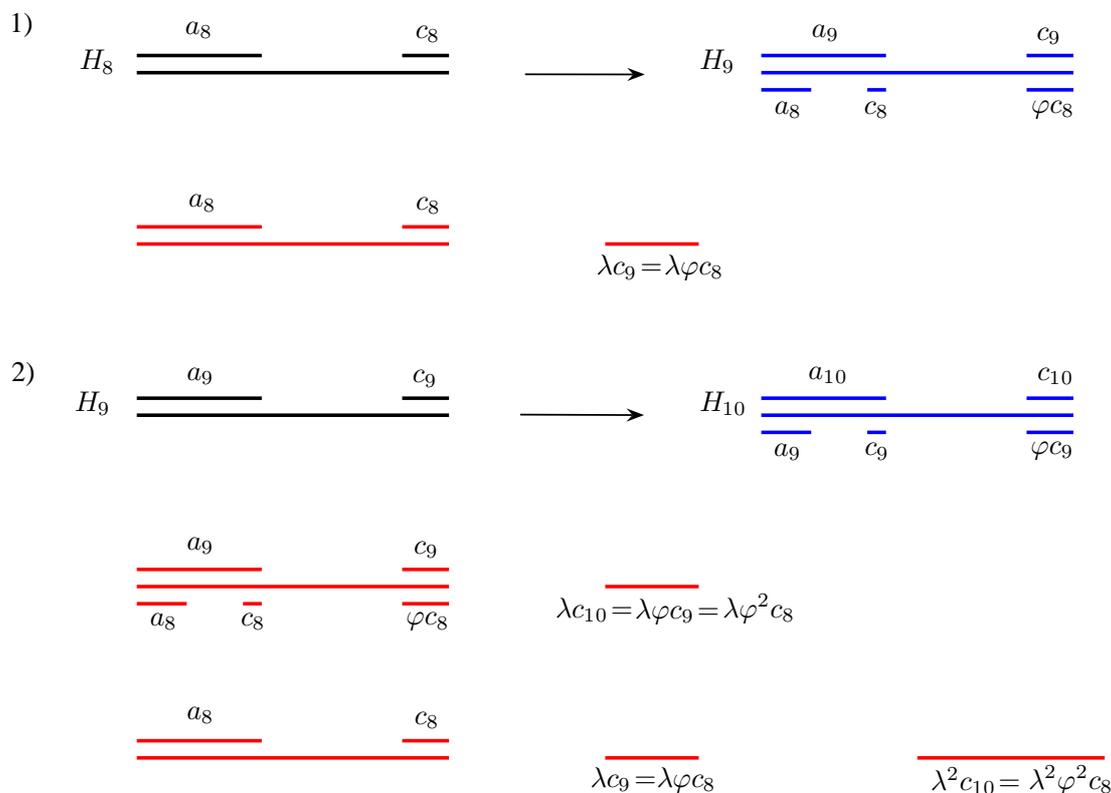


Figura 7.11: Esquema de iteración ($k=9$ y 10) y expansión, mostrando la evolución de la cantidad de líneas en las bandas C^j . Iteración (azul), hacia la derecha; expansión (rojo), hacia abajo.

7.5.2. $\Gamma^{\mathcal{H}}$ y $\Upsilon^{\mathcal{H}}$ comparten la misma $\Gamma^{\mathcal{H}}(\varepsilon)$

Consideremos el peine cantoriano C_k/a^k , una banda de $\Gamma^{\mathcal{H}}$ cuya intersección con la recta s es como en el diagrama de la Figura 7.11. Como sabemos, esta banda es una aproximación del peine Cantoriano C expandido por λ^k (Figura 7.10, en la recta s) donde C es ahora la banda completa en Ω (no una k -aproximación). Recordemos que en la Sección 4.2.3, definimos una curva llamada Υ a partir de Γ reemplazando, en aquella construcción, cada segmento de esta última por una copia (reducida o ampliada, de acuerdo al segmento) del fractal original correspondiente F . De manera análoga, la curva que llamaremos $\Upsilon^{\mathcal{H}}$, está ahora conformada por $\Gamma^{\mathcal{H}}$, reemplazando en esta última cada banda correspondiente a un bloque o “segmento” $C_k/a^k = \lambda^k C_k$ por el peine cantoriano C expandido por λ^k .

Ahora bien, la banda C es muy angosta: su ancho en Ω es aproximadamente igual a 0.0081 (valor que estimamos a partir de una mera inspección gráfica, puesto que no está asociado a ningún autovalor, como es el caso de a); mientras que el de A es $a \approx 0,156$. La banda C está compuesta por \overline{A} 's y C 's del mismo modo en que A está compuesta por una \overline{A} y una C .

Los anchos relativos de \overline{A} y C dentro de C (esto es, de $C\overline{A}$ y C^2 dentro de C)

son, también, significativamente menores que a . Estas observaciones muestran que el área $\Gamma^{\mathcal{H}}(\varepsilon)$ (parte de $\Gamma^{\mathcal{H}}$ correspondiente a $C(k)/a^k$) cubre **todo** C expandido por λ^k . Como $\Gamma^{\mathcal{H}}$ está enteramente hecha de peines C , podemos concluir que $\Gamma^{\mathcal{H}}$ y $\Upsilon^{\mathcal{H}}$ comparten la misma $\Gamma^{\mathcal{H}}(\varepsilon)$, con $\varepsilon = \lambda = 1/a$.

7.6. Conclusiones

Hemos verificado todas y cada una de las condiciones que nos permiten concluir, en virtud de (4.1), que:

$$\dim_H(\mathcal{H}) = \dim_{MF}^{\max}(\Gamma^{\mathcal{H}}) = 1 + \frac{\log \varphi}{\log(1/a)} \approx 1,2589 ,$$

valor que resulta sensiblemente menor que el de la dimensión de caja del mismo atractor, \mathcal{H} , estimada por algunos autores en 1,275 ([Ott 93], [ASY 97]), y por otros en $1,28 \pm 0,001$ ([Gra 83], [PJS 92]), usando el método usual de superposición de grilla y posterior conteo de cajas. Inclusive, es aún levemente menor que $1,2746 \pm 0,0001$, valor que se reporta como cota superior de D_0 para \mathcal{H} , en [SBH 99], como resultado de un algoritmo presentado como alternativo y superador al de conteo, en el caso de atractores caóticos. Allí, la dimensión de caja está expresada en términos de las *razones de expansión promedio*, las cuales son magnitudes invariantes del conjunto caótico. Los autores refieren que este resultado fue calculado usando una trayectoria singular de 2×10^6 iteraciones de una condición inicial aleatoria x_0 , elegida dentro de la cuenca de atracción (y luego de refinar 10 veces el paso del algoritmo). Estas razones de expansión se obtienen a partir de los valores singulares de la matriz jacobiana $DT^k(x_0)$.

Esta idea de usar valores singulares, también se encuentra en [Fal 97]. Allí se describe un método para estimar cotas superiores de la dimensión de Hausdorff de atractores A , de sistemas dinámicos T ($T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), en términos de parámetros que involucran a T . Como A es invariante por T y $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^k(U)$, para U entorno de A , entonces si $\{U_i\}_i$ es un cubrimiento de A , también lo son $\{T^k(U_i)\}_i$, $k = 1, 2, \dots$. Subdividiendo los conjuntos $T^k(U_i)$ apropiadamente, a veces se puede obtener un cubrimiento más refinado de A , que mejora la cota para el cálculo de su medida y su dimensión. Luego, la idea es estimar el tamaño y la forma de $T^k(U_i)$ en términos de la derivada de T , la cual se puede pensar geoméricamente como una transformación afín que aproxima localmente a T . Así, si U_i son bolas que cubren a A , entonces $T^k(U_i)$ son, aproximadamente, elipsoides con semiejes de longitud $\frac{1}{2}|U_i| \alpha_j(DT^k(x))$, donde x es el centro de U_i y $\alpha_j(M)$, $j = 1, \dots, n$, los valores singulares de una matriz M . Sin embargo, al aplicar lo anterior, como ejemplo, al caso del atractor \mathcal{H} , se obtuvo ([Fal 97]) $\dim_H(\mathcal{H}) \leq 1,53$.

Nuestra dimensión también resulta levemente superior a la dimensión de información de \mathcal{H} , estimada en $D_1 \approx 1,23 \pm 0,02$ ([PJS 92], [SBH 99]). Además de haber una razón teórica para serlo, puesto que es la dimensión de Hausdorff, creemos que esto se explica (o comprueba), además, porque al mapear un segmento y no una sola condición

inicial (y así rescatar que \mathcal{H} es una curva y localmente un peine cantoriano), estamos “recuperando” partes del atractor que son infrecuentemente visitadas por cualquier órbita típica, y por lo tanto no “vistas” por la medida natural, la cual está relacionada con la D_1 .

Sabemos que la dimensión de Hausdorff y la de caja son iguales para las curvas fractales autosemejantes $F \in \mathcal{F}_H$, pero sabemos (Ecuación (2.10)) que, en general, la dimensión de Hausdorff es menor que la de caja. También, para los fractales *estrictamente* autosemejantes vale que $D_0 = D_1 = D_q$. Luego, la magnitud de la diferencia $\Delta(E) = \dim_{\text{box}}(E) - \dim_H(E)$ puede interpretarse como una medida de cuánto dista, o cuán cerca está, un conjunto de ser autosemejante. En nuestro caso, $E = \mathcal{H}$, $\Delta(\mathcal{H})$ parece ser bastante pequeño, pero no cero (lo mismo sucede con $\dim_H(\mathcal{H}) - D_1$). Ambos hechos nos dan información acerca de la estructura fractal de \mathcal{H} : sin ser un fractal autosemejante, \mathcal{H} posee fuertes características de autosimilaridad. Es más, todas las A 's tienen la misma estructura autosemejante, lo mismo para todas las C 's... pero la estructura entre A y C difiere mucho, como notamos al final de la Sección 7.5.1.

Notar que, la curva Γ^{a_N} obtenida con el contractor mayor, a_N , a partir de una curva fractal autosemejante, no era nunca resoluble, mientras que Γ^H , obtenida con el contractor mayor $a = 0,156$ es resoluble. Esta diferencia es profundamente estructural, y tiene que ver con la naturaleza particular de \mathcal{H} .

Hemos visto un camino alternativo para calcular la dimensión fractal de atractores extraños, aplicado en este caso al mapa de Hénon. Creemos que este camino ofrece algunas ventajas. Primero, el método está basado sobre el mapeo del atractor mediante los llamados puntos de control que cubren un d -cubo, donde d es número de exponentes característicos positivos del mapa. Podemos pensar esto como si tomáramos en cuenta solamente la dimensión topológica del atractor completamente desarrollado (1, en el caso de \mathcal{H}), lo que implica una reducción significativa del número de dimensiones involucradas en los cálculos computacionales. Esto es posible porque el resto de los exponentes característicos, que son negativos o cero, producen, en el primer caso, un “colapso espacial” (*space-collapse*) de las direcciones asociadas, y en el último caso, sólo un incremento entero en la dimensión final del atractor, y, por lo tanto, ninguno contribuye a la “componente fraccional” de la dimensión. Por el contrario, el procedimiento para el cálculo de la dimensión de caja, requiere hacer una grilla para el espacio ambiente entero.

Otro aspecto interesante, es que los puntos de control pueden ser mapeados simultáneamente de manera paralela, en lugar del proceso de iteración de los puntos en el proceso de conteo de cajas, el cual debe ser generado secuencialmente, para asegurar un cubrimiento uniforme del atractor en términos de su medida de probabilidad natural. En nuestro esquema esta distribución uniforme es asegurada desde el principio, debido a la distribución regular de los puntos de control en el d -cubo inicial.

Generalizando las herramientas desarrolladas aquí, estos conceptos podrían, eventualmente, extenderse a sistemas de dimensiones más altas.

Para obtener un espectro completo de dimensiones de Mendès France, se debería profundizar el estudio de las estructuras dentro de las restantes bandas C , B y B' .

Capítulo 8

Parámetros fractales para el estudio de atractores tipo Hénon

...There is now a whole new experimental and theoretical science dealing with strange attractors, their classification, the measurements of their quantitative properties, their reconstruction from physical data, and so on. But undoubtedly the mathematical understanding of strange attractors is just in its infancy and they will be one of the great challenges of future mathematical generations.

H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe.*

8.1. Introducción

Usualmente, los cambios más comunes y típicos en los comportamientos dinámicos son observados mientras se varía “lentamente” uno de sus parámetros. Por ejemplo, es el caso de una familia de mapas planos y disipativos dependientes de un parámetro, en donde las intersecciones de las variedades invariantes de ciertas órbitas periódicas, sufren una bifurcación global tal como una “crisis interior”. Una crisis es un cambio discontinuo en el atractor caótico a medida que el parámetro del sistema varía continuamente. El cambio discontinuo al que nos referimos, es uno caracterizado por un repentino reemplazo de la órbita accesible (Definición 8.2.1) sobre el atractor. Se ha señalado el rol crucial que juegan estas órbitas accesibles de tipo ‘saddle’ para entender algunas bifurcaciones globales: la metamorfosis de la frontera de la cuenca de atracción, en el caso de puntos accesibles de la frontera, así como la explosión de ‘saddles’ en la crisis interior, en el caso de puntos accesibles en el atractor. Uno de los sistemas más simples y no triviales que exhiben el fenómeno de interés aquí es el caso de Hénon, y algunos estudios numéricos fueron hechos acerca de órbitas periódicas accesibles para estas familias de mapas, en, por ejemplo, [GOY 87], [AS 88], [AS 93] y [RAS 99].

*[PJS 92]

8.2. Números de rotación de órbitas accesibles

Es sabido que para un mapa inversible, T , del círculo, una órbita periódica de T tiene número de rotación p/q (irreducible) si su período es q y la órbita gira alrededor del círculo p veces cada q iteraciones. Para sistemas bidimensionales, el número de rotación mide la rotación promedio alrededor del conjunto caótico invariante en cuestión. Como dijimos anteriormente, ciertas órbitas periódicas inestables llamadas *accesibles* juegan un rol clave.

Definición 8.2.1 Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, $x \in \partial(U)$. Decimos x es accesible desde U , si existen $y \in U$ y $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, continua y de longitud finita, tal que $\gamma(t_0) = y$, $\gamma(t_1) = x$ y $\gamma(t) \in U$, $\forall t \in (t_0, t_1)$.

En otras palabras, un punto en la frontera de una región, es accesible desde la misma, si existe una curva (o camino) de longitud finita que conecte el punto de la frontera con un punto del interior de la región, tal que ningún punto de la curva, excepto el punto en la frontera, pertenezca a la frontera de la región [Ott 93, pág. 277, 295].

Luego, si T es un mapa bidimensional inversible y U es la cuenca de atracción de un atractor A , un punto x de la frontera de U es un *punto frontera accesible* si es accesible desde la cuenca U . Cuando U es conexo y simplemente conexo, aun siendo su frontera una curva fractal, el mapa T actúa sobre los puntos frontera accesibles como si estuvieran en un círculo alrededor del atractor A , por eso uno puede asociar un número de rotación a estos puntos fronteras accesibles desde la cuenca, y llamarlo *número de rotación accesible* [AS 88].

Este análisis para cuencas puede ser aplicado a atractores caóticos conexos. Por ejemplo, si consideramos un mapa inversible T , y a su atractor caótico conexo A lo miramos como frontera de una cuenca de atracción (por ejemplo del infinito) bajo el mapa inverso T^{-1} , entonces, una órbita frontera accesible estará, ahora, en el atractor A , siendo accesible desde el complemento de A , y rotando alrededor del punto fijo central de A . Para una discusión más amplia de estos tópicos (la existencia de un intervalo de números de rotación, la posibilidad de ser irracionales, etc.) ver [AS 93] y sus referencias.

Consideraremos ahora, la familia de Hénon (7.1) del capítulo anterior:

$$H_\mu \begin{cases} x_{k+1} = \mu - x_k^2 + b y_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (8.1)$$

donde μ es un parámetro escalar, pero fijaremos el valor de b en $b = -0,3$. El valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana es igual a $-b = 0,3$, luego, la familia sigue siendo *área-contractiva*. La Figura 8.1 muestra el diagrama de bifurcación para este mapa. Para cada valor del parámetro μ en el eje de las abscisas, la coordenada x del conjunto atractor es dibujada verticalmente (tomando un número grande de valores consecutivos de x para una órbita generada por el mapa (8.1)).

En este escenario puede verse al mapa sufriendo una *bifurcación de doblamiento de período* (*'period-doubling bifurcation'*) a la izquierda; seguida de un régimen de bandas caóticas que contienen "ventanas periódicas" a la derecha. Sólo cuando μ alcanza

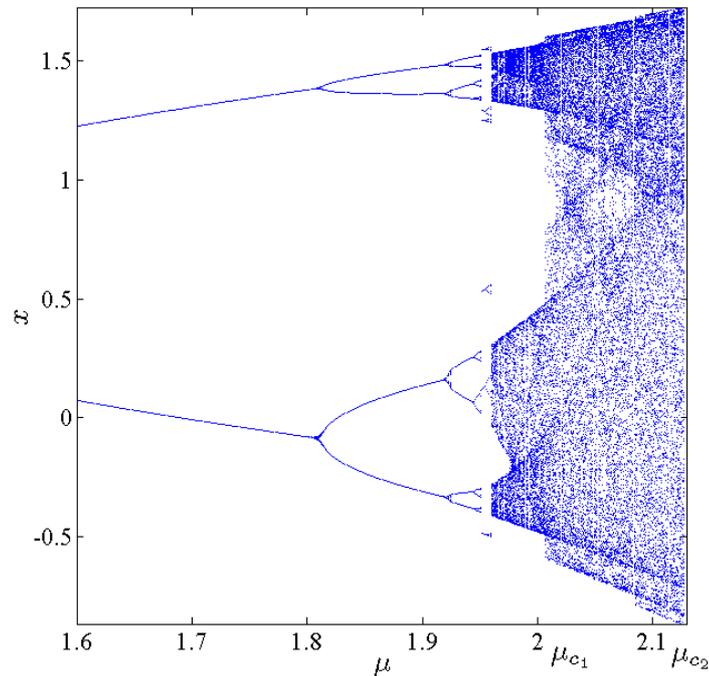


Figura 8.1: Diagrama de bifurcación del mapa (8.1), para $\mu \in [1,70, 2,15]$. Para cada valor de μ , se representa la proyección del atractor \mathcal{H}_μ sobre el eje x .

el valor de $\mu_{c_1} \simeq 2,0185$ las bandas parecen llenar enteramente el eje vertical, mostrando la existencia de un atractor “conexo” (*‘one-piece attractor’*) el cual llamaremos \mathcal{H}_μ . Este régimen continúa hasta un valor crítico $\mu_{c_2} \simeq 2,1246$, donde, finalmente, el atractor se hace tangente a la frontera de su base de atracción produciendo un tipo de metamorfosis llamada *crisis terminal* (*‘boundary crisis’*), en la cual el atractor junto con su cuenca de atracción, desaparecen repentinamente del espacio de fases (Figuras 8.2(a)–(c)). El intervalo entre μ_{c_1} y μ_{c_2} será la zona de interés, ya que los atractores \mathcal{H}_μ se presentan como caóticos y conexos; por lo tanto, como dijimos antes, pueden ser vistos como fronteras de sus complementos bajo los mapas H_μ^{-1} , inversos de (8.1)

$$H_\mu^{-1} \begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = \frac{1}{b}(x_k - \mu + y_k^2) \end{cases} \quad (8.2)$$

Para este intervalo de valores del parámetro μ , Alligood y Sauer mostraron en [AS 93], y en [RAS 99] los resultados de estudios numéricos sobre números de rotación accesibles para la familia (8.1). Para un valor fijo de μ , aunque haya órbitas periódicas de infinitos períodos en el atractor, todas las órbitas accesibles rotan alrededor del “borde” exterior del atractor con la misma razón asintótica. Los autores exhiben evidencia numérica de cómo varían los números de rotación accesibles en una crisis típica: el atractor caótico contiene ciertas órbitas periódicas cuyas variables esta-

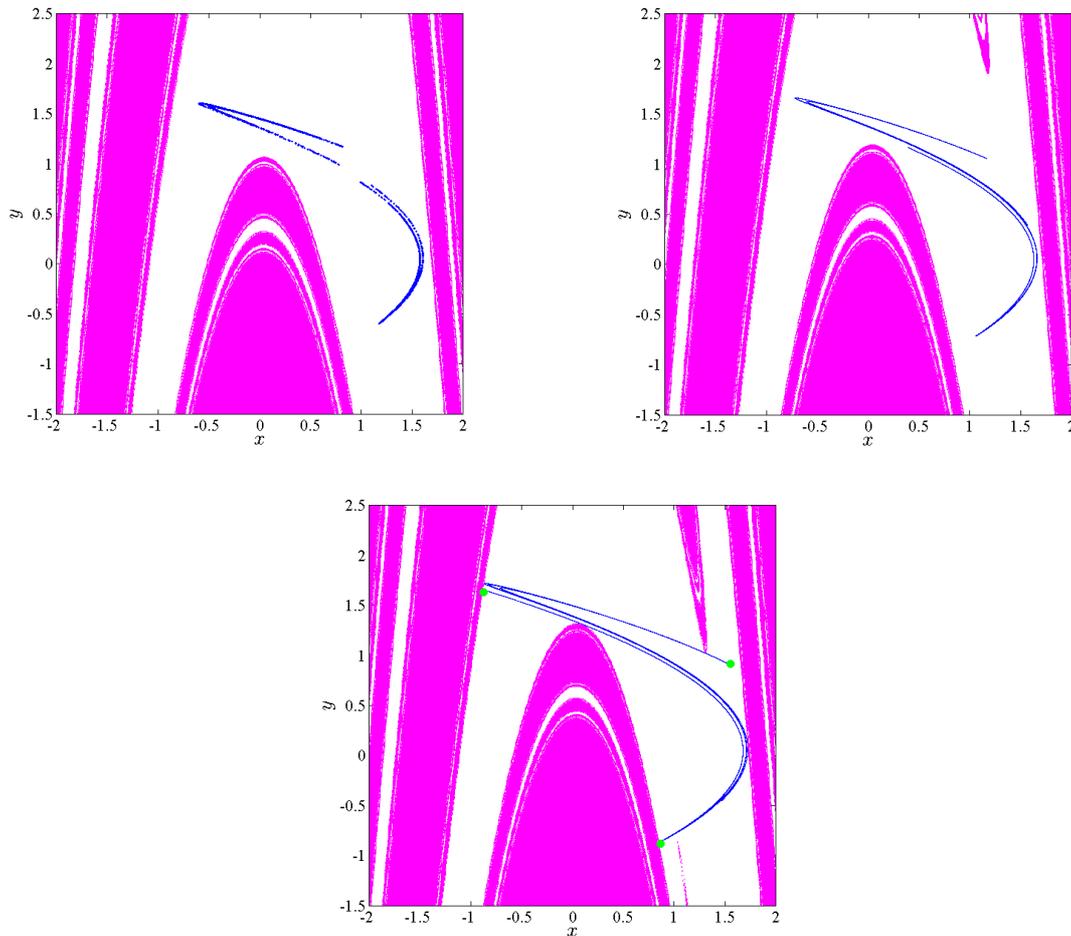


Figura 8.2: Atractor \mathcal{H}_μ (azul), parte de su cuenca de atracción (blanco) y parte de la cuenca de atracción del infinito (magenta). (a) Para $\mu = 2,015$, \mathcal{H}_μ es discontinuo, las órbitas alternan entre las dos partes. (b) Para $\mu = 2,07$, las dos partes se unen para formar un atractor de una pieza. (c) Para $\mu = 2,12467$, el atractor caótico y la frontera de su cuenca de atracción se hacen tangentes (crisis terminal). La órbita inestable de período 3 (verde), con la que \mathcal{H}_μ choca a su frontera, es accesible desde la región blanca.

bles e inestables se cruzan “a manera de retícula” cuando el parámetro varía. La metamorfosis ocurre cuando las variedades invariantes de dos órbitas periódicas con diferente número de rotación se intersectan o se hacen tangentes. Este hecho puede involucrar comportamientos rotacionales complicados, implicando que, repentinamente, una órbita periódica accesible en el atractor pase a ser inaccesible y, simultáneamente, una órbita periódica inestable diferente a la anterior e inaccesible hasta ese momento, asuma el rol de órbita accesible.

La evolución de los números de rotación accesibles para \mathcal{H}_μ como función $\nu(\mu)$ del parámetro μ dentro del intervalo $[2,01, 2,12]$ se muestra en la Figura 8.3. El gráfico de $\nu(\mu)$ luce como una función de tipo-Cantor o escalera del diablo (*‘devil’s staircase’*).

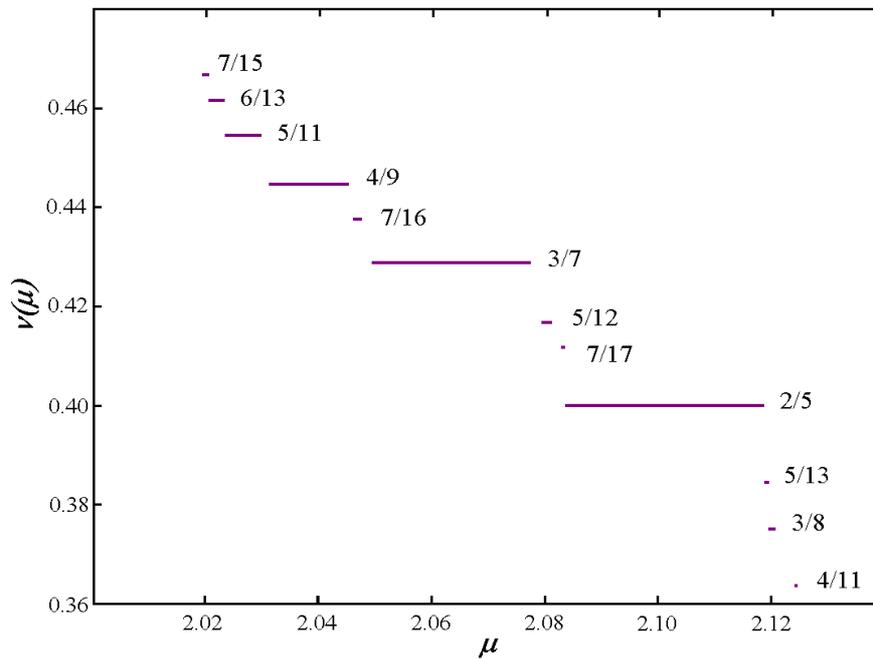


Figura 8.3: Evolución de los números de rotación accesibles para \mathcal{H}_μ , en función del parámetro μ . El gráfico es una escalera de tipo Cantor decreciente.

8.3. Parámetros para la dimensión de Hausdorff de \mathcal{H}_μ

En la Figura 8.4(a) se muestra la forma completa del atractor \mathcal{H}_μ del mapa (8.1) para un valor elegido de $\mu \in [2,01, 2,12]$. Como ya explicamos, la figura se obtiene representando el resultado final de varias iteraciones del mapa, sobre un segmento inicial I (ubicado dentro de la cuenca de atracción). El atractor es representado por una curva continua, el mapa es una transformación continua y comenzamos desde una interpolación lineal a trozos de una grilla regular sobre I . El segmento es estirado y plegado, en este caso por la transformación H_μ . La Figura 8.4(b) es una ampliación de la Figura 8.4(a) alrededor del punto fijo interior P_μ . La Figura 8.4(c) es una ampliación de (b). Rotando esta figura 180° alrededor del punto fijo, podemos observar que \mathcal{H}_μ posee la estructura autosemejante de un conjunto tipo peine cantoriano. La Figura 8.4(d) es otra vez, una ampliación de la última figura.

En el capítulo anterior concluimos que los únicos parámetros determinantes, necesarios para calcular la dimensión de Mendès France de un peine Cantoriano, y por lo tanto, de la curva expandida asociada Γ , son: el factor de expansión $1/a$ (como el inverso del factor de contracción a), y la razón de crecimiento de $\varphi(k) \sim \varphi^k$ del número de líneas paralelas en cada iteración k . Además, estimamos la dimensión de Hausdorff del atractor \mathcal{H} , como la dimensión maximal de Mendès France de la curva

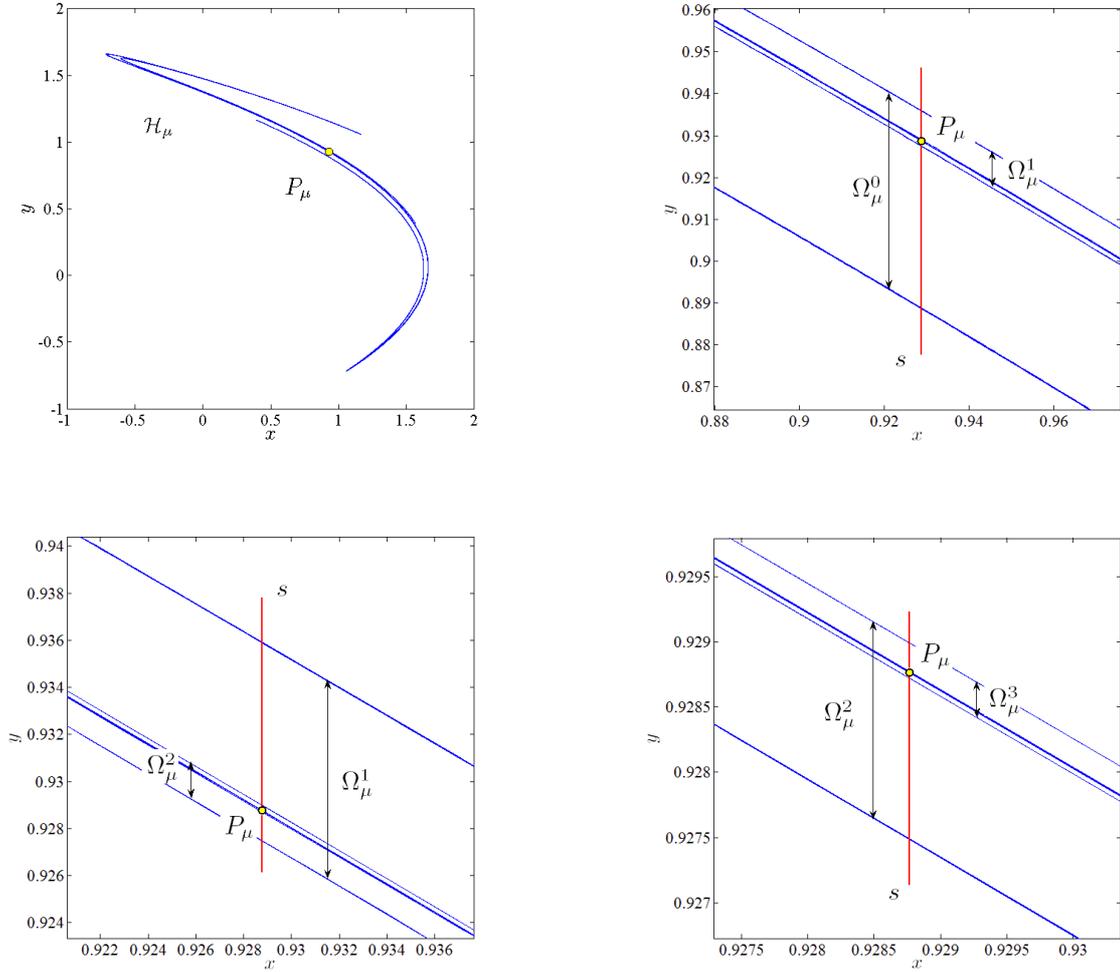


Figura 8.4: (a) \mathcal{H}_μ para $\mu = 2,07$ y su punto fijo interior P_μ . (b) Ampliación de (a) alrededor de P_μ . $\Omega_\mu^0 = \mathcal{H}_\mu \cap s$ es un conjunto tipo Cantor. Ω_μ^1 es la intersección de s con la banda superior. (c) Ampliación de Ω_μ^1 por un factor de $1/0.1787$, mostrando la misma forma que Ω_μ^0 , al rotarlo 180° . (d) Ampliación de Ω_μ^2 por el mismo factor, mostrando la misma forma que Ω_μ^0 , y que Ω_μ^1 rotado 180° .

expandida $\Gamma^{\mathcal{H}}$, mediante la formula

$$\dim_H(\mathcal{H}) = \dim_{MF}^{\max}(\Gamma^{\mathcal{H}}) = 1 + \frac{\log \varphi}{\log(1/a)}. \quad (8.3)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, nos centramos en el punto fijo interior P_μ de \mathcal{H}_μ . $H_\mu(k)$ es la k -ésima iteración del segmento inicial I bajo el mapa (8.1) (I es el mismo para todo $\mu \in [2,01, 2,12]$ considerado) luego todas las $H_\mu(k)$ son curvas continuas aproximantes de \mathcal{H}_μ a medida que k crece. Descartando las primeras iteraciones, se hace evidente una forma autoreplicante al comparar $H_\mu(k)$ y $H_\mu(k+1)$, $H_\mu(k+1)$ es más plegada y larga que $H_\mu(k)$. Como antes, intersecamos $H_\mu(k)$ con un segmento vertical s que cruza al punto fijo, como muestran las Figuras 8.4. $\Omega_\mu^0 = \mathcal{H}_\mu \cap s$ es un

conjunto tipo polvo de Cantor, luego $H_\mu(k) \cap s \subset \Omega_\mu^0$. Ω_μ^1 será la intersección de s con las bandas superiores de \mathcal{H}_μ , Ω_μ^1 es una contracción de Ω_μ^0 por un factor a_μ . Ω_μ^2 será, respectivamente, la intersección de s con las bandas inferiores y, otra vez, una contracción de Ω_μ^1 por un factor de a_μ (y por lo tanto, una contracción de Ω_μ^0 por un factor de a_μ^2 (Figura 8.4(c)). Ω_μ^3 será la intersección de s con las bandas superiores (Figura 8.4(d)) y así siguiendo... Con esta notación, Ω_μ^∞ es el punto fijo P_μ . Este punto fijo es un punto ‘flip saddle’, es decir, la matriz Jacobiana de la transformación evaluada en el punto fijo tiene un autovalor de valor absoluto mayor que uno, y uno de valor absoluto menor a uno que, además, es negativo (Definición 6.3.2(v)). Este es el caso para todos los valores del parámetro μ considerado. Cada punto P_μ tiene un autovalor α_μ , $-1 < \alpha_\mu < 0$. Como ya dijimos, esto implica que hay una dirección de contracción bien definida, en la estructura local en torno a P_μ , y por lo tanto, encontramos (sin sorpresa) que la magnitud del factor de contracción a_μ es justo el valor absoluto de α_μ . El signo menos de α_μ da cuenta de la “alternancia” de Ω_μ^j entre las bandas superiores e inferiores que van aproximando a P_μ . Entonces, por ejemplo, para $\mu = 2,07$ tenemos que $|\Omega_\mu^{j+1}| \simeq 0,1787 \times |\Omega_\mu^j|$, $j \in \mathbb{N}$, siendo el autovalor correspondiente $\alpha_\mu \approx -0,1786953$ para ese valor de μ .

Sea $\varphi_\mu(k)$ el número de líneas en $H_\mu(k)$ que intersecan a s , es decir, el número de rayas en el peine cantoriano $H_\mu(k)$ correspondiente a la k -ésima iteración del sistema (8.1). Desafortunadamente, no existe una fórmula que nos permita calcular $\varphi_\mu(k)$ directamente, luego debemos proceder mediante técnicas computacionales para obtener ese dato. Presentamos los resultados en la Tabla 8.1 para varios valores de k , y para veinte valores de μ dentro de $[2,01, 2,12]$ (consideramos al parámetro μ de manera discreta, desde $\mu_1 = 2,02$ a $\mu_{20} = 2,115$ a intervalos regulares de longitud $\Delta_\mu = 0,005$).

Para poder estimar el escalamiento de $\varphi_\mu(k)$ como potencia de un número real φ_μ , $\varphi_\mu(k) \sim \varphi_\mu^k$, graficamos $\log \varphi_\mu(k)$ en función de k en la Figura 8.5 para los valores discretizados del parámetro μ considerados. Cuando k crece, las líneas se hacen más rectas, y, descartando los primeros valores de k (para los cuales el atractor no está bien definido aun) interpolamos los datos por cuadrados mínimos. Los valores de las pendientes $\log \varphi_\mu$ se muestran en la Tabla 8.2.

$\mu \backslash k$	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
2.020	1	1	1	1	2	2	2	4	5	6	10	13	17	23	31	35	51	59	83	105	150	182	265	323	465	571
2.025	1	1	1	1	2	2	4	6	9	11	16	19	29	37	53	70	101	129	192	244	355	459	660	855	1229	1583
2.030	1	1	1	1	3	4	6	8	14	15	24	29	45	53	83	102	158	193	299	366	552	689	1037	1299	1945	2458
2.035	1	1	1	1	3	6	7	9	14	16	25	30	48	59	96	120	181	226	337	426	640	823	1219	1593	2352	3065
2.040	1	1	1	1	3	6	9	11	17	19	29	37	57	73	113	143	219	277	413	533	793	1035	1541	2035	2993	3962
2.045	1	1	1	1	3	5	8	10	16	18	28	34	56	70	113	152	231	286	428	550	828	1092	1636	2183	3234	4298
2.050	1	1	1	1	3	5	9	11	17	19	29	37	59	80	128	168	252	327	485	646	969	1315	1953	2651	3879	5271
2.055	1	1	1	1	3	5	9	11	17	19	29	37	63	87	137	179	265	351	523	701	1061	1447	2159	2941	4319	5885
2.060	1	1	1	1	3	5	9	11	17	21	31	41	67	93	143	193	287	383	573	793	1180	1626	2414	3328	4874	6754
2.065	1	1	1	2	4	6	10	12	18	22	32	44	72	100	152	204	305	409	619	851	1277	1767	2619	3621	5334	7422
2.070	1	1	1	2	4	6	10	12	21	25	39	51	81	109	171	225	343	465	709	971	1473	2037	3045	4221	6283	8765
2.075	1	1	1	2	4	6	10	12	21	25	39	51	81	110	172	232	354	484	740	1028	1540	2144	3192	4494	6668	9432
2.080	1	1	1	2	4	6	10	12	23	27	45	59	93	130	202	284	432	598	907	1265	1931	2727	4113	5849	8715	12463
2.085	1	1	1	2	4	6	10	12	25	31	51	67	104	149	227	319	491	688	1066	1498	2286	3240	4890	7020	10530	15160
2.090	2	2	2	3	6	8	14	17	34	40	70	88	146	200	321	438	695	951	1514	2089	3275	4581	7099	10059	15436	22007
2.095	2	2	4	7	10	13	20	24	43	54	90	118	193	272	429	599	935	1317	2066	2934	4542	6489	9947	14353	21876	31728
2.100	3	3	5	7	11	13	23	27	49	61	104	138	230	320	512	716	1137	1601	2524	3585	5587	8023	12379	17923	27440	39974
2.105	3	3	5	7	11	13	23	28	50	64	112	150	244	338	542	766	1226	1729	2736	3903	6110	8851	13680	19965	30364	44923
2.110	3	3	5	7	11	13	23	29	53	70	120	168	266	378	598	860	1362	1962	3074	4468	6951	10238	15789	23383	35857	53281
2.115	3	3	5	7	12	14	26	34	58	80	132	188	296	428	686	999	1569	2313	3607	5347	8301	12401	19129	28669	44055	66283

Cuadro 8.1: Número de líneas paralelas, $\varphi_\mu(k)$, en $H_\mu(k)$, que intersecan al segmento vertical s por P_μ (Figura 8.4) para veinte valores de μ , y para iteraciones k , $k:9 \rightarrow 34$.

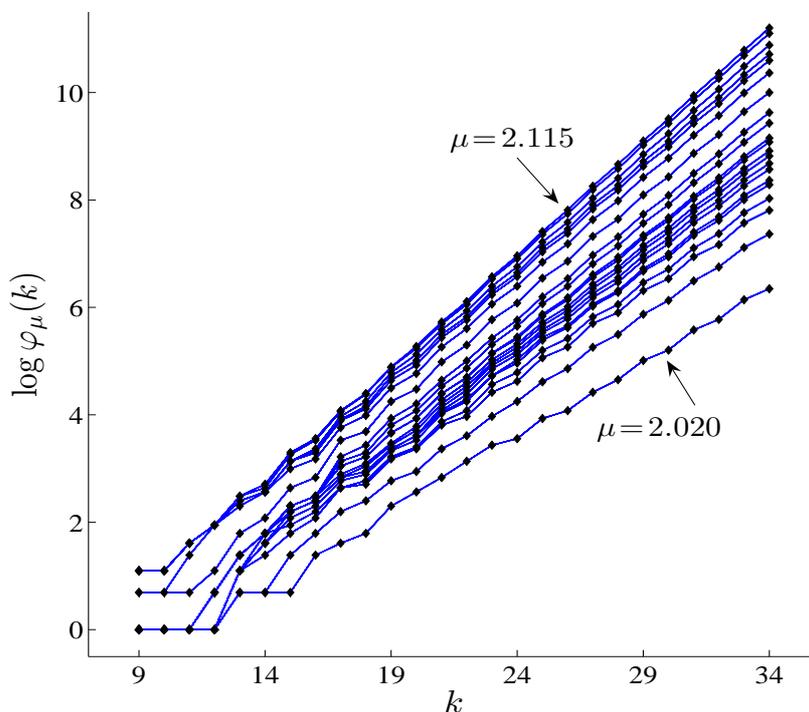


Figura 8.5: $\log \varphi_\mu(k)$ versus k , $k : 9 \rightarrow 34$, para los veinte valores de μ elegidos.

8.3.1. Encastre

Consideremos los cocientes consecutivos

$$Q_\mu(k) = \frac{\varphi_\mu(k+1)}{\varphi_\mu(k)} \quad \text{y} \quad Q_\mu(k+1) = \frac{\varphi_\mu(k+2)}{\varphi_\mu(k+1)}$$

Los cocientes $Q_\mu(k)$ y $Q_\mu(k+1)$ son aproximaciones por exceso y por defecto de un número real φ_μ , como puede verse, por ejemplo, en la Tabla 8.3 para un valor indicado de μ . Luego, tenemos $Q_\mu(k) \approx \varphi_\mu$ y $Q_\mu(k+1) \approx \varphi_\mu$. La distancia

$$\Delta_\mu(k) = |Q_\mu(k+1) - Q_\mu(k)|$$

disminuye de manera tal que el producto $\log \varphi_\mu(k) \times \Delta_\mu(k)$ está acotado, como muestra la Tabla 8.3 para el mismo valor de μ . Luego, $\Delta_\mu(k) < \frac{\text{cte.}}{\log \varphi_\mu(k)}$, y entonces $\Delta_\mu(k) \rightarrow 0$, para $\varphi_\mu(k) \rightarrow \infty$ con k , debido al plegamiento del atractor. Esto significa que $\{[Q_\mu(k+1), Q_\mu(k)]\}_{k \in \mathbb{N}}$ forma un sistema de encaje de intervalos cerrados con amplitudes $\Delta_\mu(k) \rightarrow 0$, que, por consiguiente, define unívocamente un número real φ_μ .

μ	$\log \varphi_\mu$	φ_μ
2.020	0.28228643711626	1.32615852661290
2.025	0.31209188495916	1.36628022786495
2.030	0.31612199105376	1.37179759245288
2.035	0.32366399210672	1.38218280475326
2.040	0.32648111519615	1.38608207362776
2.045	0.33633814547588	1.39981228498228
2.050	0.34367657164593	1.41012248815078
2.055	0.35022959635639	1.41939339873745
2.060	0.35620830513334	1.42790495721938
2.065	0.35724670524330	1.42938846398746
2.070	0.36173612676734	1.43582001749901
2.075	0.36594076757257	1.44186983467474
2.080	0.37898004566234	1.46079388627814
2.085	0.38678525608335	1.47224030267572
2.090	0.39046262028716	1.47766423323591
2.095	0.39379601064952	1.48259808360588
2.100	0.39969831442149	1.49137470352611
2.105	0.40433030159114	1.49829875569860
2.110	0.41105144202936	1.50840294987109
2.115	0.41667932844989	1.51691600312821

Cuadro 8.2: Pendientes $\log \varphi_\mu$, de las rectas de ajuste de los datos de la Figura 8.5, $k: 15 \rightarrow 34$, para los veinte valores de μ elegidos.

8.3.2. Sensibilidad

Miremos la Tabla 8.4. La segunda columna lista veinte valores μ_i elegidos de μ . Para cada $1 \leq i \leq 20$ indicamos, con llaves a la izquierda, el número de rotación p/q correspondiente al escalón o ‘plateau’ en la escalera de Cantor de la Figura 8.3, debajo del cual está indicado el valor de μ_i . La tercera columna lista los valores correspondientes de φ_{μ_i} . En la última columna se muestra, con llaves a la derecha, el promedio $\overline{\Delta \varphi_\mu}$ de valores $\Delta \varphi_{\mu_i} = \varphi_{\mu_{i+1}} - \varphi_{\mu_i}$ dentro de cada escalón y entre los escalones vecinos. Observamos que, para intervalos $[\mu_i, \mu_{i+1}]$ dentro del mismo escalón (es decir, el mismo p/q) el promedio $\overline{\Delta \varphi_\mu}$ es menor que 0.01; mientras que, cuando cambiamos de un escalón a otro vecino de éste (es decir, $p/q \rightarrow p'/q'$), $\overline{\Delta \varphi_\mu}$ es mayor que 0.01. Este hecho evidencia que la variación promedio de φ_μ es sensible a la disposición en la escalera de los escalones en cuestión.

k	$Q_\mu(k+1) - Q_\mu(k)$	$\log \varphi_\mu \times \Delta_\mu(k)$
16	0.550000000000000	1.26642180114673
17	-0.55952380952381	1.39036443500043
18	0.36952380952381	1.12502352936827
19	-0.25230769230769	0.81214713119752
20	0.28054298642534	1.02778652515854
21	-0.24255628177197	0.95368900604933
22	0.22312832710386	0.98052608842504
23	-0.25301786576533	1.18699482872432
24	0.20865497076023	1.07283365904102
25	-0.16875931324911	0.91401738436424
26	0.16904605160036	0.98684528240063
27	-0.15519662708343	0.95322348876741
28	0.14745823522491	0.96789455221368
29	-0.13410073391070	0.92238862747527
30	0.11195330379827	0.81670566721773
31	-0.10863846427302	0.82774181727654
32	0.10230293524169	0.82059805155427
33	-0.09347561247143	0.78031827395280

Cuadro 8.3: Valores de las diferencias entre cocientes consecutivos $Q_\mu(k+1) - Q_\mu(k)$, para $\mu = 2,07$ y $k: 16 \rightarrow 33$. $\Delta_\mu(k) = |Q_\mu(k+1) - Q_\mu(k)|$ disminuye de manera que los valores de $\log \varphi_\mu \times \Delta_\mu(k)$ están acotados.

Miremos la fórmula (8.3). El numerador involucra al parámetro φ_μ el cual, como vimos, es sensible a la escalera. El denominador involucra al parámetro a_μ , factor de contracción, y que es el valor absoluto del autovalor α_μ , correspondiente a la dirección estable (o contractiva) del atractor en torno a P_μ . El comportamiento de a_μ , como función de μ se muestra en la Figura 8.6 como una línea recta, por lo tanto su variación no “salta” como lo hace la de φ_μ . Este hecho, junto con el rango de variación de a_μ , da el cociente anterior, y por lo tanto, la función $\dim(\mu) = \dim_{MF}(\mathcal{H}_\mu)$ resulta sensible a la escalera de Cantor en el mismo sentido en que φ_μ lo es. Para ilustrar esto, graficamos en la Figura 8.7 los valores de $\dim(\mu)$ en función de μ para los mismos veinte valores de μ . El cambio de concavidad/convexidad en el gráfico, junto con los cambios abruptos de pendientes, se reflejan en la Tabla 8.4. Aunque la función $\dim(\mu)$ es creciente y la función $\nu(\mu)$ es decreciente, podemos observar el aspecto escalonado del gráfico, exhibiendo una leve pendiente cuando μ permanece en el mismo ecalón, y una pendiente más marcada cuando μ cambia de escalón.

p/q	μ	φ_μ	$\overline{\Delta\varphi_\mu}$	
7/15	{ 2,020	1.32615852661290	0.04012170125205	
		}		
5/11	{ 2,025	1,36628022786495	0.00551736458794	
		2,030		1,37179759245288
		}		
4/9	{ 2,035	1,38218280475326	0.00881474011451	
		2,040		1,38608207362776
		2,045		1,39981228498228
		}		
3/7	{ 2,050	1,41012248815078	0.00634946930479	
		2,055		1,41939339873745
		2,060		1,42790495721938
		2,065		1,42938846398746
		2,070		1,43582001749901
		2,075		1,44186983467474
		}		
5/12	{ 2,080	1.46079388627814	0.01892405160340	
		}		
2/5	{ 2,085	1,47224030267572	0.01144641639758	
		2,090		1,47766423323591
		2,095		1,48259808360588
		2,100		1,49137470352611
		2,105		1,49829875569860
		2,110		1,50840294987109
		2,115		1,51691600312821

Cuadro 8.4: Variación del promedio, $\overline{\Delta\varphi_\mu}$, de los valores $\Delta\varphi_{\mu_i} = \varphi_{\mu_{i+1}} - \varphi_{\mu_i}$, $i: 1 \rightarrow 19$.

8.3.3. Invariabilidad

Los valores de φ_μ obtenidos hasta ahora dependen del cálculo del número de líneas paralelas $\varphi_\mu(k)$ en cada iteración k , mostradas en la Tabla 8.1. Los números $\varphi_\mu(k)$ fueron obtenidos iterando un cierto segmento inicial I (el mismo para todo μ) ubicado dentro de la cuenca de atracción de \mathcal{H}_μ . Entoces, la longitud de I y su locación en la cuenca, determinan tales valores, debido a la dinámica de estiramiento-plegado del sistema. Luego, dado un valor de μ ; partiendo de un segmento inicial diferente, obtendremos muy diferentes valores de $\varphi_\mu(k)$ para la misma k -ésima iteración. Por ejemplo, en la Tabla 8.5 se muestran los resultados al iterar el mapa sobre otro segmento inicial I' (siendo I' en este caso más largo que I). Obtenemos valores de $\varphi_\mu(k)$ diferentes a los previos en la Tabla 8.1. Sin embargo, repitiendo para este segmento I' todos los cálculos hechos para I en las secciones previas, obtenemos nuevos resulta-

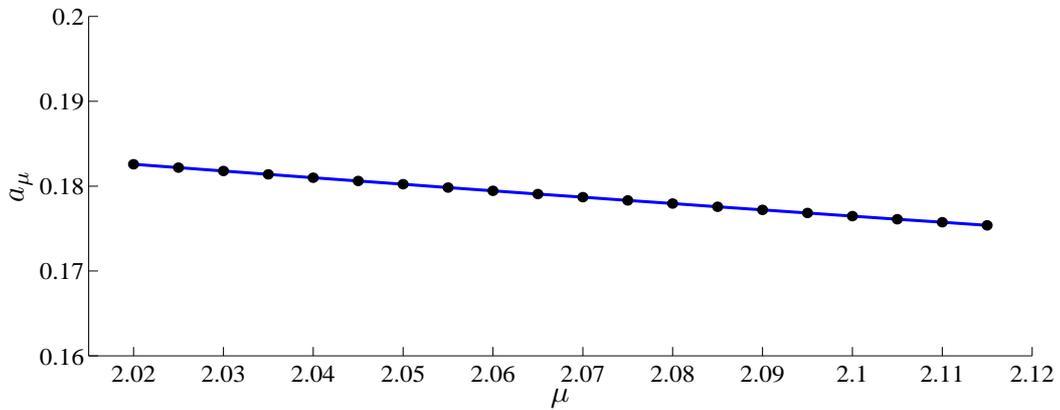


Figura 8.6: $a_\mu(k)$ versus μ , para los veinte valores de μ elegidos.

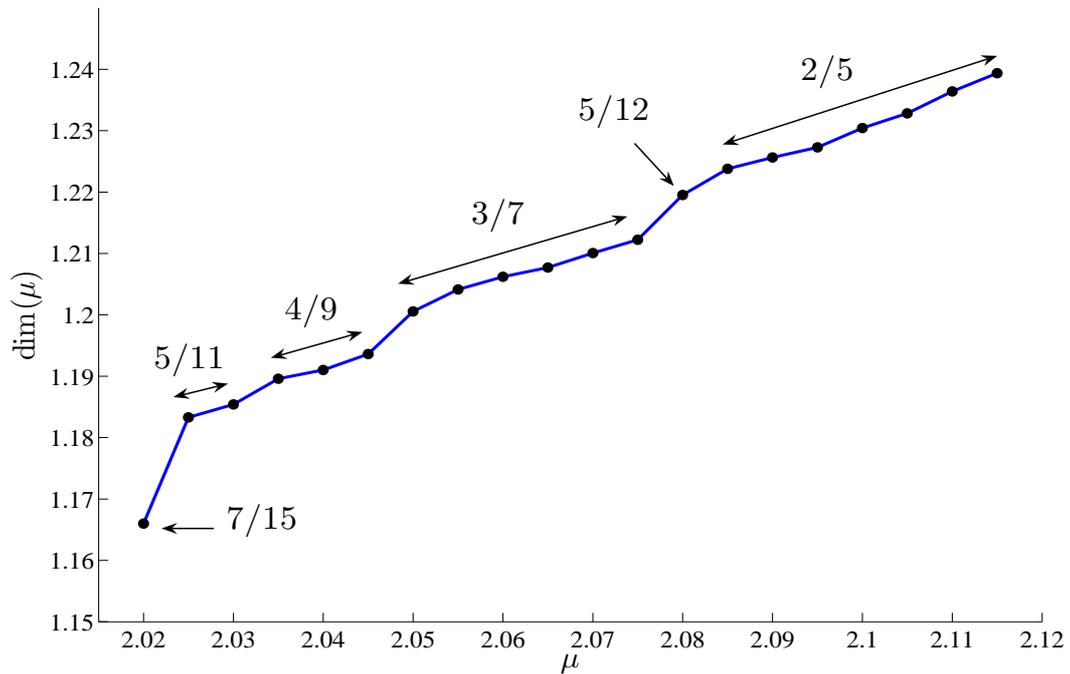


Figura 8.7: Gráfico de $\dim(\mu) = 1 + \log \varphi_\mu / \log(1/a_\mu)$ en función de μ .

dos para $\dim(\mu)$ como función de μ , pero que tienen diferencias insignificantes con la última. La comparación entre los dos gráficos se muestra en la Figura 8.8. Este hecho no es sorprendente, y se debe al carácter ergódico del sistema y a la existencia de una

medida natural sobre él ([BY 93]). Podemos comprobar entonces, que se mantiene bien el carácter sensible de la dimensión. Estas características permanecen para otra selección de segmento inicial: aun cuando el número de líneas cambia, el escalamiento de las líneas φ_μ , no, hecho que se mantiene para todos los valores de μ considerados; y obtenemos las mismas propiedades de encaje y sensibilidad anteriores.

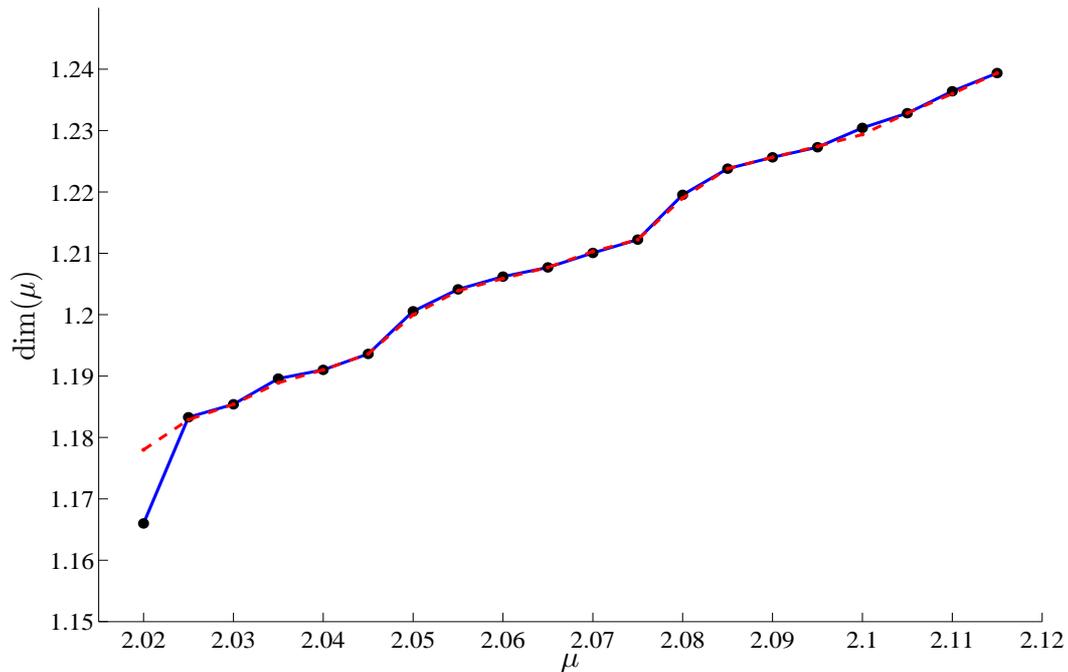


Figura 8.8: La línea sólida (azul) corresponde al mismo gráfico que el de la Figura 8.7. La línea punteada (rojo) es también el gráfico de $\dim(\mu)$ en función de μ , generada a partir de datos provenientes de un segmento inicial diferente.

$\mu \backslash k$	19	29	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
2.020	0	1	1	1	1	3	3	6	6	12	12	22	22	44	44	83
2.025	1	2	3	7	8	13	15	26	31	49	56	92	110	173	204	326
2.030	3	5	5	13	13	23	23	45	45	83	83	158	162	295	308	552
2.035	4	8	9	17	19	30	33	57	65	105	123	198	238	377	460	719
2.040	5	11	11	21	23	37	39	71	81	137	163	267	317	511	316	967
2.045	5	11	11	21	22	42	44	80	90	156	180	303	352	581	692	1122
2.050	4	10	10	22	22	42	46	86	100	176	208	348	420	682	842	1348
2.055	5	9	9	19	21	43	50	90	104	180	212	356	436	722	908	1458
2.060	6	10	10	22	26	48	60	102	122	202	252	408	524	848	1096	1710
2.065	6	10	10	22	26	47	59	101	121	203	255	419	537	869	1127	1769
2.070	8	13	13	25	29	53	69	119	147	243	303	491	633	1019	1343	2111
2.075	8	14	14	24	28	54	74	122	156	248	318	500	670	1054	1434	2210
2.080	9	17	17	31	39	69	89	151	191	317	411	673	896	1428	1940	3020
2.085	9	17	21	36	50	82	112	176	235	383	517	829	1135	1767	2463	3791
2.090	14	29	31	59	72	127	159	275	347	597	770	1292	1711	2786	3761	6021
2.095	19	37	46	82	105	176	227	380	507	830	1121	1809	2499	3964	5538	8663
2.100	24	45	53	95	119	205	267	453	603	995	1353	2195	3043	4851	6827	10731
2.105	26	48	56	101	130	222	286	486	653	1090	1492	2420	3385	5403	7684	12093
2.110	27	49	63	105	145	242	333	542	754	1224	1739	2767	3987	6245	9101	14172
2.115	32	56	78	127	177	296	418	670	970	1550	2256	3544	5230	8162	12114	18784

Cuadro 8.5: Número de líneas paralelas, $\varphi_\mu(k)$, en $H_\mu(k)$, que intersecan al segmento vertical s por P_μ , para los mismos valores de μ en la Tabla 8.1, correspondientes a un segmento inicial distinto, mapeado por el sistema (8.1), $k: 19 \rightarrow 34$.

8.4. Conclusiones

Como hemos visto, la dimensión de Mendès France es un camino alternativo y eficiente para calcular la dimensión de Hausdorff de atractores caóticos tipo Hénon. Esta dimensión está basada en dos parámetros: el valor absoluto, a_μ , del autovalor contractivo, correspondiente a la matriz Jacobiana del mapa evaluada en un punto fijo; y el escalamiento, φ_μ , del número de líneas paralelas aproximantes del punto fijo, producidas por cada iteración del mapa a un segmento inicial. Ambas cantidades pueden ser obtenidas directamente mediante técnicas computacionales básicas, por lo tanto, hacen a la dimensión de Mendès France más sencilla de calcular para este tipo de conjuntos que, por ejemplo, la dimensión de caja. Los resultados de este capítulo extienden, de una manera natural, el estudio de los parámetros a y φ del capítulo anterior, donde \mathcal{H} era el atractor de Hénon del mapa (8.1) para los valores clásicos de $\mu = 1,4$ y $b = 0,3$. Además, esta dimensión provee una interesante relación entre la estructura geométrica del atractor y sus propiedades dinámicas subyacentes: conexión que se hace evidente por la sensibilidad de las funciones $\dim(\mu)$ y φ_μ hacia $\nu(\mu)$. Luego ambas, φ_μ y $\dim_{MF}(\mathcal{H}_\mu)$ son buenos “indicadores” fractales del estado del sistema en su régimen caótico y en ruta hacia su crisis terminal.

Apéndice A

Otra posible aplicación

‘Would you tell me, please, which way I ought to go from here?’. ‘That depends a good deal on where you want to get to’, said the Cat. ‘I don’t much care where—’ said Alice. ‘Then it doesn’t matter which way you go’, said the Cat. ‘—so long as I get SOMEWHERE’, Alice added as an explanation. ‘Oh, you’re sure to do that’, said the Cat, ‘if you walk only enough’.

Lewis Carroll, “Alice’s adventures in Wonderland”.

A.1. Polímeros

Un polímero es una macromolécula constituida por moléculas más pequeñas, las cuales se comportan como unidades repetidas, llamadas monómeros, unidas mediante enlaces covalentes en forma de cadena larga. Los así llamados monómeros no son necesariamente átomos o moléculas determinadas, sino paquetes distintivos para cada polímero con el mismo (aparente) tamaño.

Los polímeros pueden diferir en su “arquitectura”, es decir, en la manera en que están conectados. Así, un polímero *lineal* es una cadena simple de monómeros, sin puntos de ramificación, uno en forma de *anillo* tiene los extremos conectados; y también puede ser de tipo *ramificado*. La estructura influye en gran medida en otras propiedades del polímero (por ejemplo, que sea soluble o no en un determinado medio). A pesar de la diferencias microscópicas entre distintos tipos de moléculas, éstas presentan una notable cantidad de propiedades universales. La física de los polímeros se enfoca en el estudio de las propiedades de los polímeros que no dependen de la naturaleza química exacta de los monómeros que los componen. Estas propiedades dependen muy a menudo del tamaño de la cadena polimérica. Al igual que para una molécula, el “tamaño” de un polímero (macromolécula), puede describirse en términos del *peso molecular* o masa; sin embargo, para éstos, la masa molecular puede ser expresada, a su vez, en términos del *grado de polimerización*, que es esencialmente, el número de unidades monoméricas que componen al mismo. La longitud máxima de una cadena polimérica se llama ‘*contour length*’. Los polímeros pueden ser estudiados bajo difer-

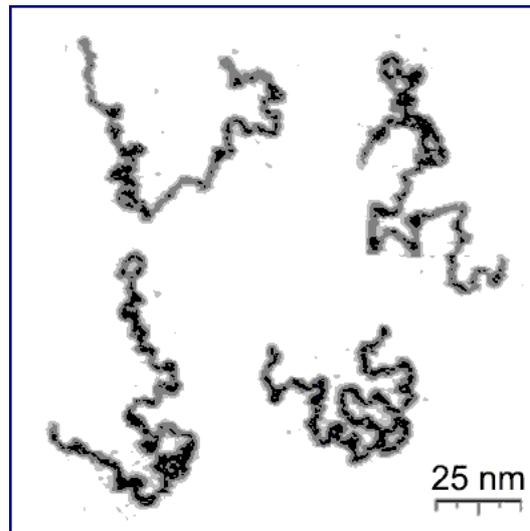


Figura A.1: ‘Appearance of real linear polymer chains as recorded using an atomic force microscope on surface under liquid medium. Chain contour length for this polymer is ~ 204 nm.; thickness is ~ 0.4 nm.’ [RM 05].

entes escalas: en una nano–micro escala hay propiedades que directamente describen a la cadena misma en su estructura polimérica; en una escala intermedia (‘mesoscopic scale’) hay propiedades que describen la morfología del polímero en el espacio ambiente; y a un nivel macroscópico describen mas bien el comportamiento del polímero. Estas últimas dependen fuertemente de las otras dos, es decir, de su estructura y su morfología. Por ejemplo, el incremento en la longitud de una cadena polimérica, puede resultar en detrimento de su movilidad, o en aumento de su viscosidad, etc. Cuando se mezcla un polímero con un “buen solvente” (altamente compatible) la interacción entre solvente y polímero hace que el ovillo macromolecular se expanda, a partir del estado no perturbado en ausencia de estas interacciones; la expansión en presencia de un disolvente “pobre” es menor.

Por eso, una de las propiedades que interesa es estudiar cómo se “despliega” una cadena polimérica a medida que se “recorre” su longitud; esto es, si es una curva arrugada o enrollada, es decir “flexible”, o es más bien longitudinal o “rígida”. Típicamente, se estima

$$R \propto N^\nu, \quad \text{o} \quad N \propto R^{1/\nu},$$

el comportamiento de la longitud N (número de unidades monoméricas, como su ‘contour length’), en función de R , la distancia *principio–fin* (*end-to-end distance*) de la cadena (distancia entre la primera unidad y la última, si es un polímero lineal), o la distancia *principio–fin maximal* (*maximal end-to-end distance*, si es un polímero ramificado) ([VGV 97]). El exponente ν se conoce como el *exponente de Flory*, y se usa, entre otras cosas, para determinar los parámetros de rigidez (‘stiffness’) de los polímeros y ayuda a caracterizar el movimiento de los polímeros en solución. Notar que la distancia principio–fin en este contexto, no es otra cosa que Δ_L , el diámetro de la cápsula convexa de Γ_L , siendo L la longitud de la cadena. De esta manera, los

parámetros R y N , tienen para nosotros una relación natural con la dimensión de Mendès France de una curva.

El exponente de Flory, ν se obtiene minimizando una ecuación (ecuación de energía libre de una cadena polimérica), y se estima

$$\nu = \frac{3}{(n+2)}, \quad (\text{A.1})$$

para polímeros en un buen solvente. El inverso de este exponente se considera como la dimensión fractal de la cadena $d_f = 1/\nu$ ([BZW 02]).

Las cadenas poliméricas pueden interactuar formando, a su vez, estructuras más complejas como las *redes poliméricas* (*'polymer networks'*), y aun más complejas como los *geles*. Tanto la naturaleza de los polímeros, como de las networks, y de los geles, en complejidad ascendente, está munida de una estructura autoreplicativa, por lo que se vuelve natural estudiar las propiedades fractales de estos objetos.

Por ejemplo, en [VGV 97], Vuppu et al. estudiaron la muestras de un biopolímero llamado escleroglucano que, en determinadas soluciones acuosas, forman redes (*'scleroglucan networks'*). Este polímero tiene propiedades (tolerancia a la temperatura, a las concentraciones de sal, a diferentes niveles de pH, etc.) que lo vuelven muy útil para una amplia variedad de aplicaciones (industria del petróleo, alimenticia y farmacéutica), y de allí el interés del estudio de sus propiedades. Quisieron obtener

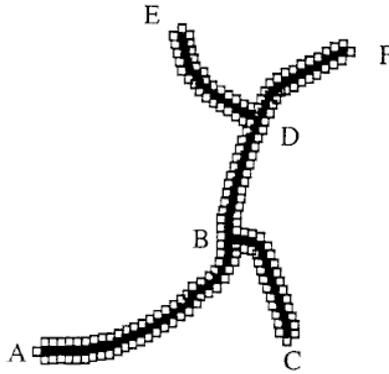


Figura A.2: *'Approximate representation of a scleroglucan network used to show the maximum end-to-end distance and the perimeter calculation. The black squares represent the scleroglucan polymer and the white squares represent the surrounding area. The various end-to-end distances between ends A, C, E and F, are AC, AE, AF, CE, CF, and EF. The maximum end-to-end distance is AF. The perimeter of the structure (made of black squares) is determined by counting all the white squares adjacent to the black squares, and converting this number with the pixels/nm. scale for the image.'* [VGV 97].

información sobre la estructura de estas redes que, a su vez, se pueden complejizar

para formar gel ('scleroglucan gels'), y aplicaron el modelo de Flory y la geometría fractal, para tratar de caracterizarlas.

El procedimiento que realizaron, fue tomar fotografías de las muestras de las soluciones (hechas sobre una superficie de mica) con un microscopio especial (Tapping mode atomic force microscopy, TmAFM), computarizarlas, y contar el número de píxeles en contacto a la estructura polimérica como su 'contour length' (en lugar de N), y estimar la distancia principio-fin maximal, R . Es decir, midieron L y Δ_L como se explica en la Figura A.2, tomada de [VGV 97].

Estimaron que, para varias muestras de su experimento, el exponente de Flory $\nu \approx 0,67$, un valor distinto de 0.75, el cual es válido para $n = 2$ según (A.1). Luego, el valor $d_f = 1/\nu = 1,4925$ resulta mayor que la dimensión fractal esperada de $\approx 4/3$. En [VGV 97, p. 98] los autores dicen: '*... a similar more rigorous theoretical analysis is thus needed to evaluate the meaning of our results and what the chain dimensionality ($1/\nu$) for a networked polymer is.*'

Por otro lado, calcularon de manera gráfica la dimensión de caja (haciendo cubrimientos con diferentes tamaños de bolas), y obtuvieron $d_B = 1,22 \pm 0,06$. Más adelante, en la misma página, los autores escriben: '*Apart from being an analytical tool for quantifying the nonlinear structures of scleroglucan networks, the physical significance of the fractal dimension for scleroglucan structures remains to be determined.*'

Para nosotros, la interpretación de la d_f calculada, es la dimensión de Mendès France para una curva resoluble ($L \propto \Delta_L^{\dim_{MF}(\Gamma)}$) (lo que tiene sentido, dada la potencia de aumento del microscopio utilizado). Y una posible interpretación de la discrepancia entre la d_f y la d_B , es que la dimensión de caja que calculan gráficamente (teniendo en cuenta las limitaciones numéricas) es muy "grosera", en el sentido en que las bolitas (o cajas) del cubrimiento no distinguen el "peso" de cada monómero. Por peso se entiende la concentración molecular del monómero. En la representación de una cadena polimérica, los eslabones de la cadena (unidades monoméricas) son todos iguales. Pero en la realidad, un monómero puede ser más pesado que otro ocupando el mismo lugar. Esto hace que la cadena tenga una estructura "más fina", en el sentido en que la curva está más concentrada o "enrollada" o "arrugada" a escalas muy pequeñas, hecho que las cajas del cubrimiento no detectan. En cambio, al ampliar la curva (o la red) con el microscopio electrónico, contar los píxeles equivale a estimar la longitud con más precisión y, por consiguiente, los diferentes pesos de los monómeros. De ahí que la dimensión hallada d_f sea mayor.

Es importante, y los autores lo observan, disponer de una dimensión fractal (o un espectro de dimensiones) que sea capaz de caracterizar la estructura fina de los polímeros, para poder interpretar estructuras más complejas como son los geles. Un gel es una red polimérica que constituye un conjunto conexo (supongamos dentro de un cubo), que encierra moléculas de agua, pero la distribución del agua también forma un conjunto conexo. Ambos, polímero y agua, tienen dimensión de caja maximal, interior vacío y medida positiva. Más aun, la complejidad puede ser tal que, como ejemplo, en un gel escleroglucano, los autores François, Piacquadio y Daraio ([FPD]), realizaron una descomposición multifractal de la medida del esclero, y obtuvieron trozos disconexos de dos curvas multifractales típicas (tal fenómeno se conoce como

bimultifractalidad ([RS 96]) sobre el cual existe un modelo teórico): uno de los cuales da cuenta de la existencia de “grumos” (unidades monoméricas más pesadas), lo que significa esclero reaccionando consigo mismo, de tal manera que, los túneles en donde se ubica el agua son mucho más angostos.

El espectro multifractal del gel, posee dos ramas disconexas entre sí. Es discontinuo. La rama de la izquierda corresponde, precisamente, a la distribución fractal, dentro del gel, de aquellas unidades más “pesadas”: aquellos grumos con mayor medida de escleroglucano. Tal espectro de descomposición multifractal del gel ayuda a explicar, complementa, la diferencia entre la dimensión de caja y la de Mendès France minimal, anteriormente citadas.

*‘How do you know I’m mad?’ said Alice.
‘You must be—’ said the Cat. ‘—or you
wouldn’t have come here’.*

Lewis Carroll, “Alice’s adventures in Wonderland”.

Índice de figuras

1.1. Conjunto de Cantor, Triángulo de Sierpinski, y esponja de Menger.	3
2.1. $\mathcal{H}^s(E)$ versus s	12
2.2. Método del compás.	14
2.3. Curva de von Koch	18
2.4. Distintas similaridades a partir de una misma generatriz en \mathbb{R}^2	19
2.5. Condición de Cerrado/Abierto para la curva de von Koch.	19
2.6. Triángulo de Sierpinski como curva autosemejante	20
2.7. Curva simple autosemejante en \mathbb{R}^2	21
2.8. Curva de Hilbert en \mathbb{R}^3	22
2.9. Curva autosemejante en \mathbb{R}^3	22
3.1. Río Γ , su lecho y su cuenca.	24
3.2. Ríos longitudinal y meandroso.	24
3.3. Representación de $\Gamma_L(\varepsilon)$ y C_L	25
3.4. Cubrimiento de $\Gamma_L(\varepsilon)$ por bolas de radio ε y radio 2ε	27
3.5. Espirales arquimediana y exponencial	29
4.1. Curva de von Koch expandida	34
4.2. Curva autosemejante expandida	36
5.1. Generatriz p_1 con $b=1/4$, $a=1/2$ y la curva fractal resultante F	50
5.2. Poligonales p'_1 , p'_2 , p'_3 y p'_4 del proceso de expansión correspondiente a la Figura 5.1	51
5.3. τ en función de q y f en función de α	57
5.4. Gráfico esquemático de un espectro $(\alpha(\Omega), f(\alpha(\Omega)))$ con sus valores significativos.	74
5.5. Gráfico esquemático del espectro invertido $(\alpha^*, f^*(\alpha^*))$, de la Figura 5.4.	78
7.1. Transformación de un rectángulo inicial por h_1, h_2 y h_3	94
7.2. (a) El atractor de Hénon, \mathcal{H} ; parte de su cuenca de atracción \mathcal{B} ; y parte de la cuenca de atracción del infinito. (b) \mathcal{H} y sus puntos fijos, P^+ y P^-	95
7.3. (a) Órbitas correspondientes a dos c.i. cercanas. (b) Ampliación de una zona de la figura anterior.	96
7.4. Punto fijo P^+ junto con sus variedades estable, W^s , e inestable, W^u	97
7.5. (a) Ampliación del rectángulo centrado en P^+ de la Figura 7.2 (b). (b) Ampliación de (a).	98

7.6.	Peine-fractal cantoriano	99
7.7.	Expansión de peine cantoriano	100
7.8.	Construcción de la curva Γ como límite de curvas Γ_k , $k \rightarrow \infty$, conectando las infinitas rayas del conjunto E' de la Figura 7.7.	101
7.9.	(a) Atractor \mathcal{H} y conexión entre C y A , y entre B y B' . (b) y (c) Ampliación de (a), mostrando que, realmente, las líneas de la banda C provienen de las de A^2 , y las de B' de B	103
7.10.	Esquema de expansión de $\Omega = \mathcal{H} \cap s$	107
7.11.	Esquema de iteración ($k=9$ y 10) y expansión, mostrando la evolución de la cantidad de líneas en las bandas C^j	108
8.1.	Diagrama de bifurcación del mapa Hénon, para $\mu \in [1,70, 2,15]$	113
8.2.	Atractor \mathcal{H}_μ , su cuenca de atracción y cuenca de atracción del infinito. (a) $\mu = 2,015$, \mathcal{H}_μ es desconexo. (b) $\mu = 2,07$, las dos partes se unen. (c) $\mu = 2,12467$, el atractor y la frontera de su cuenca de atracción se hacen tangentes (crisis terminal).	114
8.3.	Evolución de los números de rotación accesibles para \mathcal{H}_μ , en función del parámetro μ	115
8.4.	(a) \mathcal{H}_μ para $\mu = 2,07$ y su punto fijo interior P_μ . (b) Ampliación de (a) alrededor de P_μ . $\Omega_\mu^0 = \mathcal{H}_\mu \cap s$ es un conjunto tipo Cantor. Ω_μ^1 es la intersección de s con la banda superior. (c) Ampliación de Ω_μ^1 por un factor de $1/0.1787$, mostrando la misma forma que Ω_μ^0 , al rotarlo 180° . (d) Ampliación de Ω_μ^2 por el mismo factor, mostrando la misma forma que Ω_μ^0 , y que Ω_μ^1 rotado 180°	116
8.5.	$\log \varphi_\mu(k)$ versus k , $k : 9 \rightarrow 34$, para los veinte valores de μ elegidos.	119
8.6.	a_μ versus μ , para los veinte valores de μ elegidos.	123
8.7.	Gráfico de $\dim(\mu) = 1 + \log \varphi_\mu / \log(1/a_\mu)$ en función de μ	123
8.8.	La línea sólida (azul) corresponde al mismo gráfico que el de la Figura 8.7. La línea punteada (rojo) es también el gráfico de $\dim(\mu)$ en función de μ , generada a partir de datos provenientes de un segmento inicial diferente.	124
A.1.	Cadenas poliméricas lineales	128
A.2.	Representación aproximada de una red polimérica, usada para calcular la distancia principio-fin maximal y la longitud de la cadena.	129

Índice de cuadros

7.1.	# de líneas en las bandas A_{k+1}, A_k y A_{k-1} , para $k: 8 \rightarrow 16$	105
7.2.	Errores (porcentajes) relacionados con (7.15) y con la Tabla 7.1	106
8.1.	# de $\varphi_\mu(k)$ en $H_\mu(k) \cap S$, $\mu \in [2,020, 2,115]$ y $k: 9 \rightarrow 34$	118
8.2.	Pendientes $\log \varphi_\mu$, correspondientes a los datos de la Figura 8.5, $k:$ 15 \rightarrow 34.	120
8.3.	Valores de $Q_\mu(k+1) - Q_\mu(k)$ y $\log \varphi_\mu \times \Delta_\mu(k)$, $\mu = 2,07$ y $k: 16 \rightarrow 33$	121
8.4.	Variación del promedio $\overline{\Delta \varphi_\mu}$, de los valores $\Delta \varphi_{\mu_i}$, $i: 1 \rightarrow 19$	122
8.5.	# de $\varphi_\mu(k)$, para otro segmento inicial, $k: 19 \rightarrow 34$	125

Bibliografía

- [AS 88] Alligood, K., Sauer, T., “Rotation Numbers of Periodic Orbits in the Hénon map”, *Communications in Mathematical Physics*, **120**, pp. 105–119, (1988).
- [AS 93] Alligood, K., Sauer, T., “Accessible Rotation Numbers for Chaotic States”, *Continuum Theory and Dynamical Systems*, pp. 1–14, *Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics*, **149**, (1993).
- [ASY 97] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A., *Chaos. An Introduction to Dynamical Systems*, Springer–Verlag, New York, (1997).
- [BZW 02] Ba, X-W., Zhang, S-W., Wang, H-J., Wang, S-J., Han, Y-H., “Fractal Dimension of Randomly Branched Polymers in a Good Solvent”, *Chinese Physics Letters*, Vol. 9, **8**, pp. 1135–1138, (2002).
- [BL 90] Bai–Lin, H., *Chaos II*, World Scientific Publishing, (1990).
- [BC 91] Benedicks, M., Carleson, L., “The Dynamics of the Hénon Map”, *Annals of Math.*, Vol. 2, **133**, pp.73–169, (1991).
- [BY 93] Benedics, M., Young, L.S., “SRB Measures for Certain Hénon Maps”, *Invent. Math.*, **112**, pp. 541–576, (1993).
- [CM 92] Cawley, R., Mauldin, R.D., “Multifractal Decompositions of Moran Fractals”, *Advances in Mathematics*, **92**, pp. 196–236, (1992).
- [Dev 87] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., (1987).
- [DO 80] Douady, A., Oesterlé, D., *Dimension de Hausdorff des Attracteurs*, Comptes Rendus de l’Academie des Sciences, Paris, Serie A, **290**, pp. 1135–1138, (1980).
- [EM 92] Evertsz, C.J., Mandelbrot, B.B., “Multifractal Measures”, *Appendix B in: ‘Chaos and Fractals’ by H.O. Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe, Springer New York*, pp. 849–881, (1992).
- [Fal 90] Falconer, K., *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, (1990).

- [Fal 97] Falconer, K., *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, (1997).
- [FKY 83] Frederickson, P., Kaplan, J., Yorke, S., Yorke, J.A., *The Lyapunov Dimension of Strange Attractors*, *Journal of Differential Equations*, **49**, pp. 185–207, (1983).
- [FPD] François, Nora, Piacquadio, M., Daraio, M. *Multifractal Spectra from Environmental Scanning Electron Microscopy Images of Scleroglucan Hydrogels*, en preparación.
- [Gra 83] Grassberger, P., “Generalized Dimensions of Strange Attractors”, *Phys. Lett. A.*, **97**, pp. 227–230, (1983).
- [GBP 88] Grassberger, P., Badii, R., Politi, A., *Scaling Laws for Invariant Measures on Hyperbolic and Nonhyperbolic Attractors*, *Journal of Statistical Physics*, **51**, 135, (1988).
- [GOY 87] Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J.A., “Basin Boundary Metamorphoses: Changes in Accessible Boundary Orbits”, *Physica D*, **24**, pp. 243–262, (1987).
- [GH 83] Guckenheimer, J., Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [HJK 86] Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I., Shraiman, B.J., “Fractal Measures and Their Singularities: The Characterization of Strange Sets”, *Physical Review A*, **33**, pp. 1141–1151, (1986).
- [HP 01] Hansen, R., Piacquadio, M., “The Dimension of Hausdorff and Mendès France. A Comparative Study”, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, Vol. 42, **2**, pp.17–33, (2001).
- [HP 05] Hansen, R., Piacquadio, M., “Fractal Parameters for the Study of Hénon like Attractors”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 15, **4**, pp. 1329–1346, (2005).
- [Hen 76] Hénon, M., “A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor”, *Communications in Mathematical Physics*, **50**, pp. 69–77, (1976).
- [HeP 76] Hénon, M., Pomeau, Y., “Two Strange Attractors with a Simple Structure”, *Turbulence and the Navier–Stokes Equations (Lecture Notes in Mathematics)*, Springer, **565**, pp. 29–68, (1976).
- [HPr 83] Hentschel, H.G., Procaccia, I., “The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals And Strange Attractors”, *Physica D*, **8**, pp. 435–444, (1983).

- [Hut 81] Hutchinson, J.E., “Fractals and Self-similarity”, *Indiana University Mathematics Journal*, **30**, pp. 713–747.
- [Lau 95] Lau, K-S., “Self-similarity L^q -spectrum and Multifractal Formalism”, *Progress in Probability*, **37**, pp. 55–90.
- [Lor 63] Lorenz, E., “Deterministic Nonperiodic Flow”, *Journal of Atmospheric Science*, **20**, pp. 130–141, (1963).
- [LV 03] Luzzatto, S., Viana, M., “Parameter Exclusions in Hénon-like Systems”, *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 58, **6**, pp. 1053–1092, (2003).
- [Man 77] Mandelbrot, B., *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman and Co., San Francisco, (1977).
- [Man 82] Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman and Co., San Francisco, (1982).
- [MT 91] Marsden, J., Tromba, A., *Cálculo Vectorial*, Addison–Wesley Iberoamericana (tercera edición), (1991).
- [MF 91] Mendès France, M., “The Planck Constant of a Curve”, *Fractal Geometry and Analysis*, Kluwer Academic Publishers, pp. 325–366, (1991).
- [Ols 95] Olsen, L., “A Multifractal Formalism”, *Advances in Math.*, **116**, pp. 82–196, (1995).
- [Ott 93] Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, (1993).
- [OSY 89] Ott, E., Sauer, T., Yorke, J.A., *Lyapunov Partition Functions for the Dimensions of Chaotic Sets*, *Physical Review A*, **39**, pp. 4212–4222, (1989).
- [PJS 92] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D., *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, Springer–Verlag, New York, (1992).
- [PC 01] Piacquadio, M., Cesaratto, E., “Multifractal Spectrum and Thermodynamical Formalism of The Farey Tree”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 11, **5**, pp. 1331–1358, (2001).
- [PHP 02] Piacquadio, M., Hansen, R., Ponta, F., “On The Mendès France Fractal Dimension of Strange Attractors: The Hénon Case”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 12, **7**, pp. 1549–1563, (2002).
- [RS 96] Radons, G., Stoop, R., *Superposition of Multifractals: Generators of Phase Transitions in the Generalized Thermodynamic Formalism*, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 82, **3/4**, pp. 1063–1080, (1996).
- [Ren 59] Rényi, A., “On the Dimension and Entropy of Probability Distributions”, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10**, pp. 193–215, (1959).

- [Rie 95] Riedi, R., “An Improved Multifractal Formalism and Self-Similar Measures”, *Journal of Math. Analysis and Applications*, **189**, pp. 462–490, (1995).
- [RM 97] Riedi, R., Mandelbrot, B., “The Inversion Formula for Continuous Multifractals”, *Advances in Applied Mathematics*, **19**, pp. 332–354, (1997).
- [RAS 99] Robert, C., Alligood, K., Sauer, T., “Continued Fractions Hierarchy of Rotation Numbers in Planar Dynamics”, *Physical Review Letters*, **83**, pp. 3629–3632, (1999).
- [RM 05] Roiter, Y., Minko, S., “AFM Single Molecule Experiments at the Solid–Liquid Interface: In Situ Conformation of Adsorbed Flexible Polyelectrolyte Chains”, *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 127, **45**, pp. 15688–15689, (2005).
- [Sim 79] Simó, C., “On the Hénon–Pomeau Attractor”, *Journal of Statistical Physics*, **21**, pp. 465–494.
- [SBH 99] So, P., Barreto, E., Hunt, B., “Box–counting Dimension without Boxes: Computing D_0 from Average Expansion Rates”, *Physical Review E*, Vol. 60, **1**, pp. 378–384, (1999).
- [Stz 96] Strichartz, R., “Fractals in the Large”, *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 50, **3**, pp. 638–657.
- [Str 94] Strogatz, S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Publishing, Cambridge, Massachusetts, (1994).
- [Tri 95] Tricot, C., *Curves and Fractal Dimension*, Springer–Verlag, New York, (1995).
- [TS 00] Tufaile, A., Sartorelli, J.C., “Hénon–like Attractors in Air Bubble Formation”, *Physics Letters A*, **275**, pp. 211–217, (2000).
- [VGV 97] Vuppu, A., García, A., Vernia, Ch., “Tapping Mode Atomic Force Microscopy of Scleroglucan Networks”, *Biopolymers*, Vol. 42, **1**, pp. 89–100, (1997).
- [Wig 03] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer–Verlag, (2003).
- [You 82] Young, L-S., “Dimension, Entropies and Lyapunov Exponents”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **2**, pp. 109–124.