UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Cohomología de Hochschild de álgebras de operadores diferenciales

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas

Mariano Suárez-Alvarez

Director de tesis: Andrea L. Solotar
Codirector: Max Karoubi

Buenos Aires, 2009

Cohomología de Hochschild de álgebras de operadores diferenciales

Resumen

Si A_n es la n-ésima $\mathbb{C}$-álgebra de Weyl, hay un acción canónica del grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}, 2n)$ sobre A_n dada por substitución lineal de los generadores. En particular, si $G \subseteq \mathrm{Sp}(\mathbb{C}, 2n)$ es un subgrupo finito, por restricción de esa acción obtenemos una acción de G sobre A_n. El resultado principal de esta tesis es la determinación del álgebra de cohomología de Hochschild $HH^*(A_n^G)$ del álgebra de invariantes A_n^G: construimos una filtración F sobre el álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ y mostramos que hay un isomorfismo $HH^\bullet(A_n^G) \cong \mathrm{gr}_F \mathbb{C}G$ entre el álgebra de cohomología y el álgebra graduada asociada a F. Esto completa la determinación de la estructura de $HH^\bullet(A_n^G)$ iniciada por [J. Alev, M. A. Farinati, Th. Lambre, y A. L. Solotar, J. Algebra **232** (2000) no. 2, 564–577].

Los resultados de esta tesis aparecieron publicados en los trabajos [M. Suárez-Alvarez, Algebra structure on the Hochschild cohomology of the ring of invariants of a Weyl algebra under a finite group, J. Algebra **248** (2002), no. 1, 291–306].

Palabras clave: cohomología de Hochschild, álgebras de operadores diferenciales, álgebras de Weyl, producto cup, invariantes.

Hochschild cohomology of algebras of differential operators

Abstract

If A_n is the nth Weyl algebra over $\mathbb{C}$, there is a canonical action of the symplectic group $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}, 2n)$ on A_n given by linear substitution of the generators. In particular, if $G \subseteq \mathrm{Sp}(\mathbb{C}, 2n)$ is a finite subgroup, we obtain an action of G on A_n. The main result of this thesis is the determination of the Hochschild cohomology algebra $HH^*(A_n^G)$ of the algebra A_n^G of invariants of A_n under the action of G: we construct a filtration F on the group algebra $\mathbb{C}G$ and show there is an isomorphism $HH^\bullet(A_n^G) \cong \mathrm{gr}_F \mathbb{C}G$ between the cohomology algebra and the graded algebra associated to F. This completes the description of the Hochschild cohomology of A_n^G started by [J. Alev, M. A. Farinati, Th. Lambre, y A. L. Solotar, J. Algebra **232** (2000) no. 2, 564–577].

The results of these thesis have been published as [M. Suárez-Alvarez, Algebra structure on the Hochschild cohomology of the ring of invariants of a Weyl algebra under a finite group, J. Algebra **248** (2002), no. 1, 291–306].

Keywords: Hochschild cohomology, algebras of differential operators, Weyl algebras, cup-product, invariants.

Agradecimientos

A los muchos a quienes debo mi formación como matemático: mis profesores, mis compañeros de estudio, mis alumnos, la gran cantidad de matemáticos que conocí en estos años. De ellos aprendí matemática, claro. Pero también aprendí de ellos que hacer matemática es una actividad profundamente humana, y gracias a ellos pude apreciar el inmenso valor que esto tiene. Mi agradecimiento a todos ellos es realmente sincero.

A *Jacques Alev*, *Nicolás Andruskiewitsch* y *Gabriel Minian* por haber aceptado ser jurados de esta tesis y por la extraordinaria paciencia que mostraron.

A *Max Karoubi*, con quién fue a la vez un placer y un honor trabajar.

A *Andrea Solotar*, mi directora, que no deja de sorprenderme por la dedicación, la pasión y la generosidad con que encara cada cosa que hace, y sin cuyo apoyo constante ciertamente nada de esto hubiera sucedido.

A *Fernando*.

A mi familia.

Introducción

El objetivo de esta tesis es la determinación de la estructura del álgebra de cohomología de Hochschild de ciertas álgebras de operadores diferenciales. La situación que más nos interesa es la de un grupo finito G que actúa de manera lineal sobre un espacio vectorial complejo $\mathbb{C}$: logramos describir completamente la cohomología de Hochschild $HH^\bullet(\mathrm{Diff}(V/G))$ del álgebra $\mathrm{Diff}(V/G)$ de operadores diferenciales regulares sobre la variedad cociente V/G en términos de datos asociados a la representación de G. Más aún, nuestra descripción es efectiva y podemos darla explicitamente en ejemplos no triviales.

Una motivación inmediata para hacer esto es la de obtener invariantes que permitan avanzar sobre el problema de distinguir a las álgebras $\mathrm{Diff}(V/G)$ que pueden construirse de esta forma: el álgebra de cohomología de Hochschild es, de acuerdo a un resultado clásico de Jeremy Rickard, un invariante derivado del álgebra $\mathrm{Diff}(V/G)$ y, en consecuencia, nuestros resultados permiten distinguir efectivamente a estas álgebras entre sí. Este punto de vista aparece como una extensión natural de trabajos de Jacques Alev y otros que tenían a la conjetura de Gelfand-Kirilov como objetivo último.

Una motivación más general para estudiar a las álgebras $\mathrm{Diff}(V/G)$ es que éstas pueden verse como deformaciones no conmutativas de las álgebras $\mathcal{O}_{V/G}$ de funciones regulares sobre las variedades cociente V/G o, más precisamente, sobre los fibrados cotangentes de éstas, y que entonces uno puede esperar obtener información de naturaleza geométrica sobre V/G a partir de las propiedades algebraicas y homológicas del álgebra $\mathrm{Diff}(V/G)$. Se sigue de un resultado de Mariusz Wodziki [Wod87] que, si X es una variedad algebraica afín regular definida sobre $\mathbb{C}$ y si $\mathrm{Diff}(X)$ es el álgebra de operadores diferenciales regulares sobre X, hay un isomorfismo canónico entre la cohomología de Hochschild $HH^\bullet(\mathrm{Diff}(X))$ y la cohomología de de Rham $H^\bullet(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ de la variedad compleja $X_{\mathbb{C}}$ asociada a X.

Frente a este hecho es natural preguntarse qué sucede en la situación más general en que la variedad X no es regular. Desde este punto de vista, las variedades cociente V/G proveen una gran familia de ejemplos de prueba para estudiar esta cuestión y que, de hecho, contiene varios ejemplos de gran interés, como aquella en la que G es el grupo de Weyl de un álgebra de Lie semisimple actuando naturalmente sobre la correspondiente álgebra de Cartan $V = \mathfrak{h}$, o la decripción del esquema de Hilbert de puntos en el plano como resolución de la n-ésima potencia simétrica $(\mathbb{C}^2)^n/S_n$ de $\mathbb{C}^2$.

Finalmente, la descripción de la cohomología de las álgebras $\mathrm{Diff}(V/G)$ y de la estructura algebraica que existe sobre ella es un paso importante, de acuerdo al método desarrollado por Gerstenhaber, para el estudio de la teoría de deformaciones de $\mathrm{Diff}(V/G)$. En el caso particular, y el más interesante, en que G es un grupo generado por reflexiones, este estudio ha sido llevado a cabo por Victor Ginzburg y Pavel Etingof.

Índice general

CAPÍTULO I

La cohomología de Hochschild de un álgebra

1. Definición

1.1. Fijemos un cuerpo k. En todo lo que sigue, escribiremos $\otimes$ y $\hom(-,-)$ en lugar de $\otimes_k$ y $\hom_k(-,-)$, todos los espacios vectoriales serán k-espacios vectoriales y todas nuestras álgebras serán k-álgebras.

1.2. Si A es un álgebra, notamos ${}_A\mathsf{Mod}$ y Mod_A a las categorías de A-módulos a izquierda y a derecha, respectivamente, y si B es otra álgebra, escribimos ${}_A\mathsf{Mod}_B$ a la categoría de (A,B)-bimódulos. Cuando $B = A$, diremos A-bimódulos en lugar de (A,A)-bimódulos.

1.3. El *álgebra opuesta* A^{op} de A coincide con A como espacio vectorial y su producto $\cdot$ está dado en términos del de A vía la relación $a \cdot b = ba$. Es inmediato verificar que esto define en efecto un álgebra asociativa; en particular, su elemento unidad es el mismo que el de A. Hay un isomorfismo de categorías ${}_{A^{\mathrm{op}}}\mathsf{Mod} \cong \mathsf{Mod}_A$, al que consideramos una identificación.

1.4. El *álgebra envolvente* A^e de A es simplemente el álgebra producto tensorial $A \otimes A^{\mathrm{op}}$. Hay un isomorfismo de categorías ${}_{A^e}\mathsf{Mod} \cong {}_A\mathsf{Mod}_A$, al que consideramos, como antes, una identificación.

1.5. La *cohomología de Hochschild de A* es el functor de Yoneda

$$H^\bullet(A,-) = \operatorname{Ext}^\bullet_{A^e}(A,-) : {}_A\mathsf{Mod}_A \to {}_k\mathsf{Mod}^{\mathbb{Z}}$$

con valores en la categoría de espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados. Si $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, decimos que $H^\bullet(A,M)$ es la *cohomología de Hochschild de A con valores en M*. Si $M = A$ es el bimódulo regular, escribimos simplemente $HH^\bullet(A) = H^\bullet(A,A)$.

1.6. En vista de su definición, la cohomología de Hochschild es un ∂-functor. Explícitamente, dada una sucesión exacta corta

$$\mathcal{E}: \quad 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

en ${}_A\mathsf{Mod}_A$, existe un morfismo $\partial^\bullet_{\mathcal{E}} : H^\bullet(A,M'') \to H^{\bullet+1}(A,M')$ de grado 1, natural con respecto a morfismos de sucesiones exactas, que da una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^p(A,M') \xrightarrow{f^p_*} H^p(A,M) \xrightarrow{g^p_*} H^p(A,M'') \xrightarrow{\partial^p_{\mathcal{E}}} H^{p+1}(A,M') \longrightarrow \cdots$$

De hecho, se trata de un ∂-functor *universal*, *cf.* [Gro57], pero no necesitaremos esto.

1.7. Para calcular la cohomología de Hochschild, podemos usar el hecho de que la categoría ${}_A\mathsf{Mod}_A$ posee—porque es isomorfa a una categoría de módulos—tanto suficientes objectos proyectivos como suficientes objectos inyectivos. Esto tiene como consecuencia que el functor de Yoneda $\operatorname{Ext}^\bullet_{A^e}(-,-)$ es naturalmente isomorfo al functor derivado a derecha de $\hom_{A^e}(-,-)$ con respecto a cualquiera de sus variables o, de hecho, con respecto a ambas variables simultáneamente.

Nos interesa particularmente una de estas opciones, que ahora describimos en detalle.

1.8. Fijemos una resolución proyectiva $\varepsilon : P \to A$ del A-bimódulo regular A en ${}_A\mathsf{Mod}_A$, de manera que P es un complejo de A-bimódulos proyectivos concentrado en grados negativos y ε es un morfismo de complejos—consideramos aquí a A como un complejo de A-bimódulos concentrado en grado 0—que induce un isomorfismo en homología. Una tal resolución existe siempre porque, como dijimos arriba, la categoría de A-bimódulos es isomorfa a la de A^e-módulos izquierdos, y ésta, como toda categoría de módulos, posee suficientes objectos proyectivos.

Si $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, en vista del isomorfismo $\operatorname{Ext}^\bullet_{A^e}(-,M) = R^\bullet(\hom_{A^e}(-,M))$, *cf.* [HS97, Th. IV.9.1], tenemos que

$$H^\bullet(A,M) \cong H(\hom_{A^e}(P,M)) \tag{2}$$

de manera natural. Si, además, $f : M \to N$ es un morfismo en ${}_A\mathsf{Mod}_A$, el morfismo $H^\bullet(A,f) : H^\bullet(A,M) \to H^\bullet(A,N)$ corresponde, bajo el isomorfismo (2), al morfismo inducido en la homología por f,

$$H(\hom_{A^e}(P,f)) : H(\hom_{A^e}(P,M)) \to H(\hom_{A^e}(P,N)).$$

Finalmente, si $\mathcal{E}$ es una sucesión exacta corta como en (1), el morfismo de conexión

$$\partial^\bullet_{\mathcal{E}} : H^\bullet(A,M'') \to H^{\bullet+1}(A,M')$$

corresponde al morfismo de conexión de la sucesión exacta larga obtenida a partir de la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \hom_{A^e}(P,M') \xrightarrow{f_*} \hom_{A^e}(P,M) \xrightarrow{g_*} \hom_{A^e}(P,M'') \longrightarrow 0$$

Vemos así que la elección de la resolución $P \to A$ de A como A-bimódulo permite dar una realización concreta del ∂-functor $H^\bullet(A,-)$.

1.9. El bimódulo regular $A \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ posee muchas resoluciones $P \to A$. La teoría general de functores derivados nos asegura que la descripción de $H^\bullet(A,-)$ dada en 1.8 no depende, a menos de un isomorfismo canónico, de la resolución elegida, pero es esperable que, al hacer manipulaciones, sea de interés tener tanto control sobre P como sea posible. En particular, en vista de las aplicaciones, es deseable disponer de resoluciones que dependan en forma natural, en un sentido apropiado, del álgebra A. Describimos a continuación una resolución de A especialmente conveniente desde este punto de vista, a la que llamamos *resolución estándar*.

1.10. Antes que nada, observemos que el functor evidente

$$F = A \otimes (-) \otimes A : {}_k\mathsf{Mod} \to {}_A\mathsf{Mod}_A$$

toma sobre los objetos valores proyectivos. Esto se sigue inmediatamente de la fórmula de adjunción

$$\hom_{A^e}(A \otimes M \otimes A, N) \cong \hom(M, N),$$

válida si $M \in {}_k\mathsf{Mod}$ y $N \in {}_A\mathsf{Mod}_A$.

1.11. Si $p \in \mathbb{N}_0$, pongamos $B^{-p}A = F(A^{\otimes p}) = A^{\otimes(p+2)}$; si $p \in \mathbb{N}$, pongamos $B^pA = 0$. Por otro lado, si $p \in \mathbb{N}$, sea $d^{-p} : B^{-p}A \to B^{-p+1}A$ el morfismo de A-bimódulos dado por

$$d^{-p}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+1}a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{p+1},$$

y sea $d^p = 0 : B^pA \to B^{p+1}A$ si $p \geq 0$.

1.12. Proposición. *(BA, d) es un complejo de A-bimódulos proyectivos. Hay un morfismo $\varepsilon : BA \to A$ tal que $\varepsilon^0 : a \otimes b \in B^0A = A \otimes A \mapsto ab \in A$ y este induce un isomorfismo en la homología. En particular, $\varepsilon : BA \to A$ es una resolución proyectiva de A en ${}_A\mathsf{Mod}_A$.*

Demostración. Un cálculo directo muestra que $d^{p+1} \circ d^p = 0$ y que $\varepsilon^\bullet$ es un morfismo de complejos. Las componentes homogéneas de BA son proyectivas como A-bimódulos en vista de la observación hecha en 1.10. Resta mostrar que ε induce un isomorfismo en la homología.

Consideremos el morfismo de complejos $\varphi : A \to BA$ tal que $\varphi^0(a) = 1 \otimes a$. Es inmediato que $\varepsilon \circ \varphi = 1_A$. Por otro lado, $\varphi \circ \varepsilon \simeq 1_{BA}$ via la homotopía $s : BA \to BA[-1]$ dada, para cada $p \in \mathbb{N}_0$, por

$$s^{-p}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{p+1}$$

sobre los tensores elementales de $B^{-p}A$. □

1.13. Especializando la descripción de $H^\bullet(A, -)$ hecha en 1.8 al caso en que usamos la resolución estándar, obtenemos lo siguiente. Sea $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ y sea

$$C(A, M) = \hom_{A^e}(BA, M).$$

Se trata, a menos de un isomorfismo canónico, del complejo de espacios vectoriales concentrado en grados no-negativos que tiene $C^p(A, M) = \hom(A^{\otimes p}, M)$ si $p \in \mathbb{N}_0$, y en el que la diferencial $d^p : C^p(A,M) \to C^{p+1}(A,M)$ es tal que, si $f \in C^p(A,M)$,

$$
\begin{aligned}
(d^p f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) + (-1)^{p+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) a_{p+1}.
\end{aligned}
$$

Entonces es $H^\bullet(A,M) = H(C(A,M))$ de manera natural.

1.14. En todo lo que sigue identificaremos $C^0(A,M) = \hom(k,M)$ con M.

2. Cálculos elementales

2.1. Sea $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$. De la definición misma, tenemos que es

$$H^0(A,M) = \operatorname{Ext}^0_{A^e}(A,M) = \hom_{A^e}(A,M).$$

Si notamos

$$M^A = \{m \in M : am = ma \text{ para todo } a \in A\},$$

entonces es fácil verificar que la aplicación

$$f \in \hom_{A^e}(A,M) \mapsto f(1) \in M^A$$

está bien definida y que, de hecho, establece un isomorfismo $H^0(A,M) \cong M^A$ natural en M. En particular, cuando $M = A$ vemos que

$$HH^0(A) \cong A^A = Z(A)$$

es el centro de A.

2.2. Una 1-cocadena $f \in C^1(A,M)$ del complejo $C(A,M)$ de 1.13, es decir, un morfismo k-lineal $f : A \to M$, es un 1-cociclo si, cualesquiera sean a_1, $a_2 \in A$, se tiene que

$$(d^1 f)(a_1 \otimes a_2) = a_1 f(a_2) - f(a_1 a_2) + f(a_1) a_2 = 0.$$

Vemos así que el conjunto de 1-cociclos es precisamente $Z^1(A,M) = \operatorname{Der}_k(A,M)$, el espacio de k-derivaciones de A con valores en M.

Por otro lado, si $m \in C^0(A,M) = M$, su coborde $d^0 m \in C^1(A,M)$ es el morfismo

$$a \in A \mapsto am - ma \in M.$$

Vemos así que el conjunto de 1-cobordes en el complejo $C(A,M)$ coincide con el de las k-derivaciones $f : A \to M$ para las cuales existe un elemento $m \in M$ tal que $f(a) = am - ma$. Estas derivaciones se llaman *derivaciones interiores* y forman claramente un subespacio $\operatorname{InnDer}_k(A,M) \subset \operatorname{Der}_k(A,M)$.

Concluimos de esta manera que hay un isomorfismo natural

$$H^1(A,M) \cong \frac{\operatorname{Der}_k(A,M)}{\operatorname{InnDer}_k(A,M)}.$$

2.3. Por supuesto, si el álgebra A es conmutativa y M es un A-bimódulo simétrico, se tiene que $\operatorname{InnDer}_k(A, M) = 0$, así que $H^1(A, M) = \operatorname{Der}_k(A, M)$. En particular, en este caso es $HH^1(A) = \operatorname{Der}_k(A)$.

3. Relación con la cohomología de módulos

3.1. Lema. *Sean A, B y C tres k-álgebras, y sean $M \in \mathsf{Mod}_{A\otimes B}$, $N \in {}_A\mathsf{Mod}_C$ y $P \in \mathsf{Mod}_{B\otimes C}$. Entonces hay un isomorfismo natural*

$$\varphi_{M,N,P} : \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, \hom_{C^{\mathrm{op}}}(N, P)) \to \hom_{B^{\mathrm{op}}\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, P)$$

Demostración. Basta definir

$$\varphi_{M,N,P}(f)(m \otimes n) = f(m)(n)$$

para todo $f \in \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, \hom_{C^{\mathrm{op}}}(N, P))$, $m \in M$ y $n \in N$ para obtener un morfismo natural. Por otro lado, podemos definir otro morfismo

$$\psi_{M,N,P} : \hom_{B^{\mathrm{op}}\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, P) \to \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, \hom_{C^{\mathrm{op}}}(N, P))$$

poniendo

$$\psi_{M,N,P}(f)(m)(n) = f(m \otimes n)$$

para todo $f \in \hom_{B^{\mathrm{op}}\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, P)$, $m \in M$ y $n \in N$. Dejamos al lector las verificaciones de que se trata de buenas definiciones y de que, de hecho, obtenemos de esta manera morfismos inversos. □

3.2. Lema. *Sean A, B y C tres k-álgebras, y sean $M \in \mathsf{Mod}_{A\otimes B}$ y $N \in {}_A\mathsf{Mod}_C$ módulos proyectivos. Entonces $M \otimes_A N$ es un $B \otimes C$-módulo derecho proyectivo.*

Demostración. De acuerdo a 3.1 hay un isomorfismo

$$\hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, \hom_{C^{\mathrm{op}}}(N, -)) \cong \hom_{B^{\mathrm{op}}\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, -)$$

de functores definidos sobre $\mathsf{Mod}_{B\otimes C}$. El functor $\hom_{B^{\mathrm{op}}\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, -)$ es, de esta manera, naturalmente isomorfo a la composición de los functores $\hom_{C^{\mathrm{op}}}(N, -)$ y $\hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, -)$, que son exactos. Resulta entonces que es él mismo exacto y, en consecuencia, que $M \otimes_A N$ es proyectivo en $\mathsf{Mod}_{B\otimes C}$. □

3.3. Proposición. *Sean A, B y C tres k-álgebras, y sean $M \in \mathsf{Mod}_{A\otimes B}$, $N \in {}_A\mathsf{Mod}_C$ y $P \in \mathsf{Mod}_{B\otimes C}$. Supongamos que $\operatorname{Tor}_+^A(M, N) = 0$. Entonces hay una sucesión espectral convergente que tiene*

$$E_2^{p,q} \cong \operatorname{Ext}^p_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, \operatorname{Ext}^q_{C^{\mathrm{op}}}(N, P)) \Rightarrow \operatorname{Ext}_{B^{\mathrm{op}}\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, P).$$

Demostración. Fijemos resoluciones proyectivas $X \to M$ y $Y \to N$ de M como $A^{\mathrm{op}} \otimes B^{\mathrm{op}}$-módulo y de N como $A \otimes C^{\mathrm{op}}$-módulo, respectivamente. El complejo $X \otimes_A Y$ calcula $\operatorname{Tor}^A(M, N)$, de manera que, en vista de la hipótesis, es acícliclo. Por otro lado, del lema 3.2 sabemos que $X \otimes_A Y$ es un complejo de $B^{\mathrm{op}} \otimes C^{\mathrm{op}}$-módulos proyectivos, asi que $X \otimes_A Y \to M \otimes_A N$ es una resolución proyectiva de $M \otimes_A N$

como $A^{\mathrm{op}} \otimes B^{\mathrm{op}}$-módulo. Como consecuencia de esto, la cohomología del complejo $\hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(X \otimes_A Y, P)$ es naturalmente isomorfa a $\operatorname{Ext}_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, P)$.

Consideremos ahora la sucesión espectral E correspondiente al complejo doble $U = \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(X \otimes_A Y, P)$ filtrado con la filtración F para la cual es

$$F^p U^q = \bigoplus_{\substack{r+s=q\\ s\geq q}} \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(X^p \otimes_A Y^q, P).$$

Esta sucesión espectral, soportada en el primer cuadrante, es convergente y converge a $H(U) = \operatorname{Ext}_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M \otimes_A N, P)$. Usando 3.1, vemos que

$$E_0^{p,q} = \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(X_p \otimes_A Y_q, P) \cong \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(X_p, \hom_{C^{\mathrm{op}}}(Y_q, P))$$

y la diferencial sobre E_0 está inducida por la diferencial de Y. Como el functor $\hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(X, -)$ es exacto, tenemos que

$$E_1^{p,q} \cong \hom_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(X_p, \operatorname{Ext}^q_{C^{\mathrm{op}}}(N, P))$$

y es fácil ver que la diferencial sobre E_1 es la inducida por la de X. De esta manera concluimos inmediatamente que

$$E_2^{p,q} \cong \operatorname{Ext}^p_{A^{\mathrm{op}}\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, \operatorname{Ext}^q_{C^{\mathrm{op}}}(N, P)).$$

La sucesión espectral E, entonces, tiene la forma deseada. □

3.4. Proposición. ([CE99, Theorem 2.8a]) *Sea A una k-álgebra y sean M, $N \in \mathsf{Mod}_A$. Si dotamos al espacio vectorial* $\hom(M, N)$ *de su estructura canónica de A-bimódulo, hay un isomorfismo natural*

$$\operatorname{Ext}_A(M, N) \cong H^\bullet(A, \hom(M, N)).$$

Hay, por supuesto, un resultado simétrico que expresa el functor $\operatorname{Ext}_A(-,-)$ definido sobre ${}_A\mathsf{Mod}$ en términos de la cohomología de Hochschild $H^\bullet(A, -)$.

Demostración. En la proposición 3.3 elijamos A, B, C, M, N y P como A^{op}, A, k, A, M y N, respectivamente. Esto nos da una sucesión espectral convergente que tiene

$$E_2^{p,q} \cong \operatorname{Ext}^p_{A\otimes A^{\mathrm{op}}}(A, \operatorname{Ext}^q_{k^{\mathrm{op}}}(M, N)) \Rightarrow \operatorname{Ext}_{A^{\mathrm{op}}\otimes k^{\mathrm{op}}}(A \otimes_A M, N).$$

Como $k = k^{\mathrm{op}}$ es un cuerpo, $\operatorname{Ext}_k^+(-,-) \cong 0$ y esta sucesión espectral degenera en isomorfismos $\operatorname{Ext}_{A^e}(A, \hom(M, N)) \cong \operatorname{Ext}_A(M, N)$. □

4. Extensiones

4.1. Una *extensión* de un álgebra A es un epimorfismo de álgebras $p : B \to A$. Dada una tal extensión, es claro que $M = \ker p$ es un ideal bilátero en B, así que en particular M puede ser visto como un B-bimódulo.

4.2. Decimos que la extensión $p : B \to A$ es *infinitesimal* si $M^2 = 0$. En ese caso, es fácil verificar que M adquiere un estructura de A-bimódulo poniendo, si $a_1, a_2 \in A$, $m \in M$,

$$a_1 \cdot m \cdot a_2 = b_1 m b_2,$$

con $b_i \in p^{-1}(a_i)$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

4.3. Si $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, una *extensión infinitesimal de A por M* es una terna (i, B, p) en la que B es un álgebra, $p : B \to A$ es un morfismo de álgebras e $i : M \to B$ es un morfismo de espacios vectoriales tales que es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$$

y

$$i(p(b)mp(b')) = bi(m)b', \qquad \forall b, b' \in B, \forall m \in M. \tag{3}$$

Esta última condición es equivalente a que p sea una extensión infinitesimal y que i induzca un isomorfismo de A-bimódulos entre M y $\ker p$, dotado este último de su estructura de A-bimódulo descripta en 4.1.

4.4. Escribamos $\operatorname{InfExt}'(A, M)$ a la clase de todas las extensiones infinitesimales de A por M.

4.5. Si $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, la *extensión trivial de A por M* es la extensión $\mathcal{E}_0 = (i, B, p)$ en la que el álgebra B es el espacio vectorial $A \oplus M$ dotado del producto

$$(a_1, m_1) \cdot (a_2, m_2) = (a_1 a_2,\ a_1 m_2 + m_1 a_2),$$

el morfismo $p : B \to A$ es la proyección en el primer sumando e $i : M \to B$ la inclusión en el segundo. Que esto define en efecto una extensión infinitesimal de A por M sigue de una verificación directa. Habitualmente escribimos $A \rtimes M$ al álgebra B que aparece en $\mathcal{E}_0$.

4.6. Si $\mathcal{E} = (i, B, p)$ y $\mathcal{E}' = (i', B', p')$ son dos extensiones infinitesimales de A por M, decimos que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son *equivalentes*, y notamos $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}'$, si existe un morfismo de álgebras $\varphi : B \to B'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "p'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En vista del lema de los 5, vemos que en ese caso φ es un isomorfismo. Se sigue inmediatamente de esto que la relación $\sim$ es simétrica. Como claramente es reflexiva y transitiva, se trata de hecho de una relación de equivalencia.

4.7. Notemos $\operatorname{InfExt}(A, M)$ al cociente $\operatorname{InfExt}'(A, M)/\sim$. No es difícil ver que se trata de un conjunto.

4.8. Sea $\mathcal{E} = (i, B, p) \in \operatorname{InfExt}'(A, M)$ y sea $f : M \to M'$ un morfismo en ${}_A\mathsf{Mod}_A$. Vemos a M como un B-bimódulo por restricción de escalares a lo largo de p de manera que, en particular, podemos considerar la extensión trivial $\mathcal{E}_0 = (i_0, B \rtimes M', p_0)$ de B por M'.

Sea $\Delta : m \in M \mapsto (i(m), f(m)) \in B \rtimes M'$. Se trata claramente de un monomorfismo de espacios vectoriales. Su imagen es un ideal bilátero: en efecto, si $m \in M$ y $(b, m') \in B \ltimes M'$, es

$$\Delta(m) \cdot (b, m') = (i(m)b, i(m)m' + f(m)b).$$

Por otro lado, tenemos que $i(m)b = i(mp(b))$, que

$$f(m)b = f(m)p(b) = f(mp(b))$$

y, por la forma en que B actúa en M', que $i(m)m' = p(i(m))m' = 0$. Se sigue de esto que $\Delta(m) \cdot (b, m') = \Delta(mp(b)) \in \operatorname{im} \Delta$, y vemos que $\operatorname{im} \Delta$ es un ideal a izquierda; una cálculo similar muestra que el ideal es tambien ideal a derecha.

Tenemos así un álgebra $B' = (B \rtimes M')/\operatorname{im} \Delta$ y podemos considerar el diagrama de espacios vectoriales

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i'"'] & B' \arrow[r, "p'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el que $f' : B \to B'$ e $i' : M' \to B'$ están inducidas por las inyecciones canónicas $B \to B \oplus M'$ y $M' \to B \oplus M'$ y, finalmente, p' esta inducida por p.

La construcción hecha implica que el cuadrado izquierdo del diagrama es cocartesiano en ${}_k\mathsf{Mod}$; en particular, la segunda fila es exacta. Un cálculo directo muestra que p' es un morfismo de álgebras y que la condición (3) se satisface. Vemos así, en definitiva, que la terna $f_*(\mathcal{E}) = (i', B', p')$ es un elemento de $\operatorname{InfExt}'(A, M')$.

4.9. Esto define una función $f_* : \operatorname{InfExt}'(A, M) \to \operatorname{InfExt}'(A, M')$. No hay ninguna dificultad en mostrar que ésta es compatible con la relación de equivalencia $\sim$ introducida arriba, de manera que tenemos de hecho una aplicación

$$f_* : \operatorname{InfExt}(A, M) \to \operatorname{InfExt}(A, M')$$

para cada morfismo $f : M \to M'$ en ${}_A\mathsf{Mod}_A$. Otra vez, no es difícil mostrar que esto define un functor $\operatorname{InfExt}(A, -) : {}_A\mathsf{Mod}_A \to \mathsf{Set}$.

4.10. Teorema. *Sea A un álgebra. Hay un isomorfismo de functores*

$$H^2(A, -) \cong \operatorname{InfExt}(A, -) : {}_A\mathsf{Mod}_A \to \mathsf{Set}$$

Demostración. Fijemos un bimódulo $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, sea $Z^2(A,M)$ el espacio de 2-cociclos en el complejo $C(A,M)$ descripto en 1.13 y sea $f \in Z^2(A,M)$. Entonces $f : A^{\otimes 2} \to M$ es tal que

$$a_1 f(a_2 \otimes a_3) - f(a_1 a_2 \otimes a_3) + f(a_1 \otimes a_2 a_3) - f(a_1 \otimes a_2) a_3 = 0, \tag{4}$$

cualesquiera sean $a_1, a_2, a_3 \in A$ y, en particular, tomando tomando en esta ecuación a_1, a_2 y a_3 iguales a 1, 1 y a y a a, 1 y 1, respectivamente, vemos que

$$\begin{aligned} f(1 \otimes a) &= f(1 \otimes 1)a, \\ f(a \otimes 1) &= af(1 \otimes 1); \end{aligned} \tag{5}$$

Consideremos ahora el álgebra $A \rtimes_f M$ que como espacio vectorial coincide con $A \oplus M$, y en la que el producto está dado por

$$(a_1, m_1) \cdot (a_2, m_2) = (a_1 a_2, a_1 m_2 + m_1 a_2 + f(a_1 \otimes a_2)).$$

Esto define un producto asociativo precisamente porque f satisface (4) y porque

$$(1, -f(1 \otimes 1)) \in A \rtimes_f M$$

es una unidad como consecuencia de (5).

Más aún, si $i_f : M \to A \rtimes_f M$ y $p_f : A \rtimes_f M \to A$ son las aplicaciones lineales correspondientes a la inyección canónica $M \to A \oplus M$ y a la proyección canónica $A \oplus M \to A$, respectivamente, una verificación rutinaria muestra que $(i_f, A \rtimes_f M, p_f) \in \mathrm{InfExt}'(A,M)$. Escribamos $\overline{\Phi}_M(f)$ a la clase de $(i_f, A \rtimes_f M, p_f)$ en $\mathrm{InfExt}(A,M)$. Claramente, esto define una función

$$\overline{\Phi}_M : Z^2(A,M) \to \mathrm{InfExt}(A,M).$$

Sea ahora $h \in C^1(A,M) = \hom(A,M)$. Por supuesto es $f + dh \in Z^2(A,M)$, así que podemos considerar el álgebra $A \rtimes_{f+dh} M$ y la extensión infinitesimal correspondiente de A por M. Definamos

$$\varphi_h : (a,m) \in A \rtimes_f M \mapsto (a, m + h(a)) \in A \rtimes_{f+dh} M.$$

Obtenemos de esta forma un morfismo de álgebras que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, equal] & A \rtimes_f M \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "\varphi_h"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_{f+dh}"] & A \rtimes_{f+dh} M \arrow[r, "p'_{f+dh}"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y esto nos dice que $\overline{\Phi}_M(f) \sim \overline{\Phi}_M(f + dh)$ y nos permite concluir que $\overline{\Phi}_M$ induce una función

$$\Phi_M : H^2(A,M) \to \mathrm{InfExt}(A,M).$$

Afirmamos que Φ_M es una biyección.

Sea $(i, B, p) \in \operatorname{InfExt}'(A, M)$. A menos de equivalencia de extensiones, podemos suponer sin perdida de generalidad que $B = A \oplus M$ como espacio vectorial, que $i : M \to B$ es la inyección canónica y que $p : B \to A$ es la proyección canónica. En ese caso, hay exactamente una aplicación lineal $f : A^{\otimes 2} \to M$ tal que el producto en B satisface

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2, f(a_1 \otimes a_2)),$$

y un simple cálculo muestra que la asociatividad de B implica que $f \in Z^2(A, M)$. Es fácil, a partir de esto, ver que $(i, B, p) = \overline{\Phi}_M(f)$. Esto prueba que Φ_M es sobreyectiva.

Sean, por otro lado, $f, f' \in Z^2(A, M)$ y supongamos que $\overline{\Phi}_M(f) \sim \overline{\Phi}_M(f')$, de manera que existe un morfismo de álgebras $\varphi : A \rtimes_f M \to A \rtimes_{f'} M$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, equal] & A \rtimes_f M \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_{f'}"] & A \rtimes_{f'} M \arrow[r, "p_{f'}"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Queda entonces bien determinado un morfismo $h \in C^1(A, M) = \hom(A, M)$ tal que $\varphi(a, 0) = (a, h(a))$ para todo $a \in A$. Calculando la diferencia

$$\varphi(a_1, 0)\varphi(a_2, 0) - \varphi((a_1, 0)(a_2, 0))$$

en términos de f, f' y h, se ve inmediatamente que $f - f' = dh$ y que, entonces, f y f' determinan la misma clase en $H^2(A, M)$. Así vemos que Φ_M es inyectiva.

Dejamos al lector la verificación de la naturalidad del isomorfismo Φ_M con respecto a $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$. □

5. Estructura multiplicativa

5.1. La siguiente proposición, que describe la cohomología de un producto tensorial de complejos en término de la de los factores, se debe, esencialmente, a Hermann Künneth [Kün23, Kün24]. La versión que presentamos está tomada de [CE99].

Proposición. *Sea Λ un dominio de ideales principales y sean C y D dos complejos de Λ-módulos. Supongamos que al menos uno de los dos es acotado inferiormente o superiormente y que uno de los dos es además playo. Entonces hay una sucesión exacta corta de Λ-módulos graduados*

$$0 \to H(C) \otimes_\Lambda H(D) \xrightarrow{\zeta} H(C \otimes_\Lambda D) \to \operatorname{Tor}_1^\Lambda(H(C), H(D^\bullet))[1] \to 0$$

Aquí, ζ está inducido por el morfismo evidente $Z(C) \otimes_\Lambda Z(D) \to Z(C \otimes_\Lambda D)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que C es playo, y sean B y Z los subcomplejos de C formados por los bordes y los ciclos, respectivamente—las diferenciales sobre estos complejos son triviales y, como Λ es un dominio de ideales principales, ambos complejos son playos.

Hay una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\partial} B[1] \longrightarrow 0 \tag{6}$$

en la que ι es la inclusión y ∂ está inducida por la diferencial de C. Que B sean playo implica que el resultado de aplicar a (6) el functor $(-) \otimes_\Lambda D$ es una sucesión exacta de complejos dobles

$$0 \longrightarrow Z \otimes_\Lambda D \xrightarrow{\iota \otimes \mathrm{id}_D} C \otimes_\Lambda D \xrightarrow{\partial \otimes \mathrm{id}_D} B[1] \otimes_\Lambda D \longrightarrow 0 \tag{7}$$

En particular, si ponemos $X = \operatorname{Tot} C \otimes_\Lambda D$, podemos definir una filtración FX sobre X poniendo

$$F^0 X = Z \otimes_\Lambda D,$$
$$F^1 X = C \otimes_\Lambda D.$$

Por supuesto, estamos identificando a $Z \otimes_\Lambda D$ con su imagen por $\iota \otimes \mathrm{id}_D$. Esta filtración es claramente convergente, así que determina una sucesión espectral E convergente que converge a $H(X) = H(C \otimes_\Lambda D)$.

Usando (7), vemos que

$$E_0^{p,q} = \frac{F^p X^{p+q}}{F^{p-1} X^{p+q}} \cong \begin{cases} (Z \otimes_\Lambda D)^q, & \text{si } p = 0; \\ (B[1] \otimes_\Lambda D)^{q+1}, & \text{si } p = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún, bajo estos isomorfismos, la diferencial $d_0^{p,q} : E_0^{p,p} \to E_0^{p,q+1}$ está inducida por la de D. Usando la platitud de Z y de B, vemos que

$$E_1^{p,q} \cong \begin{cases} (Z \otimes_\Lambda H(D))^q, & \text{si } p = 0; \\ (B[1] \otimes_\Lambda H(D))^{q+1}, & \text{si } p = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, es fácil verificar que la diferencial $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p-1,q}$ está inducida por la inclusión $B[1] \hookrightarrow Z$, que cabe en una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow B[1] \longrightarrow Z \longrightarrow H(C) \longrightarrow 0$$

La sucesión exacta larga de $\operatorname{Tor}^\Lambda(-, H(D))$, junto con la platitud de Z, nos da entonces una sucesión exacta de Λ-módulos graduados

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^\Lambda(H(C), H(D)) \to E_1^{1,\bullet} \xrightarrow{d_1^{1,\bullet}} E_1^{0,\bullet} \to H(C) \otimes_\Lambda H(D) \to 0$$

Concluimos que

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} \cong \begin{cases} (H(C)\otimes_\Lambda H(D))^q, & \text{si } p=0; \\ \operatorname{Tor}_1^\Lambda(H(C),H(D))^{q+1}, & \text{si } p=1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Que la sucesión espectral E converja a $H(C\otimes D)$ nos dice precisamente que hay una sucesión exacta corta como la del enunciado. El morfismo ζ que aparece en ella es uno de los morfismos de borde de E y éste puede calcularse directamente para ver que es de la forma descripta. □

5.2. El morfismo ζ que aparece en 5.1 es asociativo en el siguiente:

Proposición. *Sea Λ un cuerpo y sean C, D y E complejos de Λ-módulos acotados inferiormente. Entonces todos los morfismos del siguiente diagrama están definidos y el diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
& H(C)\otimes H(D)\otimes H(E) \arrow[dl, "\zeta\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\zeta"] & \\
H(C\otimes D)\otimes H(E) \arrow[dr, "\zeta"'] & & H(C)\otimes H(C\otimes D) \arrow[dl, "\zeta"] \\
& H(C\otimes D\otimes E) &
\end{tikzcd}$$

Hay, por supuesto, hipótesis mucho menos restringidas para las cual podemos obtener la misma conclusión.

Demostración. Esto sigue de uncálulo directo, usando la descripción del morfismo ζ hecha en 5.1. □

5.3. Lema. *Sean A, B y C tres álgebras.*

(i) *Si $M\in \mathsf{Mod}_{A\otimes B}$, $N\in {}_A\mathsf{Mod}_C$ y $P\in \mathsf{Mod}_{B\otimes C}$, hay un isomorfismo natural de espacios vectoriales*

$$s:\hom_{A\otimes B}(M,\hom_C(N,P)) \to \hom_{B\otimes C}(M\otimes_A N, P).$$

(ii) *Si $M\in \mathsf{Mod}_{A\otimes B}$ es proyectivo y $N\in {}_A\mathsf{Mod}_C$ es proyectivo como C-módulo, entonces $M\otimes_A N$ es $B\otimes C$-proyectivo.*

(iii) *Si $M\in {}_A\mathsf{Mod}_B$ es proyectivo, entonces M es proyectivo como A-módulo.*

Demostración. Definamos s poniendo $s(f)(m\otimes n) = f(m)(n)$. Es fácil que que esto está bien definido y que es una biyección. Esto muestra 5.3*(i)*. Para ver 5.3*(ii)*, sean M y N como en el enunciado. Usando 5.3*(i)*, vemos que hay una factorización de functores

$$\hom_{B\otimes C}(M\otimes_A N,-) \cong \hom_{A\otimes B}(M,-)\circ \hom_C(N,-),$$

y las hipótesis implican que tanto $\hom_{A\otimes B}(M,-)$ como $\hom_C(N,-)$ son exactos. Vemos así que $M\otimes_A N$ es proyectivo en $\mathsf{Mod}_{B\otimes C}$. Finalmente, la tercera afirmación es consecuencia del hecho evidente de que todo (A,B)-bimódulo libre es libre como A-módulo. □

5.4. Sean A, B y C trés álgebras y sean $M, N \in {}_A\mathsf{Mod}_B$ y $M', N' \in {}_B\mathsf{Mod}_C$. Entonces hay un morfismo

$$\vee : \hom_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M,N)\otimes\hom_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(M',N') \to \hom_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M\otimes_B M', N\otimes_B N')$$

tal que $(f\vee f')(m\otimes m') = f(m)\otimes f'(m')$. Es evidente que $\vee$ es natural en las cuatro variables.

5.5. Sean A, B, C y D cuatro álgebras y consideremos bimódulos $M, N \in {}_A\mathsf{Mod}_B$, $M', N' \in {}_B\mathsf{Mod}_C$ y $M'', N'' \in {}_C\mathsf{Mod}_D$. Un cálculo directo muestra que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \hom_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M,N)\otimes\hom_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(M',N')\otimes\hom_{C\otimes D^{\mathrm{op}}}(M'',N'') \arrow[dl, "\vee\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\vee"] & \\
\hom_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M\otimes_B M', N\otimes_B N')\otimes\hom_{C\otimes D^{\mathrm{op}}}(M'',N'') \arrow[dr, "\vee"'] & & \hom_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M,N)\otimes\hom_{B\otimes D^{\mathrm{op}}}(M'\otimes_C M'', N'\otimes_C N'') \arrow[dl, "\vee"] \\
 & \hom_{A\otimes D^{\mathrm{op}}}(M\otimes_B M'\otimes_C M'', N\otimes_B N'\otimes_C N'') &
\end{tikzcd}$$

Describimos esto diciendo que el producto $\vee$ es asociativo: si $\alpha\in\hom_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M,N)$, $\beta\in\hom_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(M',N')$ y $\gamma\in\hom_{C\otimes D^{\mathrm{op}}}(M'',N'')$, la conmutatividad del diagrama nos dice exactamente que $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma = \alpha\vee(\beta\vee\gamma)$.

5.6. Podemos extender el morfismo $\vee$ a la cohomología de la siguiente manera. Sean como antes $M, N\in {}_A\mathsf{Mod}_B$ y $M', N'\in {}_B\mathsf{Mod}_C$ y sean $\varepsilon : P\to M$ y $\varepsilon' : P'\to M'$ resoluciones $A\otimes B^{\mathrm{op}}$- y $B\otimes C^{\mathrm{op}}$-proyectivas, respectivamente. Supongamos que es $\mathrm{Tor}^B_+(M,M') = 0$. La naturalidad de $\vee$ nos da un morfismo de complejos

$$\vee : \hom_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(P,N)\otimes\hom_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(P',N') \to \hom_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(P\otimes_B P', N\otimes_B N'). \tag{8}$$

Usando 5.3*(iii)* vemos que ε y ε' son resoluciones proyectivas de M y M' en tanto B-módulo a derecha y B-módulo a izquierda, respectivamente, de manera que

$$H(P\otimes_B P') \cong \mathrm{Tor}^B(M,M')$$

canónicamente. Usando ahora 5.3*(ii)*, vemos que $P\otimes_B P'$ es un complejo de $A\otimes C^{\mathrm{op}}$-módulos proyectivos. En definitiva, dada nuestra hipótesis sobre $\mathrm{Tor}^B_+(M,M')$, concluimos que $\varepsilon\otimes\varepsilon' : P\otimes_B P'\to M\otimes_B M'$ es una resolución $A\otimes C^{\mathrm{op}}$-proyectiva de

$M \otimes_B M'$ y, en particular, que hay un isomorfismo canónico

$$H(\hom_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(P \otimes_B P', N \otimes_B N')) \cong \mathrm{Ext}_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_B M', N \otimes_B N').$$

La fórmula de Künneth 5.1 nos da, por otro lado, un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} &H(\hom_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(P, N)) \otimes H(\hom_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(P', N')) \\ &\qquad\qquad \cong H(\hom_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(P, N) \otimes \hom_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(P', N')) \end{aligned} \tag{9}$$

y el miembro izquierdo es isomorfo a $\mathrm{Ext}_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, N) \otimes \mathrm{Ext}_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(M', N')$ canónicamente.

Juntando todo, vemos que componiendo el morfismo inducido por (8) en la homología con (9) obtenemos un producto

$$\vee : \mathrm{Ext}_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, N) \otimes \mathrm{Ext}_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(M', N') \to \mathrm{Ext}_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_B M', N \otimes_B N') \tag{10}$$

bajo la hipótesis de que $\mathrm{Tor}_+^B(M, M') = 0$. Notemos que es claro, de la forma misma de la contrucción hecha, que $\vee$ es natural con respecto a M, $N \in {}_A\mathsf{Mod}_B$ y a M', $N' \in {}_B\mathsf{Mod}_C$.

5.7. En general, es difícil controlar el morfismo (10). Tenemos, sin embargo, el siguiente importante resultado:

Proposición. *Tomemos, en 5.6, $B = k$. Supongamos además que las álgebras A y C son nötherianas a izquierda y derecha, respectivamente, y que los módulos $M \in {}_A\mathsf{Mod}$ y $M' \in \mathsf{Mod}_C$ son finitamente generados sobre A y C, respectivamente. Entonces el producto (10) es un isomorfismo.*

$$\vee : \mathrm{Ext}_A(M, N) \otimes \mathrm{Ext}_{C^{\mathrm{op}}}(M', N') \to \mathrm{Ext}_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes M', N \otimes N')$$

para cada $N \in {}_A\mathsf{Mod}$ y cada $N' \in \mathsf{Mod}_C$.

Notemos que en esta situación la condición $\mathrm{Tor}_+^B(M, M') = 0$ para la existencia del morfismo $\vee$ se satisface automáticamente.

Demostración. El morfismo

$$\hom_A(M, N) \otimes \hom_{C^{\mathrm{op}}}(M', N') \to \hom_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes M', N \otimes N')$$

de 5.4 es claramente una transformación natural entre functores aditivos y exactos a derecha de $M \in {}_A\mathsf{Mod}$ y $M' \in \mathsf{Mod}_C$. Evidentemente se trata de un isomorfismo cuando $M = A$ y $M' = C$, así que un argumento estándar nos permite concluir que es un isomorfismo, más generalmente, cuando M y M' son proyectivos finitamente generados.

Ahora bien, bajo las hipótesis del teorema es posible elegir resoluciones proyectivas $P \to M$ y $P' \to M'$ de M y M' en ${}_A\mathsf{Mod}$ y Mod_C, respectivamente, con componentes finitamente generadas, de manera que el morfismo de complejos (8) resulta un isomorfismo. Por supuesto, esto nos dice que el morfismo $\vee$ del enunciado, esencialmente inducido por (8), es un isomorfismo. $\square$

5.8. Supongamos que, en la situación de la proposición 5.7 tenemos dos álgebras más D y E, y que $N \in {}_A\mathsf{Mod}_E$ y $N' \in {}_D\mathsf{Mod}_C$. Entonces la functorialidad implica que $\operatorname{Ext}_A(M, N)$ es un E-módulo derecho, que $\operatorname{Ext}_{C^{\mathrm{op}}}(M', N')$ es un D-módulo izquierdo y tanto que $\operatorname{Ext}_A(M, N) \otimes \operatorname{Ext}_{C^{\mathrm{op}}}(M', N')$ como $\operatorname{Ext}_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes M', N \otimes N')$ son (E, D)-bimódulos. Con respecto a estas estructuras, el isomorfismo $\vee$ de 5.7 es un isomorfismo de (E, D)-bimódulos. La verificación de esto es completamente rutinaria, y consiste en establecer resultados análogos para los diferentes morfismos que fuimos construyendo desde 5.4 en adelante. Dejamos los detalles a cargo del lector.

5.9. Corolario. *Sean A y B dos álgebras tales que A^e y B^e son nötherianas, y sean $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ y $N \in {}_B\mathsf{Mod}_B$ bimódulos. Si vemos a $M \otimes N$ como un $A \otimes B$-bimódulo de la manera evidente, hay un isomorfismo*

$$\vee : H^\bullet(A, M) \otimes H^\bullet(B, N) \cong H^\bullet(A \otimes B, M \otimes N).$$

Demostración. Esto es simplemente un caso particular de 5.7, ya que por ejemplo $H^\bullet(A, M) = \operatorname{Ext}_{A^e}(A, M)$. $\square$

5.10. Sean A, B, C y D cuatro álgebras y sean M, $N \in {}_A\mathsf{Mod}_B$, M', $N' \in {}_B\mathsf{Mod}_C$ y M'', $N'' \in {}_C\mathsf{Mod}_D$ bimódulos. Supongamos que

$$\operatorname{Tor}_+^B(M, M') = \operatorname{Tor}_+^C(M', M'') = 0$$

y que

$$\operatorname{Tor}_+^C(M \otimes_B M', M'') = \operatorname{Tor}_+^B(M, M' \otimes_C M'') = 0.$$

Entonces todos los productos que aparecen en el siguiente diagrama están definidos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& \operatorname{Ext}_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M,N) \otimes \operatorname{Ext}_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(M',N') \otimes \operatorname{Ext}_{C\otimes D^{\mathrm{op}}}(M'',N'') \arrow[dl, "\vee\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes\vee"] & \\
\operatorname{Ext}_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(M \otimes_B M', N \otimes_B N') \otimes \operatorname{Ext}_{C\otimes D^{\mathrm{op}}}(M'',N'') \arrow[ddr, "\vee"'] & & \\
& & \operatorname{Ext}_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M,N) \otimes \operatorname{Ext}_{B\otimes D^{\mathrm{op}}}(M' \otimes_C M'', N' \otimes_C N'') \arrow[dl, "\vee"] \\
& \operatorname{Ext}_{A\otimes D^{\mathrm{op}}}(M \otimes_B M' \otimes_C M'', N \otimes_B N' \otimes_C N'') &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que este diagrama conmuta. Esto es consecuencia, vista la forma en que están definidos los productos en la cohomología, de que el diagrama de 5.5 conmuta y es natural y de que el morfismo de Künneth es asociativo, *cf.* 5.2.

Como en 5.5, interpretamos esto diciendo que el producto $\vee$ es asociativo: dados clases $\alpha \in \operatorname{Ext}^p_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(M, N)$, $\beta \in \operatorname{Ext}^q_{B\otimes C^{\mathrm{op}}}(M', N')$ y $\gamma \in \operatorname{Ext}^r_{C\otimes D^{\mathrm{op}}}(M'', N'')$, la conmutatividad del diagrama nos dice que

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \in \operatorname{Ext}^{p+q+r}_{A\otimes D^{\mathrm{op}}}(M \otimes_B M' \otimes_C M'', N \otimes_B N' \otimes_C N'').$$

5.11. Observemos que si en 5.6 tomamos $A = B = C$ y $M = M' = A$, la hipótesis se satisface trivialmente, así que hay un producto

$$\vee : \operatorname{Ext}_{A^e}(A, N) \otimes \operatorname{Ext}_{A^e}(A, N') \to \operatorname{Ext}_{A^e}(A \otimes_A A, N \otimes_A N').$$

Por otro lado, si $\Delta : A \to A \otimes_A A$ es el isomorfismo de A-bimódulos tal que $\Delta(1) = 1\otimes 1$, tenemos un isomorfismo

$$\Delta^* = \operatorname{Ext}_{A^e}(\Delta, -) : \operatorname{Ext}_{A^e}(A \otimes_A A, -) \to \operatorname{Ext}_{A^e}(A, -).$$

Podemos definir, entonces, un producto $\sqcup$ sobre la cohomología de Hochschild $H^\bullet(A, -)$ poniendo

$$\sqcup = \Delta^* \circ \vee : H^\bullet(A, N) \otimes H^\bullet(A, N') \to H^\bullet(A, N \otimes_A N').$$

Esto es natural con respecto a $N, N' \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, porque tanto Δ^* como $\vee$ son naturales, y es asociativo, esto es, conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& H^\bullet(A,N) \otimes H^\bullet(A,N') \otimes H^\bullet(A,N'') \arrow[dl, "\sqcup\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\sqcup"] & \\
H^\bullet(A, N \otimes_A N') \otimes H^\bullet(A, N'') \arrow[dr, "\sqcup"'] & & H^\bullet(A,N) \otimes H^\bullet(A, N' \otimes_A N'') \arrow[dl, "\sqcup"] \\
& H^\bullet(A, N \otimes_A N' \otimes_A N'') &
\end{tikzcd}$$

En efecto, esto sigue de que, si notamos $(-,-)$ en lugar de $\operatorname{Ext}_{A^e}(-,-)$, cada una de las celdas acotadas del diagrama de la figura 1 en la página siguiente.

5.12. Finalmente, sea $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ y notemos $\lambda^M : A \otimes_A M \to M$ al isomorfismo inducido por la acción de A en M. Entonces tenemos un producto

$$\smile = \lambda^M_* \circ \sqcup : HH^\bullet(A) \otimes H^\bullet(A, M) \to H^\bullet(A, M), \tag{11}$$

que es, otra vez, natural con respecto a M y asociativo, en el sentido de que conmuta

$$\begin{tikzcd}
& HH^\bullet(A) \otimes HH^\bullet(A) \otimes H^\bullet(A,M) \arrow[dl, "\smile\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\smile"] & \\
HH^\bullet(A) \otimes H^\bullet(A,M) \arrow[dr, "\smile"'] & & HH^\bullet(A) \otimes H^\bullet(A,M) \arrow[dl, "\smile"] \\
& H^\bullet(A,M) &
\end{tikzcd}$$

Esto sigue de que cada cara acotada en el diagrama de la figura 2 en la página siguiente.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (A,N)\otimes(A,N')\otimes(A,N'') \arrow[dl, "\vee\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\vee"] \arrow[ddll, bend right, "\sqcup\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\mathrm{id}\otimes\sqcup"] & & \\
 & (A\otimes_A A, N\otimes_A N')\otimes(A,N'') \arrow[dl, "\Delta^*\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\vee"] & & (A,N)\otimes(A\otimes_A A, N'\otimes_A N'') \arrow[dl, "\vee"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\Delta^*"] & \\
(A, N\otimes_A N')\otimes(A,N'') \arrow[dr, "\vee"] \arrow[ddrr, bend right, "\sqcup"'] & & (A\otimes_A A\otimes_A A, N\otimes_A N'\otimes_A N'') \arrow[dl, "(\Delta\otimes\mathrm{id})^\bullet"'] \arrow[dr, "(\mathrm{id}\otimes\Delta)^*"] & & (A,N)\otimes(A, N'\otimes_A N'') \arrow[dl, "\vee"'] \arrow[ddll, bend left, "\sqcup"] \\
 & (A\otimes_A A, N\otimes_A N'\otimes_A N'') \arrow[dr, "\Delta^*"] & & (A\otimes_A A, N\otimes_A N'\otimes_A N'') \arrow[dl, "\Delta^*"'] & \\
 & & (A, N\otimes_A N'\otimes_A N'') & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & HH^\bullet(A)\otimes HH^\bullet(A)\otimes H^\bullet(A,M) \arrow[dl, "\sqcup\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\sqcup"] \arrow[ddll, bend right, "\smile\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\mathrm{id}\otimes\smile"] & & \\
 & H^\bullet(A, A\otimes_A A)\otimes H^\bullet(A,M) \arrow[dl, "\lambda^A_*\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\sqcup"] & & HH^\bullet(A)\otimes H^\bullet(A, A\otimes_A M) \arrow[dl, "\sqcup"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\lambda^M_*"] & \\
HH^\bullet(A)\otimes H^\bullet(A,M) \arrow[dr, "\sqcup"] \arrow[ddrr, bend right, "\smile"'] & & H^\bullet(A, A\otimes_A A\otimes_A M) \arrow[dl, "(\lambda^A\otimes\mathrm{id})_*"'] \arrow[dr, "(\mathrm{id}\otimes\lambda^M)_*"] & & HH^\bullet(A)\otimes H^\bullet(A,M) \arrow[dl, "\sqcup"'] \arrow[ddll, bend left, "\smile"] \\
 & H^\bullet(A, A\otimes_A M) \arrow[dr, "\lambda^M_*"] & & H^\bullet(A, A\otimes_A M) \arrow[dl, "\lambda^M_*"'] & \\
 & & H^\bullet(A,M) & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.

5.13. Fijemos una resolución A^e-proyectiva $\varepsilon : P \to A$ de A e identifiquemos, para cada $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, $H^\bullet(A,M)$ con $H(\hom_{A^e}(P,M))$. El producto (11) es entonces la composición de los siguientes morfismos, en orden: el isomorfismo de la fórmula de Künneth,

$$H(\hom_{A^e}(P,A))\otimes H(\hom_{A^e}(P,M)) \to H(\hom_{A^e}(P,A)\otimes\hom_{A^e}(P,M)),$$

el morfismo $\vee$ de (10)

$$H(\hom_{A^e}(P,A)\otimes \hom_{A^e}(P,M)) \to H(\hom_{A^e}(P\otimes_A P, A\otimes_A M)),$$

el morfismo Δ^* inducido por $\Delta : A \to A\otimes_A A$,

$$H(\hom_{A^e}(P\otimes_A P, A\otimes_A M)) \to H(\hom_{A^e}(P, A\otimes_A M)),$$

y, finalmente, el isomorfismo inducido por λ_*^M,

$$H(\hom_{A^e}(P, A\otimes_A M)) \to H(\hom_{A^e}(P, M)).$$

Tenemos fórmulas explícitas para calcular todos estos morfismos salvo Δ^*.

5.14. Consideremos un morfismo $\Delta^\bullet : P \to P\otimes_A P$ de complejos de A-bimódulos que haga conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta^\bullet"] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ P\otimes_A P \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] & A\otimes_A A \end{tikzcd}$$

Llamamos a un tal morfismo $\Delta^\bullet$ un morfismo *diagonal*. Es claro que existen morfismos diagonales, ya que $\varepsilon\otimes\varepsilon : P\otimes_A P \to A\otimes_A A$ es una resolución A^e-proyectiva de $A\otimes_A A$; más aún, esto nos dice que todos los morfismos diagonales son homotópicos.

Podemos ahora calcular

$$\Delta^* : H(\hom_{A^e}(P\otimes_A P, A\otimes_A M)) \to H(\hom_{A^e}(P, A\otimes_A M)),$$

simplemente por composición con $\Delta^\bullet$.

5.15. Cuando usamos la resolución estándar $\varepsilon : BA \to A$, es posible hace una elección cómoda de un morfismo diagonal $\Delta^\bullet : BA \to BA\otimes_A BA$. En efecto, si para $p \geq 0$ definimos

$$\Delta^{-p} : B^{-p}A \to \bigoplus_{r+s=p} B^{-r}A\otimes_A B^{-s}A$$

poniendo

$$\Delta^{-p}(a_0\otimes \dots a_{p+1}) = \bigoplus_{r+s=p} (a_0\otimes\dots a_r\otimes 1)\otimes(1\otimes a_{r+1}\otimes\dots\otimes a_{p+1}),$$

un cálculo directo muestra que obtenemos un morfismo de complejos que hace conmutar

$$\begin{tikzcd} BA \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta^\bullet"] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ BA\otimes_A BA \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] & A\otimes_A A \end{tikzcd}$$

Siguiendo la receta presentada en 5.13 y usando este morfismo $\Delta^\bullet$ para calcular Δ^*, obtenemos lo siguiente: si $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$, $\varphi \in HH^p(A)$ y $\psi \in H^q(A, M)$, sean $f \in C^p(A, A)$ y $g \in C^q(A, M)$ cociclos que representan a φ y a ψ en los complejos $C^\bullet(A, A)$ y $C^\bullet(A, M)$, respectivamente. Entonces $\varphi \smile \psi \in H^{p+q}(A, M)$ está representado por el $(p + q)$-cociclo $t \in C^{p+q}(A, M)$ tal que

$$t(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{p+q}) = f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p)\, g(a_{p+1} \otimes \ldots \otimes a_{p+q}). \tag{12}$$

Concluimos así que el producto $\smile$ que hemos construido coincide con el considerado por Gerstenhaber en [Ger63].

5.16. Observemos que procediendo como en 5.12, pero esta vez usando el isomorfismo $\rho^M : M \otimes_A A \to M$ inducido por la acción a *derecha* sobre el A-bimódulo M, podemos construir un producto

$$\smile = \rho^M_* \circ \sqcup : H^\bullet(A, M) \otimes HH^\bullet(A) \to H^\bullet(A, M),$$

que notamos con el mismo símbolo. Dado que $\lambda^A = \rho^A$, esto no introduce ninguna ambigüedad.

5.17. Usando 5.15 podemos dar una prueba simple de la siguiente proposición:

Proposición. *Sea A un álgebra y $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$. Entonces el producto $\smile$ hace de $HH^\bullet(A)$ un álgebra graduada y de $H^\bullet(A, M)$ un $HH^\bullet(A)$-bimódulo graduado.*

Demostración. Lo único que queda por mostrar es que $HH^\bullet(A)$ posee un elemento unidad para $\smile$, que la acción de $HH^\bullet(A)$ sobre $H^\bullet(A, M)$ es unitaria a ambos lados y que las acciones de $HH^\bullet(A)$ sobre $H^\bullet(A, M)$ a izquierda y a derecha conmutan. Dejamos esto último—que sigue fácilmente de 5.10—al lector y damos los detalles referidos a la unidad.

Sea $u = 1_A \in C^0(A, A) = A$. Es inmediato verificar que u es un 0-cociclo en el complejo $C(A, A)$, de manera que determina una clase $v \in HH^0(A)$. Afirmamos que v es una unidad y que actua trivialmente sobre $H^\bullet(A, M)$ tanto a izquierda como a derecha. Esto puede deducirse inmediatamente de la fórmula (12). □

5.18. Sea Λ un álgebra, sean $M, N \in {}_\Lambda\mathsf{Mod}$ y fijemos una resolución proyectiva $P \to M$ de M. Recordemos la forma en que se definen los isomorfismos inversos

$$H(\hom_\Lambda(P, N)) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \operatorname{Ext}_\Lambda(M, N) \tag{13}$$

5.19. Sea primero $\alpha \in H^p(\hom_\Lambda(P, N))$ y sea $f : P^{-p} \to N$ un p-cociclo en $\hom_\Lambda(P, N)$ que representa a α. Consideremos el siguiente diagrama de flechas sólidas

$$\begin{tikzcd}
P^{-p-1} \arrow[r, "d^{-p-1}"] & P^{-p} \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "f"'] & \operatorname{coker} d^{-p-1} \arrow[r, tail] \arrow[d, dotted, "\bar f"] & P^{-p+1} \arrow[r, "d^{-p+1}"] \arrow[d, dotted, "f'"] & P^{-p+2} \arrow[d, dotted, "\mathrm{id}"] \\
& 0 \arrow[r] & N \arrow[r, dotted, "\kappa"'] & E \arrow[r, dotted, "\kappa'"'] & P^{-p+2}
\end{tikzcd}$$

Como f es un cociclo, existe un morfismo $\bar f$ que hace conmutar el triángulo. Si contruimos ahora el cuadrado central haciendo un push-out, es fácil ver que hay exactamente un morfismo κ' que completa el diagrama a un diagrama conmutativo con fila inferior exacta. Si notamos $E_f^{-p+1} = E$, $f^{-p} = f$, $f^{-p+1} = f'$ y $E_f^l = P^l$ y $f^l = \mathrm{id}_{P^l}$ si $-p+1 < l \leq 0$, este diagrama puede extenderse entonces a uno de la forma

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[r] & P^{-p} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-p}"] & P^{-p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-p+1}"] & P^{-p+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-p+2}"] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d, "f^{0}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\kappa"] & E_f^{-p+1} \arrow[r, "\kappa'"] & E_f^{-p+2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_f^{-1} \arrow[r] & E_f^{0} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el que las dos filas son exactas. En particular, la segunda fila es una p-extensión E_f de M por N en ${}_\Lambda\mathsf{Mod}$. La clase de E_f en $\operatorname{Ext}_\Lambda^p(M,N)$ es, por definición, $\Phi(\alpha)$.

5.20. Recíprocamente, sea E una p-extensión de M por N en ${}_\Lambda\mathsf{Mod}$ como la que aparece en la segunda fila del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-p-1} \arrow[r] & P^{-p} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^{-p}"] & P^{-p+1} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^{-p+1}"] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^{-1}"] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^{0}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E^{-p+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^{-1} \arrow[r] & E^{0} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y que representa una clase $\mathcal{E} \in \operatorname{Ext}_\Lambda^p(M,N)$. Como la primera fila tiene objetos proyectivos y la segunda es exacta, existe un morfismo de complejos f como en la figura que hace conmutar el diagrama punteado y, en particular, $f^p : P^{-p} \to N$ es un p-cociclo en el complejo $\hom_\Lambda(P,N)$. La aplicación Ψ de (13) es tal que $\Psi(\mathcal{E})$ es la clase de f en $H(\hom_\Lambda(P,N))$.

5.21. Teniendo esta descripción de los morfismos (13), es fácil probar el siguiente teorema de Gerstenhaber:

Teorema. *Sea A un álgebra y M un A-bimódulo. Entonces el álgebra $HH^\bullet(A)$ es conmutativa y el $HH^\bullet(A)$-bimódulo $H^\bullet(A,M)$ es simétrico. Por otro lado, la aplicación $\Phi : HH^\bullet(A) \to \operatorname{Ext}^\bullet_{A^e}(A,A)$ de (13) es un isomorfismo de álgebras entre $HH^\bullet(A)$ y el álgebra de Yoneda.*

Demostración. Fijemos una resolución proyectiva $\varepsilon : P \to A$ del A-bimódulo A y un morfismo de complejos $\Delta^\bullet : P \to P \otimes_A P$ a lo largo de $\Delta : A \to A \otimes_A A$, como en 5.14. Sean $f : P^{-p} \to A$ y $g : P^{-q} \to M$ p- y q-cociclos en $\hom_{A^e}(P, A)$ y $\hom_{A^e}(P, M)$, respectivamente, que representan clases φ y ψ.

Como en 5.18, construimos a partir de g una q-extensión E_g de A por M en ${}_A\mathsf{Mod}_A$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-q-1} \arrow[r] & P^{-q} \arrow[r] \arrow[d, "g^{-q}"] & P^{-q+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{-q+1}"] & \cdots \arrow[r] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "g^0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E_g^{-q+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_g^0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y a partir de f una p-extensión E_f de A por A,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-p-1} \arrow[r] & P^{-p} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-p}"] & P^{-p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-p+1}"] & \cdots \arrow[r] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E_f^{-p+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_f^0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces la $(p+q)$-extensión compuesta $E_g \circ E_f$ es la fila de

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E_g^{-q+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_g^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_f^{-p+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_f^0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
& & & & & A \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Escribamos $Q = P \otimes_A P$. Podemos definir dos morfismos de complejos

$$l, r : Q \to E_g \circ E_f$$

de la siguiente manera: primero,

$$l^1 = r^1 = \mathrm{id} : A \to A;$$

si $-p + 1 \le i \le 0$, ponemos

$$l^i = \varepsilon \otimes f^i : Q^i \to (E_g \circ E_f)^i = E_f^i,$$
$$r^i = f^i \otimes \varepsilon : Q^i \to (E_g \circ E_f)^i = E_f^i;$$

si $-p - q + 1 \le i \le -p$, ponemos

$$l^i = g^{i+p} \otimes f^{-p} : Q^i \to (E_g \circ E_f)^i = E_g^{i+p},$$
$$r^i = (-1)^i f^{-p} \otimes g^{i+p} : Q^i \to (E_g \circ E_f)^i = E_g^{i+p};$$

y, finalmente,

$$l^{-p-q} = g^{-q} \otimes f^{-p} : Q^{-p-q} \to (E_g \circ E_f)^{-p-q} = M,$$
$$r^{-p-q} = (-1)^{-p-q} f^{-p} \otimes g^{-q} : Q^{-p-q} \to (E_g \circ E_f)^{-p-q} = M.$$

La verificación de que esto define en efecto morfismos de complejos se reduce a un cálculo inmediato que omitimos. Obtenemos así dos diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
Q^{-p-q-1} \arrow[r] & Q^{-p-q} \arrow[r] \arrow[d] & Q^{-p-q+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Q^{-p} \arrow[rr] \arrow[d] & & Q^{-p+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Q^0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E_g^{-q+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_g^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_f^{-p+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_f^0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
& & & & & A \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

En uno de ellos, las fechas verticales provienen de l, y en otro las flechas verticales provienen de r. Esto nos dice que, bajo el isomorfismo Ψ de (13), a la clase de la $(p+q)$-extensión $E_g \circ E_f$ de $\operatorname{Ext}_{A^e}^{p+q}(A, M)$ corresponde tanto la clase de l^{-p-q} como la clase de r^{-p-q} en $H^{p+q}(\hom_{A^e}(Q, M))$. Vemos así que l^{-p-q} y r^{-p-q} son $(p+q)$-cociclos cohomólogos en el complejo $\hom_{A^e}(Q, M)$ y, en particular, que sus composiciones con Δ^{-p-q} son $(p+q)$-cociclos cohomólogos en $\hom_{A^e}(P, M)$.

Como las clases de $l^{-p-q} \circ \Delta^{-p-q}$ y de $r^{-p-q} \circ \Delta^{-p-q}$ en $H^{p+q}(\hom_{A^e}(P, M))$ representan a $\psi \smile \varphi$ y a $(-1)^{p+q}\varphi \smile \psi$, respectivamente, concluimos que

$$\psi \smile \varphi = (-1)^{p+q}\varphi \smile \psi. \tag{14}$$

Más aún, se sigue de lo hecho que la clase de la $(p+q)$-extensión $E_{l^{-p-q} \circ \Delta^{-p-q}}$ coincide con la de $E_g \circ E_f$ en $\operatorname{Ext}_{A^e}^{p+q}(A, M)$, de manera que es

$$\Phi(\psi \smile \varphi) = \Phi(\psi) \circ \Phi(\varphi). \tag{15}$$

Es claro que (14) y (15) implican todas las afirmaciones del teorema. □

6. Un ejemplo

6.1. Consideremos el álgebra $A = k[X]/(X^2)$ y supongamos por simplicidad, en toda esta sección, que la característica de k es diferente de 2.

6.2. Escribimos x a la clase de X en A. Claramente $\{1, x\}$ es una base de A.

6.3. Hay una 2-extensión de A por A en ${}_A\mathsf{Mod}_A$ de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_3} A \otimes A \xrightarrow{f_2} A \otimes A \xrightarrow{f_1} A \longrightarrow 0 \tag{16}$$

con los morfismos unívocamente determinados por las ecuaciones

$$f_1(1 \otimes 1) = 1,$$
$$f_2(1 \otimes 1) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

y

$$f_3(1) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

6.4. Componiendo la extensión (16) consigo misma infinitas veces obtenemos una resolución A^e-proyectiva de A. Explícitamente, se trata de la resolución $\varepsilon : P \to A$ de A en ${}_A\mathsf{Mod}_A$ de la forma

$$\cdots \underset{s^{-3}}{\overset{d^{-4}}{\rightleftarrows}} A \overset{3}{\otimes} A \underset{s^{-2}}{\overset{d^{-3}}{\rightleftarrows}} A \overset{2}{\otimes} A \underset{s^{-1}}{\overset{d^{-2}}{\rightleftarrows}} A \overset{1}{\otimes} A \underset{s^{0}}{\overset{d^{-1}}{\rightleftarrows}} A \overset{0}{\otimes} A \underset{s^{1}}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} A \tag{17}$$

Aquí estamos escribiendo $A \overset{p}{\otimes} A$ al bimódulo $P^{-p} = A \otimes A$ colocado en grado $-p$. Las diferenciales de esta resolución son tales que es $\varepsilon(a \overset{0}{\otimes} b) = ab$ y, si $p > 0$,

$$d^{-p}(a \overset{p}{\otimes} b) = ax \overset{p-1}{\otimes} b + (-1)^p a \overset{p-1}{\otimes} xb.$$

El complejo es exacto: en efecto, hay una contracción, dibujada en (17) con flechas punteadas, tal que $s^1(a) = 1 \overset{0}{\otimes} a$ y, si $p > 0$,

$$s^{-p}(1 \overset{p}{\otimes} a) = 0,$$
$$s^{-p}(x \overset{p}{\otimes} a) = 1 \overset{p+1}{\otimes} a.$$

Más aún, hay un morfismo diagonal $\Delta^\bullet : P \to P \otimes_A P$ dado por

$$\Delta^{-p}(a \overset{p}{\otimes} b) = \sum_{i=0}^{p} (a \overset{i}{\otimes} 1) \otimes (1 \overset{p-i}{\otimes} b)$$

para cada $p \geq 0$.

6.5. El cálculo de $HH^\bullet(A)$ es inmediato una vez que identificamos el complejo que se obtiene aplicando $\hom_{A^e}(-, A)$ a la resolución (17). En particular, es fácil ver que para cada $p > 0$ hay cociclos $t_{2p-1} : A \overset{2p-1}{\otimes} A \to A$ y $z_{2p} : A \overset{2p}{\otimes} A \to A$, dados por $t_{2p-1}(a \overset{2p-1}{\otimes} b) = axb$ y $z_{2p}(a \overset{2p}{\otimes} b) = ab$, que no son cohomólogos a cero y cuyas clases de cohomología τ_{2p-1} y ζ_{2p} son tales que $HH^{2p-1}(A) = k\tau_{2p-1}$ y $HH^{2p}(A) = k\zeta_{2p}$. Por otro lado, $HH^0(A)$ está generado libremente sobre k por las clases v y ξ de los cociclos $u, c : A \overset{0}{\otimes} A \to A$ dados por $u(a \overset{0}{\otimes} b) = ab$ y $c(a \overset{0}{\otimes} b) = xab$.

6.6. Finalemente, un cálculo directo usando $\Delta^\bullet$ y estos cociclos muestra que v es la unidad de $HH^\bullet(A)$ y que

$$\xi \smile \xi = \xi \smile \tau_{2p-1} = \xi \smile \zeta_{2p} = \tau_{2p-1} \smile \tau_{2q-1} = 0,$$
$$\tau_{2p-1} \smile \zeta_{2q} = \tau_{2(p+q)-1},$$
$$\zeta_{2p} \smile \zeta_{2q} = \zeta_{2(p+q)},$$

cualesquiera sean $p, q > 0$.

6.7. Obtenemos así la siguiente descripción del álgebra de cohomología de A:

Proposición. *Si k es un cuerpo de característica distinta de 2, hay un isomorfismo de álgebras conmutativas graduadas*

$$HH^\bullet(k[X]/(X^2)) = \frac{k[\xi,\tau,\zeta]}{(\xi^2,\xi\tau,\xi\zeta)}$$

con τ de grado 1 y ζ de grado 2.

Demostración. Basta tomar $\tau = \tau_1$ y $\zeta = \zeta_2$ en 6.6. □

6.8. Podemos describir las clases ζ y τ en términos de extensiones de la siguiente manera: es inmediato verificar que la clase ζ de la proposición es la clase característica de la 2-extensión (16) y τ es la clase de la extensión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

en la que M es el bimódulo que coincide con $A \oplus A$ en tanto A-módulo izquierdo y cuya acción a derecha es tal que $(a,b)\cdot x = ((a-b)x, bx)$, y en la que los morfismos f y g están dados por $f(1) = (1,0)$ y $g(a,b) = b$.

Por otro lado, es evidente que τ corresponde a la derivación $\delta \in \operatorname{Der}_k(A)$ tal que $\delta(x) = x$, mientras que ζ es la clase característica de la extensión infinitesimal de álgebras

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} k[Y]/(Y^4) \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

en la que $\iota(1) = y^2$, $\iota(x) = y^3$ y $\pi(y) = x$, si notamos y a la clase de Y en $k[Y]/(Y^4)$.

7. Invariancia Morita

7.1. Si A y B son álgebras, un *contexto de A a B* es una 4-upla (P,Q,θ,φ) con $P \in {}_B\mathsf{Mod}_A$, $Q \in {}_A\mathsf{Mod}_B$, $\theta : P \otimes_A Q \to B$ un morfismo de B-bimódulos y $\varphi : Q \otimes_B P \to A$ un morfismo de A-bimódulos para los cuales se tiene

$$\theta(p\otimes q)p' = p\varphi(q\otimes p')$$

y

$$q\theta(p\otimes q') = \varphi(q\otimes p)q'$$

siempre que $p, p' \in P$ y $q, q' \in Q$.

7.2. Lema. *Sean A y B álgebras y sea (P,Q,θ,φ) un contexto de A a B. Si θ es sobreyectivo, entonces se trata de un isomorfismo y P es un A-módulo proyectivo y finitamente generado.*

Por supuesto, una afirmación análoga relativa a φ también vale.

Demostración. Supongamos que θ es sobreyectivo, de manera que en particular existe un elemento $e = \sum_{i\in I} p_i \otimes q_i \in P \otimes_A Q$ tal que $\theta(e) = 1 \in B$. Consideremos el morfismo $\beta : b \in B \mapsto be \in P \otimes_A Q$. Entonces si $p \in P$ y $q \in Q$ es

$$\begin{aligned}\beta(\theta(p \otimes q)) &= \sum_{i\in I} p_i \otimes q_i\theta(p \otimes q) = \sum_{i\in I} p_i \otimes \varphi(q_i, p)q \\ &= \sum_{i\in I} p_i\varphi(q_i, p) \otimes q = \sum_{i\in I} \theta(p_i \otimes q_i)p \otimes q \\ &= \theta(e)p \otimes q = p \otimes q\end{aligned}$$

Vemos así que $\beta \circ \theta = 1_{P\otimes Q}$. En particular, el morfismo θ es inyectivo.

Si $i \in I$, sea $\rho_i : p \in P \mapsto \varphi(q_i \otimes p) \in A$. Se trata claramente de un morfismo de A-módulos, y si $p \in P$ es

$$\sum_{i\in I} p_i\rho_i(p) = \sum_{i\in I} p_i\varphi(q_i \otimes p) = \sum_{i\in I} \theta(p_i \otimes q_i) \otimes p = p,$$

así que $\{(p_i, \rho_i) : i \in I\}$ es un sistema de coordenadas proyectivo sobre P como A-módulo a derecha. En consecuencia, P es proyectivo en Mod_A, y es finitamente generado porque el conjunto I es finito. Una construcción simétrica muestra que Q es es proyectivo y finitamente generado en ${}_A\mathsf{Mod}$. □

7.3. Teorema. *Sean A y B álgebras y sea (P, Q, θ, φ) un contexto de A a B. Supongamos que los morfismos θ y φ son sobreyectivos. Entonces*

(i) *Los functores*

$$F = P \otimes_A (-) : {}_A\mathsf{Mod} \to {}_B\mathsf{Mod}$$
$$G = Q \otimes_B (-) : {}_B\mathsf{Mod} \to {}_A\mathsf{Mod}$$

son equivalencias de categorías k-lineales inversas.

(ii) *Los functores*

$$F_2 = P \otimes_A (-) \otimes_A Q : {}_A\mathsf{Mod}_A \to {}_B\mathsf{Mod}_B$$
$$G_2 = Q \otimes_B (-) \otimes_B P : {}_B\mathsf{Mod}_B \to {}_A\mathsf{Mod}_A$$

son equivalencias de categorías k-lineales inversas.

Cuando se satisface la hipótesis del teorema, decimos que el contexto (P, Q, θ, φ) es *exacto*, que las álgebras A y B son *equivalentes* en el sentido de Morita o, simplemente, *Morita-equivalentes*, y escribimos $A \underset{M}{\sim} B$.

Demostración. En vista de 7.2, θ y φ son isomorfismos. Si $M \in {}_B\mathsf{Mod}$, hay una cadena de isomorfismos

$$FG(M) = P \otimes_A Q \otimes_B M \xrightarrow{\theta\otimes 1} B \otimes_B M \longrightarrow M$$

que dependen naturalmente de M y que dan un isomorfismo de functores

$$FG \cong 1 : {}_B\mathsf{Mod} \to {}_B\mathsf{Mod}.$$

De la misma forma, obtenemos un isomorfismo $GF \cong 1$ a partir de φ. Esto prueba la primera parte. Para ver la segunda procedemos de la misma manera, considerando por ejemplo el isomorfismo $F_2G_2 \cong 1 : {}_B\mathsf{Mod}_B \to {}_B\mathsf{Mod}_B$ que se obtiene de componer los isomorfismos naturales

$$F_2G_2(M) = P \otimes_A Q \otimes_B M \otimes_B P \otimes_A Q \xrightarrow{\theta\otimes 1\otimes\varphi} B \otimes_B M \otimes_B M \longrightarrow M$$

para cada $M \in {}_B\mathsf{Mod}_B$. □

7.4. La razón por las que nos interesa 7.3 es su conexión con la cohomología de Hochschild:

Proposición. *Sean A y B álgebras y sea (P, Q, θ, φ) un contexto de A a B con θ y φ sobreyectivos. Entonces hay un isomorfismo $HH^\bullet(A) \cong HH^\bullet(B)$ de álgebras graduadas.*

El isomorfismo en cuestión depende, en general, del contexto (P, Q, θ, φ).

Demostración. De 5.21 sabemos que hay isomorfismos canónicos de álgebras graduadas $HH^\bullet(A) \cong \operatorname{Ext}_{A^e}(A, A)$ y $HH^\bullet(B) \cong \operatorname{Ext}_{B^e}(B, B)$, así que bastará mostrar que hay un isomorfismo $\operatorname{Ext}_{A^e}(A, A) \cong \operatorname{Ext}_{B^e}(B, B)$.

El functor $F_2 = P \otimes_A (-) \otimes_A Q : {}_A\mathsf{Mod}_A \to {}_B\mathsf{Mod}_B$ de 7.3*(ii)* es, por supuesto, un functor exacto, de manera que induce un morfismo

$$\operatorname{Ext}_{A^e}(A, A) \to \operatorname{Ext}_{B^e}(F_2(A), F_2(A)) \tag{18}$$

entre las álgebras de Yoneda de A y de su imágen $F_2(A)$. Como F_2 es de hecho una equivalencia, es claro que este morfismo es un isomorfismo. Como hay isomorfismos de B-bimódulos

$$F_2(A) = P \otimes_A A \otimes_A Q \longrightarrow P \otimes_A Q \xrightarrow{\theta} B$$

es claro que $\operatorname{Ext}_{B^e}(F_2(A), F_2(A)) \cong \operatorname{Ext}_{B^e}(B, B)$. Componiendo a éste con (18) obtenemos el isomorfismo buscado. □

7.5. La sitación más simple en la que la hipótesis de 7.3 se satisface es la siguiente:

Proposición. *Sea A un álgebra, sea $n \geq 1$ y sea $M_n(A)$ el álgebra de matrices $n \times n$ con coeficientes en A. Sean $P = A^{n\times 1}$ y $Q = A^{1\times n}$ los conjuntos de vectores columna y fila, respectivamente, con coeficientes en A. La multiplicación matricial hace de P un $(M_n(A), A)$-bimódulo y de Q un $(A, M_n(A))$-bimódulo, y determina también morfismos $\theta : P \otimes_A Q \to M_n(A)$ y $\varphi : Q \otimes_{M_n(A)} P \to A$ de $M_n(A)$- y de A-bimódulos. Entonces (P, Q, θ, φ) es un contexto de A a $M_n(A)$ con θ y φ sobreyectivos. En particular, hay un isomofismo de álgebras graduadas*

$$HH^\bullet(M_n(A)) \cong HH^\bullet(A).$$

Demostración. Esto sigue de verificaciones directas y de 7.4. □

8. Álgebras de invariantes y productos cruzados

8.1. Sea A un álgebra y sea G un grupo que actua a izquierda sobre A por automorfismos de álgebra, de manera que tenemos un morfismo de grupos $G \to \operatorname{Aut}(A)$. Notemos kG a la k-álgebra de grupo de G.

8.2. El *producto cruzado* $A \rtimes G$ es la k-álgebra que, en tanto espacio vectorial, coincide con el producto tensorial $A \otimes kG$, y cuyo producto está dado por

$$a \otimes g \cdot b \otimes h = ag(b) \otimes gh$$

siempre que $a, b \in A$ y $g, h \in G$. Es inmediato verificar que obtenemos de esta forma en efecto una k-álgebra, y que el elemento $1_A \otimes 1_G$ es su elemento unidad.

8.3. La aplicación $a \in A \mapsto a \otimes 1_G \in A \rtimes G$ es un morfismo inyectivo de álgebras que consideraremos una identificación y que hace de $A \rtimes G$ un A-bimódulo de manera natural. Es fácil ver que, para esta estructura de bimódulo, $A \rtimes G$ es un A-módulo libre tanto a izquierda como a derecha con base $\{1 \otimes g : g \in G\}$ y en tanto.

8.4. Por otro lado, el *álgebra de invariantes* de A bajo la acción de G es

$$A^G = \{a \in A : ga = a \text{ para todo } g \in G\}.$$

Otra vez, es rutina verificar que se trata de una subálgebra de A.

8.5. Sea P el $(A \rtimes G, A^G)$-bimódulo que coincide con A como espacio vectorial, y cuyas acciones a izquierda y a derecha están dadas por

$$a \otimes g \underset{P}{\rightharpoonup} x = ag(x)$$

si $a \otimes g \in A \rtimes G$ y $x \in P$, y

$$x \underset{P}{\leftharpoonup} a = xa$$

si $x \in P$ y $a \in A^G$. Sea, por otro lado, Q el $(A^G, A \rtimes G)$-bimódulo que, otra vez, coincide con A en tanto espacio vectorial pero cuyas acciones a izquierda y a derecha están ahora dadas por

$$a \underset{Q}{\rightharpoonup} x = ax$$

si $a \in A^G$ y $x \in Q$, y

$$x \underset{Q}{\leftharpoonup} a \otimes g = g^{-1}(xa)$$

si $x \in P$ y $a \otimes g \in A \rtimes G$.

El interés de estra construcción reside en el siguiente resultado:

8.6. Proposición. (M. Cohen, D. Fischman, S. Montgomery, [CFM90]) *Sea A un álgebra, G un grupo finito que actúa a izquierda sobre A y sean P y Q los bimódulos recien construidos. Sean* $\mathrm{tr} : A \to A^G$ *la aplicación* traza, *dada por*

$$\mathrm{tr}(a) = \sum_{g\in G} g(a)$$

y sean $\theta : P \otimes_{A^G} Q \to A \rtimes G$ y $\varphi : Q \otimes_{A\rtimes G} P \to A^G$ las aplicaciones k-lineales tales que

$$\theta(x \otimes y) = \sum_{g\in G} xg(y)g$$

y

$$\varphi(y \otimes x) = \mathrm{tr}(yx)$$

siempre que $x \in P$ e $y \in Q$. Entonces θ y φ son morfismos de $A \rtimes G$- y A^G-bimódulos, y (P, Q, θ, φ) es un contexto de A^G a $A \rtimes G$.

Demostración. Esto sigue de un cálculo directo. □

8.7. Hay muchas formas de caracterizar la exactitud del contexto construido en esta proposición en términos de la forma en que G actúa sobre A; véanse las notas [Far01] para un estudio detallado de esta cuestión. Nosotros estamos interesados en una situación particularmente simple desde este punto de vista.

8.8. En primer lugar, podemos hacer la siguiente observación elemental:

Proposición. *Sea A un álgebra, G un grupo finito que actúa a izquierda sobre A y sea (P, Q, θ, φ) el contexto construido en* **8.6**. *Si el orden del grupo G es inversible en el cuerpo k de base, entonces el morfismo φ es sobreyectivo.*

Demostración. Como $\frac{1}{|G|} \in k$, $w = \frac{1}{|G|} 1_A \otimes 1_A \in P \otimes_{A^G} Q$ y claramente $\varphi(w) = 1$. Como la imagen de φ es un A^g-bimódulo, es decir, un ideal bilátero, concluimos que φ es sobreyectivo. □

8.9. Lema. (S. Montgomery [Mon80]) *Sea A un álgebra simple y sea G un grupo que actua sobre A vía un morfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{Aut}(A)$ inyectivo tal que $\rho(g)$ es un automorfismo interior de A solamente cuando $g = 1_G$. Entonces el producto cruzado $A \rtimes G$ es un álgebra simple.*

Cuando se satisface la condición del lema, decimos que la acción de G sobre A es *exterior*.

Demostración. Supongamos que existe un ideal bilátero no nulo y propio $I \subsetneq A \rtimes G$.

Sea $x = \sum_{g\in G} x_g g \in I$ un elemento no nulo para el cual el conjunto soporte $\operatorname{supp} x = \{g \in G : x_g \neq 0\}$, que no es vacío, es de cardinal mínimo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $1_G \in \operatorname{supp} x$; si ese no es el caso, podemos sustituir a x por xg^{-1} con $g \in \operatorname{supp} x$. Más aún, podemos suponer que $x_1 = 1$: si no, como $Ax_1A = A$ porque A es simple, existen $n \in \mathbb{N}$ y elementos a_i, $b_i \in A$ para

$i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_1 b_i = 1$, y podemos reemplazar a x por el elemento $\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$ de I, que tiene el mismo soporte que x.

Observemos que $\{1\} \subsetneq \operatorname{supp} x$: de valer la igualdad tendríamos $1 = x \in I$ e $I = A$, lo que no es cierto. Fijemos entonces un elemento $h \in \operatorname{supp} x$ tal que $h \neq 1$.

Sea $a \in A$ y sea $y = ax - xa$. Es fácil ver que $\operatorname{supp} y \subseteq (\operatorname{supp} x)\setminus\{1\}$. La minimalidad de la elección de x implica entonces que $y = \sum_{g\in G}(ax_g - x_g g(a))g = 0$ y, en particular, que

$$ax_h = x_h h(a). \tag{19}$$

Como h es actúa por automorfismos de A, esto implica que $Ax_h = x_h A$, y entonces que $Ax_h = Ax_h A$. Como A es simple, necesariamente $1 \in Ax_h = x_h A$, de manera que x_h es inversible en A, y la ecuación (19) nos dice entonces que para todo $a \in A$ es

$$x_h^{-1} a x_h = h(a)$$

o, en otras palabras, h actúa sobre A vía el automorfismo interior de A correspondiente a x_h. Esto es imposible, por hipótesis y esta imposibilidad prueba que no existen ideales no nulos propios es $A \rtimes G$. □

8.10. Proposición. *Sea A un álgebra simple y sea G un grupo que actua sobre A vía una acción exterior. Entonces el morfismo θ del contexto (P, Q, θ, φ) de 8.6 es sobreyectivo.*

Demostración. La imagen de θ es un $A \rtimes G$-subbimódulo de $A \rtimes G$, esto es, un ideal bilátero y es evidentemente no nulo. De acuerdo al lema 8.9, $A \rtimes G$ no tiene ideales biláteros propios, así que nevesariamente $\operatorname{im}\theta = A \rtimes G$. □

8.11. Esta proposición junto con 8.8 nos da inmediatamente el siguiente criterio de exactitud:

Teorema. *Sea k un cuerpo, sea A una k-álgebra simple y sea G un grupo finito que actua sobre A vía una acción exterior y tal que su orden $|G|$ es inversible en k. Entonces el contexto (P, Q, θ, φ) de 8.6 es exacto y las álgebras A^G y $A \rtimes G$ son equivalentes en el sentido de Morita.* □

8.12. El interés de este resultado, a nuestros fines, es el siguiente. En la situación del teorema, suele suceder que no disponemos de una descripción explícita del álgebra de invariantes A^G, o que la descripción que tenemos es demasiado complicada como para ser de utilidad al encarar la determinación de $HH^\bullet(A^G)$, mientras que tenemos mucho más control sobre el álgebra $A \rtimes G$. Cuando estamos en las hipótesis del teorema, obtenemos de 7.4 un isomorfismo $HH^\bullet(A^G) \cong HH^\bullet(A \rtimes G)$ entre las álgebras de cohomología de Hochschild de A^G y $A \rtimes G$, y reducimos el problema de calcular $HH^\bullet(A^G)$ al más accesible de calcular $HH^\bullet(A \rtimes G)$.

9. La cohomología de un producto cruzado

9.1. Fijemos un álgebra A y un grupo G que actúa sobre A por automorfismos de álgebras. Por simplicidad, escribamos $B = A \rtimes G$.

9.2. Sea $M \in {}_B\mathsf{Mod}_B$. Por restricción de escalares a lo largo del morfismo de 8.3 podemos ver a M como un A-bimódulo, y calcular su subespacio de A-invariantes

$$M^A = \{m \in M : \text{para todo } a \in A \text{ es } am = ma\}.$$

Hacemos de M^A un G-módulo a izquierda definiendo

$$g \cdot m = gmg^{-1}$$

para cada $g \in G$ y cada $m \in M^A$; es fácil ver que $gmg^{-1} \in M^A$, así que esto tiene sentido, y la verificación de que obtenemos de esta forma una acción de G es inmediata. Extendiendo de la manera evidente esta construcción a los morfismos, es claro que construimos un functor

$$(-)^A : {}_A\mathsf{Mod}_A \to {}_G\mathsf{Mod}.$$

Sea, por otro lado,

$$(-)^G : {}_G\mathsf{Mod} \to {}_k\mathsf{Mod}$$

el functor usual de G-invariantes, tal que sobre los objetos $M \in {}_G\mathsf{Mod}$ se tiene $M^G = \{m \in M : gm = m \text{ para todo } g \in G\}$.

9.3. Lema. *Sea $(-)^{A\rtimes G} : {}_{A\rtimes G}\mathsf{Mod}_{A\rtimes G} \to {}_k\mathsf{Mod}$ el functor de $A \rtimes G$-invariantes. Entonces hay un isomorfismo natural de functores*

$$(-)^{A\rtimes G} \cong (-)^G \circ (-)^A.$$

Demostración. El lema sigue inmediatamente de observar que si $M \in {}_{A\rtimes G}\mathsf{Mod}_{A\rtimes G}$, entonces $(M^A)^G = M^{A\rtimes G}$. □

9.4. Sea M un G-módulo. Decimos que M es *acíclico* si es trivial para la cohomología, esto es, si para todo $p > 0$ se tiene que $H^p(G, M) = 0$. Por otro lado, decimos que M es un *G-módulo coinducido* si existe un espacio vectorial tal que $M \cong \hom(kG, V)$ en tanto G-módulo.

Notemos que si V, $W \in {}_k\mathsf{Mod}$, entonces $\hom(V \otimes kG, W)$, consu estructura usual de G-módulo, es coinducido, porque es isomorfo a $\hom(kG, \hom(V, W))$.

Lema. *Un G-módulo coinducido es acíclico.*

Demostración. Sea V un espacio vectorial y sea $M = \hom(kG, M)$ con su estructura usual de G-módulo. Si $P \twoheadrightarrow k$ una resolución kG-proyectiva del G-módulo trivial k, entonces la cohomología $H^\bullet(G, M)$ es isomorfa a la cohomología del complejo

$\hom_G(P, \hom(kG, V))$. Pero si $X \in {}_G\mathsf{Mod}$ e $Y \in {}_k\mathsf{Mod}$, hay un isomorfismo natural de espacios vectoriales

$$\hom_G(X, \hom(kG, Y)) \to \hom(X, Y),$$

así que en particular el complejo $\hom_G(P, \hom(kG, V))$ es isomorfo al complejo $\hom(P, V)$, que es acíclico porque P es acícliclo y k es un cuerpo. Esto prueba el lema. □

9.5. Lema. *Sea $I \in {}_{A\rtimes G}\mathsf{Mod}_{A\rtimes G}$ un $A \rtimes G$-bimódulo inyectivo. Entonces I^A es un G-módulo acíclico: esto es, $H^p(G, I^A) = 0$ para todo $p > 0$.*

Aquí $H^\bullet(G, -)$ es el functor de cohomología de grupos evaluado en G.

Demostración. Sea $\iota : M \to \hom((A \rtimes G)^e, M)$ tal que $\iota(m)(x \otimes y) = xmy$ para todo $m \in M$ y todo $x, y \in A \rtimes G$. Como $(A \rtimes G)^e$ es un $(A \rtimes G)^e$-módulo a derecha, $\hom((A \rtimes G)^e, M)$ es un $(A \rtimes G)^e$-módulo izquierda o, equivalentemente, un $A \rtimes G$-bimódulo, y es fácil ver que ι es un morfismo de $A \rtimes G$-bimódulos para esta estructura. Como es un monomorfismo y M es inyectivo en ${}_{A\rtimes G}\mathsf{Mod}_{A\rtimes G}$, M es isomorfo a un sumando directo de $\hom((A \rtimes G)^e, M)$ en tanto $A \rtimes G$-bimódulo. Para probar el lema, entonces, y en vista de 9.4 bastará mostrar $\hom((A \rtimes G)^e, M)^A$ es isomorfo a un G-módulo coinducido.

Sea $N \in {}_{A\rtimes G}\mathsf{Mod}_{A\rtimes G}$. Si $f \in \hom((A \rtimes G)^e, N)$ y $l, r \in A \rtimes G$, entonces la acción de $A \rtimes G$ sobre el $A \rtimes G$-bimódulo es tal que

$$(lfr)(x \otimes y) = f(xr \otimes ly)$$

para todo $x, y \in A \rtimes G$. En particular, si $f \in \hom((A \rtimes G)^e, N)^A$, tenemos que

$$f(xa \otimes y) = (af)(x \otimes y) = (fa)(x \otimes y) = f(x \otimes ay)$$

para todo $x, y \in A \rtimes G$. En consecuencia, a partir de f obtenemos un morfismo $\varphi(f) : (A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G) \to N$ y, en definitiva, una aplicación

$$\varphi : \hom((A \rtimes G)^e, N)^A \to \hom((A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G), N)$$

que es evidentemente un isomorfismo natural en N. Observemos que hay un isomorfismo

$$(a \otimes g) \otimes g' \in (A \rtimes kG) \otimes kG \mapsto (a \otimes gg'^{-1}) \otimes (1 \otimes g') \in (A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G)$$

de espacios vectoriales que tiene inversa

$$\begin{aligned}(a \otimes g) \otimes (a' \otimes g') &\in (A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G) \\ &\mapsto (ag(a') \otimes gg') \otimes g' \in (A \rtimes kG) \otimes kG\end{aligned}$$

y que induce un isomorfismo

$$\hom((A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G), N) \to \hom((A \rtimes G) \otimes kG, N).$$

Componiendo, obtenemos un isomorfismo

$$\psi : \hom((A \rtimes G)^e, N)^A \to \hom((A \rtimes G) \otimes kG, N)$$

tal que $\psi(f)((a \otimes g) \otimes g') = f((a \otimes gg'^{-1}) \otimes (1 \otimes g'))$. Calculando, vemos que si $h \in G$ es

$$\psi(h \cdot f)((a \otimes g) \otimes g') = \psi(f)((a \otimes g) \otimes h^{-1}g'),$$

así que si dotamos a $(A \rtimes G) \otimes kG$ de una estructura de G-módulo a izquierda tal que $h \cdot (a \otimes g) \otimes g' = (a \otimes g) \otimes hg'$ para cada $a \in A$ y cada $g, g', h \in G$, y consideramos sobre $\hom((A \rtimes G) \otimes kG, N)$ la estructura de G-módulo izquierdo inducida, el isomorfismo ψ resulta un isomorfismo de G-módulos, ya que en ese caso es

$$\psi(f)((a \otimes g) \otimes h^{-1}g') = (h \cdot \psi(f))((a \otimes g) \otimes g')$$

Así, nuestro G-módulo $\hom((A \rtimes G)^e, N)^A$ es isomorfo al G-módulo coinducido $\hom((A \rtimes G) \otimes kG, N)$, que es G-acíclico. □

9.6. Teorema. *Sea A un álgebra y sea G un grupo que actúa sobre A por automorfismos. Sea M un $A \rtimes G$-bimódulo. Entonces existe una sucesión espectral convergente cohomológicamente graduada y con soporte en el primer cuadrante que tiene*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(G, H^q(A, M)) \Rightarrow H^\bullet(A \rtimes G, M).$$

Demostración. Sabemos que hay un isomorfismo de ∂-functores

$$H^\bullet(A \rtimes G, -) \cong R^\bullet((-)^{A \rtimes G})$$

con $R^\bullet((-)^{A \rtimes G})$ el ∂-functor derivado a derecha del functor de $A \rtimes G$-invariantes

$$(-)^{A \rtimes G} : {}_{A \rtimes G}\mathsf{Mod}_{A \rtimes G} \to {}_k\mathsf{Mod}$$

De acuerdo a 9.3, tenemos una factorización de $(-)^{A \rtimes G}$ de la forma

$${}_{A \rtimes G}\mathsf{Mod}_{A \rtimes G} \xrightarrow{(-)^A} {}_G\mathsf{Mod} \xrightarrow{(-)^G} {}_k\mathsf{Mod}$$

y 9.5 nos dice que $(-)^A$ manda objetos inyectivos de ${}_{A \rtimes G}\mathsf{Mod}_{A \rtimes G}$ a objetos acíclicos para $(-)^G$. Como los functores $(-)^A$ y $(-)^G$ son exactos a izquierdo, estamos entonces en las hipótesis del teorema de Grothendieck que muestra la existencia de una sucesión espectral para una composición de functores, como en [HS97, Theorem 9.3]. El teorema es consecuencia directa de esto. □

9.7. Si tomamos $M = A \rtimes G$ en el teorema, entonces el límite de la sucesión espectral es $HH^\bullet(A \rtimes H)$, que es un álgebra. En ese caso podemos ser más precisos:

Teorema. *Cuando $M = A \rtimes G$, la sucesión espectral del teorema anterior es una sucesión espectral de álgebras.*

Esto significa que hay una estructura de álgebra bigraduada sobre cada una de las etapas E_r, $r \geq 2$, de manera que *(i)* para cada $r \geq 2$ la diferencial d^r es una derivaciones de E_r, que *(ii)* el isomorfismo $E_{r+1} \cong H(E_r)$ es un isomorfismo de álgebras y que *(iii)* que E_∞ es un álgebra de manera compatible con las estructuras de álgebras de las etapas finitas y que hay un isomorfismo de álgebras $E_\infty \cong \operatorname{gr} HH^\bullet(A \rtimes G)$. En [McC01] puede encontrarse una descripción precisa de esta noción.

Más áun, la estructura de álgebra del término E_2 es la natural. Como $A \rtimes G$ es un álgebra, $H^\bullet(A, A \rtimes G)$ posee una estructura de álgebra con producto dado por la composición del producto

$$\sqcup : H^\bullet(A, A \rtimes A) \otimes H^\bullet(A, A \rtimes G) \to H^\bullet(A, (A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G))$$

construido en 5.11 y el morfismo

$$H^\bullet(A, (A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G)) \to H^\bullet(A, A \rtimes G)$$

inducido por la multiplicación $(A \rtimes G) \otimes_A (A \rtimes G) \to A \times G$. La acción de G sobre $H^\bullet(A, A \rtimes G)$ es compatible con la multiplicación, de manera que la cohomología $H^\bullet(G, H^\bullet(A, A \rtimes G))$ posee un producto inducido: este es precisamente el producto de la estapa E_2 de la sucesión espectral.

9.8. La prueba del teorema 9.7 consiste en tres pasos. Primero, es necesario dar una construcción alternativa de la sucesión espectral que en vez de proceder como en la prueba del teorema de Grothendieck utiza un complejo doble construido a partir de las resoluciones estándar de G y de A; esto puede llevarse a cabo directamente o usando, por ejemplo, la maquinaria general presentada por Matthias Künzer en [Kün08] para compara sucesiones espectrales. Una vez hecho esto, el segundo paso consiste en construir una estructura multiplicativa en el complejo así obtenido, que induce la estructura en toda la sucesión espectral: esto se lleva a cabo usando las fórmulas explícitas para el producto de $HH^\bullet(A)$ que dimos en 5.15 y las fórmulas análogas y bien conocidas para el producto sobre la cohomología de grupos.

Omitimos los detalles, ya que exponerlos nos llevaría demasiado lejos de nuestros objetivos.

9.9. Un corolario inmediato del teorema, que es explicita el caso particular en el que estamos interesados, es el siguiente:

Proposición. *Sea A un álgebra, sea G un grupo finito que actua sobre A por automorfismos de álgebra, y supongamos que el orden de G es inversible en el cuerpo de base k.*

Entonces hay un isomorfismo de álgebras

$$HH^\bullet(A \rtimes A) \cong H^*(A, A \rtimes G)^G$$

Aquí $H^\bullet(A, A \rtimes G)$ es un álgebra como en las observaciones hechas después del enunciado del teorema.

Demostración. La hipótesis sobre el orden de G implica que el álgebra de grupo kG es semisimple, y entonces $H^p(G, -) = 0$ si $p > 0$. En particular, la sucesión espectral construida en el teorema 9.6 esta soportada sobre uno de los ejes coordenados, de manera que degenera inmediatamente y da un isomorfismo

$$H^0(G, H^\bullet(A, A \rtimes G)) \cong HH^*(A \rtimes G),$$

que es un isomorfsmo de álgebras como consecuencia de 9.7. La proposición sigue, entonces, de que $H^0(G, -) = (-)^G$. □

CAPÍTULO II

Álgebras de operadores diferenciales

1. Operadores diferenciales

1.1. Sea k un anillo conmutativo.

1.2. Si Λ es una k-álgebra (no necesariamente conmutativa) y x, $y \in \Lambda$, escribimos

$$[x, y] = xy - yx$$

y, más generalmente, si $l \geq 2$ y x, $y_1, \ldots, y_l \in \Lambda$, definimos inductivamente

$$[x, y_1, \ldots, y_l] = \big[[x, y_1, \ldots, y_{l-1}], y_l\big].$$

Notamos, además, ad y a la aplicación $[-, y] : x \in \Lambda \mapsto [x, y] \in \Lambda$.

Es inmediato verificar que la aplicación $[-, -] : \Lambda \times \Lambda \to \Lambda$ es anti-simétrica y que, cualesquiera sean x, y, $z \in \Lambda$, se tiene que

$$[x, yz] = [x, y]z + y[x, z] \tag{20}$$

y

$$\big[x, [y, z]\big] = \big[[x, y], z\big] + \big[y, [x, z]\big]. \tag{21}$$

La primera de estas identidades es la llamada *regla de Leibniz*, mientras que la segunda es la *condición de Jacobi* para el corchete $[-, -]$.

Usando (21) es fácil ver que si los elementos $y_1, \ldots, y_l$ conmutan entre sí, la expresión $[x, y_1, \ldots, y_l]$ es *simétrica* con respecto a sus últimos l argumentos.

1.3. Fijemos una k-álgebra conmutativa A.

1.4. Si $x \in A$, escribimos $m_x \in \operatorname{End}_k(A)$ a la aplicación $m_x : y \in A \mapsto xy \in A$ dada por la multiplicación por x.

1.5. Sea $(\operatorname{Diff}_k^p(A))_{p \geq -1}$ la sucesión de subespacios de $\operatorname{End}_k(A)$ con $\operatorname{Diff}_k^{-1}(A) = 0$ y, para cada $p \geq 0$,

$$\operatorname{Diff}_k^p(A) = \{f \in \operatorname{End}_k(A) : [f, m_x] \in \operatorname{Diff}_k^{p-1}(A) \text{ para cada } x \in A\}.$$

Sea además $\operatorname{Diff}_k(A) = \bigcup_{p \geq -1} \operatorname{Diff}_k^p(A)$.

1.6. Sea $S \subset A$ un subconjunto que genera a A como k-álgebra. Si $f \in \operatorname{End}_k(A)$ y $p \geq 0$, un argumento inductivo evidente usando (20) y (21) prueba que $f \in \operatorname{Diff}_k^p(A)$ sii se tiene $[f, m_{x_0}, \ldots, m_{x_p}] = 0$ para cada elección de $x_0, \ldots, x_p \in S$.

1.7. Lema. *Sea A una k-álgebra conmutativa.*

(i) *La sucesión* $(\mathrm{Diff}_k^p(A))_{p\geq -1}$ *de subespacios de* $\mathrm{End}_k(A)$ *es creciente.*

(ii) *Si $x \in A$, entonces $m_x \in \mathrm{Diff}^0(A)$. La aplicación $m : x \in A \mapsto m_x \in \mathrm{Diff}^0(A)$ es un isomorfismo de k-álgebras. En particular,* $\mathrm{Diff}_k^0(A) = \mathrm{End}_A(A)$.

(iii) *Si p, $q \geq -1$, $f \in \mathrm{Diff}_k^p(A)$ y $g \in \mathrm{Diff}_k^q(A)$, entonces $[f, g] \in \mathrm{Diff}_k^{p+q-1}(A)$.*

(iv) *Si p, $q \geq -1$, $f \in \mathrm{Diff}_k^p(A)$ y $g \in \mathrm{Diff}_k^q(A)$, entonces $fg \in \mathrm{Diff}_k^{p+q}(A)$.*

(v) $\mathrm{Diff}_k(A)$ *es una sub-k-álgebra de* $\mathrm{End}_k(A)$ *y* $(\mathrm{Diff}_k^p(A))_{p\geq 0}$ *es una filtración creciente y exhaustiva compatible con esta estructura, y la correspondiente álgebra graduada* $\mathrm{gr}\,\mathrm{Diff}_k(A)$ *es conmutativa.*

El álgebra $\mathrm{Diff}_k(A)$ es el *álgebra de operadores diferenciales* sobre A. Si $f \in \mathrm{Diff}_k(A)$, decimos que f tiene *orden* a lo sumo p cuando $f \in \mathrm{Diff}_k^p(A)$.

Demostración. *(i)* Mostremos que $\mathrm{Diff}_k^{p-1}(A) \subset \mathrm{Diff}_k^p(A)$ para todo $p \geq 0$ haciendo inducción sobre p; notemos que cuando $p = 0$ no hay nada que probar. Sea entonces $p \geq 1$, $f \in \mathrm{Diff}_k^{p-1}(A)$ y supongamos que $\mathrm{Diff}_k^{p-2}(A) \subset \mathrm{Diff}_k^{p-1}(A)$. Sea $x \in A$. Tenemos que $[f, m_x] \in \mathrm{Diff}_k^{p-2}(A)$ en vista de la elección de f, y la hipótesis inductiva nos dice que entonces $[f, m_x] \in \mathrm{Diff}_k^{p-1}(A)$. La arbitrariedad de x implica ahora que $f \in \mathrm{Diff}_k^p(A)$.

(ii) Si $x \in A$, entonces $[m_x, m_y] = 0 \in \mathrm{Diff}_k^{-1}(A)$ para cada $y \in A$ porque A es conmutativa. Luego $m_x \in \mathrm{Diff}_k^0(A)$ y la aplicación m del enunciado está bien definida. Que se trata de un morfismo de k-álgebras es evidente. Si $f \in \mathrm{Diff}_k^0(A)$, la definición de $\mathrm{Diff}_k^0(A)$ nos dice que $f(xy) = xf(y)$ cualesquiera sean x, $y \in A$, así que si $y \in A$, tenemos que

$$f(y) = f(y1) = yf(1) = m_{f(1)}(y),$$

de manera que $f = m_{f(1)}$. La aplicación m es por lo tanto sobreyectiva. Es inyectiva porque para cada $x \in A$ es $m_x(1) = x$.

(iii) Digamos que un par (p, q), con p, $q \geq -1$, es *bueno* si cualesquiera sean $f \in \mathrm{Diff}_k^p(A)$ y $g \in \mathrm{Diff}_k^q(A)$ se tiene que $[f, g] \in \mathrm{Diff}_k^{p+q-1}(A)$. Notemos que, en vista de las definiciones y de *(ii)*, un par (p, q) que tiene alguna de sus dos componentes igual a -1 es bueno. Para probar la afirmación *(iii)*, supongamos inductivamente que

si $-1 \leq p' \leq p$, $-1 \leq q' \leq q$ y $(p', q') \neq (p, q)$, entonces el par (p', q') es bueno. (22)

Ahora, si $f \in \mathrm{Diff}_k^p(A)$, $g \in \mathrm{Diff}_k^q(A)$ y $x \in A$, es

$$\big[[f, g], m_x\big] = \big[[f, m_x], g\big] + \big[f, [g, m_x]\big],$$

así que, como $[f, m_x] \in \mathrm{Diff}_k^{p-1}(A)$ y $[g, m_x] \in \mathrm{Diff}_k^{q-1}(A)$, la hipótesis (22) implica que $\big[[f, g], m_x\big] \in \mathrm{Diff}_k^{p+q-2}(A)$. Como el elemento x es arbitrario, esto nos dice que $[f, g] \in \mathrm{Diff}_k^{p+q-1}(A)$, esto es, que el par (p, q) es bueno. Esto prueba *(iii)*.

(iv) Si $p, q \geq -1$, $f \in \operatorname{Diff}_k^p(A)$, $g \in \operatorname{Diff}_k^q(A)$ y $x \in A$, es

$$[fg, m_x] = [f, m_x]\, g + f\, [g, m_x].$$

Como $[f, m_x] \in \operatorname{Diff}_k^{p-1}(A)$ y $[g, m_x] \in \operatorname{Diff}_k^{q-1}(A)$, vemos que, si razonamos como en la prueba de *(iii)*, la prueba de *(iv)* se reduce a la verificación de su validez cuando $p = -1$ o $q = -1$, la que es claramente inmediata.

(v) Esto es consecuencia directa de *(i)–(iv)*. □

1.8. El lema 1.7 provee una descripción explícita de $\operatorname{Diff}_k^0(A)$, al que desde ahora identificamos con A; así, escribiremos generalmente x en lugar de m_x. Además, es claro que *(iv)* implica que, bajo esa identificación, cada $\operatorname{Diff}_k^p(A)$ es un A-bimódulo. Es fácil dar ejemplos que muestren que no se trata de A-bimódulos simétricos, en general.

1.9. Para $\operatorname{Diff}_k^1(A)$ tenemos la siguiente descripción:

Lema. *Sea A una k-álgebra conmutativa. Si $\delta \in \operatorname{Der}_k(A)$ es una k-derivación de A, entonces $\delta \in \operatorname{Diff}_k^1(A)$. La aplicación*

$$(x, \delta) \in A \oplus \operatorname{Der}_k(A) \mapsto x + \delta \in \operatorname{Diff}_k^1(A)$$

es un isomorfismo de A-módulos izquierdos.

Demostración. Si $\delta \in \operatorname{Der}_k(A)$ y $x, y \in A$, es

$$[\delta, m_x](y) = \delta(xy) - x\,\delta(y) = y\,\delta(x) = m_{\delta(x)}(y),$$

así que $[\delta, m_x] = m_{\delta(x)} \in \operatorname{Diff}_k^0(A)$. Esto nos dice que $\delta \in \operatorname{Diff}_k^1(A)$. Esto prueba la primera afirmación del lema y la buena definición de la aplicación que aparece en el enunciado. La A-linealidad a izquierda puede verificarse haciendo un cálculo directo. Para ver que se trata de un isomorfismo, exhibiremos una aplicación $\psi : \operatorname{Diff}_k^1(A) \to A \oplus \operatorname{Der}_k(A)$ que es su inversa.

Sea $f \in \operatorname{Diff}_k^1(A)$. Si $y \in A$, entonces existe $u \in A$ tal que $[f, m_y] = m_u$. Evaluando ambos miembros de esta igualdad en $1 \in A$ vemos inmediatamente que $u = f(y) - yf(1)$ y, entonces, que

$$f(yz) - yf(z) = f(y)z - yf(1)z \tag{23}$$

para todo $z \in A$. Sea $\delta = f - m_{f(1)} \in \operatorname{End}_k(A)$. Usando (23), calculamos que

$$\begin{aligned} \delta(y)z + y\delta(z) &= f(y)z - f(1)yz + yf(z) - yf(1)z \\ &= f(yz) - f(1)yz = \delta(yz), \end{aligned}$$

de manera que $\delta \in \operatorname{Der}_k(A)$. Tiene sentido poner, entonces,

$$\psi(f) = (f(1), \delta) \in A \oplus \operatorname{Der}_k(A).$$

Es inmediato que, definida así, la aplicación ψ es la inversa buscada. □

1.10. En general, no hay una descripcion directa para $\operatorname{Diff}_k^p(A)$ cuando $p \geq 2$ comparable a la dada en 1.7 y 1.9 para $p = 0$ y $p = 1$.

2. Una descripción alternativa de $\operatorname{Diff}_k(A)$

2.1. El objetivo de esta sección es presentar una descripción alternativa de $\operatorname{Diff}_k(A)$ que resulta considerablemente más cómoda para muchos propósitos.

2.2. Sea $\mu : A \otimes_k A \to A$ la multiplicación de A y sea $J = \ker \mu$, de manera que tenemos una sucesión exacta corta de A-bimódulos:

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \otimes_k A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

Como A es conmutativa, μ es un morfismo de k-álgebras y J es un ideal de $A \otimes A$.

2.3. Si $x \in A$, entonces $\mathrm{d}(x) = 1 \otimes x - x \otimes 1 \in J$, así que podemos definir de esta manera una aplicación $\mathrm{d} : A \to J$, que es claramente k-lineal. Se trata, de hecho, de una k-derivación.

2.4. La imágen $\mathrm{d}(A)$ genera a J como A-módulo tanto a izquierda como a derecha: dado un elemento $u = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i \in J$, de manera que $\mu(u) = \sum_{i \in I} x_i y_i = 0$, entonces

$$\sum_{i \in I} x_i \, \mathrm{d}(y_i) = u = -\sum_{i \in I} \mathrm{d}(x_i) y_i.$$

En particular, $d(A)$ genera a J como ideal de $A \otimes_k A$. Más generalmente, si $S \subset A$ es un subconjunto que genera a A como k-álgebra es fácil ver, usando que d es una derivación, que $\mathrm{d}(S)$ genera a J como ideal de $A \otimes A$.

2.5. Recordemos que cuando M y N son A-módulos izquierdos, el k-espacio vectorial $\hom_k(M, N)$ resulta un A-bimódulo, de manera que si $f \in \hom_k(M, N)$ y $x, y \in A$, entonces $xfy : M \to N$ es el morfismo tal que $(xfy)(m) = xf(ym)$ para cada $m \in M$. Dotado de esta estructura, es fácil ver hay un isomorfismo

$$\alpha : \hom_{A \otimes_k A}(A, \hom_k(M, N)) \to \hom_A(M, N)$$

tal que $\alpha(f)(m) = f(1)(m)$ si $f : A \to \hom_k(M, N)$ es $A \otimes_k A$-lineal y $m \in M$.

2.6. Proposición. *Sea A una k-álgebra conmutativa y sea $p \geq 0$. Entonces hay un isomorfismo de A-módulos izquierdos o derechos*

$$\hom_{A \otimes_k A}\left((A \otimes_k A)/J^{p+1}, \operatorname{End}_k(A)\right) \cong \operatorname{Diff}_k^p(A)$$

y, si dotamos a $A \otimes_k A$ de la topología J-ádica y a $\operatorname{End}_k(A)$ de la topología discreta,

$$\hom^{cont}_{A \otimes_k A}\left(A \otimes_k A, \operatorname{End}_k(A)\right) \cong \operatorname{Diff}_k(A)$$

también como A-módulos izquierdos o derechos.

Demostración. Si $f \in \operatorname{End}_k(A)$ y $x \in A$, es inmediato verificar que, con respecto a la estructura de $A \otimes_k A$-módulo de $\operatorname{End}_k(A)$, se tiene que $\mathrm{d}(x)f = [f, m_x]$.

Sea $p \geq 0$ y pongamos $P_p = (A \otimes_k A)/J^{p+1}$. La aplicación

$$\varphi \in \hom_{A\otimes_k A}(P_p, \operatorname{End}_k(A)) \mapsto \varphi(\overline{1\otimes 1}) \in \{f \in \operatorname{End}_k(A) : J^{p+1}f = 0\}.$$

es evidentemente un isomorfismo de A-módulos izquierdos. Como sabemos que J^{p+1} está generado como A-bimódulo por los productos de la forma $\mathrm{d}(x_0)\cdots\mathrm{d}(x_p)$ con $x_0, \ldots, x_p \in A$, y como

$$\mathrm{d}(x_0)\cdots\mathrm{d}(x_p)\,f = [f, m_{x_0}, \ldots, m_{x_p}],$$

es claro que $\{f \in \operatorname{End}_k(A) : J^{p+1}f = 0\} = \operatorname{Diff}_k^p(A)$. Esto prueba la primera parte de la proposición.

La segunda parte es consecuencia inmediata de la primera, ya que un homomorfismo $A \otimes_k A \to \operatorname{End}_k(A)$ es continuo precisamente cuando se anula sobre una potencia de J. □

2.7. Motivados por esta proposición hacemos la siguiente definición: cuando M y N son A-módulos izquierdos y $p \geq 0$, el *espacio de operadores diferenciales de M en N de orden p* es

$$\operatorname{Diff}_k^p(M, N) = \hom_{A\otimes_k A}\big((A \otimes_k A)/J^{p+1}, \hom_k(M, N)\big)$$

y, si dotamos a $A \otimes_k A$ de la topología J-ádica y a $\hom_k(M, N)$ de la topología discreta, *el espacio de operadores diferenciales de M en N* es

$$\operatorname{Diff}_k(M, N) = \hom^{\mathrm{cont}}_{A\otimes_k A}\big(A \otimes_k A, \hom_k(M, N)\big)$$

2.8. Notemos que la proposición nos dice que $\operatorname{Diff}_k^p(A, A) = \operatorname{Diff}_k^p(A)$ para cada $p \geq 0$ y que $\operatorname{Diff}_k(A, A) = \operatorname{Diff}_k(A)$. Es de esta forma como se introducen los operadores diferenciales en [Gro, §16].

3. Operadores diferenciales sobre álgebras de dimensión finita

3.1. En esta sección daremos una descripción completa del álgebra $\operatorname{Diff}_k(A)$ cuando A es una k-álgebra de dimensión finita y k es un cuerpo perfecto. Esto es posible gracias al teorema de estructura de anillos artinianos y el Teorema Principal de Wedderburn-Malcev, que nos permiten reducir la cuestión al caso local más simple.

3.2. Proposición. *Sea k un cuerpo y sea $(A, \mathfrak{m})$ una k-álgebra conmutativa y local de dimensión finita, con cuerpo residual k. Entonces* $\operatorname{Diff}_k(A) = \operatorname{End}_k(A)$.

Demostración. Escribimos $\otimes = \otimes_k$ y pongamos $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \otimes A + A \otimes \mathfrak{m} \subset A \otimes A$. Como $\mathfrak{m}$ es nilpotente, es claro que todo elemento de $\mathfrak{n}$ es nilpotente en $A \otimes A$; por otro lado, tenemos que $(A \otimes A)/\mathfrak{n} \cong A/\mathfrak{m} \cong k$. Concluimos, entonces, que $\mathfrak{n}$ es el radical de Jacobson de A y, como $\mathfrak{n}$ es evidentemente un ideal maximal, que es el único. Así, $A \otimes A$ es local y, como es además artiniana, el ideal $\mathfrak{n}$ es nilpotente.

Ahora bien, el ideal $J = \ker(\mu : A \otimes A \to A)$ de 2.2 está contenido en $\mathfrak{n}$, así que existe $p \geq 0$ tal que $J^{p+1} = 0$ y entonces

$$\operatorname{Diff}_k^p(A) = \hom_{A\otimes A}\left((A \otimes A)/J^{p+1}, \operatorname{End}_k(A)\right)$$

coincide con $\operatorname{End}_k(A)$. Por supuesto, esto implica que $\operatorname{Diff}_k(A) = \operatorname{End}_k(A)$. □

3.3. Lema. *Sea K/k una extensión algebraica y separable de cuerpos y sea $M \in {}_K\mathsf{Mod}$. Entonces toda k-derivación $d : K \to M$ es nula.*

Demostración. Sea $d : K \to M$ una k-derivación y sea $\lambda \in K$. Como K/k es algebraica y separable, existe $p \in k[X]$ tal que $p(\lambda) = 0$ y $p'(\lambda) \neq 0$. Entonces $0 = d(p(\lambda)) = p'(\lambda)d(\lambda)$, así que $d(\lambda) = 0$. □

3.4. Proposición. *Sea K/k una extensión algebraica y separable de cuerpos y sea A una K-álgebra. Entonces $\operatorname{Diff}_K^p(A) = \operatorname{Diff}_k^p(A)$ para cada $p \geq -1$ y, en consecuencia, $\operatorname{Diff}_K(A) = \operatorname{Diff}_k(A)$.*

Notemos que las igualdades de este enunciado tienen sentido, ya que todos los conjuntos considerados están contenidos en $\operatorname{End}_k(A)$.

Demostración. Basta probar la primera afirmación. Hacemos inducción sobre p; por supuesto, cuando $p = -1$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $p \geq -1$ y que $\operatorname{Diff}_K^p(A) = \operatorname{Diff}_k^p(A)$. Es claro que $\operatorname{Diff}_K^{p+1}(A) \subset \operatorname{Diff}_k^{p+1}(A)$, así que tenemos que mostrar solamente la inclusión recíproca.

Sea $f \in \operatorname{Diff}_k^{p+1}(A)$. Para ver que $f \in \operatorname{Diff}_K^{p+1}(A)$ solo hay que verificar que f es K-lineal. Para cada $\lambda \in K \subset A$ es $[f, m_\lambda] \in \operatorname{Diff}_k^p(A) = \operatorname{Diff}_K^p(A)$, así que podemos definir una aplicación $\varphi : \lambda \in K \mapsto [f, m_\lambda] \in \operatorname{End}_K(A)$. Explícitamente, si $\lambda \in K$ y $x \in A$, es

$$\varphi(\lambda)(x) = f(\lambda x) - \lambda f(x).$$

Si consideramos a $\operatorname{End}_K(A)$ como un K-módulo de la manera evidente, la aplicación φ resulta una k-derivación: es claro que es k-lineal y si $\lambda, \mu \in K$ y $x \in A$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mu)(x) &= f(\lambda\mu x) - \lambda\mu f(x)\\ &= f(\lambda\mu x) - \lambda f(\mu x) + \lambda f(\mu x) - \lambda\mu f(x)\end{aligned}$$

que, como $f(\lambda\mu x) - \lambda f(\mu x) = \mu f(\lambda x) - \lambda\mu f(x)$ porque $\varphi(\lambda)$ es K-lineal, es

$$\begin{aligned}&= \mu f(\lambda x) - \lambda\mu f(x) + \lambda f(\mu x) - \lambda\mu f(x)\\ &= (\mu\varphi(\lambda) + \lambda\varphi(\mu))(x).\end{aligned}$$

Ahora bien, como la extensión K/k es algebraica y separable, 3.3 nos dice que $\varphi = 0$, esto es, que f es K-lineal, como queríamos. □

3.5. Es una consecuencia inmediata de esta proposición que si K/k es una extensión algebraica y separable, entonces $\operatorname{Diff}_k(K) = K$. Cuando la extensión no es separable, en cambio, hay generalmente 'más' operadores diferenciales: tenemos, por ejemplo, el siguiente siguiente caso particular:

Proposición. *Sea k un cuerpo de característica positiva p y sea K/k una extensión puramente inseparable simple de grado p^r. Entonces* $\operatorname{Diff}_k(K) = \operatorname{End}_k(K)$.

Demostración. Existe $x \in K\setminus k$ tal que $x^{p^r} = a \in k$ y $K = k(x)$. El conjunto $\{x^i : 0 \le i < p^r\}$ es una k-base de K. Consideremos, para cada $i \in \{0, \dots, p^r - 1\}$, el elemento $\delta_i \in \operatorname{End}_k(K)$ tal que

$$\delta_i(x^j) = \binom{j}{i} x^{j-i}, \qquad \text{si } 0 \le j < p^r.$$

Claramente es $\delta_0 = \mathrm{id}_K$. Afirmamos que

$$[\delta_{i+1}, m_x] = \delta_i \tag{24}$$

siempre que $0 \le i < p^r - 1$. En efecto, si $j < p^r - 1$, entonces

$$\begin{aligned}[\delta_{i+1}, m_x](x^j) &= \delta_{i+1}(x^{j+1}) - x\delta_{i+1}(x^j)\\ &= \binom{j+1}{i+1} x^{j-i} - \binom{j}{i+1} x^{j-i}\\ &= \delta_i(x^j),\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}[\delta_{i+1}, m_x](x^{p^r-1}) &= \delta_{i+1}(a) - x\delta_{i+1}(x^{p^r-1})\\ &= -\binom{p^r-1}{i+1} x^{p^r-i-1}\\ &= \delta_i(x^{p^r-1}),\end{aligned}$$

ya que $\binom{p^r-1}{i} + \binom{p^r-1}{i+1} = \binom{p^r}{i+1} \equiv 0 \pmod p$.

Usando la relación (24), el hecho de que K está generada por x como k-álgebra y 1.6, es fácil ver que $\delta_i \in \operatorname{Diff}_k^i(K)$ para cada $i \in \{0, \dots, p^r - 1\}$. Más aún, es consecuencia inmediata de la definición que $\delta_i(x^j) = 0$ y $\delta_i(x^i) = 1$ si $0 \le j < i < p^r$, así que $\mathscr{B} = \{\delta_i : 0 \le i < p^r\}$ es un conjunto linealmente independiente en el K-módulo izquierdo $\operatorname{Diff}_k(K)$. Pero como evidentemente $\operatorname{Diff}_k(K) \subset \operatorname{End}_k(K)$ y $\dim_K \operatorname{End}_k(K) = p^r$, es claro que $\mathscr{B}$ es, de hecho, una K-base de $\operatorname{Diff}_k(K)$ y que $\operatorname{Diff}_k(K) = \operatorname{End}_k(K)$. □

3.6. Proposición. *Supongamos que k es un cuerpo perfecto y sea $(A, \mathfrak{m})$ una k-álgebra de dimensión finita que es conmutativa y local. Entonces A posee una estructura canónica de $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial, única a menos de un k-isomorfismo de $A/\mathfrak{m}$, y se tiene que* $\operatorname{Diff}_k(A) = \operatorname{End}_{A/\mathfrak{m}}(A)$.

La estructura de k-álgebra de $\operatorname{End}_{A/\mathfrak{m}}(A)$ depende claramente solo de A.

Demostración. El teorema de Wedderburn-Malcev [Pie82, Corollary 11.7] nos dice que existe un único subcuerpo $K \subset A$ que es una sub-k-álgebra y tal que $A = K \oplus \mathfrak{m}$, de manera que, en particular, $K \cong A/\mathfrak{m}$. Vista como K-álgebra, A está en las hipótesis de 3.2, así que $\operatorname{Diff}_K(A) = \operatorname{End}_K(A)$. Como K/k es finita y separable, 3.4 nos dice, finalmente, que $\operatorname{Diff}_k(A) = \operatorname{Diff}_K(A)$. □

3.7. Proposición. *Sean A_1 y A_2 dos k-álgebras conmutativas. Entonces hay un isomorfismo de $A \times B$-módulos izquierdos $\operatorname{Diff}_k^p(A_1 \times A_2) \cong \operatorname{Diff}_k^p(A_1) \times \operatorname{Diff}_k^p(A_2)$ para cada $p \geq -1$ y un isomorfismo de k-álgebras $\operatorname{Diff}_k(A_1 \times A_2) \cong \operatorname{Diff}_k(A_1) \times \operatorname{Diff}_k(A_2)$.*

Demostración. Todo elemento $f \in \operatorname{End}_k(A_1 \times A_2)$ puede escribirse de manera única en la forma $\left(\begin{smallmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{smallmatrix}\right)$ con $f_{ij} \in \hom_k(A_j, A_j)$ si $i, j \in \{1,2\}$, y es claro que en esta escritura el producto en $\operatorname{End}_k(A_1 \times A_2)$ coincide con el producto matricial. Mostremos, para cada $p \geq -1$, que si $f \in \operatorname{Diff}_k^p(A_1 \times A_2)$, entonces $f_{ii} \in \operatorname{Diff}_k^p(A_i)$ para $i \in \{1,2\}$, $f_{12} = 0$ y $f_{21} = 0$. Esto implica inmediatamente las dos afirmaciones del enunciado.

Sea entonces $f = \left(\begin{smallmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Diff}_k^p(A_1 \times A_2)$. Si $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, sabemos que $[f, m_{(a_1,a_2)}] \in \operatorname{Diff}_k^{p-1}(A_1 \times A_2)$. Calculando esto, vemos que

$$[f, m_{(a_1,a_2)}] = \begin{pmatrix} [f_{11}, m_{a_1}] & f_{12}m_{a_2} - m_{a_1}f_{12} \\ f_{21}m_{a_1} - m_{a_2}f_{21} & [f_{22}, m_{a_2}] \end{pmatrix},$$

así que, haciendo inducción en p, podemos concluir que $[f_{ii}, m_{a_i}] \in \operatorname{Diff}_k^{p-1}(A_i)$ si $i \in \{1,2\}$ y que

$$f_{12}m_{a_2} - m_{a_1}f_{12} = 0, \tag{25}$$

$$f_{21}m_{a_1} - m_{a_2}f_{21} = 0. \tag{26}$$

De la arbitrariedad de $a_1 \in A_1$ y de $a_2 \in A_2$ deducimos que $f_{11} \in \operatorname{Diff}_k^p(A_1)$ y que $f_{22} \in \operatorname{Diff}_k^p(A_2)$. Por otro lado, tomando $(a_1, a_2) = (1_{A_1}, 0)$ en (25) y en (26) vemos que $f_{12} = 0$ y que $f_{21} = 0$. □

3.8. Estamos ya en condiciones de dar la descripción del anillo de operadores diferenciales sobre una k-álgebra artiniana:

Teorema. *Sea k un cuerpo perfecto y sea A una k-álgebra conmutativa de dimensión finita. Entonces existen álgebras locales $(A_1, \mathfrak{m}_1), \ldots, (A_r, \mathfrak{m}_r)$ tales que*

$$A \cong A_1 \times \cdots \times A_r$$

y

$$\operatorname{Diff}_k(A) \cong \prod_i \operatorname{End}_{A_i/\mathfrak{m}_i}(A_i).$$

Demostración. Sabemos que el álgebra A es un producto directo de un número finito de k-álgebras conmutativas artinianas locales, *cf.* [Eis95, Corollary 9.1]. El teorema, entonces, es consecuencia de 3.6 y de 3.7. □

3.9. Notemos que el teorema nos dice, en particular, que el álgebra de operadores diferenciales sobre un álgebra de dimensión finita es semisimple.

4. Operadores diferenciales sobre álgebras afines regulares

4.1. Si A es una k-álgebra conmutativa, recordemos que decimos que A es *regular* si para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \in \operatorname{maxSpec} A$ se tiene que el anillo local $A_\mathfrak{m}$ es un anillo local regular, esto es, si

$$\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A_\mathfrak{m}$$

con $\dim A_\mathfrak{m}$ la dimensión de Krull de $A_\mathfrak{m}$; ver, por ejemplo, el libro de Hideyuki Matsumura [Mat80].

4.2. Si A es un álgebra finitamente generada y regular, la estructura del álgebra de operadores diferenciales puede ser estudiada en detalle. El siguiente teorema resume parte de lo que se puede decir con toda generalidad:

Teorema. *Sea k un cuerpo de característica nula. Sea A una k-álgebra conmutativa finitamente generada y supongamos que A es un dominio de integridad de dimensión de Krull $n = \dim A$.*

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) *El álgebra A es regular.*
(b) $\operatorname{Diff}_k(A)$ *es una k-álgebra simple.*
(c) *El $\operatorname{Diff}_k(A)$-módulo izquierdo A es simple.*

Cuando estas condiciones se satisfacen, $\operatorname{Diff}_k(A)$ es un anillo noetheriano tanto a izquierda como a derecha y:

(i) *La dimensión de Krull de $\operatorname{Diff}_k(A)$ en el sentido de Gabriel-Rentschler [RG67] es*
$$\mathcal{K}(\operatorname{Diff}_k(A)) = n.$$
(ii) *La dimensión global de $\operatorname{Diff}_k(A)$ es*
$$\operatorname{gldim} \operatorname{Diff}_k(A) = n.$$
(iii) *La dimensión de Gel'fand-Kirillov de $\operatorname{Diff}_k(A)$ es*
$$\operatorname{GKdim} \operatorname{Diff}_k(A) = 2n.$$
(iv) *En tanto subálgebra de $\operatorname{End}_k(A)$, el álgebra $\operatorname{Diff}_k(A)$ está generada por $\operatorname{Diff}^1_k(A) = A \oplus \operatorname{Der}_k(A)$.*

Demostración. Ver el Capítulo 15 de [MR01]. □

4.3. A pesar de que, como en este teorema, podemos obtener información de carácter estructural sobre las álgebras de operadores diferenciales sobre un álgebra regular A, es considerablemente dificil describir explícitamente el álgebra $\operatorname{Diff}_k(A)$. Recientemente Vladimir Bavula [Bav05], en un verdadero *tour de force*, logró dar una construcción explícida de generadores y relaciones para $\operatorname{Diff}_k(A)$ en términos de una presentación de A; más aún, en [Bav08] pudo resolver el problema todavía más delicado de hacer esa descripción cuando el cuerpo de base tiene característica positiva.

4.4. El caso que más nos interesa es cuando $A = k[t_1, \dots, t_n]$ es el álgebra de polinomios en variables $t_1, \dots, t_n$ algebraicamente independientes. Es fácil ver que se trata de un álgebra regular, y entonces el teorema nos permite obtener una descripción del álgebra $\operatorname{Diff}_k(A)$.

En efecto, un cálculo directo muestra que $\operatorname{Der}_k(A)$ es el un A-módulo a izquierda libre con base $\{\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}\}$ el conjunto de derivaciones formales usuales con respecto a las variables, así que la parte *(iv)* de **4.2** nos da generadores y relaciones para $\operatorname{Diff}_k(A)$. Haremos esto explícito en la sección 4 del capítulo III y obtendremos en los capítulos siguientes casi toda la información provista por el teorema en este caso particular por métodos *ad hoc*.

CAPÍTULO III

Álgebras de Weyl

1. Definiciones

1.1. Fijemos un cuerpo $\mathbb{C}$ algebraicamente cerrado y de característica cero. Notaremos $\hom(-,-)$ y $(-)\otimes(-)$ a los functores $\hom_{\mathbb{C}}(-,-)$ y $(-)\otimes_{\mathbb{C}}(-)$.

1.2. Fijemos un entero $n\in\mathbb{N}$.

1.3. La *n-ésima álgebra de Weyl A_n* es la $\mathbb{C}$-álgebra libre en generadores $p_1,\dots,p_n$, y $q_1,\dots,q_n$ sujetos a las relaciones

$$[q_i,p_j]=\delta_{i,j}, \tag{27}$$

y

$$[p_i,p_j]=[q_i,q_j]=0 \tag{28}$$

para cada i, $j\in\{1,\dots,n\}$.

1.4. Sea $\mathscr{O}=\mathbb{C}[t_1,\dots,t_n]$ la $\mathbb{C}$-álgebra de polinomios con variables $t_1,\dots,t_n$. Existe un único morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\rho:A_n\to\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ tal que

$$\rho(p_i)(f)=t_if$$

y

$$\rho(q_i)(f)=\frac{\partial f}{\partial t_i}$$

para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ y cada $f\in\mathscr{O}$, y esto hace de $\mathscr{O}$ un A_n-módulo izquierdo. En efecto, si $\mathbb{C}\langle p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n\rangle$ es el álgebra libre en los generadores indicados, estas fórmulas definen un morfismo de álgebras

$$\bar\rho:\mathbb{C}\langle p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n\rangle\to\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}),$$

y es inmediato verificar que los elementos

$$q_ip_j-p_jq_i-1-\delta_{i,j},$$
$$p_ip_j-p_jp_i$$

y

$$q_iq_j-q_jq_i$$

correspondientes a las relaciones (27) y (28) tiene imagen nula por $\bar\rho$, de manera que $\bar\rho$ pasa al cociente para dar el morfismo de álgebras $\rho:A_n\to\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ buscado.

Usaremos el símbolo $\rightharpoonup$ para la acción de A_n sobre $\mathscr{O}$ correspondiente al morfismo ρ, de manera que si $x \in A_n$ y $f \in \mathscr{O}$, escribiremos $x \rightharpoonup f = \rho(x)(f)$.

1.5. Proposición. *El conjunto* $B = \{p_1^{i_1} q_1^{j_1} \cdots p_n^{i_n} q_n^{j_n} : i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}_0\}$ *es una base de* A_n *como* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial.*

Demostración. Es claro, de la definición misma, que A_n está generada por los monomios no conmutativos en los generadores $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Las relaciones que definen a A_n nos dicen que

$$q_i p_j = p_i q_j + \delta_{i,j}, \tag{29}$$

$$p_i p_j = p_j p_i, \tag{30}$$

y

$$q_i q_j = q_j q_i \tag{31}$$

para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y es evidente que usando estas relaciones podemos ver que todo monomio no conmutativo en los generadores es igual en A_n a una combinacón lineal de elementos del conjunto B del enunciado. Para probar la proposición, entonces, bastará mostrar que B es linealmente independiente.

Supongamos, por el contrario, que B es linealmente dependiente. Existe en ese caso un conjunto finito no vacío $I \subset \mathbb{N}_0^{2n}$ y una función $a : I \to \mathbb{C} \setminus 0$ tales que, si escribimos $\alpha = (i_1^\alpha, j_1^\alpha, \ldots, i_n^\alpha, j_n^\alpha)$ para cada $\alpha \in I$, se tiene en A_n que

$$\sum_{\alpha \in I} a(\alpha) p_1^{i_1^\alpha} q_1^{j_1^\alpha} \cdots p_n^{i_n^\alpha} q_n^{j_n^\alpha} = 0.$$

Sea $b_1 = \max\{j_1^\alpha : \alpha \in I\}$ y definamos inductivamente, para $l \in \{2, \ldots, n\}$,

$$b_l = \max\{j_l^\alpha : \alpha \in I,\ j_1^\alpha = b_1,\ \ldots,\ j_{l=1}^\alpha = b_{l-1}\}.$$

Sea además $I' = \{\alpha \in I : i_1^\alpha = b_1,\ \ldots,\ i_n^\alpha = b_n\}$. Entonces es $I' \neq \varnothing$ y en $\mathscr{O}$ se tiene que

$$0 = \left(\sum_{\alpha \in I} a(\alpha) p_1^{i_1^\alpha} q_1^{j_1^\alpha} \cdots p_n^{i_n^\alpha} q_n^{j_n^\alpha} \right) \rightharpoonup t_1^{b_1} \cdots t_n^{b_n} = b_1! \cdots b_n! \sum_{\alpha \in I'} a(\alpha) t_1^{i_1^\alpha} \cdots t_n^{i_n^\alpha}.$$

Pero esto claramente implica que $a(\alpha) = 0$ para cada $\alpha \in I'$, lo que es absurdo. □

1.6. Proposición. *Sean* m, $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $A_m \otimes A_n \cong A_{m+n}$.

Demostración. Es fácil verificar que hay morfismos de álgebras $\varphi : A_m \otimes A_n \to A_{m+n}$ y $\psi : A_{m+n} \to A_m \otimes A_n$ tales que

$$\varphi(p_i \otimes 1) = p_i, \qquad \varphi(q_i \otimes 1) = q_i,$$

$$\varphi(1 \otimes p_j) = p_{j+m}, \qquad \varphi(1 \otimes q_j) = q_{m+j}$$

y

$$\psi(p_k) = \begin{cases} p_k \otimes 1, & \text{si } 1 \leq k \leq m; \\ 1 \otimes p_{k-m+1}, & \text{si } m+1 \leq k \leq m+n; \end{cases}$$

$$\psi(q_k) = \begin{cases} q_k \otimes 1, & \text{si } 1 \leq k \leq m; \\ 1 \otimes q_{k-m+1}, & \text{si } m+1 \leq k \leq m+n; \end{cases}$$

y que se trata de morfismos inversos. □

1.7. Corolario. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $A_n \cong \underbrace{A_1 \otimes \cdots \otimes A_1}_{n \text{ factores}}$.*

Demostración. Esto sigue de 1.6 y de una inducción evidente. □

1.8. Proposición. *Hay un isomorfismo $\mathscr{F} : A_n \to A_n^{\mathrm{op}}$.*

Demostración. Es inmediato verificar, usando la presentación dada para A_n en 1.3, que existe exactamente un morfismo de álgebras $\mathscr{F} : A_n \to A_n^{\mathrm{op}}$ tal que

$$\mathscr{F}(p_i) = q_i$$

y

$$\mathscr{F}(q_i) = -p_i$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $(-)^{\mathrm{op}}$ es un functor, tenemos también un isomorfismo $\mathscr{F}^{\mathrm{op}} : A_n^{\mathrm{op}} \to (A_n^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = A_n$, y un cálculo directo muestra que

$$(\mathscr{F}^{\mathrm{op}} \circ \mathscr{F})^2 = \mathrm{id}_{A_n}.$$

Esto implica claramente que $\mathscr{F}$ es un isomorfismo. □

1.9. Corolario. *Hay un isomorfismo $A_n^e \cong A_{2n}$.*

Demostración. Es $A_n^e = A_n \otimes A_n^{\mathrm{op}} \cong A_n \otimes A_n$ por 1.8, y esto es isomorfo a A_{2n} por 1.6. □

2. La filtración de Bernstein

2.1. La *filtración de Bernstein* es la filtración positiva y creciente FA_n sobre A_n que tiene, para cada $m \in \mathbb{N}_0$,

$$F_m A_n = \langle p_1^{i_1} q_1^{j_1} \cdots p_n^{i_n} q_n^{j_n} : 0 \leq i_1 + \cdots + i_n + j_1 + \cdots + j_n \leq m \rangle.$$

2.2. Si notamos V al subespacio de A_n generado por $\{p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\}$, es claro que $F_1 A_n = \mathbb{C}1 \oplus V$ y, más generalmente, se tiene que

$$F_m A_n = (F_1 A_n)^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$, como puede verse mediante una inducción evidente usando las relaciones (29), (30) y (31). Esto implica que FA_n es una filtración de A_n como álgebra.

2.3. Si $x \in A_n \backslash 0$, notamos $s(x)$ al *símbolo principal* de x con respecto a la filtración F: esto es, si $m \in \mathbb{N}_0$ es tal que $x \in F_m A_n \backslash F_{m-1} A_n$, entonces

$$s(x) = x + F_{m-1}A_n \in F_m A_n / F_{m-1} A_n = \operatorname{gr}_M A_n.$$

2.4. Proposición. *Hay un isomorfismo*

$$\varphi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \to \operatorname{gr} A_n$$

de álgebras graduadas tal que

$$\varphi(x_i) = s(p_i)$$

y

$$\varphi(y_i) = s(q_i)$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Para ver que existe un tal morfismo, basta mostrar que los elementos del conjunto $\{s(p_1), \ldots, s(p_n), s(q_1), \ldots, s(p_n)\}$ conmutan entre sí, y esto es consecuencia inmediata de (27) y de (28); más aún, el morfismo es claramente homogéneo.

Como tanto las componentes homogéneas de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ como de $\operatorname{gr} A_n$ tienen dimensión finita, para ver que φ es una biyección alcanza con mostrar que es sobreyectivo. Esto sigue de que el conjunto B de 1.5 es una base y de que su imagen por s en $\operatorname{gr} A_n$ es una base de $\operatorname{gr} A_n$, ya que

$$s(p_1^{i_1} q_1^{j_1} \cdots p_n^{i_n} q_n^{j_n}) = s(p_1)^{i_1} s(q_1)^{j_1} \cdots s(p_n)^{i_n} s(q_n)^{j_n} = \varphi(x_1^{i_1} y_1^{j_1} \cdots x_n^{i_n} y_n^{j_n})$$

cada vez que $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}_0$. □

2.5. Lema. *Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra y sea FA una filtración sobre A.*

(i) *Si* $\operatorname{gr} A$ *es un dominio, entonces A es un dominio.*

(ii) *Si* $\operatorname{gr} A$ *es nötheriana a izquierda, entonces A es nötheriana a izquierda.*

Demostración. *(i)* Supongamos que A no es un dominio, de manera que existen $a, b \in A \backslash 0$ con $ab = 0$. Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $a \in F_n A \backslash F_{n-1} A$ y $b \in F_m A \backslash F_{m-1} A$; entonces $s(a) = a + F_{n-1} A \in \operatorname{gr}_n A$ y $s(b) = b + F_{m-1} A \in \operatorname{gr}_m A$. Por supuesto, es $s(a) \neq 0$ y $s(b) \neq 0$, y como

$$s(a)s(b) = ab + F_{n+m-1}A = F_{n+m-1}A = 0 \in \operatorname{gr}_{n+m} A,$$

vemos que $\operatorname{gr} A$ tampoco es un dominio.

(ii) Sean $\mathscr{L}(A)$ y $\mathscr{L}(\operatorname{gr} A)$ los conjuntos de ideales izquierdos de A y de $\operatorname{gr} A$, respectivamente; $\mathscr{L}(A)$ y $\mathscr{L}(\operatorname{gr} A)$ son conjuntos ordenados via la relación de inclusión. Si $I \in \mathscr{L}(A)$, consideramos para cada $m \in \mathbb{N}_0$ el subespacio

$$I_m = \frac{(I + F_{m-1}A) \cap F_m A}{F_{m-1}A} \subseteq \operatorname{gr}_m A$$

y ponemos

$$\gamma(I) = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}_0} I_n \subseteq \operatorname{gr} A.$$

Afirmamos que obtenemos de esta forma una aplicación $\gamma : \mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}(\operatorname{gr} A)$ que es un morfismo de conjuntos ordenados y tal que

$$\text{si } I, J \in \mathscr{L}(A) \text{ son tales que } I \subsetneq J, \text{ entonces } \gamma(I) \subsetneq \gamma(J). \tag{32}$$

En efecto, veamos primero que $\gamma(I)$ es un ideal izquierdo de $\operatorname{gr} A$, que es manifiestamente homogéneo. Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \operatorname{gr}_m A$ e $y \in I_n$, de manera que existen $a \in F_m A \setminus F_{m-1}A$ y $b \in (I + F_{n-1}A) \cap F_m A$ tales que $x = a + F_{m-1}A$ e $y = b + F_{n-1}A$. Entonces

$$xy = ab + F_{m+n-1}A \in \operatorname{gr}_{m+n} A$$

y, como $ab \in F_m A \cdot (I + F_{n-1}A) \subseteq I + F_{m+n-1}A$, vemos que $xy \in I_{m+n}$. Esto nos dice que $\gamma(I)$ es un ideal izquierdo.

Consideremos, por otro lado, ideales I y $J \in \mathscr{L}(A)$ y supongamos que $I \subsetneq J$. Sea

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : (J\setminus I) \cap F_k A \neq 0\}$$

y sea $x \in (J\setminus I) \cap F_m A$. Tenemos que $s(x) \in J_m$. Supongamos que

$$x + F_{m-1}A \in I_m = \frac{(I + F_{m-1}A) \cap F_m A}{F_{m-1}A},$$

de manera que existe $x' \in I$ tal que $x - x' \in F_{m-1}A$. Entonces es

$$0 \neq x - x' \in (J\setminus I) \cap F_{m-1}A,$$

lo que contradice la elección de m. Esta contradicción prueba (32).

Ahora bien, la hipótesis de que $\operatorname{gr} A$ es nötheriana significa que toda cadena creciente en $\mathscr{L}(\operatorname{gr} A)$ es finita. Usando (32) podemos concluir inmediatamente que lo mismo vale en $\mathscr{L}(A)$, así que A también es nötheriana, como queríamos mostrar. □

2.6. Proposición. *El álgebra de Weyl A_n es un dominio nötheriano.*

Demostración. De la proposición **2.4** vemos inmediatamente que $\operatorname{gr} A_n$ es un dominio nötheriano, así que la proposición es consecuencia del lema **2.5**. □

3. La graduación por pesos

3.1. Existe exactamente una $\mathbb{Z}$-graduación sobre el álgebra A_n para la cual es

$$|p_i| = 1 \qquad \text{y} \qquad |q_i| = -1$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. En efecto, es claro que estas fórmulas definen una graduación sobre el álgebra libre $\mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\rangle$ y que las relaciones (27) y (28) que definen a A_n son homogéneas con respecto a ella.

3.2. Si $k \in \mathbb{Z}$, notamos $A_n^{(k)}$ al subespacio de A_n de elementos de grado k de A_n para esta graduación y decimos que los elementos de $A_n^{(k)}$ tienen *peso* k.

3.3. Sea $e : A_n \to A_n$ la aplicación lineal tal que si $k \in \mathbb{Z}$ y si $a \in A_n^{(k)}$ es $e(a) = k\,a$. Es inmediato verificar que se trata de una derivación, de manera que

$$e(ab) = e(a)b + ae(b)$$

para cada $a, b \in A_n$. Llamamos a e la *derivación euleriana* de A_n.

3.4. Lema. *Sea $\delta : A_n \to A_n$ una derivación tal que $\delta(p_i) = 1$ y $\delta(q_i) = -1$ cualquiera sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $\delta = e$.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de que e satisface las condiciones del enunciado y de que una derivación de A_n queda unívocamente determinada por sus valores sobre $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$, ya que este conjunto genera a A_n. □

3.5. Sea $w = \sum_{i=1}^n p_i q_i \in A_n$ y sea $e' : A_n \to A_n$ la aplicación tal que $e'(a) = [w, a]$ para todo $a \in A$. Es inmediato verificar que se trata de un derivación y que $e'(p_i) = 1$ y que $e'(q_i) = -1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Usando 3.4, entonces, concluimos que $e = e'$. Así, la derivación euleriana de A_n es una derivación interior.

4. El álgebra de Weyl como álgebra de operadores diferenciales

4.1. Las álgebras de Weyl aparecen naturalmente como álgebras de operadores diferenciales regulares sobre el espacio afín:

Proposición. *Sea $\mathscr{O} = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ la $\mathbb{C}$-álgebra de polinomios en variables $t_1, \dots, t_n$, y sea $\operatorname{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ el álgebra de operadores diferenciales regulares sobre $\mathscr{O}$. Entonces hay un isomorfismo $A_n \cong \operatorname{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$.*

Demostración. Sea $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ el álgebra de endomorfismos de $\mathscr{O}$ en tanto espacio vectorial. Sea $m : \mathscr{O} \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ el morfismo de álgebras tal que $m(a)(b) = ab$, y sea $\operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ el $\mathscr{O}$-módulo izquierdo de las derivaciones $\mathbb{C}$-lineales de $\mathscr{O}$. Como $\mathscr{O}$ es un algebra regular, su álgebra de operadores diferenciales $\operatorname{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ está generada, en tanto subálgebra de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$, por la unión de $m(\mathscr{O})$ y de $\operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ notemos $\frac{\partial}{\partial t_i}$ a la derivación de $\mathscr{O}$ dada por la derivación formal con respecto a la variable t_i. Afirmamos que existe un morfismo de álgebras $\varphi : A_n \to \operatorname{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ tal que

$$\varphi(p_i) = m(t_i)$$

y

$$\varphi(q_i) = \frac{\partial}{\partial t_i}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Para verlo, basta verificar que

$$[\tfrac{\partial}{\partial t_i}, m(t_j)] = \delta_{i,j}$$

y

$$[m(t_i), m(t_j)] = [\tfrac{\partial}{\partial t_i}, \tfrac{\partial}{\partial t_j}] = 0$$

para cada i, $j \in \{1, \dots, n\}$, lo que sigue de un cálculo directo.

El morfismo φ es necesariamente inyectivo, ya que A_n es simple. Por otro lado, como $\{\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}\}$ es una base de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ como $\mathscr{O}$-módulo. Como además $\{m(t_1), \dots, m(t_n)\}$ genera a $m(\mathscr{O})$, es claro entonces que el conjunto

$$\{m(t_1), \dots, m(t_n), \tfrac{\partial}{\partial t_i}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\}$$

genera a $\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ como álgebra. En vista de la definición de φ, esto implica que se trata de una sobreyección. □

4.2. Notemos que la acción $\rightharpoonup$ de A_n sobre $\mathscr{O}$ construida en 1.4 coincide con la acción natural de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O})$ sobre $\mathscr{O}$ bajo el isomorfismo de la proposición.

CAPÍTULO IV

Cohomología de las álgebras de Weyl

1. Una resolución proyectiva

1.1. Proposición. *Sea A una $\mathbb{C}$-algebra y sean $x_1, \ldots, x_n \in A$ elementos que conmutan dos a dos. Para cada $k \in \{0, \ldots, n\}$ sea $I_k = \sum_{i=1}^{k} Ax_i$ el ideal izquierdo generado por $x_1, \ldots, x_k$; en particular, es $I_0 = 0$. Supongamos que*

$$\text{si } a \in A \text{ y } ax_k \in I_{k-1}, \text{ entonces } a \in I_{k-1}. \tag{33}$$

Entonces si $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}x_i$ es el subespacio vectorial de A generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$, hay una resolución proyectiva de A/I_n como A-módulo izquierdo de la forma

$$\cdots \longrightarrow A \otimes \Lambda^p V \xrightarrow{d_p} A \otimes \Lambda^{p-1} V \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow A \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{d_2} A \otimes V \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\varepsilon} A/I_n$$

con diferenciales dadas por

$$d_p(a \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} a v_i \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p$$

si $p \geq 1$, $a \in A$ y $v_1, \ldots, v_p \in V$, y con aumentación $\varepsilon : A \to A/I_n$ dada por la proyección canónica.

Demostración. Un cálculo directo muestra que la construcción del enunciado da efectivamente un complejo. Notémoslo X, de manera que $X_p = A \otimes \Lambda^p V$ para cada $p \geq 0$.

Procedemos por inducción. Cuando $n = 0$ no hay nada que probar, así que podemos suponer que $n > 0$. Sea $V' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}x_i \subset V$. Es inmediato verificar que obtenemos un subcomplejo X' de X si ponemos $X'_p = A \otimes \Lambda^p V'$ para cada $p \geq 0$. La hipótesis inductiva dice precisamente que $H_p(X') \cong 0$ si $p > 0$ y que ε induce un isomorfismo $H_0(X') \cong A/I_{n-1}$.

Sea $Y = X/X'$ el complejo cociente. Claramente $Y_0 = 0$, mientras que hay isomorfismos $u_p : A \otimes \Lambda^{p-1} V' \to Y_p$ con

$$u_p(a \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p-1}) = a \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p-1} \wedge x_n + X'_p$$

para cada $p > 0$ que determinan un isomorfismo de complejos $X'[1] \to Y$. Identificando vía este isomorfismo a Y con $X'[1]$, vemos que hay entonces una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'[1] \longrightarrow 0 \tag{34}$$

Explicitamente, en grados bajos, tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes \Lambda^3 V' \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes \Lambda^2 V' \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes \Lambda^1 V' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes \Lambda^3 V \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes \Lambda^2 V \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes \Lambda^1 V \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes \Lambda^2 V' \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes \Lambda^1 V' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[uur, dotted] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Considerando la sucesión exacta larga correspondiente a (34), vemos que hay isomorfismos $H_p(X) \cong 0$ para cada $p > 1$ y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_0(X') \xrightarrow{\partial} H_0(X')$$

en la que $H_0(X') \cong A/I_{n-1}$ y en la que, a menos de este isomorfismo, el morfismo de conexión $\partial : A/I_{n-1} \to A/I_{n-1}$, indicado por una flecha punteada en el diagrama, está dado por $\partial(a + I_{n-1}) = ax_n + I_{n-1}$. La hipótesis (33), entonces, implica que ∂ es inyectivo, así que $H_1(X) = 0$. Como es claro, además, que la aumentación ε induce un isomorfismo $H_0(X) \cong A/I_n$, podemos concluir que X es una resolución proyectiva de A. □

1.2. Lema. *Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra y sea FA una filtración creciente sobre A. Supongamos que $x_1, \dots, x_n \in A$ son elementos que conmutan dos a dos y notemos, para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, I_k e I'_k a los ideales izquierdos generados por $x_1, \dots, x_k$ y por $s(x_1), \dots, s(x_k)$ en A y en $\operatorname{gr} A$, respectivamente; en particular, $I_0 = I'_0 = 0$. Supongamos que no hay divisores de cero en $\operatorname{gr} A$ y que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que*

$$\textit{si } a \in \operatorname{gr} A \textit{ y si } as(x_k) \in I'_{k-1}, \textit{ entonces } a \in I'_{k-1}. \tag{35}$$

Entonces para cada $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\textit{si } a \in A \textit{ y si } ax_k \in I_{k-1}, \textit{ entonces } a \in I_{k-1}.$$

En otras palabras, para obtener la conclusión de **1.1** en las condiciones del lema basta verificar la condición (33) a menos de la filtración de A.

Demostración. Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in F_m A$ y supongamos que $ax_k \in I_{k-1}$, de manera que existen $a_1, \ldots, a_{k-1} \in A$ tales que $ax_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i$. Entonces

$$s(ax_k) = s(\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i) \in I'_{k-1}.$$

Como $\operatorname{gr} A$ es un dominio, $s(ax_k) = s(a)s(x_k)$ así que (35) nos dice que $s(a) \in I'_{k-1}$. Vemos entonces que existen $b_1, \ldots, b_{k-1} \in A$ y $a' \in F_{m-1}A$ tales que $a = \sum_{i=1}^{k-1} b_i x_i + a'$. Como x_k conmuta con cada uno de $x_1, \ldots, x_{k-1}$,

$$a' x_k = ax_k - \sum_{i=1}^{k-1} b_i x_i x_k = ax_k - \sum_{i=1}^{k-1} b_i x_k x_i \in I_{k-1},$$

y vemos inductivamente que $a' \in I_{k-1}$ y, entonces, que $a \in I_{k-1}$. □

1.3. Dada un álgebra A notamos $\partial : A \to A \otimes A$ a la aplicación tal que

$$\partial(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$$

para cada $a \in A$. Es inmediato verificar que

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \tag{36}$$

cualesquiera sean $a, b \in A$, de manera que ∂ es una derivación.

Lema. *Sea A un álgebra y sea $\mu : A \otimes A \to A$ el producto de A. Si $X \subseteq A$ es un conjunto que genera a A como álgebra, entonces el conjunto $\partial(X) = \{\partial(x) : x \in X\}$ genera al núcleo $I = \ker \mu$ como A-bimodulo.*

Demostración. Es inmediato que $\partial(x) \in I$ para cada $x \in X$, así que el subbimódulo I' generado por $\partial(X)$ en $A \otimes A$ está contenido en I. Para probar el lema tenemos que mostrar que $I \subseteq I'$.

Sea $x \in I$. Existe un conjunto finito J y familias $(a_j)_{j\in J}$ y $(b_j)_{j\in J}$ de elementos de A tales que $x = \sum_{j\in J} a_j \otimes b_j$ y, como $x \in I$, es $\sum_{j\in J} a_j b_j = 0$. Es entonces $x = \sum_{j\in J} \partial(a)b_j$ y esto prueba que I está generado, en tanto A-módulo derecho, por $\{\partial(a) : a \in A\}$. Para terminar, mostremos que $\partial(a) \in I'$ cualquiera sea $a \in A$.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $x = x_1 \cdots x_n$. Usando (36) vemos que

$$\partial(x) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_{i-1} \partial(x_i) x_{i+1} \cdots x_n \in I'.$$

El lema sigue entonces de que todo elemento de A es combinación lineal de productos de elementos de X y de que ∂ es lineal. □

1.4. Sea ahora A_n la n-ésima álgebra de Weyl, con generadores $p_1, \ldots, p_n$ y $q_1, \ldots, q_n$ como en III.1.3. Sea $A_n^e = A_n \otimes A_n^{\mathrm{op}}$ el álgebra envolvente de A_n, de manera que hay una identificación canónica de ${}_{A_n^e}\mathsf{Mod}$ con ${}_{A_n}\mathsf{Mod}_{A_n}$ y sea $\mu : A_n^e \to A_n$ el morfismo de A_n-bimódulos dado por la multiplicación de A_n. Sea $I = \ker \mu$.

1.5. Como consecuencia del lema 1.3 y de que $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$ genera a A_n, vemos que en tanto ideal izquierdo de A_n^e o, equivalentemente, en tanto subbimódulo de $A_n \otimes A_n$, I está generado por los $2n$ elementos

$$\partial(p_1), \dots \partial(p_n), \partial(q_1), \dots, \partial(q_n).$$

Por otro lado, un cálculo directo muestra que estos elementos conmutan dos a dos.

1.6. Proposición. *Sea A_n la n-ésima álgebra de Weyl y sea $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}p_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}q_i$, entonces A_n tiene, como A_n-bimódulo, una resolución proyectiva $\varepsilon : A_n^e \otimes \Lambda V \to A_n$ con diferenciales $d_m : A_n^e \otimes \Lambda^m V \to A_n^e \otimes \Lambda^{m-1} V$ dadas por*

$$d_m((a \otimes b) \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} (a \otimes v_i b - a v_i \otimes b) \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_m$$

si $m \geq 1$, a, $b \in A_n$ y $v_1, \dots, v_p \in V$, y con aumentación $\varepsilon : A_n^e \to A_n$ dada por el producto.

Demostración. La filtración de Bernstein de A_n de III.2.1 induce sobre A_n^e una filtración creciente de álgebras tal que

$$F_m A_n^e = \sum_{m' + m'' \leq m} F_{m'} A_n \otimes F_{m''} A_n$$

para cada $m \geq 0$, y es fácil ver que hay un isomorfimo de álgebras $\operatorname{gr} A_n^e \cong (\operatorname{gr} A_n)^e$. En particular, el álgebra graduada asociada $\operatorname{gr} A_n^e$ es un dominio conmutativo y los símbolos principales de los generadores del ideal I descriptos en 1.3 están dados por

$$s(\partial(p_i)) = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1,$$
$$s(\partial(q_i)) = 1 \otimes y_i - y_i \otimes 1$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Vemos entonces que los elementos

$$s(\partial(p_1)), \dots, s(\partial(p_n)), s(\partial(q_1)), \dots, s(\partial(q_n))$$

de $\operatorname{gr} A_n^e$ satisfacen la condición (35) del lema 1.2, que entonces nos dice que los elementos

$$\partial(p_1), \dots, \partial(p_n), \partial(q_1), \dots, \partial(q_n)$$

de A_n^e están en las hipótesis de 1.1. Esta proposición, a su vez, nos da una resolución proyectiva para $A_n \cong A_n^e / I$ como A^e-módulo izquierdo. A menos de notación, esta resolución es aquella cuya existencia de afirma aquí. □

1.7. Corolario. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces* $\operatorname{lgldim} A_n \leq 2n$.

Demostración. Es consecuencia de 1.6 que $\operatorname{pdim}_{A_n^e} A_n \leq 2n$, ya que la resolución ahí construida para A_n tiene longitud precisamente $2n$. Esto implica inmediatamente que $H^i(A, M) \cong \operatorname{Ext}^i_{A_n^e}(A_n, M) \cong 0$ si $i > 2n$ cualquiera sea $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$.

Si ahora M, $N \in {}_{A_n}\mathsf{Mod}$ y dotamos al espacio vectorial $\hom(M, N)$ de su estructura canónica de A_n-bimódulo, de I.3.4 obtenemos un isomorfismo

$$\operatorname{Ext}_{A_n}(M, N) \cong H^\bullet(A, \hom(M, N))$$

En particular, $\operatorname{Ext}^i_{A_n}(M, N) \cong 0$ si $i > 2n$ y, en consecuencia, $\operatorname{pdim}_A M \leq 2n$. Como esto vale para todo $M \in {}_A\mathsf{Mod}$, concluimos que es $\operatorname{lgldim} A \leq 2n$, como es precisamente la desigualdad que queríamos. □

1.8. De hecho, puede verse que $\operatorname{lgldim} A_n = n$, [MR01, Theorem 7.5.8*(iii)*], pero lo único que necesitamos a nuestros fines es saber que esa dimensión global es finita.

2. Cohomología de Hochschild

2.1. Notemos W^* al espacio dual de un espacio vectorial W. Si A es un álgebra, si W es un espacio vectorial de dimensión finita y si M es un A-módulo izquierdo, hay un isomorfismo natural

$$\varphi : M \otimes W^* \to \hom_A(A \otimes W, M)$$

tal que $\varphi(m \otimes f)(a \otimes w) = amf(w)$ para cada $m \in M$, $f \in W^*$, $a \in A$ y $w \in W$: la verificación de esto es inmediata. Consideramos, cuando sea conveniente, a este isomorfismo como una identificación.

2.2. En esta sección consideramos solamente la primer álgebra de Weyl A_1. Para simplificar la notación, escribiremos p y q en vez de p_1 y q_1, y A en vez de A_1.

2.3. De acuerdo a 1.6, hay una resolución A^e-proyectiva de A de la forma

$$0 \longrightarrow A^e \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{d_2} A^e \otimes V \xrightarrow{d_1} A^e \xrightarrow{\mu} A \tag{37}$$

con aumentación $\mu : A^e \to A$ dada por el producto, y diferenciales tales que

$$d_1((a \otimes b) \otimes v = (av \otimes b - a \otimes vb)$$

y

$$d_2((a \otimes b) \otimes p \wedge q) = (ap \otimes b - a \otimes pb) \otimes q - (aq \otimes b - a \otimes qb) \otimes p$$

siempre que $a, b \in A$ y $v \in V$.

2.4. Para calcular la cohomología de Hochschild $HH^\bullet(A) = \operatorname{Ext}_{A^e}(A, A)$, tenemos que calcular la cohomología del complejo que se obtiene aplicando el functor $\hom_{A^e}(-, A)$ a (37). A menos de identificaciones como en 2.1, se trata del complejo

$$A \xrightarrow{d^0} A \otimes V^* \xrightarrow{d^1} A \otimes \Lambda^2 V^*$$

con diferenciales dadas por

$$d^0(a) = [p, a] \otimes \hat{p} + [q, a] \otimes \hat{q}$$

y

$$d^1(a \otimes \hat{p} + b \otimes \hat{q}) = \big([p, b] - [q, a]\big) \otimes \hat{p} \wedge \hat{q}$$

para cada $a, b \in A$; aquí $\{\hat{p}, \hat{q}\}$ es la base de V^* dual a $\{p, q\}$. Denotemos X a este complejo.

2.5. Podemos extender la graduación de A por pesos de III.3.1 al complejo X: si $k \in \mathbb{Z}$, sean

$$\begin{aligned} X^0_{(k)} &= A^{(k)} \subseteq X^0, \\ X^1_{(k)} &= A^{(k+1)} \otimes \mathbb{C}\hat{p} \oplus A^{(k-1)} \otimes \mathbb{C}\hat{q} \subseteq X^1, \\ X^2_{(k)} &= A^{(k)} \otimes \Lambda^2 V^* \subseteq X^2. \end{aligned}$$

Calculando puede verificarse que $d^i(X^i_{(k)}) \subseteq X^{i+1}_{(k)}$ para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ y cada $k \in \mathbb{Z}$. Esto nos dice que tenemos para cada $k \in \mathbb{Z}$ un subcomplejo $X_{(k)}$ de X de la forma

$$X^0_{(k)} \longrightarrow X^1_{(k)} \longrightarrow X^2_{(k)}$$

Más aún, es fácil ver que, de hecho, $X = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} X_{(k)}$ como complejo. Obtenemos así una $\mathbb{Z}$-graduación sobre el complejo X.

2.6. Existe exactamente un morfismo $e : X \to X$ de complejos $\mathbb{Z}$-graduados tal que para cada $k \in \mathbb{Z}$ la restricción $e_{(k)} : X_{(k)} \to X_{(k)}$ de e a la componente homogénea $X_{(k)}$ es la multiplicación por k. Claramente e puede verse como una extensión a X de la derivación euleriana definida en III.3.3.

2.7. Proposición. *Para cada $k \in \mathbb{Z} \backslash 0$ el complejo $X_{(k)}$ es exacto. En particular, la inclusión $X_{(0)} \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo en la homología.*

Esta proposición puede verse, esencialmente, como un caso particular de un resultado de Tom Goodwillie [Goo85] que describe la acción de una derivación interior sobre la cohomología de un álgebra: recordemos de III.3.5 que la derivación euleriana de A es interior.

Demostración. Como la característica del cuerpo $\mathbb{C}$ es cero, basta mostrar que el morfismo de complejos $e : X \to X$ induce el morfismo nulo en la homología, ya que e es diagonalizable y su núcleo es precisamente $X_{(0)}$.

Consideremos los morfismos $s^1 : X^1 \to X^0$ y $s^2 : X^2 \to X^1$ tales que

$$s^1(a \otimes \hat{p} + b \otimes \hat{q}) = aq + pb$$

y

$$s^2(a \otimes \hat{p} \wedge \hat{q}) = -pa \otimes \hat{p} + aq \otimes \hat{q}$$

siempre que a, $b \in A$. Calculando directamente y usando III.3.5, es fácil ver que en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "e^0"'] & X^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "e^1"'] \arrow[dl, dotted, "s^1"'] & X^2 \arrow[d, "e^2"'] \arrow[dl, dotted, "s^2"'] \\
X^0 \arrow[r, "d^0"] & X^1 \arrow[r, "d^1"] & X^2
\end{tikzcd}$$

se tiene que

$$s^1 \circ d^0 = e^0,$$
$$d^0 \circ s^1 + s^2 \circ d^1 = e^1$$

y

$$d^1 \circ s^2 = e^2.$$

En otras palabras, el morfismo $s : X \to X$ de grado -1 es una homotopía de e al morfismo nulo $X \to X$ y, en particular, el morfismo $H(e) : H(X) \to H(X)$ inducido por e en la cohomología es nulo. □

2.8. Los elementos de la base $B = \{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ de A construida en III.1.5 son homogéneos y, claramente, el peso de $p^i q^j$ es $i - j$. Esto nos dice que si $k \in \mathbb{Z}$ es

$$A^{(k)} = \begin{cases} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C} p^{i+k} q^i, & \text{si } k \geq 0; \\ \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C} p^i q^{i-k}, & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Como consecuencia de esto, vemos que

$$A^{(k)} = \begin{cases} p^k A^{(0)}, & \text{si } k \geq 0; \\ A^{(0)} q^{-k}, & \text{si } k < 0. \end{cases} \tag{38}$$

2.9. Lema. *Si $h = pq \in A$, entonces $A^{(0)} = \mathbb{C}[h]$.*

Demostración. Claramente $\mathbb{C}[h] \subseteq A^{(0)}$, ya que h tiene peso nulo y $A^{(0)}$ es una subálgebra. Por otro lado, es fácil ver inductivamente que

$$p^i q^i = h(h-1)(h-2)\cdots(h-i+1),$$

y esto nos dice que $A^{(0)} \subseteq \mathbb{C}[h]$. □

2.10. Si $f \in \mathbb{C}[X]$, entonces

$$[p, f(h)] = -p\big(f(h+1) - f(h)\big)$$

y

$$[q, f(h)] = \big(f(h+1) - f(h)\big)q$$

En efecto, basta considerar el caso en que $f = X^i$ es un monomio de grado $i \in \mathbb{N}_0$. Cuando $i = 0$ ambas afirmaciones son evidentes. Si en cambio $i > 0$ y hacemos inducción tenemos, por ejemplo, que

$$\begin{aligned}[p, h^i] &= [p, h]h^{i-1} + h[p, h^{i-1}] \\ &= -ph^{i-1} - hp\big((h+1)^{i-1} - h^{i-1}\big) \\ &= -ph^{i-1} - p(h+1)\big((h+1)^{i-1} - h^{i-1}\big) \\ &= -p\big((h+1)^i - h^i\big)\end{aligned}$$

2.11. Por otro lado, si $f \in \mathbb{C}[X]$, entonces

$$pf(h)q = f(h-1)h \tag{39}$$

En efecto, si $f = 1$ esto es evidente, y haciendo inducción vemos que

$$\begin{aligned}ph^{i+1}q &= ppqh^iq \\ &= pqph^iq - ph^iq \\ &= h(h-1)^ih - (h-1)^ih \\ &= (h-1)^{i+1}h.\end{aligned}$$

Usando (39) es inmediato verificar que

$$[p, f(h)q] = f(h-1)h - f(h)(h-1)$$

y

$$[q, pf(h)] = -f(h-1)h + f(h)(h+1).$$

2.12. Usando la descripción de $A^{(0)}$ dada en 2.9 y las igualdades (38) de 2.8, vemos que el subcomplejo $X_{(0)} \subseteq X$ es de la forma

$$\mathbb{C}[h] \xrightarrow{d^0} p\mathbb{C}[h] \otimes \mathbb{C}\hat{p} \oplus \mathbb{C}[h]q \otimes \hat{q} \xrightarrow{d^1} \mathbb{C}[h] \otimes \mathbb{C}\hat{p} \wedge \hat{q}$$

con

$$d^0(f(h)) = -p\big(f(h+1) - f(h)\big) \otimes \hat{p} + \big(f(h+1) - f(h)\big)q \otimes \hat{p} \tag{40}$$

y

$$\begin{aligned}&d^1(pf(h) \otimes \hat{p} + g(h)q \otimes \hat{q}) \\ &\qquad = \big(g(h-1)h - g(h)(h-1) + f(h-1)h - f(h)(h+1)\big) \otimes \hat{p} \wedge \hat{q}\end{aligned}$$

si $f(h), g(h) \in \mathbb{C}[h]$.

2.13. Proposición. *Hay isomorfismos*

$$HH^i(A_1) \cong \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que calcular la cohomología del complejo X. De acuerdo a 2.7 es lo mismo calcular la cohomología del subcomplejo $X_{(0)}$ descripto en 2.12.

Consideremos la aplicación $D : \mathbb{C}[h] \to \mathbb{C}[h]$ tal que

$$D(f(h)) = f(h+1) - f(h)$$

para cada $f(h) \in \mathbb{C}[h]$. Es fácil ver que

$$D(h^i) = ih^{i-1} + o,$$

con $o \in \mathbb{C}[h]$ de grado menor que $i-1$, y que $\ker D = \mathbb{C}$, el subespacio de los polinomios constantes. Reescribiendo (40) en la forma

$$d^0(f(h)) = -pD(f(h)) \otimes \hat{q} + D(f(h))q \otimes \hat{q}$$

y recordando que A es un dominio, es claro ahora que $H^0(X_{(0)}) = \ker d^0 = \mathbb{C}$.

Por otro lado, sean E, $E' : \mathbb{C}[h] \to \mathbb{C}[h]$ las aplicaciones tales que

$$E(f(h)) = -f(h-1)h + f(h)(h+1)$$

y

$$E'(g(h)) = g(h-1)h - f(h)(h-1)$$

para cada $f(h) \in \mathbb{C}[h]$. Si $i \geq 0$, tenemos que

$$E(h^i) = -(h-1)^i h + h^i(h+1) = (1+i)h^i + o$$

y

$$E'(h') = (h-1)^i h - h^i(h-1) = (1-i)h^i + o',$$

con o, $o' \in \mathbb{C}[h]$ de grado menor que i. Es inmediato deducir de esto que E es sobreyectiva y, como para todo $f(h) \in \mathbb{C}[h]$ es

$$d^1(pf(h) \otimes \hat{p} + g(h)q \otimes \hat{q}) = \big(E(f(h)) - E'(g(h))\big) \otimes \hat{p} \wedge \hat{q},$$

concluimos que la diferencial d^1 es sobreyectiva. En otras palabras, es $H^2(X_{(0)}) \cong 0$.

Para cada $k \geq 0$ notemos $\mathbb{C}[h]_{\leq k}$ al subespacio de $\mathbb{C}[h]$ de los polinomios de grado a lo sumo k. De las expresiones obtenidas para las diferenciales, vemos que

$$d^0(\mathbb{C}[h]_{\leq k}) = \mathbb{C}[h]_{\leq k-1}$$

y

$$d^1\Big(p\mathbb{C}[h]_{\leq k-1} \otimes \mathbb{C}\hat{p} \oplus \mathbb{C}[h]_{\leq k-1} q \otimes \hat{q}\Big) = \mathbb{C}[h]_{\leq k-1} \otimes \mathbb{C}\hat{p} \wedge \hat{q}.$$

para todo $k \geq 0$, así que el complejo $X_{(0)}$ tiene un subcomplejo $X_{(0),k}$ de la forma

$$\mathbb{C}[h]_{\leq k} \xrightarrow{d^0} p\mathbb{C}[h]_{\leq k-1} \otimes \mathbb{C}\hat{p} \oplus \mathbb{C}[h]_{\leq k-1} q \otimes \hat{q} \xrightarrow{d^1} \mathbb{C}[h]_{\leq k-1} \otimes \mathbb{C}\hat{p} \wedge \hat{q}$$

en el que $\dim_{\mathbb{C}} \ker d^0 = 1$ y en el que la diferencial d^1 es sobreyectiva. Contando dimensiones, vemos que $H^1(X_{(0),k}) \cong 0$. Finalmente, como $X_{(0)}$ es la unión creciente de su familia de subcomplejos $\{X_{(0),k} : k \geq 0\}$, concluimos que $H^1(X_{(0)}) \cong 0$. □

2.14. El siguiente resultado, que describe la cohomología de Hochschild de las álgebras de Weyl, fue obtenido originalmente por Ramaiyengar Sridharan vía un procedimiento algo distinto.

Corolario. (R. Sridharan [Sri61]) *Si $n \geq 1$, hay isomorfismos*

$$HH^i(A_n) \cong \begin{cases} \mathbb{C}, & \textit{si } i = 0; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. El álgebra envolvente A_1^e es nötheriana, y de III.1.7 tenemos un isomorfismo $A_n \cong A_1^{\otimes n}$. Procediendo de manera inductiva, usando a cada paso la fórmula de Künneth I.5.9 para la cohomología de Hochschild, vemos entonces que $HH^\bullet(A_n) \cong HH^\bullet(A_1)^{\otimes n}$. Usando ahora 2.13 obtenemos el resultado buscado. □

2.15. Corolario. *El centro del álgebra de Weyl A_n es $\mathscr{Z}(A_n) = \mathbb{C}$.*

Demostración. Esto sigue directamente de 2.14 ya que, como vimos en I.2.1, hay un isomorfismo $\mathscr{Z}(A_n) \cong HH^0(A_n)$. □

2.16. Proposición. *El álgebra de Weyl A_n es simple.*

Demostración. Supongamos que $I \subseteq A_n$ es un ideal bilátero no nulo y sea

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : I \cap F_k A_n \neq 0\}.$$

Fijemos un elemento $x \in (I \cap F_m A) \setminus 0$. Si $y \in \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$, entonces

$$[x, y] \in I \cap [F_m A_n, F_1 A_n] \subseteq I \cap F_{m-1} A_n = 0.$$

Así, x conmuta con los generadores de A_n. Esto implica que x es un elemento no nulo del centro $\mathscr{Z}(A_n)$ de A_n y, como el centro se reduce a $\mathbb{C}$ de acuerdo a 2.15, que x es inversible. Así, vemos que el ideal I no es propio. □

3. Dualidad de van den Bergh

3.1. Para determinar la homología de Hochschild de las álgebras de Weyl podríamos proceder de manera directa, exactamente como lo hecho en la sección anterior, pero preferimos obtener el resultado de un teorema de dualidad de Michel van den Bergh entre la homología de Hochschild y la cohomología, que probamos en esta sección.

3.2. Lema. *Sean A y B dos álgebras y sean $M \in {}_A\mathsf{Mod}$, $N \in {}_A\mathsf{Mod}_B$ y $P \in {}_B\mathsf{Mod}$. Hay un morfismo de grupos abelianos*

$$\eta_{M,N,P} : \hom_A(M,N) \otimes_B P \to \hom_A(M, N \otimes_B P)$$

que es un isomorfismo cuando M es proyectivo y finitamente generado.

Demostración. Dados $M \in {}_A\mathsf{Mod}$, $N \in {}_A\mathsf{Mod}_B$ y $P \in {}_B\mathsf{Mod}$, es fácil ver que hay un morfismo $\eta_{M,N,P} : \hom_A(M,N) \otimes_B P \to \hom_A(M, N \otimes_B P)$ de grupos abelianos unívocamente determinado por la condición de ser

$$\eta_{M,N,P}(f \otimes p)(m) = f(m) \otimes p$$

cualesquiera sean $f \in \hom_A(M,N)$, $p \in P$ y $m \in M$.

Para cada $M \in {}_A\mathsf{Mod}$ notemos $e_M : f \in \hom_A(A,M) \mapsto f(1) \in M$; se trata de un isomorfismo natural. Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \hom_A(A,N) \otimes_B P \arrow[rr, "\eta_{A,N,P}"] \arrow[dr, "e_N \otimes \mathrm{id}_P"'] & & \hom_A(A, N \otimes_B P) \arrow[dl, "e_{N \otimes_B P}"] \\ & N \otimes_B P & \end{tikzcd}$$

de manera que $\eta_{A,N,P}$ es un isomorfismo. Como η es una transformación natural de functores aditivos en la variable M, de esto deducimos inmediatamente que $\eta_{M,N,P}$ es más generalmente un isomorfismo cuando M es proyectivo finitamente generado. □

3.3. Proposición. *Sea A un álgebra tal que su álgebra envolvente A^e es nötheriana y supongamos que* $\operatorname{pdim}_{A^e} A < \infty$. *Sea $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$. Entonces hay una sucesión espectral natural y finitamente convergente tal que*

$$E_2^{p,q} \cong \operatorname{Tor}_p^{A^e}(\operatorname{Ext}_{A^e}^{-q}(A, A^e), M) \underset{p}{\Rightarrow} H^{-\bullet}(A, M).$$

En vez de suponer que A^e es nötheriana podríamos haber asumido solamente que A admite una resolución A^e-proyectiva por módulos finitamente generados. La prueba que damos se aplica a ese caso más general.

Demostración. Como A es un A^e-módulo finitamente generado, la hipótesis implica que existe una resolución A^e-proyectiva $X \to A$ de longitud finita y con componentes finitamente generadas. Sea además $Y \to M$ una resolución A^e-proyectiva arbitraria. Sea $d = \operatorname{pdim}_{A^e} A$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X_q = 0$ si $q > d$.

Consideremos el complejo doble $Z = \hom_{A^e}(X, Y)$, graduado cohomológicamente de manera de que sea $Z^{p,q} = \hom_{A^e}(X_{-q}, Y_p)$. Es claro que Z está soportado en el cuarto cuadrante y, de hecho, es $Z^{p,q} = 0$ si $p < 0$, si $q > 0$ o si $q < -d$. En particular, las dos sucesiones espectrales asociadas a Z son finitamente convergentes y convergen a $H(\operatorname{Tot} Z)$.

Sea $''E$ la segunda sucesión espectral asociada a Z, correspondiente a la la filtración por columnas indexada por el índice q. El término inicial $''E_0$ coincide con Z en tanto espacio vectorial doblemente graduado, y su diferencial es la inducida por la diferencial de Y. Como las componentes de X son A^e-proyectivas, para cada $q \in \mathbb{Z}$ el functor $\hom_{A^e}(X_{-q}, -)$ es exacto, y entonces tenemos que

$$''E_1^{p,q} \cong \begin{cases} \hom_{A^e}(X_{-q}, M), & \text{si } q = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún, la diferencial de término $''E_1$ es la inducida por la de X de manera natural. Esto hace evidente que

$$''E_2^{p,q} \cong \begin{cases} \operatorname{Ext}_{A^e}^{-q}(A, M), & \text{si } q = 0; \\ o, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La sucesión espectral $''E$ degenera entonces en su término $''E_2$, y como converge, vemos que

$$H^q(\operatorname{Tot} Z) \cong H^{-q}(A, M)$$

para cada $q \in \mathbb{Z}$.

Consideremos ahora la primera sucesión espectral $'E$ asociada a Z, correspondiente a la filtración por filas. Otra vez el término inicial $'E_0$ coincide con Z en tanto espacio vectorial doblemente graduado, pero ahora la diferencial está inducida por la de X. Si $p, q \in \mathbb{Z}$, viendo a A^e como un A^e-bimódulo de la manera evidente, hay un isomorfismo natural

$$\begin{aligned} 'E_0^{p,q} &= \hom_{A^e}(X_{-q}, Y_p) \\ &\cong \hom_{A^e}(X_{-q}, A^e \otimes_{A^e} Y_p) \end{aligned}$$

y como X_{-q} es un A^e-módulo proyectivo y finitamente generado, de 3.2 obtenemos otro isomorfismo natural

$$\cong \hom_{A^e}(X_{-q}, A^e) \otimes_{A^e} Y_p$$

La naturalidad de estos isomorfismos hace que también vía estos isomorfismos la diferencial de $'E_0$ esté inducida por la de X.

Como el functor $(-) \otimes_{A^e} Y_p$ es exacto para cada $p \in \mathbb{Z}$, vemos entonces que el siguiente término de $'E$ está dado por

$$'E_1^{p,q} \cong \begin{cases} \operatorname{Ext}_{A^e}^{-q}(A, A^e) \otimes_{A^e} Y_p, & \text{si } q \leq 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La diferencial de $'E_1$ está inducida por la de Y. Es inmediato, entonces, que

$$'E_2^{p,q} \cong \begin{cases} \operatorname{Tor}_p^{A^e}(\operatorname{Ext}_{A^e}^{-q}(A, A^e), M), & \text{si } q \leq 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como ${}'E_2$ converge a $H(\operatorname{Tot} Z)$, que sabemos es isomorfo a $H^\bullet(A, M)$, vemos que ${}'E$ es una sucesión espectral que satisface las condiciones de la proposición. □

3.4. Dada un álgebra A, un bimódulo $U \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ es *inversible* si existe $V \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ tal que $U \otimes_A V \cong A \cong V \otimes_A U$.

3.5. Lema. *Sea A un álgebra y sea $U \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ un A-bimódulo inversible. Sea además $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$. Entonces hay isomorfismos*

$$\sigma_M : U \otimes_{A^e} M \to A \otimes_{A^e} (U \otimes_A M)$$

y

$$\Sigma_M : \operatorname{Tor}^{A^e}(U, M) \to H_\bullet(A, U \otimes_A M)$$

naturales en M.

Demostración. Una verificación rutinaria prueba que hay un isomorfismo natural $\sigma_M : U \otimes_{A^e} M \to A \otimes_{A^e} (U \otimes_A M)$ tal que $\sigma_M(u \otimes m) = 1 \otimes (u \otimes m)$ si $u \in U$ y $m \in M$, que tiene inversa σ_M^{-1} dada por $\sigma_M^{-1}(a \otimes (u \otimes m)) = au \otimes m$ cualesquiera sean $a \in A$, $u \in U$ y $m \in M$.

Sea ahora $X \to M$ una resolución A^e-proyectiva de M. Como U es inversible, el complejo $U \otimes_A X$ es una resolución A^e-proyectiva de $U \otimes_A M$. La naturalidad del isomorfismo σ recién construido implica que tenemos un isomorfismo

$$\sigma_X : U \otimes_{A^e} X \to A \otimes_{A^e} (U \otimes_A X)$$

y este depende naturalmente, a menos de homotopía, de M. Esto implica que pasando a la homología tenemos un isomorfismo

$$\Sigma_M = H(\sigma_X) : \operatorname{Tor}^{A^e}(U, M) \to H_\bullet(A, U \otimes_A M)$$

natural en M. Esto prueba el lema. □

3.6. Ya estamos en condiciones de probar el teorema de dualidad de van den Bergh. La prueba que damos, basada en las proposiciones anteriores, es esencialmente la misma que la dada por él en [vdB98], aunque nosotros no usamos el lenguaje de las categorías derivadas. Él no parece necesitar la hipótesis de nötherianidad del álgebra envolvente que nosotros hacemos.

3.7. Observemos que para cada $i \in \mathbb{N}_0$ el espacio vectorial $\operatorname{Ext}^i_{A_n^e}(A_n, A_n^e)$ es, de manera canónica, un A_n^e-módulo: en efecto, A_n^e es un A_n^e-bimódulo, y para calcular solo estamos usando su estructura de A_n-módulo izquierdo.

3.8. Teorema. (M. van den Bergh [vdB98], [vdB02]) *Sea A un álgebra tal que su álgebra envolvente A^e es nötheriana y tal que* $\operatorname{pdim}_{A^e} A < \infty$. *Supongamos además que existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que*

(a) $\operatorname{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) \cong 0$ *si $i \neq d$, y*
(b) *el A-bimódulo $U = \operatorname{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$ es inversible.*

Entonces hay un isomorfismo natural de espacios vectoriales

$$H^i(A,M) \cong H_{d-i}(A, U \otimes_A M)$$

Demostración. Estamos en las hipótesis de 3.3. Más aún, la condición *(a)* y *(b)* implican que la sucesión espectral E construida en esa proposición degenera inmediatamente y tiene

$$E_\infty^{p,q} \cong \begin{cases} \operatorname{Tor}_p^{A^e}(U,M), & \text{si } q = -d; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $E \Rightarrow H^{-\bullet}(A,M)$, vemos entonces que hay un isomorfismo

$$H^i(A,M) \cong \operatorname{Tor}_{d-i}^{A^e}(U,M).$$

Componiéndolo con el isomorfismo Σ_M de 3.5 obtenemos el isomorfismo cuya existencia se afirma en el enunciado del teorema. □

3.9. En las condiciones del teorema, es claro que cualquiera sea $M \in {}_A\mathsf{Mod}_A$ se tiene que $H^i(A,M) \cong H_i(A,M) \cong 0$ si $i > d$.

3.10. La condición de que sea $\operatorname{pdim}_{A^e} A < \infty$ en el teorema es necesaria. Así, si $A = \mathbb{C}[X]/(X^2)$ como en la sección 6, es muy fácil calcular, usando la resolución construida en I.6.4, que

$$\operatorname{Ext}_{A^e}^i(A, A^e) \cong \begin{cases} A, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

así que esta álgebra cumple todas las hipótesis de 3.8 salvo que es $\operatorname{pdim}_{A^e} A = \infty$. Pero la conclusión no vale ya que, por ejemplo, $HH^i(A) \not\cong 0$ para todo $i \geq 0$.

4. La homología de A_n

4.1. Usando el resultado de la sección anterior, es fácil determinar la homología de Hochschild de las álgebras de Weyl:

Proposición. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $M \in {}_{A_n}\mathsf{Mod}_{A_n}$ hay un isomorfismo*

$$H^\bullet(A,M) \cong H_{2n-\bullet}(A,M)$$

En particular, la homología de Hochschild de A_n es

$$HH_i(A_n) \cong \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{si } i = 2n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Hay un isomorfismo $A_n^e \cong A_{2n}$, así que A_n^e es nötheriana y tiene dimensión global finita. El corolario seguirá inmediatamente de 3.8 si mostramos que $\operatorname{Ext}_{A_n^e}^i(A_n, A_n^e) \cong 0$ si $i \neq 2n$, y que $U = \operatorname{Ext}_{A_n^e}^{2n}(A_n, A_n^e) \cong A_n$ como A_n-bimódulo, en vista de 2.14 y de que U es evidentemente inversible. Así, vemos que la proposición se reduce al siguiente lema. □

4.2. Lema. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces hay isomorfismos de A_n-bimódulos*

$$\operatorname{Ext}^i_{A_n^e}(A_n, A_n^e) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq 2n; \\ A_n, & \text{si } i = 2n. \end{cases}$$

Demostración. Como en la prueba de 2.14, usando I.5.9, vemos que hay un isomorfismo

$$\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n^e) \cong \operatorname{Ext}_{A_1^e}(A_1, A_1^e)^{\otimes n}$$

de espacios vectoriales graduados. Más aún, de acuerdo a la observación hecha en I.5.8 este isomorfismo es un isomorfismo de A_n-bimódulos. Vemos así que el lema quedará probado en general si mostramos que vale cuando $n = 1$.

Escribamos A en vez de A_1, y p y q en vez de p_1 y q_1, y sea $V = \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q$. Para calcular $\operatorname{Ext}_{A^e}(A, A^e)$ usamos la resolución (37) de 2.3. Aplicándole el functor $\hom_{A^e}(-, A^e)$ obtenemos el complejo

$$\hom_{A^e}(A^e, A^e) \xrightarrow{\delta^0} \hom_{A^e}(A^e \otimes V, A^e) \xrightarrow{\delta^1} \hom_{A^e}(A^e \otimes \Lambda^2 V, A^e) \tag{41}$$

con diferenciales tales que

$$\delta^0(f)((a \otimes b) \otimes v) = f(av \otimes b) - f(a \otimes vb)$$

y

$$\begin{aligned}\delta^1(g)((a \otimes b) \otimes p \wedge q) = f((ap \otimes b) \otimes q) - f((a \otimes pb) \otimes q) \\ - f((aq \otimes b) \otimes p) + f((a \otimes qb) \otimes p).\end{aligned}$$

siempre que $a, b \in A$, $v \in V$, $f \in \hom_{A^e}(A^e, A^e)$ y $g \in \hom_{A^e}(A^e \otimes V, A^e)$. Realizando identificaciones estándar, y escribiendo $\{\hat{p}, \hat{q}\}$ a la base de V^* dual a $\{p, q\}$, este complejo queda en la forma

$$A^e \xrightarrow{\delta^0} A^e \otimes V^* \xrightarrow{\delta^1} A^e \otimes \Lambda^2 V^*$$

con diferenciales tales que

$$\delta^0(a \otimes b) = (ap \otimes b - a \otimes pb) \otimes \hat{p} + (aq \otimes b - a \otimes qb) \otimes \hat{q}$$

y

$$\begin{aligned}&\delta^1((a \otimes b) \otimes \varphi) \\ &\qquad = \Big[\varphi(q)(pa \otimes b - a \otimes bp) - \varphi(p)(qa \otimes b - a \otimes bq)\Big] \otimes \hat{p} \wedge \hat{q}\end{aligned}$$

siempre que $a, b \in A$ y $\varphi \in V^*$, Consideremos ahora los morfismos $\lambda_i : A^e \otimes \Lambda^i V^* \to A^e \otimes \Lambda^{2-i} V$, $i \in \{0, 1, 2\}$, tales que

$$\begin{aligned}
&\lambda_0(a \otimes b) = (a \otimes b) \otimes p \wedge q, \\
&\lambda_1((a \otimes b) \otimes \hat{p} + (a' \otimes b') \otimes \hat{q}) = (a \otimes b) \otimes q - (a' \otimes b') \otimes p
\end{aligned}$$

y

$$\lambda_2((a \otimes b) \otimes \hat{p} \wedge \hat{q}) = -a \otimes b$$

siempre que a, a', b, $b' \in A$. Se trata claramente de isomorfismos de A-bimódulos, y un cálculo directo muestra que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^e \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "\lambda_0"'] & A^e \otimes V^* \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & A^e \otimes \Lambda^2 V^* \arrow[d, "\lambda_2"'] \\
A^e \otimes \Lambda^2 V \arrow[r, "d_2"] & A^e \otimes V \arrow[r, "d_1 1"] & A^e
\end{tikzcd}$$

en el que la segunda fila es la resolución (37) de **2.3**, conmuta. Como consecuencia de esto, la homología del complejo (41) coincide con la de la resolución. Esto implica que $\operatorname{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) \cong 0$ si $i \neq 2$ y que $\operatorname{Ext}^2_{A^e}(A, A^e) \cong A$. Más aún, este último isomorfismo es un isomorfismo de A-bimódulos: esto sigue de un cálculo directo. □

4.3. Corolario. *La dimensión proyectiva de A_n como A_n-bimódulo es*

$$\operatorname{pdim}_{A_n^e} A_n = 2n,$$

Esta dimensión proyectiva se llama a veces la *dimensión de Hochschild* de A_n.

Demostración. La resolución proyectiva para A_n como A_n-bimódulo que construimos en **1.6** tiene longitud $2n$, así que $\operatorname{pdim}_{A_n^e} A_n \leq 2n$. Por otro lado, el lema nos dice que $\operatorname{Ext}^e_{A_n}(A_n, A_n^e) \neq 0$, de manera que $\operatorname{pdim}_{A_n^e} A_n \geq 2n$. □

CAPÍTULO V

Acciones de grupos finitos sobre las álgebras de Weyl

1. Espacios simplécticos

1.1. Si V es un espacio vectorial, una *forma simpléctica* sobre V es una forma bilineal $\omega : V \otimes V \to \mathbb{C}$ antisimétrica y no-degenerada.

1.2. Si V es un espacio vectorial y si $\omega : \Lambda^2 V \to \mathbb{C}$ es una forma simpléctica, decimos que el par (V, ω) es un *espacio simpléctico*. En todo lo que sigue solo consideraremos espacios simplécticos de dimensión finita.

1.3. Si ω es una forma simpléctica sobre un espacio vectorial V, la antisimetría nos permite identificar a ω como una aplicación lineal $\Lambda^2 V \to \mathbb{C}$. Identificaremos, además, para cada $p \geq 0$, al espacio $(\Lambda^p V)^*$ dual a $\Lambda^p V$ con $\Lambda^p V^*$ de la manera canónica, de manera que, en particular, consideramos a ω como un elemento de $\Lambda^2 V^*$.

1.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_{2n}\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^{2n}$ y sea $\{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{2n}\}$ la base de $(\mathbb{C}^{2n})^*$ dual a $\mathcal{B}$. El *espacio simpléctico estándar* de dimensión $2n$ es el par $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ con

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \wedge \hat{u}_{i+n} \in \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n})^*.$$

En efecto, es inmediato verificar que la matriz de la forma ω con respeto a la base $\mathcal{B}$ es la matriz de bloques

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

en la que $I_n \in M_n(\mathbb{C})$ es la matriz identidad y, como $\det \Omega_n = 1$, ω es no-degenerada.

1.5. Es fácil producir otros ejemplos de espacios simplécticos:

Proposición. *Sea $\mathfrak{h}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathfrak{h}^*$ su espacio dual. Sea $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ y consideremos la forma bilineal $\omega : V \otimes V \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\omega\big((h, \varphi), (h', \varphi')\big) = \varphi(h') - \varphi(h)$$

siempre que (h, φ), $(h', \varphi') \in V$. Entonces ω es antisimétrica y no-degenerada, de manera que (V, ω) es un espacio simpléctico.

Llamamos a esta estructura simpléctica la *estructura simpléctica canónica* de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$.

Demostración. La antisimetría de ω es evidente. Sea $(h, \varphi) \in V \setminus 0$. Si $h \neq 0$, de manera que existe $\varphi' \in V^*$ tal que $\varphi'(h) \neq 0$, es $\omega((h, \varphi), (0, \varphi')) \neq 0$. Si, en cambio, es $h = 0$, debe ser $\varphi \neq 0$, y en este caso existe $h' \in V$ tal que $\varphi(h) \neq 0$: ahora es $\omega((h, \varphi), (h', 0)) \neq 0$. Esto prueba que ω es no-degenerada. □

1.6. El siguiente resultado es debido a Carl Gustav Jacob Jacobi; curiosamente, es en la memoria en que fue presentado que aparece por primera vez usada la palabra *determinante* en su sentido actual:

Lema. (C. G. J. Jacobi [Jac27]) *Si $n \in \mathbb{N}$ es impar y $A \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz antisimétrica, entonces* $\det A = 0$.

Demostración. En efecto, en esas condiciones tenemos que

$$\det A = \det A^t = \det(-1)A = (-1)^n \det A. \qquad \square$$

1.7. Proposición. *Si (V, ω) es un espacio simpléctico, entonces la dimensión de V como espacio vectorial es par.*

Demostración. Sea $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, sea $a_{i,j} = \omega(v_i \wedge v_j)$ y sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. Como ω es antisimetrica, la matriz A es antisimétrica. Por otro lado, como ω es no-degenerada, $\det A \neq 0$. De **1.6**, entonces, concluimos que n es par. □

1.8. Lema. *Sea (V, ω) un espacio simpléctico y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $\omega(v_1 \wedge v_2) \neq 0$. Si $V' = \langle v_1, v_2 \rangle$ y*

$$V'' = \{v \in V : \omega(v \wedge u) = 0 \textit{ para todo } u \in V'\},$$

entonces $V = V' \oplus V''$ y $(V'', \omega|_{\Lambda^2 V''})$ es un espacio simpléctico.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\omega(v_1 \wedge v_2) = 1$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $v = \alpha v_1 + \beta v_2 \in V' \cap V''$, entonces tenemos que $0 = \omega(v \wedge v_1) = -\beta$ y $0 = \omega(v \wedge v_2) = \alpha$: esto nos dice que $V' \cap V'' = 0$. Por otro lado, si $v \in V$ es fácil ver que

$$v - \omega(v, v_2)v_1 + \omega(v, v_1)v_2 \in V'',$$

de manera que $v \in V' + V''$. En definitiva, tenemos que $V = V' \oplus V''$.

Nos resta mostrar que la restricción $\omega|_{\Lambda^2 V''}$ es no-degenerada. Supongamos que $v \in V'' \setminus 0$ es tal que $\omega(v \wedge w) = 0$ para todo $w \in V''$. La elección de V'' implica que también $\omega(v \wedge w) = 0$ si $w \in V'$ así que, como $V = V' \oplus V''$, vemos que de hecho $\omega(v \wedge w) = 0$ para todo $w \in V$. Como ω es no-degenerada, vemos que necesariamente $v = 0$. □

1.9. Proposición. *Sea (V, ω) un espacio simpléctico y sea* $\dim_{\mathbb{C}} V = 2n$. *Entonces existe una base ordenada $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que*

$$\omega(u_i \wedge v_i) = \delta_{i,j},$$
$$\omega(u_i \wedge u_j) = 0$$

y

$$\omega(v_i \wedge v_j) = 0$$

siempre que $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Además, si $\{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ es la base de V^* dual a $\mathcal{B}$, se tiene que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \wedge \hat{v}_i.$$

Decimos que una base como la del enunciado es una *base simpléctica* de (V, ω).

Demostración. Sea $u_n \in V$ un vector no nulo. Como la forma ω es no-degenerada, existe $v_n \in V$ tal que $\omega(u_n \wedge v_n) = 1$. Sea $V' = \langle u_n, v_n \rangle$ el subespacio de V generado por u_n y v_n, y sea $V'' = \{v \in V : \omega(v \wedge u) = 0 \text{ para todo } u \in V'\}$. De 1.8 sabemos que $V = V' \oplus V''$ y que la restricción $\omega|_{\Lambda^2 V''} : \Lambda^2 V'' \to \mathbb{C}$ es no-degenerada, así que $(V'', \omega|_{\Lambda^2 V''})$ es un espacio simpléctico. Como $\dim_{\mathbb{C}} V'' = 2(n-1) < 2n$ podemos suponer que V'' posee una base simpléctica $\{u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ y es claro, entonces, $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ es una base simpléctica para (V, ω). □

1.10. Notemos que 1.9 nos dice que, a menos de elegir una base adecuada, todo espacio simpléctico es isomorfo en un sentido evidente al espacio simpléctico estándar de 1.4 de la dimensión adecuada.

1.11. Proposición. *Sea (V, ω) un espacio simpléctico y sea* $\dim_{\mathbb{C}} V = 2n$. *Entonces*

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ factores}}$$

es un elemento no nulo de $\Lambda^{2n} V^*$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ una base de V como en 1.9, de manera que si $\{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ es la base dual a $\mathcal{B}$, es $\omega = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \wedge \hat{v}_i$. Entonces

$$\omega^n = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_n \le n} \hat{u}_{i_1} \wedge \hat{v}_{i_1} \wedge \hat{u}_{i_2} \wedge \hat{v}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{i_n} \wedge \hat{v}_{i_n} \tag{43}$$

Es claro que los únicos términos de esta suma que no son nulos son aquéllos para los cuales existe una permutación $\pi \in S_n$ de $\{1, \dots, n\}$ tal que $i_j = \pi(j)$ si $j \in \{1, \dots, n\}$.

Ahora bien, si $\pi \in S_n$, es

$$\hat{u}_{\pi(1)} \wedge \hat{v}_{\pi(1)} \wedge \hat{u}_{\pi(2)} \wedge \hat{v}_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{\pi(n)} \wedge \hat{v}_{\pi(n)}$$
$$= \hat{u}_1 \wedge \hat{v}_1 \wedge \hat{u}_2 \wedge \hat{v}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_n \wedge \hat{v}_n$$

ya que

$$\hat{u}_i \wedge \hat{v}_i \wedge \hat{u}_j \wedge \hat{v}_j = \hat{u}_j \wedge \hat{v}_j \wedge \hat{u}_i \wedge \hat{v}_i$$

cualesquiera sean i, $j \in \{1, \dots, n\}$. Vemos así que todos los términos no nulos de la suma (43) son iguales, y que

$$\omega^n = n!\, \hat{u}_1 \wedge \hat{v}_1 \wedge \hat{u}_2 \wedge \hat{v}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_n \wedge \hat{v}_n$$

Es ahora evidente que ω^n es un elemento no nulo de $\Lambda^{2n} V^*$, ya que $\mathcal{B}$ es una base. □

2. Automorfismos simplécticos

2.1. Si (V, ω) y (V', ω') son espacios simplécticos, una *transformación lineal simpléctica* $f : (V, \omega) \to (V', \omega')$ es una transformación lineal $f : V \to V'$ tal que $f^*(\omega') = \omega$. Explícitamente, esta condición dice que

$$\omega(v \wedge w) = \omega'(f(v) \wedge f(w))$$

cualesquiera sean v, $w \in V$.

2.2. Proposición. *Sean (V, ω) y (V', ω') espacios simplécticos. Entonces toda transformación lineal simpléctica $f : (V, \omega) \to (V', \omega)$ es inyectiva.*

Demostración. Si $v \in \ker f$, entonces para todo $w \in V$ es

$$\omega(v \wedge w) = \omega'(f(v) \wedge f(w)) = 0.$$

Como ω es no-degenerada, esto nos dice que $v = 0$. Así, f debe ser inyectiva. □

2.3. En particular, si (V, ω) es un espacio simpléctico, toda transformación lineal simpléctica $f : (V, \omega) \to (V, \omega)$ es un isomofismo. El conjunto de todas las transformaciones lineales simplécticas $(V, \omega) \to (V, \omega)$ es claramente cerrado bajo la composición y la inversión, así que se trata de un subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$, al que notamos $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ o, cuando la forma ω pueda sobreentenderse, $\mathrm{Sp}(V)$.

2.4. Si $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ es el espacio simpléctico estandar de I.1.11, y si identificamos, usando la base canónica, a $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{2n})$ con $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, 2n)$, el grupo $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ puede describirse de la siguiente manera:

Proposición. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces una matriz $M \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}, 2n)$ pertence a $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ sii tiene una descomposición en bloques*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con A, B, C, $D \in M_n(\mathbb{C})$ tal que

$$A^t D - C^t B = I,$$

$$A^t C = C^t A$$

y

$$D^t B = B^t D.$$

El subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, 2b)$ de las matrices que satisfacen las condiciones de la proposición se escribe usualmente $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}, 2n)$.

Demostración. Sea $M \in M_n(\mathbb{C})$ y consideremos una descomposición en bloques de M como en el enunciado. La matriz Ω_n de ω con respecto a la base estándar de $\mathbb{C}^n$ es la matriz (42) de **1.4**, y es fácil ver que $M \in \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ sii $M^t \Omega_n M = \Omega_n$. Escribiendo explíciamente esta última condición obtenemos inmediatamente las ecuaciones del enunciado. □

2.5. Recordemos que si $f \in \mathrm{End}(V)$ es un endomorfismo lineal de un espacio vectorial V de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y si $v \in \Lambda^n V \setminus 0$ es un elemento no nulo de la potencia exterior máxima de V, entonces sabemos que $f_*(v) = \det f\, v$.

Proposición. *Si* (V, ω) *un espacio simpléctico y sea* $f \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$*, entonces* $\det f = 1$ *y, en consecuencia,* $\mathrm{Sp}(V, \omega) \subseteq \mathrm{SL}(V)$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{Sp}(V, \Omega)$, entonces $f^*(\omega) = \omega$. Esto implica, inmediatamente, que $f^*(\omega^n) = \omega^n$ y, como $\omega^n \in \Lambda^{2n} V^*$ es un elemento no nulo de acuerdo a **1.11**, esto nos dice que $\det f = 1$. □

2.6. En general $\mathrm{Sp}(V, \omega) \subsetneq \mathrm{SL}(V)$, pero:

Proposición. *Si* (V, ω) *un espacio simpléctico de dimensión* 2*, es* $\mathrm{Sp}(V, \omega) = \mathrm{SL}(V)$.

Vemos, en particular, que en este caso el subgrupo $\mathrm{Sp}(V, \omega) \subseteq \mathrm{GL}(V)$ no depende de la forma simpléctica ω.

Demostración. Una forma simpléctica sobre un espacio vectorial V de dimensión 2 es simplemente un elemento no nulo de $\Lambda^2 V^*$. En otras palabras, una forma simpléctica ω es, en ese caso, una forma de volumen. Si $f \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, la relación $f^*(\omega) = \omega$ dice entonces, precisamente, que $\det f = 1$. □

2.7. Recordemos que un automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(V)$ de un espacio vectorial V es *semisimple* si todo subespacio f-invariante de V posee un subespacio complementario f-invariante, esto es, si para cada subespacio $U \subseteq V$ tal que $f(U) \subseteq U$ existe un subespacio $U' \subseteq V$ tal que $f(U') \subseteq U'$ y $V = U \oplus U'$.

Como nuestro cuerpo base $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, un automorfismo semisimple es automáticamente diagonalizable. Por otro lado, tenemos que:

Lema. *Todo automorfismo de orden finito es semisimple.*

Demostración. En efecto, si el orden del automorfismo f es r, entonces el polinomio $X^r - 1$ anula a f y, en consencuencia, es divisible por el polinomio minimal m_f de f. Como la característica de $\mathbb{C}$ es nula, $X^r - 1$ es un polinomio separable, así que todas las raices de m_f son simples y esto implica que f es diagonalizable. □

2.8. Para cada $r \in \mathbb{N}$ notemos

$$\Gamma_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^r = 1\}$$

al subgrupo de $\mathbb{C}^\times$ de las raíces r-ésimas de la unidad.

2.9. Proposición. ([AL99, Lemme 3.2]) *Sea (V, ω) un espacio simpléctico de dimensión $2n$ y sea $f \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ un elemento semisimple. Entonces existe una base simpléctica $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ de V y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^\times$ tales que*

$$f(u_i) = \lambda_i u_i$$

y

$$f(v_i) = \lambda_i^{-1} v_i$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si además f tiene orden finito r, entonces $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Gamma_r$.

Demostración. Como f es semisimple, existe una base $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ de V y escalares $\mu_1, \dots, \mu_{2n} \in \mathbb{C}^\times$ tales que $f(w_i) = \mu_i w_i$ para cada $i \in \{1, \dots, 2n\}$.

Sean $u_n = w_1$ y $\lambda_n = \mu_1$. Como ω es no-degenerada, existe $j \in \{2, \dots, 2n\}$ tal que $\omega(u_n \wedge w_j) \neq 0$ y, de hecho, a menos de cambiar a w_j por un múltiplo suyo, podemos suponer que $\omega(u_n \wedge w_j) = 1$. Como $f \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, tenemos entonces que

$$1 = \omega(u_n \wedge w_j) = \omega(f(u_n) \wedge f(w_j)) = \lambda_n \mu_j \, \omega(u_n \wedge w_j) = \lambda_n \mu_j$$

y esto implica que $\mu_j = \lambda_n^{-1}$. Pongamos $v_n = w_j$ y consideremos los subespacios $V' = \langle u_n, v_n \rangle$ y $V'' = \{v \in V : \omega(v \wedge u) = 0 \text{ para todo } u \in V'\}$. De 1.8 sabemos que $(V'', \omega|_{\Lambda^2 V''})$ es un espacio simpléctico, y es fácil ver que f se restringe para dar un elemento $f|_{V''} \in \mathrm{Sp}(V', \omega|_{\Lambda^2 V''})$. Como $\dim_{\mathbb{C}} V'' = 2n - 2 < \dim_{\mathbb{C}} V$, haciendo inducción podemos suponer entonces que tenemos una base simpléctica $\{u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de V'' y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}^\times$ con $f(u_i) = \lambda_i u_i$ y $f(v_i) = \lambda_i^{-1} u_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Es claro ahora que $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ es una base simpléctica de V que satisface las condiciones del enunciado para los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^\times$. Como la última afirmación del enunciado es inmediata, esto termina la prueba. □

2.10. La siguiente proposición nos da ejemplos de automorfismos simplécticos:

Proposición. *Sea $\mathfrak{h}$ un espacio vectorial de dimensión finita, sea $\mathfrak{h}^*$ su espacio dual, sea $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ y sea $\omega \in \Lambda^2 V^*$ la forma simpléctica canónica sobre V construida en 1.5. Si $f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ es un automorfismo lineal de V y si $f^* \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ es su morfismo transpuesto, entonces $f \oplus (f^*)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ es un automorfismo simpléctico de (V, ω). Más aún, la aplicación*

$$\gamma_{\mathfrak{h}} : f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}) \mapsto f \oplus (f^*)^{-1} \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$$

es un monomorfismo de grupos.

Demostración. La primera afirmación sigue de un cálculo directo usando la definición de ω dada en 1.5. La segunda es inmediata. □

2.11. Es importante observar, sin embargo, que no todo automorfismo simpléctico de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ está en la imagen del morfismo φ_h de 2.10. Por ejemplo, si $\mathfrak{h} = \mathbb{C}$ tiene dimensión 1, si $v \in \mathbb{C} \setminus 0$ es un elemento no nulo, y si $\varphi \in \mathbb{C}^*$ es el elemento tal que $\varphi(v) = 1$, entonces el automorfismo $f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)$ tal que $f(v) = \varphi$ y $f(\varphi) = -v$ es simpléctico, pero claramente no está en la imagen del morfismo $\gamma_{\mathfrak{h}}$ de 2.10.

3. Automorfismos lineales del álgebra de Weyl

3.1. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y notemos V al subespacio del álgebra de Weyl A_n generado por $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$.

3.2. De acuerdo a las relaciones (27) y (28) de III.1.3 que definen a A_n, para cada $v, w \in V$ se tiene que $[v, w] \in \mathbb{C}$, así que podemos definir una aplicación

$$\omega : v \otimes w \in V \otimes V \mapsto [v, w] \in \mathbb{C}.$$

Se trata claramente de una forma antisimétrica. Más aún, de la definición III.1.3 vemos que la matriz de la forma ω con respecto a la base $\mathcal{B} = \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$ es precisamente la matriz Ω_n de 1.4. Esto nos dice que el par (V, ω) es un espacio simpléctico y que $\mathcal{B}$ es una de sus bases simplécticas.

3.3. Decimos que un automorfismo $g : A_n \to A_n$ de álgebras es *lineal* si $g(V) \subseteq V$ y escribimos $\mathrm{Aut}_1(A_n)$ al subconjunto de $\mathrm{Aut}(A_n)$ de los automorfimos lineales. Es inmediato que se trata de un subgrupo.

3.4. Si $g \in \mathrm{Aut}_1(A_n)$, es $g(V) = V$, ya que g es inyectivo y V tiene dimensión finita, así que podemos considerar a la restricción $g|_V$ como un elemento de $\mathrm{GL}(V)$. Más aún: si $g \in \mathrm{Aut}_1(A_n)$, entonces $g|_V \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$; esto es evidente de las definiciones. Como consecuencia de ésto, la aplicación α de la siguiente proposición está bien definida.

3.5. Proposición. *La aplicación* $\alpha : g \in \mathrm{Aut}_1(A_n) \mapsto g|_V \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ *es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Es claro que se trata de un morfismo de grupos. Es inyectivo porque V genera a A_n como álgebra, de manera que los valores de g sobre V determinan a g. Para terminar, sea $f \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$: tenemos que mostrar que existe $g \in \mathrm{Aut}_1(A_n)$ tal que $g|_V = f$.

Sea $\bar{g} : \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\rangle \to A_n$ el morfismo definido sobre el álgebra libre $\mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\rangle$ tal que $\bar{g}(p_i) = f(p_i)$ y $\bar{g}(q_i) = f(q_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $f \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, es fácil mostrar que la imagen por $\bar{g}$ de los elementos

$$q_i p_j - p_j q_i - 1 - \delta_{i,j},$$

$$p_i p_j - p_j p_i$$

y

$$q_i q_j - q_j q_i$$

correspondientes a las relaciones (27) y (28) tienen imagen nula por $\bar{g}$. Esto implica que $\bar{g}$ se factoriza por el cociente de $\mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\rangle$ generado por estos elementos, y nos da entonces un morfismo $g : A_n \to A_n$ de álgebras tal que $g|_V = f$.

Notemos que g es inyectivo, ya que A_n es simple, y es sobreyectivo porque su imagen contiene a V, que genera a A_n. Luego $g \in \operatorname{Aut}_1(A_n)$ y $\alpha(g) = f$, como queríamos. □

3.6. Si $g \in \operatorname{Aut}_1(A_n)$, entonces $g(V) = V$ y, por supuesto, $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. La filtración de Bernstein de A_n tiene $F_1 A_n = \mathbb{C} \oplus V$, así que $g(F_1 A_n) = F_1 A_n$ y, más generalmente, es $g(F_m A_n) = F_m A_n$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$, ya que $F_m A_n = (F_1 A_n)^m$. Así, todo automorfismo lineal de A_n preserva la filtración de Bernstein.

3.7. El subgrupo de $\operatorname{Aut}(A_n)$ de los automorfismos que preservan la filtración de Bernstein, sin embargo, es estríctamente más grande que $\operatorname{Aut}_1(A_n)$:

Proposición. *Consideremos la acción a derecha del grupo* $\operatorname{Aut}_1(A_n)$ *sobre* V^* *tal que*

$$\lambda \cdot g = \alpha(g)^*(\lambda)$$

para cada $g \in \operatorname{Aut}_1(A_n)$ *y* $\lambda \in V^*$*; aquí* $g^* : V^* \to V^*$ *es el morfismo transpuesto de* $\alpha(g)$*. Podemos en particular considerar el producto semi-directo* $\operatorname{Aut}_1(A_n) \rtimes V^*$*. Entonces hay un único morfismo de grupos*

$$\beta : \operatorname{Aut}_1(A_n) \rtimes V^* \to \operatorname{Aut}(A_n)$$

tal que $\beta(g, \lambda)(v) = g(v) + \lambda(v)$ *para cada* $(g, \lambda) \in \operatorname{Aut}_1(A_n) \rtimes V^*$ *y cada* $v \in V$*, y la imagen de* β *el precisamente el conjunto de los automorfismos de* A_n *que preservan la filtración de Bernstein.*

Demostración. Que la acción de $\operatorname{Aut}_1(A_n)$ sobre V^* está bien definida sigue de un cálculo directo. La verificación de las afirmaciones relativas a β es análoga a lo hecho para probar 3.5. Dejamos los detalles a cargo del lector. □

3.8. Más aún: no es cierto que todo automorfismo de A_1 preserve la filtración de Bernstein. Por ejemplo, si $t \in \mathbb{C}[X]$ hay un automorfismo $g_t : A_1 \to A_1$ tal que

$$g_t(p) = p$$

y

$$g_t(q) = q + t(p).$$

En efecto, como $[q + f(p), p] = [q, p] = 1$, el morfismo g_t está bien definido, es inyectivo ya que A_1 es simple, y es sobreyectivo ya que p y $q = g_t(q) - t(g_t(p)))$ están en la imagen de g_t. Finalmente, es claro que en cuanto $\deg t > 1$ la filtación de Bernstein no es preservada por g_t.

3.9. Es fácil ver que el conjunto $T_1 = \{g_t : t \in \mathbb{C}[X]\}$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(A_1)$, y que $T_1 \cap \mathrm{Aut}_1(A_1) \cong \mathbb{C}^\times$ es el subgrupo de $\mathrm{Aut}_1(A_1)$ que corresponde al subgrupo de matrices diagonales de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$. El siguiente resultado de Jacques Dixmier y Leonid Makar-Limanov describe la estructura de $\mathrm{Aut}(A_1)$:

Teorema. (J. Dixmier [Dix68], L. Makar-Limanov [ML84], H. W. E. Jung [Jun42]) *El grupo* $\mathrm{Aut}(A_1)$ *es el producto libre de sus subgrupos* $\mathrm{Aut}_1(A_1)$ *y* T_1 *amalgamado en su intersección.*

3.10. En cambio, cuando $n \geq 2$ no disponemos de una descripción de $\mathrm{Aut}(A_n)$, y ni siquiera se conoce un conjunto de generadores. La dificultad radica, en gran parte, en que es muy difícil reconocer un automorfismo de A_n. Una conjetura de Dixmier dice, sin embargo, que el problema es solo aparente:

Conjetura. (J. Dixmier [Dix68]) *Todo endomorfismo de álgebras $f : A_n \to A_n$ es un isomorfismo.*

Esta conjetura esta abierta para todo $n \geq 1$. Es interesante notar que Maxim Kontsevich y Alexei Belov-Kanel probaron recientemente en [BKK07] que la validez de la Conjetura de Dixmier para todo $n \geq 1$ es equivalente a la validez de la Conjetura Jacobiana en todas las dimensiones.

3.11. En cuanto a la estructura de $\mathrm{Aut}(A_n)$, en un trabajo reciente Kontsevich y Belov-Kanel propusieron la siguiente conjetura:

Conjetura. (Kontsevich–Belov-Kanel [BKK05]) *El grupo de automorfismos de A_n es isomorfo al grupo* $\mathrm{Aut}(P_n)$ *de automorfismos de $P_n = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{2n}]$ en tanto álgebra de Poisson con respecto al corchete dado por*

$$\{x_i, x_j\} = \delta_{i,n+j} - \delta_{n+i,j}$$

para cada i, $j \in \{1, \dots, n\}$.

En el trabajo en el que proponen esta conjetura, los autores demuestran que hay un isomorfismo entre los subgrupos de $\mathrm{Aut}(A_n)$ y de $\mathrm{Aut}(P_n)$ formado por los automorfismos llamados *mansos*, y proponen un candidato explícito para el isomorfismo $\mathrm{Aut}(A_n) \cong \mathrm{Aut}(P_n)$.

4. Subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}(A_n)$

4.1. Haciendo uso fundamental del teorema **3.9** que describe la estructura del grupo $\mathrm{Aut}(A_1)$ como producto libre amalgamado de sus subgrupos $\mathrm{Aut}_1(A_1)$ y T_1, y apoyándose en la teoría de estructura desarrollada por J.-P. Serre para este tipo de productos, J. Alev obtuvo el siguiente resultado:

Teorema. (J. Alev [Ale86]) *Todo subgrupo finito de* $\mathrm{Aut}(A_1)$ *es conjugado a un subgrupo de* $\mathrm{Aut}_1(A_1)$. □

4.2. Si $V = \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q \subseteq A_1$ y si (V, ω) es el espacio simpléctico construido en 3.2, sabemos de 3.5 que $\mathrm{Aut}_1(A_1)$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Sp}(V, \omega)$. A su vez, como $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$, la proposición 2.6 nos dice que $\mathrm{Sp}(V, \omega) = \mathrm{SL}(V)$. Finalmente, fijando de una vez por todas la base $\{p, q\}$ para V, hay un isomorfismo $\mathrm{SL}(V) \cong \mathrm{SL}(\mathbb{C}, 2)$, al que consideraremos como una identificación.

4.3. Esto, junto con 4.1, reduce la descripción de los subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}(A_1)$ a menos de conjugación al problema clásico de describir las clases de conjugación de subgrupos finitos de $\mathrm{SL}(\mathbb{C}, 2)$.

4.4. Fijemos una sucesión $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathbb{C}$ de manera tal que *(i)* ζ_n es una raíz primitiva n-ésima de 1 y *(ii)* se tiene que $\zeta_{nm}^n = \zeta_m$ cualesquiera sean $n, m \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, cuando $\mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos podemos elegir $\zeta_n = \mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}/n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

4.5. El siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en [Spr77], se remonta esencialmente a Hermann Schwarz [Sch73], Paul Gordan [Gor77], Arthur Cayley [Cay80a], [Cay80b] y Felix Klein [Kle56]:

Teorema. *Sea $G \subseteq \mathrm{SL}(\mathbb{C}, 2)$ un subgrupo finito. Entonces G es conjugado exactamente a uno de los siguientes grupos:*

- *el grupo* cíclico $G(\mathsf{A}_n)$, *generado por*
$$\rho_n = \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix};$$
- *el grupo* diedral binario $G(\mathsf{D}_n)$, *generado por ρ_{2n} y*
$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_4 \\ \zeta_4 & 0 \end{pmatrix};$$
- *el grupo* tetraedral binario $G(\mathsf{E}_6)$, *generado por ρ_4, σ y*
$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_8^7 & \zeta_8^7 \\ \zeta_8^5 & \zeta_8 \end{pmatrix};$$
- *el grupo* octaedral binario $G(\mathsf{E}_7)$, *generado por ρ_8, σ y τ;*
- *el grupo* icosaedral binario $G(\mathsf{E}_8)$, *generado por*
$$\upsilon = \begin{pmatrix} -\zeta_5^3 & 0 \\ 0 & -\zeta_3^2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
y
$$\psi = \frac{1}{\zeta_5^2 - \zeta_5^{-2}} \begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^{-2} & 1 \\ 1 & -(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) \end{pmatrix}$$

□

4.6. Este teorema nos da una descripción los subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}(A_1)$ a menos de conjugación. Más aún, es claro que todo subgrupo finito de $\mathrm{Aut}(A_1)$ es conjugado a uno de los dados en el enunciado por un elemento de $\mathrm{Aut}_1(A_1)$.

4.7. No tenemos, en cambio, ningún resultado semejante para los subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}(A_n)$ cuando $n \geq 2$: el problema es que como no conocemos la estructura del grupo $\mathrm{Aut}(A_n)$ en ese caso, no sabemos como probar la afirmación correspondiente a 4.1 y, ni siquiera, si es válida.

4.8. Observemos, sin embargo, que todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(A_n)$ para *algún n*. En vista de 3.5 y de que el tipo de isomorfismo de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ depende solamente de $\dim_{\mathbb{C}} V$, alcanza con mostrar que todo grupo finito G es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ para algún espacio simpléctico (V, ω).

Pero como G es finito y $\mathbb{C}$ tiene característica nula, existe una representación fiel $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ de G sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathfrak{h}$, así que podemos considerar el espacio simpléctico $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*, \omega)$ construido como en 1.5 y el monomorfismo $\gamma_{\mathfrak{h}} : \mathrm{GL}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{Sp}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*, \omega)$ de 2.10. Entonces el subgrupo $G' = \gamma_{\mathfrak{h}}(\rho(G))$ de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ es isomorfo a G.

CAPÍTULO VI

Cohomología de álgebras de invariantes de un álgebra de Weyl

1. Homología torcida de A_1

1.1. Sea A un álgebra y $g \in \mathrm{Aut}(A)$ un automorfismo. Si M es un A-bimódulo, notamos Mg al A-bimódulo que en tanto A-módulo izquierdo coincide con M, salvo que escribimos sus elementos en la forma mg en vez de simplemente m, y cuya estructura a derecha es tal que

$$mg \cdot a = mg(a)g$$

para cada $m \in M$ y cada $a \in A$. Decimos Mg se obtiene de M *torciendo* su estructura derecha por el automorfismo g.

1.2. En lo que queda de esta sección consideraremos solo la primer álgebra de Weyl, y escribiremos $A = A_1, p = p_1$ y $q = q_1$, para simplificar la notación. Como siempre, sea $V = \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q$. Nuestro objetivo es calcular los grupos de cohomología $\mathrm{Ext}^{\bullet}_{A^e}(A, Ag)$ para un automorfismo g de A lineal y semisimple.

1.3. Si $a, b \in A$ y $g \in \mathrm{Aut}(A)$, escribimos

$$[a, b]_g = ab - g(b)a.$$

1.4. Notemos que $[-, -]_g$ no es una derivación. Tenemos, sin embargo, la siguiente propiedad análoga:

Lema. *Si a, b, $c \in A$, entonces $[a, bc]_g = [ab, c]_g + [g(c)a, b]_g$.*

Demostración. Esto sigue de un cálculo directo. □

1.5. Proposición. (J. Alev, Th. Lambre [AL98]) *Si $g \in \mathrm{Aut}_1(A)$ es un automorfismo lineal semisimple y $g \neq \mathrm{id}_A$, entonces $A = \mathbb{C} \oplus [A, A]_g$.*

Demostración. De acuerdo a V.2.9 y a V.3.5, existe $s \in \mathrm{Aut}_1(A)$ tal que sgs^{-1} actúa diagonalmente sobre la base $\{p, q\}$. Como

$$s([a, b]_g) = [h(a), h(b)]_{sgs^{-1}}$$

para todo $a, b \in A$, tenemos que $s([A, A]_g) = [A, A]_{sgs^{-1}}$, y es claro que esto implica que para probar la proposición podemos suponer simplemente que g actúa diagonalmente, esto es, que existe un escalar $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ tal que $g(p) = \lambda p$ y $g(q) = \lambda^{-1}q$. Más aún, como $g \neq \mathrm{id}$, es $\lambda \neq 1$.

Como el automorfismo g es compatible con la graduación de A, tenemos que $[A^{(k)}, A^{(l)}]_g \subseteq A^{(k+l)}$ si k, $l \in \mathbb{Z}$. El subespacio $[A, A]_g$ de A es, en consecuencia, un subespacio homogeneo. Si escribimos $[A, A]_g^{(k)}$ a su componente homogénea de peso k, que es

$$[A, A]_g^{(k)} = \sum_{l+l'=k} [A^{(l)}, A^{(l')}]_g \subseteq A^{(k)},$$

tenemos entonces que

$$[A, A]_g = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} [A, A]_g^{(k)}.$$

Sea $h = pq$, de manera que $A^{(0)} = \mathbb{C}[h]$, como vimos en IV.2.9, y que para cada $k \in \mathbb{Z}$ y cada $f \in A^{(k)}$ se tiene que $[h, f] = kf$.

Si $k \in \mathbb{Z}$ y $f \in A^{(k)}$, es $[f, h]_g = [f, h] = -kf$ porque $g(h) = h$ y esto implica que cuando $k \neq 0$, tenemos

$$A^{(k)} \subseteq [A^{(k)}, A^{(0)}]_g \subseteq [A, A]_g^{(k)} \subseteq A^{(k)}$$

y, entonces, $[A, A]_g^{(k)} = A^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash 0$. Vemos así que la proposición quedará probada si mostramos que $A^{(0)} = \mathbb{C} \oplus [A, A]_g^{(0)}$.

Si $f, f' \in A^{(0)}$ y $k \geq 0$, entonces 1.4 nos dice que

$$[p^k f, f' q^k]_g = [p^k f f', q^k]_g + [\lambda^{-k} q^r p^k f, f']_g \tag{44}$$

Notemos que $\lambda^{-k} q^r p^k f \in A^{(0)}$ y que, como $g(f') = f'$, es

$$[\lambda^{-k} q^r p^k f, f']_g = [\lambda^{-k} q^r p^k f, f'] = 0$$

porque $A^{(0)}$ es una subálgebra conmutativa. Usando esto en (44), vemos que

$$[A^{(k)}, A^{(-k)}]_g \subseteq [A^{(k)}, q^k]_g. \tag{45}$$

Si ahora $k > 0$ y $f \in A^{(0)}$, es

$$\begin{aligned}[p^k f, q^k]_g &= [p^k f q, q^{k-1}]_g + [\lambda^{-k+1} q^{k-1} p^k f, q]_g \\ &\in [A^{(k-1)}, q^{k-1}]_g + [A^{(1)}, q]_g\end{aligned}$$

de manera que, inductivamente,

$$[A^{(k)}, q^k]_g \subseteq [A^{(1)}, q]_g \tag{46}$$

Procediento de manera similar, obtenemos las inclusiones

$$[A^{(-k)}, A^{(k)}]_g \subseteq [A^{(-k)}, p^k]_g \subseteq [A^{(-1)}, p]_g$$

correspondientes a (45) y a (46), respectivamente, y, como $[A^{(0)}, A^{(0)}]_g = 0$, concluimos que

$$[A, A]_g^{(0)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} [A^{(k)}, A^{(-k)}]_g \subseteq [A^{(1)}, q]_g + [A^{(-1)}, p]_g \subseteq [A, A]_g^{(0)},$$

de manera que

$$[A, A]_g^{(0)} = [A^{(1)}, q]_g + [A^{(-1)}, p]_g. \tag{47}$$

Finalmente, si $f \in A^{(0)}$, un cálculo directo muestra que

$$\lambda[pf, q]_g + [fq, p]_g = 0,$$

y esto implica que $[A^{(1)}, q]_g = [A^{(-1)}, p]_g$, y que (47) se simplifica a

$$[A, A]_g^{(0)} = [A^{(-1)}, p]_g. \tag{48}$$

Ahora, si $f \in \mathbb{C}[X]$ es

$$[f(h)q, p]_q = f(h)qp - \lambda pf(h)q$$

y, usando la relación (39) de IV.2.11, podemos ver que esto es

$$= f(h)(h+1) - \lambda hf(h-1).$$

En particular, si $i \in \mathbb{N}_0$, tenemos que

$$[h^i q, p]_g = (1-\lambda)h^{i+1} + o$$

con $o \in \mathbb{C}[h]$ de grado menor que $i+1$. Así, el conjunto $\{[h^i q, p]_g : i \geq 0\}$, que general linealmente a $[A^{(-1)}, p]_q$, contiene exactamente un polinomio de $\mathbb{C}[h]$ de cada grado positivo. Esto implica, por supuesto, que $\mathbb{C}[h] = \mathbb{C} \oplus [A^{(-1)}, p]_q$. De (48) y como $A^{(0)} = \mathbb{C}[h]$, entonces, vemos que $A^{(0)} = \mathbb{C} \oplus [A, A]_g^{(0)}$, que es lo que queríamos. □

1.6. Corolario. (J. Alev, Th. Lambre [AL98]) *Si $g \in \mathrm{Aut}_1(A)$ es un automorfismo lineal semisimple y $g \neq \mathrm{id}_A$, entonces $\dim_{\mathbb{C}} H_0(A, Ag) = 1$.*

Demostración. En efecto, sabemos que $H_0(A, Ag)$ es naturalmente isomorfo al espacio de coinvariantes $A/[A, Ag]$ y $[A, Ag] = [A, A]_g$, de manera que el corolario sigue de 1.5. □

1.7. Proposición. (J. Alev, M. Farinati, Th. Lambre, A. Solotar [AFLS00]) *Sea A la primer álgebra de Weyl. Si $g \in \mathrm{Aut}_1(A)$ es un automorfismo lineal semisimple y $g \neq \mathrm{id}_A$, entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}_{A^e}^{\bullet}(A, Ag) = \begin{cases} 1, & \text{si } g_i = \mathrm{id} \text{ y } \bullet = 0, \text{ o si } g_{\neq}\mathrm{id} \text{ y } \bullet = 2; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si $g = \mathrm{id}$, esto sigue de IV.2.13, así que sea $g \neq \mathrm{id}$. Como en la prueba de 1.5 podemos suponer que g actua diagonalemente sobre la base p, q de V, de manera que existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que $gp = \lambda p$ y $gq = \lambda^{-1}q$. Más aún, la hipótesis implica que $\lambda \neq 1$.

Para calcular $\operatorname{Ext}^{\bullet}_{A^e}(A, Ag)$, determinamos la cohomología del complejo que se obtiene de aplicar el functor $\hom_{A^e}(-, Ag)$ a la resolución A^e-proyectiva de A construida en IV.2.3. Realizando identificaciones como en IV.2.4, ese complejo es

$$Ag \xrightarrow{d^0} Ag \otimes V^* \xrightarrow{d^1} Ag \otimes \Lambda^2 V^*$$

con diferenciales dadas por

$$d^0(a) = (pa - \lambda ap) \otimes \hat{p} + (qa - \lambda^{-1} aq) \otimes \hat{q}$$

y

$$d^1(a \otimes \hat{p} + b \otimes \hat{q}) = \big(pb - \lambda bp - qa + \lambda^{-1} aq\big) \otimes \hat{p} \wedge \hat{q}$$

para cada $a, b \in A$. Llamemos X este complejo.

La filtración de Bernstein de A_1 determina de manera evidente una filtración sobre las componentes homogéneas de X, y las fórmulas dadas para la diferencial de X muestran que X es, de esta forma, un complejo filtrado.

Sea $B = \operatorname{gr} A$ el álgebra graduada asociada de manera que, según vimos en la proposición III.2.4, hay un isomorfismo $B \cong \mathbb{C}[x, y]$. El complejo $\operatorname{gr} X$ es, entonces, isomorfo a

$$B \xrightarrow{d^0} B \otimes V^* \xrightarrow{d^1} B \otimes \Lambda^2 V^*$$

con diferenciales dadas por

$$d^0(a) = (1 - \lambda) xa \otimes \hat{p} + (1 - \lambda^{-1}) ya \otimes \hat{q}$$

y

$$d^1(a \otimes \hat{p} + b \otimes \hat{q}) = \big((1 - \lambda) xb - (1 - \lambda^{-1}) ya\big) \otimes \hat{p} \wedge \hat{q}$$

para cada $a, b \in B$. Reconocemos inmediatamente el complejo de Koszul para $\mathbb{C}[x, y]$ correspondiente a la sucesión regular $((1-\lambda)x, (1-\lambda^{-1})y)$, reindexado. En consecuencia, es bien conocido que

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{\bullet}(\operatorname{gr} X) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bullet = 2; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Esto implica, vía un argumento estándar basado en que todas las filtraciones que estamos considerando son acotadas inferiormente, que

$$\operatorname{Ext}^{\bullet}_{A^e}(A, Ag) \cong H^{\bullet}(X) \cong 0$$

si $\bullet \neq 2$. Finalmente, de IV.4.1 sabemos que

$$\operatorname{Ext}^{2}_{A^e}(A, Ag) \cong H^2(A, Ag) \cong H_0(A, Ag)$$

y este último espacio tiene dimensión 1, de acuerdo a 1.6. □

2. Homología torcida de A_n

2.1. En esta sección extendemos la proposición 1.7 a todas las álgebras de Weyl, pero con obtenemos una descripción concreta de los grupos de cohomología y no solamente de su dimensión.

2.2. Sea V el subespacio de A_n generado por $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$, dotado de su estructura de espacio simpléctico y sea ω la forma simpléctica sobre V construida en V.3.2.

2.3. Fijemos un automorfismo lineal $g \in \mathrm{Aut}_1(A_n) = \mathrm{Sp}(V, \omega)$. y supongamos que g es *semisimple*.

2.4. Procediendo como en IV.2.4 usando la resolución construida en IV.1.6 para A_n, vemos que la cohomología $\mathrm{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A_n g)$ puede calcularse como la cohomología del complejo $\hom(\Lambda^\bullet V, A_n g)$ con diferenciales

$$d_r : \hom(\Lambda^r V, A_n g) \to \hom(\Lambda^{r+1} V, A_n g)$$

dadas por

$$d\varphi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} [a, \varphi(v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_{r+1})]$$

para cada $\varphi \in \hom(\Lambda^r V, A_n g)$ y cada $v_1, \dots, v_{r+1} \in V$. Es importante observar que el corchete $[a, -]$ que aparece en esta fórmula se aplica sobre elementos del bimódulo torcido A_n y, entonces, hace aparecer la acción de g sobre A.

2.5. Sea $V^g = \{v \in V : gv = v\}$ el subespacio fijo de V bajo la acción de g. Sea, por otro lado, V_g el subespacio de V generado por los autovectores de g en V correspondientes a autovalores distintos de 1. Como estamos suponiendo que g es semisimple, tenemos que

$$V = V^g \oplus V_g. \tag{49}$$

2.6. De V.2.9 sabemos que existe una base simpléctica $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ de V y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^\times$ tales que $gu_i = \lambda_i u_i$ y $gv_i = \lambda_i^{-1} v_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d = d(g) \in \mathbb{N}$ es tal que $\lambda_i \neq 1$ si $1 \leq i \leq d$ y que $\lambda_i = 1$ si $d < i \leq n$, de manera que es $u_i, v_i \in V_g$ si $1 \leq i \leq d$ y $u_i, v_i \in V^g$ si $d < i \leq n$. Claramente, entonces,

$$d = \tfrac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} V_g.$$

2.7. Esta última expresión para d hace evidente que la función $d : G \to \mathbb{N}_0$ es una función central, esto es, que es constante sobre las clases de conjugación de G.

2.8. Observemos que tanto $(V_g, \omega|_{\Lambda^2 V_g^*})$ como $(V^g, \omega|_{\Lambda^2 V^{g*}})$ son espacios simplecticos: en efecto, $\{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d\}$ y $\{u_{d+1}, \dots, u_n, v_{d+1}, \dots, v_n\}$ son bases simplécticas para V_g y V^g, respectivamente. En particular, la forma

$$\eta = \eta_g = (\omega|_{\Lambda^2 V_g^*})^d \in \Lambda^{2d} V_g^*$$

es no nula, de acuerdo a V.1.11.

2.9. A partir de (49) obtenemos una descomposición

$$\Lambda^{2d} V = \bigoplus_{r+s=2d} \Lambda^r V^g \otimes \Lambda^s V_g. \tag{50}$$

Como $\Lambda^0 V^g$ se identifica canónicamente con $\mathbb{C}$, podemos a su vez identificar el sumando $\Lambda^0 V^g \otimes \Lambda^{2d} V_g$ con $\Lambda^{2d} V_g$ y extender, sin cambiar la notación, a la forma η a un elemento de $\Lambda^{2d} V^*$ de manera que se anule sobre los otros sumandos que aparecen en (50).

2.10. Sea, finalmente,

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_g : v \in \Lambda^{2d} V \mapsto \eta(v) g \in A_n g.$$

Se trata de una $2d$-cocadena en el complejo $\hom(\Lambda V, A_n g)$ de 2.4.

2.11. Proposición. *La cocadena $\tilde{\eta} : \Lambda^{2d} V \to A_n g$ es un cociclo.*

Demostración. Fijemos una base $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ de V para la que sea $v_1, \dots, v_{2d} \in V_g$ y $v_{2d+1}, \dots, v_{2n} \in V^g$. Sean además, $i_1, \dots, i_{2d+1}$ tales que $1 \leq i_1 < \cdots < i_{2d+1} \leq 2n$.

Entonces

$$\begin{aligned} d\tilde{\eta}(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}}) &= \sum_{j=1}^{2d+1} (-1)^{j+1} [v_{i_j}, \tilde{\eta}(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{v}_{i_j} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}})] \\ &= \sum_{j=1}^{2d+1} (-1)^{j+1} [v_{i_j}, \eta(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{v}_{i_j} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}})]_g g. \end{aligned}$$

Si $i_{2d} > 2d$, entonces $\eta(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{v}_{i_j} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}}) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, 2d+1\}$, por la forma en que extendimos η a $\Lambda^{2d} V$ en 2.9, de manera que $d\tilde{\eta}(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}}) = 0$. Si, por el contrario, $i_{2d} \leq 2d$, es necesariamente $i_j = j$ para cada $j \in \{1, \dots, 2d\}$ y $\eta(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{v}_{i_j} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}}) = 0$ para esos valores de j. En este segundo caso, entonces,

$$d\tilde{\eta}(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}}) = (-1)^d [v_{i_{2d+1}}, \eta(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2d})]_g g.$$

Como η toma valores en el centro de A_n y como g actúa trivialmente sobre éste, vemos que también ahora tenemos que $d\tilde{\eta}(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}}) = 0$.

Como $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d+1}} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2d+1} \leq 2n\}$ es una base de $\Lambda^{2d+1} V$, concluimos de esta forma que $d\tilde{\eta} : \Lambda^{2d+1} \to A_n g$ se anula, es decir, que $\tilde{\eta}$ es un $2d$-cociclo. □

2.12. Proposición. *La cocadena $\tilde{\eta} : \Lambda^{2d} V \to A_n g$ no es un coborde.*

Demostración. Fijemos una base simpléctica $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ de V como en 2.6 y supongamos que $h \in \hom(\Lambda^{2d-1} V, A_n g)$ es tal que $d(h) = \tilde{\eta}$.

Si escribimos, para cada $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$h_i = h(v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_d \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_d)$$

y

$$h'_i = h(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_i \wedge \cdots \wedge u_d)$$

entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_d) &= dh(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_d) \\ &= \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1} [v_i, h_i]_g + \sum_{i=1}^{d} (-1)^{d+i+1} [u_i, h'_i]_g.\end{aligned}$$

La elección de $\tilde{\eta}$ implica inmediatamente que $\tilde{\eta}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_d)$ es un escalar no nulo y, por otro lado, el tercer miembro de esta igualdad es un elemento de $[V_g, A_n]_g$, de manera que

$$[V_g, A_n]_g \cap \mathbb{C} \neq 0.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea $V^i = \mathbb{C}v_i \oplus \mathbb{C}u_i \subseteq V$ y sea A^i la subálgebra de A_n generada por V^i. Entonces $V = \bigoplus_{i=1}^n V^i$ y, abusando un poco de la notación, $A = \bigotimes_{i=1}^n A^i$. Claramente A^i es isomorfa al álgebra de Weyl A_1, y cada V^i es g-invariante, así que $g_i = g|_{V^i}$ es un automorfismo simpléctico de V^i que extiende a un automorfismo del álgebra A^i. Más aún, es

$$[V_g, A_n]_g = \sum_{i=1}^{d} [V^i, A_n]_g = \sum_{i=1}^{d} A^1 \otimes \cdots \otimes [V^i, A^i]_{g_i} \otimes \cdots \otimes A^n. \tag{51}$$

Si $i \in \{1, \dots, d\}$, entonces g_i es un autmorfismo lineal del álgebra de Weyl A^i distinto de la identidad, así que 1.5 nos dice que $A^i = \mathbb{C} \oplus [A^i, A^i]_{g_i}$. Usando esto en (51) vemos que, entonces, $\mathbb{C} \cap [V_g, A_n]_g = 0$. Esto es absurdo en vista de 2.10, y esta contradicción prueba la proposición. □

2.13. No es difícil mostrar que todo $2d$-cociclo $\varphi \in \hom(\Lambda^{2d} V, A_n g)$ con valores en el subespacio $\mathbb{C}g \subset A_n g$ es un multiplo escalar del cociclo $\tilde{\eta}$ contruido en esta sección. No necesitaremos para lo que sigue este resultado, así que omitimos los detalles; pueden encontrarse en [SA02].

2.14. Ya estamos en condiciones de calcular explícitamente la cohomología de A_n con valores en el bimódulo torcido $A_n g$:

Teorema. *Sea $g \in \mathrm{Aut}_1(A_n) = \mathrm{Sp}(V, \omega)$ un automorfismo lineal semisimple de A_n y sea $d = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} V_g$. Entonces hay un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$f = f_g : \Lambda^{2d} V_g^*[-2d] \to \mathrm{Ext}^{\bullet}_{A_n^e}(A_n, A_n g)$$

Demostración. El espacio vectorial graduado $\Lambda^{2d}V_g^*[-2d]$ tiene dimensión 1 y está concentrado en grado $2d$. Si calculamos $\operatorname{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A_n g)$ como la cohomología del complejo $\hom(\Lambda^\bullet V, A_n g)$, entonces podemos definir una aplicación lineal

$$f : \Lambda^{2d}V_g^*[-2d] \to \operatorname{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A_n g)$$

de manera que la imagen de la forma η de 2.8 sea la clase de la $2d$-cocadena $\tilde{\eta}$ construida en 2.10. Esto tiene sentido porque $\tilde{\eta}$ es un cociclo, de acuerdo a 2.11, y se trata de un monomorfismo porque $\tilde{\eta}$ no es un coborde, como vimos en 2.12. Para ver que f es un isomorfismo, entonces, alcanza con mostrar que el espacio vectorial graduado $\operatorname{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A_n g)$ también tiene dimensión 1 y está concentrado en grado $2d$.

Retomemos las notaciones de la prueba de 2.12. Del isomorfismo de álgebras $A = \bigotimes_{i=1}^n A^i$ y el correspondiente isomorfismo de bimódulos $Ag = \bigotimes_{i=1}^n A^i g_i$ obtenemos, iterando la fórmula de Künneth I.5.9 para la cohomología de Hochschild, un isomorfismo

$$\vee : \bigotimes_{i=1}^n \operatorname{Ext}^\bullet_{(A^i)^e}(A^i, A^i g_i) \to \operatorname{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A_n g).$$

Sabemos de 1.7 que

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ext}^\bullet_{(A^i)^e}(A^i, A^i g_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } g_i = \mathrm{id} \text{ y } \bullet = 0, \text{ o si } g_{\neq}\mathrm{id} \text{ y } \bullet = 2; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Usando esto es inmediato verificar que la única componente homogénea no nula del producto $\bigotimes_{i=1}^n \operatorname{Ext}^\bullet_{(A^i)^e}(A^i, A^i g_i)$ es la de grado $2d$, y que ésta tiene dimensión 1: en efecto, esto sigue de que el conjunto $\{i \in \{1, \dots, n\} : g_i \neq \mathrm{id}\}$ tiene exactamente d elementos. Finalemente, como el morfismo $\vee$ es un isomorfismo, lo mismo vale para $\operatorname{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A_n g)$, que es lo que queríamos mostrar. □

2.15. Observemos que la determinación de las dimensiones de las componentes homogéneas de $\operatorname{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A_n g)$ puede hacerse sin necesidad de tener la información sobre el cociclo $\tilde{\eta}$ obtenida en esta sección: ese es lo que se hace en el trabajo [AFLS00]. Nosotros, sin embargo, necesitamos la forma explícita del isomorfismo de 2.14 en la forma dada en la prueba de ese teorema.

3. Cohomología con valores en $A \rtimes G$

3.1. Fijemos un subgrupo finito $G \subset \operatorname{Aut}_1(A_n)$ de automorfismos lineales del álgebra de Weyl A_n.

3.2. Si $g, h \in G$, entonces la aplicación

$$v \in V_{hgh^{-1}} \mapsto hv \in V_g$$

está bien definida, es biyectiva e induce un isomorfismo

$$h_g^\# : \Lambda^{2d(g)} V_g^* \to \Lambda^{2d(hgh^{-1})} V_{hgh^{-1}}^*$$

ya que $d(g) = d(hgh^{-1})$. Podemos entonces definir

$$h^\# = \bigoplus_{g \in G} h_g^\# : \bigoplus_{g \in G} \Lambda^{2d(g)} V_g^* [-2d(g)] \to \bigoplus_{g \in G} \Lambda^{2d(g)} V_g^* [-2d(g)].$$

Obtenemos así una aplicación

$$h \in G \mapsto h^\# \in \mathrm{GL}\Big(\bigoplus_{g \in G} \Lambda^{2d(g)} V_g^* [-2d(g)] \Big).$$

Es fácil ver que se trata de un morfismo de grupos, que hace del espacio

$$\bigoplus_{g \in G} \Lambda^{2d(g)} V_g^* [-2d(g)]$$

un G-módulo.

3.3. Lema. *Bajo la acción de G sobre* $\bigoplus_{g \in G} \Lambda^{2d(g)} V_g^* [-2d(g)]$ *se tiene que*

$$h \cdot \eta_g = \eta_{hgh^{-1}}$$

para cada g, h $\in$ *G.*

Demostración. Recordemos que $\eta_g = (\omega|_{\Lambda^2 V_g^*})^{d(g)} \in \Lambda^{2d(g)} V_g^*$. Es claro entonces que $\eta_g = (\omega^d)|_{\Lambda^{2d(g)} V_g^*}$ y, de acuerdo a la forma en que está definida la acción de G, es

$$h \cdot \eta_g = (h^*(\omega)^d)|_{\Lambda^{2d(hgh^{-1})} V_{hgh^{-1}}^*}$$

con $h^* : \Lambda^2 V^* \to \Lambda^2 V^*$ el morfismo inducido por h. Como la acción de G sobre V es simpléctica, $h^*(\omega) = \omega$, y entonces vemos inmediatamente que $h \cdot \eta_g = \eta_{hgh^{-1}}$, como afirma el lema. □

3.4. El objetivo de esta sección es obtener la siguiente descripción de los grupos de cohomología $\mathrm{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$ en tanto G-módulos:

Proposición. *Hay un isomorfismo de G-módulos graduados*

$$f : \bigoplus_{g \in G} \Lambda^{2d(g)} V_g^* [-2d(g)] \to \mathrm{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A \rtimes G)$$

tal que para cada g $\in$ *G es*

$$f(\eta_g) = [\tilde{\eta}_g] \in \mathrm{Ext}^{2d(g)}_{A_n^e}(A_n, A \rtimes G)$$

con $\eta_g \in \Lambda^{2d(g)} V_g^* [-2d(g)]$ *y* $\tilde{\eta}_g \in \hom(\Lambda^{2d(g)} V, A_n g)$ *como en la sección anterior.*

Demostración. Para ver que se trata de un isomorfiso de espacios vectoriales graduados basta observar que a menos del isomorfismo canónico

$$\bigoplus_{g\in G} \operatorname{Ext}^{\bullet}_{A_n^e}(A_n, A_n g) \cong \operatorname{Ext}^{\bullet}_{A_n^e}(A_n, A \rtimes G)$$

que da la aditividad de Ext, la aplicación f se identifica con la suma directa

$$f = \bigoplus_{g\in G} f_g : \bigoplus_{g\in G} \Lambda^{2d(g)} V_g^*[-2d(g)] \to \bigoplus_{g\in G} \operatorname{Ext}^{\bullet}_{A_n^e}(A_n, A_n g)$$

de los isomorfismos obtenidos en 2.14. En vista de como fue definido el morfismo f y del lema 3.3, para terminar la prueba de la proposición tenemos que mostrar que si $g, h \in G$ entonces

$$h \cdot [\tilde{\eta}_g] = [\tilde{\eta}_{hgh^{-1}}]. \tag{52}$$

En efecto, esto implica inmediatamente que f es un morfismo de G-módulos.

Explicitemos la acción de G sobre $\operatorname{Ext}^{2d(g)}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$.

En IV.1.6 construimos una resolución A_n^e-proyectiva $A_n^e \otimes \Lambda^\bullet V \twoheadrightarrow A_n$. La acción de G sobre A_n induce de manera evidente una acción sobre A_n^e, sobre V y sobre $\Lambda^\bullet V$, y en consecuencia G actúa sobre las componentes homogéneas del complejo $A_n^e \otimes \Lambda^\bullet V$. Más aún, como G actúa por automorfismos de A_n es inmediato, en vista de las fórmulas que dimos en IV.1.6 para las diferenciales de ese complejo y para su aumentación, que estos morfismos son de hecho morfismos de G-módulos. Por otro lado, G actúa sobre $A \rtimes G$ por 'conjugación', de manera que si $g, h \in G$ y $a \in A$, es

$$h \cdot a \otimes g = h(a) \otimes hgh^{-1}.$$

Entonces el complejo $\hom_{A_n^e}(A_n^e \otimes \Lambda^\bullet V, A_n \rtimes G)$, cuya cohomología es isomorfa a $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$, es un complejo de G-módulos con la acción diagonal. Este complejo de identifica, como ya hicimos antes, con $\hom(\Lambda^\bullet V, A \rtimes G)$ y la acción de G inducida sobre éste último es también la acción diagonal. En definitiva, la acción de G sobre $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$ puede ser descripta de la siguiente manera: si $r \geq 0$ y si $\alpha \in \operatorname{Ext}^r_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$ es una clase de cohomología representada por un r-cociclo $a : \Lambda^r V \to A \rtimes G$, y si $h \in G$, entonces $h \cdot \alpha \in \operatorname{Ext}^r_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$ es la clase de cohomología del r-cociclo $b : \Lambda^r V \to A_n \rtimes G$ tal que

$$b(v_1 \wedge \cdots v_r) = h\, b(h^{-1}(v_1) \wedge \cdots \wedge h^{-1}(v_r))h^{-1}$$

para cada $v_1, \ldots, v_r \in V$.

En particular, si $g, h \in G$, la clase $h \cdot [\tilde{\eta}_g]$ está representada por el cociclo $\theta : \Lambda^{2d(g)} V \to A \rtimes G$ tal que

$$\begin{aligned}\theta(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2d(g)}) &= h\, \tilde{\eta}_g(h^{-1}(v_1) \wedge \cdots \wedge h^{-1}(v_{2d(g)}))h^{-1} \\ &= \eta_g(h^{-1}(v_1) \wedge \cdots \wedge h^{-1}(v_{2d(g)}))hgh^{-1},\end{aligned}$$

y entonces para ver que (52) vale tenemos que mostrar que

$$\eta_{hgh^{-1}}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2d(g)}) = \eta_g(h^{-1}(v_1) \wedge \cdots \wedge h^{-1}(v_{2d(g)})).$$

Esto es es precisamente el contenido de 3.3. □

4. Estructura multiplicativa

4.1. En esta sección determinamos el producto

$$\smile : \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G) \otimes \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G) \to \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$$

del álgebra $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$. Recordemos que este producto es la composición del producto

$$\sqcup : \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G) \otimes \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G) \\ \to \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, (A_n \rtimes G) \otimes_{A_n} (A_n \rtimes G))$$

construido en I.5.11 con el morfismo

$$\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, (A_n \rtimes G) \otimes_{A_n} (A_n \rtimes G)) \to \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n \rtimes G)$$

inducido por la aplicación

$$(A_n \rtimes G) \otimes_{A_n} (A_n \rtimes G) \to A_n \rtimes G$$

dada por el producto de $A_n \rtimes G$.

4.2. Recordando la descomposición $A_n \rtimes G \cong \bigoplus_{g \in G} A_n g$ del A_n-bimódulo $A_n \rtimes G$, y usando la aditividad de los functores involucrados, vemos que tenemos que calcular la composición de

$$\sqcup : \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g) \otimes \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n h) \to \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g \otimes_{A_n} A_n h) \quad (53)$$

con el morfismo

$$\mu_{g,h} : \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g \otimes_{A_n} A_n h) \to \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n gh)$$

inducido por la multiplicación $A_n g \otimes_{A_n} A_n h \to A_n gh$.

4.3. El morfismo $\mu_{g,h}$ es fácil de controlar, usando la siguiente observación:

Lema. *Sea Λ un álgebra y sean g, $h \in \operatorname{Aut}(\Lambda)$ dos automorfismos de Λ. Entonces la aplicación $\varphi : \Lambda g \otimes_\Lambda \Lambda_h \to \Lambda_{gh}$ tal que $\varphi(ag \otimes bh) = ag(b)gh$ para cada a, $b \in \Lambda$, es un isomorfismo de Λ-bimódulos.*

Demostración. Que φ está bien definida y que es un morfismo de Λ-bimódulos sigue de un cálculo directo. Para ver que se trata de un isomorfismo, basta observar que la aplicación $\psi : agh \in \Lambda gh \mapsto ag \otimes 1h \in \Lambda g \otimes_\Lambda \Lambda_g$ es una inversa para φ. □

4.4. Para calcular el producto $\sqcup$ de (53) seguimos la construcción hecha en la sección 5 del capítulo I. El primer paso es la obtención de un morfismo diagonal:

Proposición. *Sea $\Delta : A_n \to A_n \otimes_{A_n} A_n$ el isomorfismo de A_n-bimódulos tal que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, y sea $\varepsilon : P = A_n^e \otimes \Lambda^\bullet V \twoheadrightarrow A_n$ la resolución A_n^e-proyectiva de A_n construida en IV.1.6. Entonces existe un morfismo $\Delta : P \to P \otimes_A P$ tal que conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & A_n \arrow[d, "\Delta"] \\ P \otimes_A P \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] & A_n \otimes_{A_n} A_n \end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada $d \geq 0$ sea S_d el grupo simétrico sobre $\{1, \ldots, d\}$. Además, si $p, q \geq 0$ son tales que $p + q = d$ sea $S_{p,q} \subset S_d$ el subconjunto de los (p, q)-shuffles: una permutación $\pi \in S_d$ es un elemento de $S_{p,q}$ sii $\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(p)$ y $\pi(p + 1) < \pi(2) < \cdots < \pi(p + q)$ y en ese caso escribimos $\pi = (i, j)$ con $i = (\pi(1), \ldots, \pi(p))$ y $j = (\pi(p+1), \ldots, \pi(p+q))$. Notemos, finalmente, $\varepsilon(i, j)$ a la signatura de la permutación (i, j).

Consideremos la aplicación $\Delta : P \to P \otimes_{A_n} P$ de espacios vectoriales graduados tal que si $d \geq 0$ la componente de grado d de Δ es

$$\begin{aligned} &\Delta^d((a \otimes b) \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) \\ &\quad = \sum_{\substack{p+q=d \\ (i,j)\in S_{p,q}}} \varepsilon(i, j)\Big((a \otimes 1) \otimes v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}\Big) \otimes \Big((1 \otimes b) \otimes v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_q}\Big). \end{aligned}$$

Es inmediato que se trata de un morfismo de A_n-bimódulos graduados. Más aún, un cálculo tedioso pero familiar prueba que se trata de un morfismo de complejos. Finalmente, un cálculo directo verifica la conmutatividad del diagrama que aparece en su enunciado, terminando la prueba de la proposición. □

4.5. Usando el morfismo $\Delta : P \to P \otimes_{A_n} P$ podemos describir el producto

$$\sqcup : \mathrm{Ext}_{A_n^e}(A_n, M) \otimes \mathrm{Ext}_{A_n^e}(A_n, N) \to \mathrm{Ext}_{A_n^e}(A_n, M \otimes_A N)$$

para cada elección de M y N en ${}_{A_n}\mathrm{Mod}_{A_n}$. En efecto, sean $p, q \geq 0$ y consideremos clases $\alpha \in \mathrm{Ext}^p_{A_n^e}(A_n, M)$ y $\beta \in \mathrm{Ext}^q_{A_n^e}(A_n, N)$. Si vemos a $\mathrm{Ext}^e_{A_n}(A_n, M)$ como la cohomología del complejo $\hom_{A_n^e}(P, M)$, que a su vez se identifica con el complejo $\hom(\Lambda^\bullet V, M)$, entonces α es la clase de un p-cociclo $a \in \hom(\Lambda^p V, M)$; de forma similar, la clase β está representada por un q-cociclo $b \in \hom(\Lambda^q V, N)$. En estas condiciones, la clase $\alpha \sqcup \beta$ está representada por el cociclo $\gamma \in \hom(\Lambda^{p+q} V, M \otimes_A N)$ tal que

$$\gamma(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}) = \sum_{(i,j)\in S_{p,q}} \varepsilon(i, j)\, a(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}) \otimes b(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_q}).$$

4.6. Para poder usar esta expresión en la situación especial de (53) necesitamos el siguiente lema elemental, pero que parece no haber sido observado antes:

Lema. *Si g, $h \in G$, entonces $V_{gh} \subseteq V_g + V_h$ y, en particular, se tiene que*

$$d(gh) \leq d(g) + d(h).$$

Demostración. Como G es finito, podemos suponer a V dotado de un producto interno G-invariante. Es inmediato, entonces, que para cada $k \in G$ los subespacios complementarios V_k y V^k son ortogonales.

Si ahora g, $h \in G$, es

$$(V_g + V_h)^{\perp} = V_g^{\perp} \cap V_h^{\perp} = V^g \cap V^h \subseteq V^{gh}$$

de manera que

$$V_{gh} = (V^{gh})^{\perp} \subseteq (V_g + V_h)^{\perp\perp} = V_g + V_h.$$

Esto prueba el lema. □

4.7. Proposición. *Sean g, $h \in G$ y consideremos el morfismo*

$$\smile : \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g) \otimes \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n h) \to \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g \otimes_{A_n} A_n h)$$

(i) *Si $d(gh) < d(g) + d(h)$, entonces este morfismo es nulo.*

(ii) *Si, en cambio, $d(gh) = d(g) + d(h)$, entonces se trata de un isomorfismo y*

$$[\tilde{\eta}_g] \smile [\tilde{\eta}_h] = [\tilde{\eta}_{gh}]. \tag{54}$$

Notemos que estos dos casos son exhaustivos, en vista de la desigualdad obtenida en el lema anterior.

Demostración. Recordemos que $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g) \cong \Lambda^{2d(g)} V_g^*[-2d(g)]$ es un espacio vectorial graduado de dimensión total 1, concentrado en grado $2d(g)$ y allí generado por la clase $[\tilde{\eta}_g]$. En consecuencia, $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g) \otimes \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n h)$ y $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g \otimes_{A_n} A_n h)$ son espacios vectoriales graduados de dimensión total 1 y concentrados en grado $2(d(g) + d(h))$ y $2d(gh)$, respectivamente.

Cuando $d(gh) < d(g) + d(h)$, no hay puede haber entonces aplicaciones no nulas de $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g) \otimes \operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n h)$ a $\operatorname{Ext}_{A_n^e}(A_n, A_n g \otimes_{A_n} A_n h)$, así que la afirmación *(i)* es inmediata.

Supongamos ahora, para ver *(ii)*, que

$$d(gh) = d(g) + d(h). \tag{55}$$

De acuerdo a lo hecho en 4.5, el producto $[\tilde{\eta}_g] \sqcup [\tilde{\eta}_h]$ está representado por el $2d(gh)$-cociclo $\gamma : \Lambda^{2(d(gh))} V, A_n g \otimes_{A_n} A_n h)$ tal que

$$\begin{aligned} &\gamma(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2d(gh)}) \\ &\qquad = \sum_{(i,j) \in S_{2d(g),2d(h)}} \varepsilon(i,j)\, \eta_g(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{2d(g)}}) \eta_h(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_{2d(h)}})\, g \otimes h \end{aligned}$$

para cada elección de $v_1, \dots, v_{2d(gh)} \in V$.

La igualdad (55), en vista del lema 4.6, implica que $V_{gh} = V_g \oplus V_h$. Podemos entonces elegir una base $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ de V de manera que $\{w_1, \dots, w_{2d(g)}\} \subset V_g$, $\{w_{2d(g)+1}, \dots, w_{2d(g)h}\} \subset V_h$ y $\{w_{2d(gh)+1}, \dots, w_{2n}\} \subset V^{gh}$. Es fácil ver ahora, procediendo como en la prueba de 2.11, que si $1 \le i_1 < \dots < i_{2d(gh)} \le 2n$ es

$$\gamma(w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_{2d(gh)}}) = \begin{cases} g \otimes h, & \text{si } i_{2d(gh)} = 2d(gh); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esto nos dice precisamente que

$$\gamma(v_1 \wedge \dots \wedge v_{2d(gh)}) = \eta_{gh}(v_1 \wedge \dots \wedge v_{2d(gh)})\, g \otimes h$$

para cada elección de $v_1, \dots, v_{2d(gh)} \in V$. y, en consecuencia, el producto $[\tilde{\eta}_g] \smile [\tilde{\eta}_h]$ está representado por el cociclo $\tilde{\eta}_{gh} \in \hom(\Lambda^{2d(gh)} V, A_n gh)$: esto nos dice que vale (54) y prueba *(ii)*. $\square$

4.8. Consideremos la filtración creciente F sobre el álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ tal que

$$F_k \mathbb{C}G = \bigoplus_{2d(g) \le k} \mathbb{C}g$$

para cada $k \ge 0$. Es una consecuencia inmediata de la desigualdad obtenida en el lema 4.6 que F es una filtración de álgebras y entonces podemos considerar el álgebra graduada $\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G$. Para cada $g \in G$ escribimos $\bar{g}$ al símbolo principal de g en $\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G$.

4.9. De la definición de la filtración es claro que $F_{2k}\mathbb{C}G = F_{2k+1}\mathbb{C}G$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, así que $\operatorname{gr}_{2k+1} \mathbb{C}G = 0$ si $k \in \mathbb{N}_0$.

4.10. La acción de G sobre $\mathbb{C}G$ inducida por la conjugación es compatible con la filtración F, ya que $d : G \to \mathbb{N}_0$ es una función central. En consecuencia, el álgebra $\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G$ hereda una acción de G por automorfismos, y evidentemente es

$$h \cdot \bar{g} = \overline{hgh^{-1}} \tag{56}$$

para cada elección de $g, h \in G$.

4.11. Teorema. *Hay un isomorfismo de álgebras graduadas*

$$f : H^\bullet(A_n, A_n \rtimes G) \cong \operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G$$

tal que $f([\tilde{\eta}_g]) = \bar{g}$, y este isomorfismo es compatible con la acción de G sobre $H^\bullet(A_n, A_n \rtimes G)$ y $\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G$.

Demostración. Sabemos que $\{[\tilde{\eta}_g] : g \in G\}$ es una base para

$$H^\bullet(A_n, A_n \rtimes G) \cong \operatorname{Ext}^\bullet_{A_n^e}(A_n, A \rtimes G),$$

así que hay exactamente una aplicación lineal como en el enunciado y es un isomorfismo, ya que $\{\bar{g} : g \in G\}$ es, por supuesto, una base de $\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G$. Que esta aplicación es un morfismo de álgebras es consecuencia directa de la proposición 4.7. Finalmente, para ver que es compatible con la acción de G basta comparar la fórmula (52) de la página 90 y la (56) de 4.10 que dan, respectivamente, la acción de G sobre el dominio y el codominio de f. □

5. Productos cruzados y subálgebras de invariantes

5.1. Como consecuencia del teorema de la sección anterior y de los resultados de la sección 9 del capítulo I, podemos obtener el resultado central de esta tesis:

Teorema. *Sea $n \geq 1$, sea A_n la n-ésima álgebra de Weyl y sea G un grupo finito que actúa sobre A_n por automorfismos lineales. Sea $\mathscr{Z}(G)$ el centro del álgebra de grupo $\mathbb{C}G$. Como se trata de una subálgebra de $\mathbb{C}G$, podemos restringir a filtración constuida en 4.8 a $\mathscr{Z}(G)$ y considerar el álgebra graduada asociada $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G)$. Hay entonces un isomorfismo de álgebras graduadas*

$$HH^\bullet(A_n \rtimes G) \cong \operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G)$$

Demostración. De acuerdo a los teoremas I.9.6 y I.9.7, sabemos que hay una sucesión espectral convergente de álgebras que tiene

$$E_2^{p,q} \cong H^p(G, H^q(A, A \rtimes G)) \Rightarrow HH^\bullet(A \rtimes G).$$

Como G es finito y nuestro cuerpo de base $\mathbb{C}$ es de característica cero, el álgebra $\mathbb{C}G$ es semisimple y $H^+(G, -) = 0$. Esto nos dice que la etapa E_2 de la sucesión espectral está soportada en uno de los ejes, así que la sucesión espectral degenera allí y nos da un isomorfismo de álgebras graduadas

$$HH^\bullet(A \rtimes G) \cong H^0(G, H^\bullet(A, A \rtimes G)) = H^\bullet(A, A \rtimes G)^G.$$

Además, según 4.11, hay un isomorfismo de álgebras $H^\bullet(A, A \rtimes G) \cong \operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G$ compatible con la acción de G, así que en definitiva tenemos un isomorfismo de álgebras graduadas

$$HH^\bullet(A \rtimes G) \cong (\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G)^G$$

Para probar el teorema, entonces, tenemos que mostrar que

$$(\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G)^G \cong \operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G). \tag{57}$$

Ahora bien, es inmediato verificar que $\mathscr{Z}(G) = (\mathbb{C}G)^G$ y que la filtración de $\mathscr{Z}(G)$ coincide con la filtración sobre $(\mathbb{C}G)^G$ inducida por restricción de la de $\mathbb{C}G$, así que $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G) \cong \operatorname{gr}_\bullet(\mathbb{C}G)^G$ y, por otro lado, hay un isomorfismo evidente $\operatorname{gr}_\bullet(\mathbb{C}G)^G \cong (\operatorname{gr}_\bullet \mathbb{C}G)^G$. La composición de estos dos isomorfismos prueba (57) y, entonces, el teorema. □

5.2. Usando ahora los resultados de la sección 7 del capítulo I sobre la invariancia por equivalencias Morita, obtenemos un resultado similar para las subálgebras de invariantes de A_n:

5.3. Teorema. *En la situación del teorema anterior, supongamos que la acción de G sobre A_n es fiel y sea $A_n^G = \{a \in A_n : ga = a$ para cada $g \in G\}$ la subálgebra de invariantes de A_n para G. Entonces A_n^G y $A_n \rtimes G$ son equivalentes en el sentido de Morita y, en particular, hay un isomorfismo de álgebras*

$$HH^\bullet(A_n^G) \cong \operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G).$$

Demostración. Como las únicas unidades de A_n son los escalares, la acción de G sobre A_n es exterior como en I.8.9. Como la característica de $\mathbb{C}$ es nula, $|G|$ es inversible en $\mathbb{C}$, y el teorema I.8.11 nos dice que A_n^G y $A_n \rtimes G$ son equivalentes en el sentido de Morita. De acuerdo a I.7.4, entonces, las álgebras de cohomología $HH^\bullet(A_n^G)$ y $HH^\bullet(A_n \rtimes G)$ son isomorfas y el teorema sigue de 5.1. □

5.4. Razonando como en 4.9 podemos ver que el algebra $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G)$ está concentrada en grados pares, así que lo mismo vale para $HH^\bullet(A_n \rtimes G)$ y $HH^\bullet(A_n^G)$.

6. Ejemplos

6.1. Sea G un grupo finito que actua linealmente sobre el álgebra de Weyl A_n y sea, como siempre, $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}p_i \oplus \mathbb{C}q_i \subset A_n$ dotado de su forma simpléctica ω. Sea $\rho : G \to \operatorname{Sp}(V, \omega)$ el morfismo de grupos que determina la acción de G sobre A_n.

6.2. Sea $d : g \in G \mapsto \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} V_g \in \mathbb{N}_0$ la función de 2.6, y sea $\mu_1 : G \to \mathbb{N}_0$ tal que $\mu_1(g) = n - 2d(g)$ para todo $g \in G$. Como $V_g \oplus V^g = V$, es $\mu_1(g) = \dim_{\mathbb{C}} V^g$ y entonces $\mu_1(g)$ es la multiplicidad de 1 como autovalor de $\rho(g)$.

6.3. Notemos $\langle G \rangle$ al conjunto de las clases de conjugación de G y, para cada $g \in G$, sea $\langle g \rangle \in \langle G \rangle$ la clase de conjugación de g. Sabemos que d es una función central, así que μ_1 también lo es. Esto nos permite definir, de manera evidente, funciones $d, \mu_1 : \langle G \rangle \to \mathbb{N}_0$, para las que no introducimos nuevos nombres.

6.4. Si $c \in \langle G \rangle$, sea $s(c) = \sum_{g \in c} g \in \mathbb{C}G$. Es inmediato ver que $s(c)$ es central en $\mathbb{C}G$, que el conjunto $\mathscr{B} = \{s(c) : c \in \langle G \rangle\}$ es una base de $\mathscr{Z}(G)$ y que, más generalmente, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el conjunto $\mathscr{B}_k = \{s(c) : c \in \langle G \rangle, d(c) \leq k\}$ es una base de $F_k \mathscr{Z}(G)$.

6.5. Lema. *Si F es la filtración de $\mathscr{Z}(G)$ como en 5.1, entonces*

$$s(c) \in F_{2d(c)} \mathscr{Z}(G) \backslash F_{2d(c)-1} \mathscr{Z}(G),$$

así que el símbolo principal $\hat{c}$ de $s(c)$ en $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(C)$ tiene grado $2d(c)$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $\operatorname{gr}_k \mathscr{Z}(G)$ tiene a $\{\hat{c} : c \in \langle G \rangle, 2d(c) = k\}$ como base y, en particular,

$$\dim_{\mathbb{C}} HH^k(A_n \rtimes G) = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{gr}_k \mathscr{Z}(G) = |\{c \in \langle G \rangle : 2d(c) = k\}|$$

Demostración. Esto es inmediato de las definiciones. □

La acción tautológica de S_n

6.6. Sea S_n el grupo simétrico sobre $\{1,\dots,n\}$ y consideremos la acción de S_n sobre A_n tal que

$$g \cdot p_i = p_{g(i)}$$

y

$$g \cdot q_i = q_{g(i)}$$

para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ y cada $g \in S_n$. Para esta acción, es fácil ver que si una permutación $g \in S_n$ tiene k ciclos, entonces $\dim_{\mathbb{C}} V^g = 2k$ y $d(g) = n - k$. Teniendo en cuenta la forma en que las clases de conjugación de S_n se corresponden con las particiones de n, es claro que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, la dimensión $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{gr}_{2k} \mathscr{Z}(G)$ es la cantidad de particiones de n con exactamente k partes.

Para cada partición λ, notemos c_λ a la clase de conjugación correspondiente y, para simplificar, escribamos $[\lambda]$ en vez de $\hat{s}_\lambda$.

6.7. Consideremos el caso particular en que $n = 3$. Las particiones de 3 son (1^3), $(2,1)$, y (3), así que $\{[1^3],[2,1],[3]\}$ es una base de $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G)$. Contado partes vemos que

$$[1^3] \in \operatorname{gr}_0 \mathscr{Z}(G), \qquad [2,1] \in \operatorname{gr}_2 \mathscr{Z}(G), \qquad [3] \in \operatorname{gr}_4 \mathscr{Z}(G).$$

Es claro que $[1^3]$ es la unidad de $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G)$. Por otro lado $[3] \smile [3] = 0$ porque $\operatorname{gr}_8 \mathscr{Z}(G) = 0$. El único producto de la tabla de multiplicar de $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(G)$ correspondiente a esta base que no es trivial es $[2] \smile [2]$.

Calculémoslo. Tenemos los elementos

$$\begin{aligned} s(1^3) &= 1_{S_3}, \\ s(2,1) &= (1\,2) + (1\,3) + (2\,3), \\ s(3) &= (1\,2\,3) + (1\,3\,2) \end{aligned}$$

en $\mathscr{Z}(S_3)$ y calculando vemos que

$$s(2) \cdot s(2) = 3\,s(1^3) + 3\,s(3).$$

Esta expresión nos dice que hay tres formas de escribir al elemento neutro como producto de dos transposiciones, y que hay tres formas de escribir a cada 3-ciclo como producto de dos transposiciones. Mirando esta ecuación en $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(S_3)$ vemos, entonces, que

$$[2] \smile [2] = 3\,[3].$$

Vemos así que la clase $[2]$ genera a $\operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(S_3)$ y, de hecho, vemos que hay un isomorfismo

$$HH^\bullet(A_3 \rtimes S_3) \cong \operatorname{gr}_\bullet \mathscr{Z}(S_3) \cong \mathbb{C}[\xi]/(\xi^3)$$

con $\mathbb{C}[\xi]/(\xi^3)$ el álgebra graduada con ξ en grado 2.

6.8. Este ejemplo muestra que el producto en la cohomología de $HH^\bullet(A_n \rtimes G)$ puede no ser trivial.

Separación

6.9. Notemos $\mathbb{C}[G]$ al álgebra de funciones centrales sobre G con valores en $\mathbb{C}$.

6.10. El álgebra $\mathbb{C}[G]$ es un λ-anillo de manera canónica, con las operaciones de Adams $\psi^k : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ dadas por

$$\psi^k(f)(g) = f(g^k)$$

para cada $k \geq 0$, $f \in \mathbb{C}[G]$ y $g \in G$; ver las notas de Donals Knutson[Knu73].

6.11. Sea t una variable y sea $\mathbb{C}[G][\![t]\!]$ el anillo de series formales de potencias en t con coeficientes en $\mathbb{C}[G]$; consideramos a sus elementos como funciones centrales sobre G con valores en $\mathbb{C}[\![t]\!]$. Sea $p \in \mathbb{C}[G][\![t]\!]$ tal que $p(g)$ es el polinomo característico de $\rho(g)$ para cada $g \in G$ y sea $q \in \mathbb{C}[G][\![t]\!]$ tal que $q(t) = t^{2n}p(t^{-1})$.

6.12. Sea $\chi \in \mathbb{C}[G]$ el caracter de ρ, de manera que $\chi(g) = \operatorname{tr} \rho(g)$ para cada $g \in G$. Un calculo directo usando el hecho de que cada elemento de g actua de manera diagonalizable sobre V prueba que

$$\frac{d}{dt} \ln q(t) = -\sum_{k \geq 0} \psi^{k+1}(\chi) t^k$$

Como p y q tienen al 1 como cero de la misma multiplicidad, y evaluando el miembro izquierdo de esta igualdad, vemos que la función $d : G \to \mathbb{N}_0$ está dada por

$$d = n + \operatorname{res}_1 \sum_{k \geq 0} \psi^{k+1}(\chi) t^k, \tag{58}$$

con $\operatorname{res}_1 f$ el residuo en 1 de la función f meromorfa en 1.

La expresión (58) obtenida para d muestra que esta función depende solamente de las operaciones de Adams de la estructura de λ-anillo del álgebra $\mathbb{C}[G]$ y del carácter χ.

6.13. Como el tipo de isomorfismo del álgebra $\mathscr{Z}(G)$ depende solamente de la tabla de carácteres, y la estructura de λ-anillo de $\mathbb{C}[G]$ depende solamente de la tabla de carácteres de G y de la familia de aplicaciones potencia $\langle g \rangle \in \langle G \rangle \mapsto \langle g^k \rangle \in \langle G \rangle$, es fácil ver que el tipo de isomorfismo del algebra de cohomología $HH^\bullet(A_n \rtimes G)$ depende solamente de esa información.

En particular, como existen pares de grupos no isomorfos con tablas de carácteres iguales y aplicaciones de potencias conjugadas—ejemplos explícitos de esto construidos por Dade en [Dad64]—vemos que no podemos reconstruir el grupo G a partir del álgebra $HH^\bullet(A_n^G)$. Para esos ejemplos, se necesitan invariantes más finos para separar las álgebras de invariantes correspondientes.

Bibliografía

[Ale86] J. Alev, *Action de groupes sur $A_1(\mathbf{C})$*, Ring theory (Antwerp, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1197, Springer, Berlin, 1986, pp. 1–9. MR859378

[AL99] Jacques Alev and Thierry Lambre, *Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl*, K-Theory **18** (1999), no. 4, 401–411. MR1738900

[AL98] J. Alev and T. Lambre, *Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein*, Algebra and operator theory (Tashkent, 1997), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 25–38. MR1643407

[AFLS00] Jacques Alev, Marco A. Farinati, Thierry Lambre, and Andrea L. Solotar, *Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini*, J. Algebra **232** (2000), no. 2, 564–577. MR1792746

[Bav05] Vladimir V. Bavula, *Generators and defining relations for the ring of differential operators on a smooth affine algebraic variety* (2005), available at http://arxiv.org/abs/math/0504475.

[Bav08] Vladimir V. Bavula, *Generators and defining relations for ring of differential operators on smooth affine algebraic variety in prime characteristic* (2008), available at http://arxiv.org/abs/0808.3970.

[BKK05] Alexei Belov-Kanel and Maxim Kontsevich, *Automorphisms of the Weyl algebra*, Lett. Math. Phys. **74** (2005), no. 2, 181–199. MR2191954

[BKK07] Alexei Belov-Kanel and Maxim Kontsevich, *The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture*, Mosc. Math. J. 7 (2007), no. 2, 209–218, 349. MR2337879

[vdB98] Michel van den Bergh, *A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 5, 1345–1348. MR1443171

[vdB02] Michel van den Bergh, *Erratum to: "A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings" [Proc. Amer. Math. Soc.* **126** *(1998), no. 5, 1345–1348]*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 9, 2809–2810. MR1900889

[Ber78] George M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. in Math. **29** (1978), no. 2, 178–218. MR506890

[CE99] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. MR1731415

[Cay80a] Arthur Cayley, *On the finite groups of linear transformations of a variable*, Math. Ann. **16** (1880), no. 2, 260–263. MR1510025

[Cay80b] Arthur Cayley, *Correction to the paper "On the finite groups of linear transformations of a variable"*, Math. Ann. **16** (1880), no. 3, 439–440. MR1510034

[CFM90] Miriam Cohen, Davida Fischman, and Susan Montgomery, *Hopf Galois extensions, smash products, and Morita equivalence*, J. Algebra **133** (1990), no. 2, 351–372. MR1067411

[Dad64] E. C. Dade, *Answer to a question of R. Brauer*, J. Algebra **1** (1964), 1–4. MR0170957

[Dix68] Jacques Dixmier, *Sur les algèbres de Weyl*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 209–242. MR0242897

[Dix73] Jacques Dixmier, *Quotients simples de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_2$*, J. Algebra **24** (1973), 551–564 (French). MR0310031

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry. MR1322960

[Far01] Marco A. Farinati, *Extensiones Galois de anillos* (2001). Notas de un curso dictado en el VIII Encuentro Rioplatense de Algebra y Geometría Algebraica, Buenos Aires, 29 y 30 de noviembre 2001.

[RG67] Rudolf Rentschler and Pierre Gabriel, *Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **265** (1967), A712–A715 (French). MR0224644 (37 #243)

[Ger63] Murray Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 267–288. MR0161898

[Goo85] Thomas G. Goodwillie, *Cyclic homology, derivations, and the free loopspace*, Topology **24** (1985), no. 2, 187–215. MR793184

[Gor77] Paul Gordan, *Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen*, Math. Ann. **12** (1877), no. 1, 23–46. MR1509926

[Gro57] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221. MR0102537

[Gro68] Alexander Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968. Augmenté d'un exposé par Michèle Raynaud; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1962; Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 2. MR0476737

[Gro] Alexander Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas.* I, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **20** (1964), 259, MR0173675; II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **24** (1965), 231, MR0199181; III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **28** (1966), 255, MR0217086; IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967), 361, MR0238860.

[HS97] Peter J. Hilton and Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1438546

[Hoc45] Gerhard Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra*, Ann. of Math. (2) **46** (1945), 58–67. MR0011076

[Jac27] Cark Gustav Jacob Jacobi, *Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen* $2n$ *Variabeln durch ein System von* n *Gleichungen zu integriren*, J. Reine Angew. Math. **2** (1827), 347-357.

[Jun42] Heinrich W. E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174. MR0008915

[Kle56] Felix Klein, *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Second and revised edition, Dover Publications Inc., New York, N.Y., 1956. Translated into English by George Gavin Morrice. MR0080930

[Knu73] Donald Knutson, *λ-rings and the representation theory of the symmetric group*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 308, Springer-Verlag, Berlin, 1973. MR0364425

[Kün23] Hermann Künneth, *Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit*, Math. Ann. **90** (1923), no. 1-2, 65–85. MR1512160

[Kün24] Hermann Künneth, *Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **91** (1924), no. 1-2, 125–134. MR1512184

[Kün08] Matthias Künzer, *Comparison of spectral sequences involving bifunctors*, Doc. Math. **13** (2008), 677–737. MR2466187

[ML84] Leonid Makar-Limanov, *On automorphisms of Weyl algebra*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), no. 3, 359–363. MR794737

[Mat80] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, 2nd ed., Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980. MR575344

[McC01] John McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR1793722

[MR01] J. C. McConnell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, Revised edition, Graduate Studies in Mathematics, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. With the cooperation of L. W. Small. MR1811901

[Mon80] Susan Montgomery, *Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 818, Springer, Berlin, 1980. MR590245

[Pie82] Richard S. Pierce, *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 88, Springer-Verlag, New York, 1982. Studies in the History of Modern Science, 9. MR674652

[Sch73] Hermann Armanus Schwarz, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres viertes Elements darstellt*, J. Reine Angew. Math. 75 (1873), 292–335.

[Spr77] T. A. Springer, *Invariant theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585, Springer-Verlag, Berlin, 1977. MR0447428

[Sri61] Ramaiyengar Sridharan, *Filtered algebras and representations of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 530–550. MR0130900

[SA02] Mariano Suárez-Alvarez, *Algebra structure on the Hochschild cohomology of the ring of invariants of a Weyl algebra under a finite group*, J. Algebra **248** (2002), no. 1, 291–306. MR1879019

[Wod87] Mariusz Wodzicki, *Cyclic homology of differential operators*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 641–647. MR899408