UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Teoría de representaciones y homología de álgebras de Yang-Mills

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Estanislao Benito Herscovich Ramoneda

Director de tesis: Dra. Andrea Leonor Solotar

Buenos Aires, 2008

Teoría de representaciones y homología de álgebras de Yang-Mills

Resumen

Las álgebras de Yang-Mills fueron introducidas por Alain Connes y Michel Dubois-Violette en [CD1], en relación al estudio de ciertos problemas planteados en la teoría de cuerdas y la teoría de campos no conmutativos (cf. [Ne1], donde el autor insiste en la necesidad de conocer la teoría de representaciones para estas álgebras).

El problema de describir la categoría completa de representaciones de las álgebras de Yang-Mills es demasiado complejo. Por este motivo, nos concentramos en tratar de obtener familias de representaciones lo suficientemente finas como para distinguir elementos de este álgebra: empleando el método de órbitas de Kirillov concluimos que *toda* álgebra de Weyl es cociente de toda álgebra de Yang-Mills con más de 2 generadores (cf. Corolario 3.5.3). Esto permite hallar varias familias de representaciones, ya que las representaciones de las álgebras de Weyl generalizadas fueron estudiadas previamente por Bavula y Bekkert en [BB].

Por otro lado, se estudiaron también las propiedades homológicas de las álgebras de Yang-Mills, en particular, su homología de Hochschild y cíclica, obteniendo de este modo también su cohomología ya que existe una dualidad entre ambas. El resultado fundamental para estudiar las homologías mencionadas es que el álgebra de Lie de Yang-Mills posee un ideal que en sí mismo es un álgebra de Lie libre. Esta idea había sido ya utilizada por Movshev (cf. [Mov]) en su trabajo inédito sobre las álgebras de Yang-Mills, tendiente a calcular la homología. Una parte de esta tesis está dedicada a hacer un uso correcto de esa idea.

Palabras clave: Homología, Yang-Mills, Koszul, representaciones, órbitas.

Representation theory and homology of Yang-Mills algebras

Abstract

Yang-Mills algebras were first defined by Alain Connes and Michel Dubois-Violette [CD1], in relation with certain problems arising in string theory and noncommutative gauge theory (cf. [Ne1], where the author stresses the need for the representation theory of this kind of algebras).

The problem of finding every representation of the Yang-Mills algebras is too difficult. Hence, we will focus ourselves in some particular families of representations fine enough to distinguish elements of the Yang-Mills algebra. By using Kirillov's orbit method, we can prove that *every* Weyl algebra is a quotient of every Yang-Mills algebra with more than 2 generators (cf. Corollary 3.5.3). This allows us to find various families of representations of the Yang-Mills algebras, since the representation theory for the generalized Weyl algebras has been previously studied by Bavula and Bekkert [BB].

On the other hand, we have also studied the homological properties of the Yang-Mills algebras, with special attention to Hochschild and cyclic homology. We also obtain the cohomology taking into account the Poincaré duality for these algebras. In order to obtain the previous results, we use the fundamental fact that the Lie Yang-Mills algebras have as a direct summand a Lie ideal, which is in itself a free Lie algebra. This idea has been exploited by Michael Movshev in his unpublished paper concerning the homology of the Yang-Mills algebras (cf. [Mov]). A part of this thesis is concerned with the correct use of these ideas.

Keywords: Homology, Yang-Mills, Koszul, representation theory, orbit method.

Passer de la mécanique de Newton à celle d'Einstein doit être un peu, pour le mathémathicien, comme de passer de bon vieux dialecte provençal à l'argot parisien dernier cri. Par contre, passer à la mécanique quantique, j'imagine, c'est du français au chinois.

Alexandre Grothendieck[1].

I want to say a word about the communication between mathematicians and physicists.

It has been very bad in the past, and some of the blame is doubtless to be laid on the physicist's shoulders. We tend to be very vague, and we don't know what the problem is until we have already seen how to solve it. We drive mathematicians crazy when we try to explain what our problems are. When we write articles we don't do a good enough job of specifying how certain we are about our statements; we do not distinguish guesses from theorems.

(...)

I think this is getting much better. I find it is wonderful how mathematicians these days are willing to explain their field to interested physicists. This situation is improving, partly because as Iz Singer mentioned, we realize now that in certain areas we have much more in common than we had thought, but I think a lot more has to be done. There is still too much mathematics written which is not only not understandable to experimental or theoretical physicists, but is not even understandable to mathematicians who are not the graduate students of the author.

Steven Weinberg [2].

[1]Récoltes et Semailles, (1986).

[2]Mathematics: The unifying thread in science: Notices Amer. Math. Soc. **33**, (1986), pp. 716–733.

Agradecimientos

A lo largo de mis estudios de doctorado fui conociendo muchas personas de quienes aprendí mucho y deseo agradecerles. En primer lugar, a mi directora, Andrea Solotar, deseo agradecerle muy especialmente, por todo el tiempo y esfuerzo que significó dirigir mi tesis. Además deseo agradercerle por sobre todas las cosas porque gracias a ella aprendí que sólo la dedicación seria y el trabajo arduo nos permiten vislumbrar las bellezas que guarda el complejo mundo de las matemáticas.

En segundo lugar, deseo agradecer a tantas personas de quienes día a día aprendo nuevas cosas. En especial, a Mariano Suárez Alvárez por muchas conversaciones interesantes y enriquecedoras y su ayuda durante esta tesis. También deseo expresar mi gratitud a Michel Dubois-Violette por muchas conversaciones interesantes, y también a él y a Patricia Dubois-Violette por su hospitalidad.

Finalmente, no deseo olvidar a mis seres queridos que me acompañan hace ya bastante tiempo. En especial, a mi familia, mi papá, mi mamá, Nico, Agus y Fernando. También deseo agradecer a mis amigos y a muchas personas especiales en mi vida: Andrea, Martín, Rafa, Javi, Ceci, Edu, Bruno, Santi, Marcos, Nacho, Lea, Sergio, etc.

Índice

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de la teoría de representaciones de las álgebras de Yang-Mills.

Las álgebras de Yang-Mills son álgebras de Koszul cúbicas, de dimensión global 3 y son álgebras envolventes de álgebras de Lie. Su estudio recibió un fuerte impulso recientemente a partir de los trabajos de Alain Connes y Michel Dubois-Violette. Estos autores se interesan en esta familia de álgebras a raíz de sus aplicaciones físicas. Es de esperar entonces que el conocimiento de las representaciones de las álgebras de Yang-Mills resulte importante para estas aplicaciones.

Si bien sería por el momento muy difícil describir todas las representaciones, ya que se trata, salvo en el caso del álgebra de Yang-Mills con 2 generadores, de álgebras no noetherianas, nos concentramos en tratar de obtener familias de representaciones lo suficientemente finas como para distinguir elementos del álgebra de Yang-Mills. Para ello, se utilizó fuertemente el método de órbitas de Kirillov, y también una versión más precisa del teorema de Dixmier que muestra que toda álgebra envolvente de este tipo tiene como cociente *toda* álgebra de Weyl. Usamos posteriormente que las representaciones de las álgebras de Weyl generalizadas habían sido estudiadas previamente por Viktor Bavula y Viktor Bekkert en [BB]. Se estudió también la categoría de representaciones de dimensión finita de las álgebras de Yang-Mills, mostrando que toda representación de este tipo se obtiene como módulo sobre el álgebra envolvente de un cociente del álgebra de Lie original.

Se estudiaron también las propiedades homológicas de las álgebras de Yang-Mills, en particular su homología de Hochschild, obteniendo de este modo también su cohomología ya que existe una dualidad entre ambas.

El elemento más importante para obtener los resultados antes mencionados es mostrar que el álgebra de Lie de Yang-Mills tiene como sumando directo a un ideal que en sí mismo es un álgebra de Lie libre. Esta idea había sido ya utilizada por Movshev (cf. [Mov]) en su trabajo inédito sobre las álgebras de Yang-Mills, tendiente a calcular la homología. Una parte de esta tesis está dedicada a hacer un uso correcto de esa idea.

El contenido de la tesis es el siguiente.

En el Capítulo 2 se resumen elementos de la teoría de A_∞-álgebras y coálgebras, teoría que generaliza a las álgebras y coálgebras diferenciales graduadas, respectivamente. Se resumen luego las aplicaciones de las A_∞-álgebras y coálgebras a las construcciones *bar* y *cobar* y a las nociones de graduación y filtración.

En el Capítulo 3 se repasan las definiciones básicas de la teoría de representaciones de álgebras de Lie, y los resultados sobre su homología y cohomología, en particular un criterio cohomológico (Proposición 2.3.4) de demostrar que un álgebra de Lie es libre. Se repasa también la noción de polarización de funcionales lineales. Finalmente se recuerdan propiedades de los ideales maximales del álgebra envolvente de un álgebra de Lie nilpotente.

En el Capítulo 4, que es uno de los capítulos principales de esta tesis, luego de recordar la definición de álgebra de Yang-Mills y de definir las distintas graduaciones que se utilizarán, se describen sus representaciones de dimensión finita, mostrando que la categoría que éstas forman es el colímite filtrante de las categorías de módulos de tipo finito sobre los cocientes del álgebra de Lie de Yang-Mills por los ideales de su serie central descendente, cocientes cuyas álgebras envolventes son noetherianas. Más aún, se prueba que toda representación nilpotente o resoluble irreducible no trivial de dimensión finita es de dimensión 1 y que el conjunto de clases de isomorfismo de estas representaciones está parametrizado por $k^n \setminus \{0\}$, donde n es la cantidad de generadores del álgebra de Yang-Mills con la cual estamos trabajando (Teorema 3.1.12).

Luego se estudian algunas propiedades homológicas básicas, calculándose explícitamente la homología del álgebra de Yang-Mills con 2 generadores, la cual, como ya fue dicho, se distingue de las demás por ser la única noetheriana.

Se comienza a continuación a estudiar el álgebra $\mathrm{TYM}(n)$, álgebra envolvente del sumando directo del álgebra de Yang-Mills con n generadores que es un álgebra de Lie libre.

Otra parte importante de este capítulo es la subsección *"Algunos cálculos"*, donde se obtienen explícitamente las dimensiones de las componentes homogéneas del álgebra de Lie de Yang-Mills y de su componente libre, aplicando el método de órbitas para hallar los pesos posibles de los ideales maximales en grados bajos.

Se prueba luego que toda álgebra de Weyl es cociente del álgebra de Yang-Mills con 3 generadores, la cual a su vez es cociente del álgebra de Yang-Mills con n generadores, para todo $n \geq 3$. Además, se demuestra que la familia de representaciones del álgebra de Yang-Mills inducida de esta forma separa puntos. Es importante notar (Observación 3.5.6) que pese a ésto, esta subcategoría de representaciones no es esquelética, ya que toda representación de un álgebra de Weyl posee dimensión de Gelfand-Kirillov finita, pero el álgebra de Yang-Mills tiene dimensión de Gelfand-Kirillov infinita.

El Capítulo 5 es otro de los capítulos más importantes de la tesis, ya que en él se calcula la homología de Hochschild del álgebra de Yang-Mills con n generadores cuando $n \geq 3$. Para ello es necesario describir explícitamente el álgebra de Lie libre antes mencionada, tanto de manera algebraica como geométrica y homológica. Se dan las demostraciones completas de todos los resultados necesarios, inclusive de varios que fueron enunciados por Movshev.

Se trata posiblemente del capítulo mas técnico de la tesis, ya que los objetos con los que tratamos son de una gran complejidad, por lo cual es necesario abordar la resolución del problema en todos sus detalles.

En el Capítulo 6 se repasa el estudio de las representaciones de álgebras de Weyl generalizadas hecho por Bavula y Bekkert, en relación con los resultados obtenidos en el Capítulo 4.

En el Capítulo 7 se tratan ejemplos con aplicaciones en geometría no conmutativa y en teoría de campos de gauge, con especial énfasis en el ejemplo de los instantones en el espacio plano no conmutativo de 4 dimensiones.

Notación

Los conjuntos de los números naturales, los enteros positivos con el cero, los enteros, los racionales, los reales y los complejos serán notados con los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. Además, k indicará un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, a menos que se diga lo contrario. Si $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es una base del k-espacio vectorial V, $\{v_1^*, \dots, v_n^*\} \subseteq V^*$ indicará la base dual, i.e., $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

Dada una k-álgebra asociativa o de Lie A y un G subgrupo de $\mathbb{Z}$, denotaremos ${}_A^G\mathrm{Mod}$, Mod_A^G, ${}_A^G\mathrm{mod}$ y mod_A^G las categorías de A-módulos G-graduados a izquierda y a derecha y de A-módulos de dimensión finita G-graduados a izquierda y a derecha, respectivamente. También notaremos ${}_k^G\mathrm{Alg}$ y ${}_k^G\mathrm{LieAlg}$ las categorías de álgebras G-graduadas y álgebras de Lie G-graduadas, respectivamente. Si $G = \{0\}$, obtenemos en cada caso la definición no graduada.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre k, identificaremos el álgebra simétrica $S(V)$ de V con el álgebra de polinomios en n indeterminadas $k[t_1, \dots, t_n]$. Este álgebra resulta entonces graduada, y notaremos la graduación, que denominaremos **usual**

$$S(V) = S^\bullet(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} S^n(V).$$

La clase de un tensor $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ será notado $v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n$ en S^nV y $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ en $\Lambda^n V$.

Si V es un módulo (graduado) sobre un álgebra de Hopf (graduada) H, entonces, el morfismo

$$\begin{aligned} V^{\otimes 2} &\to \Lambda^2 V \oplus S^2 V \\ v \otimes w &\mapsto (v \wedge w, v \otimes_s w) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de H-módulos graduados (homogéneo de grado 0). Más aún, las aplicaciones

$$\begin{aligned} \Lambda^2 V &\to V^{\otimes 2} \\ v \wedge w &\mapsto \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S^2 V &\to V^{\otimes 2} \\ v \otimes_s w &\mapsto \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v) \end{aligned}$$

son H-lineales (homogéneas de grado 0) e inyectivas, y dan la inversa del morfismo $V^{\otimes 2} \to \Lambda^2 V \oplus S^2 V$.

Capítulo 1

A_∞-álgebras y A_∞-coálgebras

El objetivo de este capítulo así como del siguiente es recopilar resultados que serán necesarios para la realización del trabajo sobre álgebras de Yang-Mills. En este capítulo presentamos la teoría y resultados generales sobre las álgebras y coálgebras diferenciales graduadas dentro del contexto natural de las A_∞-álgebras y A_∞-coálgebras. La mayoría de estos resultados son conocidos y sencillos, y es por este motivo que son sólo mencionados. Para mayores referencias, recomendamos [Lef].

1.1 Generalidades

En esta sección se recuerdan las definiciones de álgebras y coálgebras en categorías monoidales, así como las versiones graduadas y diferenciales graduadas de las mismas.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría k-lineal de Grothendieck (i.e., $\mathcal{C}$ es abeliana y satisface AB5) y semisimple. Supondremos además que $\mathcal{C}$ está provista de una estructura de categoría monoidal k-lineal, es decir, existe un funtor k-bilineal

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C},$$

un objeto $e \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, e isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z} &: (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z), \\ l_X &: e \otimes X \to X, \\ r_X &: X \otimes e \to X, \end{aligned}$$

tales que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dll, "a_{W,X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z"'] \arrow[drr, "a_{W \otimes X,Y,Z}"] & & \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[dr, "a_{W,X \otimes Y,Z}"] & & & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \\
 & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "\mathrm{id}_W \otimes a_{X,Y,Z}"] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[ur, "a_{W,X,Y \otimes Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes Y & \\
X \otimes (e \otimes Y) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X \otimes l_Y"] & & (X \otimes e) \otimes Y \arrow[ll, "a_{X,e,Y}"] \arrow[ul, "r_X \otimes \mathrm{id}_Y"']
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Lema 1.1.1. *Si $(\mathcal{C}, \otimes)$ es una categoría monoidal, entonces los siguientes diagramas*

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes Y & \\
e \otimes (X \otimes Y) \arrow[ur, "l_{X \otimes Y}"] & & (e \otimes X) \otimes Y \arrow[ll, "a_{e,X,Y}"] \arrow[ul, "l_X \otimes \mathrm{id}_Y"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \otimes Y & \\
(X \otimes Y) \otimes e \arrow[ur, "r_{X \otimes Y}"] \arrow[rr, "a_{X,Y,e}"'] & & X \otimes (Y \otimes e) \arrow[ul, "\mathrm{id}_X \otimes r_Y"']
\end{tikzcd}$$

son conmutativos, para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$. Más aún, dado un objeto X de $\mathcal{C}$, tenemos las identidades

$$l_{e \otimes X} = \mathrm{id}_e \otimes l_X,$$
$$r_{X \otimes e} = r_X \otimes \mathrm{id}_e,$$
$$l_e = r_e.$$

Demostración. Cf. [Ka], Lemma XI.2.2 y Lemma XI.2.3. □

Supondremos también que los funtores $X \otimes (-)$ y $(-) \otimes X$ son exactos y conmutan con colímites filtrantes. La categoría ${}_k\mathrm{Mod}$ de k-espacios vectoriales, provista del producto tensorial $\otimes_k$, es un ejemplo de categoría que satisface estos axiomas.

Un **objeto graduado en** $\mathcal{C}$ es una colección de objetos $M = \{M^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{C}$ indexada por $\mathbb{Z}$. El objeto M^n se denomina **componente (homogénea) de grado** n **de** M. A su vez, el conjunto de morfismos graduados entre dos objetos graduados M y N se define como el espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M, N) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \Big(\prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M^n, N^{n+m}) \Big),$$

donde la composición de dos morfismos (homogéneos)

$$f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(L, M)$$

de grado m, y

$$g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M, N)$$

de grado m', está dada por el morfismo de grado $m + m'$

$$g \circ f = (g^{n+m} \circ f^n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Estos datos definen una categoría graduada, que denotaremos $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$.

En el caso $\mathcal{C} = {}_k\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ resulta la categoría (graduada) de espacios vectoriales graduados con morfismos k-lineales graduados.

Análogamente, un **objeto diferencial graduado en** $\mathcal{C}$ es un par (M, d), donde M es un objeto graduado en $\mathcal{C}$ y d es un endomorfismo de M de grado 1 tal que $d \circ d = 0$, denominado **diferencial** de M. Del mismo modo, se define el conjunto de morfismos entre dos objetos diferenciales graduados (M, d_M) y (N, d_N) como el espacio vectorial diferencial $\mathbb{Z}$-graduado dado por $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M, N)$, con diferencial

$$\delta(f) = (d_N \circ f^n - (-1)^m f^{n+1} \circ d_M)_{n \in \mathbb{Z}},$$

donde $f = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M,N)^m$ es un morfismo de grado m. Se tiene entonces una categoría diferencial graduada, que denotaremos $\mathrm{Dif}(\mathcal{C})$.

Nuevamente, si $\mathcal{C} = {}_k\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Dif}(\mathcal{C})$ resulta la categoría diferencial graduada de espacios vectoriales diferenciales graduados con morfismos graduados.

Dado un objeto diferencial graduado (M,d) en $\mathcal{C}$, obtenemos los siguientes subobjetos graduados de M: $ZM = \{\mathrm{Ker}(d^m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ y $BM = \{\mathrm{Im}(d^{m-1})\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Se denominan **ciclos** de (M,d) y **bordes** de (M,d), respectivamente. Notar que BM es un subobjeto graduado de ZM.

La categoría de **complejos de objetos en** $\mathcal{C}$ posee los mismos objetos que $\mathrm{Dif}(\mathcal{C})$, pero la colección de morfismos entre dos complejos (M,d_M) y (N,d_N) está dada por $Z^0\mathrm{Hom}_{\mathrm{Dif}(\mathcal{C})}((M,d_M),(N,d_N))$, con respecto a la diferencial δ. Notaremos esta categoría $\mathrm{C}(\mathcal{C})$.

Siguiendo con el mismo ejemplo, si $\mathcal{C} = {}_k\mathrm{Mod}$, $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ resulta la categoría de complejos de espacios vectoriales con morfismos de complejos.

Si M y N son dos objetos graduados, el **objeto producto tensorial de** M **y** N es el objeto graduado cuya componente de grado n está dada por

$$(M \otimes N)^n = \bigoplus_{p+q=n} M^p \otimes N^q.$$

Del mismo modo, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M,N)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M',N')$ son dos morfismos de grado m y m', el **producto tensorial de** f **y** g es el morfismo de grado $m+m'$

$$f \otimes g : M \otimes M' \to N \otimes N'$$

cuya componente homogénea de grado n es

$$(f \otimes g)^n = \bigoplus_{p+q=n} (-1)^{pm'} f^p \otimes g^q.$$

La categoría $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ provista del bifuntor producto tensorial $\otimes$ y del objeto graduado e, cuyas componentes homogéneas son nulas, salvo la componente de grado 0, que es el elemento neutro e de $\mathcal{C}$, resulta una categoría monoidal.

Si (M,d_M) y (N,d_N) son dos complejos de objetos en $\mathcal{C}$, el **complejo producto tensorial** de ambos está dado por el objeto graduado producto tensorial $M \otimes N$, con diferencial $d_M \otimes \mathrm{id}_N + \mathrm{id}_M \otimes d_N$. Con este producto tensorial y el objeto graduado e con la diferencial nula, $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ resulta una categoría monoidal.

Consideramos, en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, el **funtor de suspensión** $S : \mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, dado por

$$S(M)^n = M^{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z},$$

y

$$S(f)^n = f^{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z},$$

si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M,N)$. Por lo tanto, existe el morfismo

$$s_M : M \to SM$$

de grado -1, tal que sus componentes satisfacen

$$s_M^n = \mathrm{id}_{M^n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

El funtor S se puede extender a $\mathrm{C}(\mathcal{C})$, considerando que la suspensión de un complejo de objetos (M,d_M) de $\mathcal{C}$ está dada por el objeto graduado SM, con diferencial

$$d_{SM} = -s_M \circ d_M \circ s_M^{-1}.$$

Por otro lado, se define el **funtor de homología**

$$H : \mathrm{C}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{C}),$$

tal que, si (M,d_M) es un complejo de objetos de $\mathcal{C}$, la componente de grado n de HM es

$$H^nM = Z^nM/B^nM,$$

y, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}((M, d_M), (N, d_N))$, entonces $H(f)$ es el morfismo cuya componente homogénea de grado n es la inducida por la restricción de f a ZM.

Diremos que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}((M, d_M), (N, d_N))$ es un **quasiisomorfismo** si $H(f)$ es un isomorfismo, y que (M, d_M) es **acíclico** si es quasiisomorfo al complejo nulo de $\mathrm{C}(\mathcal{C})$.

Dados dos morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}((M, d_M), (N, d_N))$, se dirán **homotópicos** si existe un morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(M, N)$ de grado -1 tal que $\delta(h) = f - g$. Observar que la homotopía es una relación de equivalencia.

La **categoría homotópica** $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ tiene los mismos objetos que $\mathrm{C}(\mathcal{C})$, pero los morfismos están dados por

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{C})}((M, d_M), (N, d_N)) = H^0(\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}((M, d_M), (N, d_N))).$$

Deseamos remarcar que H induce un funtor $H : \mathcal{H}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$.

Sea ahora $(\mathcal{A}, \otimes)$ la categoría monoidal $\mathcal{C}$, $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ o $\mathrm{C}(\mathcal{C})$. Un **álgebra asociativa en** $\mathcal{A}$ es un par (A, μ), donde A es un objeto de $\mathcal{A}$ y μ es un morfismo (de grado cero si $\mathcal{A} = \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$)

$$\mu : A \otimes A \to A,$$

que cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. El morfismo μ es la **multiplicación de** A.

Dadas (A, μ) y (A', μ') dos álgebras en $\mathcal{A}$, un **morfismo de álgebras en** $\mathcal{A}$ **de** (A, μ) **en** (A', μ') es un morfismo

$$f : A \to A'$$

en $\mathcal{A}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu"] & A' \otimes A' \arrow[d, "\mu'"] \\
A \arrow[r, "f"] & A'
\end{tikzcd}$$

conmuta. La clase de las álgebras en $\mathcal{A}$ forma una categoría.

Definimos $\mu^{(2)} = \mu$, y si $n \geq 3$,

$$\mu^{(n)} : A^{\otimes n} \to A$$

es el morfismo dado por

$$\mu^{(n)} = \mu^{(n-1)} \circ (\mathrm{id}_A^{n-2} \otimes \mu).$$

Si $n \in \mathbb{N}$, el conúcleo de $\mu^{(n+1)}$ resulta un cociente de A, que denominaremos **álgebra de elementos n-irreducibles de** A.

Si $f, g : A \to A'$ son dos morfismos de álgebras, una (f, g)**-derivación** es un morfismo $D : A \to A'$ que verifica la regla de Leibniz: $D \circ \mu = \mu \circ (f \otimes D + D \otimes g)$. Una **derivación** de A es una $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$-derivación.

Ejemplo 1.1.2. *Si M es un objeto de la categoría monoidal $\mathcal{A}$, el* ***álgebra tensorial reducida sobre*** *M es el objeto de $\mathcal{A}$*

$$\bar{T}(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^{\otimes n},$$

junto con la multiplicación inducida por los morfismos canónicos de asociatividad de $\mathcal{A}$

$$M^{\otimes n} \otimes M^{\otimes n'} \to M^{\otimes (n+n')} \hookrightarrow \bar{T}(M).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, notaremos

$$i_n : M^{\otimes n} \hookrightarrow \bar{T}(M)$$

la inclusión canónica.

Un álgebra en $\mathcal{A}$ se dice ***libre*** *si es isomorfa a $\bar{T}(M)$, para algún objeto M de $\mathcal{A}$.*

El ejemplo anterior resulta útil por la siguiente propiedad universal de las álgebras libres.

Lema 1.1.3. *Sea (A,μ) un álgebra en $\mathcal{A}$. Dado un morfismo (homogéneo de grado 0 si $\mathcal{A} = \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$) $f : M \to A$, existe un único morfismo de álgebras $\bar{f} : \bar{T}(M) \to A$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_1"'] & & A \\ & \bar{T}(M) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Más aún, la componente n-ésima del morfismo $\bar{f}$, $n \in \mathbb{N}$, está dada por

$$M^{\otimes n} \overset{f^{\otimes n}}{\to} A^{\otimes n} \overset{\mu^{(n)}}{\to} A.$$

Por otro lado, sean $f, g : M \to A$ dos morfismos en un álgebra A. Por lo dicho anteriormente, inducen únicos morfismos de álgebras $\bar{f}, \bar{g} : \bar{T}(M) \to A$. Dado un morfismo $D : M \to A$, existe una única $(\bar{f}, \bar{g})$-derivación $\bar{D} : \bar{T}(M) \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "i_1"'] & & A \\ & \bar{T}(M) \arrow[ur, "\bar{D}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Más aún, la componente n-ésima del morfismo $\bar{D}$ ($n \in \mathbb{N}$) está dada por

$$\mu^{(n)} \circ \left(\sum_{l+j+1=n} (f^{\otimes l} \otimes D \otimes g^{\otimes j}) \right).$$

Demostración. Cf. [Lef], Lemme 1.1.2.1. □

Generalizando las definiciones anteriores, se dice que un álgebra sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ es un **álgebra graduada en** $\mathcal{C}$, mientras que un álgebra sobre $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ es un **álgebra diferencial graduada en** $\mathcal{C}$. Denotaremos Alg la categoría de álgebras en $\mathrm{C}(\mathcal{C})$. Si $\mathcal{C} = {}_k\mathrm{Mod}$, entonces Alg coincide con la categoría de k-álgebras diferenciales graduadas.

Un morfismo en Alg es un **quasiisomorfismo** si induce un isomorfismo en homología. Además, un álgebra diferencial graduada en $\mathcal{C}$ se dice **quasilibre** si el álgebra graduada subyacente es libre en la categoría de álgebras graduadas en $\mathcal{C}$.

Dos morfismos $f, g : A \to B$ de álgebras diferenciales graduadas en $\mathcal{C}$ son **homotópicos** si existe una (f,g)-derivación $h : A \to B$ de grado -1 tal que

$$f - g = d_B \circ h + h \circ d_A.$$

Un **álgebra asociativa unitaria en** $\mathcal{A}$ es un triple (A, μ, η) donde (A, μ) es un álgebra asociativa en $\mathcal{A}$, y η es un morfismo

$$\eta : e \to A,$$

denominado **unidad de** A, tal que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\ A \otimes e \arrow[ur, "\mathrm{id}_A \otimes \eta"] \arrow[dr, "r_A"'] & & e \otimes A \arrow[ul, "\eta \otimes \mathrm{id}_A"'] \arrow[dl, "l_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Dadas (A, μ, η) y (A', μ', η') dos álgebras unitarias en $\mathcal{A}$, un **morfismo de álgebras (unitarias) en** $\mathcal{A}$ **de** (A, μ, η) **en** (A', μ', η') es un morfismo $f : A \to A'$ entre las álgebras subyacentes (A, μ) y (A', μ') tal que es un morfismo $f \circ \eta = \eta'$. La clase de las álgebras unitarias en $\mathcal{A}$ forma una categoría.

Del mismo modo, un álgebra unitaria sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ se denomina **álgebra unitaria graduada en** $\mathcal{C}$, mientras que un álgebra unitaria sobre $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ se denomina **álgebra unitaria diferencial graduada en** $\mathcal{C}$.

Notar que e posee una estructura trivial de álgebra unitaria en cada una de las categorías monoidales correspondientes, proveniente del isomorfismo $l_e = r_e : e \otimes e \to e$ (cf. Lema 1.1.1). La unidad está dada por la identidad $\mathrm{id}_e : e \to e$.

Por otro lado, un **álgebra aumentada en** $\mathcal{A}$ es una cuatrupla (A, μ, η, ϵ), donde (A, μ, η) es un álgebra unitaria en $\mathcal{A}$ y $\epsilon : A \to e$ es un morfismo de álgebras unitarias, que denominamos **aumentación de** A. Si (A, μ, η, ϵ) y $(A', \mu', \eta', \epsilon')$ son dos álgebras aumentadas en $\mathcal{A}$, un **morfismo de álgebras aumentadas en** $\mathcal{A}$ **de** (A, μ, η, ϵ) **en** $(A', \mu', \eta', \epsilon')$ es un morfismo de álgebras unitarias $f : (A, \mu, \eta) \to (A', \mu', \eta')$ tal que $\epsilon' \circ f = \epsilon$. La clase de las álgebras aumentadas en $\mathcal{A}$ también forma una categoría.

Denominamos **álgebra graduada aumentada en** $\mathcal{C}$ a un álgebra aumentada en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, y **álgebra diferencial graduada aumentada en** $\mathcal{C}$ a un álgebra aumentada sobre $\mathrm{C}(\mathcal{C})$. Denotaremos Alga la categoría de álgebras diferenciales graduadas aumentadas en $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C} = {}_k\mathrm{Mod}$, entonces Alga coincide con la categoría de k-álgebras diferenciables graduadas aumentadas.

Como es usual, muchas veces diremos que A es un álgebra asociativa (resp. unitaria, aumentada) sin hacer referencia explícita a la multiplicación μ (resp. a la unidad η, a la aumentación ϵ).

Si A es un álgebra aumentada en $\mathcal{A}$, el **álgebra reducida** $\bar{A}$ es el núcleo de la aumentación ϵ de A. Observar que $\bar{A}$ posee estructura de álgebra (no necesariamente unitaria) en $\mathcal{A}$ con multiplicación dada por la restricción de la multiplicación de A. A su vez, si $f : A \to A'$ es un morfismo de álgebras aumentadas, se define el morfismo de álgebras $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{A}'$ inducido por la restricción de f a $\bar{A}$, i.e., es el único morfismo que cumple que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, hook] & \bar{A}' \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd}$$

Esta construcción induce un funtor $\bar{(-)} : \mathrm{Alga} \to \mathrm{Alg}$.

Por otro lado, si A es un álgebra en $\mathcal{A}$ con multiplicación μ, el **álgebra aumentada** A^+ está dada por el objeto $A \oplus e$, junto con la multiplicación inducida por los morfismos μ, l_A, r_A y $r_e = l_e$, la unidad $e \hookrightarrow A \oplus e$ dada por la inclusión, y la aumentación $A \oplus e \twoheadrightarrow e$ dada por la proyección.

Todo morfismo $f : A \to A'$ de álgebras define el morfismo de álgebras aumentadas

$$f^+ = f \oplus \mathrm{id}_e : A^+ \to (A')^+.$$

Esta construcción induce un funtor $(-)^+ : \mathrm{Alg} \to \mathrm{Alga}$.

Notar que estas construcciones inducen funtores quasiinversos entre la categoría de álgebras en $\mathcal{A}$ y la categoría de álgebras aumentadas en $\mathcal{A}$.

Observación 1.1.4. *Veamos que los funtores* $\bar{(-)}$ *y* $(-)^+$ *preservan quasiisomorfismos.*

Por un lado, si $f : A \to A'$ *es un quasiisomorfismo de álgebras aumentadas, entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\bar{f}"] & A \arrow[r, two heads, "\epsilon"] \arrow[d, "f"] & e \arrow[d, equal] \\ \bar{A}' \arrow[r, hook] & A' \arrow[r, two heads, "\epsilon'"] & e \end{tikzcd}$$

es un morfismo de sucesiones exactas cortas con dos flechas verticales quasiisomorfismos. Por lo tanto, al tomar la sucesión exacta larga de (co)homología y aplicar el lema de los 5*, vemos que* f *debe ser un quasiisomorfismo.*

Del mismo modo, si $f : A \to A'$ *es un quasiisomorfismo de álgebras, resulta un morfismo de sucesiones exactas cortas*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & A^+ \arrow[r, two heads, "\epsilon"] \arrow[d, "f^+"] & e \arrow[d, equal] \\ A' \arrow[r, hook] & (A')^+ \arrow[r, two heads, "\epsilon'"] & e \end{tikzcd}$$

con dos flechas verticales quasiisomorfismos. Si aplicamos el lema de los 5 *a la sucesión exacta larga de (co)homología,* f *resulta un quasiisomorfismo.*

A continuación, presentamos las versiones duales de todas las definiciones anteriores en forma resumida.

Una **coálgebra coasociativa en** $\mathcal{A}$ es un par (C, Δ), donde C es un objeto de $\mathcal{A}$ y Δ es un morfismo (de grado cero si $\mathcal{A} = \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$) $\Delta : C \to C \otimes C$, denominado **comultiplicación**, tal que $(\Delta \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta = (\mathrm{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Dadas (C, Δ) y (C', Δ') dos coálgebras en $\mathcal{A}$, un **morfismo de coálgebras en** $\mathcal{A}$ **de** (C, Δ) **en** (C', Δ') es un morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{A}$ tal que $(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f$. La clase de las coálgebras en $\mathcal{A}$ forma una categoría.

Definiendo $\Delta^{(2)} = \Delta$, y si $n \geq 3$, $\Delta^{(n)} : C \to C^{\otimes n}$ como el morfismo dado por $\Delta^{(n)} = (\mathrm{id}_C^{n-2} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n-1)}$, puede verificarse que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el núcleo de $\Delta^{(n+1)}$ es una subcoálgebra de C, denotada $C_{[n]}$, y que denominaremos **subcoálgebra de elementos** n**-primitivos de** C. La filtración creciente

$$C_{[1]} \subseteq C_{[2]} \subseteq \cdots \subseteq C_{[n]} \subseteq \ldots$$

se denomina **filtración primitiva de** C.

La coálgebra C se dice **cocompleta** si $\operatorname{colim}_{\to \mathbb{N}} C_{[n]} = C$.

Dados $f, g : C \to C'$ dos morfismos de coálgebras, una (f, g)**-coderivación** es un morfismo $D : C \to C'$ tal que $\Delta \circ D = (f \otimes D + D \otimes g) \circ \Delta$. Una **coderivación** de C es una $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$-coderivación.

Ejemplo 1.1.5. *Si M es un objeto de la categoría monoidal $\mathcal{A}$, la **coálgebra tensorial reducida sobre** M es el objeto de $\mathcal{A}$*

$$\bar{T}^c(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M^{\otimes n},$$

junto con la comultiplicación inducida por la suma de los inversos de los morfismos canónicos de asociatividad de $\mathcal{A}$

$$M^{\otimes n} \to \bigoplus_{p+q=n} M^p \otimes M^{\otimes q} \hookrightarrow \bar{T}^c(M) \otimes \bar{T}^c(M).$$

Observar que $\bar{T}^c(M)$ es una coálgebra cocompleta. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos $p_n : \bar{T}^c(M) \twoheadrightarrow M^{\otimes n}$ la proyección canónica.

*Una coálgebra C en $\mathcal{A}$ se dice **colibre** si es isomorfa a $\bar{T}^c(M)$, para algún objeto M de $\mathcal{A}$. En este caso se ve directamente que $C \simeq \bar{T}^c(C_{[1]})$.*

La siguiente propiedad universal de las coálgebras colibres es análoga a la que verifican las álgebras

Lema 1.1.6. *Sea (C, Δ) una coálgebra cocompleta en $\mathcal{A}$. Dado un morfismo (homogéneo de grado 0 si $\mathcal{A} = \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$) $f : C \to M$, existe un único morfismo de coálgebras $\bar{f} : C \to \bar{T}^c(M)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & & M \\ & \bar{T}^c(M) \arrow[ur, "p_1"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. La componente n-ésima del morfismo $\bar{f}$, $n \in \mathbb{N}$, está dada por

$$C \xrightarrow{\Delta^{\otimes n}} C^{\otimes n} \xrightarrow{f^{(n)}} M^{\otimes n}.$$

Por otro lado, sean $f, g : C \to M$ dos morfismos de una coálgebra C en M. Por lo dicho anteriormente, inducen únicos morfismos de coálgebras $\bar{f}, \bar{g} : C \to \bar{T}^c(M)$. Dado un morfismo $D : C \to M$, existe una única $(\bar{f}, \bar{g})$-coderivación $\bar{D} : C \to \bar{T}^c(M)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\bar{D}"'] & & M \\ & \bar{T}^c(M) \arrow[ur, "p_1"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. La componente n-ésima del morfismo $\bar{D}$ ($n \in \mathbb{N}$) está dada por

$$\left(\sum_{l+j+1=n} (f^{\otimes l} \otimes D \otimes g^{\otimes j}) \right) \circ \Delta^{(n)}.$$

Demostración. Cf. [Lef], Lemme 1.1.2.2. □

Una coálgebra sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ se denomina **coálgebra graduada en** $\mathcal{C}$, mientras que una coálgebra sobre $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ se denomina **coálgebra diferencial graduada en** $\mathcal{C}$. Denotaremos Cog (resp. Cogc) la categoría de coálgebras diferenciales graduadas (resp. cocompletas) en $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C} = {}_k\mathrm{Mod}$, entonces Cog coincide con la categoría de k-coálgebras diferenciales graduadas.

Dos morfismos $f, g : C \to D$ de coálgebras diferenciales graduadas en $\mathcal{C}$ son **homotópicos** si existe una (f, g)-coderivación $h : C \to D$ de grado -1 tal que

$$f - g = d_D \circ h + h \circ d_C.$$

A su vez, una **coálgebra counitaria en** $\mathcal{A}$ es un triple (C, δ, ϵ) donde (C, δ) es una coálgebra coasociativa en $\mathcal{A}$, y ϵ es un morfismo

$$\epsilon : C \to e,$$

denominado **counidad de** C, tal que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
C \otimes e \arrow[ur, "r_C"] & & e \otimes C \arrow[ul, "l_C"'] \\
 & C \otimes C \arrow[ul, "\mathrm{id}_C \otimes \epsilon"] \arrow[ur, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_C"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Dadas (C, Δ, ϵ) y (C', Δ', ϵ') dos coálgebras counitarias en $\mathcal{A}$, un **morfismo de coálgebras (counitarias) en** $\mathcal{A}$ **de** (C, Δ, ϵ) **en** (C', Δ', ϵ') es un morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{A}$ entre las coálgebras subyacentes (C, Δ) y (C', Δ') tal que $\epsilon' \circ f = \epsilon$. Es claro que la clase de las coálgebras counitarias en $\mathcal{A}$ forma una categoría.

Del mismo modo, una coálgebra counitaria sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ se denomina **coálgebra counitaria graduada en** $\mathcal{C}$, mientras que una coálgebra counitaria sobre $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ se denomina **coálgebra counitaria diferencial graduada en** $\mathcal{C}$.

Tal como sucede en el caso de álgebras, e posee una estructura trivial de coálgebra counitaria en cada una de las categorías monoidales correspondientes, proveniente del isomorfismo $l_e^{-1} = r_e^{-1} : e \to e \otimes e$ (cf. Lema 1.1.1). La counidad es la identidad $id_e : e \to e$. Sin embargo, se debe observar que e no es cocompleta, ya que ningún morfismo no nulo $e \to M$ proviene de un morfismo de coálgebras $e \to \bar{T}^c(M)$.

Una **coálgebra coaumentada en** $\mathcal{A}$ es una cuatrupla $(C, \Delta, \epsilon, \eta)$, donde (C, Δ, ϵ) es una coálgebra counitaria en $\mathcal{A}$ y $\eta : e \to C$ es un morfismo de coálgebras counitarias, que denominamos **coaumentación de** A. Si $(C, \Delta, \epsilon, \eta)$ y $(C', \Delta', \epsilon', \eta')$ son dos coálgebras coaumentadas en $\mathcal{A}$, un **morfismo de coálgebras coaumentadas en** $\mathcal{A}$ **de** $(C, \Delta, \epsilon, \eta)$ **en** $(C', \Delta', \epsilon', \eta')$ es un morfismo de coálgebras counitarias $f : (C, \Delta, \epsilon) \to (C', \Delta', \epsilon')$ tal que $f \circ \eta = \eta'$. La clase de las coálgebras coaumentadas en $\mathcal{A}$ forma una categoría.

Denominaremos **coálgebra graduada coaumentada en** $\mathcal{C}$ a una coálgebra coaumentada en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, y **coálgebra diferencial graduada coaumentada en** $\mathcal{C}$ a una coálgebra coaumentada sobre $\mathrm{C}(\mathcal{C})$.

Definimos

$$C'_{[n]} = \ker(\pi^{\otimes n} \circ \Delta^{(n)}), \forall\, n \geq 2,$$

donde $\pi : C \to \bar{C}$ es el conúcleo de la coaumentación $\eta : e \to C$. Una coálgebra coaumentada se dice **cocompleta** si es el colímite de los objetos $C'_{[n]}$, $n \geq 2$.

Denotaremos Coga (resp. Cogca) la categoría de coálgebras coaumentadas (resp. cocompletas) en $\mathrm{C}(\mathcal{C})$. Si $\mathcal{C} = {}_k\mathrm{Mod}$, entonces Cog coincide con la categoría de k-coálgebras diferenciables graduadas coaumentadas.

Como es usual, diremos que C es una coálgebra (resp. counitaria, coaumentada) sin hacer referencia directa a la comultiplicación Δ (resp. a la counidad ϵ, a la coaumentación η).

Si C es una coálgebra coaumentada en $\mathcal{A}$, la **coálgebra reducida** $\bar{C}$ es el conúcleo de la coaumentación η de C. Notar que $\bar{C}$ posee estructura de coálgebra (no necesariamente counitaria) en $\mathcal{A}$ con comultiplicación inducida por la comultiplicación de C. Por otro lado, si C es una coálgebra en $\mathcal{A}$ con comultiplicación Δ, la **coálgebra coaumentada** C^+ está dada por el objeto $C \oplus e$, junto con la comultiplicación inducida por los morfismos Δ_C, l_C^{-1}, r_C^{-1} y $l_e^{-1} = r_e^{-1}$, la counidad $C \oplus e \twoheadrightarrow e$ dada por la proyección, y la coaumentación $e \hookrightarrow C \oplus e$ dada por la inclusión.

Si $f : C \to C'$ es un morfismo de coálgebras coaumentadas, se define el morfismo de coálgebras $\bar{f} : \bar{C} \to \bar{C}'$ inducido por f, i.e., es el único morfismo que cumple que

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\ \bar{C} \arrow[r, "\bar{f}"] & \bar{C}' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Esta construcción induce un funtor $(\bar{-}) : \mathrm{Coga} \to \mathrm{Cog}$.

A su vez, si $f : C \to C'$ es un morfismo de coálgebras, se define el morfismo de coálgebras coaumentadas

$$f^+ = f \oplus \mathrm{id}_e : C^+ \to (C')^+.$$

Nuevamente, obtenemos un funtor $(-)^+ : \mathrm{Cog} \to \mathrm{Coga}$.

Del mismo modo que para álgebras, estos funtores son quasiinversos e inducen una equivalencia entre las categorías de coálgebras en $\mathcal{A}$ y la categoría de coálgebras aumentadas en $\mathcal{A}$. Más aún, en el caso $\mathcal{A} = \mathrm{C}(\mathcal{C})$, vemos directamente que estos funtores se restringen a una equivalencia entre Cogc y Cogca.

Observación 1.1.7. *Al igual que en el caso de álgebras, estos funtores preservan quasiisomorfismos.*

1.2 A_∞-álgebras y A_∞-coálgebras

La noción de A_∞-álgebra apareció por primera vez en [Sta] con motivaciones provenientes de la topología del espacios de lazos. El uso de las A_∞-álgebras en álgebra no conmutativa y teoría de representaciones es debida a B. Keller (cf. [Kel2], [Kel3], [Kel4]). Por otro lado, estas nociones se generalizaron para el caso de coálgebras (cf. [Sa], [Sm], [Um]). A continuación recordemos estas definiciones.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Una A_n**-álgebra** es un objeto A en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ junto con una familia de morfismos homogéneos

$$m_i : A^{\otimes i} \to A, 1 \leq i \leq n,$$

de grado $2 - i$, tales que para cada $1 \leq j \leq n$, se tiene una identidad en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(A^{\otimes j}, A)$

$$\sum_{(a,b,c)\in I_j} (-1)^{ab+c} m_{a+1+c} \circ (\mathrm{id}_A^{\otimes a} \otimes m_b \otimes \mathrm{id}_A^{\otimes c}) = 0, \tag{A_j}$$

donde

$$I_j = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}_0^3 : a + b + c = j \text{ y } b \geq 1\}.$$

Por otro lado, un **morfismo de** A_n**-álgebras**, o simplemente A_n**-morfismo**, $f : A \to A'$, es una familia de morfismos homogéneos

$$f_i : A^{\otimes i} \to A', 1 \leq i \leq n,$$

de grado $1 - i$, tales que se verifica la siguiente igualdad en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(A^{\otimes j}, A')$:

$$\sum_{(a,b,c)\in I_j} (-1)^{ab+c} f_{a+1+c} \circ (\mathrm{id}_A^{\otimes a} \otimes m_b \otimes \mathrm{id}_A^{\otimes c}) = \sum_{(r,i_1,\dots,i_r)\in J_j} (-1)^s m'_r \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}), \tag{fun_j}$$

donde

$$J_j = \bigsqcup_{r\in\mathbb{N}} \{(r, i_1, \dots, i_r) : i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{l=1}^{r} i_l = j\}$$

y

$$s = s(r, i_1, \dots, i_r) = \sum_{t=2}^{r} ((1 - i_t) \sum_{u=1}^{t} i_t).$$

Un A_n-morfismo f se dice **estricto** si $f_i = 0$, para todo $2 \leq i \leq n$. La composición de dos A_n-morfismos $f : A' \to A$ y $g : A \to A''$ es la familia de morfismos $(g \circ f)_j : A'^{\otimes j} \to A''$ dado por

$$(g \circ f)_j = \sum_{(r,i_1,\dots,i_r)\in J_j} (-1)^{s(r,i_1,\dots,i_r)} g_r \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}).$$

El A_n-morfismo identidad id_A de A está dado por la familia de morfismos $\{(\mathrm{id}_A)_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que la primera componente es la identidad de A en la categoría $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ y las componentes de grado superior son nulas.

Resulta entonces que la clase de las A_n-álgebras forma una categoría que denotamos Alg_n.

Observación 1.2.1. *Sean A una A_n-álgebra y $m > n$. Entonces A posee estructura de A_m-álgebra de forma directa, al elegir $m_j = 0$, para $n+1 \leq j \leq m$. Más aún, si $f : A \to B$ es un A_n-morfismo y definimos $f_j = 0$, para $n+1 \leq j \leq m$, resulta un morfismo de A_m-álgebras con las estructuras de A_m-álgebras definidas anteriormente.*

Esta construcción induce un funtor fiel

$$\iota_{n\leq m} : \mathrm{Alg}_n \hookrightarrow \mathrm{Alg}_m,$$

donde $\iota_{n\leq n} = \mathrm{id}_{\mathrm{Alg}_n}$. Vemos directamente que, si $n \leq m \leq p$, $\iota_{m\leq p} \circ \iota_{n\leq m} = \iota_{n\leq p}$.

Observación 1.2.2. *Notar que Alg_1 coincide con la categoría de complejos $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ y que Alg es una subcategoría (no plena) de Alg_n, para todo $n \geq 2$.*

Más aún, si A es una A_n-álgebra, $n \geq 3$, la identidad (A_1) implica que (A, m_1) es un complejo, mientras que la igualdad (A_2) indica que m_1 es una derivación con respecto a la multiplicación m_2. Sin embargo, m_2 no es necesariamente asociativa, ya que la identidad (A_3)

$$m_2 \circ (m_2 \otimes \mathrm{id}_A - \mathrm{id}_A \otimes m_2) = m_1 \circ m_3 + m_3 \circ (m_1 \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A \otimes m_1 \otimes \mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes m_1)$$

implica que la obstrucción a la asociatividad de m_2 está dada por el borde de m_3 en el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Dif}(\mathcal{C})}((A, m_1)^{\otimes 3}, (A, m_1))$.

Por otro lado, si $f : A \to A'$ es un morfismo de A_n-álgebras, $n \geq 3$, la identidad (fun$_1$) implica que f_1 es un morfismo de complejos. La igualdad (fun$_2$)

$$f_1 \circ m_2 = m_2' \circ (f_1 \otimes f_1) + m_1' \circ f_2 + f_2 \circ (m_1 \otimes \mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A \otimes m_1)$$

implica que la obstrucción a que f_1 sea compatible con las multiplicaciones m_2 y m_2' está dada por el borde de f_2 en el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Dif}(\mathcal{C})}((A, m_1)^{\otimes 2}, (A', m_1'))$.

Una A_∞**-álgebra** es un objeto A en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ junto con una familia de morfismos homogéneos

$$m_i : A^{\otimes i} \to A,$$

de grado $2 - i$ ($i \in \mathbb{N}$), tales que se verifica la igualdad (A_j) para cada $j \in \mathbb{N}$.

Análogamente, un A_∞-morfismo entre dos A_∞-álgebras, $f : A \to B$, es una familia de morfismos homogéneos $f_i : A^{\otimes i} \to B$ de grado $1 - i$ que satisfacen la identidad (fun$_j$) para todo $j \in \mathbb{N}$. La composición y la identidad se definen de forma análoga que para A_n-álgebras.

Resulta entonces que la clase de las A_∞-álgebras forma una categoría que denotamos Alg_∞.

Observación 1.2.3. *Dada una A_n-álgebra A, resulta una A_∞-álgebra al elegir $m_j = 0$, para $j \geq n+1$, y si $f : A \to B$ es un A_n-morfismo, al definir $f_j = 0$, para $j \geq n+1$, resulta un morfismo de A_∞-álgebras con las estructuras de A_∞-álgebras definidos anteriormente.*

Nuevamente, esta construcción induce un funtor fiel

$$\iota_n : \mathrm{Alg}_n \hookrightarrow \mathrm{Alg}_\infty.$$

Vemos directamente que, si $n \leq m$

$$\iota_m \circ \iota_{n\leq m} = \iota_n.$$

Sean A y A' dos A_∞-álgebras. Un A_∞**-quasiisomorfismo** $f : A \to A'$ es un A_∞-morfismo tal que f_1 es un quasiisomorfismo del complejo (A, m_1) en (A', m_1').

Sean $f, g : A \to A'$ dos A_∞-morfismos. Una **homotopía entre** f **y** g es una familia de morfismos homogéneos ($i \in \mathbb{N}$)

$$h_i : A^{\otimes i} \to A',$$

de grado -1 que satisfacen la siguiente igualdad en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(A^{\otimes j}, A')$:

$$f_j - g_j = \sum (-1)^{s'} m'_{r+1+t} \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r} \otimes h_q \otimes g_{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{j_t}) + \sum_{(a,b,c)\in I_j} (-1)^{ab+c} h_{a+1+c} \circ (\mathrm{id}_A^{\otimes a} \otimes m_b \otimes \mathrm{id}_A^{\otimes c}), \quad (\mathrm{hom}_j)$$

donde la primera suma está indexada por el conjunto

$$K_j = \coprod_{r\in\mathbb{N}} \coprod_{t\in\mathbb{N}} \left\{ (r, i_1, \ldots, i_r, t, j_1, \ldots, j_t, q) : i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_t, q \in \mathbb{N}, r, t \in \mathbb{N}_0 \text{ y } \sum_{l=1}^{r} i_l + \sum_{l=1}^{t} j_l + q = j \right\},$$

y

$$s' = s'(r, i_1, \dots, i_r, t, j_1, \dots, j_t, q) = t + \sum_{u=1}^{t}(1 - j_u)(j - \sum_{v=u}^{t} j_v) + q\sum_{u=1}^{r} i_u + \sum_{u=2}^{r}(1 - i_u)\sum_{v=1}^{u-1} i_v.$$

Análogamente, podemos definir una A_∞**-coálgebra** es un objeto C en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ junto con una familia de morfismos homogéneos $\Delta_i : C \to C^{\otimes i}$, de grado $2 - i$ ($i \in \mathbb{N}$), que satisfacen las identidades en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(C^{\otimes j}, C)$

$$\sum_{(a,b,c)\in I_j} (-1)^{a+bc}(\mathrm{id}_C^{\otimes a} \otimes \Delta_b \otimes \mathrm{id}_C^{\otimes c}) \circ \Delta_{a+1+c} = 0, \tag{C_j}$$

y el morfismo

$$S^{-1}C \to \prod_{i\in\mathbb{N}}(S^{-1}C)^{\otimes i},$$

con componente i-ésima

$$-(s_C^{-1})^{\otimes i} \circ \Delta_i \circ s_C,$$

se factoriza por el morfismo

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(S^{-1}C)^{\otimes i} \to \prod_{i\in\mathbb{N}}(S^{-1}C)^{\otimes i}.$$

1.3 Construcciones bar y cobar

En esta sección recordaremos las construcciones bar y cobar, debidas a Eilenberg y Mac Lane para las álgebras diferenciales graduadas (cf. [EM]), situándolas en el contexto de las A_∞-álgebras y A_∞-coálgebras, debidas a Stasheff (cf. [Sta]) y a Adams (cf. [Ada]), respectivamente.

Sea A un objeto en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$. Se define el isomorfismo k-lineal

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(A^{\otimes i}, A) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}((SA)^{\otimes i}, SA) \\ f &\mapsto -s_A \circ f \circ (s_A^{-1})^{\otimes i}. \end{aligned}$$

Dada $\{m_i : A^{\otimes i} \to A\}_{i\in\mathbb{N}}$, una familia de morfismos homogéneos de grado $2-i$, podemos aplicarles el isomorfismo anterior y obtener $b_i \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}((SA)^{\otimes i}, SA)$. Notar que b_i es un morfismo homogéneo de grado 1.

Esta familia define un morfismo homogéneo de grado 1

$$B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} b_i : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(SA)^{\otimes i} \to SA.$$

Por el Lema 1.1.6, el morfismo B induce una única coderivación (de grado 1) $b : \bar{T}^c(SA) \to \bar{T}^c(SA)$ tal que $p_1 \circ b = B$.

Lema 1.3.1. *Son equivalentes:*

(i) La familia de morfismos $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, define en A una estructutra de A_∞-álgebra.

(ii) La coderivación b es diferencial, i.e., $b \circ b = 0$.

(iii) Para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente identidad

$$\sum_{(u,v,w)\in I_j} b_{u+1+w} \circ (\mathrm{id}_A^{\otimes u} \otimes b_v \otimes \mathrm{id}_A^{\otimes w}) = 0,$$

donde I_j está definido como en la sección anterior.

Demostración. Cf. [Lef], Lemme 1.2.2.1. □

La coálgebra diferencial graduada $(\bar{T}^c(SA), b)$ asociada a la A_∞-álgebra A se denomina **construcción bar de** A, y se denotará $B(A)$.

Observación 1.3.2. *La definición de A_∞-álgebra de Stasheff es el item (ii) del lema anterior. Como la biyección dada por $f \mapsto -s_A \circ f \circ (s_A^{-1})^{\otimes i}$ es arbitraria, los signos que aparecen en las identidades (A_j) son también arbitrarios, como ocurre en la literatura.*

Sean A y A' dos A_∞-álgebras. La siguiente aplicación es un isomorfismo k-lineal

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(A^{\otimes i}, A') &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}((SA)^{\otimes i}, SA') \\ f &\mapsto (-1)^{|f|} f \circ (s_A^{-1})^{\otimes i},\end{aligned}$$

donde $|f|$ denota el grado del morfismo f. Por lo tanto, una familia $f_i : A^{\otimes i} \to A'$ de morfismos homogéneos de grado $1 - i$ induce un morfismo $\bar{F} : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(SA)^{\otimes i} \to SA'$, de componentes f_i.

Por el Lema 1.1.6, $\bar{F}$ induce un único morfismo de coálgebras $F : \bar{T}^c(SA) \to \bar{T}^c(SA)$ tal que $p_1 \circ F = \bar{F}$.

Lema 1.3.3. *Son equivalentes:*

(i) La familia de morfismos $f_i : A^{\otimes i} \to A'$, $i \in \mathbb{N}$, define un morfismo de A_∞-álgebras.

(ii) El morfismo de coálgebras $F : \bar{T}^c(SA) \to \bar{T}^c(SA)$ es un morfismo de coálgebras diferenciales graduadas, i.e., $F \circ b_{B(A)} = b_{B(A')} \circ F$.

Demostración. Cf. [Lef], Section 1.2.2. □

Sean $f, g : A \to A'$ dos A_∞-morfismos y sean $F, G : B(A) \to B(A')$ los morfismos de coálgebras diferenciales graduadas correspondientes a f y g, respectivamente. Sea $H : B(A) \to B(A')$ una (F, G)-coderivación de grado -1. Por el Lema 1.1.6, H está determinada por el morfismo $p_1 \circ H : B(A) \to SA'$, de componentes $H_i : (SA)^{\otimes i} \to SA'$, $i \in \mathbb{N}$.

Por el isomorfismo $f \mapsto (-1)^{|f|} f \circ (s_A^{-1})^{\otimes i}$, la familia H_i proviene de la familia de morfismos $h_i : A^{\otimes i} \to A'$, $i \in \mathbb{N}$, de grado $-i$. Esta biyección entre el conjunto de (F, G)-coderivaciones de grado -1 y el conjunto de familias de morfismos graduados $A^{\otimes i} \to A'$, $i \in \mathbb{N}$, de grado $-i$, se restringe a una biyección entre el conjunto de homotopías de coálgebras graduadas $H : B(A) \to B(A')$ entre los morfismos F y G y el conjunto de homotopías $h_i : A^{\otimes i} \to A'$ de A_∞-álgebras entre los A_∞-morfismos f y g.

Por lo anterior, la construcción bar induce un funtor plenamente fiel

$$B : \mathrm{Alg}_\infty \to \mathrm{Cogc},$$

que preserva homotopías. Por lo tanto, la categoría Alg_∞ es equivalente a una subcategoría plena de la categoría Cogc de coálgebras diferenciales graduadas cocompletas.

Observación 1.3.4. *Para el caso de las A_n-álgebras, la construcción es similar. Si A es una A_n-álgebra, se define la coálgebra cocompleta*

$$B_n(A) = (\bar{T}^c(SA))_{[n]} = \bigoplus_{i=1}^{n}(SA)^{\otimes i},$$

junto con la diferencial b construida como antes.

De igual forma que antes, se induce un funtor plenamente fiel

$$B_n : \mathrm{Alg}_n \to \mathrm{Cogc}.$$

Veremos ahora la versión dual.

Sea C un objeto en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$. La aplicación

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(C, C^{\otimes i}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathcal{C})}(S^{-1}C, (S^{-1}C)^{\otimes i}) \\ f &\mapsto -(s_{S^{-1}C}^{-1})^{\otimes i} \circ f \circ s_{S^{-1}C}\end{aligned}$$

es un isomorfismo k-lineal.

Sea $\{\Delta_i : C \to C^{\otimes i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de morfismos homogéneos de grado $2 - i$ tal que el morfismo

$$\bar{D} : S^{-1}C \to \prod_{i\in\mathbb{N}}(S^{-1}C)^{\otimes i},$$

con componente i-ésima $D_i = -(s_{S^{-1}C}^{-1})^{\otimes} \circ \Delta_i \circ s_{S^{-1}C}$, homogénea de grado 1, se factoriza por el monomorfismo canónico

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(S^{-1}C)^{\otimes i} \to \prod_{i\in\mathbb{N}}(S^{-1}C)^{\otimes i}.$$

Por el Lema 1.1.3, el morfismo $\bar{D}$ induce una única derivación (de grado 1) D en $\bar{T}(S^{-1}C)$ tal que $D \circ i_1 = \bar{D}$.

Lema 1.3.5. *Son equivalentes:*

(i) La familia de morfismos $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, define en C una estructura de A_∞-coálgebra.

(ii) La derivación D en $\bar{T}(S^{-1}C)$ es diferencial, i.e., $D \circ D = 0$.

Demostración. Cf. [Lef], Section 1.2.2. □

El álgebra diferencial graduada $(\bar{T}(S^{-1}C), D)$ asociada a la A_∞-álgebra A se denomina **construcción cobar de** C, y se denotará $\Omega(C)$.

Sean C y C' dos A_∞-coálgebras. El espacio de morfismos de C en C' está dado por $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\Omega(C), \Omega(C'))$, con la composición e identidad inducidas por las definidas en la categoría Alg. Por lo tanto, obtenemos una categoría Cog_∞ de A_∞-coálgebras y un funtor plenamente fiel $\Omega : \mathrm{Cog}_\infty \to \mathrm{Alg}$. Notar que Cog es una subcategoría (no plena) de Cog_∞.

Denotaremos también B y Ω a las restricciones de las construcciones bar y cobar a las categorías de álgebras diferenciales graduadas y coálgebras diferenciales graduadas cocompletas, respectivamente.

Lema 1.3.6. *El funtor*

$$\Omega : \mathrm{Cogc} \to \mathrm{Alg}$$

es adjunto a izquierda del funtor

$$B : \mathrm{Alg} \to \mathrm{Cogc}.$$

Dmostración. Cf. [Lef], Lemme 1.2.2.5. □

Sea ahora A un álgebra diferencial graduada aumentada. La **construcción bar (aumentada) de** A está dada por la coálgebra diferencial graduada coaumentada

$$B^+(A) = (B(\bar{A}))^+.$$

Análogamente, si C es una coálgebra diferencial graduada coaumentada, la **construcción cobar (coaumentada) de** A está dada por el álgebra diferencial graduada aumentada

$$\Omega^+(C) = (\Omega(\bar{C}))^+.$$

1.4 Filtraciones

En la última sección de este capítulo consideraremos las nociones de objeto filtrado y objeto graduado.

Sea ahora $\mathcal{A}$ la categoría $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ o $\mathrm{C}(\mathcal{C})$. Una **filtración** de un objeto M de $\mathcal{A}$ es una sucesión creciente de subobjetos de M

$$F^0M \subseteq F^1M \subseteq \cdots \subseteq F^iM \subseteq \cdots \subseteq M$$

indexada por $\mathbb{N}_0$. Diremos que la filtración es **exhaustiva** si

$$\operatorname*{colim}_{\to \mathbb{N}_0} F^iM = M,$$

y **admisible** si es exhaustiva y $F^0M = 0$. Un **objeto filtrado de** $\mathcal{A}$ es un objeto M provisto de una filtración $\{F^iM\}_{i\in\mathbb{N}_0}$. Diremos que es **admisible** si la filtración es admisible. Como es usual, muchas veces diremos que M es un objeto filtrado sin escribir explícitamente la filtración. Un **complejo filtrado** es un objeto filtrado de $\mathrm{C}(\mathcal{C})$.

Un **morfismo de objetos filtrados** es un morfismo $f : M \to M'$ en $\mathcal{A}$ que preserva la filtración, i.e., $f(F^iM) \subseteq F^iM', \forall\, i \in \mathbb{N}_0$. La clase de los objetos filtrados en $\mathcal{A}$ forma una categoría, que denotaremos $\mathrm{Fil}(\mathcal{A})$.

Dado un objeto M en $\mathcal{A}$, posee naturalmente una filtración **trivial**, de la forma

$$F^iM = M, \forall\, i \in \mathbb{N}_0.$$

Todo morfismo en $\mathcal{A}$ preserva las filtraciones triviales.

Esto induce un funtor tensorial plenamente fiel

$$t : \mathcal{A} \to \mathrm{Fil}(\mathcal{A}).$$

Dados dos objetos filtrados M y M', el producto tensorial $M \otimes M'$ está provisto de la filtración definida por

$$F^i(M \otimes M') = \sum_{p+q=i} F^p M \otimes F^q M', \forall\, i \in \mathbb{N}_0.$$

La suma directa de una familia $\{M_j\}_{j\in J}$ de objetos filtrados puede filtrarse mediante

$$F^i(\bigoplus_{j\in J} M_j) = \bigoplus_{j\in J} F^i M_j, \forall\, i \in \mathbb{N}_0.$$

Consideraremos la filtración trivial para el objeto neutro e de $\mathcal{A}$.

Con el producto tensorial y objeto neutro anteriores, la categoría de objetos filtrados de $\mathcal{A}$ resulta de forma inmediata una categoría monoidal. Deseamos remarcar que el funtor t es inmediatamante monoidal.

A su vez, si M es un objeto filtrado de $\mathcal{A}$, la suspensión SM está provista de la filtración $F^i(SM) = S(F^i M)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Esto extiende de forma natural el funtor suspensión de $\mathcal{A}$ a la categoría de objetos filtrados en $\mathcal{A}$.

El **graduado asociado al objeto filtrado** M está dado por la suma directa de la sucesión de objetos $\mathrm{Gr}_{F^\bullet M}(M)$ de $\mathcal{A}$ de la forma

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}^0_{F^\bullet M} M &= F^0 M,\\ \mathrm{Gr}^i_{F^\bullet M} M &= F^i M / F^{i-1} M,\ i \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Observación 1.4.1. *Esta definición difiere de la presentada en [Lef], Section 1.3.2, ya que ahí, el objeto graduado está dado por la sucesión de objetos que presentamos anteriormente. Esto implica que los objetos poseen una doble graduación, lo que no es conveniente si se desea estudiar las (co)álgebras obtenidas como graduados asociados de (co)álgebras filtradas.*

Como es usual, si $f : M \to M'$ es un morfismo de objetos filtrados, se define el morfismo (en $\mathcal{A}$)

$$\mathrm{Gr}(f) : \mathrm{Gr}_{F^\bullet M} M \to \mathrm{Gr}_{F^\bullet M'} M',$$

cuya componente n-ésima es la inducida por la restricción de f a $F^n M$. Nuevamente, obtenemos un funtor $\mathrm{Gr} : \mathrm{Fil}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Sean M y M' dos objetos filtrados en $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ y $f : M \to M'$ un morfismo filtrado, diremos que f es **quasiisomorfismo filtrado** si los morfismos inducidos $\mathrm{Gr}^i_{F^\bullet M} M \to \mathrm{Gr}^i_{F^\bullet M'} M'$ son quasiisomorfismos en $\mathrm{C}(\mathcal{C})$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Un **álgebra filtrada** (resp. **coálgebra filtrada**) es un álgebra en la categoría de complejos filtrados $\mathrm{C}(\mathcal{C})$. Un álgebra (resp. coálgebra) diferencial graduada A (resp. C) con una filtración $\{F^\bullet A\}$ (resp. $\{F^\bullet C\}$) en $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ es un álgebra (resp. coálgebra) filtrada si y sólo la filtración satisface que

$$\mu(F^i A^p \otimes F^j A^q) \subseteq F^{i+j} A^{p+q} \qquad (\text{resp. } \Delta(F^n C^m) \subseteq \bigoplus_{p+q=m} \sum_{i+j=n} F^i C^p \otimes F^j C^q).$$

Denotaremos estas categorías ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alg}$ y ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cog}$, respectivamente. A su vez, la categoría de coálgebras filtradas y cocompletas (como coálgebra coaumentada) será denotada ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cogc}$.

Análogamente podemos definir **álgebra unitaria filtrada** y **álgebra aumentada filtrada** (resp. **coálgebra counitaria filtrada** y **coálgebra coaumentada filtrada**). Notaremos las categorías de álgebras aumentadas filtradas y coálgebras coaumentadas fitradas mediante ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alga}$ y ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Coga}$, respectivamente. Denotaremos ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cogca}$ la categoría de coálgebras coaumentadas filtradas y cocompletas (como coálgebra graduada).

Si A es un álgebra aumentada filtrada en $\mathcal{A}$, el álgebra reducida $\bar{A}$ posee una filtración dada por

$$F^\bullet \bar{A} = \bar{A} \cap F^\bullet A,$$

donde la intersección está dada por el pullback de los morfismos $F^\bullet A \hookrightarrow A$ y $\bar{A} \hookrightarrow A$ (cf. [Wei], Ex. A.4.4). Vemos directamente que $\bar{A}$ con la filtración anterior resulta un álgebra filtrada.

Notar que, si $f : A \to A'$ es un morfismo de álgebras aumentadas filtradas, el morfismo de álgebras $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{A}'$ respeta la filtración, y es, por lo tanto, un morfismo de álgebras filtradas. En otras palabras, se induce un funtor

$$(\bar{-}) : {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alga} \to {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alg}.$$

Por otro lado, si A es un álgebra filtrada en $\mathcal{A}$ con multiplicación μ, el álgebra aumentada A^+ está provista de una filtración

$$F^\bullet A^+ = F^\bullet A \oplus e.$$

Se demuestra de forma inmediata que A^+ con la filtración anterior resulta un álgebra aumentada filtrada. Nuevamente, si $f : A \to A'$ es un morfismo de álgebras aumentadas filtradas, el morfismo de álgebras aumentadas $f^+ : A^+ \to (A')^+$ dado por $f \oplus \mathrm{id}_e$ preserva la filtración. En consecuencia, f^+ resulta un morfismo de álgebras aumentadas filtradas. Finalmente, por lo anterior, esta construcción induce un funtor

$$(-)^+ : {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alg} \to {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alga}.$$

El caso de coálgebras es similar. De todos modos, deseamos precisar que en este caso, si C es una coálgebra coaumentada filtrada en $\mathcal{A}$, la coálgebra reducida $\bar{C}$ posee una filtración $F^\bullet\bar{C}$ dada por la imagen bajo la proyección $C \to \bar{C}$ de $F^\bullet C$. El resto de los resultados es idéntico al caso de álgebras presentados anteriormente. Es decir, tenemos los funtores

$$\begin{aligned}(\bar{-}) &: {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Coga} \to {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cog},\\ (-)^+ &: {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cog} \to {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Coga},\end{aligned}$$

y del mismo modo para el caso de las categorías ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cogc}$ y ${}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cogca}$.

Por otro lado, si A es un álgebra filtrada, la multiplicación de A induce de forma natural una estructura de álgebra en $\mathrm{Gr}_{F^\bullet A}(A)$. Más aún, si A es un álgebra unitaria filtrada, entonces del morfismo $\eta : e \to F^0A$ (recordar que η preserva la filtración de e) obtenemos

$$e \to F^0A \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{F^\bullet A}(A),$$

que induce en $\mathrm{Gr}_{F^\bullet A}(A)$ una estructura de álgebra unitaria. Si A es un álgebra aumentada filtrada con aumentación ϵ, luego $\mathrm{Gr}_{F^\bullet A}(A)$ resulta aumentada, con la unidad antes definida y la aumentación dada por el morfismo de componentes

$$\begin{aligned}\epsilon \circ i_{F^0A\subseteq A} &: F^0A \to e,\\ 0 &: F^mA/F^{m-1}A \to e, \forall m \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

donde $i_{F^0A\subseteq A} : F^0A \hookrightarrow A$ es la inclusión de F^0A en A. Vemos directamente que estas construcciones inducen funtores de las correspondientes categorías de álgebras (resp. unitarias, aumentadas) filtradas, en las categorías de álgebras (resp. unitarias, aumentadas). El caso de coálgebras (resp. unitarias, aumentadas), cocompletas o no, es análogo (la counidad se define del mismo modo que la aumentación anterior, y la coaumentación como la unidad).

Tenemos los siguientes diagramas conmutativos (a menos de único isomorfismo natural)

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alg} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] \arrow[d, "(-)^+"] & \mathrm{Alg} \arrow[d, "(-)^+"] \\ {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alga} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] & \mathrm{Alga} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alga} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] \arrow[d, "(\bar{-})"] & \mathrm{Alga} \arrow[d, "(\bar{-})"] \\ {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alg} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] & \mathrm{Alg} \end{tikzcd}$$

para álgebras, y del mismo modo ocurre para coálgebras (cocompletas).

Sea ahora A un álgebra filtrada. La filtración $F^\bullet A$ de A induce una filtración en el objeto $B(A) = \bar{T}^c(SA)$, de acuerdo con lo explicado más arriba. Esta filtración es compatible con la comultiplicación de $B(A)$, y en consecuencia, $B(A)$ resulta una coálgebra filtrada. Además, si $f : A \to A'$ es un morfismo de álgebras, $B(f) : B(A) \to B(A')$ resulta un morfismo de coálgebras filtradas.

Análogamente, sea C una coálgebra filtrada y cocompleta (como coálgebra diferencial graduada). La filtración $F^\bullet C$ de C induce una filtracón en el objeto $\Omega(C) = \bar{T}(S^{-1}C)$, de acuerdo con lo explicado anteriormente, y esta filtración es compatible con la multiplicación de $\Omega(C)$. En consecuencia, $\Omega(C)$ resulta un álgebra filtrada. Más aún, si $f : C \to C'$ es un morfismo de coálgebras, $\Omega(f) : \Omega(C) \to \Omega(C')$ resulta un morfismo de álgebras filtradas.

Sea C una coálgebra (diferencial graduada) cocompleta. La **filtración primitiva de** C está dada por la sucesión de subcoálgebras (ya que $\mathcal{C}$ es semisimple)

$$C_{[0]} = 0 \subseteq C_{[1]} \subseteq C_{[2]} \subseteq \cdots \subseteq C$$

de elementos i-primitivos. Por lo anterior, la filtración primitiva induce una filtración de álgebras en $\Omega(C)$, la que a su vez induce una filtración de coálgebras en $B(\Omega(C))$, que denominaremos **filtración C-primitiva**.

Notar que, si C y C' son dos coálgebras diferenciales graduadas provistas de la filtración primitiva, todo morfismo de coálgebras $f : C \to C'$ resulta filtrado, ya que

$$f^{\otimes n} \circ \Delta^{(n)} = \Delta^{(n)} \circ f.$$

Lema 1.4.2. *Sean A y A' dos álgebras diferenciales graduadas y $f : A \to A'$ un quasiisomorfismo de álgebras. El morfismo de coálgebras*

$$B(f) : B(A) \to B(A')$$

es un quasiisomorfismo filtrado para la filtración primitiva. Más aún, $B(f)$ es un quasiisomorfismo de coálgebras diferenciales graduadas.

A su vez, el morfismo de adjunción $\Omega(B(A)) \to A$ es un quasiisomorfismo de álgebras.

Dualmente, sean C y C' dos coálgebras diferenciales graduadas y $f : C \to C'$ un quasiisomorfismo de coálgebras. El morfismo de coálgebras

$$\Omega(f) : \Omega(C) \to \Omega(C')$$

es un quasiisomorfismo filtrado, donde cada álgebra posee la filtración inducida de la filtración primitiva de la coálgebra correspondiente. Más aún, $\Omega(f)$ es un quasiisomorfismo de álgebras diferenciales graduadas.

El morfismo de adjunción $C \to B(\Omega(C))$ es un quasiisomorfismo filtrado de coálgebras, considerando a C con la filtración primitiva y a $B(\Omega(C))$ con la filtración C-primitiva.

Demostración. Cf. [Lef], Lemme 1.3.2.3, y [Kel1]. Sólo faltan demostrar dos cosas. Por un lado, es necesario demostrar que el morfismo

$$B(f) : B(A) \to B(A')$$

no es solamente un quasiisomorfismo filtrado para la filtración primitiva, sino que es un quasiisomorfismo de coálgebras (cf. [Mac], Thm. 11.2).

Para ver esto, sólo es necesario observar que las filtraciones primitivas son compatibles con la diferenciales de las coálgebras diferenciales graduadas $B(A)$ y $B(A')$. Como estas filtraciones son acotadas inferiormente y son exhaustivas, las sucesiones espectrales asociadas convergen a las homologías de $B(A)$ y $B(A')$, respectivamente. Además, el paso cero de la sucesiones espectrales está dado por $\mathrm{Gr}(B(A))$ y $\mathrm{Gr}(B(A'))$, respectivamente. Como $B(f)$ es un quasiisomorfismo filtrado, esto significa que induce un quasiisomorfismo entre $\mathrm{Gr}(B(A))$ y $\mathrm{Gr}(B(A'))$, que induce un quasiisomorfismo de $B(A)$ en $B(A')$, por convergencia.

Por otro lado, falta probar que $\Omega(f) : \Omega(C) \to \Omega(C')$ es solamente un quasiisomorfismo filtrado, para la filtración primitiva, y un quasiisomorfismo de álgebras.

Como $f : C \to C'$ es un morfismo de coálgebras filtradas (para la filtración primitiva), por la demostración del Lemme 1.3.2.3, [Lef], el morfismo $\Omega(f)$ es un quasiisomorfismo filtrado, con la filtraciones inducidas de las filtraciones primitivas correspondientes. Nuevamente, estas filtraciones son compatibles con la diferenciales de las álgebras diferenciales graduadas $\Omega(C)$ y $\Omega(C')$. Del mismo que se probó para el funtor bar, $\Omega(f)$ resulta un quasiisomorfismo. $\square$

Observación 1.4.3. *Por el Lema anterior y la Observación 1.1.4, si $f : A \to A'$ es un quasiisomorfismo de álgebras diferenciales graduadas aumentadas, el morfismo de coálgebras diferenciales graduadas coaumentadas $B^+(f) : B^+(A) \to B^+(A')$ resulta un quasiisomorfismo. Del mismo modo, si $f : C \to C'$ es un quasiisomorfismo de coálgebras diferenciales graduadas coaumentadas, el morfismo de álgebras diferenciales graduadas aumentadas $\Omega^+(f) : \Omega^+(C) \to \Omega^+(C')$ resulta un quasiisomorfismo.*

Finalmente, deseamos notar que la construcciones bar y cobar conmutan (salvo único isomorfismo natural) con el funtor Gr, i.e., tenemos los siguientes diagramas conmutativos (salvo único isomorfismo natural)

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alg} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] \arrow[d, "B"] & \mathrm{Alg} \arrow[d, "B"] \\ {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cogc} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] & \mathrm{Cogc} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Cog} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] \arrow[d, "\Omega"] & \mathrm{Cog} \arrow[d, "\Omega"] \\ {}^{\mathbb{N}_0}\mathrm{Alg} \arrow[r, "\mathrm{Gr}"] & \mathrm{Alg} \end{tikzcd}$$

Como los funtores $(-)^+$ y $(\bar{-})$ conmutan (salvo único isomorfismo natural) con el funtor Gr, resulta como corolario del resultado anterior que las construcciones bar y cobar aumentadas también conmutan (salvo único isomorfismo natural) con Gr.

Capítulo 2

Álgebras de Lie

En este capítulo resumiremos las definiciones generales de álgebras de Lie y sus representaciones, que serán útiles en capítulos posteriores, con particular interés en su interrelación con la teoría de álgebras asociativas. Ponemos especial énfasis en las álgebras de Lie nilpotentes, así como en el método de órbitas, tanto en su versión algebraica como en su versión analítica. Por otro lado, denotaremos con $\otimes$ el producto tensorial $\otimes_k$ de k-espacios vectoriales.

Para mayores referencias, recomendamos [Dix1] o [Hum] para los aspectos generales, [Wei] para los aspectos (co)homológicos, y también [Dix1], [C&al] o [Kir] para el método de órbitas.

2.1 Definiciones generales

En esta sección se dan las definiciones básicas de álgebras de Lie.

Un **álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre** k es un k-espacio vectorial provisto de un morfismo k-lineal

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. **Antisimetría**: $[x, y] = -[y, x]$, $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$.

2. **Identidad de Jacobi**: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}$.

El morfismo $[\,,\,]$ se denomina el **corchete de Lie de** $\mathfrak{g}$. Si el corchete es el morfismo nulo, se dice que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es **abeliana** o **conmutativa**.

Dadas dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$, con corchetes $[\,,\,]$ y $[\,,\,]'$ respectivamente, un **morfismo de álgebras de Lie ϕ de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}'$** es un morfismo k-lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tal que $[\,,\,] \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ [\,,\,]$. Denotaremos ${}_k\mathrm{LieAlg}$ la categoría de álgebras de Lie sobre k.

Ejemplo 2.1.1. *(i) Dada una k-álgebra asociativa A, el conmutador permite definir una estructura de álgebra de Lie sobre A, que denotaremos* $\mathrm{Lie}(A)$*, al considerar el corchete $[a, b] = ab - ba$, $\forall\, a, b \in A$. Si $f : A \to B$ es un morfismo de k-álgebras asociativas, entonces también resulta un morfismo de álgebras de Lie de* $\mathrm{Lie}(A)$ *en* $\mathrm{Lie}(B)$*. De hecho,* Lie *define un funtor de la categoría de álgebras asociativas sobre k en la categoría de álgebras de Lie sobre k.*

*Recíprocamente, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es posible asociarle un álgebra asociativa, denominada **álgebra universal envolvente**, definida como*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\langle\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in \mathfrak{g}\}\rangle.$$

El morfismo k-lineal $\mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es inyectivo (cf. [Dix1], Prop. 2.1.9), y por lo tanto identificamos a $\mathfrak{g}$ con su imagen en $\mathcal{U}(g)$. Dado un morfismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, éste induce un único morfismo de álgebras asociativas $F : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tal que $F|_{\mathfrak{g}} = f$. En consecuencia, $\mathcal{U}$ define un funtor de la categoría de k-álgebras de Lie en la categoría de k-álgebras asociativas. Más aún, el funtor $\mathcal{U}$ es adjunto a izquierda de Lie*, es decir, para toda k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y toda k-álgebra asociativa A existe una biyección natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{LieAlg}}(\mathfrak{g}, \mathrm{Lie}(A)).$$

(ii) *Un caso particular de* (i) *consiste en considerar, dado un* k*-espacio vectorial* V*, la* k*-álgebra* $\mathrm{End}_k(V)$*. El corchete es entonces*

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f.$$

Denotaremos $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(V))$*, o* $\mathfrak{gl}(n,k)$ *si* $\dim_k(V) = n$ *y hemos elegido una base ordenada de* V*. Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie* $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}_k(V)$*.*

(iii) *Del mismo modo,* $\mathfrak{sl}(V)$ *es la* k*-álgebra de Lie dada por el espacio vectorial de las transformaciones lineales en* $\mathrm{End}_k(V)$ *que tienen traza* 0*, con el corchete inducido. Denotaremos* $\mathfrak{sl}(V)$*, o* $\mathfrak{sl}(n,k)$ *si* $\dim_k(V) = n$ *y hemos elegido una base ordenada de* V*. Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie*

$$\mathrm{SL}(V) = \mathrm{SL}(n,k) = \{f \in \mathrm{Aut}_k(V) : \det(f) = 1\}.$$

Una **subálgebra** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que cumple que, si $x, y \in \mathfrak{h}$, entonces $[x,y] \in \mathfrak{h}$. Vemos de manera inmediata que una subálgebra de un álgebra de Lie es ella misma un álgebra de Lie con el corchete restringido. Un **ideal** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial I de $\mathfrak{g}$ que cumple que, si $x \in \mathfrak{g}$ y $y \in I$, entonces $[x,y] \in I$. Notar que $\mathfrak{g}$ y $\{0\}$ son ideales de $\mathfrak{g}$ (llamados **ideales triviales**).

Un álgebra de Lie se dice **simple** si no es abeliana y no tiene ideales salvo los triviales. Por ejemplo, $\mathfrak{sl}(V)$ es un álgebra de Lie simple.

Dado un ideal I del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el k-espacio vectorial $\mathfrak{g}/I$ posee una estructura de álgebra de Lie sobre k, definida al pasar al cociente el corchete de $\mathfrak{g}$, es decir,

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x,y]}, \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

Observación 2.1.2. *La categoría de álgebras de Lie sobre* k *posee productos: dada* $\{(\mathfrak{g}_j, [\,,]_j)\}_{j \in J}$ *una familia de álgebras de Lie, el **producto** está dado por el espacio vectorial*

$$\prod_{j \in J} \mathfrak{g}_j$$

junto con el corchete $[(x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j \in J}] = ([x_j, y_j]_j)_{j \in J}$*, y las proyecciones*

$$\begin{aligned} p_j : \prod_{j\in J} \mathfrak{g}_j &\to \mathfrak{g}_j \\ (x_j)_{j\in J} &\mapsto x_j. \end{aligned}$$

El **centro de** $\mathfrak{g}$ es el ideal $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x,y] = 0, \forall\, y \in \mathfrak{g}\}$. Luego, un álgebra de Lie es abeliana si y sólo si $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

El álgebra derivada de $\mathfrak{g}$ es el ideal dado por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle\{[x,y] : x, y \in \mathfrak{g}\}\rangle$. Entonces, un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es conmutativa si y sólo si su álgebra derivada es trivial.

También, se define el **normalizador de un subconjunto** S **de** $\mathfrak{g}$ como la subálgebra dada por

$$N_{\mathfrak{g}}(S) = \{x \in \mathfrak{g} : [x,y] \in S, \forall\, y \in S\}.$$

Si S es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces $S \subseteq N_g(S)$ y S es un ideal en $N_{\mathfrak{g}}(S)$.

Un endomorfismo k-lineal d de $\mathfrak{g}$ se dice una **derivación de** $\mathfrak{g}$ si cumple que $d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$, para $x, y \in \mathfrak{g}$. El espacio vectorial $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ dado por las derivaciones de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Sea $x \in \mathfrak{g}$, consideramos el morfismo k-lineal

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ y &\mapsto [x,y]. \end{aligned}$$

Vemos trivialmente que este morfismo es una derivación, usando la identidad de Jacobi. La imagen del morfismo k-lineal

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x, \end{aligned}$$

se denomina espacio de **derivaciones interiores de** $\mathfrak{g}$ y se denotará $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$.

Dadas dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, y una acción de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$ por derivaciones (i.e., un morfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{h})$), el álgebra de Lie **producto semidirecto** $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$ **de** $\mathfrak{g}$ **y** $\mathfrak{h}$ está dada por el espacio vectorial $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ provisto del corchete

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y'] + \phi(y)(x') - \phi(y')(x)),$$

donde $x, x' \in \mathfrak{g}$, $y, y' \in \mathfrak{h}$.

La **serie central descendente de** $\mathfrak{g}$ es la sucesión decreciente de ideales de $\mathfrak{g}$ dada por $\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ y $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **nilpotente** si $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente proposición, demostrada por Dixmier, da otra caracterización de las álgebras de Lie nilpotentes.

Proposición 2.1.3. *Son equivalentes*

1. $\mathfrak{g}$ *es nilpotente.*

2. *Existe* $r \in \mathbb{N}$ *y una sucesión decreciente* $\mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_r$ *de ideales de* $\mathfrak{g}$*, tales que* $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{g}_r = 0$ *y* $\mathfrak{g}_i \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}]$*,* $i = 2, \ldots, r$.

Demostración. Cf. [Dix1], 1.3.5. □

Ejemplo 2.1.4. *La subálgebra de Lie* $\mathfrak{n}(n, k) \leq \mathfrak{gl}(n, k)$ *de matrices* $n \times n$ *triangulares estrictamente superiores es un álgebra de Lie nilpotente, ya que la serie central descendente de* $\mathfrak{n}(n, k)$ *está dada por*

$$\mathcal{C}^l(\mathfrak{n}(n, k)) = \langle \{e_{i,j} : i + l \leq j\} \rangle,$$

donde $e_{i,j}$ *es la matriz elemental dada por* $(e_{i,j})_{m,n} = \delta_{i,m}\delta_{j,n}$.

La subálgebra de Lie $\delta(n, k) \leq \mathfrak{gl}(n, k)$ *de matrices* $n \times n$ *diagonales es también un álgebra de Lie nilpotente.*

De forma análoga, se puede definir la **serie derivada de** $\mathfrak{g}$ como la sucesión decreciente de ideales de $\mathfrak{g}$ dada por $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ y $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **resoluble** si $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.1.5. *Son equivalentes*

1. $\mathfrak{g}$ *es resoluble.*

2. *Existe* $r \in \mathbb{N}$ *y una sucesión decreciente* $\mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_r$ *de ideales de* $\mathfrak{g}$*, tales que* $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{g}_r = 0$ *y* $\mathfrak{g}_i \supset [\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_{i-1}]$*,* $i = 2, \ldots, r$.

Demostración. Cf. [Dix1], 1.3.7. □

Observación 2.1.6. *Teniendo en cuenta que* $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}_0$*, es inmediato ver que toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble.*

Ejemplo 2.1.7. *La subálgebra de Lie* $\delta(n, k) + \mathfrak{n}(n, k) \leq \mathfrak{gl}(n, k)$ *de matrices* $n \times n$ *triangulares superiores es un álgebra de Lie resoluble, ya que la sucesión derivada cumple que*

$$\mathcal{C}^l(\mathfrak{n}(n, k)) \subseteq \langle \{e_{i,j} : i + l \leq j\} \rangle.$$

Diremos que $\mathfrak{g}$ es **completamente resoluble** si la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ es triangularizable, es decir, si existe una sucesión decreciente de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{\dim(\mathfrak{g})} = 0$ de $\mathfrak{g}$ tales que $\dim(\mathfrak{g}_i) = \dim(\mathfrak{g}) - i$, $i = 0, \ldots, \dim(\mathfrak{g})$. De la Proposición 2.1.3 y 2.1.5 vemos que un álgebra de Lie nilpotente es completamente resoluble, y un álgebra de Lie completamente resoluble es resoluble. Como k es algebraicamente cerrado, si $\mathfrak{g}$ es resoluble, es completamente resoluble (cf. [Dix1], Thm. 1.3.12).

2.2 Representaciones de álgebras de Lie

En esta sección se da la definición de representación de una álgebra de Lie y se describen las representaciones irreducibles de dimensión finita de las álgebras de Lie nilpotentes.

Una **representación (o módulo) a izquierda de una k-álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ es un k-espacio vectorial V provisto de un morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Análogamente, una **representación (o módulo) a derecha de una k-álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ es un k-espacio vectorial V provisto de un morfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)^{op}.$$

Una forma equivalente de describir una representación a derecha de $\mathfrak{g}$ consiste de un k-espacio vectorial V provisto de un morfismo k-lineal $\rho' : V \otimes \mathfrak{g} \to V$ tal que, si denotamos $\rho'(v \otimes x) = v.x$ ($x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$),

$$(v.x).y - (v.y).x = v.[x, y],$$

para $x, y \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$. Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda, posee una estructura natural de $\mathfrak{g}$-módulo a derecha : $v.x = -x.v$, $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, también recíprocamente. Esta dualidad proviene de la involución del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada por $\mapsto -x$, denominada **antípoda**. De ahora en adelante, a menos que se diga lo contrario, debido a esta dualidad, vamos a considerar solamente módulos a izquierda.

Dadas V y W dos representaciones de $\mathfrak{g}$, un **morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos de V en W** es un morfismo k-lineal de $f : V \to W$, tal que $f(x.v) = x.f(v)$, para todo $v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$. Denotaremos ${}_{\mathfrak{g}}\mathrm{Mod}$ la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos.

Observación 2.2.1. *De los Ejemplos 2.1.1(i) y (ii), obtenemos que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{LieAlg}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{LieAlg}}(\mathfrak{g}, \mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(V))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{End}_k(V)).$$

Luego la categoría de representaciones de $\mathfrak{g}$ es equivalente a la categoría de representaciones de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Es claro que la antípoda de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ induce una equivalencia entre las categorías de representaciones a izquierda y a derecha de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Ejemplo 2.2.2. *(i) La representación definida en el espacio vectorial $V = k$ provisto de la acción trivial, i.e., $\rho = 0$, es llamada **representación trivial**. Más en general, todo k-espacio vectorial V posee una estructura trivial de módulo sobre $\mathfrak{g}$, i.e., $\rho = 0$. Si $f : V \to V'$ es un morfismo k-lineal, entonces es un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, si consideramos a V y V' con la acción trivial. En consecuencia, obtenemos un funtor de la categoría de espacios vectoriales sobre k en la categoría de representaciones de $\mathfrak{g}$, denominado **funtor de $\mathfrak{g}$-módulos trivial**.*

*(ii) El álgebra universal envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ posee una estructura natural de $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda si definimos $\rho'(x \otimes z) = xz$, $x \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, llamada **representación regular a izquierda de** $\mathfrak{g}$, que corresponde (de acuerdo con la Observación 2.2.1) a la acción regular a izquierda de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Análogamente, podemos definir la **representación regular a derecha de** $\mathfrak{g}$. Notar que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{g}$-bimódulo con estas dos acciones.*

*(iii) Si elegimos $V = \mathfrak{g}$ y $\rho' = [\,,]$, obtenemos una representación de $\mathfrak{g}$ en sí misma, denominada **representación adjunta**. Como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{g}$-bimódulo, podemos definir definir la **representación adjunta de $\mathfrak{g}$ en** $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dada por $x.z = xz - zx$, $x \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. La correspondiente representación de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ no puede ser escrita de manera conveniente.*

Por la Observación anterior, vemos que la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos es abeliana, satisface los axiomas introducidos por Grothendieck AB4* y AB5, y posee suficientes objectos proyectivos e inyectivos. Por lo tanto, está definida la suma directa y el producto de módulos sobre $\mathfrak{g}$. Más concretamente, si $\{V_j\}_{j \in J}$ es una familia de representaciones de $\mathfrak{g}$, la representación suma directa de esta familia consiste del espacio vectorial

$$\bigoplus_{j \in J} V_j$$

con la acción diagonal, i.e. $x.(\sum_{j \in J} v_j) = \sum_{j \in J} x.v_j$, donde $v_j \in V_j$, $x \in \mathfrak{g}$, y la suma es de soporte finito. Del mismo modo, la representación producto directo de esta familia consiste del espacio vectorial

$$\prod_{j \in J} V_j$$

con la acción diagonal, es decir, $x.(v_j)_{j \in J} = (x.v_j)_{j \in J}$, donde $v_j \in V_j$, $x \in \mathfrak{g}$. Análogamente, dado un submódulo W de V, existe el módulo cociente V/W. Diremos que una representación V de $\mathfrak{g}$ es **irreducible** o **simple**, si no posee otra subrepresentación que las triviales $\{0\}$ y V.

Más aún, como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf (cf. [Mont], Ex. 1.5.4), la existencia de coproducto implica que la categoría de representaciones de $\mathfrak{g}$ resulta monoidal: dados V y W dos $\mathfrak{g}$-módulos, el producto tensorial $V \otimes W$ tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo dado por $x.(v \otimes w) = x.v \otimes w + v \otimes x.w$. A su vez, la existencia de la antípoda implica que el espacio vectorial dual $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ a un módulo V tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo con la **acción dual**, i.e., $(x.f)(v) = -f(x.v)$. La representación dual a la representación adjunta se denomina **coadjunta**.

Si $\mathfrak{g}$ actúa en un espacio vectorial V, actúa también en sus productos tensoriales $V^{\otimes m}$, y por lo tanto en el álgebra tensorial $T(V)$. De hecho, esta acción inducida es la única derivación que extiende la acción de $\mathfrak{g}$ en V. Al pasar al cociente, la misma define una representación (por derivaciones) de $\mathfrak{g}$ en el álgebra simétrica $S(V)$ de V (resp. el álgebra exterior ΛV de V), que deja estable cada sumando directo $S^p(V)$ (resp. $\Lambda^p V$). Esto implica que $\mathfrak{g}$ actúa (por derivaciones) en $T(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})$ y $\Lambda\mathfrak{g}$.

Diremos que una representación V de $\mathfrak{g}$ es **diagonalizable** (resp. **triangularizable**) si existe una base ordenada $\mathcal{B}$ de V tal que el endomorfismo de V definido por $x \in \mathfrak{g}$ es diagonal (resp. triangular), para todo $x \in \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ es resoluble, una representación V es triangularizable si y sólo si el endomorfismo inducido por x es triangularizable, para todo $x \in \mathfrak{g}$ (cf. [Dix1], Thm. 1.3.12).

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de álgebras de Lie:

Teorema 2.2.3 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Sea k un anillo conmutativo y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre k, que es libre como k-módulo. Sea $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i \in I}$ una base ordenada de $\mathfrak{g}$, i.e., I es un conjunto totalmente ordenado. Luego el álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un k-módulo libre con base ordenada:*

$$\{x_{i_1} \dots x_{i_l} : l \in \mathbb{N}_0, (i_1, \dots, i_l) \in I^l, \text{ tales que } i_1 \leq \dots \leq i_l\}.$$

Demostración. Cf. [Dix1], Thm. 2.1.11 o [Hum], Coro. 17.3 C. □

Como consecuencia del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, resulta el siguiente corolario

Corolario 2.2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo k. El morfismo k-lineal*

$$\gamma : S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$
$$x_1 \dots x_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

es un isomorfismo canónico de $\mathfrak{g}$-módulos, donde $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ está provisto de la acción adjunta.

Demostración. Ver [Dix1], 2.4.5, Prop. 2.4.10. □

Por el Teorema de Weyl (cf. [Hum], Thm. 6.3), la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple es bien comprendida (no sucede lo mismo con la categoría de todas las representaciones). Sin embargo, nosotros estaremos más interesados en el caso nilpotente. Aunque el Teorema de Engel (o sus corolarios, cf. [Hum], Coro. 3.3) brinda un método para hallar a priori todas las representaciones de dimensión finita para un álgebra de Lie nilpotente, lamentablemente no existe una descripción completa para dichas representaciones.

De todos modos, sí se conocen todas las representaciones irreducibles de dimensión finita de un álgebra de Lie nilpotente, descriptas en el siguiente Lema (cf. [Dix1], Cor. 1.3.13, para el caso resoluble). Presentamos la demostración ya que nos será de utilidad más adelante.

Lema 2.2.5. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. Toda representación irreducible de dimensión finita no trivial de $\mathfrak{g}$ es de dimensión 1. Más aún, el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles no triviales de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ está parametrizado por $k^{\mathfrak{g}/\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})}$.*

Demostración. Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible no trivial de dimensión finita $n \geq 1$ dado por $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, o equivalentemente, por $\Phi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V)$. Definimos $\mathfrak{h} = \phi(\mathfrak{g})$ y $A = \mathrm{Im}(\Phi)$. Deseamos notar que $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita menor o igual que $\dim_k(\mathfrak{g})$ y V es un $\mathfrak{h}$-módulo irreducible (o equivalentemente, un A-módulo irreducible).

Probaremos el lema por inducción en la dimensión de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ tiene dimensión 1, es abeliana, y $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = 0$. Supongamos que $\mathfrak{g}$ está generada por un elemento z, y por lo tanto $\phi(z) \in \mathfrak{h}$ es un endomorfismo de V. Como V es de dimensión finita (y k algebraicamente cerrado), posee un autovalor $c_z \in k$. El morfismo $\phi(z) - c_z \mathrm{id}_V \in A$ es A-lineal, y como V es irreducible, por el lema de Schur, $\phi(z) = c_z \mathrm{id}_V$. Por lo tanto, V debe tener dimensión 1, y todo módulo irreducible de dimensión finita es de la forma $V_c = k.v_c$, ($c \in k$) con la acción $z.v = cv$. Trivialmente, $V_c \simeq V_{c'}$ si y sólo si $c = c'$.

Supongamos ahora que el lema está demostrado para álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor (estrictamente) que n, y sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n. Sea

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{C}^{m+1}(\mathfrak{g}) = 0$$

la serie central descendente de $\mathfrak{g}$, donde $\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) \neq 0$. Luego, como $\mathcal{C}^{m+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^m(\mathfrak{g})] = 0$, $\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, y de hecho, dado $z \in \mathcal{C}^m(\mathfrak{g})$, existen $x, y \in \mathfrak{g}$ tales que $[x, y] = z$.

A su vez, como $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, obtenemos que $\Phi(z) \in \mathcal{Z}(A)$. Nuevamente, como V es de dimensión finita (y k es algebraicamente cerrado), $\Phi(z)$ posee al menos un autovalor $c_z \in k$. El morfismo

$$\Phi(z) - c_z\mathrm{id}_V : V \to V$$

es A-lineal, ya que $\Phi(z) - c_z\mathrm{id}_V \in \mathcal{Z}(A)$. Por el lema de Schur, $\Phi(z) - c_z\mathrm{id}_V = 0$, ya que V es un A-módulo irreducible. Luego $\Phi(z) = c_z\mathrm{id}_V$. Sin embargo, debe ser $c_z = 0$, ya que $c_z\mathrm{id} = \Phi(z) = \Phi([x, y]) = [\Phi(x), \Phi(y)]$, y en consecuencia $c_z n = \mathrm{tr}(\Phi(z)) = \mathrm{tr}([\Phi(x), \Phi(y)]) = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{C}^m(\mathfrak{h}) = \phi(\mathcal{C}^m(\mathfrak{g})) = 0$. El álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ resulta entonces una imagen epimórfica de $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^m(\mathfrak{g})$, lo que implica que $\mathfrak{h}$ tiene dimensión estrictamente menor que $\dim_k(\mathfrak{g})$. Por la hipótesis inductiva V es dimensión 1.

Más aún, como V es de dimensión 1, todo elemento de $\mathfrak{g}$ actúa por homotecias. Si $z \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, luego existen $x, y \in \mathfrak{g}$, tales que $[x, y] = z$. Si suponemos que $\phi(z) = c_z\mathrm{id}_V$, luego

$$c_z n = \mathrm{tr}(\phi(z)) = \mathrm{tr}([\phi(x), \phi(y)]) = 0.$$

Sea $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l\}$ una base de $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ($y_i \in \mathfrak{g}$, $1 \leq i \leq l$), y $(c) = (c_1, \ldots, c_l) \in k^l$. Definimos una representación de $\mathfrak{g}$, $V_{(c)} = k.v_{(c)}$, con la acción siguiente: si $z \in \mathfrak{g}$, luego la clase de z en $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ se puede escribir

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{l} a_i \bar{y}_i,$$

y definimos

$$z.v_{(c)} = \sum_{i=1}^{l} a_i c_i v_{(c)}.$$

Como $\mathfrak{g}$ actúa en V por homototecias, todo módulo irreducible es de la forma $V_{(c)}$, para $(c) \in k^l$. Trivialmente, $V_{(c)} \simeq V_{(c')}$ si y solo si $(c) = (c')$. El lema queda demostrado. $\square$

2.3 Homología y cohomología de álgebras de Lie

La categoría de representaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está naturalmente provista de una teoría de (co)homología, que provee invariantes asociados a la categoría de representaciones de las álgebras de Lie. En esta sección recordaremos las definiciones básicas al respecto y enunciaremos una proposición (Prop. 2.3.4) que nos será de utilidad luego.

Dado un $\mathfrak{g}$-módulo V, definimos el **espacio de invariantes** $V^{\mathfrak{g}}$ de V como

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V : x.v = 0, \forall\, x \in \mathfrak{g}\},$$

y el **espacio de coinvariantes** $V_{\mathfrak{g}}$ de V como

$$V_{\mathfrak{g}} = V/\mathfrak{g}V.$$

Ambos son k-espacios vectoriales.

Notar que $V^{\mathfrak{g}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, V)$ y $V_{\mathfrak{g}} \simeq k \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} V$, donde $\mathfrak{g}$ actúa trivialmente en k. De hecho, $(-)^{\mathfrak{g}}$ y $(-)_{\mathfrak{g}}$ definen funtores de la categoría de módulos sobre $\mathfrak{g}$ en la categoría de k-espacios vectoriales. Más aún, el funtor de invariantes $(-)^{\mathfrak{g}}$ es el adjunto a derecha del funtor de $\mathfrak{g}$-módulos trivial, y el funtor de coinvariantes $(-)_{\mathfrak{g}}$ es el adjunto a izquierda del funtor de $\mathfrak{g}$-módulos trivial (cf. [Wei], Ex. 7.2.4). Por lo tanto, $(-)^{\mathfrak{g}}$ es exacto a izquierda y $(-)_{\mathfrak{g}}$ es exacto a derecha.

Definición 2.3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y V un $\mathfrak{g}$-módulo. Definimos* ***la cohomología*** *$H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$* ***del álgebra de Lie*** *$\mathfrak{g}$* ***con coeficientes en el módulo*** *V como la colección de funtores derivados a derecha $R^\bullet((-)_{\mathfrak{g}})$. Por definición $H^0(\mathfrak{g}, V) = V^{\mathfrak{g}}$*

Análogamente, definimos ***la homología*** *$H_\bullet(\mathfrak{g}, V)$* ***del álgebra de Lie*** *$\mathfrak{g}$* ***con coeficientes en el módulo*** *V como la colección de funtores derivados a izquierda $L_\bullet((-)_{\mathfrak{g}})$. Por definición $H_0(\mathfrak{g}, V) = V_{\mathfrak{g}}$*

Observación 2.3.2. *Teniendo en cuenta que* $V^{\mathfrak{g}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, V)$*, vemos que* $H^\bullet(\mathfrak{g}, V) \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, V)$*, y como* $V_{\mathfrak{g}} \simeq k \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} V$*, resulta que* $H_\bullet(\mathfrak{g}, V) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_\bullet(k, V)$*. En ambos casos* $\mathfrak{g}$ *actúa trivialmente (cf. [Wei], Ex. 7.2.4).*

Esta (co)homología puede calcularse como sigue. Si $\Lambda^p\mathfrak{g}$ denota el $\mathfrak{p}$-ésimo producto exterior de $\mathfrak{g}$, generado por los monomios $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$, con $x_i \in \mathfrak{g}$ $(i = 1, \ldots, p)$, definimos $C_p(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}$. Como $\Lambda^p\mathfrak{g}$ es un módulo libre sobre k, $C_p(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{g}$-módulo libre, y por lo tanto proyectivo. Notar que $C_0(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y $C_1(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$.

Definimos $\epsilon_{\mathfrak{g}} : C_0(\mathfrak{g}) \to k$ mediante la aumentación o counidad de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, y una diferencial $\delta_p : C_p(\mathfrak{g}) \to C_{p-1}(\mathfrak{g})$ $(p \in \mathbb{N})$, mediante la fórmula de Cartan

$$\begin{aligned}\delta_p(z \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge x_{p-1}) &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i z x_i \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_{p-1} \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} z \otimes [x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_{p-1},\end{aligned}$$

donde $\hat{x}_i$ indica que el témino x_i está omitido. Notar que $\delta_1 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es el morfismo k-lineal dado por el producto $\delta_1(z \otimes x) = zx$.

Es fácil ver que $\delta_p \circ \delta_{p+1} = 0$, y $\epsilon_{\mathfrak{g}} \circ \delta_0 = 0$. Más aún, $(C_\bullet, \delta_\bullet)$ es una resolución proyectiva del $\mathfrak{g}$-módulo trivial k (cf. [Wei], Thm. 7.2.2) y se denomina **complejo de Chevalley-Eilenberg**.

Por la Observación 2.3.2, la cohomología $H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en V coincide con la cohomología del complejo de cocadenas de Chevalley-Eilenberg $C^\bullet(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(C_\bullet(\mathfrak{g}), V)$, y la homología $H_\bullet(\mathfrak{g}, V)$ de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en V coincide con la homología del complejo de cadenas de Chevalley-Eilenberg $C_\bullet(\mathfrak{g}, V) = V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} C_\bullet(\mathfrak{g})$.

En consecuencia, $H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ se puede calcular como la cohomología del complejo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(C_\bullet(\mathfrak{g}), V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \Lambda^\bullet\mathfrak{g}, V) \simeq \mathrm{Hom}_k(\Lambda^\bullet\mathfrak{g}, V)$$

con diferencial

$$\begin{aligned}d^p_{\mathrm{CE}}(f)(x_0 \wedge \cdots \wedge x_p) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i x_i f(x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_p).\end{aligned}$$

Análogamente, $H_\bullet(\mathfrak{g}, V)$ puede calcularse como la homología del complejo

$$V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} C_\bullet(\mathfrak{g}) \simeq V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \Lambda^\bullet\mathfrak{g} \simeq V \otimes_k \Lambda^\bullet\mathfrak{g}$$

con diferencial

$$\begin{aligned}d_p^{\mathrm{CE}}(v \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge x_{p-1}) &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i v.x_i \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_{p-1} \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} v \otimes [x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_{p-1}.\end{aligned}$$

Observación 2.3.3. *Si* V *es un* $\mathfrak{g}$*-módulo (a izquierda), posee una estructura de* $\mathfrak{g}$*-bimódulo de forma natural, donde la acción a derecha es la trivial (i.e., inducida por la aumentación* $\epsilon_{\mathfrak{g}}$ *de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*). Denotaremos este* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*-bimódulo* $V_{\epsilon_{\mathfrak{g}}}$*.*

Es conocido que la (co)homología de Hochschild de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *con coeficientes en* $V_{\epsilon_{\mathfrak{g}}}$ *es equivalente a la (co)homología de álgebras de Lie de* $\mathfrak{g}$ *con coeficientes en* V*, i.e.,* $H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), V_\epsilon) \simeq H_\bullet(\mathfrak{g}, V)$ $(H^\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), V_{\epsilon_{\mathfrak{g}}}) \simeq H^\bullet(\mathfrak{g}, V))$ *(cf. [CE], Thm. X.2.1).*

La siguiente proposición nos será de utilidad más adelante.

Proposición 2.3.4. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie, tal que* $H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = 0$*, para todo* $\mathfrak{g}$*-módulo* M *y* $\bullet \geq 2$*. Entonces* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie libre.*

Demostración. Cf. [Wei], Ex. 7.6.3. □

2.4 Polarizaciones

En esta sección agruparemos lemas que refieren a formas bilineales alternadas que resultarán de utilidad.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con una forma bilineal antisimétrica $\langle\, ,\rangle$, y sea W un subespacio vectorial de V. Notaremos $W^{\perp}$ al complemento ortogonal de W en V, y denominaremos $V^{\perp}$ al k-espacio vectorial $\{v \in V : \langle v, w\rangle = 0, \forall\, w \in V\}$. Para todo subespacio W se verifica la igualdad (cf. [Dix1], 1.12.1)

$$\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V) + \dim(W \cap V^{\perp}).$$

Diremos que W es **totalmente isotrópico** si $W \subseteq W^{\perp}$. Un elemento maximal en el conjunto de los subespacios totalmente isotrópicos, ordenado por la inclusión, se denomina **maximalmente totalmente isotrópico**.

Proposición 2.4.1. *Son equivalentes:*

1. *W es maximalmente totalmente isotrópico.*
2. *$\dim(W) = (\dim(V) + \dim(V^{\perp}))/2$.*
3. *$W = W^{\perp}$.*

Demostración. Cf. [Dix1], 1.12.1. □

Dada $f \in \mathfrak{g}^*$ una funcional lineal de un álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{g}$, ésta define una forma bilineal antisimétrica B_f en $\mathfrak{g}$ mediante $\langle x, y\rangle = f([x, y])$. Si V es un subespacio de $\mathfrak{g}$, denotaremos V^f el complemento ortogonal de V con respecto a B_f.

Definición 2.4.2. *Una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ se dice **subordinada a** f si $B_f|_{\mathfrak{h}} = 0$, es decir, si $f([x, y]) = 0$, para $x, y \in \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{h}$ es maximalmente totalmente isotrópica con respecto a B_f, diremos que $\mathfrak{h}$ es una **polarización de** f **en** $\mathfrak{g}$. Es directo ver que en este caso la dimensión de $\mathfrak{h}$ debe ser (cf. [Dix1], 1.12.1)*

$$\frac{\dim_k(\mathfrak{g}) + \dim_k(\mathfrak{g}^f)}{2}. \tag{2.4.1}$$

Más aún, $\mathfrak{h}$ es una polarización de f en $\mathfrak{g}$ si y sólo si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra subordinada a f de dimensión $(\dim_k(\mathfrak{g})+\dim_k(\mathfrak{g}^f))/2$ (cf. [Dix1], 1.12.8).

*A su vez, si la subálgebra es resoluble, diremos que es una **polarización resoluble de** f **en** $\mathfrak{g}$. Denotaremos $P(f, \mathfrak{g})$ o $P(f)$ el conjunto de las polarizaciones de f en $\mathfrak{g}$, y $PR(f, \mathfrak{g})$ o $PR(f)$ el conjunto de las polarizaciones resolubles de f en $\mathfrak{g}$.*

Proposición 2.4.3 ([Dix1], Prop. 1.12.10)**.** *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie completamente resoluble de dimensión finita n, y sea $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ una bandera de ideales de $\mathfrak{g}$, i.e., una sucesión creciente de ideales tales que $\dim(\mathfrak{g}_i) = i$ ($i = 0, \ldots, n$). Dada $f \in \mathfrak{g}^*$ una funcional lineal de $\mathfrak{g}$, sean $f_i = f|_{\mathfrak{g}_i}$ y $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{g}_1^{f_1} + \cdots + \mathfrak{g}_i^{f_i}$ ($i = 0, \ldots, n$). Entonces*

(i) $\mathfrak{p}_n \in P(f)$.

(ii) $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{p}_i$.

(iii) Si $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ es una derivación de $\mathfrak{g}$, que preserva cada $\mathfrak{g}_i$ y tal que $f(\mathrm{Im}(d)) = 0$, luego $d(\mathfrak{p}_i) \subseteq \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. Probaremos (i) y (ii) por inducción en n. Para ello haremos uso del siguiente lema elemental:

Lema 2.4.4. *Sean V un espacio vectorial con una forma bilineal antisimétrica $\langle\, ,\rangle$, V' un subespacio de codimensión 1, y $\langle\, ,\rangle'$ la restricción de la forma bilineal $\langle\, ,\rangle$ a V'.*

1. *Si $V^{\perp} \subseteq V'$, entonces $V^{\perp}$ es un subespacio de codimensión 1 en $(V')^{\perp}$. En este caso, todo espacio maximalmente totalmente isotrópico con respecto a $\langle\, ,\rangle'$ es maximalmente totalmente isotrópico con respecto a $\langle\, ,\rangle$.*
2. *Si $V^{\perp} \nsubseteq V'$, entonces $(V')^{\perp} = V^{\perp} \cap V'$ es un subespacio de codimensión 1 en $V^{\perp}$. Si W es un subespacio vectorial maximalmente totalmente isotrópico con respecto a $\langle\, ,\rangle$, $M \cap V'$ resulta maximalmente totalmente isotrópico con respecto a $\langle\, ,\rangle'$ y $\dim(W) = 1 + \dim(W \cap V')$.*

Demostración. Cf. [Dix1], Lemma 1.12.2. □

Supongamos $\mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{g}_{n-1}^{f_{n-1}}$. Entonces, por el lema anterior, $\mathfrak{g}_n^{f_n} \subseteq \mathfrak{g}_{n-1}^{f_{n-1}}$, y en consecuencia $\mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}_{n-1}$. Por la hipótesis inductiva, $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{p}_{n-1} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{p}_i$, $i < n$, y $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{n-1}$ es maximalmente totalmente isotrópico con respecto a $B_{f_{n-1}}$ y por lo tanto con respecto a B_f.

Supongamos que $\mathfrak{p}_n \nsubseteq \mathfrak{g}_{n-1}^{f_{n-1}}$. Por el lema anterior, $\mathfrak{g}_{n-1}^{f_{n-1}} = \mathfrak{g}_n^{f_n} \cap \mathfrak{g}_{n-1}$ es un subespacio de codimensión 1 de $\mathfrak{g}_n^{f_n}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{p}_{n-1} + (\mathfrak{g}_{n-1}^{f_{n-1}} \cap \mathfrak{g}_{n-1}) = \mathfrak{p}_{n-1}$. La hipótesis inductiva asegura que $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{p}_i$, $i < n$. Además, $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{n-1} + \mathfrak{g}_n^{f_n}$ es totalmente isotrópico, y $\dim(\mathfrak{p}_n) = 1 + \dim(\mathfrak{p}_{n-1})$, por lo que es maximalmente totalmente isotrópico. Finalmente, $\mathfrak{p}_n$ es maximalmente totalmente isotrópico.

Sean $x \in \mathfrak{g}_i^{f_i}$ e $y \in \mathfrak{g}_j^{f_j}$, con $i \geq j$. Luego $[x, y] \in \mathfrak{g}_j$. Sea $z \in \mathfrak{g}_j$, entonces

$$f_j([[x,y],u]) = f_j([[x,u],y]) + f_j([x,[y,u]]) \in f_j([\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j^{f_j}]) + f_i([\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i^{f_i}]) = 0.$$

Por lo tanto, $[x, y] \in \mathfrak{g}_j^{f_j}$. Esto implica que $\mathfrak{p}_n$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{p}_n \in P(f)$.

Para demostrar (iii), procederemos como sigue. Sea $x \in \mathfrak{g}_i^{f_i}$ e $y \in \mathfrak{g}_i$, luego

$$f([d(x),y]) = f(d([x,y])) - f([x,d(y)]) = -f([x,d(y)]) \in f([\mathfrak{g}_i^{f_i}, \mathfrak{g}_i]) = 0,$$

y en consecuencia, $d(x) \in \mathfrak{g}_i^{f_i}$. La proposición está demostrada. □

Una polarización se dice **estándar** si es obtenida a partir de una bandera de la ideales de la forma anterior.

2.5 Ideales maximales del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$

En esta última sección del capítulo recordaremos resultados de Dixmier que relacionan las polarizaciones con los ideales primitivos de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita. Nos interesa particularmente la afirmación (iv) de la Proposición 2.5.1.

Un álgebra asociativa $A \neq \{0\}$ se dice **íntegra** si, dados $a, b \in A$ dos elementos no nulos de A, el producto ab es no nulo. Un ideal $I \triangleleft A$ bilátero de un álgebra A se dice **primo** si $I \neq A$ y si $J, K \triangleleft A/I$ son dos ideales biláteros no nulos en el álgebra cociente A/I, entonces $JK \neq \{0\}$. Por otro lado, decimos que $I \triangleleft A$ es **completamente primo** si A/I es íntegra. Notar que todo ideal completamente primo es primo (cf. [Dix1], 3.1.6).

Decimos que $I \triangleleft A$ es **semiprimo** si $I \neq A$ y todo ideal bilátero nilpotente $J \triangleleft A/I$ es nulo. Notar que un ideal definido como intersección de ideales semiprimos es semiprimo, y que todo ideal primo es semiprimo (cf. [Dix1], 3.1.6). A su vez, $I \triangleleft A$ se dice **primitivo** si es el ideal anulador de un A-módulo a izquierda simple. Denotaremos $\mathrm{Prim}(A)$ el conjunto de todos los ideales primitivos de A. Notar que todo ideal primitivo es primo (cf. [Dix1], 3.1.6).

Diremos que $I \triangleleft A$ es **maximal** si $I \neq A$ y si es maximal en el conjunto de los ideales biláteros de A, ordenado por inclusión. Todo ideal maximal es primitivo (cf. [Dix1], 3.1.6).

En esta sección vamos a suponer que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita. Como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es noetheriana e íntegra, posee un anillo de división de fracciones $\mathrm{Frac}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ (o cuerpo no conmutativo de fracciones) (cf. [Dix1], 3.1.16 y Thm. 3.6.12). Sea $I \triangleleft \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un ideal semiprimo, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ también posee un anillo de fracciones $\mathrm{Frac}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)$. Diremos que I es **racional** si $\mathcal{Z}(\mathrm{Frac}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)) = k$. Todo ideal racional de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es primitivo y, como k es algebraicamente cerrado, también vale la recíproca (cf. [Dix1], Thm. 4.5.7).

Proposición 2.5.1. *Sea $I \triangleleft \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un ideal bilátero del álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensión finita. Son equivalentes:*

(i) I es primitivo.

(ii) I es maximal.

(iii) I es racional.

(iv) Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I \simeq A_r(k)$.

(v) I es el núcleo de un representación simple de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Demostración. Cf. [Dix1], Prop. 4.7.4, Thm. 4.7.9. □

Si $I \triangleleft \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un ideal que satisface alguna de las condiciones equivalentes de la proposición anterior, el entero positivo r (unívocamente determinado) tal que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I \simeq A_r(k)$ se denomina **peso del ideal** I (cf. [Dix1], 4.7.10).

Supongamos que el álgebra de Lie es nilpotente. Dada $f \in \mathfrak{g}^*$ una funcional lineal y $\mathfrak{h}_f$ una polarización de f, podemos definir una representación de $\mathfrak{h}_f$ en el espacio vectorial $k.v_f$ de dimensión 1 mediante la acción

$$x.v_f = (f(x) + \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_f}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x))v_f,$$

donde $x \in \mathfrak{h}_f$ y $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_f} = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{tr}_{\mathfrak{h}_f}$. Por lo tanto, obtenemos el $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo inducido $V_f = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h}_f)} k.v_f$. Si denotamos la acción $\rho : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V_f)$, $I(f) = \mathrm{Ker}(\rho)$ es un ideal bilátero del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

En la notación del ideal $I(f)$ no incluimos la polarización. Esto está justicado por la siguiente proposición.

Proposición 2.5.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, $f \in \mathfrak{g}^*$ y $\mathfrak{h}_f$ y $\mathfrak{h}'_f$ dos polarizaciones de f. Si denotamos $\rho : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V_f)$ y $\rho' : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V'_f)$ las representaciones construidas de acuerdo al procedimiento anterior, respectivamente, entonces $\mathrm{Ker}(\rho) = \mathrm{Ker}(\rho')$.*

Demostración. Cf. [Dix1], Thm. 6.1.4. □

Si $\mathfrak{h}_f$ es una polarización estándar, el $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo V_f resulta simple (cf. [Dix1], Thm. 6.1.1) y por lo tanto, $I(f)$ es primitivo.

Teorema 2.5.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. Si I es un ideal bilátero primitivo de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, entonces existe $f \in \mathfrak{g}^*$ tal que $I = I(f)$.*

Demostración. Cf. [Dix1], Thm. 6.1.7. □

El grupo $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es un grupo algebraico cuya álgebra de Lie es $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Sea $\mathfrak{a}$ el álgebra de Lie algebraica generada por el ideal $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$ en $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. El grupo algebraico irreducible G asociado a $\mathfrak{a}$ se denomina **grupo adjunto algebraico de** $\mathfrak{g}$. Es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{a} = \mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$, G se denomina **grupo adjunto de** $\mathfrak{g}$.

En consecuencia, el grupo G actúa en el álgebra $\mathfrak{g}$, y por lo tanto también en $\mathfrak{g}^*$ con la acción dual, llamada **coadjunta**.

Teorema 2.5.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. Sean f y f' dos funcionales lineales de $\mathfrak{g}$, $I(f)$ e $I(f')$ los ideales biláteros de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ asociados, respectivamente, entonces $I(f) = I(f')$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $f = g.f'$.*

Demostración. Cf. [Dix1], Prop. 6.2.3. □

Los dos teoremas anteriores implican que, para un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, existe una biyección

$$I : \mathfrak{g}^*/G \to \mathrm{Prim}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

entre el conjunto de clases de funcionales lineales de $\mathfrak{g}$ bajo la acción coadjunta y el conjunto de ideales primitivos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Toda órbita coadjunta $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ es una variedad algebraica (irreducible) (cf. [Hum2], Prop. 8.2) provista de una estructura (algebraica) simpléctica de la forma siguiente (cf. [CG], Prop. 1.1.5). Si $f \in \Omega$, el espacio tangente de Ω en f es de la forma $T_f(\Omega) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^f$. La forma bilineal alternada B_f definida en $\mathfrak{g}$ induce una forma bilineal alternada en $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^f$, que denominaremos ω_f. La asignación $f \mapsto \omega_f$ es una 2-forma cerrada no degenerada en Ω, y por lo tanto Ω resulta una variedad simpléctica. Notar que $\dim_k(\Omega) = \dim_k(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^f)$. Una órbita de dimensión máxima se denomina **genérica** o **regular** (cf. [Kir], Ch. 5, Sec. 2.2).

El peso de un ideal primitivo $I(f)$ está dado por $r = \dim_k(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^f)/2$ (cf. [Dix1], Prop. 6.2.2). Empleando la identidad (2.4.1), entonces el peso es también $r = \dim_k(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_f)$, donde $\mathfrak{h}_f$ es una polarización de f. A su vez, si Ω_f es la órbita coadjunta determinada por f, vemos que su dimensión es el doble del peso del ideal primitivo $I(f)$ determinado por f. Por lo tanto, la determinación del mayor peso posible para cada $\mathfrak{g}$ brinda información geométrica y algebraica útil, ya que coincide con el doble de la mayor dimensión posible de las órbitas coadjuntas. Más aún, si r es el mayor peso posible para $\mathfrak{g}$, entonces la dimensión de una órbita coadjunta genérica es $2r$ y la dimensión de $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ (i.e., el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones) es igual a $\dim_k(\mathfrak{g}) - 2r$ (cf. [Dix2] y [GK]).

Sea $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$ un ideal (de Lie) del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $I \triangleleft \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ un ideal bilátero del álgebra universal envolvente de $\mathfrak{h}$. Como $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \leq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, podemos ver a I dentro de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. El **estabilizador de** I **en** $\mathfrak{g}$ es el conjunto

$$\mathfrak{st}(I, \mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, I] \subseteq I\}.$$

La siguiente proposición nos será útil más adelante.

Proposición 2.5.5. *Sea $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$ un ideal nilpotente (de Lie) del álgebra de Lie completamente resoluble $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{h}^*$ una funcional lineal y $\mathfrak{g}'$ el conjunto $\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g} : f([x, \mathfrak{h}]) = 0\}$. Luego $\mathfrak{st}(I(f), \mathfrak{g}) = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}'$.*

Demostración. Cf. [Dix1], Prop. 6.2.8. □

Además, es posible hallar todas las representaciones unitarias irreducibles (complejas) de un grupo de Lie nilpotente (real) simplemente conexo G a partir del método de órbitas de Kirillov. Lo repasaremos brevemente. Para una referencia completa ver [C&al], Chapitre V, Sec. 2 y 3, o [Kir].

Notaremos $\mathfrak{g}$ al álgebra de Lie (compleja) asociada al grupo de Lie (real) G. El grupo de Lie G actúa en el álgebra $\mathfrak{g}$ a través de la representación adjunta, y por lo tanto también en $\mathfrak{g}^*$ con la acción dual, llamada **coadjunta**.

Si $f \in \mathfrak{g}^*$ una funcional lineal de $\mathfrak{g}$, y $\mathfrak{h}_f$ una polarización de f (i.e., $\mathfrak{h}_f$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ que cumple que $f([\mathfrak{h}_f, \mathfrak{h}_f]) = 0$ y es maximal entre las subálgebras con esta propiedad), podemos definir una representación (compleja) W_f de $\mathfrak{h}_f$ de la siguiente manera: como $\mathbb{C}$-espacio vectorial $W_f = \mathbb{C}v_f$, con la acción $x.v_f = f(x)v_f$, donde $x \in \mathfrak{h}_f$.

Luego, si $H_f = \exp(\mathfrak{h}_f)$ es el grupo de Lie real (simplemente conexo) asociado a $\mathfrak{h}_f$, actúa en $\mathbb{C}v_f$ mediante $\exp(x) \mapsto e^{if(x)}$. Kirillov demostró que el módulo inducido $V_f = \mathrm{Ind}_{H_f}^G(W_f)$ es una representación unitaria irreducible de G. Más aún, dada V una representación unitaria irreducible de G, existe $f \in \mathfrak{g}^*$ tal que $V \simeq V_f$, y dadas dos representaciones unitarias irreducibles asociadas a dos funcionales $f, g \in \mathfrak{g}^*$, entonces $V_f \simeq V_g$ si y sólo si f y g pertenecen a la misma órbita bajo la acción coadjunta.

Ejemplo 2.5.6. *Sea N_3 el grupo de Heisenberg de dimensión 3, es decir el grupo de matrices de la forma*

$$N_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Éste es un grupo de Lie simplemente conexo, y su álgebra de Lie asociada es $\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{n}_3$. La función exponencial

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{n}_3 &\to N_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Si llamamos x, y, z a la base de $\mathfrak{h}_1$, con $[x, y] = z$, $[z, x] = [z, y] = 0$, y x^*, y^*, z^* a la base dual, un elemento de $\mathfrak{h}_1^*$ lo escribimos $f = \alpha x^* + \beta y^* + \gamma z^*$. La acción coadjunta de N_3 en $\mathfrak{n}_3^*$, está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot f = (\alpha + b\gamma)x^* + (\beta - a\gamma)y^* + \gamma z^*.$$

Si $f(z) = \gamma = 0$, la polarización de f es la misma $\mathfrak{h}_1$, por lo que la representación unitaria irreducible es de dimensión 1 dada por el carácter $(a, b, c) \mapsto e^{i(\alpha a + \beta b)}$. Vemos también que la órbita de f bajo la acción coadjunta es $\{f\}$, por lo que los elementos de esta familia de representaciones están parametrizados por $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Si $f(z) = \gamma \neq 0$, una polarización posible de f es la subálgebra

$$\mathfrak{h}_f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

por lo que

$$H_f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En este caso vemos que dos funcionales lineales $f = \alpha x^* + \beta y^* + \gamma z^*$ y $g = \alpha' x^* + \beta' y^* + \gamma' z^*$ están en la misma órbita si y sólo si $\gamma = \gamma'$.

En consecuencia, esta familia de representaciones irreducibles está parametrizada por $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Una presentación posible está dada por operadores diferenciales en $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ (funciones con valores complejos), donde μ es la medida de Lebesgue, y la acción es la siguiente

$$x \mapsto \frac{d}{dt}, \qquad y \mapsto \gamma t, \qquad z \mapsto \gamma \,\mathrm{id}.$$

Capítulo 3

Álgebras de Yang-Mills

El objetivo de este capítulo es estudiar el álgebra de Yang-Mills. Se describen primero las representaciones de dimensión finita. Luego, con el objeto de encontrar familias de representaciones de la misma que separen puntos, se estudia la relación de estas álgebras con las álgebras de Weyl. Para ello se describe al álgebra de Lie de Yang-Mills como una suma directa de un k-espacio vectorial y un ideal que en sí mismo es un álgebra de Lie libre.

En este capítulo k será un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y $\otimes = \otimes_k$.

3.1 Definiciones y generalidades

En esta sección recordamos la definición de las álgebras de Yang-Mills y estudiamos propiedades de sus representaciones de dimensión finita.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathfrak{f}(n)$ el álgebra de Lie libre con n generadores $\{x_1, \dots, x_n\}$. Se trata de una k-álgebra de Lie de dimensión infinita provista de una graduación sobre $\mathbb{N}$ localmente de dimensión finita.

El **álgebra de Yang-Mills con** n **generadores** se define como el álgebra de Lie sobre k

$$\mathfrak{ym}(n) = \mathfrak{f}(n)/\langle\{\sum_{i=1}^{n}[x_i, [x_i, x_j]] : 1 \leq j \leq n\}\rangle.$$

Notemos que $\mathfrak{ym}(n)$ es un álgebra de Lie con una $\mathbb{N}$-graduación localmente de dimensión finita, por ser cociente de un álgebra de Lie con una $\mathbb{N}$-graduación localmente de dimensión finita por un ideal homogéneo.

Como toda álgebra de Lie, el álgebra de Yang-Mills tiene asociada un álgebra asociativa, el álgebra universal envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$, que notaremos $\mathrm{YM}(n)$, y que también llamaremos **álgebra de Yang-Mills con** n **generadores**. Si $V(n) = \mathrm{span}_k(\{x_1, \dots, x_n\})$, resulta también que

$$\mathrm{YM}(n) \simeq TV(n)/\langle\{\sum_{i=1}^{n}[x_i, [x_i, x_j]] : 1 \leq j \leq n\}\rangle.$$

En consecuencia, el álgebra de Yang-Mills asociativa es un **álgebra homogénea cúbica**, es decir, es un cociente de un álgebra tensorial por un ideal $\langle R(n)\rangle$ homogéneo de grado 3, i.e., $R(n) \subseteq V(n)^{\otimes 3}$, donde

$$R(n) = \mathrm{span}_k(\{\sum_{i=1}^{n}[x_i, [x_i, x_j]] : 1 \leq j \leq n\}). \tag{3.1.1}$$

Ocasionalmente, cuando quede claro del contexto omitiremos el índice n para reducir la notación. Denotaremos $\mathrm{TYM}(n)$ al álgebra asociativa $\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$.

Observación 3.1.1. *Como se observa en [Mov], la definición anterior (para $k = \mathbb{C}$) coincide con la dada en [CD1].*

Recordamos la definición de álgebra de Yang-Mills dada en [CD1]. Sea $g \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica invertible (i.e., una forma bilineal simétrica no degenerada en $\mathbb{R}^n$), que escribimos $g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. El álgebra de Yang-Mills es el cociente de la $\mathbb{C}$-álgebra libre en $\nabla_1, \dots, \nabla_n$ por el ideal de relaciones

$$K = \langle\{\sum_{1 \leq i,j \leq n} g^{ij}[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_l]], 1 \leq l \leq n\}\rangle, \tag{3.1.2}$$

donde empleamos la notación $g^{-1} = (g^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Para demostrar que esta definición coincide con la nuestra, basta ver que las expresiones anteriores son independientes de la base ordenada elegida. Veamos esto un poco más en detalle.

Definimos el espacio vectorial real

$$E(n) = span_{\mathbb{R}}(\nabla_1, \dots, \nabla_n),$$

provisto de la forma bilineal (real) simétrica no degenerada $\tilde{g}$ *dada por*

$$\tilde{g}(\nabla_i, \nabla_j) = g_{ij}, \forall\, 1 \leq i, j \leq n.$$

y sea $\tilde{g}^{-1}$ *la* ***forma bilineal inversa de*** $\tilde{g}$ *definida en* $E(n)^*$, *i.e.,* $\tilde{g}^{-1}$ *es la forma inducida en* $E(n)^*$ *proveniente de pedir que el isomorfismo lineal*

$$\begin{aligned} E(n) &\to E(n)^* \\ v &\mapsto \tilde{g}(v, -) \end{aligned}$$

sea una isometría. Notemos que $\tilde{g}^{-1}$ *es simétrica y no degenerada, y que su matriz en la base dual* $\{\nabla_1^*, \dots, \nabla_n^*\}$ *es* g^{-1}, *lo que justifica el nombre usado.*

Las relaciones (3.1.2) *pueden escribirse de la forma siguiente*

$$K = \langle\{\sum_{1\leq i,j\leq n} \tilde{g}^{-1}(\nabla_i^*, \nabla_j^*)[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_l]], 1 \leq l \leq n\}\rangle.$$

Notar que, si hacemos el cambio de base $\nabla_i' = \sum_{j=1}^n c_{ji}\nabla_j$, *en las bases duales resulta* $(\nabla_i')^* = \sum_{j=1}^n d_{ji}\nabla_j^*$, *donde* $\sum_{j=1}^n d_{ji}c_{jk} = \delta_{ik}$. *En otras palabras, la matriz de cambio de base entre las bases duales es la traspuesta de la inversa de la matriz de cambio de base entre las bases originales.*

Cada generador del ideal K *se puede reescribir entonces de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leq i,j\leq n} \tilde{g}^{-1}(\nabla_i^*, \nabla_j^*)[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_l]] \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n}\ \sum_{1\leq i',j'\leq n}\ \sum_{1\leq i'',j''\leq n} d_{ii'}d_{jj'}\tilde{g}^{-1}((\nabla_{i'}')^*, (\nabla_{j'}')^*)c_{ii''}c_{jj''}[\nabla_{i''}', [\nabla_{j''}', \nabla_l]] \\ &= \sum_{1\leq i',j'\leq n}\ \sum_{1\leq i'',j''\leq n} \delta_{i'i''}\delta_{j'j''}\tilde{g}^{-1}((\nabla_{i'}')^*, (\nabla_{j'}')^*)[\nabla_{i''}', [\nabla_{j''}', \nabla_l]] \\ &= \sum_{1\leq i',j'\leq n} \tilde{g}^{-1}((\nabla_{i'}')^*, (\nabla_{j'}')^*)[\nabla_{i'}', [\nabla_{j'}', \nabla_l]]. \end{aligned}$$

De lo anterior vemos fácilmente que

$$K = \langle\{\sum_{1\leq i,j\leq n} \tilde{g}^{-1}((\nabla_i')^*, (\nabla_j')^*)[\nabla_i', [\nabla_j', \nabla_l']], 1 \leq l \leq n\}\rangle,$$

y por lo tanto, el ideal es independiente de la elección de base ordenada del espacio vectorial $E(n)$.

Deseamos notar que este razonamiento es independiente del cuerpo de base elegido (e.g., $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*): denotamos* $E(n)_{\mathbb{C}}$ *y* $\tilde{g}_{\mathbb{C}}$ *las extensiones* $\mathbb{C}$*-lineales correspondientes al espacio vectorial* $E(n)$ *y a la forma bilineal* $\tilde{g}$. *Notar que* $\tilde{g}_{\mathbb{C}}$ *es una forma bilineal compleja simétrica no degenerada en el espacio* $E(n)_{\mathbb{C}}$.

Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ *una base ortonormal (ordenada) de* $E(n)_{\mathbb{C}}$ *con respecto a* $\tilde{g}_{\mathbb{C}}$. *Si escribimos el ideal* K *en esta base, obtenemos*

$$K = \langle\{\sum_{1\leq i,j\leq n} [x_i, [x_i, x_j]], 1 \leq j \leq n\}\rangle,$$

es decir, obtenemos nuestra expresión del ideal de relaciones del álgebra de Yang-Mills.

Ejemplo 3.1.2. *Sea* $n = 2$. *En este caso* $\mathfrak{ym}(2) \simeq \mathfrak{h}_1$, *donde* $\mathfrak{h}_1$ *es el* ***álgebra de Heisenberg***, *con generadores* x, y, z, *y relaciones* $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$. *El isomorfismo está dado por*

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto x, \\ x_2 &\mapsto y. \end{aligned}$$

También resulta que $\mathfrak{ym}(2) \simeq \mathfrak{n}_3$*, donde* $\mathfrak{n}_3$ *es el álgebra de Lie de matrices estrictamente triangulares superiores en* $M_3(k)$*, y el isomorfismo es el siguiente*

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto e_{12}, \\ x_2 &\mapsto e_{23}. \end{aligned}$$

En este caso, $\mathrm{YM}(2)$ *es un álgebra noetheriana, ya que* $\mathfrak{ym}(2)$ *es dimensión finita. Más aún, de las observaciones anteriores* $\mathrm{YM}(2) \simeq A(2, -1, 0)$*, es decir, el álgebra de Yang-Mills es también un álgebra down-up.*

Notaremos la graduación

$$\mathfrak{ym}(n) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathfrak{ym}(n)_j,$$

que se denominará **graduación usual del álgebra de Yang-Mills** $\mathfrak{ym}(n)$.

A su vez, definimos

$$\mathfrak{ym}(n)^l = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathfrak{ym}(n)_j.$$

Algunas veces, siguiendo a [Mov], pensaremos al álgebra de Lie $\mathfrak{ym}(n)$ como un álgebra de Lie graduada, concentrada en grado par, es decir, asignaremos a cada espacio homogéneo $\mathfrak{ym}(n)_j$ el grado $2j$. A esta graduación la llamaremos **graduación especial del álgebra de Yang-Mills** $\mathfrak{ym}(n)$. En este caso, el ideal

$$\mathfrak{tym}(n) = \bigoplus_{j \geq 2} \mathfrak{ym}(n)_j$$

está concentrado en grados pares mayores que 2, y de hecho es isomorfo (como álgebras de Lie graduadas) al álgebra de Lie libre graduada en un cierto espacio vectorial graduado $W(n)$, i.e., $\mathfrak{tym} \simeq \mathfrak{f}_{gr}(W(n))$ (cf. [Mov], [MS] y Subsección 3.2.2 de esta tesis). Este isomorfismo es clave para estudiar las propiedades del álgebra de Yang-Mills, y nos ocuparemos de él en detalle más adelante (cf. Subsección 3.2.2).

Análogamente a lo que se hizo anteriormente, es posible considerar la **graduación usual de** $\mathrm{YM}(n)$, correspondiente a tomar la graduación del álgebra universal envolvente asociada a la graduación usual del álgebra de Lie $\mathfrak{ym}(n)$. También podemos considerar la **graduación especial de** $\mathrm{YM}(n)$, que corresponde a tomar el álgebra universal envolvente graduada del álgebra de Lie graduada $\mathfrak{ym}(n)$, con la graduación especial.

La siguiente proposición, cuya demostración es muy sencilla, permite ver la relación entre la situación graduada y no graduada:

Proposición 3.1.3. *El siguiente diagrama de funtores*

$$\begin{tikzcd}
{}^{2\mathbb{Z}}_{k}\mathrm{Mod} \arrow[rr, "\mathfrak{f}_{gr}"] \arrow[dr, "T_{gr}"] \arrow[dd, "\mathcal{O}"'] & & {}^{2\mathbb{Z}}_{k}\mathrm{LieAlg} \arrow[dl, "\mathcal{U}_{gr}"] \arrow[dd, "\mathcal{O}"] \\
& {}^{2\mathbb{Z}}_{k}\mathrm{Alg} \arrow[dd, "\mathcal{O}"] & \\
{}_{k}\mathrm{Mod} \arrow[rr, "\mathfrak{f}"] \arrow[dr, "T"'] & & {}_{k}\mathrm{LieAlg} \arrow[dl, "\mathcal{U}"] \\
& {}_{k}\mathrm{Alg} &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Observación 3.1.4. *Los funtores olvido de álgebras asociativas y álgebras de Lie preservan y reflejan objetos libres.*

Podemos reformular los resultados de la Observación 3.1.1 de la forma siguiente.

En primer lugar, $V(n)$ es una representación del grupo de Lie $\mathrm{SO}(n)$ con la acción estándar dada por el producto de matrices, que induce una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$. Más aún, para cada $j \in \mathbb{N}$, $V(n)^{\otimes j}$ es una representación de $\mathrm{SO}(n)$ (o $\mathfrak{so}(n)$) con la acción diagonal. Por lo tanto, obtenemos una acción de $\mathrm{SO}(n)$ por automorfismos de álgebras en $TV(n)$, que induce una acción por derivaciones de $\mathfrak{so}(n)$ en $TV(n)$. Ambas acciones son homogéneas de grado 0.

La Observación 3.1.1 implica que el ideal $\langle R(n) \rangle$ en $TV(n)$ es invariante por la acción de $\mathrm{SO}(n)$ y en consecuencia se induce una acción por automorfismos de álgebras en el cociente $\mathrm{YM}(n)$, que induce a su vez una acción por derivaciones de $\mathfrak{so}(n)$ en $TV(n)$. Al igual que para $TV(n)$, ambas acciones son homogéneas de grado 0.

Esto implica que

Proposición 3.1.5. *Existe una acción natural del grupo de Lie* $\mathrm{SO}(n)$ *por automorfismos de álgebras graduadas en* $\mathrm{YM}(n)$*, proveniente de la acción estándar de Lie* $\mathrm{SO}(n)$ *en* $V(n)$*. Esto induce una acción por derivaciones (no graduadas) del álgebra de Lie* $\mathfrak{so}(n)$ *correspondiente en* $\mathrm{YM}(n)$*.*

Podemos presentar el álgebra de Yang-Mills de una forma diferente, que nos será de utilidad más adelante. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $U(n) = \mathrm{span}_k(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ y sea $\mathfrak{h}(n)$ el álgebra de Lie definida por

$$\mathfrak{h}(n) = \mathfrak{f}(U(n))/\langle \sum_{j=1}^{n} [q_j, p_j] \rangle.$$

Del mismo modo que para el álgebra de Yang-Mills, podemos considerar dos graduaciones en $\mathfrak{h}(n)$. La primera, denominada **usual**, consiste en suponer que el grado de cada q_i es 1 y de cada p_i es 2. Para la **graduación especial** el grado de cada q_i es 2 y de cada p_i es 4.

Sea $\mathfrak{a} = k.H$ el álgebra de Lie abeliana de dimensión 1. También consideraremos dos graduaciones en $\mathfrak{a}$. La **graduación usual** consiste en suponer que el grado de H es 1, mientras que para la **graduación especial** H tiene grado 2.

Existe una acción por derivaciones de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{h}(n)$

$$\rho : \mathfrak{a} \to \mathrm{Der}_k(\mathfrak{h}(n)),$$

definida por, si $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \rho(H)(q_j) &= p_j, \\ \rho(H)(p_j) &= -\sum_{l=1}^{n} [q_l, [q_l, q_j]]. \end{aligned}$$

La demostración de que ρ define una acción es inmediata. Si consideramos la graduación usual, ρ es un morfismo de grado 1, y para la graduación especial, ρ posee grado 2. Por lo tanto podemos considerar el producto semidirecto de álgebras de Lie $\mathfrak{h}(n) \rtimes \mathfrak{a}$, que posee dos graduaciones, que denominaremos también **usual** y **especial**, inducidas de las graduaciones (usual y especial, respectivamente) de $\mathfrak{h}(n)$ y $\mathfrak{a}$.

A continuación enunciamos una proposición, cuya demostración es inmediata, que relaciona ambas presentaciones del álgebra de Yang-Mills

Proposición 3.1.6. *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, existe un isomorfismo de álgebras de Lie*

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathfrak{ym}(n+1) &\to \mathfrak{h}(n) \rtimes \mathfrak{a}, \\ x_i &\mapsto \begin{cases} H, & si\ i = 1, \\ q_{i-1}, & si\ i \neq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

con inversa

$$\psi_n : \mathfrak{h}(n) \rtimes \mathfrak{a} \to \mathfrak{ym}(n+1)$$

dada por

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto x_{i+1} \\ p_i &\mapsto [x_1, x_{i+1}]. \end{aligned}$$

Los isomorfismos anteriores son homogéneos de grado cero para las dos graduaciones consideradas.

Observación 3.1.7. *Por la proposición anterior, deducimos que* $\mathrm{YM}(n+1) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{h}(n)) \# k[H]$*.*

El álgebra de Yang-Mills no es en general nilpotente, ya que su serie central descendente

$$\mathfrak{ym}(n) = \mathcal{C}^0(\mathfrak{ym}(n)) \supset \mathcal{C}^1(\mathfrak{ym}(n)) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \supset \ldots$$

no es finita, sin embargo es **residualmente nilpotente**, es decir, $\cap_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) = 0$. Esto se debe a que, como $\mathfrak{ym}(n)$ es graduada, $\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \subseteq \oplus_{j \geq m+1} \mathfrak{ym}(n)_j$. Notar que $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$ es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita para todo $m \in \mathbb{N}_0$, ya que su serie central descendente es

$$\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) = \mathcal{C}^0(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))) \supset \mathcal{C}^1(\mathfrak{ym}(n))/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) = 0.$$

Veamos con más detalle cómo son los ideales de la serie central descendente. Como el ideal de $\mathfrak{f}(n)$

$$I(n) = \langle \{\sum_{i=1}^{n} [x_i, [x_i, x_j]] : 1 \leq j \leq n\} \rangle$$

es homogéneo, luego

$$I(n) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} I(n)_j = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} (I(n) \cap \mathfrak{f}(n)_j).$$

A su vez, en el álgebra de Lie libre

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{f}(n)) = \bigoplus_{j\geq k+1} \mathfrak{f}(n)_j,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n)) = \mathcal{C}^k(\mathfrak{f}(n))/(I(n) \cap \mathcal{C}^k(\mathfrak{f}(n))) &= \bigoplus_{j\geq k+1} \mathfrak{f}(n)_j/(I(n) \cap \mathfrak{f}(n)_j) \\ = \bigoplus_{j\geq k+1} \mathfrak{f}(n)_j/I(n)_j = \bigoplus_{j\geq k+1} \mathfrak{ym}(n)_j.\end{aligned}$$

Directamente de lo anterior, obtenemos el isomorfismo k-lineal canónico $j_l : \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)) \to \mathfrak{ym}(n)^l$.

Por otro lado, si $\mathfrak{ym}(n)$ no es de dimensión finita, como cada sumando $\mathfrak{ym}(n)_j$ es de dimensión finita, resulta que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n)) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, y entonces $\mathfrak{ym}(n)$ no es nilpotente. Más adelante veremos que en el único caso en que el álgebra de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(n)$ es de dimensión finita es para $n = 2$ (ver Observación 3.3.1).

El siguiente lema nos será de utilidad para el estudio de las representaciones de álgebras de Yang-Mills:

Lema 3.1.8. *El morfismo suryectivo de álgebras de Lie $\pi_l : \mathfrak{ym}(n) \twoheadrightarrow \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l\mathfrak{ym}(n)$, induce un morfismo suryectivo de álgebras $\Pi_l : \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$. Sea $K_l = \mathrm{Ker}(\Pi_l)$. Entonces*

$$K = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l = 0.$$

Demostración. Recordemos que $\gamma : S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es el isomorfismo $\mathfrak{g}$-lineal canónico de $S(\mathfrak{g})$ en el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$. Notaremos $\epsilon'_{\mathfrak{g}} : S(\mathfrak{g}) \to k$ la counidad de $S(\mathfrak{g})$ dada por la proyección canónica sobre el cuerpo k.

Como el funtor $S(-)$ es adjunto a izquierda del funtor olvido de k-álgebras conmutativas en k-espacios vectoriales, preserva colímites. En particular, como

$$\mathfrak{ym}(n) = \mathfrak{ym}(n)^l \oplus \mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)),$$

obtenemos $S(\mathfrak{ym}(n)) \simeq S(\mathfrak{ym}(n)^l) \otimes S(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$.

Más aún, el isomorfismo de k-álgebras t de $S(\mathfrak{ym}(n))$ en $S(\mathfrak{ym}(n)^l) \otimes S(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$ está inducido por el morfismo de espacios vectoriales $v + w \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes w$, donde $v \in \mathfrak{ym}(n)^l$, $w \in \mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))$. La inversa de t está dada por la multiplicación $v \otimes w \mapsto vw$.

A su vez, el morfismo suryectivo de espacios vectoriales $\pi_l : \mathfrak{ym}(n) \twoheadrightarrow \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))$ induce el morfismo suryectivo de álgebras $P_l : S(\mathfrak{ym}(n)) \twoheadrightarrow S(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$, y el isomorfismo k-lineal j_l induce un isomorfismo de álgebras $J_l : S(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l\mathfrak{ym}(n))) \to S(\mathfrak{ym}(n)^l)$. Además, el morfismo $J_l \circ P_l$ coincide con $(\mathrm{id}_{\mathfrak{ym}(n)^l} \otimes \epsilon'_{\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))}) \circ t$, y por lo tanto tiene núcleo $t^{-1}(S(\mathfrak{ym}(n)^l) \otimes S_+(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))) = S(\mathfrak{ym}(n)^l)S_+(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$.

Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[r, "P_l"] \arrow[d, "\gamma"] & S(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))) \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[r, "\Pi_l"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))) \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $K_l = \gamma(S(\mathfrak{ym}(n)^l)S_+(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))))$. Luego,

$$K = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \gamma(S(\mathfrak{ym}(n)^l)S_+(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))) = \gamma(\bigcap_{l\in\mathbb{N}} S(\mathfrak{ym}(n)^l)S_+(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))).$$

Para ver que K se anula, como

$$\Big(\bigcap_{l\in\mathbb{N}} S(\mathfrak{ym}(n)^l)S_+(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))\Big) \cap S(\mathfrak{ym}(n)^l) = 0,$$

para todo $l \in \mathbb{N}$, y como $S(\mathfrak{ym}(n)) = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} S(\mathfrak{ym}(n)^l)$, entonces

$$\bigcap_{l\in\mathbb{N}} S(\mathfrak{ym}(n)^l)S_+(\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))) = 0.$$

El lema queda demostrado. □

Dada una representación

$$\psi : \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n)) \to \mathfrak{gl}(V)$$

de un cociente $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n))$ del álgebra de Yang-Mills, obtenemos una representación de $\mathfrak{ym}(n)$ simplemente de componer $\psi \circ \pi_k$. A su vez, todo morfismo f entre dos representaciones V y W del cociente $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n))$, induce un morfismo entre las correspondientes representaciones del álgebra $\mathfrak{ym}(n)$. Esta asignación es funtorial. En consecuencia, obtenemos un funtor k-lineal

$$I_k : {}_{\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathfrak{ym}(n)}\mathrm{Mod},$$

que también se restringe a un funtor i_k entre las subcategorías plenas de módulos de dimensión finita.

Del mismo modo, dados $k, m \in \mathbb{N}$, tales que $k \leq m$, el morfismo de álgebras de Lie $\pi_{k\leq m} : \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \to \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n))$, dado por la proyección canónica induce un funtor k-lineal $I_{k\leq m}$ de la categoría ${}_{\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^k(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{Mod}$ en la categoría ${}_{\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{Mod}$, que también se restringe a las subcategorías plenas de módulos de dimensión finita, que notaremos $i_{k\leq m}$. Es fácil ver que $l_{m\leq p} \circ I_{k\leq m} = I_{k\leq p}$, y que $I_m \circ I_{k\leq m} = l_k$.

Observación 3.1.9. *Notar que los funtores $I_{k\leq m}$ y I_k preservan módulos irreducibles.*

Vemos a continuación la utilidad de estos cocientes cuando se consideran módulos de dimensión finita.

Proposición 3.1.10. *Sea $\phi : \mathfrak{ym}(n) \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación nilpotente de dimensión finita de $\mathfrak{ym}(n)$. Existe $m \in \mathbb{N}$ y un morfismo*

$$\phi' : \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \to \mathfrak{gl}(V),$$

tal que ϕ se puede factorizar como $\phi = \phi' \circ \pi_m$, donde π_m es la proyección canónica de $\mathfrak{ym}(n)$ en $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$.

Demostración. Sea $\mathrm{Ker}(\phi)$ el ideal núcleo de ϕ. Como $\mathrm{Im}(\phi)$ es una subálgebra de Lie nilpontente de dimensión finita de $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathrm{Ker}(\phi)$ es de codimensión finita y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ker}(\phi) \supset \oplus_{j\geq m}\mathfrak{ym}(n)_j$. Como $\oplus_{j\geq m}\mathfrak{ym}(n)_j \supset \mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$, entonces $\mathrm{Ker}(\phi) \supset \mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$. Si definimos

$$\phi' : \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \to \mathfrak{gl}(V)$$

el morfismo inducido por ϕ, resulta que $\phi = \phi' \circ \pi_m$. La proposición queda demostrada. □

Corolario 3.1.11. *La categoría ${}_{\mathfrak{ym}(n),\mathrm{nil}}\mathrm{mod}$ de módulos nilpotentes de dimensión finita sobre $\mathfrak{ym}(n)$ es el colímite filtrante (en la categoría de las categorías k-lineales) de las categorías ${}_{\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{mod}$ de módulos de dimensión finita sobre $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$, $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una categoría k-lineal y sea $\{F_m : {}_{\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{mod} \to \mathcal{C}\}_{m\in\mathbb{N}}$ una colección de funtores k-lineales tales que $F_m \circ I_{l\leq m} = F_l$, si $l \leq m$. Vamos a definir un funtor k-lineal $F : {}_{\mathfrak{ym}(n),\mathrm{nil}}\mathrm{mod} \to \mathcal{C}$ tal que $F = F_m \circ I_m$.

Si M es una representación nilpotente de dimensión finita de $\mathfrak{ym}(n)$ dada por $\phi : \mathfrak{ym}(n) \to \mathfrak{gl}(M)$, por la Proposición 3.1.10 existe un entero positivo $m \in \mathbb{N}$ tal que ϕ puede factorizarse de la forma $\phi_m \circ \pi_m$, donde $\phi_m : \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \to \mathfrak{gl}(M)$, y entonces M puede considerarse como un módulo sobre $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$, que escribiremos M_m. Notar que $I_m(M_m) = M$. Sea $F(M) = F_m(M_m)$.

Esta asignación está bien definida, ya que si existe otro entero positivo $l \in \mathbb{N}$ tal que $\phi = \phi_l \circ \pi_l$, con $\phi_l : \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)) \to \mathfrak{gl}(M)$, y suponiendo que $l \geq m$, resulta que $\phi_m \circ \pi_{m\leq l} = \phi_l$. Para demostrar esta última igualdad procedemos como sigue. Por un lado, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[dr, "\phi_l"] \arrow[dd, "\pi_{m\leq l}"] & \\
\mathfrak{ym}(n) \arrow[ur, "\pi_l"] \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_m"'] & & \mathfrak{gl}(M) \\
 & \mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[ur, "\phi_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Las caras son conmutativas por definición con excepción tal vez de $\phi_m \circ \pi_{m\leq l} = \phi_l$. Como π_l es suryectiva, la igualdad anterior es cierta si y sólo si $\phi_m \circ \pi_{m\leq l} \circ \pi_l = \phi_l \circ \pi_l$. Esta igualdad es cierta ya que $\phi_m \circ \pi_{m\leq l} \circ \pi_l = \phi_m \circ \pi_m = \phi = \phi_l \circ \pi_l$. Por lo tanto, $M_l = I_{m\leq l}(M_m)$, y en consecuencia $F_l(M_l) = F_l \circ I_{m\leq l}(M_m) = F_m(M_m)$.

Sean M y N dos representaciones nilpotentes de dimensión finita sobre $\mathfrak{ym}(n)$ y $f : M \to N$ un morfismo entre ellas, i.e., tenemos dos morfismos de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{ym}(n) \to \mathfrak{gl}(M)$, $\psi : \mathfrak{ym}(n) \to \mathfrak{gl}(N)$ tales que $f(\phi(x)(y)) = \psi(x)(f(y))$, si $x \in \mathfrak{ym}(n)$, $y \in M$. Por la Proposition 3.1.10, existe un entero positivo $m \in \mathbb{N}$ tal que ϕ y ψ se pueden factorizar de la forma $\phi_m \circ \pi_m$ y $\psi_m \circ \pi_m$, respectivamente. Denotaremos M_m y N_m estos módulos. Se sigue directamente de las definiciones que f es también un morfismo de módulos sobre $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$, que denotaremos f_m. Notar que $I_m(f_m) = f$. Sea $F(f) = F_m(f_m)$.

Análogamente, esta asignación está bien definida, ya que, si existe otro $l \in \mathbb{N}$ tal que $\phi = \phi_l \circ \pi_l$ y $\psi = \psi_l \circ \pi_l$, y suponiendo que $l \geq m$, resulta que $\phi_{m\leq l} \circ \phi_m = \phi_l$ y $\psi_{m\leq l} \circ \psi_m = \psi_l$. Finalmente, $f_l = I_{m\leq l}(f_m)$, con lo que $F_l(f_l) = F_l \circ I_{m\leq l}(f_m) = F_m(f_m)$. Por definición, $F_m = F \circ I_m$, ya que, si $M \in {}_{\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{mod}$, entonces $(I_m(M))_m = M$, y si $f : M \to N$ es un morfismo entre objetos de ${}_{\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{mod}$, entonces $(I_m(f))_m = f$. La unicidad es trivial. $\square$

Por la proposición anterior, vemos trivialmente que todo módulo nilpotente irreducible de dimensión finita sobre $\mathfrak{ym}(n)$ es un módulo irreducible sobre $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^m(\mathfrak{ym}(n))$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Cómo ésta última es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, basta entonces encontrar los módulos irreducibles de dimensión finita para este tipo de álgebras. Del Lema 2.2.5 y la Proposición 3.1.10, resulta el siguiente teorema:

Teorema 3.1.12. *Toda representación nilpotente irreducible de dimensión finita no trivial del álgebra de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(n)$ es de dimensión 1. Más aún, el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones nilpotentes irreducibles de dimensión finita no triviales de $\mathfrak{ym}(n)$ está parametrizado por k^n.*

Demostración. El primer enunciado es consecuencia del Lema 2.2.5 y la Proposición 3.1.10. Para demostrar el segundo enunciado, definimos la siguiente familia de representaciones de $\mathfrak{ym}(n)$. Dado $(c) \in k^n$, sea $V_{(c)} = k.v_{(c)}$, con la acción siguiente: si $z \in \mathfrak{g}$, la clase de z en $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^1(\mathfrak{ym}(n))$ puede escribirse

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i,$$

y la acción está dada por

$$z.v_{(c)} = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i v_{(c)}.$$

La demostración del lema anterior se aplica en este caso también para probar que toda representación nilpotente irreducible de dimensión finita de $\mathfrak{ym}(n)$ es de esta forma, y evidentemente, $V_{(c)} \simeq V_{(c')}$ si y sólo si $(c) = (c')$. $\square$

Observación 3.1.13. *El teorema anterior es válido no sólo para las álgebras de Yang-Mills, sino también para cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ provista de una $\mathbb{N}$-graduación localmente de dimensión finita, en cuyo caso el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones nilpotentes irreducibles no triviales de dimensión finita de está parametrizado por $k^{\mathfrak{g}/C^1(\mathfrak{g})}$.*

3.2 Propiedades homológicas del álgebra de Yang-Mills

3.2.1 Generalidades

En esta subsección recordaremos propiedades homológicas de $\mathrm{YM}(n)$, explicitando los complejos que serán usados posteriormente.

El álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ es, como hemos visto, un álgebra homogénea cúbica. Esto es útil desde el punto de vista homológico, ya que de acuerdo con [BDVW], $\mathrm{YM}(n)$ posee un 3-complejo de $\mathrm{YM}(n)$-módulos a izquierda asociado

$$0 \to \mathrm{YM}(n) \otimes (\mathrm{YM}(n)^!_4)^* \xrightarrow{b_4} \mathrm{YM}(n) \otimes (\mathrm{YM}(n)^!_3)^* \xrightarrow{b_3} \mathrm{YM}(n) \otimes (\mathrm{YM}(n)^!_2)^* \xrightarrow{b_2} \mathrm{YM}(n) \otimes (\mathrm{YM}(n)^!_1)^* \xrightarrow{b_1} \mathrm{YM}(n) \to 0, \tag{3.2.1}$$

donde $\mathrm{YM}(n)^!$ es el álgebra 3-homogénea dual de de $\mathrm{YM}(n)$. Recordemos que si A es una k-álgebra N-homogénea ($N \geq 2$) de la forma $A = TV/\langle R \rangle$, con $R \subseteq V^{\otimes N}$, se define el **álgebra N-homogénea dual** $A^!$ como el cociente $T(V^*)/\langle R^\perp \rangle$, donde $R^\perp \subseteq (V^*)^{\otimes N} \simeq (V^{\otimes N})^*$ es el anulador de R. En ese caso, el **N-complejo de Koszul (a izquierda) de** A es

$$\dots \xrightarrow{b_{n+1}} A \otimes (A^!_n)^* \xrightarrow{b_n} \dots \xrightarrow{b_3} A \otimes (A^!_2)^* \xrightarrow{b_2} A \otimes (A^!_1)^* \xrightarrow{b_1} A \to 0, \tag{3.2.2}$$

donde $(A^!_i) \subseteq V^{\otimes i}$ y la diferencial b_i es la inducida por la multiplicación

$$a \otimes (e_1 \otimes \cdots \otimes e_i) \mapsto ae_1 \otimes \cdots \otimes e_i.$$

Notar que, a partir de las identificaciones anteriores, las diferenciales del N-complejo obtenido son homogéneas de grado 0.

De este N-complejo, se pueden extraer los complejos $C_{p,r}(A)$, con $0 \leq r \leq N-2$ y $r+1 \leq p \leq N-1$, de la forma

$$\dots \xrightarrow{b^{N-p}} A \otimes (A^!_{N+r})^* \xrightarrow{b^p} A \otimes (A^!_{N-p+r})^* \xrightarrow{b^{N-p}} A \otimes (A^!_r)^* \xrightarrow{b^p} 0. \tag{3.2.3}$$

Proposición 3.2.1. *Sea $A = TV/\langle R \rangle$ un álgebra N-homogénea, con $N \geq 3$, y sea $(p,r) \in \mathbb{N}_0$ tales que $0 \leq r \leq N-2$ y $r+1 \leq p \leq N-1$ pero $(p,r) \neq (N-1,0)$. Si $C_{p,r}(A)$ es exacto en grado $i=1$, luego $R = 0$ o $R = V^{\otimes N}$.*

Demostración. Cf. [BDVW], Prop. 4. □

Siguiendo a [Ber1] y [BDVW], el complejo $C_{N-1,0}(A)$ se denomina **complejo de Koszul** de A, y si este complejo es exacto en grados positivos A se denomina un **álgebra de Koszul**. Esta definición generaliza la dada por Priddy en el caso $N=2$ (cf. [Pri]).

La siguiente proposición caracteriza el álgebra homogénea dual del álgebra de Yang-Mills y su demostración es directa.

Proposición 3.2.2. *Sea $\mathrm{YM}(n) = TV(n)/\langle R(n) \rangle$ el álgebra 3-homogénea de Yang-Mills. Si denotamos $\mathcal{B}^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ la base dual de $V(n)^*$, entonces las componentes homogéneas del álgebra homogénea dual al álgebra de Yang-Mills están dadas por*

$$\mathrm{YM}(n)^!_0 = \mathbb{C}1, \qquad \mathrm{YM}(n)^!_2 = \bigoplus_{i,j=1}^n \mathbb{C}x_i^* x_j^*, \qquad \mathrm{YM}(n)^!_4 = \mathbb{C}z^2,$$

$$\mathrm{YM}(n)^!_1 = V^*, \qquad \mathrm{YM}(n)^!_3 = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}x_l^* z, \qquad \mathrm{YM}(n)^!_i = 0,$$

si $i > 4$ y $z = \sum_{i=1}^n (x_i^*)^2$ es un elemento central de $\mathrm{YM}(n)^!$.

Demostración. Cf. [CD1], Prop. 1. □

De la proposición anterior se obtienen los siguientes isomorfismos k-lineales que usaremos para describir explícitamente las diferenciales del complejo de Koszul del álgebra de Yang-Mills:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{YM}(n)^!_1)^* \simeq V(n), \\
&(\mathrm{YM}(n)^!_2)^* \simeq V(n)^{\otimes 2}, \\
&(\mathrm{YM}(n)^!_3)^* \simeq R(n), \\
&(\mathrm{YM}(n)^!_4)^* \simeq (V(n) \otimes R) \cap (R \otimes V(n)).
\end{aligned}$$

Los dos primeros isomorfismos son claros, y provienen del isomorfismo $(V^*)^* \simeq V$. Para demostrar el tercero, sólo debemos recordar que si $F \leq E$ son dos espacios vectoriales, entonces $E^*/F^\perp \simeq F^*$. Finalmente, razonamos como sigue: si $F, F' \leq E$ son espacios vectoriales, entonces

$$F \cap F' \simeq (E^*/(F \cap F')^\perp)^* \simeq E^*/(F^\perp + F'^\perp),$$

ya que $(F \cap F')^\perp = F^\perp + F'^\perp$. Al aplicar este resultado para $F = V(n) \otimes R$, $F = R \otimes V(n)$ y $E = V(n)^{\otimes 4}$, demostramos el último isomorfismo.

En este caso, el complejo de Koszul asociado al 3-complejo (3.2.1) es

$$0 \longrightarrow \mathrm{YM}(n) \otimes (\mathrm{YM}(n)^!_4)^* \xrightarrow{b_4} \mathrm{YM}(n) \otimes (\mathrm{YM}(n)^!_3)^* \xrightarrow{b_2 \circ b_3} \mathrm{YM}(n) \otimes (\mathrm{YM}(n)^!_1)^* \xrightarrow{b_1} \mathrm{YM}(n) \longrightarrow 0. \tag{3.2.4}$$

Veremos que este complejo es exacto en grados positivos , es decir, que $\mathrm{YM}(n)$ es Koszul.

Definimos la sucesión de $\mathrm{YM}(n)$-módulos a izquierda de la forma

$$0 \longrightarrow \mathrm{YM}(n) \xrightarrow{\delta_3} \mathrm{YM}(n)^n \xrightarrow{\delta_2} \mathrm{YM}(n)^n \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{YM}(n) \xrightarrow{\delta_0} k \longrightarrow 0, \tag{3.2.5}$$

donde las diferenciales están dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_0(z) &= \epsilon_{\mathfrak{ym}(n)}(z), \\
\delta_1(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{i=1}^{n} z_i x_i, \\
\delta_2(z_1, \dots, z_n) &= (\sum_{i=1}^{n} z_i M_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} z_i M_{in}), \\
\delta_3(z) &= (z x_1, \dots, z x_n),
\end{aligned}$$

para $z \in \mathrm{YM}(n)$, y

$$M_{ij} = \begin{cases} x_i x_j - 2 x_j x_i, & \text{si } i \neq j, \\ \sum_{l \neq i} x_l^2, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Esta sucesión es un complejo, i.e., $\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0$ $(i = 0, 1, 2)$, como se puede verificar directamente. Más aún, podemos ver que es exacta. Entonces resulta una resolución libre, y por lo tanto proyectiva, de k como $\mathrm{YM}(n)$-módulo. Además, como la resolución proyectiva (3.2.5) es minimal en la categoría graduada (cf. [CD1], Thm. 1, [Ber2]), obtenemos que la dimensión global de $\mathrm{YM}(n)$ es 3.

Observación 3.2.3. *Notar que la resolución anterior está compuesta únicamente de morfismos homogéneos: δ_0 es homogéneo de grado 0, δ_1 y δ_3 son homogéneos de grado 2 y δ_2 es homogéneo de grado 4, para la graduación especial. En consecuencia, si trasladamos la graduación de los $\mathrm{YM}(n)$-módulos graduados del complejo (i.e., aplicamos el funtor suspensión en la categoría de $\mathrm{YM}(n)$-módulos graduados) de manera apropiada, podemos considerar la resolución anterior en la categoría graduada (con morfismos homogéneos de grado 0), como mostraremos más adelante.*

Por otro lado, el subcomplejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{YM}(n) \xrightarrow{\delta_3} \mathrm{YM}(n)^n \xrightarrow{\delta_2} \mathrm{YM}(n)^n \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{YM}(n) \longrightarrow 0$$

es isomorfo (en la categoría graduada con morfismos homogéneos) al complejo de Koszul de $YM(n)$ y es exacto para grados positivos, luego $\mathrm{YM}(n)$ resulta Koszul.

Hemos obtenido

Proposición 3.2.4 (cf. [CD1], Thm. 1)**.** *El álgebra de Yang-Mills es Koszul de dimensión global* 3.

Vamos a presentar ahora una forma especial de la resolución de Koszul (3.2.5), teniendo en cuenta la estructura graduada de $\mathrm{YM}(n)$ y la acción de $\mathfrak{so}(n)$, es decir, vamos a presentar una resolución de k en la categoría de $\mathrm{YM}(n)$-módulos graduados (con la graduación usual), con morfismos homogéneos de grado 0 y provistos de una acción de $\mathfrak{so}(n)$, **compatible** con la acción de $\mathrm{YM}(n)$, es decir, si W es un tal $\mathrm{YM}(n)$-módulo, entonces

$$x.(zw) = (x.z)w + z(x.w),$$

para todo $x \in \mathfrak{so}(n)$, $z \in \mathrm{YM}(n)$ y $w \in W$, y donde . indica tanto la acción de $\mathfrak{so}(n)$ en $\mathrm{YM}(n)$ como en W.

Recordamos que $V(n)$ es un espacio vectorial graduado concentrado en grado 1.

Consideramos la resolución de k de la forma

$$0 \to \mathrm{YM}(n)[-4] \xrightarrow{b_3'} \mathrm{YM}(n) \otimes V(n)[-2] \xrightarrow{b_2'} \mathrm{YM}(n) \otimes V(n) \xrightarrow{b_1'} \mathrm{YM}(n) \xrightarrow{b_0'} k \to 0. \tag{3.2.6}$$

con diferenciales

$$\begin{aligned} b_3'(z) &= \sum_{i=1}^{n} z x_i \otimes x_i, \\ b_2'(z \otimes x_i) &= \sum_{j=1}^{n} (z x_j^2 \otimes x_i - 2 z x_j x_i \otimes x_j + z x_i x_j \otimes x_j), \\ b_1'(z \otimes x_i) &= z x_i, \\ b_0'(z) &= \epsilon_{\mathfrak{ym}(n)}(z). \end{aligned}$$

Es directo chequear que el complejo anterior es isomorfo al complejo (3.2.4) en la categoría de $\mathrm{YM}(n)$-módulos a izquierda, sin tener en cuenta la graduación o la acción de $\mathfrak{so}(n)$. Como cada diferencial es homogénea de grado 0, (3.2.6) es una resolución en la categoría de $\mathrm{YM}(n)$-módulos a izquierda graduados, con morfismos homogéneos de grado 0. Más aún, es fácil ver que las diferenciales son $\mathfrak{so}(n)$-lineales.

Dado un $\mathrm{YM}(n)$-módulo a izquierda W graduado, provisto con una acción de $\mathfrak{so}(n)$ compatible con la acción de $\mathrm{YM}(n)$, si aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{YM}(n)}(-, W)$ a la resolución (3.2.6), obtenemos el complejo, que notaremos que notaremos $(C^{\bullet}(\mathrm{YM}(n), W), d)$,

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{d^1} W \otimes V(n)[2] \xrightarrow{d^2} W \otimes V(n)[4] \xrightarrow{d^3} W[4] \longrightarrow 0, \tag{3.2.7}$$

luego de aplicar los siguientes isomorfismos $\mathrm{YM}(n)$-lineales homogéneos de grado 0 y $\mathfrak{so}(n)$-equivariantes dados por $\mathrm{Hom}_{\mathrm{YM}(n)}(\mathrm{YM}(n)[d], W) \simeq W[2-d]$ y

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{YM}(n)}(\mathrm{YM}(n) \otimes V(n)[d], W) &\xrightarrow{\simeq} W \otimes V(n)[-d] \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^{n} f(1 \otimes x_i) \otimes x_i, \end{aligned}$$

donde $d \in \mathbb{Z}$. Las diferenciales están dadas por

$$\begin{aligned} d^1(w) &= \sum_{i=1}^{n} x_i w \otimes x_i, \\ d^2(w \otimes x_i) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 w \otimes x_i + x_j x_i w \otimes x_j - 2 x_i x_j w \otimes x_j), \\ d^3(w \otimes x_i) &= x_i w. \end{aligned}$$

Análogamente, sea W un $\mathrm{YM}(n)$-módulo a derecha graduado, provisto con una acción de $\mathfrak{so}(n)$ compatible con la acción de $\mathrm{YM}(n)$. Si aplicamos el funtor $W \otimes_{\mathrm{YM}(n)} (-)$ a la resolución (3.2.6) y usamos los isomorfimos $\mathrm{YM}(n)$-lineales graduados homogéneos de grado 0 y $\mathfrak{so}(n)$-equivariantes $W \otimes_{\mathrm{YM}(n)} \mathrm{YM}(n)[d] \simeq W[d]$ y

$$\begin{aligned} W \otimes_{\mathrm{YM}(n)} \mathrm{YM}(n) \otimes V(n)[d] &\xrightarrow{\simeq} W \otimes V(n)[d] \\ w \otimes_{\mathrm{YM}(n)} 1 \otimes x_i &\mapsto w \otimes x_i, \end{aligned}$$

donde $d \in \mathbb{Z}$, obtenemos el complejo, que notaremos $(C_{\bullet}(\mathrm{YM}(n), W), d)$,

$$0 \longrightarrow W[-4] \xrightarrow{d_3} W \otimes V(n)[-2] \xrightarrow{d_2} W \otimes V(n) \xrightarrow{d_1} W \longrightarrow 0, \tag{3.2.8}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1(w \otimes x_i) &= w x_i, \\ d_2(w \otimes x_i) &= \sum_{j=1}^{n} (w x_j^2 \otimes x_i + w x_i x_j \otimes x_j - 2 w x_j x_i \otimes x_j), \\ d_3(w) &= \sum_{i=1}^{n} w x_i \otimes x_i. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{YM}(n)$ es un álgebra de Hopf, si W es $\mathrm{YM}(n)$-módulo a izquierda graduado provisto con una acción de $\mathfrak{so}(n)$ compatible con la acción de $\mathrm{YM}(n)$, empleando la antípoda S de $\mathrm{YM}(n)$ (que es un morfismo homogéneo de grado 0), W resulta también un $\mathrm{YM}(n)$-módulo a derecha graduado provisto con una acción de $\mathfrak{so}(n)$ compatible con la acción de $\mathrm{YM}(n)$. A su vez, $V(n)$ está concentrado (en grado 1), por lo que $W \otimes V(n)[d] \simeq (W \otimes V(n))[d], \forall\, d \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto, de comparar los complejos (3.2.7) y (3.2.8), obtenemos que $(C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W), d')[4] = (C^\bullet(\mathrm{YM}(n), W), d)$, donde $(d')^\bullet = (-1)^\bullet d^\bullet$. Lo anterior implica que $H^i(\mathfrak{ym}(n), W) = H_i(\mathfrak{ym}(n), W) = 0$, si $i > 3$, y también,

$$H^i(\mathfrak{ym}(n), W) = H_{3-i}(\mathfrak{ym}(n), W)[4],$$

para $0 \leq i \leq 3$. En otras palabras, al ver las series de Hilbert,

$$H^i(\mathfrak{ym}(n), W)(t) = H_{3-i}(\mathfrak{ym}(n), W)(t)t^{-4}.$$

Esta relación entre la homología y la cohomología se denomina usualmente **dualidad de Poincaré**, por su parecido con el caso de la cohomología de de Rham de variedades diferenciables compactas.

Hemos demostrado

Proposición 3.2.5. *(cf. [CD1], Eq. (1.15)) La cohomología del álgebra de Yang-Mills con coeficientes en un* $\mathrm{YM}(n)$*-módulo graduado* W*, provisto con una acción de* $\mathfrak{so}(n)$ *compatible con la acción de* $\mathrm{YM}(n)$ *coincide con la cohomología del complejo* (3.2.7)*. Análogamente, la homología del álgebra de Yang-Mills con coeficientes en un* $\mathrm{YM}(n)$*-módulo graduado* W*, provisto con una acción de* $\mathfrak{so}(n)$ *compatible con la acción de* $\mathrm{YM}(n)$ *coicide con la homología del complejo* (3.2.8)*. Ambas complejos satisfacen que* $(C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W), d')[4] = (C^\bullet(\mathrm{YM}(n), W), d)$*, donde* $(d')^\bullet = (-1)^\bullet d^\bullet$*, lo que implica que* $H^i(\mathfrak{ym}(n), W) = H_{3-i}(\mathfrak{ym}(n), W)[4]$*, para* $0 \leq i \leq 3$*.*

Notar que la resolución de Chevalley-Eilenberg de k es una resolución en la categoría de $\mathrm{YM}(n)$-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0, provistos de una acción de $\mathfrak{so}(n)$ compatible con la acción de $\mathrm{YM}(n)$. Si W es un $\mathrm{YM}(n)$-módulo a izquierda (resp. a derecha) graduado provisto de una acción de $\mathfrak{so}(n)$ compatible con la acción de $\mathrm{YM}(n)$, vemos directamente que los morfismos del complejo de Chevalley-Eilenberg para la cohomología (resp. homología) de $\mathrm{YM}(n)$ con coeficientes en W son homogéneos de grado 0 y son $\mathfrak{so}(n)$-lineales.

Más adelante, será útil comparar las resoluciónes de Chevalley-Eilenberg y la resolución de Koszul de k. Para ello, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \wedge^4 \mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "\delta_4"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \wedge^3 \mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "\delta_3"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \wedge^2 \mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "\delta_2"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "\delta_1"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[r, "\delta_0"] & k \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))[-4] \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "b'_3"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes V(n)[-2] \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "b'_2"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes V(n) \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} \otimes \mathrm{inc}"] \arrow[r, "b'_1"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[u, equal] \arrow[r, "b'_0"] & k \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

$$\eta(z \otimes x_i) = \sum_{j=1}^{n} (z x_j \otimes x_j \wedge x_i + z \otimes x_j \wedge [x_j, x_i]), \tag{3.2.9}$$

$$\theta(z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} z \otimes x_i \wedge x_j \wedge [x_j, x_i]. \tag{3.2.10}$$

Se puede comprobar directamente que las aplicaciones anteriores forman un morfismo de complejos. Más aún, este morfismo es $\mathrm{YM}(n)$-lineal a izquierda, homogéneo de grado 0 y $\mathfrak{so}(n)$-equivariante.

Ejemplo 3.2.6. *Como una aplicación sencilla del complejo de Koszul* (3.2.8)*, vamos a calcular la homología de Hochschild de* $\mathrm{YM}(2)$*, es decir, vamos a calcular* $HH_\bullet(\mathrm{YM}(n)) \simeq H_\bullet(\mathfrak{ym}(2), \mathrm{YM}(2))$ *(isomorfismo homogéneo de grado cero). El cálculo de esta homología ya es conocido en la literatura (cf. [Nu], Chap. III, Théorèm 3.2, aunque en ese caso las homologías obtenidas no son espacios vectoriales graduados). Por el Corolario 2.2.4,* $\mathrm{YM}(2) \simeq S(\mathfrak{ym}(2))$ *como* $\mathfrak{ym}(2)$*-módulos graduados con isomorfismo homogéneo de grado cero.*

Por lo tanto, $HH_\bullet(\mathrm{YM}(n)) \simeq H_\bullet(\mathfrak{ym}(2), \mathrm{YM}(2)) \simeq H_\bullet(\mathfrak{ym}(2), S(\mathfrak{ym}(2)))$ *(isomorfismo homogéneo de grado cero). Por el Ejemplo 3.1.2, podemos considerar a* $\mathfrak{ym}(2)$ *con base como* k*-espacio vectorial dada por* $\{x, y, z\}$*, tales que* $[x, y] = z$ *y* $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{ym}(2))$*. Notar que con la graduación usual,* x *e* y *tienen grado* 1*, mientras que* z *tiene grado* 2*. Escribiremos* $k[x, y, z]$ *en lugar de* $S(\mathfrak{ym}(2))$*.*

Se puede demostrar directamente que la acción (a derecha) de $\mathfrak{ym}(2)$ en $k[x,y,z]$ está dada por

$$\begin{aligned}p.x &= -z\frac{\partial p}{\partial y},\\ p.y &= z\frac{\partial p}{\partial x},\\ p.z &= 0,\end{aligned}$$

para todo $p \in k[x,y,z]$.

Dado $p \in k[x,y,z]$ de la forma

$$p = \sum_{(i,j,l)\in\mathbb{N}_0^3} a_{i,j,l}x^i y^j z^l$$

definimos

$$\int p dx = \sum_{(i,j,l)\in\mathbb{N}_0^3} a_{i,j,l}\frac{x^{i+1}}{i+1}y^j z^l.$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\int p dx = p,$$

mientras que

$$\int \frac{\partial p}{\partial x}dx = p - p(0,y,z).$$

Valen resultados análogos para las variables y y z. Se puede probar directamente que

$$\frac{\partial}{\partial y}\int p dx = \int \frac{\partial p}{\partial y}dx, \tag{3.2.11}$$

y del mismo modo para la variable z.

El complejo de Koszul es de la forma

$$0 \longrightarrow k[x,y,z][-4] \xrightarrow{d_3} k[x,y,z]\otimes V(2)[-2] \xrightarrow{d_2} k[x,y,z]\otimes V(2) \xrightarrow{d_1} k[x,y,z] \longrightarrow 0, \tag{3.2.12}$$

donde las diferenciales son

$$\begin{aligned}d_1(p\otimes x + q\otimes y) &= z(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}),\\ d_2(p\otimes x + q\otimes y) &= z^2(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\otimes x + \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}\otimes y + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\otimes y + \frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y}\otimes x),\\ d_3(r) &= -z\frac{\partial r}{\partial y}\otimes x + z\frac{\partial r}{\partial x}\otimes y,\end{aligned}$$

donde $p,q,r \in k[x,y,z]$.

Esto implica directamente que $H_3(\mathfrak{ym}(2),\mathrm{YM}(2)) \simeq \mathrm{Ker}(d_3)$. Pero $r \in \mathrm{Ker}(d_3)$ si y sólo si sus derivadas parciales con respecto a x e y son nulas, es decir, si $r \in k[z]$. En consecuencia, resulta el isomorfismo homogéneo de grado cero $HH_3(\mathrm{YM}(2)) \simeq k[z][-4]$. Más aún, por la dualidad de Poincaré, vemos que $HH^0(\mathrm{YM}(2)) \simeq \mathcal{Z}(\mathrm{YM}(2)) = k[z]$.

Por otro lado, es fácil probar el isomorfismo homogéneo de grado cero $HH_0(\mathrm{YM}(2)) \simeq k[x,y]$, ya que la imagen de d_1 es cualquier polinomio de la forma zp, con $p \in k[x,y,z]$.

Vamos a calcular $HH_2(\mathrm{YM}(2))$. Para ello, sea $p\otimes x + q\otimes y \in \mathrm{Ker}(d_2)$. Esto es equivalente a las condiciones siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0.$$

Si escribimos

$$p = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} p_i z^i, \qquad q = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} q_i z^i,$$

donde $p_i, q_i \in k[x,y]$, $\forall\, i \in \mathbb{N}_0$, las condiciones anterior son equivalente a lo siguiente: Para todo $i \in \mathbb{N}_0$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\right) = 0.$$

Por lo tanto, para todo $i \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} = c_i \in k. \tag{3.2.13}$$

Si $r \in k[x,y,z]$ y escribimos

$$r = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_i z^i,$$

con $r_i \in k[x,y]$, entonces

$$d_3(r) = -\sum_{i \in \mathbb{N}_0} z^{i+1}\frac{\partial r_i}{\partial y} \otimes x + z^{i+1}\frac{\partial r_i}{\partial x} \otimes y.$$

Elegimos r tal que

$$r_i = \int q_{i+1} dx - \int p_{i+1}(0,y)dy, \forall\, i \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2.14}$$

Por lo tanto, el ciclo inicial $p \otimes x + q \otimes y$ es equivalente a

$$p\otimes x+q\otimes y-d_3(r) = p_0\otimes x+q_0\otimes y+\sum_{i\in\mathbb{N}}(z^i(p_i+\frac{\partial r_{i-1}}{\partial y})\otimes x+z^i(q_i-\frac{\partial r_{i-1}}{\partial x})\otimes y) = p_0\otimes x+q_0\otimes y+\sum_{i\in\mathbb{N}} z^i(p_i+\frac{\partial r_{i-1}}{\partial y})\otimes x.$$

Por las identidades (3.2.13) *y* (3.2.14)*, vemos que*

$$\begin{aligned} p_i + \frac{\partial r_{i-1}}{\partial y} &= p_i + \frac{\partial}{\partial y}(\int q_i dx - \int p_i(0,y)dy) \\ &= p_i + \int \frac{\partial q_i}{\partial y} dx - p_i(0,y) \\ &= p_i + \int (c_i - \frac{\partial p_i}{\partial x}) dx - p_i(0,y) = c_i x. \end{aligned}$$

En consecuencia, $p \otimes x + q \otimes y$ es equivalente al ciclo

$$p_0 \otimes x + q_0 \otimes y + \sum_{i \in \mathbb{N}} z^i c_i x \otimes x.$$

Vemos que, si $c_i \neq 0$, $z^i c_i x \otimes x$ no puede ser un borde (ya que para un borde es $c_i = 0$). Como es un ciclo, debe satisfacer además que

$$\frac{\partial q_0}{\partial y} = c_0 - \frac{\partial p_0}{\partial x},$$

y por lo tanto

$$q_0 = c_0 y - \int \frac{\partial p_0}{\partial x} dy + h,$$

donde $h \in k[x]$ es un polinomio cualquiera. Por lo tanto, el ciclo $p \otimes x + q \otimes y$ es equivalente a

$$p_0 \otimes x + c_0 y \otimes y - \int \frac{\partial p_0}{\partial x} dy \otimes y + h \otimes y + \sum_{i \in \mathbb{N}} z^i c_i x \otimes x.$$

Más aún, si elegimos los ciclos de la forma anterior, para $h = x^{i_1} \in k[x]$, $p_0 = x^{i_2} y^{i_3} \in k[x,y]$ y $c_i = \delta_{i,i_4} \in k$, con $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N}_0$, éstos forman una base de la homología $HH_2(\mathrm{YM}(2))$.

Del mismo modo, podemos calcular la homología $HH_1(\mathrm{YM}(2))$. Si $p \otimes x + q \otimes y$ es un ciclo, entonces

$$\frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial y} = 0,$$

para todo $i \in \mathbb{N}_i$. Por lo tanto, existe $r_i \in k[x,y]$ tal que

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} = p_i, \qquad \frac{\partial r_i}{\partial y} = q_i,$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Si elegimos p'_i y q'_i tales que

$$\frac{\partial p'_{i-2}}{\partial x} + \frac{\partial q'_{i-2}}{\partial y} = r_i,$$

para todo $i \geq 2$, $p \otimes x + q \otimes y$ es equivalente a

$$p_0 \otimes x + q_0 \otimes y + zp_1 \otimes x + zq_1 \otimes y = \frac{\partial r_0}{\partial x} \otimes x + \frac{\partial r_0}{\partial y} \otimes y + z\frac{\partial r_1}{\partial x} \otimes x + z\frac{\partial r_1}{\partial y} \otimes y.$$

Más aún, vemos directamente que la colección de ciclos anteriores con $r_0 = x^{i_1}y^{i_2} \in k[x,y]$ y $r_1 = x^{i_3}y^{i_4} \in k[x,y]$, con $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N}_0$ y $(i_1,i_2) \neq (0,0)$, $(i_3,i_4) \neq (0,0)$, forman una base de $HH_1(\mathrm{YM}(2))$.

3.2.2 El álgebra $\mathrm{TYM}(n)$

En esta subsección vamos a presentar de manera detallada las demostraciones de los resultados mencionados en [MS], que en muchos casos están incompletas o son incorrectas. Realizaremos para ello varios cálculos (co)homológicos, con el objetivo de probar que $\mathrm{TYM}(n)$ es un álgebra libre.

Definimos los morfismos d_i, $i = 1, \dots, n$, dados por

$$\begin{aligned} d_i : V(n) &\to V(n) \\ d_i(x_j) &= \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

que se extienden de forma única a derivaciones d_i, $i = 1, \dots, n$, en $TV(n)$. Como

$$d_i([x_j, x_k]) = d_i(x_j x_k - x_k x_j) = \delta_{ij} x_k + x_j \delta_{ik} - \delta_{ik} x_j - x_k \delta_{ij} = 0 \tag{3.2.16}$$

para todo $i, j, k = 1, \dots, n$, entonces

$$d_i(\sum_{j=1}^{n} [x_j, [x_j, x_k]]) = 0$$

para todo $i, k = 1, \dots, n$. Esto implica que cada d_i induce una derivación en $TV(n)/\langle R(n) \rangle = \mathrm{YM}(n)$, que denotaremos también d_i, $i = 1, \dots, n$.

Empecemos caracterizando $\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$ como subálgebra de $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) = \mathrm{YM}(n)$:

Proposición 3.2.7. *La inclusión $\mathrm{inc} : \mathfrak{tym}(n) \hookrightarrow \mathfrak{ym}(n)$ induce un monomorfismo de álgebras $\mathcal{U}(\mathrm{inc}) : \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n)) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$. Más aún, la imagen de este morfismo es exactamente*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(d_i).$$

Demostración. El primer enunciado es una consecuencia inmediata del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (cf. [Dix1], Sec. 2.2.6, Prop. 2.2.7). Como es usual, vamos a identificar $\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$ con su imagen por $\mathcal{U}(\mathrm{inc})$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$.

Veamos el segundo un poco más en detalle. Por un lado, si $z \in \mathfrak{tym}(n) = [\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{ym}(n)]$, entonces (visto dentro de $\mathrm{YM}(n)$), por la identidad (3.2.16), resulta que $d_i(z) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Como $\mathfrak{tym}(n)$ genera el álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$ y d_i es una derivación, cada d_i se anula sobre el álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$, es decir,

$$\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(d_i).$$

Sea ahora $z \in \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$. Elijamos una base ordenada de $\mathfrak{tym}(n)$ (como k-espacio vectorial), que denotaremos $\mathcal{B}' = \{y_j : j \in J\}$. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \mathcal{B}'$ es una base ordenada de $\mathfrak{ym}(n)$ (como k-espacio vectorial). Por el Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt,

$$z = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_l \in J \text{ distintos} \\ (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{N}_0^{n+l}}} c^{j_1,\dots,j_l}_{(r_1,\dots,r_n,s_1,\dots,s_l)} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} y_{j_1}^{s_1} \dots y_{j_l}^{s_l}.$$

Entonces,

$$d_i(z) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_l \in J \text{ distintos} \\ (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{N}_0^{n+l}}} c^{j_1,\dots,j_l}_{(r_1,\dots,r_n,s_1,\dots,s_l)} r_i x_1^{r_1} \dots x_i^{r_i - 1} \dots x_n^{r_n} y_{j_1}^{s_1} \dots y_{j_l}^{s_l},$$

ya que $d_i(x_j^p) = p x_j^{p-1} \delta_{ij}$ y $d_i(y_{j_m}) = 0$, $m = 1, \dots, l$.

Supongamos que $d_i(z) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Nuevamente, del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt resulta que $r_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Esto implica que $z \in \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$, es decir,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(d_i) \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n)).$$

La proposición queda demostrada. □

En el álgebra $\mathrm{YM}(n)$ podemos definir la filtración dada por

$$F^j = \{z \in \mathrm{TYM}(n) : d_i(z) \in F^{j-1}, \forall\, i, 1 \leq i \leq n\},$$

si $j \in \mathbb{N}$, $F^0 = \{0\}$. Notar que $F^1 = \mathrm{TYM}(n)$.

Lema 3.2.8 (cf. [MS], Lemma 28). *La filtración $\{F^j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ definida en $YM(n)$ es creciente, multiplicativa, exhaustiva, Hausdorff y cumple que $x_i \in F^2$, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Demostremos primero por inducción que $\{F^j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ es creciente.

La inclusión $F^0 \subseteq F^1$ es clara.

Supongamos ahora inductivamente que

$$F^0 \subseteq \cdots \subseteq F^m,$$

donde $m \geq 2$. Entonces, si $z \in F^m$, $d_i(z) \in F^{m-1} \subseteq F^m$, para todo $i = 1, \dots, n$, es decir, $d_i(z) \in F^m$, para todo $i = 1, \dots, n$, por lo que $z \in F^{m+1}$. Esto implica que

$$F^0 \subseteq \cdots \subseteq F^m \subseteq F^{m+1}.$$

Por lo tanto, $\{F^j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ es creciente.

Probemos ahora que la filtración $\{F^j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ es multiplicativa, es decir, $F^j F^l \subseteq F^{j+l}$, para todo $j, l \in \mathbb{N}_0$. Lo demostraremos por inducción en $j + l$.

En primer lugar, debemos ver que $F^0 F^0 \subseteq F^0$. Esto es inmediato, ya que $F^0 = \{0\}$ es una subálgebra de $\mathrm{YM}(n)$.

Supongamos ahora que $F^j F^l \subseteq F^{j+l}$, para todo $j, l \in \mathbb{N}_0$ tales que $j + l \leq m$, con $m \geq 1$.

Sean ahora $j, l \in \mathbb{N}_0$ tales que $j + l = m + 1$ y sean $z \in F^j$ y $w \in F^l$. En consecuencia, $d_i(z) \in F^{j-1}$ y $d_i(w) \in F^{l-1}$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Por la identidad de Leibniz y la hipótesis inductiva, $zw \in F^{m+1}$, ya que

$$d_i(zw) = d_i(z)w + zd_i(w) \in F^{j-1}F^l + F^j F^{l-1} \subseteq F^m.$$

Luego $F^j F^l \subseteq F^{j+l}$, para todo $j, l \in \mathbb{N}_0$. Por otro lado, la condición

$$x_i \in F^2, \forall\, i = 1, \dots, n,$$

es inmediata de la definición de d_i, debido a que $d_i(x_j) = \delta_{ij} \in \mathrm{TYM}(n) = F^1$.

Como los elementos $x_1, \dots, x_n$ generan $\mathrm{YM}(n)$, por el Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, y como la filtración es multiplicativa, resulta que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} F^j = \mathrm{YM}(n)$, es decir, la filtración $\{F^j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ es exhaustiva. A su vez, la filtración es Hausdorff, es decir, $\bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} F^j = \{0\}$, ya que $F^0 = \{0\}$. □

El siguiente lema nos será de utilidad

Lema 3.2.9 (cf. [Cou], Lemma 2.2). *Sea A una k-álgebra asociativa unitaria. Si ∂_i, $i = 1, \dots, n$ son las derivaciones usuales de $k[t_1, \dots, t_n]$, definimos las derivaciones $D_i = \mathrm{id}_A \otimes \partial_i$ en el álgebra $A[t_1, \dots, t_n] \simeq A \otimes_k k[t_1, \dots, t_n]$. Dados polinomios $p_1, \dots, p_n \in A[t_1, \dots, t_n]$ que cumplen que $D_i(p_j) = D_j(p_i)$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, entonces existe un polinomio $P \in A[t_1, \dots, t_n]$ tal que $D_i(P) = p_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Observemos primero que dados $i \in \{1, \dots, n\}$ y un polinomio $q \in A[t_1, \dots, t_n]$, existe otro polinomio $Q \in A[t_1, \dots, t_n]$ tal que $D_i(Q) = q$, ya que si escribimos

$$q = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}_0^n} a_{r_1, \dots, r_n} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n},$$

entonces el polinomio

$$Q = \sum_{(r_1,\dots,r_n)\in\mathbb{N}_0^n} (r_i+1)^{-1} a_{r_1,\dots,r_n} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n} t_i,$$

cumple lo pedido. Notar que utilizamos fuertemente que $\mathrm{char}(k) = 0$.

Para probar el lema, demostraremos el siguiente resultado por inducción: Dado $1 \leq m \leq n$, existe un polinomio q tal que $D_i(q) = p_i$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Para $m = 1$ se trata del resultado anterior. Supongamos que es cierto para m fijo con $1 \leq m < n$. Entonces, existe un polinomio q tal que $D_i(q) = p_i$, para todo i tal que $1 \leq i \leq m$.

Consideremos el polinomio $q' = D_{m+1}(q) - p_{m+1}$. Este polinomio cumple que $D_i(q') = 0$, para $i = 1, \dots, m$, lo cual implica que q' sólo posee variables $t_{m+1}, \dots, t_n$, es decir, $q' \in A[t_{m+1}, \dots, t_n]$. Entonces, existe un polinomio $Q \in A[t_{m+1}, \dots, t_n]$ tal que $D_{m+1}(Q) = q'$. Ahora, el polinomio $q - Q$ cumple que $D_i(q - Q) = D_i(q) = P_i$, para $i = 1, \dots, m$, y $D_{m+1}(q - Q) = D_{m+1}(q) - D_{m+1}(Q) = p_{m+1}$. Luego el resultado es cierto para $m + 1$. □

Sea $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$ el graduado asociado del álgebra $\mathrm{YM}(n)$ con la filtración $\{F^j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$, y denotemos $\bar{z}$, la clase en $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$ de un elemento $z \in \mathrm{YM}(n)$.

Observación 3.2.10. *Si A es una k-álgebra filtrada por $\{F^j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ (filtración creciente, multiplicativa, y exhaustiva), se tiene la aplicación*

$$\begin{aligned} \bar{\ } : A &\to \mathrm{Gr}_{F^\bullet}(A) \\ a &\mapsto \bar{a}. \end{aligned}$$

Notar que esta aplicación no es lineal, pero sí multiplicativa. Además, si $z, w \in F^j$ representan dos elementos $\bar{z}, \bar{w} \in F^j/F^{j-1}$, entonces $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Notar que las derivaciones d_i, $i = 1, \dots, n$, inducen morfismos en el graduado asociado, que también son derivaciones y que denotaremos de la misma forma. Esto se debe a lo siguiente: si $z, y \in F^j$ cumplen que $\bar{z} = \bar{y}$, es decir, $z - y \in F^{j-1}$, entonces $d_i(z), d_i(y) \in F^{j-1}$ y $d_i(z) - d_i(y) = d_i(z-y) \in F^{j-2}$. En consecuencia, el morfismo inducido $d_i(\bar{z}) = \overline{d_i(z)}$ está bien definido.

A su vez, este morfismo es una derivación, ya que si $z \in F^j$, $w \in F^l$

$$d_i(\bar{z}\bar{w}) = d_i(\overline{zw}) = \overline{d_i(zw)} = \overline{d_i(z)w + zd_i(w)} = \overline{d_i(z)w} + \overline{zd_i(w)} = d_i(\bar{z})\bar{w} + \bar{z}d_i(\bar{w}),$$

donde $d_i(z)w, zd_i(w) \in F^{j+l-1}$, lo que implica que $\overline{d_i(z)w + zd_i(w)} = \overline{d_i(z)w} + \overline{zd_i(w)}$ (cf. Observación 3.2.10).

Además, F^1/F^0 es una subálgebra de $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$, isomorfa (como álgebra) a $F^1 = \mathrm{TYM}(n)$. De ahora en adelante haremos uso de esta identificación.

Lema 3.2.11 (cf. [MS], Lemma 29). *El álgebra $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) Los elementos $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, conmutan entre sí.

(ii) Los elementos $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, conmutan con la subálgebra F^1/F^0.

(iii) Los elementos $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, y F^1/F^0 generan $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$.

(iv) La subálgebra generada por los elementos $\bar{x}_i$ y F^1/F^0 es isomorfa a $(F^1/F^0) \otimes_k k[t_1, \dots, t_n]$ y por lo tanto existe un isomorfismo de álgebras $(F^1/F^0) \otimes_k k[t_1, \dots, t_n] \simeq \mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$.

Demostración. El primer enunciado es consecuencia directa de la identidad (3.2.16). Para demostrar el segundo enunciado, procedemos análogamente: si $z \in F^1$, entonces

$$d_i([x_j, z]) = [d_i(x_j), z] + [x_j, d_i(z)] = [\delta_{ij}, z] + [x_j, 0] = 0,$$

es decir, $[x_j, z] \in F^1$, para todo $z \in F^1$, $j = 1, \dots, n$.

Sea A la subálgebra de $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$ generada por $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, y F^1/F^0. Los primeros dos ítems implican que existe un morfismo suryectivo de álgebras

$$\begin{aligned} \phi : (F^1/F^0) \otimes_k k[t_1, \dots, t_n] &\to A \\ z \otimes p(t_1, \dots, t_n) &\mapsto p(x_1, \dots, x_n)z. \end{aligned}$$

Notar que ϕ induce un monomorfismo en $F^1/F^0 \simeq F^1/F^0 \otimes k.1$, ya que $F^1/F^0 \subseteq A$. Identificaremos F^1/F^0 con $F^1/F^0 \otimes k.1$.

Por otro lado, si denotamos $\{\partial_i\}_{i=1,\dots,n}$ las derivaciones usuales del álgebra de polinomios de n variables, el álgebra $(F^1/F^0) \otimes_k k[t_1, \dots, t_n]$ está provista de la derivaciones $D_i = \mathrm{id}_{F^1/F^0} \otimes \partial_i$. Notar que $\phi \circ D_i = d_i \circ \phi$, para todo $i = 1, \dots, n$, como resulta de las siguientes igualdades:

$$\phi(D_i(z \otimes t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n})) = \phi(z \otimes r_i t_1^{r_1} \dots t_i^{r_i - 1} \dots t_n^{r_n})) = r_i \bar{x}_1^{r_1} \dots \bar{x}_i^{r_i - 1} \dots \bar{x}_n^{r_n} z = d_i(\bar{x}_1^{r_1} \dots \bar{x}_n^{r_n} z) = d_i(\phi(z \otimes t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n})).$$

Vamos a demostrar que ϕ es un isomorfismo. Supongamos que $I \neq \{0\}$ es su núcleo. Por lo que dijimos antes, $I \cap (F^1/F^0 \otimes k.1) = \{0\}$. Además, de $\phi \circ D_i = d_i \circ \phi$, resulta $D_i(I) \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$.

Sea $z \in I$, $z \neq 0$, que escribimos

$$z = \sum_{(r_1,\dots,r_n) \in \mathbb{N}_0^n} a_{r_1,\dots,r_n} \otimes t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n},$$

donde $a_{r_1,\dots,r_n} \in F^1/F^0$. Entonces, existe una n-upla $(r_1, \dots, r_n)$ tal que $a_{r_1,\dots,r_n} \neq 0$ y no existe otra n-upla $(s_1, \dots, s_n)$ que cumpla que $a_{s_1,\dots,s_n} \neq 0$ y $s_j > r_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. En consecuencia, $D_1^{r_1} \dots D_n^{r_n} z = a_{r_1,\dots,r_n} \neq 0$, y como $D_i(I) \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$, resulta que $a_{r_1,\dots,r_n} \in I$.

Por otro lado, $a_{r_1,\dots,r_n} \in F^1/F^0$, lo que implica $a_{r_1,\dots,r_n} \in (F^1/F^0) \cap I = \{0\}$, que es absurdo, ya que $a_{r_1,\dots,r_n} \neq 0$. Luego ϕ es inyectiva, y por lo tanto un isomorfismo entre A y $(F^1/F^0) \otimes_k k[t_1, \dots, t_n]$.

Vamos a demostrar el tercer ítem por inducción en el índice de la graduación de $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$.

Si $z \in F^1/F^0 = F^1$, es directo.

Supongamos que, si $j \leq m$, con $m \in \mathbb{N}$ fijo, entonces $F^j/F^{j-1} \subseteq A$.

Sea $\bar{z} \in F^{m+1}/F^m$ y sea $z \in F^{m+1}$ un representante. Entonces, $d_i(z) = w_i \in F^m$, para todo $i = 1, \dots, n$. Por la hipótesis inductiva, $\bar{w}_i \in A$, para todo $i = 1, \dots, n$. Estos elementos cumplen que $d_j(\bar{w}_i) = d_i(\bar{w}_j)$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Luego, los elementos $w_i' = \phi^{-1}(\bar{w}_i)$ cumplen que $D_j(w_i') = D_i(w_j')$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Por el Lema 3.2.9, existe un elemento $w' \in F^1/F^0 \otimes k[t_1, \dots, t_n]$ tal que $D_i(w') = w_i'$, $i = 1, \dots, n$.

En consecuencia, si $w = \phi(w') \in A$, $v = z - w$ cumple que $d_i(\bar{v}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, por lo que $v \in F^m$, y entonces $\bar{z} = \bar{w}$. Finalmente, $A = \mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$, y ϕ es un isomorfismo de $(F^1/F^0) \otimes_k k[t_1, \dots, t_n]$ en $\mathrm{Gr}_{F^\bullet}(\mathrm{YM}(n))$. Esto demuestra también el último enunciado, por lo que el lema queda demostrado. $\square$

Consideramos ahora el álgebra graduada $\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)$ con el producto usual, y la graduación dada por la graduación de $\Lambda^\bullet V(n)$ (i.e., consideramos a $\mathrm{YM}(n)$ en grado cero). En este álgebra definimos la diferencial d de grado 1 dada por

$$d(z \otimes w) = \sum_{i=1}^{n} d_i(z) \otimes (x_i \wedge w),$$

donde $z \in \mathrm{YM}(n)$ y $w \in \Lambda^\bullet V(n)$. La identidad $d^2 = 0$ es directa, ya que $x_i \wedge x_i = 0$. Además, d es una derivación (graduada), ya que

$$\begin{aligned} d((z \otimes w)(z' \otimes w')) &= d(zz' \otimes w \wedge w') = \sum_{i=1}^{n} d_i(zz') \otimes (x_i \wedge w \wedge w') = \sum_{i=1}^{n} (d_i(z)z' + z d_i(z')) \otimes (x_i \wedge w \wedge w') \\ &= (\sum_{i=1}^{n} d_i(z) \otimes (x_i \wedge w))(z' \otimes w') + (-1)^{|w|}(z \otimes w)(\sum_{i=1}^{n} d_i(z')) \otimes (x_i \wedge w') \\ &= d(z \otimes w)(z' \otimes w') + (-1)^{|z \otimes w|}(z \otimes w) d(z' \otimes w'). \end{aligned}$$

Si $\epsilon_{\mathfrak{ym}(n)}$ es la aumentación usual de $\mathrm{YM}(n)$, y ϵ' la aumentación usual del álgebra exterior, consideramos la aumentación sobre $\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)$, dada por $\epsilon = \epsilon_{\mathfrak{ym}(n)} \otimes \epsilon'$. Esto induce sobre $\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)$ una estructura de álgebra diferencial graduada aumentada.

Proposición 3.2.12 (cf. [MS], Lemma 30, 31). *Consideremos al álgebra* $\mathrm{TYM}(n)$ *como álgebra diferencial graduada concentrada en grado* 0*, con diferencial nula y aumentada con el morfismo* $\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}$*. Entonces el morfismo*

$$\begin{aligned} \mathrm{inc} : \mathrm{TYM}(n) &\to \mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n) \\ z &\mapsto z \otimes 1 \end{aligned}$$

es un quasiisomorfismo de álgebras diferenciales graduadas aumentadas, que escribiremos de la forma $\mathrm{TYM}(n) \simeq_q \mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)$.

Demostración. El morfismo inc es de álgebras graduadas, como vemos directamente. Además, conmuta con la diferencial, por la Proposición 3.2.7. Más aún, dicha proposición implica que inc induce un isomorfismo entre $\mathrm{TYM}(n)$ y $H^0(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)) = Z^0(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))$, ya que $z \in Z^0(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))$ si y sólo si $z = v \otimes 1$, con $v \in \mathrm{YM}(n)$, y $d(z) = \sum_{i=1}^n d_i(v) \otimes x_i = 0$, lo que ocurre si y sólo si $d_i(v) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Notar que inc también conmuta con las aumentaciones.

Para ver que inc induce un isomorfismo en cohomología, es necesario calcular la cohomología del complejo subyacente al álgebra diferencial graduada $(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n), d)$. Por una cuestión de claridad, escribiremos el complejo de cocadenas $(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n), d)$, como un complejo de cadenas a partir de definir $C_\bullet = (\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^{n-\bullet} V(n)$, con la misma diferencial, que denotaremos también d.

Consideramos en $(C_\bullet, d)$ la filtración $\{F_\bullet C\}_{\bullet \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$F_p C_q = F^{p+n-q} \otimes \Lambda^{n-q} V(n).$$

Notar que $\{F_\bullet C\}_{\bullet \in \mathbb{Z}}$ es una filtración creciente, acotada inferiormente y exhaustiva, y que $d(F_p C_q) \subseteq F_{p-2} C_{q-1}$. Por lo tanto, $\{F_\bullet C\}_{\bullet \in \mathbb{Z}}$ es una filtración de complejos e induce una sucesión espectral cuyo segundo término es

$$\begin{aligned} E^2_{p,q} = F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q} &= (F^{n-q} \otimes \Lambda^{n-(p+q)} V(n)) / (F^{n-q-1} \otimes \Lambda^{n-(p+q)} V(n)) \\ &\simeq (F^{n-q} / F^{n-q-1}) \otimes \Lambda^{n-(p+q)} V(n) = \mathrm{Gr}_{F^\bullet}(YM(n))^{n-q} \otimes \Lambda^{n-(p+q)} V(n) \\ &\simeq \mathrm{TYM}(n) \otimes S^{n-q}(V(n)) \otimes \Lambda^{n-(p+q)} V(n), \end{aligned}$$

donde en el último isomorfismo empleamos el último ítem del Lema 3.2.11. La diferencial $d^2_{p,q} : E^2_{p,q} \to E^2_{p-2,q+1}$ se puede escribir de la forma siguiente

$$\begin{tikzcd} (F^{n-q}/F^{n-q-1}) \otimes \Lambda^{n-(p+q)} V(n) \arrow[r, "\bar{d}"] \arrow[d, equal] & (F^{n-q-1}/F^{n-q-2}) \otimes \Lambda^{n-(p+q)+1} V(n) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{TYM}(n) \otimes S^{n-q}(V(n)) \otimes \Lambda^{n-(p+q)} V(n) \arrow[r, "d'_{p,q}"] & \mathrm{TYM}(n) \otimes S^{n-q}(V(n)) \otimes \Lambda^{n-(p+q)+1} V(n) \end{tikzcd}$$

donde $\bar{d}$ es el morfismo inducido por d y $d'_{p,q}$ es la diferencial dada por

$$d'_{p,q}(z \otimes v \otimes w) = \sum_{i=1}^n z \otimes \partial_i(v) \otimes (x_i \wedge w).$$

Veamos que esta diferencial es exacta salvo en el caso $p = 0$, $q = n$. Para ello, notemos que la diferencial $d'_{p,q}$ es la extensión $\mathrm{TYM}(n)$-lineal de la diferencial del complejo de de Rham del álgebra $S(V(n))$, y se sabe que su cohomología es cero, salvo en grado 0, que es k (cf. [Lo], Thm. 3.2.5).

Esto implica que el tercer paso de la sucesión espectral colapsa, debido a que el único elemento no nulo es $E^3_{0,n} = \mathrm{TYM}(n)$. Como la filtración es acotada inferiormente y exhaustiva, del teorema de convergencia clásico, resulta que la sucesión espectral es convergente, y converge a la homología del complejo $(C_\bullet, d)$ (cf. [Wei], Thm. 5.5.1).

Finalmente, $H^\bullet(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)) = H_{n-\bullet}(C) = 0$, si $\bullet \neq 0$, y $H^0(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)) = H_n(C) = \mathrm{TYM}(n)$. □

De la proposición anterior vemos que $B^+(\mathrm{TYM}(n)) \simeq_q B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))$ (para un repaso de la construcción bar $B^+(-)$, cf. Sección 1.3), y por lo tanto, las homologías (como álgebras diferenciales graduadas) de Hochschild con coeficientes en k son isomorfas, i.e.

$$H_\bullet(\mathrm{TYM}(n), k) = H_\bullet(B^+(\mathrm{TYM}(n))) \simeq H_\bullet(B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) = H_\bullet(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n), k).$$

Vamos a estudiar la (co)homología de $\mathfrak{ym}(n)$ con coeficientes en el módulo $S(V(n))$, donde la acción de $\mathfrak{ym}(n)$ sobre $S(V(n))$ está dada de la siguiente forma.

Del isomorfismo de k-espacios vectoriales $V(n) \simeq \mathfrak{ym}(n)/\mathfrak{tym}(n)$, obtenemos la proyección k-lineal $\pi : \mathfrak{ym}(n) \twoheadrightarrow V(n)$.

La acción se define como

$$z.(x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}) = \pi(z) x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n},$$

donde $z \in \mathfrak{ym}(n)$ y $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Notar que la identidad anterior implica que la acción inducida de $\mathfrak{tym}(n)$ sobre $S(V(n))$ es trivial.

Del mismo modo que para el álgebra de Yang-Mills, definimos la **graduación especial** de $S(V(n))$ de la forma siguiente: consideramos a $V(n)$ concentrado en grado 2, e identificamos $S(V(n))$ con $S_{gr}(V(n))$, el álgebra simétrica en la categoría de k-espacios vectoriales graduados. La **graduación usual** de $S(V(n))$ consiste en considerar a $V(n)$ concentrado en grado 1, e identificar $S(V(n))$ con $S_{gr}(V(n))$.

Si consideramos al álgebra de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(n)$ y a $S(V(n))$ con la graduación especial, entonces $S(V(n))$ resulta un módulo graduado sobre $\mathfrak{ym}(n)$.

La siguiente proposición nos será de utilidad más adelante para demostrar la convergencia débil de la sucesión espectral definida en el Corolario 3.2.14. Estos resultados se encuentran enunciados en los razonamientos de [MS], aunque no se encuentran demostrados.

Proposición 3.2.13. *La homología de Lie de $\mathfrak{ym}(n)$ con coeficientes en el módulo $S(V(n))$ está dada por*

$$H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = \begin{cases} k, & \text{si } \bullet = 0, \\ 0, & \text{si } \bullet = 2, \text{ o } \bullet \geq 3. \end{cases}$$

La homología en grado 1 es suma directa de espacios vectoriales H_1^p ($p \in \mathbb{N}_0$), donde

$$\dim_k(H_1^p) = \begin{cases} n\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} - \frac{(n+p)!}{(n-1)!(p+1)!} - n\frac{(n+p-3)!}{(n-1)!(p-2)!} + \frac{(n+p-4)!}{(n-1)!(p-3)!}, & \text{si } p \geq 3, \\ n\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} - \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} - n, & \text{si } p = 2, \\ n\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} - \frac{(n+p)!}{(n-1)!(p+1)!}, & \text{si } p = 0, 1. \end{cases}.$$

Demostración. Emplearemos la Proposición 3.2.5 para calcular la homología $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$. En primer lugar, esta proposición implica directamente que $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$, si $\bullet > 3$. Basta calcular entonces la homología en los casos $0 \leq \bullet \leq 3$.

El complejo que calcula la homología es el dado por (3.2.8), que escribimos a continuación para el caso $W = S(V(n))$

$$0 \longrightarrow S(V(n)) \xrightarrow{d_3} S(V(n)) \otimes V(n) \xrightarrow{d_2} S(V(n)) \otimes V(n) \xrightarrow{d_1} S(V(n)) \longrightarrow 0, \tag{3.2.17}$$

y observando además que $S(V(n))$ es conmutativa, $d_2(w \otimes x_i) = \sum_{j=1}^n (x_j^2.w \otimes x_i - x_i x_j.w \otimes x_j)$.

El complejo anterior es la suma directa de los complejos de k-espacios vectoriales de dimensión finita

$$0 \longrightarrow S^{p-1}(V(n)) \xrightarrow{d_3^{p-1}} S^p(V(n)) \otimes V(n) \xrightarrow{d_2^p} S^{p+2}(V(n)) \otimes V(n) \xrightarrow{d_1^{p+2}} S^{p+3}(V(n)) \longrightarrow 0, \tag{3.2.18}$$

donde $p \in \mathbb{Z}$, y consideramos que $S^p(V(n)) = 0$, si $p < 0$. Definimos

$$H_\bullet^p(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = \begin{cases} \mathrm{Ker}(d_\bullet^p)/\mathrm{Im}(d_{\bullet+1}^{p-1}), & \text{si } \bullet \neq 1, \\ \mathrm{Ker}(d_\bullet^p)/\mathrm{Im}(d_{\bullet+1}^{p-2}), & \text{si } \bullet = 1. \end{cases}$$

Notar que el morfismo d_3^p es inyectivo, para $p \in \mathbb{N}_0$, ya que, si $d_3^p(w) = 0$, entonces $x_i.w = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, porque $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es base de $V(n)$) y $S(V(n))$ es íntegro. Por lo tanto, resulta que $H_3(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$.

Análogamente, el morfismo d_1^p es suryectivo, para $p \in \mathbb{N}_0$. Esto se debe a que, si $w \in S^{p+1}(V(n))$, entonces existe i tal que $w = x_i.w'$ (porque $p + 1 > 0$), es decir, $w = d_1(w')$. Por otra parte, como d_1 es un morfismo de grado 1, si $w \in S^0(V(n)) = k$, no existe $w' \in S(V(n)) \otimes V(n)$ tal que $d_1(w') = w$. En consecuencia, la homología en grado cero es $H_0(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = k$.

Demostraremos ahora que $H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$. Para ello, sea $w \in S^p(V(n)) \otimes V(n)$, $w = \sum_{i=1}^n w_i \otimes x_i$ (donde $w_i \in S^p(V(n))$, $i = 1, \ldots, n$), perteneciente al núcleo de d_2^p. Entonces $0 = d_2(w) = \sum_{i,j=1}^n (w_i x_j^2 \otimes x_i - w_i x_i x_j \otimes x_j) = 0$, y como $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es base de $V(n)$, resulta que $\sum_{j=1}^n (w_i x_j^2 - w_j x_i x_j) = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$. Esto es equivalente a escribir

$$w_i \sum_{j=1}^n x_j^2 = x_i \sum_{j=1}^n x_j w_j, \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Como $S(V(n))$ es un dominio de factorización única, y los x_i son primos, esta igualdad implica que x_i divide a w_i, $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

Sean entonces w_i' tales que $w_i = x_i w_i'$. Podemos reescribir la igualdad anterior de la forma

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 w_i' = \sum_{j=1}^n x_j^2 w_j', \forall\, i = 1, \ldots, n,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2(w'_i - w'_j) = 0, \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Sean i_1, i_2 fijos, $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, entonces resulta $\sum_{j=1}^{n} x_j^2(w'_{i_1} - w'_{i_2}) = 0$, y como $S(V(n))$ es íntegro, obtenemos que $w'_{i_1} = w'_{i_2}, \forall i_1, i_2, 1 \leq i_1 < i_2 \leq n$. Llamemos a este elemento w'. Entonces, $w_i = x_i w'$.

Pero $d_3(w') = \sum_{i=1}^{n} w' x_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes x_i = w$. En consecuencia, $H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$.

Para calcular la homología en grado 1 recordemos que $H_1^p = \operatorname{Ker}(d_1^p)/\operatorname{Im}(d_2^{p-2})$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Como d_1^p es suryectiva, entonces

$$\dim_k(\operatorname{Ker}(d_1^p)) = \dim_k(S^p(V(n)) \otimes V(n)) - \dim_k(S^{p+1}(V(n))) = n\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} - \frac{(n+p)!}{(n-1)!(p+1)!},$$

donde usamos que

$$\dim_k(S^p(V(n))) = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}.$$

Por otro lado, como $H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$, resulta $\operatorname{Ker}(d_2^{p-2}) = \operatorname{Im}(d_3^{p-3})$, y de la inyectividad de d_3^{p-3}, obtenemos

$$\dim_k(\operatorname{Im}(d_2^{p-2})) = \dim_k(S^{p-2}(V(n)) \otimes V(n)) - \dim_k(S^{p-3}(V(n))) = n\frac{(n+p-3)!}{(n-1)!(p-2)!} - \frac{(n+p-4)!}{(n-1)!(p-3)!},$$

para $p \geq 3$.

Si $p = 0, 1$, entonces $\operatorname{Im}(d_2^{p-2}) = \{0\}$, ya que $S^{p-2}(V(n)) \otimes V(n) = \{0\}$.

En el caso $p = 2$, resulta que $S^{p-3}(V(n)) = \{0\}$, lo que implica

$$\dim_k(\operatorname{Im}(d_2^{p-2})) = \dim_k(S^{p-2}(V(n)) \otimes V(n)) = n.$$

La proposición queda demostrada. □

Corolario 3.2.14. *La filtración* $\{F^p C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *del complejo* $(C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n))), d)$ *dado por* (3.2.17)*, tal que*

$$\begin{aligned} &F^p C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n))) \\ &\quad = (0 \longrightarrow S^{\geq -p}(V(n)) \xrightarrow{d_3} S^{\geq -p}(V(n)) \otimes V(n) \xrightarrow{d_2} S^{\geq -p}(V(n)) \otimes V(n) \xrightarrow{d_1} S^{\geq -p}(V(n)) \longrightarrow 0), \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

es creciente, exhaustiva y Hausdorff, y la sucesión espectral asociada a dicha filtración converge débilmente a la homología $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$ *del complejo* $(C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n))), d)$.

Demostración. Vamos a indicar los pasos sucesivos de la sucesión espectral, siguiendo la construcción en [Wei], Sec. 5.4. En primer lugar debemos notar que, como d_1 y d_3 son de grado 1, y d_2 es de grado 2, vemos que

$$d_i(F^p C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))) \subseteq F^{p-1} C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n))),$$

para $i = 1, 2, 3$, y

$$d_2(F^p C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))) \subseteq F^{p-2} C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n))).$$

Esto implica que las diferenciales $d_{p,q}^0$ son 0. Además, como

$$E_{p,q}^0 = F^p C_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))/F^{p-1} C_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))),$$

entonces la sucesión espectral está concentrada en los (p, q) tales que $0 \leq p + q \leq 3$, y $p \leq 0$, y resulta

$$E_{p,q}^0 = \begin{cases} S^{-p}(V(n)), & \text{si } q = -p, \\ S^{-p}(V(n)) \otimes V(n), & \text{si } q = -p+1, \\ S^{-p}(V(n)) \otimes V(n), & \text{si } q = -p+2, \\ S^{-p}(V(n)), & \text{si } q = -p+3, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Gráficamente

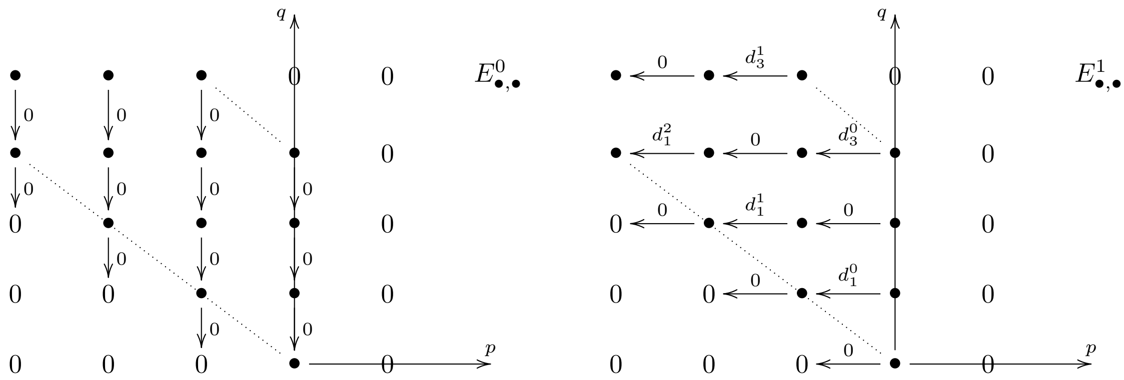

Figura 3.1: Paso cero $E^0_{\bullet,\bullet}$ y primer paso $E^1_{\bullet,\bullet}$ de la sucesión espectral. Las líneas punteadas indican los límites entre los cuales la sucesión espectral está acotada

En el paso siguiente de la sucesión espectral, como $d^0_{p,q} = 0$, $E^0_{p,q} = E^1_{p,q}$ y las diferenciales son las inducidas por la diferencial de $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))$, resulta

$$d^1_{p,q} = \begin{cases} 0, & \text{si } q = -p, \\ d_1^{-p}, & \text{si } q = -p+1, \\ 0, & \text{si } q = -p+2, \\ d_3^{-p}, & \text{si } q = -p+3, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Por lo tanto, el segundo paso de la sucesión espectral es

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} S^{-p}(V(n))/\mathrm{Im}(d_1^{-p+1}), & \text{si } q = -p, \\ \mathrm{Ker}(d_1^{-p}), & \text{si } q = -p+1, \\ \mathrm{Im}(d_3^{-p+1}), & \text{si } q = -p+2, \\ \mathrm{Ker}(d_3^{-p}), & \text{si } q = -p+3, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

y nuevamente los diferenciales son los inducidos por la diferencial de $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))$, es decir,

$$d^2_{p,q} = \begin{cases} d_2^{-p}, & \text{si } q = -p+2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En este caso, resulta

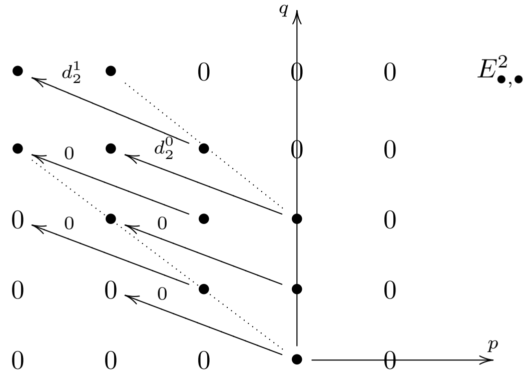

Figura 3.2: Segundo paso $E^2_{\bullet,\bullet}$ de la sucesión espectral. Las líneas punteadas indican los límites entre los cuales la sucesión espectral está acotada

En consecuencia, el tercer paso de la sucesión espectral es

$$E^3_{p,q} = \begin{cases} H_0^{-p}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))), & \text{si } q = -p, \\ H_1^{-p}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))), & \text{si } q = -p+1, \\ H_2^{-p}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))), & \text{si } q = -p+2, \\ H_3^{-p}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))), & \text{si } q = -p+3, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

es decir, la sucesión espectral converge débilmente. □

Definiremos otra filtración en el álgebra diferencial graduada aumentada $\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)$ a partir de la formula

$$F_p(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)) = \mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^{\bullet \geq p} V(n).$$

Vemos directamente que $F_p(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))$ es una filtración decreciente, acotada, multiplicativa, compatible con la diferencial, i.e., $d(F_p(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) \subseteq F_p(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))$. Más aún,

$$d(F_p(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) \subseteq F_{p+1}(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)).$$

Deseamos notar que $\epsilon(F_p(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) = 0$, si $p \geq 1$.

En consecuencia, el graduado asociado a esta filtración $\mathrm{Gr}_{F_\bullet}(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))$ es un álgebra diferencial graduada aumentada, con diferencial nula y aumentación dada por la clase de ϵ.

Consideramos a $\mathrm{YM}(n)$ como álgebra diferencial graduada aumentada concentrada en grado cero, diferencial nula, y aumentación $\epsilon_{\mathfrak{ym}(n)}$, y a $\Lambda^\bullet V(n)$ como álgebra diferencial graduada aumentada con la graduación usual (dada por $\bullet$), diferencial nula y la aumentación usual. Entonces, resulta directamente que el graduado asociado es el producto tensorial (diferencial graduado aumentado) de las álgebras $\mathrm{YM}(n)$ y $\Lambda^\bullet V(n)$.

Esta filtración induce una filtración decreciente y acotada superiormente de coálgebras coaumentadas en

$$B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)),$$

que denotamos $F_\bullet(B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)))$ (cf. [Lef], Sec. 1.3.2). Por definición,

$$\mathrm{Gr}_{F_\bullet}(B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) = B^+(\mathrm{Gr}_{F_\bullet}(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))).$$

Como el graduado asociado $\mathrm{Gr}_{F_\bullet}(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))$ es el producto tensorial (diferencial graduado aumentado) de las álgebras $\mathrm{YM}(n)$ y $\Lambda^\bullet V(n)$, entonces

$$B^+(\mathrm{Gr}_{F_\bullet}(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) \simeq_q B^+(\mathrm{YM}(n)) \otimes B^+(\Lambda^\bullet V(n)).$$

Por otro lado, si A es un álgebra (graduada) aumentada, entonces $B^+(A)$ es el complejo reducido de Hochschild (graduado) con coeficientes en el bimódulo (graduado) k, que se obtiene de tensorizar la resolución bar (normalizada) de Hochschild (graduada) con k sobre A^e. Por lo tanto, $B^+(A)$ es quasiisomorfa como k-espacio vectorial (graduado) a cualquier complejo que se obtenga de tensorizar una resolución de A^e-módulos proyectivos (graduados) con k sobre A^e.

En consecuencia, $B^+(\mathrm{YM}(n)) \simeq_q C_\bullet(\mathrm{YM}(n), k)$. Asimismo, como $\Lambda^\bullet V(n)$ es Koszul, resulta el quasiisomorfismo $B^+(\Lambda^\bullet V(n)) \simeq_q S^\bullet(V(n))$, donde consideramos a $S^\bullet(V(n))$ como álgebra diferencial graduada (por $\bullet$) con diferencial nula (cf. [PP], Sec. 2.1, Example; Sec. 2.3).

Finalmente,

$$\mathrm{Gr}_{F_\bullet}(B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) \simeq_q C_\bullet(\mathrm{YM}(n), k) \otimes S(V(n)).$$

Notar que el espacio de la derecha es el paso cero de la sucesión espectral convergente calculada en el Corolario 3.2.14.

A su vez, la sucesión espectral asociada a la filtración $F_\bullet(B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n)))$ es convergente, ya que la filtración es decreciente, exhaustiva, Hausdorff y está acotada superiormente (lo que es análogo al caso creciente, exhaustivo, Hausdorff, y acotado inferiormente, cf. [Wei], Sec. 5.2). Del teorema de comparación de sucesiones espectrales (cf. [Wei], Thm. 5.2.12), resulta que

$$H_\bullet(B^+(\mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^\bullet V(n))) \simeq H_\bullet(C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))).$$

Al aplicar la Proposición 3.2.12, vemos que

$$H_\bullet(\mathfrak{tym}(n),k)\simeq H_\bullet(\mathrm{TYM}(n),k))\simeq H_\bullet(B^+(\mathrm{TYM}(n)))\simeq H_\bullet(C_\bullet(\mathrm{YM}(n),S(V(n)))).$$

Recordamos ahora algunos resultados sobre la cohomología de álgebras:

Proposición 3.2.15. *Sea k un anillo conmutativo con unidad y W un k-módulo. Si M un bimódulo sobre el álgebra libre $T(W)$, resulta entonces que $H_\bullet(T(W),M)=0$ y $H^\bullet(T(W),M)=0$, para todo $\bullet\geq 2$.*

Demostración. Cf. [Wei], Prop. 9.1.6.. □

Observación 3.2.16. *De las Proposiciones 3.2.15 y 2.3.4, resulta que si el álgebra envolvente de un álgebra de Lie $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es libre, entonces $\mathfrak{g}$ es libre. El recíproco es directo.*

Teorema 3.2.17. *Sea W un espacio vectorial graduado concentrado en grado 1 y $A=T(W)/I$ un álgebra graduada (i.e., I es graduado). Escribimos al ideal I de la forma*

$$I=\bigoplus_{m\in\mathbb{N}_{\geq 2}} I_m.$$

Para cada $m\geq 2$, es posible elegir $R_m\subseteq I_m$ subespacio k-lineal, tal que

$$\begin{aligned} I_2&=R_2,\\ I_m&=R_m\oplus\left(\sum_{i+j+l=m,2\leq j<m} W^{\otimes i}\otimes R_j\otimes W^{\otimes l}\right).\end{aligned}$$

Definimos

$$R=\bigoplus_{m\in\mathbb{N}_{\geq 2}} R_m.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} H_0(A,k)&=\mathrm{Tor}_0^A(k,k)=k,\\ H_1(A,k)&=\mathrm{Tor}_1^A(k,k)=V,\\ H_2(A,k)&=\mathrm{Tor}_2^A(k,k)=R.\end{aligned}$$

Demostración. Cf. [Ber2], Prop. 2.5. □

Por la Proposición 3.2.13, resulta $H_2(\mathrm{TYM}(n),k)=0$. Si consideramos a $V(n)$ como espacio vectorial graduado concentrado en grado 2, el álgebra $\mathrm{TYM}(n)=\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$ resulta graduada, y el Teorema 3.2.17 implica que $\mathrm{TYM}(n)$ es libre graduada, por lo que, $\mathrm{TYM}(n)$ es libre, al olvidar la graduación.

Más aún, de la Observación 3.2.16 resulta que $\mathfrak{tym}(n)$ es un álgebra de Lie libre, y debido a la Observación 3.1.4, no importa el contexto (graduado o no).

En consecuencia, hemos obtenido el siguiente teorema, que es clave para los resultados que obtendremos respecto de las representaciones del álgebra de Yang-Mills.

Teorema 3.2.18. *El álgebra de Lie $\mathfrak{tym}(n)$ es libre, y también lo es el álgebra asociativa $\mathrm{TYM}(n)$.*

3.3 Propiedades generales

En esta sección estudiaremos la integridad y noetherianidad de $\mathrm{YM}(n)$.

El álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ es íntegra para todo $n\in\mathbb{N}$ (i.e., el producto de dos elementos no nulos es no nulo), ya que es el álgebra envolvente de un álgebra de Lie. La prueba de este hecho es la misma que en el caso de álgebras de Lie de dimensión finita (cf. [Dix1], Corollary 2.3.9, (ii), p. 76).

Estudiemos ahora la noetherianidad del álgebra de Yang-Mills. Para ello, primero notemos que basta ver el caso a izquierda, ya que $\mathrm{YM}(n)$ es noetheriana a izquierda si y sólo si es noetheriana a derecha. Esto se deduce como sigue. Como $\mathrm{YM}(n)$ es un álgebra de Hopf, la antípoda es un isomorfismo de biálgebras de $\mathrm{YM}(n)$ en la biálgebra opuesta $\mathrm{YM}(n)^{\mathrm{op,cop}}$, y por lo tanto, $\mathrm{YM}(n)$ es noetheriana a izquierda si y sólo si $\mathrm{YM}(n)^{\mathrm{op,cop}}$ es noetheriana a izquierda, que es equivalente a que $\mathrm{YM}(n)$ sea noetheriana a derecha.

En el caso $n = 2$, el álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(2)$ es noetheriana. Esto se ve directamente del isomorfismo $\mathrm{YM}(2) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{h}_1)$ (ver ejemplo 3.1.2). Como $\mathfrak{h}_1$ es de dimensión finita, luego $S(\mathfrak{h}_1)$ es noetheriana, con lo que $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_1)$ es noetheriana, ya que su graduado asociado $S(\mathfrak{h}_1)$ es noetheriano (cf. [Dix1], Corollary 2.3.8, p. 76).

En el caso $n \geq 3$, el álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ no es noetheriana. Veamos primero que basta demostrarlo para $n = 3$.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq m$. El epimorfismo de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} V(n) &\twoheadrightarrow V(m) \\ x_i &\mapsto x_i, \qquad \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ x_i &\mapsto 0, \qquad \text{si } m+1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

induce un morfismo suryectivo de álgebras de Lie

$$f_{m\leq n} : \mathfrak{f}(n) \twoheadrightarrow \mathfrak{f}(m)$$

que cumple que

$$f_{m\leq n}(\{\sum_{i=1}^{n}[x_i,[x_i,x_j]] : 1 \leq j \leq n\}) \subseteq \{\sum_{i=1}^{m}[x_i,[x_i,x_j]] : 1 \leq j \leq m\}.$$

Por lo tanto, induce un morfismo suryectivo de álgebras de Lie

$$p_{m\leq n} : \mathfrak{ym}(n) \to \mathfrak{ym}(m),$$

y también un morfismo suryectivo de álgebras asociativas, que notaremos del mismo modo,

$$p_{m\leq n} : \mathrm{YM}(n) \twoheadrightarrow \mathrm{YM}(m).$$

Como $\mathrm{YM}(3)$ es imagen epimórfica de $\mathrm{YM}(n)$, $\forall\, n \geq 3$, luego si $\mathrm{YM}(n)$ ($n \geq 3$) fuera noetheriana, $\mathrm{YM}(3)$ sería noetheriana.

Para demostrar que $\mathrm{YM}(3)$ no es noetheriana, recordemos que

$$\mathrm{YM}(3) \simeq TV(3)/\langle\{\sum_{i=1}^{3}[x_i,[x_i,x_j]] : 1 \leq j \leq 3\}\rangle,$$

donde $V(3) = k.x_1 \oplus k.x_2 \oplus k.x_3$. Consideremos la sucesión creciente de ideales a izquierda de $\mathrm{YM}(3)$

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_m \subseteq \ldots,$$

donde

$$J_m = \langle\{\bar{x}_2\bar{x}_1, \bar{x}_2\bar{x}_1^2, \ldots, \bar{x}_2\bar{x}_1^m\}\rangle, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Vamos a demostrar que esta sucesión no es finita, es decir, que todas las inclusiones son estrictas. Si una inclusión no fuera estricta, entonces existiría $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $J_{m_0} = J_{m_0+1}$. En ese caso, $\bar{x}_2\bar{x}_1^{m_0+1} \in J_{m_0}$, es decir,

$$\bar{x}_2\bar{x}_1^{m_0+1} = \sum_{i=1}^{m_0}\bar{p}_i\bar{x}_2\bar{x}_1^i,$$

luego

$$x_2x_1^{m_0+1} - \sum_{i=1}^{m_0}p_ix_2x_1^i \in \langle\{\sum_{i=1}^{3}[x_i,[x_i,x_j]] : 1 \leq j \leq 3\}\rangle.$$

En consecuencia, podemos escribir

$$\begin{aligned} x_2x_1^{m_0+1} - \sum_{j=1}^{m_0}p_ix_2x_1^i = \sum_{i=1}^{3}q_i[x_i,[x_i,x_j]] &= x_2x_1^{m_0+1} - p_1x_2x_1^1 - \cdots - p_{m_0}x_2x_1^{m_0} \\ &= q_1(x_2^2x_1 + x_1x_2^2 - 2x_2x_1x_2 + x_3^2x_1 + x_1x_3^2 - 2x_3x_1x_3) \\ &+ q_2(x_1^2x_2 + x_2x_1^2 - 2x_1x_2x_1 + x_3^2x_2 + x_2x_3^2 - 2x_3x_2x_3) \\ &+ q_3(x_1^2x_3 + x_3x_1^2 - 2x_1x_3x_1 + x_2^2x_3 + x_3x_2^2 - 2x_2x_3x_2). \end{aligned}$$

Los términos de la forma $r.x_3$ ($r \in TV(3)$) en el segundo miembro tienen que anularse, por lo que tenemos que

$$q_1(x_1x_3^2 - 2x_3x_1x_3) + q_2(x_2x_3^2 - 2x_3x_2x_3) + q_3(x_1^2x_3 + x_2^2x_3) = 0,$$

lo que implica que $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Finalmente, resulta que

$$x_2x_1^{m_0+1} - p_1x_2x_1^1 - \cdots - p_{m_0}x_2x_1^{m_0} = 0,$$

que es un absurdo. Por lo tanto, todas las inclusiones $J_{m_0} \subset J_{m_0+1}$ son estrictas. En consecuencia, $\mathrm{YM}(3)$ no es noetheriana, y luego $\mathrm{YM}(n)$ no es noetheriana para $n \geq 3$.

Observación 3.3.1. *El hecho de que* $\mathrm{YM}(n) = \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$ *no sea noetheriana para* $n \geq 3$ *implica directamente que* $\mathfrak{ym}(n)$ *no es de dimensión finita para* $n \geq 3$.

Observación 3.3.2. *La no noetherianidad de* $\mathrm{YM}(n)$ *también puede demostrarse como sigue.*

Por un lado, $\mathrm{YM}(n) \supset \mathrm{TYM}(n)$ *es una extensión de álgebras libre (a izquierda y a derecha), pero no es finita sino que es finitamente generada (cf. [Wei], Coro. 7.3.9). Los generadores de la extensión* $\mathrm{YM}(n) \supset \mathrm{TYM}(n)$ *son* $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Por otro lado, como $\mathrm{TYM}(n)$ *es un álgebra libre con una cantidad infinita de generadores si* $n \geq 3$ *(cf. Teo. 3.2.18), no es noetheriana, y por lo tanto* $\mathrm{YM}(n)$ *no puede ser noetheriana. Esto se debe a la siguiente propiedad: Si* $A \supset B$ *es una extensión de álgebras tal que* A *es un* B*-módulo a derecha (resp. a izquierda) libre e* $I \triangleleft B$ *es un ideal a izquierda (resp. a derecha), entonces* $A.I$ *es un ideal a izquierda (resp. a derecha) de* A *que satisface que* $A.I \cap B = I$. *Esta propiedad implica directamente que si* B *no es noetheriana a izquierda (resp. a derecha), luego* A *no es noetheriana a izquierda (resp. a derecha).*

Demostremos entonces la propiedad anterior de las extensiones libres de álgebras. La inclusión $I \subseteq A.I \cap B$ *es directa. Veamos la otra. Para ello, sea* $\mathcal{B} = \{a_i\}_{i \in I}$ *una base de* A *como* B*-módulo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que* $1 = a_{i_0} \in \mathcal{B}$. *Entonces, como todo elemento de* A *se puede escribir como* $\sum_{i \in I} a_ib_i$, *con* $b_i \in B$, *un elemento* $x \in A.I \cap B$ *es de la forma*

$$x = \sum_{i \in I} a_ic_i,$$

donde $c_i \in I$. *Como* $x \in B$, *que denotaremos* b, *entonces* $c_{i_0} = b$ *y* $a_i = 0, \forall\, i \in I, i \neq i_0$. *Pero entonces* $x = a_{i_0}c_{i_0} = 1c_{i_0} = c_{i_0} \in I$.

3.4 Algunos cálculos

A partir de la propiedad de ser Koszul de $\mathrm{YM}(n)$, [CD1] obtienen directamente la serie (formal) de Hilbert para el álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$, definida de la forma siguiente

$$P_{\mathrm{YM}(n)}(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \dim_k(\mathrm{YM}(n)_i)t^i.$$

Proposición 3.4.1 (cf. [CD1], Cor. 3.)**.** *La serie de Hilbert de* $\mathrm{YM}(n)$ *es*

$$P_{\mathrm{YM}(n)}(t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-nt+t^2)}.$$

Demostración. Como $\mathrm{YM}(n)$ es un álgebra Koszul cúbica, de la aciclicidad del complejo contraido $C_{2,0}(\mathrm{YM}(n))$ debe ser

$$P_{\mathrm{YM}(n)}(t)Q_{\mathrm{YM}(n)^!}(t) = 1,$$

donde

$$Q_{\mathrm{YM}(n)^!}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\dim_k(\mathrm{YM}(n)^!_{3n})t^{3n} - \dim_k(\mathrm{YM}(n)^!_{3n+1}t^{3n+1})$$

(cf. [DVP], Prop. 1 y Coro. 1). En nuestro caso, $Q_{\mathrm{YM}(n)^!}(t) = 1 - nt + nt^3 - t^4 = (1-t^2)(1-nt+t^2)$. La proposición queda demostrada. □

Otra demostración de este resultado se encuentra en [Mov], 7.1, y se basa en la Proposición 3.1.6.

Esta proposición implica que, si $n \geq 3$, $\mathrm{YM}(n)$ tiene crecimiento exponencial, y por lo tanto $\text{GK-}\dim(\mathrm{YM}(n)) = \infty$ (esto también se puede deducir del hecho que $\mathrm{YM}(n)$ posee como subálgebra a $\mathrm{TYM}(n)$, que es un álgebra libre con una cantidad infinita de generadores, y por lo tanto su dimensión de Gelfand-Kirillov es infinita (cf.

[McR], Prop. 1.15, (iv))), mientras que, si $n = 2$, $\mathrm{YM}(2)$ tiene crecimiento polinomial. En este último caso, como $\mathrm{YM}(2) = \mathcal{U}(\mathfrak{h}_1)$, $\text{GK-dim}(\mathrm{YM}(2)) = \dim_k(\mathfrak{h}_1) = 3$.

Por el Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, es posible obtener las dimensiones de cada espacio homogéneo del álgebra de Yang-Mills $N(n)_j = \dim_k(\mathfrak{ym}(n)_j)$ ($j \in \mathbb{N}$) a partir de (cf. [PP], Ch. 2, Sec. 2, Example 2)

$$\prod_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{1 - t^j} \right)^{N(n)_j} = P_{\mathrm{YM}(n)}(t).$$

De la identidad anterior y la Proposición 3.4.1, obtenemos entonces una fórmula directa para $j \geq 3$

$$N(n)_j = \frac{1}{j} \sum_{m=1}^{j} \mu(\frac{j}{m})(t_1^m + t_2^m),$$

donde t_1 y t_2 son las raíces de $t^2 - nt + 1 = 0$, y $\mu(x)$ es la función de Möbius, i.e.,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \text{ y } x = 0 \text{ o existe } p \text{ primo tal que } p^2 | x, \\ 1, & \text{si } |x| = 1, \\ (-1)^r, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \text{ y } x = p_1 \dots p_r, \text{ donde } p_1 \dots p_r \text{ son primos diferentes.} \end{cases}$$

Como las relaciones del álgebra de Yang-Mills son cúbicas, las dimensiones en el caso $j = 1, 2$ son iguales al caso del álgebra libre $\mathfrak{f}(V(n))$, i.e., $N(n)_1 = n$ y $N(n)_2 = n(n-1)/2$.

En el caso de $\mathfrak{ym}(3)$, obtenenemos que la serie de dimensiones $N(3)_j$ ($j \in \mathbb{N}$) es de la forma:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N_j	3	3	5	10	24	50	120	270	640	1500	3600	8610	20880	50700

La Proposición 3.1.6 nos permite construir de forma recursiva una base para el álgebra de Yang-Mills, ya que se compone de $\{x_1\}$ y una base de $\mathfrak{h}(n-1)$. Por otro lado, como el ideal de relaciones que define $\mathfrak{h}(n-1)$ está generado por un único elemento, es una base de Gröbner en $T(U(n-1))$ (cf. [Gra], Thm. 13), donde $U(n-1)$ fue definido en la Sección 3.1, y por lo tanto podemos hallar una base para $\mathfrak{h}(n-1)$ a partir de una base para el álgebra de Lie libre (graduada) $\mathfrak{f}(U(n-1))$ y eliminar las relaciones obtenidas.

Para describir una base de $\mathfrak{f}(U(n-1))$, seguiremos la presentación usual de conjuntos de Hall dada en [Bour], p. 132. Para ello, si X es un conjunto consideramos el magma libre $M(X)$ en el conjunto X definido inductivamente como sigue. Por un lado, $X \subseteq M(X)$ y si $a, b \in M(X)$, entonces $(a, b) \in M(X)$. Esto implica que $M(X)$ está provisto de una operación binaria (no asociativa), que denotaremos $\cdot$.

Si $S(X)$ denota el semigrupo libre en X, con operación también denotada por $\cdot$, tenemos un morfismo de conjuntos

$$p : M(X) \to S(X),$$

denominado **deparentización**, definido de la forma siguiente. Para $a \in X$, $p(a) = a$. A su vez, si $a \in M(X) \setminus X$, $a = (b, c)$, y se define $p(a) = p(b).p(c)$.

La **longitud** $l(a)$ de un elemento a del magma libre $M(X)$ se define recursivamente como sigue. Si $a \in X$, definimos $l(a) = 1$. Si no $a = (b, c)$, donde $b, c \in M(X)$; en este caso se define $l(a) = l(b) + l(c)$. Por otro lado, un orden (total) en el conjunto X induce un orden (total) en el magma libre $M(X)$. Dados dos elementos $a, b \in M(X)$, si $l(a) < l(b)$, entonces $a < b$. Si $l(a) = l(b) = l \in \mathbb{N}$, entonces empleamos el orden lexicográfico, es decir, si suponemos $p(a) = a_1 \dots a_l$ y $p(b) = b_1 \dots b_l$, se define $a < b$ si existe $0 \leq i_0 < l$ tal que $a_i = b_i$, para $1 \leq i \leq i_0$, y $a_{i_0+1} < b_{i_0+1}$.

A partir del orden fijado, podemos definir recursivamente el siguiente subconjunto $\mathcal{B}$ del magma libre $M(X)$. Por un lado, suponemos $X \subseteq \mathcal{B}$. A su vez, si $a \in M(X) \setminus X$, entonces $a = (b, c)$, y supondremos que $a \in \mathcal{B}$ si y sólo si $b, c \in \mathcal{B}$, $b < c$, y si $c = (d, f)$ (necesariamente con $d, f \in \mathcal{B}$ y $d < f$), entonces $d \leq b$.

En nuestro caso, fijamos un orden del conjunto $X = \{q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ de la forma $q_1 < \dots < q_{n-1} < p_1 < \dots < p_{n-1}$. Si aplicamos el procedimiento anterior obtenemos una base (homogénea) del álgebra de Lie (graduada) $\mathfrak{f}(U(n-1))$, donde consideramos la graduación especial.

La serie de Hilbert de $\mathfrak{f}(U(n-1))$ está dada por (cf. [MO], Thm. 3.1)

$$\dim(\mathfrak{f}(U(n-1))_j) = \frac{1}{j} \sum_{d=1}^{j} \mu(\frac{d}{j})(\sum_{l=1}^{4} r_l^{-d}),$$

donde $r_1, \ldots, r_4$ son las raices del polinomio $1-(n-1)t^2-(n-1)t^4$.

Veamos un poco más en detalle el caso del álgebra de Yang-Mills con 3 generadores. En este caso, $\mathfrak{h}(2)$ está generado por $\{q_1, q_2, p_1, p_2\}$ con la relación $[q_1, p_1] = -[q_2, p_2]$. A su vez, la sucesión de las dimensiones de cada componente homogénea de $\mathfrak{f}(U(2))$ está dada por

Grado de la componente homogénea	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
Dimensión de la componente homogénea	2	3	6	12	30	65	162	381	940	2301	5754	14372	36342	92115

Una base de $\mathfrak{f}(U(2))$, considerada con la graduación especial (hasta grado 10), está dada por

Grado	**Elementos de la base**
2	q_1, q_2
4	$p_1, p_2, [q_1, q_2]$
6	$[q_1, p_1], [q_1, p_2], [q_2, p_1], [q_2, p_2],$ $[q_1, [q_1, q_2]], [q_2, [q_1, q_2]]$
8	$[p_1, p_2], [q_1, [q_1, p_1]], [q_1, [q_1, p_2]], [q_2, [q_1, p_1]], [q_2, [q_1, p_2]], [q_2, [q_2, p_1]], [q_2, [q_2, p_2]],$ $[p_1, [q_1, q_2]], [p_2, [q_1, q_2]], [q_1, [q_1, [q_1, q_2]]], [q_2, [q_1, [q_1, q_2]]], [q_2, [q_2, [q_1, q_2]]]$
10	$[p_1, [q_1, p_1]], [p_1, [q_1, p_2]], [p_1, [q_2, p_1]], [p_1, [q_2, p_2]], [p_2, [q_1, p_1]], [p_2, [q_1, p_2]], [p_2, [q_2, p_1]], [p_2, [q_2, p_2]],$ $[q_1, [q_1, [q_1, p_1]]], [q_1, [q_1, [q_1, p_2]]], [q_2, [q_1, [q_1, p_1]]], [q_2, [q_1, [q_1, p_2]]],$ $[q_2, [q_2, [q_1, p_1]]], [q_2, [q_2, [q_1, p_2]]], [q_2, [q_2, [q_2, p_1]]], [q_2, [q_2, [q_2, p_2]]],$ $[p_1, [q_1, [q_1, q_2]]], [p_1, [q_2, [q_1, q_2]]], [p_2, [q_1, [q_1, q_2]]], [p_2, [q_2, [q_1, q_2]]],$ $[[q_1, q_2], [q_1, p_1]], [[q_1, q_2], [q_1, p_2]], [[q_1, q_2], [q_2, p_1]], [[q_1, q_2], [q_2, p_2]],$ $[q_1, [q_1, [q_1, [q_1, q_2]]]], [q_2, [q_1, [q_1, [q_1, q_2]]]], [q_2, [q_2, [q_1, [q_1, q_2]]]], [q_2, [q_2, [q_2, [q_1, q_2]]]],$ $[q_1, q_2], [q_1, [q_1, q_2]]]], [q_1, q_2], [q_2, [q_1, q_2]]]]$

Las relaciones que obtenemos son las siguientes

Grado	**Relación entre elementos de la base**
2	-
4	-
6	$[q_1, p_1] = -[q_2, p_2],$
8	$[q_1, [q_1, p_1]] = -[q_1, [q_2, p_2]] = [p_2, [q_1, q_2]] - [q_2, [q_1, p_2]], [q_2, [q_1, p_1]] = -[q_2, [q_2, p_2]],$
10	$[p_1, [q_1, p_1]] = -[p_1, [q_2, p_2]], [p_2, [q_1, p_1]] = -[p_2, [q_2, p_2]],$ $[q_1, [q_1, [q_1, p_1]]] = -[q_1, [q_1, [q_2, p_2]]] = [p_2, [q_1, [q_1, q_2]]] - 2[[q_1, q_2], [q_1, p_2]] - [q_2, [q_1, [q_1, p_2]]],$ $[q_2, [q_1, [q_1, p_1]]] = -[q_1, [q_1, [q_2, p_2]]] = [p_2, [q_1, [q_1, q_2]]] - 2[[q_1, q_2], [q_1, p_2]] - [q_2, [q_1, [q_1, p_2]]],$ $[q_2, [q_2, [q_1, p_1]]] = -[q_2, [q_2, [q_2, p_2]]], [[q_2, q_3], [q_1, p_1]] = -[[q_2, q_3], [q_2, p_2]]$

Exhibiremos ahora una base para los cocientes

$$\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)) = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathfrak{ym}(3)_j,$$

con $l = 1, \ldots, 5$. Para ello, emplearemos los cálculos anteriores junto con el isomorfismo de la Proposición 3.1.6.

Una base del álgebra cociente del álgebra de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^1(\mathfrak{ym}(3))$ está dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

como se deduce trivialmente.

Para el álgebra cociente $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{ym}(3))$, en cambio la base resulta

$$\mathcal{B}_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}, x_{23}\},$$

donde $x_{ij} = [x_i, x_j]$, $(i, j = 1, 2, 3)$. En estos dos casos, vemos que obtenemos el álgebra de Lie nilpotente libre de índice 1 y 2, respectivamente, ya que las relaciones de Yang-Mills son de grado 3.

Si consideramos $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^3(\mathfrak{ym}(3))$, la base es la siguiente

$$\mathcal{B}_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{212}, x_{213}, x_{223}, x_{312}, x_{323}\},$$

donde notamos $x_{ijk} = [x_i, [x_j, x_k]]$. Además definimos $J_3 = \{(212), (213), (223), (312), (323)\}$ el conjunto de índices triples de $\mathcal{B}_3$.

El caso $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^4(\mathfrak{ym}(3))$ es un poco más complicado. Podemos ver que el conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_4 = \{&x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{212}, x_{213}, x_{223}, x_{312}, x_{323},\\ &x_{(12)(13)}, x_{(12)(23)}, x_{(13)(23)}, x_{2213}, x_{2223}, x_{3212}, x_{3213}, x_{3223}, x_{3312}, x_{3323}\}\end{aligned}$$

es una base, donde notamos $x_{ijkl} = [x_i, [x_j, [x_k, x_l]]]$ y $x_{(ij)(kl)} = [[x_i, x_j], [x_k, x_l]]$. Definimos a su vez

$$J_4 = \{((12)(13)), ((12)(23)), ((13)(23)), (2213), (2223), (3212), (3213), (3223), (3312), (3323)\}$$

el conjunto de índices cuádruples de $\mathcal{B}_4$.

Para demostrar que $\mathcal{B}_4$ es base nuevamente basta probar que es un sistema de generadores, ya que $\#(\mathcal{B}_4) = 21$. Esto es trivial, porque

$$x_{2212} = -x_{(13)(23)}, \qquad x_{3313} = -x_{3212}.$$

El caso $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^5(\mathfrak{ym}(3))$ es análogo. El conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_5 = \{&x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{212}, x_{213}, x_{223}, x_{312}, x_{323},\\ &x_{(12)(13)}, x_{(12)(23)}, x_{(13)(23)}, x_{2213}, x_{2223}, x_{3212}, x_{3213}, x_{3223}, x_{3312}, x_{3323}\\ &x_{(12)(212)}, x_{(12)(213)}, x_{(12)(312)}, x_{(13)(212)}, x_{(13)(213)}, x_{(13)(312)},\\ &x_{22212}, x_{22213}, x_{32212}, x_{32213}, x_{33212}, x_{33213}, x_{33312}, x_{(12)(223)}, x_{(12)(323)}, x_{(13)(223)}, x_{(13)(323)}, x_{(23)(312)},\\ &x_{22223}, x_{32223}, x_{33223}, x_{33323}, x_{(23)(223)}, x_{(23)(323)}\}\end{aligned}$$

es una base, donde notamos $x_{ijklm} = [x_i, [x_j, [x_k, [x_l, x_m]]]]$ y $x_{(ij)(klm)} = [[x_i, x_j], [x_k, [x_l, x_m]]]$. Definimos a su vez

$$\begin{aligned}J_5 = \{&((12)(212)), ((12)(213)), ((12)(312)), ((13)(212)), ((13)(213)), ((13)(312)), (22212),\\ &(22213), (32212), (32213), (33212), (33213), (33312), ((12)(223)), ((12)(323)),\\ &((13)(223)), ((13)(323)), ((23)(312)), (22223), (32223), (33223), (33323), ((23)(223)), ((23)(323))\}\end{aligned}$$

el conjunto de índices de $\mathcal{B}_5$.

Para demostrar que $\mathcal{B}_5$ es base basta demostrar que es un sistema de generadores, ya que $\#(\mathcal{B}_5) = 45$. Esto es trivial, porque

$$\begin{aligned}x_{(12)(313)} &= -x_{(12)(212)},\\ x_{(13)(313)} &= -x_{(13)(212)},\\ x_{33313} &= -x_{33212},\\ x_{(23)(212)} &= x_{32212} - x_{(13)(323)} + x_{33213},\\ x_{(23)(213)} &= \frac{x_{(13)(223)} - x_{22212} - x_{32213}}{2},\\ x_{(23)(313)} &= -x_{(23)(212)} = -x_{32212} + x_{(13)(323)} - x_{33213}.\end{aligned}$$

Ahora, procederemos a calcular los posibles pesos para cada uno de los ejemplos de álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{ym}(3))$ vistos anteriormente. Como se expuso en la Sección 2.5, la determinación del mayor peso posible para cada $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{ym}(3))$ brinda información geométrica y algebraica, ya que si p es el mayor peso posible para $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{ym}(3))$, entonces la dimensión de una órbita coadjunta genérica es $2p$ y la dimensión de $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{ym}(3))))$ es igual a $\dim_k(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{ym}(3))) - 2p$.

Sea $f \in (\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{ym}(3)))^*$ de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{3} c_i x_i^* + \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij}^*,$$

con $c_{12} = 0$, $c_{13} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$. Luego, una polarización asociada a f es

$$\mathfrak{h}_f = k.x_1 \oplus k.x_2 \oplus k.x_{12} \oplus k.x_{13} \oplus k.x_{23},$$

ya que $\mathfrak{h}_f$ es una subálgebra de $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{ym}(3))$ tal que $f([\mathfrak{h}_f, \mathfrak{h}_f]) = 0$, y es maximal, porque tiene codimensión 1 y $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{ym}(3))$ no es una polarización de f, pues $f([x_1, x_3]) \neq 0$. Como el peso de $I(f)$ (es decir, el entero positivo r dado por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I(f) \simeq A_r(k)$) es igual a $\dim_k(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_f)$, resulta que $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{ym}(3)))/I(f) \simeq A_1(k)$. Es fácil demostrar que no hay pesos mayores para $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{ym}(3))$.

Si consideramos el caso $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^3(\mathfrak{ym}(3))$, toda funcional lineal es de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{3} c_i x_i^* + \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij}^* + \sum_{(ijk)\in J_3} c_{ijk} x_{ijk}^*.$$

Debe ser $x_{ij} \in \mathfrak{h}_f$, para todo $i < j$ y $x_{ijk} \in \mathfrak{h}_f$, para todo $(ijk) \in J_3$. Sea $x = \sum_{j=1}^{3} a_j x_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
[x, x_{12}] &= a_1 x_{323} + a_2 x_{212} + a_3 x_{312},\\
[x, x_{13}] &= -a_1 x_{223} + a_2 x_{213} - a_3 x_{212},\\
[x, x_{23}] &= a_1(-x_{312} + x_{213}) + a_2 x_{223} + a_3 x_{323}.
\end{aligned}$$

Luego, $x \in \mathfrak{h}_f$ si y sólo si $f([x, x_{ij}]) = 0$, para $1 \le i < j \le 3$, es decir,

$$\begin{aligned}
a_1 c_{323} + a_2 c_{212} + a_3 c_{312} &= 0,\\
-a_1 c_{223} + a_2 c_{213} - a_3 c_{212} &= 0,\\
a_1(-c_{312} + c_{213}) + a_2 c_{223} + a_3 c_{323} &= 0.
\end{aligned}$$

Supongamos $c_{323} = c_{213} = c_{312} = 1$, $c_{223} = c_{212} = 0$, entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, y por lo tanto $x = 0$, es decir, la polarización de f es

$$\mathfrak{h}_f = k.x_{12} \oplus k.x_{13} \oplus k.x_{23} \oplus k.x_{212} \oplus k.x_{213} \oplus k.x_{312} \oplus k.x_{223} \oplus k.x_{323},$$

y luego $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^3(\mathfrak{ym}(3)))/I(f) \simeq A_3(k)$. A su vez, hemos demostrado que no existe $f \in (\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^3(\mathfrak{ym}(3)))^*$ con una polarización de codimensión mayor que 3.

Si $c_{212} = 1$, $c_{323} = c_{312} = c_{223} = c_{213} = 0$, resulta $a_2 = a_3 = 0$. En consecuencia, la polarización de f es de la forma

$$\mathfrak{h}_f = k.x_1 \oplus k.x_{12} \oplus k.x_{13} \oplus k.x_{23} \oplus k.x_{212} \oplus k.x_{213} \oplus k.x_{312} \oplus k.x_{223} \oplus k.x_{323},$$

y luego $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^3(\mathfrak{ym}(3)))/I(f) \simeq A_2(k)$.

En el caso $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^4(\mathfrak{ym}(3))$, toda funcional lineal es de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{3} c_i x_i^* + \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij}^* + \sum_{(ijk)\in J_3} c_{ijk} x_{ijk}^* + \sum_{(ijkl)\in J_4} c_{ijkl} x_{ijkl}^*.$$

Se ve directamente que $x_{ijk} \in \mathfrak{h}_f$, para todo $(ijk) \in J_3$ y $x_{ijkl} \in \mathfrak{h}_f$, para todo $(ijkl) \in J_4$. Por otro lado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_{12} \in \mathfrak{h}_f$. Sea $x = \sum_{j=1}^{3} a_j x_j + a_{13} x_{13} + a_{23} x_{23}$. Entonces

$$\begin{aligned}
[x, x_{12}] &= a_1 x_{323} + a_2 x_{212} + a_3 x_{312} - a_{13} x_{(12)(13)} - a_{23} x_{(12)(23)},\\
[x, x_{212}] &= a_1 x_{3223} + a_2(x_{(13)(23)} - x_{3213}) + a_3 x_{3212},\\
[x, x_{213}] &= a_1(x_{(12)(13)} - x_{2223}) + a_2 x_{2213} + a_3 x_{3213},\\
[x, x_{223}] &= a_1(2x_{(12)(23)} + x_{2213} - x_{3212}) + a_2 x_{2223} + a_3 x_{3223},\\
[x, x_{312}] &= a_1(-x_{(12)(13)} + x_{3323}) + a_2(-x_{(12)(23)} + x_{3212}) + a_3 x_{3312},\\
[x, x_{323}] &= a_1(x_{(13)(23)} + x_{3213} - x_{3312}) + a_2 x_{3223} + a_3 x_{3323}.
\end{aligned}$$

Luego, $x \in \mathfrak{h}_f$ si y sólo si $f([x, x_{ijk}]) = 0$, para todo $(ijk) \in J_3$ y $f([x, x_{12}]) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
a_1 c_{323} + a_2 c_{212} + a_3 c_{312} - a_{13} c_{(12)(13)} - a_{23} c_{(12)(23)} &= 0,\\
a_1 c_{3223} + a_2(c_{(13)(23)} - c_{3213}) + a_3 c_{3212} &= 0,\\
a_1(c_{(12)(13)} - x_{2223}) + a_2 c_{2213} + a_3 c_{3213} &= 0,\\
a_1(2c_{(12)(23)} + c_{2213} - c_{3212}) + a_2 c_{2223} + a_3 c_{3223} &= 0,\\
a_1(-c_{(12)(13)} + c_{3323}) + a_2(-c_{(12)(23)} + c_{3212}) + a_3 c_{3312} &= 0,\\
a_1(c_{(13)(23)} + c_{3213} - c_{3312}) + a_2 c_{3223} + a_3 c_{3323} &= 0.
\end{aligned}$$

Si elegimos $c_{3223} = 1$, $c_{3212} = c_{2223} = c_{3323} = 0$, $c_{3213} = c_{3312}/2 = -c_{2213}/2 = c_{(12)(23)}$, resulta que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Por otro lado, la primera de las identidades anteriores implica que $a_{13}c_{(12)(13)} + a_{23}c_{(12)(23)} = 0$. Esto significa que la máxima codimensión posible para una funcional $f \in (\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^3(\mathfrak{ym}(3)))^*$ es 4. Por ejemplo, suponiendo $c_{(12)(23)} = 1$ y $c_{(12)(13)} = 0$,

$$\mathfrak{h}_f = k.x_{12} \oplus k.x_{13} \oplus k.x_{212} \oplus k.x_{213} \oplus k.x_{312} \oplus k.x_{223} \oplus k.x_{323} \oplus \bigoplus_{(ijkl)\in J_4} k.x_{ijkl},$$

por lo que $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^4(\mathfrak{ym}(3)))/I(f) \simeq A_4(k)$. En consecuencia, hemos probado que, dado r tal que $1 \leq r \leq 4$, existe un ideal I in $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3))$ tal que $A_r(k) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3))/I$.

Haremos como último ejemplo $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^5(\mathfrak{ym}(3))$. Sea la funcional

$$f = \sum_{i=1}^{3} c_i x_i^* + \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij}^* + \sum_{(ijk)\in J_3} c_{ijk} x_{ijk}^* + \sum_{(ijkl)\in J_4} c_{ijkl} x_{ijkl}^* + \sum_{(ijklm)\in J_5} c_{ijklm} x_{ijklm}^*.$$

Se ve directamente que $x_{ijk} \in \mathfrak{h}_f$, $x_{ijkl} \in \mathfrak{h}_f$ y $x_{ijklm} \in \mathfrak{h}_f$, para todo $(ijk) \in J_3$, $(ijkl) \in J_4$ y $(ijklm) \in J_5$, respectivamente. Sea $x = \sum_{j=1}^{3} a_j x_j + \sum_{i<j} a_{ij} x_{ij}$. Luego, $x \in \mathfrak{h}_f$ si y sólo si $f([x, x_{ijk}]) = 0$ y $f([x, x_{ijkl}]) = 0$, para todo $(ijk) \in J_3$) y $(ijkl) \in J_4$), respectivamente. Como

$$\begin{aligned}
[x, x_{212}] &= a_1 x_{3223} + a_2(x_{(13)(23)} - x_{3213}) + a_3 x_{3212} \\
&\quad + a_{12} x_{(12)(212)} + a_{13} x_{(13)(212)} + a_{23}(x_{32212} - x_{(13)(323)} + x_{33213}), \\
[x, x_{213}] &= a_1(x_{(12)(13)} - x_{2223}) + a_2 x_{2213} + a_3 x_{3213} \\
&\quad + a_{12} x_{(12)(213)} + a_{13} x_{(13)(213)} + a_{23} \frac{x_{(13)(223)} - x_{22212} - x_{32213}}{2}, \\
[x, x_{223}] &= a_1(2x_{(12)(23)} + x_{2213} - x_{3212}) + a_2 x_{2223} + a_3 x_{3223} \\
&\quad + a_{12} x_{(12)(223)} + a_{13} x_{(13)(223)} + a_{23} x_{(23)(223)}, \\
[x, x_{312}] &= a_1(-x_{(12)(13)} + x_{3323}) + a_2(-x_{(12)(23)} + x_{3212}) + a_3 x_{3312} \\
&\quad + a_{12} x_{(12)(312)} + a_{13} x_{(13)(312)} + a_{23} x_{(23)(312)}, \\
[x, x_{323}] &= a_1(x_{(13)(23)} + x_{3213} - x_{3312}) + a_2 x_{3223} + a_3 x_{3323} \\
&\quad + a_{12} x_{(12)(323)} + a_{13} x_{(13)(323)} + a_{23} x_{(23)(323)}, \\
[x, x_{(12)(13)}] &= -a_1(x_{(12)(223)} + x_{(13)(323)}) + a_2(x_{(12)(213)} - x_{(13)(212)}) \\
&\quad + a_3(x_{(12)(323)} - x_{(13)(312)}), \\
[x, x_{(12)(23)}] &= a_1(x_{(12)(213)} - x_{(12)(312)} - x_{(23)(323)}) + a_2(x_{(12)(323)} - x_{32212} - x_{33213} + x_{(12)(223)}) \\
&\quad + a_3(x_{(12)(323)} - x_{(23)(312)}), \\
[x, x_{(13)(23)}] &= a_1(x_{(13)(213)} + x_{(23)(223)} - x_{(13)(312)}) + a_2 \frac{x_{(13)(223)} + x_{22212} + x_{32213}}{2} \\
&\quad + a_3(x_{32212} - x_{33213}),
\end{aligned}$$

en particular, obtenemos que

$$\begin{aligned}
a_1 c_{3223} + a_2(c_{(13)(23)} - c_{3213}) + a_3 c_{3212} + a_{12} c_{(12)(212)} + a_{13} c_{(13)(212)} + a_{23}(c_{32212} - c_{(13)(323)} + c_{33213}) &= 0, \\
a_1(c_{(12)(13)} - c_{2223}) + a_2 c_{2213} + a_3 c_{3213} + a_{12} c_{(12)(213)} + a_{13} c_{(13)(213)} + a_{23} \frac{c_{(13)(223)} - c_{22212} - c_{32213}}{2} &= 0, \\
a_1(2c_{(12)(23)} + c_{2213} - c_{3212}) + a_2 c_{2223} + a_3 c_{3223} + a_{12} c_{(12)(223)} + a_{13} c_{(13)(223)} + a_{23} c_{(23)(223)} &= 0, \\
a_1(-c_{(12)(13)} + c_{3323}) + a_2(-c_{(12)(23)} + c_{3212}) + a_3 c_{3312} + a_{12} c_{(12)(312)} + a_{13} c_{(13)(312)} + a_{23} c_{(23)(312)} &= 0, \\
a_1(c_{(13)(23)} + c_{3213} - c_{3312}) + a_2 c_{3223} + a_3 c_{3323} + a_{12} c_{(12)(323)} + a_{13} c_{(13)(323)} + a_{23} c_{(23)(323)} &= 0, \\
-a_1(c_{(12)(223)} + c_{(13)(323)}) + a_2(c_{(12)(213)} - c_{(13)(212)}) + a_3(c_{(12)(323)} - c_{(13)(312)}) &= 0, \\
a_1(c_{(12)(213)} - c_{(12)(312)} - c_{(23)(323)}) + a_2(c_{(12)(323)} - c_{32212} - c_{33213} + c_{(12)(223)}) + a_3(c_{(12)(323)} - c_{(23)(312)}) &= 0, \\
a_1(c_{(13)(213)} + c_{(23)(223)} - c_{(13)(312)}) + a_2 \frac{c_{(13)(223)} + c_{22212} + c_{32213}}{2} + a_3(c_{32212} - c_{33213}) &= 0.
\end{aligned}$$

Al elegir $c_{(12)(212)} = c_{(13)(213)} = c_{(23)(223)} = c_{(13)(312)} = c_{(12)(323)} = -c_{(13)(212)} = 1$, y el resto de los coeficientes iguales a cero, resulta $a_1 = a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Por lo tanto, la mayor codimensión de una polarización de una funcional cualquiera $f \in (\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^5(\mathfrak{ym}(3)))^*$ es 6. En la siguiente sección utilizaremos estos cálculos para completar uno de los resultados principales obtenidos en esta tesis: el Teorema 3.5.1.

3.5 Teoremas principales

En esta sección se demuestran varios resultados principales de esta tesis. En el Teorema 3.5.1 se prueba que toda álgebra de Weyl $A_r(k)$ es un cociente de YM(3). Como corolario, toda álgebra de Weyl es cociente de YM(n), con $n \geq 3$. Este resultado puede utilizarse, por ejemplo, para construir familias de representaciones del álgebra de Yang-Mills que separen puntos, lo cual se hace en la Proposición 3.5.5.

Teorema 3.5.1. *Dado $r \in \mathbb{N}$ existe un morfismo suryectivo de k-álgebras*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)) \twoheadrightarrow A_r(k).$$

Más aún, podemos elegir este morfismo de manera tal que exista $l \in \mathbb{N}$ tal que el morfismo anterior se factorice por el cociente $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & A_r(k) \\
& \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))) \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. En la sección anterior demostramos el caso $r = 1, 2, 3, 4$. Vamos a demostrar ahora el resultado para $r \geq 5$.

Sabemos que hay una descomposición como k-módulos $\mathfrak{ym}(3) = V \oplus \mathfrak{tym}(3)$. Si vemos $\mathfrak{ym}(3)$ como una álgebra de Lie graduada, con la graduación especial, el Teorema 3.2.18 asegura que $\mathfrak{tym}(3)$ es un álgebra de Lie libre graduada (en grado par) generada por un espacio vectorial graduado (en grado par) $W(3)$, es decir,

$$\mathfrak{tym}(3) \simeq \mathfrak{f}_{gr}(W(3)),$$

Por la Proposición 4.3.5, $W(3) = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} W(3)_{2l+2}$, con $\dim_k(W(3)_{2l+2}) = 2l+1$. Elegimos una base para los primeros dos espacios homogéneos de $W(3)$ como antes: para $W(3)_4$ elegimos la base $\{x_{12}, x_{13}, x_{23}\}$ y para $W(3)_6$ tenemos $\{x_{112}, x_{113}, x_{221}, x_{123}, x_{312}\}$.

Por la Proposición 3.1.3, resulta

$$\mathcal{U}_{gr}(\mathfrak{tym}(3)) \simeq \mathcal{U}_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(W(3))) \simeq T_{gr}(W(3)),$$

y, por lo tanto, si $\mathcal{O}$ denota el funtor olvido,

$$T(\mathcal{O}(W(3))) = \mathcal{O}(T_{gr}(W(3))) \simeq \mathcal{O}(U_{gr}(\mathfrak{tym}(3))) = \mathcal{U}(\mathcal{O}(\mathfrak{tym}(3))).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, tener un morfismo de k-álgebras de $\mathcal{U}(\mathcal{O}(\mathfrak{tym}(3)))$ en $A_m(k)$ equivale entonces a un morfismo de k-álgebras de $T(\mathcal{O}(W))$ en $A_m(k)$, lo que es lo mismo que un morfismo de k-espacios vectoriales de $\mathcal{O}(W)$ en $A_m(k)$. El morfismo de álgebras será suryectivo si la imagen del correspondiente morfismo de espacios vectoriales contiene a los generadores (como álgebra) de $A_m(k)$, que denotaremos $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ como es usual.

De ahora en adelante, como trabajaremos exclusivamente en la categoría de álgebras no graduadas, aunque mantendremos la graduación canónica del álgebra de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(3)$, omitiremos escribir el funtor olvido $\mathcal{O}$ sin que ello cause confusión alguna.

Suponemos $m \geq 2$. Elijamos un morfismo de k-espacios vectoriales

$$\phi : W(3) \to A_m(k)$$

tal que $\phi(W(3)_4) = \{0\}$ y $\phi(x_{112}) = p_1$, $\phi(x_{221}) = p_2$, $\phi(x_{123}) = q_1$, $\phi(x_{113}) = q_2$, $\phi(x_{312}) = 0$, y tal que para cada generador del álgebra de Weyl p_i y q_i ($3 \leq i \leq m$), existan elementos homogéneos de grado mayor que 6, w_i, w'_i en una base de $W(3)$ tales que $\phi(w_i) = p_i$ y $\phi(w'_i) = q_i$. Esta última condición es fácilmente satisfecha ya que $W(3)$ es de dimensión infinita.

Sean d_i y d'_i los grados de w_i y w'_i, respectivamente. Sea j el máximo de los grados d_i y d'_i, y sea $l = 2j + 1$. El morfismo ϕ induce un único morfismo suryectivo $\Phi : \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(3)) \twoheadrightarrow A_m(k)$, que es equivalente a un morfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{tym}(3) \to \mathrm{Lie}(A_m(k)).$$

Este último se factoriza de la forma siguiente

$$\mathfrak{tym}(3) \to \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)) \to \mathrm{Lie}(A_m(k)),$$

donde el primer morfismo es la proyección canónica. Por lo tanto, el morfismo Φ se factoriza también

$$\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(3)) \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))) \twoheadrightarrow A_m(k).$$

Hemos obtenido finalmente un morfismo suryectivo de k-álgebras

$$\Psi : \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))) \twoheadrightarrow A_m(k),$$

y el álgebra de Lie $\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$ es nilpotente. Más aún, es un ideal nilpotente del álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$. Cómo módulos sobre k se tiene el isomorfismo $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)) = V(3) \oplus \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$.

Sea $I = \mathrm{Ker}(\Psi)$. Como el cociente del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))$ por el ideal I es un álgebra de Weyl, que es simple, I es un ideal bilátero maximal, y por lo tanto existe una funcional lineal $f \in (\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))^*$ tal que $I = I(f)$. Elegimos $\mathfrak{h}_f$ una polarización estándar de f, i.e., una polarización dada a partir de una bandera de $\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$. Sea $\bar{f} \in (\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))^*$ una extensión de f, y sea $\mathfrak{h}_{\bar{f}}$ una polarización estándar de $\bar{f}$ dada al continuar la bandera de $\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$ a $\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$, i.e., si la bandera es:

$$\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)) \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)),$$

y si notamos $\bar{f}_i$ la restricción de $\bar{f}$ a $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, 2, 3$), entonces

$$\mathfrak{h}_{\bar{f}} = \mathfrak{h}_f + \mathfrak{g}_1^{\bar{f}_1} + \mathfrak{g}_2^{\bar{f}_2} + \mathfrak{g}_3^{\bar{f}_3}.$$

De acuerdo con la Proposición 2.5.5

$$\mathfrak{st}(I(f), \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))) = \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)) + \mathfrak{g}',$$

donde

$$\mathfrak{st}(I(f), \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))) = \{x \in \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)) : [x, I(f)] \subseteq I(f)\},$$

y

$$\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)) : f([x, \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))]) = 0\}.$$

Fácilmente, obtenemos que, para nuestra elección de Ψ, $\bar{x}_{12}, \bar{x}_{13}, \bar{x}_{23} \in I$, pero $\bar{x}_{112}, \bar{x}_{221}, \bar{x}_{123}$ no está en el núcleo de Ψ, ya que $\Psi(\bar{x}_{112}) = p_1$, $\Psi(\bar{x}_{221}) = p_2$ y $\Psi(\bar{x}_{123}) = q_1$.

Sea $x \in \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$, luego $x = x' + y$, donde $x' = \sum_{i=1}^{3} c_i \bar{x}_i \in V(3)$, e $y \in \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$. Como $[y, I(f)] \subseteq I(f)$, entonces $x \in \mathfrak{st}(I(f), \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))$ si y sólo si $[x', I(f)] \subseteq I(f)$. Veamos que quiere decir esta condición. Como

$$[x', \bar{x}_{12}] = \sum_{i=1}^{3} c_i [\bar{x}_i, \bar{x}_{12}] = c_1 \bar{x}_{112} - c_2 \bar{x}_{221} - c_3 \bar{x}_{123},$$

$[x', \bar{x}_{12}] \in I$ si y sólo si $\Psi([x', \bar{x}_{12}]) = 0$, es decir, si y sólo si $c_1 p_1 - c_2 p_2 - c_3 q_1 = 0$, pero como los generadores de $A_m(k)$ son linealmente independientes, debe ser $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, y resulta $x' = 0$, lo que implica $\mathfrak{st}(I(f), \mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))) = \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$. Luego $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$. En consecuencia, resulta que $\mathfrak{g}_i^{\bar{f}_i} \subset \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$, y por lo tanto $\mathfrak{h}_{\bar{f}} \subseteq \mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$. Por la maximalidad de $\mathfrak{h}_f$ en $\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3))$, vemos que $\mathfrak{h}_{\bar{f}} \subseteq \mathfrak{h}_f$. La otra inclusión está dada por definición, conque $\mathfrak{h}_{\bar{f}} = \mathfrak{h}_f$.

Finalmente, el peso del ideal $I(\bar{f})$ es igual a

$$\begin{aligned}\dim_k((\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))/\mathfrak{h}_{\bar{f}}) &= \dim_k((\mathfrak{ym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))/\mathfrak{h}_f)\\ &= \dim_k((\mathfrak{tym}(3)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(3)))/\mathfrak{h}_f) + 3 = m + 3.\end{aligned}$$

Hemos demostrado, tomando $r = m + 3$, que $A_r(k)$ es un cociente de $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3))$ para cualquier $r \geq 5$, y en consecuencia para todo $r \in \mathbb{N}$. □

Observación 3.5.2. *La demostración anterior no es válida en el caso de* $\mathfrak{ym}(2)$, *ya que en ese caso* $\mathfrak{tym}(2) \simeq \mathfrak{f}_{gr}(W(2))$ *con* $\dim(W(2)) = 1$.

Como $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(3))$ es cociente de toda $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$ para $n \geq 4$, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.5.3. *Dados dos números naturales $r, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, existe un morfismo suryectivo de k-álgebras*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \twoheadrightarrow A_r(k).$$

Más aún, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que el morfismo anterior se factoriza por el cociente $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[rr, twoheadrightarrow] \arrow[dr] & & A_r(k) \\ & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))) \arrow[ur, twoheadrightarrow] & \end{tikzcd}$$

Definición 3.5.4. *Sea A una k-álgebra asociativa, o de Lie, y sea $\mathcal{R} \subseteq {}_A\mathrm{Mod}$ una subcategoría plena de la categoría de módulos (a izquierda) sobre A. Diremos que $\mathcal{R}$ **separa puntos de** A si para todo $a \in A$, $a \neq 0$, existe un objeto $M \in \mathcal{R}$ tal que a no induce el morfismo nulo en M.*

Por la Proposición 3.1.15 de [Dix1], un ideal I de un álgebra envolvente de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es semiprimo si y sólo si es intersección de ideales primitivos. Como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es íntegra, el ideal nulo $\{0\}$ es completamente primo, y por lo tanto semi-primo (cf. [Dix1], 3.1.6). Entonces, $\{0\}$ es intersección de ideales biláteros primitivos. A fortiori, la intersección de todos los ideales biláteros primitivos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es nula, es decir, el radical de Jacobson $J(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Asímismo, como todo ideal bilátero maximal es primitivo (cf. [Dix1], 3.1.6), la intersección de todos los ideales biláteros maximales es nula.

Sea $\mathcal{W}(n)$ la subcategoría plena de ${}_{\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))}\mathrm{Mod}$ formada por todos los módulos M tal que existen $r, l \in \mathbb{N}$ que cumplen que la acción se factoriza $\phi : \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))) \to A_r(k) \to \mathrm{End}_k(M)$.

Proposición 3.5.5. *La categoría $\mathcal{W}(n)$ separa puntos de $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$ no nulo. Luego, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_l(x) \in \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$ es no nulo (cf. Lema 3.1.8). Como $\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n))$ es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, la intersección de todos los ideales biláteros maximales es nula, y entonces existe un ideal bilátero maximal $J \triangleleft \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))$ tal que $\pi_l(x) \notin J$. Por otro lado, tenemos que $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))/J \simeq A_r(k)$, para algún $r \in \mathbb{N}$ (cf. [Dix1], 4.5.8 y Thm. 4.7.9). Como la imagen inversa de un ideal bilátero maximal por un morfismo de k-álgebras suryectivo es maximal, $I = \pi_l^{-1}(J)$ es un ideal bilátero maximal en $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$ y $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))/I \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)/\mathcal{C}^l(\mathfrak{ym}(n)))/J \simeq A_r(k)$. Trivialmente $x \notin I$, pues si $x \in I$, luego $\pi_l(x) \in \pi_l(I) = J$, lo que es absurdo. Sea M un módulo sobre $A_r(k)$, tal que la imagen de x bajo los isomorfismos anteriores es no nula (tomar por ejemplo el mismo $A_r(k)$). Luego, los isomorfismos anteriores inducen sobre M una estructura de $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n))$-módulo, donde x no actúa como el morfismo nulo. La proposición queda demostrada. □

Observación 3.5.6. *Aunque la subcategoría $\mathcal{W}(n)$ separa puntos del álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$, no es esquelética en la categoría ${}_{\mathrm{YM}(n)}\mathrm{Mod}$. Esto se debe a que todo objeto de $\mathcal{W}(n)$ posee dimensión de Gelfand-Kirillov finita, ya que, si $M \in \mathcal{W}(n)$ es un módulo inducido de un módulo de $A_r(k)$, luego (cf. [McR], Prop. 1.15, (ii); Prop. 3.2, (iii), (v))*

$$\text{GK-dim}_{\mathrm{YM}(n)}(M) = \text{GK-dim}_{A_r(k)}(M) \leq \text{GK-dim}_{A_r(k)}(A_r(k)) = 2r.$$

Por otro lado, como $\mathrm{YM}(n)$ posee dimensión de Gelfand-Kirillov infinita (cf. Sección 3.4), existen módulos (e.g., $\mathrm{YM}(n)$) que no pertenecen a $\mathcal{W}(n)$.

Capítulo 4

Homología de Hochschild y homología cíclica del álgebra de Yang-Mills

El objetivo de este capítulo es hallar la homología de Hochschild y cíclica del álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ para $n \geq 3$. Recordamos que el caso $n = 2$ ya fue calculado en el Ejemplo 3.2.6.

Por este motivo, será necesario estudiar las propiedades homológicas del álgebra de Lie libre $\mathfrak{tym}(n)$ así como de su espacio de generadores $W(n)$. En las primeras secciones estudiaremos en detalle este último espacio, probando en particular que posee estructura de $S(V(n))$-módulo (y por lo tanto de $\mathrm{YM}(n)$-módulo) y varias propiedades homológicas útiles (cf. Teorema 4.6.4, Proposición 4.6.13). En particular, hallaremos las serie de Hilbert de $W(n)$, lo que nos permitirá hallar el centro de $\mathrm{YM}(n)$ (cf. Corolario 4.3.6). Para las demostraciones de estos hechos será útil estudiar espacios geométricos asociados a $W(n)$ (cf. Sección 4.5).

A partir del análisis de la homología para $W(n)$, procederemos a estudiar las correspondiente homología del ideal de aumentación de $\mathrm{TYM}(n)$ en la primera subsección de la Sección 4.7, de donde obtendremos la información suficiente para hallar del primer grupo de cohomología $HH^1(\mathrm{YM}(n))$ en la Subección 4.7.2 (cf. Teorema 4.7.19).

Finalmente, en la misma sección, a partir del análisis de la homología cíclica de álgebras graduadas, vamos a calcular la serie de Hilbert de los grupos de homología de Hochschild y homología cíclica del álgebra de Yang-Mills.

La mayoría de los resultados de este capítulo se encuentran en [Mov]. Sin embargo, varios de ellos están formulados de forma incompleta y hasta incorrecta, y muchas veces sin demostraciones. Es por esto que el ánimo de este capítulo es presentar de forma lo más completa y precisa posible los resultados para calcular la homología de Hochschild y cíclica del álgebra de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$. Por otro lado, las demostraciones brindadas en muchos casos difieren de las bosquejadas en [Mov].

4.1 El módulo $W(n)$

Por el Teorema 3.2.18, el álgebra de Lie graduada con la graduación especial $\mathfrak{tym}(n)$ es libre graduada, y por lo tanto es isomorfa al álgebra de Lie libre graduada $\mathfrak{f}_{gr}(W(n))$ de un espacio vectorial graduado $W(n)$, con la graduación especial, que podemos suponer incluido en $\mathfrak{tym}(n)$.

Por otro lado, el morfismo $W(n) \to \mathfrak{tym}(n)/[\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)]$ dado por la composición de la inclusión y la proyección canónica es un isomorfismo homogéneo de grado 0 (cf. [Wei], Coro. 7.2.5, Thm. 7.4.1). Más aún, como $\mathfrak{tym}(n)$ es un ideal de $\mathfrak{ym}(n)$, $\mathfrak{tym}(n)/[\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)]$ posee una acción de $\mathfrak{ym}(n)$ inducida de la acción adjunta de $\mathfrak{ym}(n)$ tal que $\mathfrak{tym}(n)$ actúa trivialmente. Por lo tanto, $\mathfrak{tym}(n)/[\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)]$ resulta un $\mathfrak{ym}(n)/\mathfrak{tym}(n)$-módulo, es decir, un $V(n)$-módulo, donde consideramos a $V(n)$ como el álgebra de Lie abeliana de dimensión n, o un $S(V(n))$-módulo graduado, al considerar el álgebra universal envolvente. Esto induce una acción de $V(n)$ en $W(n)$, que podemos escribir de la forma $x_i.w$ y que satisface que

$$[x_i, w] = x_i.w + \sum_{l \in L} [v_{i,l}, v'_{i,l}], \tag{4.1.1}$$

donde L es un conjunto de índices y $v_{i,l}, v'_{i,l} \in \mathfrak{tym}(n)$, $\forall\, l \in L$.

Más aún, teniendo en cuenta que $\mathfrak{tym}(n) = \mathfrak{f}(W(n))$, $\mathfrak{tym}(n)$ es la subálgebra de Lie generada por $W(n)$ en

Lie($TW(n)$). En consecuencia, recordando que $TW(n) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}_0} W(n)^{\otimes p}$, podemos escribir

$$\mathfrak{tym}(n) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \mathfrak{tym}(n)^p,$$

con $\mathfrak{tym}(n)^p = \mathfrak{tym}(n) \cap W(n)^{\otimes p}$. Si $z \in \mathfrak{tym}(n)^p$, diremos que z tiene **grado homológico** p.

Por lo tanto, podemos escribir

$$[x_i, w] = x_i.w + \sum_{p\geq 2} \rho_i^p.w, \tag{4.1.2}$$

donde $\rho_i^p.w$ es la proyección de $[x_i, w] \in \mathfrak{tym}(n)$ en la p-ésima componente $\mathfrak{tym}(n)^p$. Notar que la suma anterior es finita.

Proposición 4.1.1. *El espacio vectorial graduado $W(n)$, con la graduación usual, es un $S(V(n))$-módulo graduado para la graduación usual. Más aún, como el elemento $q = \sum_{i=1}^n x_i^2 \in S(V(n))$ actúa por cero, $W(n)$ resulta un $S(V(n))/\langle q\rangle$-módulo graduado.*

Demostración. La primera parte ya fue demostrada, donde consideramos la graduación usual, por ser más natural para las álgebras asociativas.

Para demostrar la segunda, a partir de (4.1.1), basta ver que

$$\sum_{i=1}^n [x_i, [x_i, w]] \in [\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)], \forall\, w \in W(n). \tag{4.1.3}$$

Para ello, procederemos por inducción en el grado usual d de w. Si $d = 2$, luego podemos suponer $w = [x_j, x_l]$, donde $1 \leq j, l \leq n$. En este caso, aplicando la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n [x_i, [x_i, w]] = \sum_{i=1}^n [x_i, [x_i, [x_j, x_l]]] &= \sum_{i=1}^n [[x_i, [x_i, x_j]], x_l] + 2\sum_{i=1}^n [[x_i, x_j], [x_i, x_l]] + \sum_{i=1}^n [x_j, [x_i, [x_i, x_l]]] \\ &= 2\sum_{i=1}^n [[x_i, x_j], [x_i, x_l]] \in [\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)],\end{aligned}$$

donde en el último paso empleamos las relaciones de Yang-Mills.

Supongamos que demostramos la propiedad (4.1.3) para todo w de grado $d \leq d_0$ y sea w de grado $d_0 + 1$. Entonces, podemos escribir

$$w = \sum_{j=1}^n [x_j, w_j],$$

donde w_j posee grado menor o igual que d_0, y por lo tanto, por hipótesis inductiva,

$$\sum_{i=1}^n [x_i, [x_i, w_j]] = \sum_{a\in A_j} [c_a^j, d_a^j], \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

donde A_j es un conjunto de índices y $c_a^j, d_a^j \in \mathfrak{tym}(n), \forall\, a \in A_j, 1 \leq j \leq n$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n [x_i, [x_i, w]] &= \sum_{i=1}^n [[x_i, [x_i, x_j]], w_j] + 2\sum_{i=1}^n [[x_i, x_j], [x_i, w_j]] + \sum_{i=1}^n [x_j, [[x_i, [x_i, w_j]]] \\ &= 2\sum_{i=1}^n [[x_i, x_j], [x_i, w_j]] + \sum_{i=1}^n \sum_{a\in A_j} [x_j, [c_a^j, d_a^j]] \\ &= 2\sum_{i=1}^n [[x_i, x_j], [x_i, w_j]] + \sum_{i=1}^n \sum_{a\in A_j} ([[x_j, c_a^j], d_a^j]] + [c_a^j, [x_j, d_a^j]]) \in [\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)],\end{aligned}$$

donde A_j es un conjunto de índices y $c_a^j, d_a^j \in \mathfrak{tym}(n), \forall\, a \in A_j, 1 \leq j \leq n$. $\square$

4.2 Algunos resultados útiles

En esta subsección vamos a presentar algunos resultados que serán empleados en el análisis del módulo $W(n)$ y que fueron extraídos de [Mov], Sec. 3.3, aunque con algunas correcciones.

Definición 4.2.1 (cf. [Mov], Def. 13)**.** *Sea $S(V(n))$ el álgebra simétrica y sea N un $S(V(n))$-módulo a derecha. Si $z \in S(V(n))$, definimos el **anulador de** N **con respecto a** z como el $S(V(n))$-submódulo de N dado por*

$$\mathrm{ann}_N(z) = \{y \in N : yz = 0\}.$$

*A su vez, se define el **anulador positivo de** N como el $S(V(n))$-submódulo de N siguiente*

$$\mathrm{ann}(N) = \{y \in N : ya = 0, \forall\, a \in S^+(V(n))\}.$$

Por otra parte, consideraremos los $S(V(n))$-módulos siguientes (con la estructura inducida de N^n)

$$Z(N) = \{(y_1, \dots, y_n) \in N^n : \sum_{i=1}^{n} y_i x_j x_i = y_j q\},$$
$$B(N) = \{(y_1, \dots, y_n) \in N^n : \exists\, y \in N \text{ tal que } yx_i = y_i\},$$

*denominados **submódulos de ciclos** y **submódulo de bordes**, respectivamente. Es directo ver que $B(N) \subseteq Z(N)$.*

Se define $H(N) = Z(N)/B(N)$.

Observación 4.2.2. *La imagen del morfismo $S(V(n))$-lineal*

$$\begin{aligned} \mathrm{ann}(N) &\to N \otimes \Lambda^n V(n) \\ y &\mapsto y \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_n \end{aligned}$$

está incluida en el núcleo de la n-ésima diferencial d_n^{CE} del complejo de Chevalley-Eilenberg de V con coeficientes en N, ya que

$$d_n^{\mathrm{CE}}(y \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i y x_i \otimes x_1 \wedge \dots \hat{x}_i \wedge \dots \wedge x_n = 0,$$

pues $yx_i = 0$. Más aún, como $\{x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge x_n\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base de $\Lambda^{n-1}V(n)$, entonces $y \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in \mathrm{Ker}(d_n^{\mathrm{CE}})$ si y sólo si $yx_i = 0$, $\forall\, i$, con $1 \leq i \leq n$. En consecuencia, la aplicación anterior define un isomorfismo $S(V(n))$-lineal de $\mathrm{ann}(N)$ en $H_n(V, N)$.

Observación 4.2.3. *Considerando el isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{ym}(n)/\mathfrak{tym}(n) \simeq V(n)$, obtenemos que todo $S(V(n))$-módulo (o $V(n)$-módulo) N, es un $\mathfrak{ym}(n)$-módulo con la acción inducida. En ese caso, vemos directamente del complejo de Koszul para la homología del álgebra de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(n)$ con coeficientes en N que $Z(N) \simeq Z_2(\mathfrak{ym}(n), N) = \mathrm{Ker}(d_2)$ y $B(N) \simeq B_2(\mathfrak{ym}(n), N) = \mathrm{Im}(d_3)$, a partir del isomorfismo canónico $N \otimes V(n) \simeq N^n$. En consecuencia, $H(N) \simeq H_2(\mathfrak{ym}(n), N)$. Esto justifica el nombre empleado.*

Dado N un $S(V(n))$-módulo, podemos considerar el morfismo $S(V(n))$-lineal

$$\begin{aligned} h'_N : Z(N) &\to \mathrm{ann}(N/N.q) \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i, \end{aligned}$$

donde $\bar{y}_i$ es la clase de y_i en $N/N.q$.

Es directo chequear que h'_N está bien definida: si $(y_1, \dots, y_n) \in Z(N)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i x_j = y_j q \in N.q.$$

Pero este morfismo satisface que $h'_N(B(N)) = 0$, ya que, si $(yx_1, \dots, yx_n) \in B(N)$, para $y \in N$, entonces $h'_N(yx_1, \dots, yx_n)$ es la clase del elemento $\sum_{i=1}^{n} yx_i^2 = yq \in N.q$. Por lo tanto, h'_N induce un morfismo de $S(V(n))$-módulos h_N de $H(N)$ en $\mathrm{ann}(N/N.q)$.

Proposición 4.2.4 (cf. [Mov], Prop. 14)**.** *Si el endomorfismo $S(V(n))$-lineal de N dado por la multiplicación por q es inyectivo, entonces el morfismo h_N definido anteriormente es un isomorfismo.*

Demostración. Si $\overline{(y_1,\dots,y_n)} \in \operatorname{Ker}(h_N)$, entonces existe $y \in N$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = yq.$$

Como $(y_1,\dots,y_n) \in Z(N)$, $\sum_{i=1}^{n} y_i x_j x_i = y_j q$, y por lo tanto resulta $yx_j q = y_j q$, $\forall j = 1,\dots,n$. Como el endomorfismo $S(V(n))$-lineal de N dado por la multiplicación por q es inyectivo, $y_j = yx_j$, $\forall j = 1,\dots,n$, es decir, $(y_1,\dots,y_n) \in B(N)$, y por lo tanto, h_N es inyectivo.

Sea ahora $\bar{y} \in \operatorname{ann}(N/N.q)$ la clase de un elemento $y \in N$. Por lo tanto, existen elementos $y_1,\dots,y_n \in N$ tales que $yx_i = y_i q$, $\forall i = 1,\dots,n$. Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i q = \sum_{i=1}^{n} y x_i^2 = yq.$$

Como el endomorfismo $S(V(n))$-lineal de N dado por la multiplicación por q es inyectivo, resulta $y = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, y por lo tanto $h_N\overline{(y_1,\dots,y_n)} = \bar{y}$, es decir, h_N es suryectivo. La proposición queda demostrada. □

Proposición 4.2.5 (cf. [Mov], Prop. 15)**.** *Si el endomorfismo $S(V(n))$-lineal de N dado por la multiplicación por q es inyectivo y $H_n(V,N) = H_{n-1}(V,N) = 0$, entonces $H_2(\mathfrak{ym}(n),N) = H(N) = 0$.*

Demostración. Como la sucesión exacta corta de $S(V(n))$-módulos

$$0 \to N \xrightarrow{.q} N \to N/N.q \to 0$$

da lugar a la sucesión exacta larga en homología de Lie

$$0 \to H_n(V(n),N) \to H_n(V(n),N) \to H_n(V(n),N/N.q) \to H_{n-1}(V(n),N) \to H_{n-1}(V(n),N) \to \dots$$

y $H_n(V,N) = H_{n-1}(V,N) = 0$, entonces $H_n(V(n),N/N.q) \simeq \operatorname{ann}(N/N.q) \simeq H(N)$, donde empleamos los resultados de la Observación 4.2.2 y la Proposición 4.2.4. Finalmente, por la Observación 4.2.3, $H_2(\mathfrak{ym}(n),N) = H(N) = 0$. □

4.3 La serie de Hilbert de $W(n)$

Definición 4.3.1. *La **serie de Hilbert** de un k-espacio vectorial graduado $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ es la serie formal de potencias en $\mathbb{Z}[[z,z^{-1}]]$ dada por*

$$h_V(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_k(V_n) z^n.$$

En esta sección vamos a estudiar la (co)homología de $S(V(n))$ como representación graduada de $\mathfrak{ym}(n)$, y en particular vamos a calcular la serie de Hilbert del espacio vectorial graduado de generadores libres del álgebra $\mathfrak{tym}(n)$.

Como el ideal $\mathfrak{tym}(n) \triangleleft \mathfrak{ym}(n)$ es igual al conmutador de $\mathfrak{ym}(n)$, la estructura de $\mathfrak{tym}(n)$-módulo inducida de $S(V(n))$ es trivial. A su vez, como el álgebra de Lie $\mathfrak{tym}(n)$ es libre, al emplear [Wei], Prop. 9.1.6, la homología puede calcularse empleando la resolución de k por $\mathfrak{tym}(n)$-módulos libres

$$0 \to \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n)) \otimes W(n) \xrightarrow{\mu} \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n)) \xrightarrow{\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}} k \to 0, \tag{4.3.1}$$

por lo que obtenemos que

$$H_\bullet(\mathfrak{tym}(n), S(V(n))) = \begin{cases} S(V(n)), & \text{si } \bullet = 0, \\ S(V(n)) \otimes W(n), & \text{si } \bullet = 1, \\ 0, & \text{si } \bullet > 1, \end{cases}$$

donde $S(V(n)) \otimes W(n)$ posee estructura de $V(n)$-módulo dada por la acción diagonal de considerar las acciones usuales en $S(V(n))$ y $W(n)$, y los isomorfismos anteriores son de $V(n)$-módulos graduados (homogéneos de grado

0). Esto se demuestra comparando la resolución anterior con una resolución de k en la categoría de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos, e.g., la resolución de Cartan-Eilenberg

$$\cdots \to \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \Lambda^2\mathfrak{ym}(n) \xrightarrow{d_2} \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \mathfrak{ym}(n) \xrightarrow{d_1} \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \xrightarrow{\epsilon_{\mathfrak{ym}(n)}} k \to 0,$$

que es una resolución de $\mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$-módulos libres, por el Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Usando este complejo, la homología $H_\bullet(\mathfrak{tym}(n), S(V(n)))$ posee naturalmente una acción de $\mathfrak{ym}(n)/\mathfrak{tym}(n) \simeq V(n)$.

En este caso, el morfismo de comparación es sencillo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n)) \otimes W(n) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{inc}\otimes\mathrm{inc}"] & \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n)) \arrow[r, "\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "d_3"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \Lambda^2\mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "d_2"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \otimes \mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "d_1"] & \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \arrow[r, "\epsilon_{\mathfrak{ym}(n)}"] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, obtenemos un morfismo de espacios vectoriales graduados (homogéneo de grado 0) entre complejos que calculan la homología $H_\bullet(\mathfrak{tym}(n), S(V(n)))$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & S(V(n)) \otimes W(n) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"] & S(V(n)) \arrow[r, "\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}"] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "d_3"] & S(V(n)) \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} \mathrm{YM}(n) \otimes \Lambda^2\mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "d_2"] & S(V(n)) \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} \mathrm{YM}(n) \otimes \mathfrak{ym}(n) \arrow[r, "d_1"] & S(V(n)) \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} \mathrm{YM}(n) \arrow[r, "\epsilon_{\mathfrak{ym}(n)}"] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostraremos que los morfismos inducidos en homología son $V(n)$-lineales, es decir, debemos probar que α y β inducen morfismos $V(n)$-lineales $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ en la homología.

El caso de α es simple, ya que, si $z \in S(V(n)) = H_0(\mathfrak{tym}(n), S(V(n)))$, $\bar{\alpha}(z) = \overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1}$, luego,

$$x_i.\bar{\alpha}(z) = x_i.(\overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1}) = \overline{x_i z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1} + \overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i} = \overline{x_i z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1} = \bar{\alpha}(x_i z),$$

donde usamos que $\overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i} = 0$, ya que $z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i = d_1(z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i)$. En consecuencia, $\bar{\alpha}$ es $V(n)$-lineal.

Para el morfismo β es similar. Sea $z \otimes w \in S(V(n)) \otimes W(n) = H_1(\mathfrak{tym}(n), S(V(n)))$. Entonces

$$\bar{\beta}(z \otimes w) = \overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes w}.$$

Por un lado, como

$$d_2(z' \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} y' \otimes a \wedge b) = z' \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} y'a \otimes b - z' \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} y'b \otimes a - z' \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} y' \otimes [a, b], \tag{4.3.2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
d_2(z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i \wedge w) &= z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i \otimes w - z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} w \otimes x_i - z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes [x_i, w] \\
&= z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i \otimes w - zw \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i \\
&\quad - z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i.w - \sum_{l \in L} z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes [v_{i,l}, v'_{i,l}] \\
&= z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i \otimes w - z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i.w - \sum_{l \in L} z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes [v_{i,l}, v'_{i,l}],
\end{aligned}$$

donde usamos que $\mathrm{TYM}(n)$ actúa por cero en $S(V(n))$ y la identidad (4.1.1). Por otro lado, empleando nuevamente la identidad (4.3.2),

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in L} d_2(z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes v_{i,l} \wedge v'_{i,l}) &= \sum_{l \in L} z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} v_{i,l} \otimes v'_{i,l} - \sum_{l \in L} z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} v'_{i,l} \otimes v_{i,l} - \sum_{l \in L} z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes [v_{i,l}, v'_{i,l}] \\
&= -\sum_{l \in L} z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes [v_{i,l}, v'_{i,l}],
\end{aligned}$$

ya que $v_{i,l}, v'_{i,l} \in \mathfrak{tym}(n)$. Al combinar las dos igualdades anteriores obtenemos

$$d_2(z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i \wedge w - \sum_{l \in L} z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes v_{i,l} \wedge v'_{i,l}) = z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i \otimes w - z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i.w,$$

lo que implica que

$$\overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i \otimes w} = \overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i w}.$$

Podemos usar la identidad anterior para obtener que

$$\begin{aligned} x_i.\bar{\beta}(z \otimes w) &= x_i.(\overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1} \otimes w) = \overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} x_i \otimes w} + \overline{x_i z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes w} \\ &= \overline{z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes x_i w} + \overline{x_i z \otimes_{\mathrm{TYM}(n)} 1 \otimes w} = \bar{\beta}(x_i z \otimes w + z \otimes x_i w) = \bar{\beta}(x_i.(z \otimes w)), \end{aligned}$$

es decir, $\bar{\beta}$ es $V(n)$-lineal.

Ahora continuamos con nuestro estudio de la homología $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$. Por el cálculo anterior, la sucesión espectral convergente de Hochschild-Serre (cf. [Wei], 7.5.2)

$$E^2_{pq} = H_p(V(n), H_q(\mathfrak{tym}(n), S(V(n)))) \Rightarrow H_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$$

está compuesta de dos filas ($q = 0, 1$). Por [Wei], Ex. 5.1.3 y Ex. 5.2.2, resulta la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \ldots \to H_{p+1}(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \to E^2_{p+10} \xrightarrow{d} E^2_{p-11} \to H_p(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \to \ldots \\ \to H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \to E^2_{20} \xrightarrow{d} E^2_{01} \to H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \to E^2_{10} \to 0 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

y $E^2_{00} \simeq H_0(\mathfrak{ym}, S(V(n)))$, lo que implica directamente que $H_0(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq k$ (cf. 3.2.13).

Observación 4.3.2. *La sucesión espectral de Hochschild-Serre se obtiene a partir de la filtración (por filas o columnas) del complejo total de un complejo doble en el primer cuadrante, en este caso, un complejo doble de módulos graduados con diferenciales dadas por morfismos homogéneos de grado* 0. *La filtración (por filas o columnas) preserva la graduación. La construcción de la sucesión espectral a partir de una filtración (cf. [Wei], Thm. 5.4.1 y Thm. 5.5.1) está expresada solamente en términos de morfismos homogéneos de grado* 0*, con lo que todos los morfismos de la sucesión exacta larga* (4.3.3) *son homogéneos de grado cero, y lo mismo el isomorfismo* $E^2_{00} \simeq H_0(\mathfrak{ym}, S(V(n)))$.

Por otro lado, $E^2_{p0} = H_p(V(n), H_0(\mathfrak{tym}(n), S(V(n)))) = 0$, si $p \geq 1$, ya que $H_0(\mathfrak{tym}(n), S(V(n))) \simeq S(V(n))$. Por lo tanto, resulta $E^2_{p-1,1} \simeq H_p(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$, para $p \geq 1$, lo que implica directamente que

$$H_p(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq H_{p-1}(V(n), S(V(n)) \otimes W(n)) = 0,$$

si $p \geq 2$, ya que $S(V(n)) \otimes W(n)$ es un $V(n)$-módulo proyectivo. Análogamente,

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) &\simeq H_0(V(n), H_1(\mathfrak{tym}(n), S(V(n)))) \\ &\simeq H_0(V(n), S(V(n)) \otimes W(n)) \\ &\simeq (S(V(n)) \otimes W(n))_{V(n)} \\ &\simeq W(n), \end{aligned}$$

donde todos los isomorfismos son de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos a derecha y homogéneos de grado 0. Finalmente, hemos probado (cf. [Mov], Prop. 8)

Proposición 4.3.3. *La homología* $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$ *del álgebra de Yang-Mills con coeficientes en el módulo* $S(V(n))$ *es trivial, con excepción en los grados* 0 *y* 1*, donde resulta* $H_0(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq k$ *y* $H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq W(n)$ *(isomorfismos* $\mathrm{YM}(n)$*-lineales a derecha, homogéneos de grado* 0*), donde* $W(n)$ *es el* k*-espacio vectorial graduado de generadores libres de* $\mathfrak{tym}(n)$.

Como aplicación de la proposición anterior podemos hallar la serie formal de Hilbert $W(n)(t)$ de $W(n)$ con la graduación usual. Para ello debemos tener en cuenta que si

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0,$$

es una sucesión exacta corta de módulos graduados con morfismos homogéneos f de grado d y g de grado d', entonces

$$M(t) = t^{-d'} M''(t) + t^d M'(t).$$

Observación 4.3.4. *La identidad anterior implica que la serie de Hilbert no es un **morfismo de Euler-Poincaré** (cf. [La2], Ch. 3, §8) si consideramos la categoría de módulos graduados con morfismos homogéneos no necesariamente de grado* 0. *En consecuencia, si definimos la **característica de Euler-Poincaré** de un complejo de módulos graduados* $(C_\bullet, d_\bullet)$ *como*

$$\chi(C)(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i C_i(t),$$

resulta que la característica de Euler-Poincaré de un complejo de módulos graduados no coincide en general con la de su homología (cf. [La2], Ch. XX, §3).

Si nos restringimos a la categoría de módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0, *en cambio, la serie de Hilbert sí es aditiva, y por lo tanto, la característica de Euler-Poincaré de un complejo de módulos graduados coincide con la de su homología (cf. [La2], Ch. XX, §3, Thm. 3.1).*

Al inspeccionar el complejo (3.2.8) para $W = S(V(n))$, su característica de Euler-Poincaré resulta

$$\chi_{C_\bullet(\mathrm{YM}(n),S(V(n)))(t)} = S(V(n))(t) - ntS(V(n))(t) + nt^3S(V(n))(t) - t^4S(V(n))(t) = \frac{1-nt+nt^3-t^4}{(1-t)^n},$$

ya que $S(V(n))(t) = (1-t)^{-n}$. A su vez, por la observación anterior, como el complejo (3.2.8) está formado de morfismos homogéneos de grado cero, su característica de Euler-Poincaré coincide con la de su homología.

Como $H_0(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq k$, $H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq W(n)$, $H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$ y $H_3(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$ como módulos graduados, la característica de Euler-Poincaré de su homología resulta

$$\chi_{H_\bullet(C_\bullet(\mathrm{YM}(n),S(V(n))))(t)} = 1 - W(n)(t).$$

Finalmente,

$$W(n)(t) = \frac{(1-t)^n - 1 + nt - nt^3 + t^4}{(1-t)^n}.$$

Hemos probado

Proposición 4.3.5 (cf. [Mov], Prop. 55)**.** *La serie formal de Hilbert del espacio vectorial graduado* $W(n)$ *(con la graduación usual) de generadores libres de* $\mathfrak{tym}(n)$ *está dada por*

$$W(n)(t) = \frac{(1-t)^n - 1 + nt - nt^3 + t^4}{(1-t)^n}.$$

En el caso en que $n = 3$, obtenemos

$$W(3)(t) = \frac{(3-t)t^2}{(1-t)^2},$$

por lo que $\dim_k(W(n)_{i+1}) = 2i+1$, para $i \in \mathbb{N}$, y cero si no.

Como consecuencia del Teorema 3.2.18 y la Proposición 4.3.5, podemos hallar el centro del álgebra de Yang-Mills para $n \geq 3$ (el centro de $\mathrm{YM}(2)$ está calculado en el Ejemplo 3.2.6).

Corolario 4.3.6. *Si* $n \geq 3$ *el centro del álgebra de Yang-Mills* $\mathrm{YM}(n)$ *es* k.

Demostración. Por un lado, el cuerpo de base $k \subset \mathrm{YM}(n)$ está incluido en el centro, como se observa directamente. Por lo tanto, $k \subset \mathcal{Z}(\mathrm{YM}(n))$.

Por otro lado, $HH^0(\mathrm{YM}(n)) \simeq H^0(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{YM}(n))$. A su vez, por el Corolario 2.2.4, $\mathrm{YM}(n) = \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n)) \simeq S(\mathfrak{ym}(n))$. En consecuencia, debemos calcular $H^0(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{YM}(n)) \simeq H^0(\mathfrak{ym}(n), S(\mathfrak{ym}(n))) = S(\mathfrak{ym}(n))^{\mathfrak{ym}(n)}$.

Sea $z \in S(\mathfrak{ym}(n))$ de la forma

$$z = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n, l\in L} c_{(i_1,\dots,i_n),l}\, x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} t_l,$$

donde $c_{(i_1,\dots,i_n),l} \in k$, $\{t_l\}_{l\in L}$ es la base de Poincaré-Birkhoff-Witt de $\mathrm{TYM}(n)$.

Entonces, $z \in S(\mathfrak{ym}(n))^{\mathfrak{ym}(n)}$ si y sólo si

$$0 = [w,z] = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n, l\in L} c_{(i_1,\dots,i_n),l}\big(x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}[w,t_l] + \sum_{j=1}^{n} x_1^{i_1}\dots i_j x_j^{i_j-1}[w,x_j]\dots x_n^{i_n} t_l\big) \tag{4.3.4}$$

para todo $w \in \mathrm{YM}(n)$. Esto implica que $z \in \mathrm{TYM}(n)$. Supongamos que no fuera así. Entonces existiría $(i_1^0, \dots, i_n^0) \in \mathbb{N}_0^n$ no nulo y $l_0 \in L$ tal que $c_{(i_1,\dots,i_n),l} \neq 0$. Sea

$$\mathcal{J} = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n : \exists l \in L \text{ tal que } c_{(i_1,\dots,i_n),l} \neq 0\},$$

y sea $(i'_1, \dots, i'_n) \in \mathcal{J}$ con grado $i'_1 + \dots + i'_n$ máximo. Vemos entonces que $[w, z]$ posee un término de la forma

$$c_{(i'_1,\dots,i'_n),l'} x_1^{i'_1} \dots x_n^{i'_n} [w, t_{l'}],$$

con $c_{(i'_1,\dots,i'_n),l'} \neq 0$, que no se puede cancelar con otro término de la suma (4.3.4) por cuestiones de grado $i'_1 + \dots + i'_n$. Por lo tanto, debe ser $[w, t_{l'}] = 0$, $\forall\, w \in \mathfrak{tym}(n)$, es decir, $t_{l'} \in \mathcal{Z}(\mathrm{TYM}(n))$.

Como $n \geq 3$, por la Proposición 4.3.5, $\mathrm{TYM}(n)$ es un álgebra libre en una cantidad infinita de generadores y por lo tanto no puede ser conmutativa. De hecho, su centro es el cuerpo de base k. En otras palabras, $t_{l'} = 1$.

Por lo tanto, obtuvimos que los términos de la forma $c_{(i'_1,\dots,i'_n),l'} x_1^{i'_1} \dots x_n^{i'_n} t_{l'}$, con $c_{(i'_1,\dots,i'_n),l'} \neq 0$ e $i'_1 + \dots + i'_n = i_{\max}$ máximo satisfacen que $t_{l'} = 1$.

Como $[x_h, z] = 0$, para todo $h = 1, \dots, n$, resulta que

$$\begin{aligned} 0 = [x_h, z] = &\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n, l\in L \\ i_1+\dots+i_n<i_{\max}}} c_{(i_1,\dots,i_n),l} \Big(\overbrace{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} [x_h, t_l]}^{\star_1} + \sum_{j=1}^{n} \overbrace{x_1^{i_1} \dots i_j x_j^{i_j-1} [x_h, x_j] \dots x_n^{i_n} t_l}^{\star_2}\Big) \\ &+ \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n, l\in L \\ i_1+\dots+i_n=i_{\max}}} \sum_{j=1}^{n} \overbrace{c_{(i_1,\dots,i_n),l} x_1^{i_1} \dots i_j x_j^{i_j-1} [x_h, x_j] \dots x_n^{i_n}}^{\star_3} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Observamos que en el término $\star_1$ consideramos solamente los sumandos con $t_l \neq 1$, ya que si $t_l = 1$, entonces $[x_i, t_l] = 0$.

Por cuestiones de grado $i_1 + \dots + i_n$, vemos que los términos de la forma $\star_3$ no pueden cancelarse con los del término del tipo $\star_2$. Por otro lado, tampoco pueden cancelarse con términos de $\star_1$, ya que $[x_h, x_j]$ está en la componente homogénea de $\mathfrak{tym}(n)$ de grado homológico 2, mientras que $[x_h, t_l]$ está en la componente homogénea de grado homológico mayor estricto que 2. Esto implica que los coeficientes $c_{(i_1,\dots,i_n),l}$ con $i_1 + \dots + i_n$ máximo deben ser nulos, lo que es un absurdo, pues se supuso que no era el caso. El absurdo provino de suponer que $z \notin \mathrm{TYM}(n)$. En consecuencia, $z \in \mathrm{TYM}(n)$.

Nuevamente, como $n \geq 3$, $\mathrm{TYM}(n)$ es un álgebra libre en una cantidad infinita de generadores y por lo tanto su centro es el cuerpo de base k. Como $z \in \mathcal{Z}(\mathrm{YM}(n)) \cap \mathrm{TYM}(n)$, luego $z \in \mathcal{Z}(\mathrm{TYM}(n))$ y por lo tanto $z \in k$. El corolario queda demostrado. □

4.4 Otra caracterización de $W(n)$

Aunque el isomorfismo de la Proposición 4.3.3 da otra caracterización de $W(n)$, el mismo no es explícito. En la Proposición 4.4.3 de esta subsección exhibiremos un isomorfismo $V(n)$-lineal homogéneo de grado cero explícito entre $W(n)$ y $H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$. Supondremos que $S(V(n)) \otimes V(n)$ posee la acción a izquierda de $V(n)$ dada por la acción usual en $S(V(n))$.

Comencemos considerando la siguiente aplicación k-lineal homogénea de grado 0

$$\begin{aligned} \phi : TV(n) &\to S(V(n)) \otimes V(n) \\ \sum_{i=1}^{n} q_i x_i &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \pi(q_i) \otimes x_i, \end{aligned}$$

donde $\pi : TV(n) \to S(V(n))$ es la proyección canónica. El morfismo anterior está bien definido ya que todo elemento x de $TV(n)$ se escribe de manera única de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$. La linealidad y homogeneidad son directas. Además, como π es suryectivo, ϕ resulta suryectivo también.

Por otra parte, como π es un morfismo de k-álgebras, si $z, z' \in TV(n)$ son homogéneos de grado mayor o igual que 1, entonces $\phi(z'zx_i) = \pi(z'z) \otimes x_i = \pi(z')\pi(z) \otimes x_i$, es decir, si $z' \in TV(n)$ es homogéneo de grado mayor o igual que 2, resulta que $\phi(z'z) = \pi(z').\phi(z)$. En particular, si $z' = x_j$, entonces $\phi(x_j z) = x_j.\phi(z)$. Esto no implica que ϕ sea $V(n)$-lineal, ya que $TV(n)$ no es un $V(n)$-módulo con la multiplicación a izquierda.

Denominaremos ϕ' a la restricción de ϕ a $\mathfrak{f}(V(n)) \subseteq TV(n)$. Es fácil ver que

$$\phi'(x_i) = 1 \otimes x_i, \tag{4.4.1}$$

$$\phi'([x_{i_1}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}] \dots]]) = x_{i_1} \dots x_{i_{l-2}} x_{i_{l-1}} \otimes x_{i_l} - x_{i_1} \dots x_{i_{l-2}} x_{i_l} \otimes x_{i_{l-1}}, \tag{4.4.2}$$

donde $l \geq 2$. Esta última identidad se demuestra por inducción en l. Si $l = 2$ es directa.

Supongamos que $l > 2$, y que la identidad anterior sea cierta para $l-1$. En ese caso

$$\begin{aligned}
\phi'([x_{i_1}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}] \dots]]) &= \phi(x_{i_1}[x_{i_2}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}] \dots]]) - \phi([x_{i_2}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}] \dots]]x_{i_1}) \\
&= x_{i_1}\phi([x_{i_2}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}] \dots]]) - \pi([x_{i_2}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}] \dots]]) \otimes x_{i_1} \\
&= x_{i_i}\phi'([x_{i_2}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}] \dots]]) \\
&= x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{l-2}} x_{i_{l-1}} \otimes x_{i_l} - x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{l-2}} x_{i_l} \otimes x_{i_{l-1}},
\end{aligned}$$

donde empleamos la identidad $\phi(x_j z') = x_j.\phi(z')$, válida para cualquier $z' \in TV(n)$ homogéneo de grado mayor o igual que 2, la hipótesis inductiva y la igualdad $\pi([x, z]) = 0, \forall\, x, z \in TV(n)$ (ya que π es un morfismo de álgebras).

El siguiente lema será de utilidad.

Lema 4.4.1. *Si $\mu : S(V(n)) \otimes V(n) \to S(V(n))$ denota la restricción de la multiplicación de $S(V(n))$ a $S(V(n)) \otimes V(n)$, entonces $\phi'([\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]) = \mathrm{Ker}(\mu)$.*

Demostración. La inclusión $\phi'([\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]) \subseteq \mathrm{Ker}(\mu)$ es directa de la identidad (4.4.2) y del hecho inmediato de que todo elemento elemento de $[\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]$ se escribe como combinación lineal de elementos de la forma $[x_{i_1}, [\dots, [x_{i_{l-1}}, x_{i_l}]]]$ con $l \geq 2$.

Veamos ahora la otra inclusión. Sea

$$y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\bar{i}}^j x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \otimes x_j \in \mathrm{Ker}(\mu),$$

donde $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ y la suma anterior es finita. Escribiremos la suma anterior de la forma abreviada

$$y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\bar{i}}^j \bar{x}^{\bar{i}} \otimes x_j.$$

Siguiendo con esta notación, será útil denotar $e_i \in \mathbb{N}_0^n$, con $1 \leq i \leq n$, el vector tal que $(e_i)_j = \delta_{ij}$, $1 \leq j \leq n$. Además, como es usual, escribiremos $|\bar{i}| = i_1 + \dots + i_n$.

Probaremos que existe $z \in [\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]$ tal que $y = \phi'(z)$.

En principio, $y \in \mathrm{Ker}(\mu)$ si y sólo si

$$\mu(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\bar{i}}^j \bar{x}^{\bar{i}+e_j} = 0.$$

Esto último es equivalente a la condición siguiente: Para todo $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\bar{i}-e_j}^j = 0, \tag{4.4.3}$$

donde empleamos la convención $a_{\bar{i}}^j = 0$, si existe un l con $1 \leq l \leq n$ tal que $i_l < 0$.

En consecuencia, si definimos para todo $\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n$

$$y_{\bar{i}} = \sum_{j=1}^{n} a_{\bar{i}-e_j}^j x_1^{i_1} \dots x_j^{i_j - 1} \dots x_n^{i_n} \otimes x_j,$$

resulta por un lado que

$$y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\bar{i}}^j \bar{x}^{\bar{i}} \otimes x_j = \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{\bar{i}-e_j}^j \bar{x}^{\bar{i}-e_j} \otimes x_j \right) = \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n} y_{\bar{i}}$$

y por otro, de la condición equivalente (4.4.3), vemos directamente que $\mu(y) = 0$ si y sólo si $\mu(y_{\bar{i}}) = 0$, $\forall \bar{i} \in \mathbb{N}_0^n$. Por lo tanto, basta demostrar que dado $\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n$ e $y \in \operatorname{Ker}(\mu)$ de la forma $y = \sum_{j=1}^n a^j_{\bar{i}-e_j} \bar{x}^{\bar{i}-e_j} \otimes x_j$ existe $z \in [\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]$ tal que $y = \phi'(z)$.

Suponemos entonces dado $\bar{i} \in \mathbb{N}_0^n$ fijo e $y = \sum_{j=1}^n a^j_{\bar{i}-e_j} \bar{x}^{\bar{i}-e_j} \otimes x_j$ que satisface que $\sum_{j=1}^n a^j_{\bar{i}-e_j} = 0$. Sean $i_{j_1}, \dots, i_{j_l}$, con $0 \leq l \leq n$, los elementos no nulos en la n-upla $\bar{i}$, es decir, $i_j = 0$, si y sólo si $j \neq j_1, \dots, j_l$.

Si $l = 0$, es decir, $\bar{i}$ es la n-upla nula, entonces debe ser $y = 0 = \phi'(0) \in \phi'([\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))])$, ya que en ese caso $a^j_{-e_j} = 0$, $\forall j$ tal que $1 \leq j \leq n$.

Si $l = 1$, entonces existe j_0, con $1 \leq j_0 \leq n$, tal que $\bar{i} = m.e_{j_0}$, $m \in \mathbb{N}$, y luego la condición (4.4.3) implica que $a^{j_0}_{(m-1).e_j} = 0$, y por lo tanto $y = 0 = \phi'(0) \in \phi'([\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))])$.

Sea $l \geq 2$. Vamos a proceder por inducción en l. Supongamos que el enunciado es cierto para $l - 1$. Escribimos

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{j=1}^n a^j_{\bar{i}-e_j} \bar{x}^{\bar{i}-e_j} \otimes x_j = \sum_{p=1}^l a^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}} \bar{x}^{\bar{i}-e_{j_p}} \otimes x_{j_p} \\
&= a^{j_1}_{\bar{i}-e_{j_1}} (\bar{x}^{\bar{i}-e_{j_1}} \otimes x_{j_1} - \bar{x}^{\bar{i}-e_{j_2}} \otimes x_{j_2}) + a^{j_1}_{\bar{i}-e_{j_1}} \bar{x}^{\bar{i}-e_{j_2}} \otimes x_{j_2} + \sum_{p=2}^l a^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}} \bar{x}^{\bar{i}-e_{j_p}} \otimes x_{j_p} \\
&= a^{j_1}_{\bar{i}-e_{j_1}} (\bar{x}^{\bar{i}-e_{j_1}} \otimes x_{j_1} - \bar{x}^{\bar{i}-e_{j_2}} \otimes x_{j_2}) + \sum_{p=2}^l b^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}} \bar{x}^{\bar{i}-e_{j_p}} \otimes x_{j_p} \\
&= a^{j_1}_{\bar{i}-e_{j_1}} \phi'(\operatorname{ad}^{i_{j_1}-1}(x_{j_1}) \circ \operatorname{ad}^{i_{j_2}-1}(x_{j_2}) \circ \operatorname{ad}^{i_{j_3}}(x_{j_3}) \circ \dots \circ \operatorname{ad}^{i_{j_l}}(x_{j_l})([x_{j_2}, x_{j_1}])) + \sum_{p=2}^l b^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}} \bar{x}^{\bar{i}-e_{i_p}} \otimes x_{i_p},
\end{aligned}$$

donde $b^{j_2}_{\bar{i}-e_{j_2}} = a^{j_1}_{\bar{i}-e_{j_1}} + a^{j_2}_{\bar{i}-e_{j_2}}$ y $b^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}} = a^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}}$, si $3 \leq p \leq l$.

Por un lado, como

$$\sum_{p=2}^l b^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}} = 0,$$

el elemento

$$y' = \sum_{p=2}^l b^{j_p}_{\bar{i}-e_{j_p}} \bar{x}^{\bar{i}-e_{i_p}} \otimes x_{i_p}$$

pertenece al núcleo de μ. Por otro lado, por hipótesis inductiva, existe $z' \in [\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]$ tal que $y' = \phi'(z')$. Entonces

$$\begin{aligned}
y &= a^{j_1}_{\bar{i}-e_{j_1}} \phi'(\operatorname{ad}^{i_{j_1}-1}(x_{j_1}) \circ \operatorname{ad}^{i_{j_2}-1}(x_{j_2}) \circ \operatorname{ad}^{i_{j_3}}(x_{j_3}) \circ \dots \circ \operatorname{ad}^{i_{j_l}}(x_{j_l})([x_{j_2}, x_{j_1}])) + \phi'(z') \\
&= \phi'(a^{j_1}_{\bar{i}-e_{j_1}} \operatorname{ad}^{i_{j_1}-1}(x_{j_1}) \circ \operatorname{ad}^{i_{j_2}-1}(x_{j_2}) \circ \operatorname{ad}^{i_{j_3}}(x_{j_3}) \circ \dots \circ \operatorname{ad}^{i_{j_l}}(x_{j_l})([x_{j_2}, x_{j_1}]) + z')
\end{aligned}$$

y por lo tanto existe $z \in [\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]$ tal que $y = \phi'(z)$. El lema queda demostrado. □

Sea $d_2 : S(V(n)) \otimes V(n) \to S(V(n)) \otimes V(n)$ la diferencial en grado 2 del complejo (3.2.8) para $W = S(V(n))$. En ese caso,

$$d_2(\sum_{i=1}^n z_i \otimes x_i) = \sum_{i,j=1}^n (z_i x_j^2 \otimes x_i - z_i x_i x_j \otimes x_j).$$

Como $d_1 = \mu$, $\operatorname{Im}(d_2) \subseteq \operatorname{Ker}(\mu)$, y por lo tanto podemos considerar el morfismo de espacios vectoriales graduados homogéneo de grado 0, que denotaremos ψ',

$$[\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))] \to \operatorname{Ker}(\mu)/\operatorname{Im}(d_2) = H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq W(n),$$

dado por la composición de ϕ' y la proyección canónica. Notar que ψ' es suryectivo, ya que es composición de morfismos suryectivos.

Lema 4.4.2. *Sea d_2 la diferencial en grado 2 del complejo (3.2.8) para $W = S(V(n))$ y ψ' el morfismo de $[\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]$ en $\operatorname{Ker}(\mu)/\operatorname{Im}(d_2)$ dado por la composición de ϕ' y la proyección canónica. Si $\langle R(n) \rangle$ denota el ideal de Lie en $\mathfrak{f}(V(n))$ generado por el espacio vectorial de las relaciones de Yang-Mills (3.1.1), entonces $\phi'(\langle R(n) \rangle) \subseteq \operatorname{Im}(d_2)$, y por lo tanto ψ' induce un morfismo k-lineal homogéneo de grado 0 suryectivo de $[\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]/\langle R(n) \rangle = \mathfrak{tym}(n)$ en $\operatorname{Ker}(\mu)/\operatorname{Im}(d_2) = H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq W(n)$ (notar que $\langle R(n) \rangle \subseteq [\mathfrak{f}(V(n)), \mathfrak{f}(V(n))]$).*

Demostración. Dado j, con $1 \leq j \leq n$, denotaremos $r_j = \sum_{i=1}^{n}[x_i,[x_i,x_j]]$.

Primero demostraremos que todo elemento de $\langle R(n)\rangle$ se escribe como combinación lineal de elementos de la forma

$$[x_{i_1},[x_{i_2},[\ldots,[x_{i_{p-1}},r_{i_p}]\ldots]]],$$

donde $p \in \mathbb{N}$, $i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,n\}$. Denotaremos $\tilde{R}(n)$ el espacio vectorial generado por estos elementos.

Para ello, sea $y \in \langle R(n)\rangle$. Por definición, y es combinación lineal de elementos de la forma siguiente:

$$[a_1,[a_2,[\ldots,[a_{l-1},r_{s_l}]\ldots]]],$$

donde $l \in \mathbb{N}$, $s_l \in \{1,\ldots,n\}$ y $a_1,\ldots,a_{l-1} \in \mathfrak{f}(V(n))$.

Podemos suponer sin pérdida que y es de la forma anterior. La demostración es por inducción en l. Si $l = 1$, estamos considerando entonces un elemento de la forma $r_{s_1} \in R(n) \subseteq \tilde{R}(n)$.

Si $l > 1$, entonces $y = [a_1, b]$, donde $b = [a_2,[\ldots,[a_{l-1},r_{s_l}]\ldots]]$.

Por hipótesis inductiva $b \in \tilde{R}$, y por lo tanto se escribe como combinación lineal de elementos b_j, $j \in \mathcal{J}$, con $\mathcal{J}$ algún conjunto finito de índices, tales que

$$b_j = [x_{i_1^j},[x_{i_2^j},[\ldots,[x_{i^j_{p_j-1}},r_{i^j_{p_j}}]\ldots]]].$$

Como $a_1 \in \mathfrak{f}(V(n))$, es combinación lineal de elementos de elementos a_1^g, $g \in \mathcal{G}$, con $\mathcal{G}$ algún conjunto finito de índices, tales que

$$a_1^g = [x_{h_1^g},[\ldots,[x_{h^g_{m_g-1}},x_{h^g_{m_g}}]\ldots]].$$

Para probar que $y = [a_1, b] \in \tilde{R}(n)$, basta probar que

$$[a_1^g, b_j] = [[x_{h_1^g},[\ldots,[x_{h^g_{m_g-1}},x_{h^g_{m_g}}]\ldots]],[x_{i_1^j},[x_{i_2^j},[\ldots,[x_{i^j_{p_j-1}},r_{i^j_{p_j}}]\ldots]]]] \in \tilde{R}(n),$$

para todo $g \in \mathcal{G}$ y $j \in \mathcal{J}$. Esto lo haremos por inducción en el grado usual m de a_1^g.

Si $m = 1$, es inmediato. Supongamos que $m > 1$ y que el enunciado anterior es cierto para $m-1$. Escribimos $a = a_1^g = \sum_{s=1}^{n}[x_s, a'_s]$ y

$$b = b_j = [x_{i_1},[x_{i_2},[\ldots,[x_{i_{p-1}},r_{i_p}]\ldots]]].$$

Luego,

$$[a,b] = \sum_{s=1}^{n}[[x_s,a'_s],b] = -\sum_{s=1}^{n}[a'_s,[x_s,b]] + \sum_{s=1}^{n}[x_s,[a'_s,b]].$$

Como el grado usual de a'_s es $m-1$ para todo s, con $1 \leq s \leq n$, entonces, por hipótesis inductiva, $[a'_s,[x_s,b]] \in \tilde{R}(n)$ y $[a'_s,b] \in \tilde{R}(n)$. Esto último implica que $[x_s,[a'_s,b]] \in \tilde{R}(n)$, y en consecuencia $[a,b] \in \tilde{R}(n)$. Hemos demostrado por lo tanto que $\langle R(n)\rangle = \tilde{R}(n)$, es decir, que todo elemento de $\langle R(n)\rangle$ se escribe como combinación lineal de elementos de la forma

$$[x_{i_1},[x_{i_2},[\ldots,[x_{i_{p-1}},r_{i_p}]\ldots]]],$$

donde $p \in \mathbb{N}$, $i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,n\}$.

Por la identidad (4.4.2),

$$\phi'([x_{i_1},[x_{i_2},[\ldots,[x_{i_{p-1}},r_{i_p}]\ldots]]]) = \sum_{j=1}^{n}(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{p-1}}x_j^2\otimes x_{i_p} - x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{p-1}}x_j x_{i_p}\otimes x_j) = d_2(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{p-1}}\otimes x_{i_p}),$$

es decir, $\phi'(\langle R(n)\rangle) \subseteq \mathrm{Im}(d_2)$. El lema queda demostrado. □

Por lo tanto, hemos obtenido un morfismo suryectivo k-lineal homogéneo de grado 0

$$\psi' : \mathfrak{tym}(n) \to H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq W(n).$$

Podemos chequear fácilmente que $\psi'([\mathfrak{tym}(n),\mathfrak{tym}(n)]) = 0$.

Esto se prueba de la forma siguiente. Sean $a, b \in [\mathfrak{f}(V(n)),\mathfrak{f}(V(n))]$ tales que $\bar{a},\bar{b} \in \mathfrak{tym}(n)$. Como $\psi'([\bar{a},\bar{b}])$ es la clase de $\phi'([a,b])$ en $\mathrm{Ker}(\mu)/\mathrm{Im}(d_2)$, basta ver que $\phi'([a,b]) \in \mathrm{Im}(d_2)$. Más aún, vamos a demostrar que $\phi'([a,b]) = 0$.

Como $a, b \in [\mathfrak{f}(V(n)),\mathfrak{f}(V(n))]$, entonces podemos escribir $a = \sum_{j=1}^{n}[x_j,a'_j]$ y $b = \sum_{j=1}^{n}[x_j,b'_j]$, donde $a'_j, b'_j \in \mathfrak{f}(V(n))$. Luego

$$\phi'([a,b]) = \phi(ab-ba) = \phi(ab) - \phi(ba) = \pi(a)\phi(b) - \pi(b)\phi(a) = 0$$

donde $\pi : TV(n) \to S(V(n))$ es la proyección canónica y usamos que $\pi(a) = \pi(b) = 0$, pues π es un morfismo de álgebras.

Finalmente, como $\psi'([\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)]) = 0$, ψ' induce un morfismo suryectivo de espacios vectoriales graduados homogéneo de grado 0, que denominaremos ψ,

$$\mathfrak{tym}(n)/[\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)] \to \mathrm{Ker}(\mu)/\mathrm{Im}(d_2) = H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) \simeq W(n).$$

Como, a su vez, $\mathfrak{tym}(n)/[\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)]$ es isomorfo a $W(n)$ como espacios vectoriales graduados (isomorfismo homogéneo de grado 0), y $W(n)$ es localmente de dimensión finita, ψ debe ser un isomorfismo de espacios vectoriales graduados.

Hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 4.4.3. *La aplicación*

$$\psi : \mathfrak{tym}(n)/[\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)] \to \mathrm{Ker}(\mu)/\mathrm{Im}(d_2) = H_1(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales graduados homogéneo de grado 0. Más aún, este morfismo es $V(n)$-lineal.

Demostración. Sólo falta demostrar que el morfismo ψ es $V(n)$-lineal. Esto es directo de la identidad (4.4.2). $\square$

Corolario 4.4.4. *El espacio vectorial $W(n)$ es finitamente generado como $S(V(n))$-módulo y como $S(V(n))/\langle q\rangle$-módulo. Una colección finita de generadores (como módulo sobre $S(V(n))$ y $S(V(n))/\langle q\rangle$) está dada por*

$$\{[x_i, x_j]\}_{1\leq i<j\leq n}.$$

Demostración. Consideraremos a $S(V(n))\otimes V(n)$ provisto de la acción a izquierda de $V(n)$ dada por la acción usual en $S(V(n))$. Vemos directamente que es finitamente generado, y como $S(V(n))$ es noetheriano, $S(V(n)) \otimes V(n)$ resulta noetheriano. En ese caso, la diferencial d_1 del complejo de Koszul con coeficientes en $S(V(n))$ resulta un morfismo $V(n)$-lineal y por lo tanto su núcleo es un $V(n)$-submódulo finitamente generado. Por el Lema 4.4.1, el conjunto

$$\{x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i\}_{1\leq i<j\leq n}$$

es un sistema de generadores de $\mathrm{Ker}(d_1)$ como $S(V(n))$-módulo.

Por otra parte, como d_2 también es $V(n)$-lineal, $\mathrm{Im}(d_2)$ es un $V(n)$-submódulo de $\mathrm{Ker}(d_1)$. Como $W(n)$ es isomorfo a un cociente del $S(V(n))$-módulo finitamente generado $\mathrm{Ker}(d_1)$ por el submódulo $\mathrm{Im}(d_2)$, resulta finitamente generado con sistema de generadores

$$\{[x_i, x_j]\}_{1\leq i<j\leq n}.$$

Finalmente, como la estructura de $S(V(n))/\langle q\rangle$-módulo de $W(n)$, proviene de la acción de $S(V(n))$, $W(n)$ resulta también un $S(V(n))/\langle q\rangle$-módulo finitamente generado con el mismo sistema de generadores. $\square$

4.5 Algunas propiedades geométricas de $W(n)$

4.5.1 Generalidades

En esta subsección daremos algunas caracterizaciones geométricas de $W(n)$ que serán de gran utilidad. Podemos suponer que $k = \mathbb{C}$ para más simplicidad, aunque no es necesario. Recomendamos a [Hart], Ch. 2 y 3, o [Mi] para mayores referencias.

Como se vio en la Proposición 4.1.1, $W(n)$ es un $S(V(n))/\langle q\rangle$-módulo graduado, donde $q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. En esta subsección, escribiremos $A = S(V(n))/\langle q\rangle$ y supondremos $n \geq 3$.

Podemos considerar el espectro proyectivo $X = \mathrm{Proj}(A)$, que es una variedad algebraica (proyectiva) lisa (cf. [Hart], Exer. 5.8) de dimensión $n-2$ inmersa en el espacio proyectivo $\mathrm{Proj}(S(V(n)))$. Denotaremos también X la variedad elemental subyacente, incluida en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V(n))$. Como es usual, no haremos distinción entre los esquemas y las variedades elementales subyacentes, a menos que sea necesario.

Recordamos que en el caso de una variedad proyectiva $X = \mathrm{Proj}(A)$, existe un funtor aditivo monoidal plenamente fiel

$$\begin{aligned}(-)^{\sim} : {}_A^{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod} &\to \mathfrak{Qcoh}({}_{\mathcal{O}_X}\mathrm{Mod})\\ M &\mapsto M^{\sim},\end{aligned}$$

donde denotamos ${}^{\mathbb{Z}}_{A}\mathrm{Mod}$ a la categoría de A-módulos graduados provista de morfismos homogéneos de grado 0, $\mathfrak{Qcoh}({}_{\mathcal{O}_X}\mathrm{Mod})$ a la categoría de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos quasicoherentes y la imagen de un módulo finitamente generado es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos coherente (cf. [Mi], Lemma 5.7). Más aún, $(-)^{\sim}$ resulta exacto, ya que la fibra del haz $M^{\sim}$ en un ideal primo homogéneo $\mathfrak{p}$ es igual a la componente de grado cero $M_{(\mathfrak{p})}$ de la localización $M_{\mathfrak{p}} \simeq M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, el módulo graduado $W(n)$ posee un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos quasicoherente asociado $W(n)^{\sim}$. Empleando el Corolario 4.4.4, $W(n)^{\sim}$ resulta coherente.

Si $A[i]$ denota la suspensión i-ésima de A, se define el haz de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{O}_X[i] = A[i]^{\sim}$ y, si $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos, $\mathcal{F}[i] = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[i]$. Podemos considerar entonces el funtor

$$\begin{aligned} \Gamma_\bullet : {}_{\mathcal{O}_X}\mathrm{Mod} &\to {}^{\mathbb{Z}}_{A}\mathrm{Mod} \\ \mathcal{F} &\mapsto \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}[i]). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{F}$ es quasicoherente, entonces el morfismo natural $\beta_{\mathcal{F}} : \Gamma_\bullet(\mathcal{F})^{\sim} \to \mathcal{F}$ es un isomorfismo (cf. [Mi], Thm. 5.9). A su vez, como A es íntegra y $A_1 = \sum_{i=1}^{n} A_0.\bar{x}_i$, con $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ elementos primos en A, el morfismo natural $\alpha : A \to \Gamma_\bullet(\mathcal{O}_X)$ es un isomorfismo (cf. [Mi], Thm. 5.9).

El siguiente lema es análogo a la fórmula de Künneth, a pesar de que en este caso no se satisfacen sus hipótesis usuales (cf. [Wei], Thm. 3.6.1). La demostración es una variación de la misma, que presentamos por completitud.

Lema 4.5.1. *Sea $C_\bullet = C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))$ el complejo (3.2.8) para el $\mathrm{YM}(n)$-módulo graduado $S(V(n))$ y sea $z \in S(V(n))$ un elemento homogéneo no nulo de grado $d \geq 1$. Definimos el álgebra $A_z = S(V(n))/\langle z \rangle$, que es un $S(V(n))$-módulo graduado. Al aplicar el funtor $A_z \otimes_{S(V(n))} (-)$ al complejo $C_\bullet$ obtenemos la siguiente sucesión exacta corta de A_z-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0*

$$0 \to A_z \otimes_{S(V(n))} H_p(C) \to H_p(A_z \otimes_{S(V(n))} C) \to \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, H_{p-1}(C)) \to 0.$$

Demostración. En principio, vemos directamente que $C_\bullet$ es un complejo de $S(V(n))$-módulos a izquierda libres. La homología de este complejo fue determinada en la Proposición 4.3.3.

Podemos aplicar el funtor $A_z \otimes_{S(V(n))} (-)$ al complejo $C_\bullet$. Aunque no se satisfacen las hipótesis de la fórmula de Künneth , la demostración sigue siendo válida, como procederemos a mostrar.

Si $Z_\bullet$ y $B_\bullet$ son los subcomplejos de $C_\bullet$ de ciclos y bordes, respectivamente, provistos con diferencial nula cada uno, entonces, dado $p \in \mathbb{Z}$, resulta la sucesión exacta corta de $S(V(n))$-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0

$$0 \to Z_p \to C_p \xrightarrow{d_p} B_{p-1} \to 0,$$

que induce una sucesión exacta de A_z-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0 de la forma

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, B_{p-1}) \to A_z \otimes_{S(V(n))} Z_p \to A_z \otimes_{S(V(n))} C_p \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes d_p} A_z \otimes_{S(V(n))} B_{p-1} \to 0,$$

ya que $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, C_p) = 0$, pues C_p es un $S(V(n))$-módulo libre. Además, como $\mathrm{Tor}_2^{S(V(n))}(A, C_p) = 0$, resulta que $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, Z_p) = \mathrm{Tor}_2^{S(V(n))}(A, B_{p-1})$. Como A_z tiene dimensión proyectiva menor o igual que 1 como $S(V(n))$-módulo, ya que posee una resolución graduada con morfismos homogéneos de grado 0 de la forma

$$0 \to S(V(n))[-d] \xrightarrow{.z} S(V(n)) \to A_z \to 0, \tag{4.5.1}$$

entonces $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, Z_p) = \mathrm{Tor}_2^{S(V(n))}(A_z, B_{p-1}) = 0$. Más aún, $\mathrm{Tor}_q^{S(V(n))}(A_z, Z_p) = \mathrm{Tor}_{q+1}^{S(V(n))}(A_z, B_{p-1}) = 0$, si $q \geq 2$.

Vamos a demostrar que $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, B_{p-1}) = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Si consideramos la sucesión exacta corta de $S(V(n))$-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0

$$0 \to B_p \to Z_p \to H_p(C) \to 0,$$

resulta la siguiente sucesión exacta larga de A-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, H_p(C)) \to A_z \otimes_{S(V(n))} B_p \to A_z \otimes_{S(V(n))} Z_p \to A_z \otimes_{S(V(n))} H_p(C) \to 0, \tag{4.5.2}$$

ya que $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, Z_p) = 0$.

Por otro lado, $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, B_p) = \mathrm{Tor}_2^{S(V(n))}(A_z, H_p(C)) = 0$, ya que A tiene dimensión proyectiva menor o igual que 1.

En consecuencia, $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, B_{p-1}) = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, tenemos la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to A_z \otimes_{S(V(n))} Z_\bullet \to A_z \otimes_{S(V(n))} C_\bullet \xrightarrow{d_\bullet} A_z \otimes_{S(V(n))} B_{\bullet-1} \to 0.$$

Como las diferenciales de $A_z \otimes_{S(V(n))} Z_\bullet$ y $A_z \otimes_{S(V(n))} B_\bullet$ son nulas, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo cuyas filas son sucesiones exactas largas de $S(V(n))$-módulos graduados

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_\bullet(A_z \otimes_{S(V(n))} B) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H_\bullet(A_z \otimes_{S(V(n))} Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_\bullet(A_z \otimes_{S(V(n))} C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{\bullet-1}(A \otimes_{S(V(n))} B) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H_{\bullet-1}(A_z \otimes_{S(V(n))} Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_z \otimes_{S(V(n))} B_\bullet \arrow[r, "\mathrm{id}_{A_z} \underset{S(V(n))}{\otimes} \mathrm{inc}"] & A_z \otimes_{S(V(n))} Z_\bullet \arrow[r] & H_\bullet(A_z \otimes_{S(V(n))} C) \arrow[r] & A_z \otimes_{S(V(n))} B_{\bullet-1} \arrow[r, "\mathrm{id}_{A_z} \underset{S(V(n))}{\otimes} \mathrm{inc}"] & A_z \otimes_{S(V(n))} Z_{\bullet-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{inc} : B_\bullet \hookrightarrow Z_\bullet$ es la inclusión (cf. [Wei], Thm. 3.6.1).

Por lo tanto, empleando la sucesión (4.5.2), obtenemos la sucesión exacta corta de A_z-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado 0

$$0 \to A_z \otimes_{S(V(n))} H_p(C) \to H_p(A_z \otimes_{S(V(n))} C) \to \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, H_{p-1}(C)) \to 0.$$

El lema queda demostrado. $\square$

Como consecuencia del lema anterior obtenemos que, al ser $H_2(C) = 0$,

$$H_2(\mathfrak{ym}(n), A_z) = H_2(A_z \otimes_{S(V(n))} C) \simeq \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, H_1(C)) \simeq \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, W(n)).$$

Empleando la resolución (4.5.1), vemos que $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A_z, W(n)) \simeq \mathrm{ann}_{W(n)[-d]}(z)$ (cf. Definición 4.2.1).

En el caso particular $z = q$, es $d = 2$ y obtenemos un isomorfismo de A-módulos (homogéneo de grado 0) $H_2(A \otimes_{S(V(n))} C) \simeq W(n)[-2]$.

Supongamos ahora $z = x_i$. Empleando los isomorfismos anteriores obtenemos que

$$H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))/\langle x_i \rangle) \simeq \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(S(V(n))/\langle x_i \rangle, W(n)) \simeq \mathrm{ann}_{W(n)[-1]}(x_i).$$

Como la dimensión proyectiva de $S(V(n))/\langle x_i \rangle$ como $S(V(n))$-módulo es menor o igual que 1, por la resolución (4.5.1), entonces $H_n(V(n), S(V(n))/\langle x_i \rangle) = H_{n-1}(V(n), S(V(n))/\langle x_i \rangle) = 0$ (ya que estamos suponiendo $n \geq 3$). A su vez, como q y x_i son coprimos en $S(V(n))$, entonces el endomorfismo $S(V(n))$-lineal de $S(V(n))/\langle x_i \rangle$ dado por la multiplicación por q es inyectivo. Por la Proposición 4.2.5 debe ser $H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))/\langle x_i \rangle) = 0$. Esto implica que $\mathrm{ann}_{W(n)}(x_i) = \mathrm{ann}_{M(n)}(x_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$ y por lo tanto el morfismo natural $M(n) \to M(n)_{(x_i)}$ es inyectivo para todo $i = 1, \dots, n$. En consecuencia, el morfismo natural $\alpha : M(n) \to \Gamma_\bullet(M(n)^\sim)$ es inyectivo (cf. [Mi], p. 115).

Por lo tanto, hemos obtenido el siguiente resultado, que fue usado implícitamente en [Mov].

Proposición 4.5.2. *Sea $n \geq 3$ y $M(n) = W(n)[2]$. El morfismo natural $\alpha : M(n) \to \Gamma_\bullet(M(n)^\sim)$ es $\mathfrak{so}(n)$-equivariante, homogéneo de grado 0 e inyectivo.*

Demostración. La demostración de que α es homogéneo es inmediata de la definición, y el hecho de que sea $\mathfrak{so}(n)$-equivariante es consecuencia de la naturalidad de α. $\square$

Proposición 4.5.3. *Sea $d'_{\mathrm{eu}} : \Omega_{A/k} \to A$ el morfismo A-lineal proveniente de la derivación euleriana d_{eu}, i.e., $d_{\mathrm{eu}}(z) = mz$, si z es homogéneo de grado m. El A-módulo $W(n)$ es isomorfo como A-módulo graduado (isomorfismo homogéneo de grado 0) a $\mathrm{Ker}(d'_{\mathrm{eu}})$. Es decir, tenemos la sucesión exacta corta de A-módulos graduados, con morfismos homogéneos de grado 0*

$$0 \to W(n) \to \Omega_{A/k} \xrightarrow{d'_{\mathrm{eu}}} A_+ \to 0, \tag{4.5.3}$$

donde $A_+ = \sum_{m \in \mathbb{N}} A_m$ es el ideal irrelevante del álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada A.

Demostración. Sabemos que $W(n)[-2] \simeq H_2(A \otimes_{S(V(n))} C)$ (isomorfismo de A-módulos homogéneo de grado 0). Por otro lado, inspeccionando el complejo $A \otimes C_\bullet$, vemos inmediatamente que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_A \otimes d_2) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i : \sum_{i}^{n} a_i x_i = 0\},$$

ya que

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_A \otimes d_2)(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i) &= \sum_{i,j=1}^{n} (a_i x_j^2 \otimes x_i - a_i x_j x_i \otimes x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i q \otimes x_i - \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) x_j \otimes x_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) x_j \otimes x_j,\end{aligned}$$

y luego $(\mathrm{id}_A \otimes d_2)(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i) = 0$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, ya que A es íntegra. A su vez,

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_A \otimes d_3) = \{\sum_{i=1}^{n} a x_i \otimes x_i\}.$$

La segunda sucesión exacta fundamental para el cociente $A = S(V(n))/\langle q \rangle$ es (cf. [Wei], 9.2.7)

$$\langle q \rangle / \langle q \rangle^2 \xrightarrow{\delta} A \otimes_{S(V(n))} \Omega_{S(V(n))/k} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{A/k} \to 0,$$

donde $\delta(\bar{q}) = dq$ y $\alpha(\bar{p} \otimes_{S(V(n))} dz) = \bar{p} d\bar{z}$, con $z, p \in S(V(n))$.

Como $\Omega_{S(V(n))/k} \simeq S(V(n)) \otimes V(n)$, empleando el isomorfismo $z \otimes x_i \mapsto z dx_i$ (cf. [Hart], Example 8.2.1), entonces obtenemos que, bajo esa identificación, $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_A \otimes d_3)$, y más aún, la aplicación

$$\begin{aligned}(A \otimes V(n))/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_A \otimes d_3) &\to \Omega_{A/k} \\ \overline{\bar{p} \otimes x_i} &\mapsto \bar{p} d\bar{x}_i,\end{aligned}$$

es un isomorfismo de A-módulos graduados homogéneo de grado 0. En otras palabras, tenemos la sucesión exacta de A-módulos graduados

$$A[-2] \to A \otimes V(n) \to \Omega_{A/k} \to 0, \qquad (4.5.4)$$

donde el primer morfismo es de la forma $a \mapsto \sum_{i=1}^{n} a x_i \otimes x_i$. Notar que $A \otimes V(n) \simeq (A[-1])^n$.

Entonces, si consideramos el morfismo dado por la inclusión $\mathrm{Ker}(d_2) \hookrightarrow A \otimes V(n)$, éste induce un morfismo de A-módulos graduados $H_2(A \otimes_{S(V(n))} C_\bullet)[2] \hookrightarrow (A \otimes V(n))/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_A \otimes d_3) \simeq \Omega_{A/k}$. Es directo ver que esta aplicación induce el primer morfismo del enunciado de la proposición y se obtiene la sucesión exacta corta (4.5.3). ☐

Definimos el A-módulo graduado $M(n) = W(n)[2]$.

La siguiente proposición es un hecho mencionado en [MS], Example 4, y en [Mov]:

Proposición 4.5.4. *El haz de $\mathcal{O}_X$-módulos $M(n)^\sim$ es isomorfo al haz tangente de X.*

Demostración. Como el funtor $(-)^\sim$ es exacto, $H_\bullet(C^\sim) = H_\bullet(C)^\sim$. En particular, aplicando el Lema 4.5.1, resulta $H_2(C^\sim) = H_2(C)^\sim \simeq W(n)[-2]^\sim$.

Por un lado, podemos considerar la sucesión exacta de Euler para el espacio proyectivo (cf. [Hart], Example 8.20.1, [Huy], Prop. 2.4.4)

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V(n))} \to (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V(n))}[1])^n \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(n))} \to 0,$$

donde el primer morfismo está inducido por un morfismo de la forma

$$\begin{aligned}S(V(n)) &\to (S(V(n))[1])^n \\ z &\mapsto (z x_1, \dots, z x_n).\end{aligned}$$

Si $i : X \to \mathbb{P}(V(n))$ es la inclusión de X en $\mathbb{P}(V(n))$, como el funtor i^* es adjunto a izquierda del funtor i_*, es exacto a derecha y por lo tanto, al aplicar el funtor i^* a la sucesión exacta corta anterior, resulta la siguiente sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X \to (\mathcal{O}_X[1])^n \to i^*(\mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(n))}) \to 0,$$

donde el primer morfismo está inducido por un morfismo de la misma forma que antes.

Podemos comparar esta sucesión con la obtenida al aplicar el funtor $(-)^\sim$ a la sucesión exacta (4.5.4). Esto implica que $\Omega^\sim_{A/k} \simeq i^*(\mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(n))})[-2]$.

A su vez, consideramos la sucesión exacta del fibrado normal de una subvariedad (cf. [Mi], p. 150)

$$0 \to \mathcal{T}_X \to i^*(\mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(n))}) \to \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}(V(n))} \to 0,$$

donde $\mathcal{N}_{X|\mathbb{P}(V(n))} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_X)$ es el fibrado normal de la inclusión $i : X \to \mathbb{P}(V(n))$ e $\mathcal{I}$ es el haz de ideales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V(n))}$-módulos que define X. En este caso se puede ver que $\mathcal{N}_{X|\mathbb{P}(V(n))}$ es el fibrado de línea $\mathcal{N}_{X|\mathbb{P}(V(n))} = \mathcal{O}_X[2]$ y el último morfismo de la sucesión exacta anterior está inducido por d'_{eu}. Para ver esto, empleamos la siguiente cadena de isomorfismos

$$\mathcal{N}_{X|\mathbb{P}(V(n))} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_X) \simeq (\mathrm{Hom}_A(\langle q\rangle/\langle q\rangle^2, A))^\sim \simeq (A[2])^\sim = \mathcal{O}_X[2],$$

donde el penúltimo isomorfismo es inducido por el isomorfismo A-linear homogeneo $\mathrm{Hom}_A(\langle q\rangle/\langle q\rangle^2, A) \xrightarrow{\simeq} A[2]$ of degree 0 dado por $f \mapsto f(\bar{q})$.

Por lo tanto, $\mathcal{T}_X \simeq W(n)[2]^\sim \simeq M(n)^\sim$. La proposición queda demostrada. $\square$

4.5.2 El Teorema de Borel-Weil-Bott

En esta subsección vamos a presentar algunas aplicaciones del Teorema de Borel-Weil-Bott para el cálculo de varias homologías. Para mayores referencias recomendamos [Tay], Ch. 14-16.

Como la acción de $\mathrm{SO}(n)$ en $V(n)$ es homogénea, ésta induce una acción en $\mathbb{P}(V(n))$. Como esta acción preserva la cuádrica definida por el polinomio q, vemos que X posee una acción de $\mathrm{SO}(n)$. Más aún, podemos considerar a la cuádrica X como un espacio homogéneo con respecto al grupo de Lie $\mathrm{SO}(n)$, ya que la acción es transitiva, como se ve directamente. Por lo tanto, como X es compacto existe un subgrupo parbólico P de $\mathrm{SO}(n)$ tal que $\mathrm{SO}(n)/P \simeq X$. Vamos a determinar el álgebra de Lie de P, que denominaremos $\mathfrak{p}$.

Para ello, será útil emplear la siguiente descripción de $\mathfrak{so}(n)$. Denotaremos $m = [n/2]$ a la parte entera de $n/2$. Consideramos el siguiente morfismo k-lineal (cf. [FH], Eq. (20.4))

$$\begin{aligned} \phi : \Lambda^2 V(n) &\to \mathfrak{so}(n) \\ x \wedge y &\mapsto \phi_{x\wedge y} \end{aligned}$$

tal que

$$\phi_{x\wedge y}(v) = \langle y, v\rangle x - \langle x, v\rangle y.$$

Es fácil demostrar que ϕ es un isomorfismo. Por lo tanto, éste induce en $\Lambda^2 V(n)$ una estructura de álgebra de Lie, de forma tal que ϕ es un isomorfismo de álgebras de Lie,

$$[x \wedge y, x' \wedge y'] = -\langle x, x'\rangle y \wedge y' + \langle x, y'\rangle y \wedge x' + \langle y, x'\rangle x \wedge y' - \langle y, y'\rangle x \wedge x'.$$

En el caso de la base ortonormal de $V(n)$ obtenemos

$$[x_i \wedge x_j, x_l \wedge x_m] = -\delta_{i,l} x_j \wedge x_m + \delta_{i,m} x_j \wedge x_l + \delta_{j,l} x_i \wedge x_m - \delta_{j,m} x_i \wedge x_l. \tag{4.5.5}$$

Elegimos un punto distinguido $\bar{p} \in X$ tal que $p = x_1 + i x_{m+1} \in V(n)$ y consideramos la aplicación suryectiva

$$\begin{aligned} R_{\bar{p}} : \mathrm{SO}(n) &\to X \\ g &\mapsto g.\bar{p}. \end{aligned}$$

El subgrupo P está dado por el núcleo de $R_{\bar{p}}$ y por lo tanto es de la forma

$$P = \{g \in \mathrm{SO}(n) : g.\bar{p} = \bar{p}\}.$$

Sea $\mathfrak{p}$ el álgebra de Lie de P. Como la acción de $\mathrm{SO}(n)$ en X está inducida de la acción estándar de $\mathrm{SO}(n)$ en $V(n)$, la última condición es equivalente a $x.p = \lambda p$, para todo $x \in \mathfrak{p}$ y para algún $\lambda \in k$. Empleando el isomorfismo ϕ anterior es fácil ver que $\mathfrak{p}$ está generado por la base formada por los siguientes conjuntos

$$\{g = x_1 \wedge x_{1+m}\}, \tag{4.5.6}$$

$$\{g_j^+ = x_1 \wedge x_j + ix_{1+m} \wedge x_j\}_{1\le j\le n, j\ne 1,1+m}, \tag{4.5.7}$$

$$\{g_{i,j} = x_i \wedge x_j\}_{1\le i<j\le n, i,j\ne 1,1+m}. \tag{4.5.8}$$

Además, los corchetes están dados por

$$\begin{aligned}
[g_{i,j}, g] &= 0,\\
[g, g_j^+] &= ig_j^+,\\
[g_{i,j}, g_l^+] &= \delta_{j,l} g_i^+ - \delta_{i,l} g_j^+,\\
[g_{i,j}, g_{l,m}] &= -\delta_{i,l} g_{j,m} + \delta_{i,m} g_{j,l} + \delta_{j,l} g_{i,m} - \delta_{j,m} g_{i,l},\\
[g_i^+, g_j^+] &= 0,
\end{aligned}$$

Esto implica que $\mathfrak{p} = (\mathfrak{so}(n-2) \times \mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}(n-2)$, donde $\mathfrak{a} = k.g$ y $\mathfrak{a}(n-2)$ es el álgebra de Lie abeliana generada por los elementos (4.5.7).

Definimos los elementos

$$\{g_j^- = x_1 \wedge x_j - ix_{1+m} \wedge x_j\}_{1\le j\le n, j\ne 1,1+m}. \tag{4.5.9}$$

Si agregamos este conjunto a la base anterior de $\mathfrak{p}$, obtenemos una base para $\mathfrak{so}(n)$. Los corchetes están dados por

$$\begin{aligned}
[g, g_j^-] &= -ig_j^-,\\
[g_{i,j}, g_l^-] &= \delta_{j,l} g_i^- - \delta_{i,l} g_j^-,\\
[g_i^-, g_j^-] &= 0,\\
[g_j^+, g_l^-] &= -2g_{j,l} + \delta_{j,l} ig.
\end{aligned}$$

Podemos relacionar esta base con la base usual para la descomposición de Cartan de $\mathfrak{so}(n)$. En este parágrafo repasamos las definiciones y propiedades básicas de la teoría de álgebras de Lie para el caso de $\mathfrak{so}(n)$. Seguiremos en mayor medida la exposición de [FH], Lectures 18, 19, 20, que recomendamos además para mayores referencias.

Es necesario dividir el estudio de estás álgebras de Lie en dos casos: n par o impar. Comencemos con n par. En ese caso, se considera una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ en el espacio vectorial $V(n)$ con la forma bilineal $\langle\, , \rangle$ simétrica no degenerada tal que $\langle v_i, v_{j+m}\rangle = \delta_{i,j}$, $\forall\, i,j$ tales que $1 \le i,j \le m$. Si n es impar, se impone que

$$\begin{aligned}
\langle v_i, v_{j+m}\rangle &= \delta_{i,j}, \forall\, i,j \text{ tales que } 1 \le i,j \le m,\\
\langle v_n, v_n\rangle &= 0,\\
\langle v_i, v_j\rangle &= 0, \text{ para los demás } 1 \le i,j \le n.
\end{aligned}$$

La relación entre la nueva base y la anterior es la siguiente. Si n es par,

$$v_j = \frac{x_j + ix_{j+m}}{\sqrt{2}}, \qquad v_{j+m} = \frac{x_j - ix_{j+m}}{\sqrt{2}}, \forall\, j \text{ tal que } 1 \le j \le m.$$

En el caso n impar falta agregar $v_n = x_n$.

La base usual para $\mathfrak{so}(n)$ está dada en este caso, de forma matricial, por

- La subálgebra de Cartan está formada por la base $\{H_i = E_{i,i} - E_{m+i,m+i}\}_{1\le i\le m}$, cuya base dual es $\{L_i\}_{1\le i\le m}$.
- Los elementos $\{X_{i,j} = E_{i,j} - E_{m+j,m+i}\}_{1\le i\ne j\le m}$, con autovalor $L_i - L_j$.
- Los elementos $\{Y_{i,j} = E_{i,m+j} - E_{j,m+i}\}_{1\le i<j\le m}$, con autovalor $L_i + L_j$.
- Los elementos $\{Z_{i,j} = E_{m+i,j} - E_{m+j,i}\}_{1\le i<j\le m}$, con autovalor $-L_i - L_j$.

Si n es impar debemos agregar además los elementos siguientes

- Los elementos $\{U_i = E_{i,n} - E_{n,m+i}\}_{1\le i\le m}$, con autovalor L_i.

- Los elementos $\{V_i = E_{m+i,n} - E_{n,i}\}_{1\leq i\leq m}$, con autovalor $-L_i$.

Si n es par, el conjunto de raíces positivas está dado por

$$R^+ = \{L_i + L_j\}_{1\leq i<j\leq m} \cup \{L_i - L_j\}_{1\leq i<j\leq m},$$

mientras que en el caso n impar

$$R^+ = \{L_i + L_j\}_{1\leq i<j\leq m} \cup \{L_i - L_j\}_{1\leq i<j\leq m} \cup \{L_i\}_{1\leq i\leq m}.$$

En este caso, el vector de Weyl de $\mathfrak{so}(n)$, i.e., la semisuma de todas las raíces positivas es

$$\rho = \sum_i^m (m-i)L_i$$

en el caso n par, y

$$\rho = \sum_i^m (m-i+\frac{1}{2})L_i$$

en el caso n impar.

A su vez, la cámara de Weyl asociada a la elección de raíces positivas está dada por

$$\mathcal{W} = \{\sum_{i=1}^m a_iL_i : a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{m-1} \geq |a_m|\}$$

en el caso n par, mientras que en el caso n impar

$$\mathcal{W} = \{\sum_{i=1}^m a_iL_i : a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m \geq 0\}.$$

Si n es par, el grupo de Weyl está dado por composiciones de las siguientes isometrías:

$$s_{L_i+L_j} : \begin{cases} L_i \mapsto -L_j, \\ L_j \mapsto -L_i, \\ L_l \mapsto L_l, & \text{si } l \neq i,j, \end{cases} \qquad s_{L_i-L_j} : \begin{cases} L_i \mapsto L_j, \\ L_j \mapsto L_i, \\ L_l \mapsto L_l, & \text{si } l \neq i,j, \end{cases}$$

mientras que en el caso n impar debemos agregar además

$$s_{L_i} : \begin{cases} L_i \mapsto -L_i, \\ L_j \mapsto L_j, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

La relación con la primera base presentada es como sigue. Si n es par,

(i) $H_1 = -ig$,

(ii) $H_j = -ig_{j,j+m}$, para $2 \leq j \leq m$,

(iii) $X_{1,j} = (g_j^+ - ig_{j+m}^+)/2$, para $2 \leq j \leq m$,

(iv) $X_{j,1} = -(g_j^- + ig_{j+m}^-)/2$, para $2 \leq j \leq m$,

(v) $X_{j,l} = (g_{j,l} + g_{j+m,l+m} - ig_{l,j+m} - ig_{j,l+m})/2$, para $2 \leq j \neq l \leq m$,

(vi) $Y_{1,j} = (g_j^+ + ig_{j+m}^+)/2$, para $2 \leq j \leq m$,

(vii) $Y_{j,l} = (g_{j,l} - g_{j+m,l+m} + ig_{j,l+m} - ig_{l,j+m})/2$, para $2 \leq j \neq l \leq m$,

(viii) $Z_{1,j} = (g_j^- - ig_{j+m}^-)/2$, para $2 \leq j \leq m$,

(ix) $Z_{j,l} = (g_{j,l} - g_{j+m,l+m} - ig_{j,l+m} + ig_{l,j+m})/2$, para $2 \leq j \neq l \leq m$.

Si n es impar debemos agregar

(i) $U_1 = g_n^+/\sqrt{2}$,

(ii) $U_j = (g_{j,n} + i g_{j+m,n})/\sqrt{2}$, para $2 \leq j \leq m$,

(iii) $V_1 = g_n^-/\sqrt{2}$,

(iv) $V_j = (g_{j,n} - i g_{j+m,n})/\sqrt{2}$, para $2 \leq j \leq m$.

Deseamos estudiar más en detalle dos fibrados sobre X: el fibrado tangente y el fibrado tautológico (que coincide con el haz $\mathcal{O}_X[-1]$). Para ello, una descripción útil es presentarlos como fibrados asociados al fibrado P-principal $\mathrm{SO}(n) \to X$. Por lo tanto, debemos exhibir dos $\mathfrak{p}$-módulos $V(n-2)$ y $k.v$, tales que $\mathrm{SO}(n) \times_X V(n-2) \simeq \mathcal{T}_X$ y $\mathrm{SO}(n) \times_X k.v \simeq \mathcal{O}_X[1]$. Esto se hace estudiando la acción del grupo de isotropía del punto $\bar{p}$ en la fibra del fibrado vectorial correspondiente (cf. [GS], p. 258, [Tay], Thm. 16.1.3). En este caso, se estudiará la acción de $\mathfrak{p}$ en la fibra.

Observación 4.5.5. *Notamos que como $\mathfrak{p} = (\mathfrak{so}(n-2) \times \mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}(n-2)$ y en nuestros ejemplos $\mathfrak{a}(n-2)$ siempre actuará por cero, nuestro estudio de los $\mathfrak{p}$-módulos se reducirá esencialmente al estudio de $\mathfrak{so}(n-2)$-módulos.*

En el caso del fibrado tangente, el $\mathfrak{p}$-módulo debe ser $\mathfrak{so}(n)/\mathfrak{p}$ con la acción adjunta (cf. [GS], p. 258). Una base de $V(n-2) = \mathfrak{so}(n)/\mathfrak{p}$ está dada por las clases de los elementos $\{g_j^-\}_{1 \leq j \leq n, j \neq 1, 1+m}$ definidos en (4.5.9).

A partir de los conmutadores de $\mathfrak{so}(n)$, se ve directamente que la parte dada por $\mathfrak{a}(n-2)$ en $\mathfrak{p} = (\mathfrak{so}(n-2) \times \mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}(n-2)$ actúa por cero en $V(n-2)$, mientras que $V(n-2)$ es la representación estándar de $\mathfrak{so}(n-2)$. Finalmente, como

$$H_1.\bar{g}_j^- = -ig.\bar{g}_j^- = -i[g, \bar{g}_j^-] = -\bar{g}_j^-,$$

concluimos que todos los elementos de $V(n-2)$ tienen peso es $-L_1$ con respecto a $\mathfrak{a}$.

Si $n \geq 5$, el p-módulo $V(n-2) = \mathfrak{so}(n)/\mathfrak{p}$ es irreducible de peso mínimo $-L_2 - L_1$, ya que $V(n-2)$ es un módulo irreducible sobre $\mathfrak{so}(n-2)$ de peso mínimo $-L_2$. En el caso $n = 3$, $V(n-2)$ es irreducible de peso $-L_1$, ya que $V(n-2) = k$, y $\mathfrak{so}(n-2) = 0$. Si $n = 4$, $V(n-2)$ no es irreducible sino que $V(n-2) = V_+ \oplus V_-$, donde $V_+ = V_- = k$ como k-espacios vectoriales y $V_\pm$ es irreducible de peso mínimo $\pm L_2 - L_1$.

En consecuencia, $\mathcal{T}_X = M(n)^\sim = (W(n)[2])^\sim$ es el fibrado asociado a un $\mathfrak{p}$-módulo irreducible de peso mínimo $-(L_2 + L_1)$, si $n \geq 5$. En el caso $n = 3$, vemos entonces que $M(3)^\sim = (W(3)[2])^\sim$ es el fibrado vectorial asociado a un $\mathfrak{p}$-módulo irreducible de peso mínimo $-L_1$, y por lo tanto $M(3)^\sim \simeq \mathcal{O}_X[1]$. Si $n = 4$, $M(4)^\sim = M_+^\sim \oplus M_-^\sim$, donde $M_\pm^\sim$ es el fibrado asociado a un $\mathfrak{p}$-módulo irreducible de dimensión 1 y peso mínimo $\pm L_2 - L_1$.

El caso del fibrado tautológico es más o menos similar. En primer lugar, si $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ es la inclusión, tenemos que $A[-1]^\sim = \mathcal{O}_X[-1] \simeq i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}[-1])$, ya que

$$i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}[-1]) = i^*(S(V(n))[-1]^\sim) = (A \otimes_{S(V(n))} S(V(n))[-1])^\sim = A[-1]^\sim.$$

Notar que bajo la identificación entre fibrados vectoriales y haces localmente libres sobre una variedad lisa, el pullback de fibrados vectoriales coincide con el pullback de haces. Como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}[-1]$ es el fibrado tautológico de $\mathbb{P}^{n-1}$, i.e., el fibrado tal que (cf. [Huy], Prop. 2.2.6, aunque ahí se denomina fibrado tautológico a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}[1]$)

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}[-1] = \{(\bar{v}, w) \in \mathbb{P}^{n-1} \times k^n : w \in \bar{v}\},$$

entonces

$$\mathcal{O}_X[-1] \simeq i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}[-1]) = \{(\bar{v}, w) \in X \times k^n : w \in \bar{v}\},$$

es el fibrado tautológico sobre X. En este caso, la acción de $\mathfrak{p}$ sobre la fibra $k.p$ de $\bar{p}$ satisface

$$g_{i,j}.p = 0, \quad g_j.p = 0, \quad g.p = i.p,$$

por lo que $H_1.p = p$. En consecuencia, $k.p$ es un $\mathfrak{p}$-módulo irreducible de peso (mínimo) L_1.

Más aún, si E y E' son dos representaciones sobre $\mathfrak{p}$, como

$$\mathrm{SO}(n) \times_X (E \otimes E') \simeq (\mathrm{SO}(n) \times_X E) \otimes (\mathrm{SO}(n) \times_X E'),$$

donde $E \otimes E'$ está provisto de la acción diagonal y el producto tensorial anterior es el definido para fibrados vectoriales. Notamos que si consideramos los haces asociados resulta

$$\mathrm{SO}(n) \times_X (E \otimes E') \simeq (\mathrm{SO}(n) \times_X E) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathrm{SO}(n) \times_X E'),$$

ya que el producto tensorial de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos coincide con el producto tensorial de fibrados vectoriales.

En este caso, podemos calcular suponiendo $E = E' = V(n-2)$. Si $n = 3$, entonces, como $M(3)^{\sim} \simeq \mathcal{O}_X[1]$, $M(3)^{\sim} \otimes M(3)^{\sim} \simeq M(3)[1]^{\sim}$. En el caso $n = 4$, como $V(2) = k \oplus k$, con peso mínimo $-(L_1 + L_2)$ y $-(L_1 - L_2)$, entonces $V(2) \otimes V(2) \simeq k \oplus k \oplus k \oplus k$, con pesos mínimos $-2(L_1+L_2)$, $-2(L_1-L_2)$, $-2L_1$ y $-2L_1$, respectivamente.

Si $n \geq 5$, por la fórmula de Želobenko (cf. [Žel], §131, Thm. 5, o [FH], Exercise 25.33, aunque ahí hay un error, debe cambiarse $H_i^{l_i+1}$ por $E_i^{l_i+1}$), se puede probar la descomposición siguiente de $\mathfrak{so}(n-2)$-módulos

$$V(n-2) \otimes V(n-2) \simeq \Lambda^2 V(n-2) \oplus k \oplus S^2_{\text{irr}}(V(n-2)),$$

donde $S^2_{\text{irr}}(V(n-2))$ es el submódulo irreducible sobre $\mathfrak{so}(n-2)$ de $S^2(V(n-2))$ de peso máximo $2L_2$ (y mínimo $-2L_2$). Esto da la descomposición de $V(n-2) \otimes V(n-2)$ como $\mathfrak{p}$-módulos.

Si $n = 5$, $\Lambda^2 V(n-2)$, k y $S^2_{\text{irr}}(V(n-2))$ son $\mathfrak{p}$-módulos irreducibles de peso mínimo $-(2L_1 + L_2)$, $-2L_1$ y $-2(L_1 + L_2)$, respectivamente, empleando las reglas de fusión de $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{sl}(2)$.

Si $n = 6$, k y $S^2_{\text{irr}}(V(n-2))$ son $\mathfrak{p}$-módulos irreducibles de peso mínimo $-2L_1$ y $-2(L_1+L_2)$, respectivamente. El $\mathfrak{p}$-módulo $\Lambda^2 V(n-2)$, no es irreducible, sino que es suma directa de dos representaciones irreducibles de peso mínimo, una de peso mínimo $-(2L_1 + L_2 + L_3)$, y otra de peso mínimo $-(2L_1 + L_2 + L_3)$, como se deduce directamente de las consideraciones como $\mathfrak{so}(4)$-módulos.

Si $n \geq 7$, $\Lambda^2 V(n-2)$, k y $S^2_{\text{irr}}(V(n-2))$ son $\mathfrak{p}$-módulos irreducibles de peso mínimo $-(2L_1 + L_2 + L_3)$, $-2L_1$ y $-2(L_1 + L_2)$, respectivamente, empleando las reglas de fusión de $\mathfrak{so}(n-2)$.

A partir de la información anterior podemos calcular la cohomología $H^\bullet(X, M(n)[i]^{\sim})$ y $H^\bullet(X, (M(n)^{\sim} \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^{\sim})[i])$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para ello emplearemos el Teorema de Borel-Weil-Bott, que enunciamos a continuación

Teorema 4.5.6. *Sean G un grupo de Lie semisimple y P un subgrupo parabólico, con álgebras de Lie asociadas $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{p}$, respectivamente. Suponemos que $\mathfrak{g}$ posee una descomposición triangular tal que $\mathfrak{p}$ es una subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ con respecto a esa descomposición. Sea $X = G/P$ el espacio homogéneo asociado y $E \to X$ un fibrado homogéneo proveniente de una representación irreducible de peso mínimo $-\lambda$ sobre $\mathfrak{p}$. Denotaremos ρ el vector de Weyl del $\mathfrak{g}$, i.e., la semisuma de todas las raíces positivas de $\mathfrak{g}$.*

Si $\lambda + \rho$ es singular, es decir, si existe una raíz α tal que $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$, entonces $H^\bullet(X, E) = 0$.

Si $\lambda + \rho$ es no singular, sea w el único elemento del grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$ tal que $w(\lambda + \rho)$ pertenece a la cámara de Weyl asociada a la elección de raíces positivas y l la longitud de w, es decir, el número de raíces positivas α tales que $w(\alpha)$ es negativa. En este caso, $H^\bullet(X, E) = 0$, si $\bullet \neq l$, y $H^l(X, E)$ es el $\mathfrak{g}$-módulo irreducible de peso máximo $w(\lambda + \rho) - \rho$.

Demostración. Cf. [GS], Thm. 6.1, [Tay], Thm. 16.5.3. □

Por lo tanto, sólo es necesario calcular elementos del grupo de Weyl y calcular su longitud. Esto es inmediato de la descripción explícita dada al principio de la sección.

En nuestro caso X es la cuádrica en $\mathbb{P}(V(n-1))$ de dimensión $n-2$ definida por el polinomio $q = \sum_{i=1}^n x_i^2$, que podemos considerar como espacio homogéneo de la forma $\mathrm{SO}(n)/P$, donde P es un subgrupo parabólico de $\mathrm{SO}(n)$, como se decribió anteriormente. Empleando el Teorema de Borel-Weil-Bott podemos obtener las siguientes proposiciones, donde, si λ es un peso dominante, denotaremos Γ_λ la representación irreducible de peso máximo λ.

Proposición 4.5.7. *Si $n = 3$, resulta*

$$H^\bullet(X, M(n)[i]^{\sim}) = \begin{cases} \Gamma_{(i+1)L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq -1, \\ \Gamma_{-(i+2)L_1}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i \leq -2, \end{cases}$$

y

$$H^\bullet(X, (M(n)^{\sim} \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^{\sim})[i]) = \begin{cases} \Gamma_{(i+2)L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq -2, \\ \Gamma_{-(i+3)L_1}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i \leq -3. \end{cases}$$

Proposición 4.5.8. *Si $n = 4$, resulta*

$$H^\bullet(X, M(n)[i]^{\sim}) = \begin{cases} \Gamma_{(i+1)L_1+L_2} \oplus \Gamma_{(i+1)L_1-L_2}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq 0, \\ 0, & \text{si } i = -1, \\ k \oplus k, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -2, \\ 0, & \text{si } i = -3, \\ \Gamma_{-(i+3)L_1+L_2} \oplus \Gamma_{-(i+3)L_1-L_2}, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i \leq -4, \end{cases}$$

y

$$H^\bullet(X,(M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[i]) = \begin{cases} \Gamma_{(i+2)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1-2L_2} \oplus \Gamma^{\oplus 2}_{(i+2)L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq 0, \\ \Gamma^{\oplus 2}_{L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -1, \\ k \oplus k, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1-L_2}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma^{\oplus 2}_{L_1}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -3, \\ \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1-L_2}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -4, \\ k \oplus k, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i = -4, \\ \Gamma^{\oplus 2}_{L_1}, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i = -5, \\ \Gamma_{-(i+4)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{-(i+4)L_1-2L_2} \oplus \Gamma^{\oplus 2}_{-(i+4)L_1}, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i \leq -6. \end{cases}$$

Proposición 4.5.9. *Si $n = 5$, resulta*

$$H^\bullet(X, M(n)[i]^\sim) = \begin{cases} \Gamma_{(i+1)L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq 0, \\ 0, & \text{si } i = -1, \\ k, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -2, \\ k, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i = -3, \\ 0, & \text{si } i = -4, \\ \Gamma_{-(i+4)L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = 3, \text{ si } i \leq -5, \end{cases}$$

y

$$H^\bullet(X,(M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[i]) = \begin{cases} \Gamma_{(i+2)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1+L_2} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq 0, \\ \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -1, \\ k & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma_{L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma_{L_1} \oplus k, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -3, \\ \Gamma_{L_1} \oplus k, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i = -4, \\ \Gamma_{L_1+L_2} & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i = -5, \\ k, & \text{con } \bullet = 3, \text{ si } i = -5, \\ \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 3, \text{ si } i = -6, \\ \Gamma_{-(i+5)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{-(i+5)L_1+L_2} \oplus \Gamma_{-(i+5)L_1}, & \text{con } \bullet = 3, \text{ si } i \leq -7. \end{cases}$$

Proposición 4.5.10. *Si $n \geq 6$, resulta*

$$H^\bullet(X, M(n)[i]^\sim) = \begin{cases} \Gamma_{(i+1)L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq 0, \\ 0, & \text{si } i = -1, \\ k, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -2, \\ 0, & \text{si } -n+3 \leq i \leq -3, \\ k, & \text{con } \bullet = n-3, \text{ si } i = -n+2, \\ 0, & \text{si } i = -n+1, \\ \Gamma_{-(n+i-1)L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = n-2, \text{ si } i \leq -n. \end{cases}$$

Si $n = 6$

$$H^\bullet(X,(M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[i]) = \begin{cases} \Gamma_{(i+2)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq 0, \\ \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -1, \\ k & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma_{L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -3, \\ k \oplus k, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i = -4, \\ \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 3, \text{ si } i = -5, \\ \Gamma_{L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = 3, \text{ si } i = -6, \\ k, & \text{con } \bullet = 4, \text{ si } i = -6, \\ \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 4, \text{ si } i = -7, \\ \Gamma_{-(i+6)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{-(i+6)L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{-(i+6)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{-(i+6)L_1}, & \text{con } \bullet = 4, \text{ si } i \leq -8. \end{cases}$$

Si $n \geq 7$, obtenemos

$$H^\bullet(X, (M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[i]) = \begin{cases} \Gamma_{(i+2)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{(i+2)L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i \geq 0, \\ \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -1, \\ k & \text{con } \bullet = 0, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma_{L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -2, \\ \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = 1, \text{ si } i = -3, \\ k, & \text{con } \bullet = 2, \text{ si } i = -4, \\ 0, & \text{si } -n+3 \leq i \leq -5, \\ k, & \text{con } \bullet = n-4, \text{ si } i = -n+2, \\ \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = n-3, \text{ si } i = -n+1, \\ \Gamma_{L_1+L_2}, & \text{con } \bullet = n-3, \text{ si } i = -n, \\ k, & \text{con } \bullet = n-2, \text{ si } i = -n, \\ \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1}, & \text{con } \bullet = n-2, \text{ si } i = -n-1, \\ \Gamma_{-(i+n)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{-(i+n)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{-(i+n)L_1}, & \text{con } \bullet = n-2, \text{ si } i \leq -n-2. \end{cases}$$

Como aplicación de los teoremas anteriores tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.5.11. *Sea $n \geq 4$ y $M(n) = W(n)[2]$. El morfismo natural $\alpha : M(n) \to \Gamma_\bullet(M(n)^\sim)$ es biyectivo.*

Demostración. Por la Proposición 4.5.2, α es inyectivo.

Sea $n = 4$. Como consecuencia de la fórmula del carácter de Weyl (cf. [FH], Eq. (24.41)), sabemos que

$$\dim_k(\Gamma_{(i+1)L_1+L_2}) = \dim_k(\Gamma_{(i+1)L_1-L_2}) = (i+2)^2 - 1,$$

lo que implica que la serie de Hilbert del espacio vectorial graduado $\oplus_{i \geq 0} H^0(X, M(4)[i]^\sim)$ es

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_0} 2((i+2)^2 - 1)t^i = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} 2(i+1)(i+3)t^i.$$

A su vez, la serie de Hilbert para $W(4)$ con la graduación usual es

$$W(4)(t) = \frac{(1-t)^4 - 1 + 4t - 4t^3 + t^4}{(1-t)^4} = 2\frac{3t^2 - 4t^3 + t^4}{(1-t)^4},$$

por lo que la serie de $M(4)$ con la graduación usual es

$$M(4)(t) = \frac{W(4)(t)}{t^2} = 2\frac{3 - 4t + t^2}{(1-t)^4} = 2\frac{(1-t)(3-t)}{(1-t)^4} = 2\frac{(3-t)}{(1-t)^3}.$$

Es fácil ver que ambas series coinciden, ya que

$$\frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{i \geq 0} \frac{(i+1)(i+2)}{2} t^i.$$

Por lo tanto, α debe ser biyectivo.

Si $n \geq 5$, como $\dim(M(n)_i) > 0$, $\forall\, i \in \mathbb{N}_0$, resulta un morfismo inyectivo $\mathfrak{so}(n)$-equivariante $\alpha_i : M(n)_i \to H^0(X, M(n)[i]^\sim) = \Gamma_{(1+i)L_1+L_2}$ cuya imagen es no nula. Como $\Gamma_{(1+i)L_1+L_2}$ es un $\mathfrak{so}(n)$-módulo irreducible, por el Lema de Schur, α_i debe ser un isomorfismo para todo $i \in \mathbb{N}_0$. □

Observación 4.5.12. *El resultado anterior no es válido para $n = 3$. Esto se deduce como sigue. Por la Proposición 4.5.7, $H^0(X, M(3)[-1]^\sim) = k$. Sin embargo,*

$$M(3)_i = \begin{cases} 2i+3, & \forall\, i \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

(cf. Sección 4.3).

Como

$$\dim_k(\Gamma_{(i+1)L_1}) = 2(i+1) + 1,$$

(cf. [FH], Eq. (24.29)), comparando dimensiones en cada grado, vemos que α_i es un isomorfismo en grado $i \in \mathbb{N}_0$, y por lo tanto, la codimensión de $M(3)$ en $\Gamma_\bullet(M(3)^\sim)$ es 1.

4.6 Propiedades homológicas del módulo $W(n)$

4.6.1 Generalidades

La siguiente proposición es una aplicación directa del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Proposición 4.6.1. *Sea $\mathfrak{h}$ un ideal de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

(i) El ideal a izquierda generado por $\mathfrak{h}$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ coincide con el ideal a derecha generado por $\mathfrak{h}$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, y es por lo tanto bilátero.

(ii) Si $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es la proyección canónica, entonces el morfismo de álgebras $\mathcal{U}(\pi) : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ inducido de π es suryectivo y su núcleo es el ideal (a izquierda o a derecha) en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ generado por $\mathfrak{h}$.

Demostración. Cf. [Dix1], Prop. 2.2.14. □

Por la proposición anterior, el morfismo canónico de álgebras $\mathcal{U}(\pi) : \mathrm{YM}(n) \to S(V(n))$ inducido de la proyección $\pi : \mathfrak{ym}(n) \to V(n)$ es suryectivo y su núcleo es el ideal de $\mathrm{YM}(n)$ generado por $\mathfrak{tym}(n)$. Recordamos que $W(n)$ y k son $S(V(n))$-módulos (a izquierda y a derecha), y por lo tanto, empleando el morfismo $\mathcal{U}(\pi)$, resultan también $\mathrm{YM}(n)$-módulos. Como $S(V(n))$ y $\mathrm{YM}(n)$ son biálgebras, dado $i \in \mathbb{N}$, el espacio vectorial $W(n)^{\otimes i}$ es un $S(V(n))$-módulo (resp. $\mathrm{YM}(n)$-módulo) con la acción diagonal. Notar que la acción de $\mathrm{YM}(n)$ en $W(n)^{\otimes i}$ inducida de la acción de $S(V(n))$ coincide con la acción diagonal proveniente de la acción de $\mathrm{YM}(n)$ en $W(n)$ inducida de $S(V(n))$.

Podemos enunciar una aplicación inmediata de las consideraciones geométricas de la sección anterior, que nos será útil para analizar la homología del módulo $W(n)$.

Proposición 4.6.2. *Sea $i \in \mathbb{N}$. Resulta $H_3(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$.*

Demostración. Empleando el complejo de Koszul (3.2.8) para el álgebra de Yang-Mills, vemos que

$$H_3(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = \{w \in W(n)^{\otimes i} : x_i w = 0, \forall\, i = 1, \dots, n\},$$

es decir $H_3(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = H^0(V(n), W(n)^{\otimes i})$.

Vamos a probar que $H_3(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$. Para ello, basta probar que, dado $w \in W(n)^{\otimes i}$ homogéneo de grado d, y $x_i w = 0, \forall\, i = 1, \dots, n$, entonces $w = 0$.

Por la Proposición 4.5.2, podemos considerar a un elemento w homogéneo de grado d como una sección del haz localmente libre $(W(n)^{\sim})^{\boxtimes i}[d]$ sobre $\prod_{j=1}^{i} X$, y a x_i como una sección del fibrado vectorial $\mathcal{O}_X^{\boxtimes i}[1]$ sobre $\prod_{j=1}^{i} X$, por lo tanto, la condición $x_i w = 0$ implica que $w = 0$. La proposición queda demostrada. □

Sean R y S dos anillos, X un R-módulo a derecha, Y un R-S-bimódulo y Z un S-módulo a izquierda. Si $Q \twoheadrightarrow X$ y $P \twoheadrightarrow Z$ son las correspondientes resoluciones proyectivas, se obtiene una sucesión espectral $E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^R_p(X, \mathrm{Tor}^S_q(Y, Z))$ a partir de la filtración por filas del complejo doble $C_{p,q} = Q_q \otimes_R Y \otimes_S P_p$ y converge, en caso de que Y sea un R-módulo playo, a $\mathrm{Tor}^S_\bullet(X \otimes_R Y, Z)$ (cf. [Wei], Exercise 5.6.2).

Dado $i \in \mathbb{N}_0$, podemos considerar entonces la sucesión espectral para el caso $R = S(V(n))$, $S = \mathrm{YM}(n)$, $X = W(n)^{\otimes i}$, $Y = S(V(n))$ y $Z = k$, dada por

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^{S(V(n))}_p(W(n)^{\otimes i}, \mathrm{Tor}^{\mathrm{YM}(n)}_q(S(V(n)), k)) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{\mathrm{YM}(n)}_{p+q}(W(n)^{\otimes i}, k).$$

En primer lugar, hay que notar que $\mathrm{Tor}^{\mathrm{YM}(n)}_{p+q}(W(n)^{\otimes i}, k) \simeq H_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i})$. A menos que se diga lo contrario, todos los morfismos considerados son de $\mathfrak{so}(n)$-módulos graduados homogéneos de grado cero.

Observación 4.6.3. *Si elegimos $Q_\bullet = \Lambda^\bullet V(n) \otimes W(n)^{\otimes i} \otimes S(V(n))$ el complejo $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i} \otimes S(V(n)))$ de Chevalley-Eilenberg para la homología de $V(n)$ con coeficientes en $W(n)^{\otimes i} \otimes S(V(n))$, es inmediato ver que es una resolución proyectiva de $W(n)^{\otimes i}$ como $S(V(n))$-módulo. A su vez, elegimos P como la resolución de Koszul* (3.2.6) *de k como módulo sobre el álgebra de Yang-Mills.*

En ese caso, es fácil ver que la sucesión espectral considerada está dada por la filtración por filas del complejo doble

$$C_{p,q} = Q_q \otimes_{S(V(n))} S(V(n)) \otimes_{\mathrm{YM}(n)} P_p \simeq \Lambda^q V(n) \otimes W(n)^{\otimes i} \otimes C_p(\mathrm{YM}(n), S(V(n))), \tag{4.6.1}$$

con diferencial vertical $d^{\mathrm{CE}}_\bullet \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)^!_\bullet}$, donde consideramos la acción de $V(n)$ en $W(n)^{\otimes i} \otimes S(V(n))$, y diferencial horizontal $\mathrm{id}_{\Lambda^\bullet V(n) \otimes W(n)^{\otimes i}} \otimes d_\bullet$, donde $d_\bullet$ es la diferencial de $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))$.

Por otro lado, como $\operatorname{Tor}_q^{\mathrm{YM}(n)}(S(V(n)),k) \simeq H_q(\mathfrak{ym}(n), S(V(n)))$, por la Proposición 4.3.3, tenemos los isomorfismos de $V(n)$-módulos graduados

$$\operatorname{Tor}_\bullet^{\mathrm{YM}(n)}(S(V(n)),k) = \begin{cases} k, & \text{si } \bullet = 0, \\ W(n), & \text{si } \bullet = 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces la sucesión espectral anterior posee solamente dos filas de la forma

$$E^2_{p,0} \simeq \operatorname{Tor}_p^{S(V(n))}(W(n)^{\otimes i}, k) \simeq H_p(V(n), W(n)^{\otimes i})$$

y

$$E^2_{p,1} \simeq \operatorname{Tor}_p^{S(V(n))}(W(n)^{\otimes i}, W(n)) \simeq H_p(V(n), W(n)^{\otimes (i+1)}).$$

Este último isomorfismo se debe a que $\operatorname{Tor}_\bullet^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M,N) \simeq H_\bullet(\mathfrak{g}, M \otimes N)$ (cf. [Wei], Thm. 5.6.6, Exercise 7.3.5, donde está indicado el caso del funtor Ext, que es análogo). Más aún, como la sucesión espectral está formada sólo por dos filas, da lugar a una sucesión exacta larga (cf. [Wei], Ex. 5.2.2)

$$\begin{aligned} &\to H_p(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_p(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_{p-2}(V(n), W(n)^{\otimes (i+1)}) \to H_{p-1}(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \to \\ \dots &\to H_3(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_1(V(n), W(n)^{\otimes (i+1)}) \to H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_2(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to \\ &\to H_0(V(n), W(n)^{\otimes (i+1)}) \to H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_1(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to 0, \end{aligned}$$

y el isomorfismo $H_0(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \simeq H_0(V(n), W(n)^{\otimes i})$.

Sin embargo, como $\mathrm{YM}(n)$ posee dimensión global 3, $H_p(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$, si $p \geq 4$.

Si $i = 0$, $W(n)^{\otimes i} \simeq k$. En este último caso, teniendo en cuenta que $H_4(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$, obtenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 &\to H_4(V(n),k) \to H_2(V(n), W(n)) \to H_3(\mathfrak{ym}(n),k) \to H_3(V(n),k) \to H_1(V(n),W(n)) \\ &\to H_2(\mathfrak{ym}(n),k) \to H_2(V(n),k) \to H_0(V(n),W(n)) \to H_1(\mathfrak{ym}(n),k) \to H_1(V(n),k) \to 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $H_p(V(n),k) \simeq \Lambda^p V(n)$, como se deduce directamente del complejo de Chevalley-Eilenberg, y los isomorfismos

$$\begin{aligned} &H_0(\mathfrak{ym}(n),k) \simeq k, \\ &H_1(\mathfrak{ym}(n),k) \simeq V(n), \\ &H_2(\mathfrak{ym}(n),k) \simeq V(n)[-2], \\ &H_3(\mathfrak{ym}(n),k) \simeq k[-4], \end{aligned}$$

que se obtienen del complejo de Koszul (3.2.8) para el álgebra de Yang-Mills, resulta el isomorfismo

$$H_0(V(n), W(n)) \simeq \Lambda^2 V(n),$$

y las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \to \Lambda^4 V(n) \to H_2(V(n), W(n)) \to k[-4] \to 0$$

y

$$0 \to \Lambda^3 V(n) \to H_1(V(n), W(n)) \to V(n)[-2] \to 0.$$

Notar que usamos que los morfismos $H_2(\mathfrak{ym}(n),k) \to H_2(V(n),k)$ y $H_3(\mathfrak{ym}(n),k) \to H_3(V(n),k)$ son nulos, ya que son aplicaciones $\mathfrak{so}(n)$-lineales entre representaciones irreducibles diferentes.

A su vez, como $H_p(\mathfrak{ym}(n),k) = 0$, $\forall\, p \geq 4$, entonces resulta el isomorfismo

$$H_p(V(n), W(n)) \simeq \Lambda^{p+2} V(n), \tag{4.6.2}$$

para $p \geq 3$.

Analicemos ahora el caso $i \geq 1$. Por la Proposición 4.6.2, $H_3(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$, si $i \geq 1$, y en consecuencia obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 &\to H_3(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_1(V(n), W(n)^{\otimes (i+1)}) \to H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_2(V(n), W(n)^{\otimes i}) \\ &\to H_0(V(n), W(n)^{\otimes (i+1)}) \to H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_1(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to 0. \end{aligned}$$

A su vez, como $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$, para $\bullet \geq 3$, resulta el isomorfismo

$$H_p(V(n), W(n)^{\otimes(i+1)}) \simeq H_{p+2}(V(n), W(n)^{\otimes i}),$$

donde $p \geq 2$.

Empleando inducción obtenemos entonces el siguiente isomorfismo

$$H_p(V(n), W(n)^{\otimes j}) \simeq H_{p+2(j-1)}(V(n), W(n)),$$

para todo $p \geq 2$, $j \geq 2$, salvo para $p = 2$ e $i = 1$.

Si utilizamos el isomorfismo (4.6.2), resulta

$$H_p(V(n), W(n)^{\otimes j}) \simeq \Lambda^{p+2j} V(n),$$

si $p \geq 2$ y $j \geq 2$. Podemos resumir la información del isomorfismo anterior y el dado en (4.6.2) con la condición

$$H_p(V(n), W(n)^{\otimes i}) \simeq \Lambda^{p+2i} V(n),$$

si $p \geq 2$ y $i \geq 1$, salvo el caso $p = 2$ e $i = 1$.

Hemos obtenido entonces

Teorema 4.6.4 (cf. [Mov], Prop. 10). *Sea $i \geq 1$. Tenemos la sucesión exacta larga de $\mathfrak{so}(n)$-módulos graduados con morfismos homogéneos de grado cero*

$$\begin{aligned} 0 \to H_3(V(n), W(n)^{\otimes i}) &\xrightarrow{S_i'} H_1(V(n), W(n)^{\otimes(i+1)}) \xrightarrow{B_i'} H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \xrightarrow{I_i'} \\ \to H_2(V(n), W(n)^{\otimes i}) &\xrightarrow{S_i} H_0(V(n), W(n)^{\otimes(i+1)}) \xrightarrow{B_i} H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \xrightarrow{I_i} H_1(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to 0, \end{aligned}$$

y los isomorfismos $\mathfrak{so}(n)$-lineales homogéneos de grado cero siguientes

$$\begin{aligned} H_0(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) &\simeq H_0(V(n), W(n)^{\otimes i}), \\ H_0(V(n), W(n)) &\simeq \Lambda^2 V(n), \\ H_1(V(n), W(n)) &\simeq \Lambda^3 V(n) \oplus V(n)[-2], \\ H_2(V(n), W(n)) &\simeq \Lambda^4 V(n) \oplus k[-4], \\ H_p(V(n), W(n)^{\otimes i}) &\simeq \Lambda^{p+2i} V(n), \text{donde } p \geq 2, \text{ salvo el caso } p = 2 \text{ e } i = 1. \end{aligned}$$

Observación 4.6.5. *Si $i \geq 1$, notar que los morfismos S_i' y S_i en el teorema anterior coinciden con las diferenciales $d^2_{3,0}$ y $d^2_{2,0}$ del paso 2 de la sucesión espectral antes definida. Además, los isomorfismos*

$$H_p(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_{p-2}(V(n), W(n)^{\otimes(i+1)})$$

(si $p \geq 4$) coinciden con las diferenciales $d^2_{p,0}$.

Si $i = 0$, los monomorfismos

$$0 \to \Lambda^4 V(n) \to H_2(V(n), W(n))$$

y

$$0 \to \Lambda^3 V(n) \to H_1(V(n), W(n))$$

coinciden con las diferenciales $d^2_{4,0}$ y $d^2_{3,0}$, respectivamente. En este caso también los isomorfismos

$$H_p(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_{p-2}(V(n), W(n)^{\otimes(i+1)})$$

(si $p \geq 5$) coinciden con las diferenciales $d^2_{p,0}$.

Por otro lado, en este caso el complejo doble es quasiisomorfo a $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i})$. Más aún, las flechas B_i y B_i' provienen del quasiisomorfismo natural

$$\mathrm{Tot}(C_{\bullet,\bullet}) \to C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i}) \tag{4.6.3}$$

inducido por la proyección

$$C_{\bullet,0} = W(n)^{\otimes i} \otimes C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n))) \to C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i}) \tag{4.6.4}$$

dada por la multiplicación de $S(V(n))$ en $W(n)^{\otimes i}$, i.e.,

$$w \otimes z \otimes v \mapsto wz \otimes v,$$

si $w \otimes z \otimes v$ pertenece a $C_1(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i})$ o $C_2(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i})$, donde $w \in W(n)^{\otimes i}$, $z \in S(V(n))$ y $v \in V(n)$, y

$$w \otimes z \mapsto wz,$$

si $w \otimes z$ pertenece a $C_0(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i})$ o $C_3(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i})$, donde $w \in W(n)^{\otimes i}$ y $z \in S(V(n))$. De acuerdo con [Wei], Exercise 5.1.2, podemos identificar $E^2_{p,q}$ con subcocientes de $\mathrm{Tot}(C_{\bullet,\bullet})$ y las aplicaciones B_i y B'_i están inducidas por la composición de la inclusión y el quasiisomorfismo (4.6.3) *(cf. [Wei], Exercise 5.1.3).*

Finalmente, vamos a describir el morfismo $I_i : H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_1(V(n), W(n)^{\otimes i})$. Para ello, recordamos que, si E es un $V(n)$-módulo, el morfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{ym}(n) \to V(n)$ dado por la proyección canónica induce un morfismo de complejos $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), E) \to C_\bullet(V(n), E)$ dado por

$$e \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto e \otimes \pi(v_1) \wedge \cdots \wedge \pi(v_p),$$

donde $v_1, \dots, v_p \in \mathfrak{ym}(n)$. Esto induce un morfismo en la homología $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), E) \to H_\bullet(V(n), E)$. En particular, obtenemos un morfismo $H_1(\mathfrak{ym}(n), E) \to H_1(V(n), E)$, inducido por $\mathrm{id}_E \otimes \pi$.

Por otro lado, de la comparación de resoluciones hecha al final de la Subsección 3.2.1 del Capítulo 3, resulta que el morfismo $\mathrm{id}_E \otimes \mathrm{inc} : E \otimes V(n) \to E \otimes \mathfrak{ym}(n)$ induce un isomorfismo en homología $H_1(\mathfrak{ym}(n), E) \to H_1(\mathfrak{ym}(n), E)$. Por lo tanto, si elegimos como representante de la homología $H_1(\mathfrak{ym}(n), E)$ a los ciclos de $C_1(\mathrm{YM}(n), E)$, y como representante de la homología $H_1(V(n), E)$ a los ciclos de $C_1(V(n), E)$, la aplicación $H_1(\mathfrak{ym}(n), E) \to H_1(V(n), E)$ inducida por la identidad $\mathrm{id}_{E \otimes V(n)}$ coincide con la inducida por $\mathrm{id}_E \otimes \pi$.

Por [Wei], Exercise 5.1.3, se puede ver que si elegimos como representante de la homología $H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i})$ a los ciclos de $C_1(\mathrm{YM}(n), W(n)^{\otimes i})$, y como representante de la homología $H_1(V(n), W(n)^{\otimes i})$ a los ciclos de $C_1(V(n), E)$, la aplicación I_i está inducida por la identidad $\mathrm{id}_{W(n)^{\otimes i} \otimes V(n)}$. Por lo tanto, I_i coincide también con el morfismo inducido por $\mathrm{id}_{W(n)^{\otimes i}} \otimes \pi$.

Proposición 4.6.6 (cf. [Mov], Prop. 11 y Coro. 12). *El morfismo $S_1 : H_2(V(n), W(n)) \to H_0(V(n), W(n)^{\otimes 2})$ es inyectivo. Por la exactitud de la sucesión exacta larga del Teorema 4.6.4, B'_1 es suryectivo e $I'_1 = 0$.*

Demostración. La demostración es por inspección de los morfismos a nivel del complejo doble que define la sucesión espectral que da lugar a la sucesión exacta larga del teorema anterior (cf. [Wei], Exercise 5.1.2).

En primer lugar, a partir del complejo doble (4.6.1), la Observación 4.6.5 y [Wei], Exercise 5.1.2, el morfismo $\Lambda^4 V(n) = H_4(V(n), k) \hookrightarrow H_2(V(n), W(n))$ está inducido por

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge x_{i_4} \mapsto \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_4} \epsilon(\sigma) x_{i_{\sigma(1)}} \wedge x_{i_{\sigma(2)}} \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}],$$

donde el elemento de la derecha es un ciclo en $\Lambda^2 V(n) \otimes W(n)$.

A su vez, el elemento

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i \wedge x_j \otimes [x_i, x_j] \in \Lambda^2 V(n) \otimes W(n)$$

es un ciclo no nulo en la homología, ya que proviene del ciclo siguiente

$$(0, \sum_{1 \le i < j \le n} x_i \wedge x_j \otimes (x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i), \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes 1 \otimes x_i \otimes 1, -1 \otimes 1 \otimes 1)$$

de la componente de grado 3 del complejo total del complejo doble (4.6.1). Este último elemento no es nulo en la homología del complejo total, ya que $-1 \otimes 1 \otimes 1$ no puede estar en la imagen de la diferencial vertical por cuestiones de grado. Más aún, la imagen de este elemento en $H_3(\mathfrak{ym}(n), k) \simeq k$ es -1.

Por lo tanto, una base para $H_2(V(n), W(n))$ está dada por los ciclos

$$\{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_4} \epsilon(\sigma) x_{i_{\sigma(1)}} \wedge x_{i_{\sigma(2)}} \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] : 1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le n\} \cup \{\sum_{1 \le i < j \le n} x_i \wedge x_j \otimes [x_i, x_j]\}.$$

Nuevamente empleando [Wei], Exercise 5.1.2, vemos que el morfismo de $H_2(V(n), W(n))$ en $H_0(V(n), W(n)^{\otimes 2})$ satisface que

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_4} \epsilon(\sigma) x_{i_{\sigma(1)}} \wedge x_{i_{\sigma(2)}} \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \mapsto \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_4} \epsilon(\sigma) [x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}],$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i \wedge x_j \otimes [x_i, x_j] \mapsto \sum_{1 \le i < j \le n} [x_i, x_j] \otimes [x_i, x_j],$$

para todo $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$. No es difícil ver que los elementos imagen dados son linealmente independientes en $\Lambda^2 V(n) \otimes \Lambda^2 V(n)$.

Como la acción de $S(V(n))$ en $W(n)$ es graduada, y $W(n)_2 = \Lambda^2 V(n)$, vemos que $(W(n) \otimes W(n))_4 = \Lambda^2 V(n) \otimes \Lambda^2 V(n)$ es la componente homogénea no nula de grado más bajo. Notamos que la imagen de la base anterior de $H_2(V(n), W(n))$ dada por ciclos está contenida en $(W(n) \otimes W(n))_4$, y por lo tanto S_1 es inyectiva. $\square$

De las descripciones geométricas de la subsección anterior y las propiedades homológicas estudiadas en esta sección, podemos deducir nuevas propiedades del $\mathfrak{ym}(n)$-módulo $W(n)^{\otimes i}$, con $i \in \mathbb{N}_0$. Para ello comencemos analizando cómo es la acción de q en $W(n)^{\otimes i}$.

Supondremos $i \geq 2$. Como la acción de q en $W(n)^{\otimes i}$ se obtiene de la comultiplicación de $\mathrm{YM}(n)$, debemos calcular $\Delta^{(i)}(q)$. Si $i = 2$, resulta

$$\Delta^{(2)}(q) = \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} \otimes q + q \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} + 2\sum_{l=1}^{n} x_l \otimes x_l.$$

Más aún, tenemos la siguiente expresión inductiva para $i \geq 3$, cuya verificación es inmediata

$$\begin{aligned}\Delta^{(i)}(q) = {} & \Delta^{(i-2)}(q) \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} + \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)}^{\otimes(i-2)} \otimes q \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} + \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)}^{\otimes(i-1)} \otimes q \\ & + 2\sum_{1\leq j\leq i-2}\sum_{l=1}^{n} \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)}^{\otimes(l-1)} \otimes x_l \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)}^{\otimes(i-l-2)} \otimes (x_l \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} + \mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)} \otimes x_l) + 2\mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)}^{\otimes(i-2)} \otimes \sum_{l=1}^{n} x_l \otimes x_l.\end{aligned}$$

Proposición 4.6.7 (cf. [Mov], Prop 17). *Sea $i \geq 2$. El endomorfismo $S(V(n))$-lineal de $W(n)^{\otimes i}$ dado por la multiplicación por q es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $i = 2$. En este caso, como el $S(V(n))$-módulo $W(n)^{\otimes 2}$ es graduado y la multiplicación por q es homogénea (de grado 2), basta demostrar que, dado $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i \otimes m_i'$ un elemento homogéneo de grado d, tal que la suma anterior es finita, $\deg(m_i) + \deg(m_i') = d$, entonces $qm = 0$ implica $m = 0$. En este caso,

$$q.m = \Delta^{(2)}(q)m = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(m_i \otimes q m_i' + q m_i \otimes m_i' + 2\sum_{l=1}^{n} x_l m_i \otimes x_l m_i') = 2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{l=1}^{n} x_l m_i \otimes x_l m_i' = 2(\sum_{l=1}^{n} x_l \otimes x_l)(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(m_i \otimes m_i')).$$

Por la Proposición 4.5.2, podemos considerar que m_i y m_i' son secciones globales en X de $(W(n)[i])^{\sim}$ y $(W(n)[d-i])^{\sim}$ respectivamente, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $m_i \otimes m_i'$ es una sección de $(W(n)[i])^{\sim} \boxtimes (W(n)[d-i])^{\sim}$ sobre $X \times X$. De la misma forma, por [Mi], Thm 5.9, los elementos x_l son secciones globales de $\mathcal{O}_X[1]$, y en consecuencia, $\sum_{l=1}^{n} x_l \otimes x_l$ es una sección de $\mathcal{O}_X[1] \boxtimes \mathcal{O}_X[1]$ sobre $X \times X$ (cf. [Hart], Exercise 5.11). Si $q.m = 0$, entonces, por ser secciones sobre un haz localmente libre, debe ser $m_i \otimes m_i' = 0, \forall\, i \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, el endomorfismo $S(V(n))$-lineal de $W(n)^{\otimes 2}$ dado por la multiplicación por q es inyectivo

Supongamos ahora que $i \geq 3$. En este caso consideramos la siguiente filtración decreciente $\{\tilde{F}^{\bullet} W(n)^{\otimes(i-2)}\}_{\bullet\in\mathbb{N}_0}$ en el módulo $W(n)^{\otimes(i-2)}$ dada de la forma

$$\tilde{F}^{\bullet} W(n)^{\otimes(i-2)} = \bigoplus_{\substack{j_1,\ldots,j_{i-2}\in\mathbb{N}_0 \\ j_1+\cdots+j_{i-2}\geq\bullet}} W(n)_{j_1} \otimes \cdots \otimes W(n)_{j_{i-2}},$$

que induce una filtración decreciente $\{F^{\bullet} W(n)^{\otimes i}\}_{\bullet\in\mathbb{N}_0}$ en $W(n)^{\otimes i}$ del siguiente modo

$$F^{\bullet} W(n)^{\otimes i} = \tilde{F}^{\bullet} W(n)^{\otimes(i-2)} \otimes W(n)^{\otimes 2}.$$

Notamos que ambas filtraciones son exhaustivas y Hausdorff.

Como la acción de $S(V(n))$ en $W(n)^{\otimes i}$ es graduada, vemos directamente de la expresión anterior de $\Delta^{(i)}(q)$ que el endomorfismo de $W(n)^{\otimes i}$ dado por la multiplicación por q preserva la filtración anterior. Más aún, considerando el graduado asociado a la filtración $\mathrm{Gr}_{F^{\bullet}} W(n)^{\otimes i}$, vemos que coincide con el endomorfismo de $\mathrm{Gr}_{F^{\bullet}} W(n)^{\otimes i}$ dado por multiplicación por

$$2\mathrm{id}_{\mathrm{YM}(n)}^{\otimes(i-2)} \otimes \sum_{l=1}^{n}(x_l \otimes x_l),$$

y por lo tanto es inyectivo, del mismo modo que en el caso $i = 2$.

Se concluye entonces que el endomorfismo de $W(n)^{\otimes i}$ dado por multiplicación por q debe ser inyectivo, como se sigue del siguiente hecho elemental: Dado un morfismo f de espacios vectoriales filtrados de dimensión finita (con filtraciones exhaustivas y Hausdorff) que preserva las respectivas filtraciones y tal que el correspondiente morfismo inducido en el graduado asociado es inyectivo, entonces f es inyectivo.

Esto se deduce como sigue. Sea $f : E \to E'$ un morfismo de espacios vectoriales filtrados por $F^\bullet E$ y $F^\bullet E'$, respectivamente, que suponemos decrecientes. Supongamos que f preserva las filtraciones y que el morfismo inducido $\mathrm{Gr}(f) : \mathrm{Gr}_{F^\bullet} E \to \mathrm{Gr}_{F^\bullet} E'$ es inyectivo. Sea $v \in E$ no nulo. Como la filtración de E es exhaustiva y Hausdorff, entonces existe $i \in \mathbb{N}_0$ tal que $v \in F^i E$ pero $v \notin F^{i+1}E$. Entonces, la clase $\bar{v}$ de v en el graduado asociado no es nula y como $\mathrm{Gr}(f)$ es inyectivo, $\mathrm{Gr}(f)(\bar{v}) \neq 0$. Como $\mathrm{Gr}(f)(\bar{v})$ es la clase de $f(v)$ en $F^iE'/F^{i+1}E'$, entonces $f(v) \neq 0$, es decir, f es inyectivo. La proposición queda demostrada. □

Obtenemos entonces los siguientes corolarios, el segundo de los cuales está en [Mov], pero de forma incorrecta.

Corolario 4.6.8 (cf. [Mov], Lemma 20). *Dado $i \geq 2$, resulta $H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$.*

Demostración. Como el endomorfismo de $W(n)^{\otimes i}$ dado por la multiplicación por q es inyectivo por la proposición anterior, y $H_n(V, W(n)^{\otimes i}) = H_{n-1}(V, W(n)^{\otimes i}) = 0$ por el Teorema 4.6.4, empleando la Proposición 4.2.5 resulta $H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$. □

Corolario 4.6.9 (cf. [Mov], Coro. 21). *El $S(V(n))$-módulo $W(n)^{\otimes i}$ es libre si y sólo si $i > \max(2, (n-1)/2)$.*

Demostración. Como el $S(V(n))$-módulo graduado $W(n)^{\otimes i}$ está acotado inferiormente, es libre si y sólo si es proyectivo, lo que es equivalente a que sea playo. Más aún, bajo estas hipótesis, por la forma de la resolución proyectiva minimal, se deduce que $W(n)^{\otimes i}$ es libre si y sólo si su homología $H_\bullet(V(n), W(n)^{\otimes i})$ es nula, para todo $\bullet > 0$ (cf. [Ber2], Lemme 1.3, Teo 1.11, Coro. 1.12).

Por el Teorema 4.6.4, vemos por un lado que, si $p \geq 2$

$$H_p(V(n), W(n)^{\otimes i}) \simeq \Lambda^{p+2i} V(n),$$

que es nulo si y sólo si $p + 2i > n$, es decir, si y sólo si $i > (n-p)/2$. Por lo tanto, la familia $\{H_p(V(n), W(n)^{\otimes i})\}_{p \geq 2}$ es nula si y sólo si $i > (n-2)/2$.

Por otro lado, por el corolario anterior, $H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$ para $i \geq 2$, lo que implica que

$$S'_i : H_3(V(n), W(n)^{\otimes i}) \to H_1(V(n), W(n)^{\otimes (i+1)})$$

es un isomorfismo. Por lo tanto, $H_1(V(n), W(n)^{\otimes i}) \simeq \Lambda^{3+2(i-1)} V(n)$, si $i \geq 3$. Vemos fácilmente que, suponiendo $i \geq 3$, $H_1(V(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$ si y sólo si $1 + 2i > n$, es decir, $i > (n-1)/2$. El corolario queda demostrado. □

4.6.2 Cálculo de la homología $\mathrm{Tor}_\bullet^{S(V(n))}(M(n), M(n))$

Podemos aplicar los resultados del parágrafo anterior al cálculo de la homología $\mathrm{Tor}_\bullet^{S(V(n))}(M(n), M(n))$. Recordamos que $M(n) = W(n)[2]$.

El motivo para concentrarnos en $M(n)$ en lugar de $W(n)$ se debe en parte a las buenas propiedades homológicas de $M(n)$.

Proposición 4.6.10 (cf. [Mov], Prop. 23). *El $S(V(n))$-módulo $M(n)$ es Koszul, es decir, $\mathrm{Tor}_p^{S(V(n))}(M(n), k)$ está concentrado en grado p, para todo $p \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Por el Teorema 4.6.4, vemos que, como $\mathrm{Tor}_p^{S(V(n))}(M(n), k) \simeq H_p(V(n), M(n))$, resulta que

$$\begin{aligned}
H_0(V(n), M(n)) &\simeq H_0(V(n), W(n))[2] \simeq (\Lambda^2 V(n))[2], \\
H_1(V(n), M(n)) &\simeq H_1(V(n), W(n))[2] \simeq (\Lambda^3 V(n))[2] \oplus V(n), \\
H_2(V(n), M(n)) &\simeq H_2(V(n), W(n))[2] \simeq (\Lambda^4 V(n))[2] \oplus k[-2], \\
H_p(V(n), M(n)) &\simeq H_p(V(n), W(n))[2] \simeq (\Lambda^{p+2} V(n))[2],
\end{aligned}$$

para $p \geq 3$ y donde todos los morfismos anteriores son homogéneos de grado 0. La proposición queda demostrada. □

Toda resolución minimal proyectiva $P(M(n))$ del $S(V(n))$-módulo graduado $M(n)$ es de la forma

$$\begin{aligned} 0 \to S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_n^{S(V(n))}(M(n), k) \to S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_{n-1}^{S(V(n))}(M(n), k) \to \cdots \to \\ \to S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(M(n), k) \to S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_0^{S(V(n))}(M(n), k) \to M(n) \to 0. \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

Vamos a describir explícitamente la diferencial de la resolución anterior de la siguiente manera.

Sea $R(M(n))_\bullet$ dado por

$$R(M(n))_p = S(V(n)) \otimes (\Lambda^p V(n)),$$

para todo $p \in \mathbb{N}_0$, provisto de la diferencial

$$(d_p^{\mathrm{CE}})(z \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} z x_{i_j} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{x}_{i_j} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}. \tag{4.6.6}$$

Como $(R(M(n))_\bullet, d_\bullet^{\mathrm{CE}})$ coincide con el complejo de Chevalley-Eilenberg en grado mayor o igual que 0, su homología es $H_\bullet(V(n), S(V(n))) = 0$ para $\bullet \geq 1$. Notar que $R(M(n))_{\bullet+2}$ es un subespacio vectorial graduado de $S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_\bullet^{S(V(n))}(M(n), k)$.

Definimos la diferencial $d_\bullet^K$ de la resolución minimal proyectiva de $M(n)$ como sigue. Si $v \in R(M(n))_{p+2}$, con $p \geq 1$, se define $d_p^K(v) = d_{p+2}^{\mathrm{CE}}(v)$. Si $v \notin R(M(n))$, entonces podemos suponer que, o bien v pertenece a $k[-2] \subseteq H_2(V(n), M(n))$, con base $\{c\}$, o v pertenece a $V(n) \subseteq H_1(V(n), M(n))$, cuya base denotaremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Se define

$$d_2^K(z \otimes c) = \sum_{j=1}^{n} z x_j \otimes e_j, \tag{4.6.7}$$

$$d_1^K(z \otimes e_i) = \sum_{j=1}^{n} z x_j \otimes x_j \wedge x_i, \tag{4.6.8}$$

donde $z \in S(V(n))$.

Finalmente, se define el mofismo de aumentación $d_0^K : P(M(n))_0 \to M(n)$

$$d_0^K(z \otimes x_i \wedge x_j) = z.[x_i, x_j]. \tag{4.6.9}$$

Por el Corolario 4.4.4, $M(n)$ es un $S(V(n))$-módulo finitamente generado por el conjunto $\{[x_i, x_j] : 1 \leq i < j \leq n\}$, y por lo tanto, d_0^K es suryectivo.

Es fácil comprobar que $d_\bullet^K$ es $S(V(n))$-lineal, homogéneo de grado 0, $\mathfrak{so}(n)$-equivariante y $d_p^K \circ d_{p+1}^K = 0$, para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

Más aún, el complejo $P(M(n))_\bullet$ es acíclico en grados positivos y es una resolución de $M(n)$. Por un lado, como $H_\bullet(P(M(n))) = H_{\bullet+2}(R(M(n)))$ para $\bullet \geq 3$, la aciclicidad de $P(M(n)))_\bullet$, para $\bullet \geq 3$ es directa. El caso $\bullet = 2$ también es directo, ya que d_2^K es inyectiva. Los demás casos, i.e., $\bullet = 0, 1$ pueden verificarse fácilmente como sigue.

Supongamos que analizamos el caso $\bullet = 1$. Sea $z = z' + z'' \in \mathrm{Ker}(d_1^K)$, con

$$z' = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} z_{(i_1, i_2, i_3)} \otimes x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \in S(V(n)) \otimes \Lambda^3 V(n),$$

$$z'' = \sum_{i=1}^{n} z_i \otimes e_i \in S(V(n)) \otimes V(n),$$

es decir, $d_1^K(z'') \in \mathrm{Im}(d_3^{\mathrm{CE}})$. Como $\mathrm{Im}(d_3^{\mathrm{CE}}) = \mathrm{Ker}(d_2^{\mathrm{CE}})$, la condición anterior es equivalente a

$$0 = d_2^{\mathrm{CE}}(d_1^K(z'')) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (z_i x_j^2 \otimes x_i - z_i x_i x_j \otimes x_j).$$

Por lo tanto, resulta que $d_2^{\mathrm{CE}} \circ d_1^K|_{S(V(n)) \otimes V(n)} = d_2$, donde d_2 es la diferencial del complejo $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), S(V(n)))$ dado en (3.2.8), y la condición anterior significa que $z'' \in S(V(n)) \otimes V(n)$ pertenece al núcleo de d_2. Por la Proposición 4.3.3, $H_2(\mathfrak{ym}(n), S(V(n))) = 0$, y en consecuencia, existe $w \in S(V(n))$ tal que $z'' = d_1(w) = d_2^K(w \otimes c)$, es decir, el complejo $P(M(n))_\bullet$ es acíclico en $\bullet = 1$.

Finalmente, demostremos que $P(M(n))_\bullet$ es una resolución de $M(n)$. Para ello, basta ver que $\mathrm{Ker}(d_0^K) = \mathrm{Im}(d_1^K)$. Comencemos observando que

$$\begin{tikzcd}
S(V(n)) \otimes \Lambda^2 V(n) \arrow[r, "d_0^K"] \arrow[d, "d_2^{\mathrm{CE}}"] & M(n) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
\mathrm{Ker}(d_0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"] & \mathrm{Ker}(d_1)/\mathrm{Im}(d_2) & \\
S(V(n)) \otimes V(n) \arrow[d, "d_1"] & & \\
S(V(n)) & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde π es la proyección canónica y ψ es el isomorfismo de la Proposición 4.4.3. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(d_0^K) = \mathrm{Ker}(\pi \circ d_2^{\mathrm{CE}}) = (d_2^{\mathrm{CE}})^{-1}(\mathrm{Im}(d_2))$. Luego, dado $w \in S(V(n)) \otimes \Lambda^2 V(n)$, $w \in \mathrm{Ker}(d_0^K)$ si y sólo si existe $w' \in S(V(n)) \otimes V(n)$ tal que $d_2^{\mathrm{CE}}(w) = d_2(w')$. Como $d_2 = d_2^{\mathrm{CE}} \circ d_1^K|_{S(V(n))\otimes V(n)}$, resulta que $d_2^{\mathrm{CE}}(w) = d_2^{\mathrm{CE}}(d_1^K(w'))$, es decir, $w - d_1^K(w') \in \mathrm{Ker}(d_2^{\mathrm{CE}}) = \mathrm{Im}(d_3^{\mathrm{CE}})$. Recordando que $d_3^{\mathrm{CE}} = d_1^K|_{R(M(n))_3}$, obtenemos que $\mathrm{Ker}(d_0^K) = \mathrm{Im}(d_1^K)$.

En consecuencia, hemos demostrado

Proposición 4.6.11 (cf. [Mov], Prop. 23)**.** *El complejo* (4.6.5) *provisto de la diferencial* (4.6.6), (4.6.7) *y* (4.6.8) *es una resolución minimal proyectiva de $M(n)$, con diferencial $\mathfrak{so}(n)$-equivariante.*

Aplicando el funtor exacto $(-)^\sim$ a la resolución (4.6.5) (cf. Sección 4.5.1), obtenemos el complejo acíclico de haces de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$-módulos

$$\begin{aligned}0 \to (S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_n^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to (S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_{n-1}^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to \dots \\ \to (S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to (S(V(n)) \otimes \mathrm{Tor}_0^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to M(n)^\sim \to 0. \quad (4.6.10)\end{aligned}$$

Si aplicamos el funtor i^*, donde $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, resulta el complejo de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \to (A \otimes \mathrm{Tor}_n^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to \dots \to (A \otimes \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to (A \otimes \mathrm{Tor}_0^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to M(n)^\sim \to 0. \quad (4.6.11)$$

Como i^* es exacto a derecha, el complejo anterior es exacto en $M(n)^\sim$.

Vemos trivialmente que el complejo anterior se puede obtener de aplicar el funtor $(-)^\sim$ a $P(M(n)) \otimes_{S(V(n))} A$, donde recordamos que $A = S(V(n))/\langle q \rangle$.

Como $(-)^\sim$ es exacto, la homología de (4.6.11) es $(\mathrm{Tor}_\bullet^{S(V(n))}(M(n),A))^\sim$. Empleando la resolución (4.5.1), vemos que

$$\mathrm{Tor}_\bullet^{S(V(n))}(M(n),A) = \begin{cases} M(n), & \text{si } \bullet = 0, \\ M(n)[-2], & \text{si } \bullet = 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$H_\bullet(i^*(P(M(n))^\sim)) = \begin{cases} M(n)^\sim, & \text{si } \bullet = 0, \\ M(n)[-2]^\sim, & \text{si } \bullet = 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Como $M(n)^\sim$ es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libre, es playo en la categoría de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos, y por lo tanto el funtor $(-) \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim$ es exacto. Si aplicamos este funtor al complejo $i^*(P(M(n))^\sim)$ anterior obtenemos

$$0 \to (M(n) \otimes \mathrm{Tor}_n^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to \dots \to (M(n) \otimes \mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to (M(n) \otimes \mathrm{Tor}_0^{S(V(n))}(M(n),k))^\sim \to 0. \quad (4.6.12)$$

Empleando la fórmula de Künneth en la categoría de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.6.12 (cf. [Mov], Prop. 31)**.** *La homología del complejo de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos* (4.6.12) *es el haz de $\mathcal{O}_X$-módulos $M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim$ en grado 0 y $(M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[-2]$ en grado 1.*

Reindexando el complejo (4.6.12), dado $i \in \mathbb{N}_0$, podemos definir el complejo de cocadenas de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}[i]^\bullet$ dado por

$$\mathcal{F}[i]^q = \begin{cases} (\mathrm{Tor}_{-q}^{S(V(n))}(M(n),k) \otimes M(n)[i+q])^\sim, & \text{si } -n \leq q \leq 0, \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \tag{4.6.13}$$

provisto de las mismas diferenciales que (4.6.12). Como $\mathcal{F}[i]^\bullet$ es acotado para todo $i \in \mathbb{N}_0$, podemos considerar las dos sucesiones espectrales (débilmente convergentes) de Grothendieck asociadas al funtor de secciones globales (cf. [Wei], 5.7.9, 5.7.10)

$$^{I}E_2^{q,p}[i] = H^q(H^p(X, \mathcal{F}[i]^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet), \tag{4.6.14}$$

$$^{II}E_2^{p,q}[i] = H^p(X, H^q(\mathcal{F}[i]^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet), \tag{4.6.15}$$

que convergen a la misma homología.

Por lo tanto, el primer paso de la primera sucesión espectral es de la forma

$$^{I}E_1^{q,p}[i] = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{-q}^{S(V(n))}(M(n),k) \otimes H^p(X, M(n)[i+q]^\sim), & \text{si } -n \leq q \leq 0, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.16}$$

Por otro lado, por la Proposición 4.6.12, el segundo paso de la segunda sucesión espectral es

$$^{II}E_2^{p,q}[i] = \begin{cases} H^p(X, (M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[i]), & \text{si } q = 0, \\ H^p(X, (M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[i-2]), & \text{si } q = 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.17}$$

La siguiente proposición se encuentra en [Mov], pero de forma incorrecta.

Proposición 4.6.13 (cf. [Mov], Prop. 33)**.** *Si $n = 3$, entonces*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = S^2_{\mathrm{irr}}(V(n)) \oplus V(n) \oplus k, \\
&\mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{(2+i)L_1}, \forall i \geq 1, \\
&\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = V(n) \oplus k, \\
&\mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{iL_1}, \forall i \geq 2, \\
&\mathrm{Tor}_{p}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = 0, \forall p \geq 2.
\end{aligned}$$

Si $n = 4$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1-2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1-L_2} \oplus k \oplus k, \\
&\mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{(2+i)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1-2L_2} \oplus \Gamma^{\oplus 2}_{(2+i)L_1}, \forall i \geq 1, \\
&\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{L_1} \oplus \Gamma_{L_1}, \\
&\mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{iL_1+2L_2} \oplus \Gamma_{iL_1-2L_2} \oplus \Gamma^{\oplus 2}_{iL_1}, \forall i \geq 2, \\
&\mathrm{Tor}_{p}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = 0, \forall p \geq 2.
\end{aligned}$$

Si $n = 5$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1} \oplus k, \\
&\mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{(2+i)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1+L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1}, \forall i \geq 1, \\
&\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1} \oplus k, \\
&\mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{iL_1+2L_2} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2} \oplus \Gamma_{iL_1}, \forall i \geq 2, \\
&\mathrm{Tor}_{p}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = 0, \forall p \geq 2.
\end{aligned}$$

Si $n = 6$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus k,\\
&\mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{(2+i)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1}, \forall i \geq 1,\\
&\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1} \oplus k,\\
&\mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{iL_1+2L_2} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{iL_1}, \forall i \geq 2,\\
&\mathrm{Tor}_{2,2}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = k,\\
&\mathrm{Tor}_{2,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = 0, \forall i \geq 3.\\
&\mathrm{Tor}_{p}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = 0, \forall p \geq 3.
\end{aligned}$$

Si $n \geq 7$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus k,\\
&\mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{(2+i)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1}, \forall i \geq 1,\\
&\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = V(n) \oplus \Lambda^3 V(n) \oplus \Lambda^5 V(n),\\
&\mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Gamma_{iL_1+2L_2} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{iL_1}, \forall i \geq 2,\\
&\mathrm{Tor}_{i,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = \Lambda^{i+4} V(n), \forall i \geq 2,\\
&\mathrm{Tor}_{i,j}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = 0, \forall j > i \geq 2.
\end{aligned}$$

Demostración. En todos los casos, como el $S(V(n))$-módulo $M(n)$ es Koszul (o inspeccionando el complejo (4.6.13)), entonces

$$\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) = M(n)_0 \otimes M(n)_0 = \Lambda^2 V(n) \otimes \Lambda^2 V(n).$$

Empleando la fórmula de Želobenko para las reglas de fusión de $\mathfrak{so}(n)$ vemos que

$$\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \begin{cases}
\Gamma_{2L_1} \oplus V(n) \oplus k, & \text{si } n = 3,\\
\Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1-2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1-L_2} \oplus \Gamma_{2L_1}^{\oplus 2} \oplus k^{\oplus 2}, & \text{si } n = 4,\\
\Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus \Gamma_{L_1} \oplus k, & \text{si } n = 5,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus k, & \text{si } n = 6,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus k, & \text{si } n = 7,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2+L_3+L_4} \oplus \Gamma_{L_1+L_2+L_3-L_4} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus k, & \text{si } n = 8,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2+L_3+L_4} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus k, & \text{si } n > 8.
\end{cases}$$

Por los isomorfismos $\mathfrak{so}(n)$-lineales siguientes

$$\begin{aligned}
&\Lambda^4 V(n) \simeq V(n) \simeq \Gamma_{L_1}, && \text{si } n = 5,\\
&\Lambda^4 V(n) \simeq \Lambda^2 V(n) \simeq \Gamma_{L_1+L_2}, && \text{si } n = 6,\\
&\Lambda^4 V(n) \simeq \Lambda^3 V(n) \simeq \Gamma_{L_1+L_2+L_3}, && \text{si } n = 7,\\
&\Lambda^4 V(n) \simeq \Gamma_{L_1+L_2+L_3+L_4} \oplus \Gamma_{L_1+L_2+L_3-L_4}, && \text{si } n = 8,\\
&\Lambda^4 V(n) \simeq \Gamma_{L_1+L_2+L_3+L_4}, && \text{si } n > 8,
\end{aligned}$$

podemos reeescribir la homología de la forma

$$\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \begin{cases}
\Gamma_{2L_1} \oplus V(n) \oplus k, & \text{si } n = 3,\\
\Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1-2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1-L_2} \oplus \Gamma_{2L_1}^{\oplus 2} \oplus k^{\oplus 2}, & \text{si } n = 4,\\
\Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus \Gamma_{L_1} \oplus k, & \text{si } n = 5,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus k, & \text{si } n = 6,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Lambda^4 V(n) \oplus \Gamma_{2L_1} \oplus k, & \text{si } n \geq 7.
\end{cases}$$

Ahora vamos a calcular el resto de las componentes homogéneas.

Presentaremos el cálculo explícito en el caso $n \geq 7$, ya que los demás son análogos.

Sea $i = 1$. En el caso de la sucesión espectral (4.6.15), resulta

$$ {}^{II}E_2^{p,q}[1] = \begin{cases} \Gamma_{3L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{3L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{3L_1}, & \text{si } p = 0, q = 0, \\ \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1}, & \text{si } p = 0, q = -1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.18} $$

Por lo tanto, esta sucesión espectral colapsa, y coincide con su límite, es decir, obtenemos que

$$ \begin{aligned} \mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}[1]^\bullet) &= \Gamma_{3L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{3L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{3L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{3L_1}, \\ \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{F}[1]^\bullet) &= \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{L_1}. \end{aligned} $$

El resto de las hipercohomologías son nulas.

Por otro lado, si consideramos el primer paso de la sucesión espectral (4.6.16) asociada al complejo $\mathcal{F}^\bullet[i]$, vemos que, por el Corolario 4.5.11, ${}^{I}E_1^{q,0}[i]$ es la componente de grado i del complejo $P(M(n)) \otimes_{S(V(n))} M(n)$, con la misma diferencial, y por lo tanto, ${}^{I}E_2^{q,0}[i] = \mathrm{Tor}_{-q,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n))$. En particular, la sucesión espectral ${}^{I}E_2^{q,p}[1]$ es de la forma

$$ {}^{I}E_2^{p,q}[1] = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{-q,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)), & \text{si } p = 0, -1 \leq q \leq 0, \\ \Lambda^5 V(n), & \text{si } p = 1, q = -3, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.19} $$

Por las consideraciones anteriores, vemos que

$$ \begin{aligned} \mathrm{Tor}_{0,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) &\simeq \mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}[1]^\bullet) \simeq \Gamma_{3L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{3L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{3L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{3L_1}, \\ \mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) &\simeq \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{F}[1]^\bullet) \oplus \Lambda^5 V(n) \simeq \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1+L_2-L_3} \oplus \Gamma_{L_1} \oplus \Lambda^5 V(n). \end{aligned} $$

Sea $i \geq 2$. En el caso de la sucesión espectral (4.6.15), resulta

$$ {}^{II}E_2^{p,q}[i] = \begin{cases} \Gamma_{(2+i)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1}, & \text{si } p = 0, q = 0, \\ \Gamma_{iL_1+2L_2} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{iL_1}, & \text{si } p = 0, q = -1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.20} $$

Por lo tanto, esta sucesión espectral colapsa, y obtenemos que

$$ \begin{aligned} \mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}[i]^\bullet) &= \Gamma_{(2+i)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1}, \\ \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet) &= \Gamma_{iL_1+2L_2} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{iL_1}. \end{aligned} $$

Nuevamente, el resto de las hipercohomologías es nula.

La sucesión espectral ${}^{I}E_2^{q,p}[i]$ para $i \geq 2$ es de la forma

$$ {}^{I}E_2^{p,q}[i] = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{-q,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)), & \text{si } p = 0, -i \leq q \leq 0, \\ \Lambda^{i+4} V(n), & \text{si } p = 1, q = -i-2, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.21} $$

Por las consideraciones anteriores, vemos que

$$ \begin{aligned} \mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) &\simeq \mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}[i]^\bullet) \simeq \Gamma_{(2+i)L_1+2L_2} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{(2+i)L_1}, \\ \mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) &\simeq \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet) \simeq \Gamma_{iL_1+2L_2} \oplus \Gamma_{iL_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{iL_1}. \\ \mathrm{Tor}_{i,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) &\simeq \Lambda^{i+4} V(n). \end{aligned} $$

Las demás componentes son nulas.

La proposición queda demostrada. □

Observación 4.6.14. *Empleando los isomorfismos*

$$\begin{aligned}
&\Lambda^3 V(4) \simeq \Gamma_{L_1} = V(4), && \text{si } n = 4,\\
&\Lambda^3 V(5) \simeq \Gamma_{L_1+L_2} \simeq \Lambda^2 V(5), && \text{si } n = 5,\\
&\Lambda^3 V(6) \simeq \Gamma_{L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{L_1+L_2-L_3}, && \text{si } n = 6,\\
&\Lambda^5 V(6) \simeq \Gamma_{L_1}, && \text{si } n = 6,\\
&\Lambda^3 V(n) \simeq \Gamma_{L_1+L_2+L_3}, && \text{si } n \geq 7,
\end{aligned}$$

obtenemos que $\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \Lambda^5 V(n) \oplus \Lambda^3 V(n) \oplus V(n)$.

Observación 4.6.15. *Es claro que las siguientes inclusiones son verdaderas:* $k \oplus \Lambda^4(V(n)[1]) \subseteq H_0(V(n), S^2 M(n))$ *y* $\Lambda^2(V(n)[1]) \subseteq H_0(V(n), \Lambda^2 M(n))$. *No es difíl hallar qué representations irreducible de* $\mathfrak{so}(n)$ *entre las dadas para la descomposición de* $H_{0,0}(V(n), M(n)^{\otimes 2})$ *en la Proposición 4.6.13 pertenecen a* $H_{0,0}(V(n), S^2 M(n))$ *o* $H_{0,0}(V(n), \Lambda^2 M(n))$. *Por un lado, recordamos que si* λ *es un peso dominante y* α *es una raíz positiva de* $\mathfrak{so}(n)$ *tal que* $\lambda(H_\alpha) \neq 0$, *entonces* $\Gamma_{2\lambda} \subseteq S^2\Gamma_\lambda$ *y* $\Gamma_{2\lambda-\alpha} \subseteq \Lambda^2\Gamma_\lambda$ *(cf. [FH], Exercise 25.32). Primero, aplicando el hecho anterior a* $\lambda = L_1$ *for* $n = 3$, *vemos que*

$$\Gamma_{2L_1} \subseteq H_{0,0}(V(n), S^2 M(n)),$$

y segundo, a $\lambda = L_1 + L_2$ *para* $n \geq 4$, *encontramos que*

$$\Gamma_{2L_1+2L_2} \subseteq H_{0,0}(V(n), S^2 M(n)).$$

A su vez, para un α *apropiado para cada caso, resulta que*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2L_1+L_2} &\subseteq H_{0,0}(V(n), \Lambda^2 M(n)), && \text{si } n = 5,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} \oplus \Gamma_{2L_1+L_2-L_3} &\subseteq H_{0,0}(V(n), \Lambda^2 M(n)), && \text{si } n = 6,\\
\Gamma_{2L_1+L_2+L_3} &\subseteq H_{0,0}(V(n), \Lambda^2 M(n)), && \text{si } n \geq 7.
\end{aligned}$$

Por un argumento de dimensiones no es difícil verificar que, para $n \geq 5$, $H_{0,0}(V(n), \Lambda^2 M(n)) \simeq \Lambda^2(V(n)[1]) \wedge \Lambda^2(V(n)[1])$ *es la suma directa de* $\Lambda^2(V(n)[1])$ *y los módulos que aparecen en la lista anterior, en cada caso (cf. [FH], Eq. (24.29) y (24.41)). El mismo argumento implica que* $H_{0,0}(V(n), \Lambda^2 M(n)) \simeq \Lambda^2(V(n)[1]) \wedge \Lambda^2(V(n)[1])$ *es suma directa de* $\Lambda^2(V(n)[1])$ *and* Γ_{2L_1} *para* $n = 4$. *Finalmente, para* $n = 3$, $H_{0,0}(V(n), \Lambda^2 M(n))$ *es isomorfo a* $\Lambda^2(V(n)[1])$.

La siguiente proposición da una descripción explícita de una base para $\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n))$, y se encuentra mencionada con errores en [Mov].

Proposición 4.6.16 (cf. [Mov], Prop. 34)**.** *A partir de la descomposición*

$$\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \Lambda^5 V(n) \oplus \Lambda^3 V(n) \oplus V(n),$$

tenemos las siguientes bases para cada componente dadas por ciclos

(i) En $V(n)$ *consideramos la base dada por las clases en la homología de los ciclos*

$$\{\sum_{1\leq i<j\leq n} [x_i, x_j] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_l + \sum_{1\leq i,j\leq n} ([x_l, x_i] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_j + [x_i, x_j] \otimes [x_l, x_i] \otimes x_j)\}_{1\leq l\leq n}.$$

(ii) En $\Lambda^3 V(n)$ *consideramos la base dada por las clases en la homología de los ciclos*

$$\{\sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \wedge [x_{i_{\sigma(3)}}, x_l] \otimes x_l + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_l] \wedge [x_{i_{\sigma(2)}}, x_l] \otimes x_{i_{\sigma(3)}}\}_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n}.$$

(iii) En $\Lambda^5 V(n)$ *consideramos la base dada por las clases en la homología de los ciclos*

$$\{\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_5} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \otimes x_{i_{\sigma(5)}}\}_{1\leq i_1<i_2<i_3<i_4<i_5\leq n}.$$

Demostración. La demostración de que las clases mencionadas son ciclos es directa aunque engorrosa. Además, es sencillo ver que son base en la homología, ya que pertenecen a $\Lambda^2 V(n) \otimes \Lambda^2 V(n) \otimes V(n)$, donde no existen bordes por cuestiones de grado. Por lo tanto, basta ver que son linealmente independientes como elementos del espacio vectorial de ciclos, lo que es directo pero tedioso. □

Proposición 4.6.17 (cf. [Mov], Prop. 27). *Si consideramos el complejo de Chevalley-Eilenberg para la homología de $V(n)$ con coeficientes en $A \otimes A$, el elemento*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i) \otimes x_i \in A \otimes A \otimes V(n)$$

es un generador de $\operatorname{Tor}_{1,2}^{S(V(n))}(A, A)$. Más aún, x es un generador de $\operatorname{Tor}_1^{S(V(n))}(A, A)$ como $S(V(n))$-módulo.

Demostración. Es fácil ver que x es un ciclo. Además, por cuestiones de grado, no puede ser un borde, ya que no hay bordes en $\operatorname{Tor}_{1,2}^{S(V(n))}(A, A)$. Por lo tanto, como x es de grado 2 y $\operatorname{Tor}_1^{S(V(n))}(A, A) \simeq A[-2]$, x debe ser un generador de $\operatorname{Tor}_1^{S(V(n))}(A, A)$ como $S(V(n))$-módulo. □

Sea C una k-álgebra conmutativa y N un C-módulo a derecha. Sean $c_1, \dots, c_n \in C$. A partir de la acción de estos elementos, resulta una acción del álgebra de Lie $V(n)$ en C y en N, compatible con la acción de C en N. Obtenemos una aplicación $S(V(n))$-lineal graduada homogénea de grado 0 de complejos a partir del morfismo $N \otimes C \to N$

$$N \otimes \Lambda^p V(n) \otimes C \otimes \Lambda^q V(n) \to N \otimes \Lambda^{p+q} V(n),$$

que induce un morfismo $S(V(n))$-lineal graduado homogéneo de grado 0 en la homología

$$H_p(V(n), N) \otimes H_q(V(n), C) \to H_{p+q}(V(n), N).$$

Estamos interesados en el caso $C = A \otimes A$ y $N = M(n) \otimes M(n)$. Si elegimos $c_i = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$, $i = 1, \dots, n$, la acción de $V(n)$ en $A \otimes A$ y en $M(n) \otimes M(n)$ es la diagonal. Por lo tanto, obtenemos un morfismo $S(V(n))$-lineal graduado homogéneo de grado 0

$$M(n) \otimes M(n) \otimes \Lambda^p V(n) \otimes A \otimes A \otimes \Lambda^q V(n) \to M(n) \otimes M(n) \otimes \Lambda^{p+q} V(n), \tag{4.6.22}$$

y, en particular, resulta la aplicación $S(V(n))$-lineal graduada homogénea de grado 0

$$H_0(V(n), M(n) \otimes M(n)) \otimes H_1(V(n), A \otimes A) \to H_1(V(n), M(n) \otimes M(n)). \tag{4.6.23}$$

Proposición 4.6.18 (cf. [Mov], Prop. 34). *El conúcleo del morfismo* (4.6.23) *es $\Lambda^5 V(n) \oplus \Lambda^3 V(n) \oplus V(n)$.*

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 4.6.13.

En principio, por la Proposición 4.6.16, $\operatorname{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n))$ tiene una base de elementos de grado 1. Por la Proposición 4.6.17, el generador de $\operatorname{Tor}_1^{S(V(n))}(A, A)$ posee grado 2, y por lo tanto, por cuestiones de grado, $\operatorname{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \subseteq H_1(V(n), M(n) \otimes M(n))$ no puede estar en la imagen de (4.6.23).

Veamos ahora que las demás componentes homogéneas $\operatorname{Tor}_{1,j}^{S(V(n))}(M(n), M(n))$, $j > 1$ de $H_1(V(n), M(n) \otimes M(n))$ están en la imagen del morfismo (4.6.23). Para ello consideramos los complejos de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos siguientes. Trataremos solamente el caso $n \geq 4$, ya que el caso $n = 3$ es análogo.

Dado $i \in \mathbb{N}_0$, se definen los complejos de cocadenas de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}[i]^\bullet$ y $\mathcal{G}[i]^\bullet$ dados por

$$\mathcal{F}[i]^q = \begin{cases} ((M(n) \otimes M(n))[i+q] \otimes \Lambda^{-q} V(n))^\sim, & \text{si } -n \leq q \leq 0, \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \tag{4.6.24}$$

y

$$\mathcal{G}[i]^q = \begin{cases} ((A \otimes A)[i+q] \otimes \Lambda^{-q} V(n))^\sim, & \text{si } -n \leq q \leq 0, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.25}$$

Ambos complejos están provistos de las diferenciales asociadas a las diferenciales del complejo homológico de Chevalley-Eilenberg de $V(n)$ con coeficientes en $M(n) \otimes M(n)$ y $A \otimes A$, respectivamente.

Como $\mathcal{F}[i]^\bullet$ y $\mathcal{G}[i]^\bullet$ son acotados para todo $i \in \mathbb{N}_0$, de la misma forma que antes podemos considerar la sucesión espectral (débilmente convergente) de Grothendieck asociada al funtor de secciones globales (cf. [Wei], 5.7.9, 5.7.10)

$$^{II}E_2^{p,q}[i] = H^p(X, H^q(\mathcal{F}[i]^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet),$$

y lo mismo para $\mathcal{G}[i]^\bullet$. La sucesión espectral asociada a $\mathcal{G}[i]^\bullet$ se denominará $^{II}(E')_\bullet^{q,p}[i]$.

Como el funtor $(-)^\sim$ es exacto, la cohomología del complejo de haces $\mathcal{G}[i]^\bullet$ es $(\mathrm{Tor}_{\bullet,i}^{S(V(n))}(A,A))^\sim$, y por lo tanto,

$$H^p(\mathcal{G}[i]^\bullet) = \begin{cases} \mathcal{O}_X[i], & \text{si } i = 0, \\ \mathcal{O}_X[i-2], & \text{si } i = 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathcal{F}[i]^\bullet = M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}[i]^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim$, la cohomología del complejo de haces $\mathcal{F}[i]^\bullet$ es

$$H^p(\mathcal{G}[i]^\bullet) = \begin{cases} M(n)[i]^\sim, & \text{si } i = 0, \\ M(n)[i-2]^\sim, & \text{si } i = 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

A su vez, aplicando el funtor $(-)^\sim$ al morfismo (4.6.22), resulta un morfismo de complejos

$$\mathcal{F}[i]^p \otimes \mathcal{G}[j]^q \to \mathcal{F}[i+j]^{p+q},$$

que induce una aplicación de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$H^p(\mathcal{F}[i]) \otimes H^q(\mathcal{G}[j]) \to H^{p+q}(\mathcal{F}[i+j]).$$

Al tomar secciones globales hallamos una aplicación

$$^{II}E_2^{p,q}[i] \otimes {}^{II}(E')_2^{p',q'}[j] \to {}^{II}E_2^{p+p',q+q'}[i+j].$$

En particular, resulta el morfismo de $S(V(n))$-módulos graduados homogéneo de grado 0

$$^{II}E_2^{0,1}[i] \otimes {}^{II}(E')_2^{0,0}[j] \to {}^{II}E_2^{0,1}[i+j],$$

es decir,

$$H^0(X, \mathcal{O}_X[i-2]) \otimes H^0(X, (M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[j]) \to H^0(X, (M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[i+j-2]). \tag{4.6.26}$$

Como $H^0(X, \mathcal{O}_X[i-2]) = A_{i-2}$, resulta no nulo si $i \geq 2$. Luego, el morfismo anterior es nulo para $i \leq 1$. Por cuestiones de grado resulta entonces que $H^0(X, (M(n)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} M(n)^\sim)[-1]) = V(n) \oplus \Lambda^3 V(n)$ no está en la imagen de la aplicación anterior.

Además, como el morfismo (4.6.26) coincide con la acción de A en $M(n)$, vemos que es suryectivo para $i \geq 2$.

Como las sucesiones espectrales $^{II}E_2^{p,q}$ y $^{II}(E')_2^{p',q'}$ colapsan, se obtiene que

$$\mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}[j]^\bullet) = {}^{II}E_2^{0,0}[j],$$
$$\mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{F}[j]^\bullet) = {}^{II}E_2^{0,-1}[j],$$

y del mismo modo para $^{II}(E')_2^{p',q'}$.

Por otro lado, dado $i \in \mathbb{N}_0$, se definen los complejos de cocadenas de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos $\bar{\mathcal{F}}[i]^\bullet$ y $\bar{\mathcal{G}}[i]^\bullet$ dados por

$$\bar{\mathcal{F}}[i]^q = \begin{cases} (\mathrm{Tor}_{-q}(M(n),k) \otimes M(n)[q])^\sim[i], & \text{si } -n \leq q \leq 0, \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \tag{4.6.27}$$

y

$$\bar{\mathcal{G}}[i]^q = \begin{cases} (\mathrm{Tor}_{-q}(A,k) \otimes A[q])^\sim[i], & \text{si } -n \leq q \leq 0, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.6.28}$$

Los dos complejos están provistos de las diferenciales asociadas a las diferenciales del complejo de Koszul.

Como $\bar{\mathcal{F}}[i]^\bullet$ y $\bar{\mathcal{G}}[i]^\bullet$ son acotados para todo $i \in \mathbb{N}_0$, de la misma forma que antes podemos considerar la sucesión espectral (débilmente convergente) de Grothendieck asociada al funtor de secciones globales (cf. [Wei], 5.7.9, 5.7.10)

$$\begin{aligned} {}^{I}\bar{E}_2^{q,p}[i] &= H^q(H^p(X, \mathcal{F}[i]^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet), \\ {}^{II}\bar{E}_2^{p,q}[i] &= H^p(X, H^q(\mathcal{F}[i]^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet), \end{aligned}$$

y lo mismo para $\mathcal{G}[i]^\bullet$. La sucesión espectral asociada a $\mathcal{G}[i]^\bullet$ se denominará ${}^{II}(\bar{E}')_\bullet^{q,p}[i]$ y ${}^{II}(\bar{E}')_\bullet^{q,p}[i]$, respectivamente.

Vemos inmediatamente que ${}^{II}\bar{E}_\bullet^{q,p}[i] = {}^{II}E_\bullet^{q,p}[i]$ y ${}^{II}(\bar{E}')_2^{q,p}[i] = {}^{II}(E')_\bullet^{q,p}[i]$. Además las sucesiones espectrales asociadas a $\mathcal{F}[i]^\bullet$ y a $\bar{\mathcal{F}}[i]^\bullet$ tienen el mismo límite. Lo mismo ocurre para las sucesiones espectrales asociadas a $\mathcal{G}[i]^\bullet$ y a $\bar{\mathcal{G}}[i]^\bullet$.

Del mismo modo que en la demostración de la Proposición 4.6.13, el segundo paso de la primera sucesión espectral ${}^{I}\bar{E}_2^{q,p}[i]$ es de la forma

$$ {}^{I}\bar{E}_2^{p,q}[0] = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)), & \text{si } p = 0, q = 0, \\ \Lambda^{i+4}V(n) \oplus k, & \text{si } p = 1, q = -2, \\ k, & \text{si } p = n-3, q = -n+2, \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \tag{4.6.29}$$

y

$$ {}^{I}\bar{E}_2^{p,q}[i] = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{-q,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)), & \text{si } p = 0, -i \leq q \leq 0, \\ \Lambda^{i+4}V(n), & \text{si } p = 1, q = -i-2, \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \tag{4.6.30}$$

donde $i \in \mathbb{N}$. De forma análoga,

$$ {}^{I}(\bar{E}')_2^{p,q}[i] = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{-q,i}^{S(V(n))}(A, A), & \text{si } p = 0, -i \leq q \leq 0, \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \tag{4.6.31}$$

para $i \in \mathbb{N}_0$.

Por las consideraciones anteriores, vemos que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}[0]^\bullet)/(\Lambda^4 V(n) \oplus k), \\ &\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{F}[1]^\bullet) \oplus \Lambda^5 V(n), \\ &\mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}[i]^\bullet), \forall\, i \in \mathbb{N}, \\ &\mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{F}[i]^\bullet), \forall\, i \geq 2, \\ &\mathrm{Tor}_{i,i}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \simeq \Lambda^{i+4}V(n), \forall\, i \geq 2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tor}_{0,0}^{S(V(n))}(A, A) \simeq \mathbb{H}^0(X, \mathcal{G}[0]^\bullet), \\ &\mathrm{Tor}_{1,1}^{S(V(n))}(A, A) \simeq \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{G}[1]^\bullet), \\ &\mathrm{Tor}_{0,i}^{S(V(n))}(A, A) \simeq \mathbb{H}^0(X, \mathcal{G}[i]^\bullet), \forall\, i \in \mathbb{N}, \\ &\mathrm{Tor}_{1,i}^{S(V(n))}(A, A) \simeq \mathbb{H}^{-1}(X, \mathcal{G}[i]^\bullet), \forall\, i \geq 2. \end{aligned}$$

Empleando los isomorfismos anteriores y el morfismo (4.6.26), resulta que el morfismo

$$\mathrm{Tor}_{1,2}^{S(V(n))}(A, A) \otimes \mathrm{Tor}_{0,j}^{S(V(n))}(M(n), M(n)) \to \mathrm{Tor}_{1,j+2}^{S(V(n))}(M(n), M(n))$$

es suryectivo para todo $j \in \mathbb{N}_0$. La proposición queda demostrada. □

De manera análoga se puede hallar el núcleo de (4.6.23).

Proposición 4.6.19. *Sea $n \geq 3$. El núcleo de la aplicación* (4.6.23) *es isomorfo (isomorfismo de k-espacios vectoriales graduados, homogeneo de grado 0) a*

$$\Lambda^4(V(n)[1]) \oplus \Lambda^2(V(n)[1]) \oplus k,$$

donde consideramos para cada sumando directo las bases dadas por las clases de homología de los siguientes ciclos en el complejo de Chevalley-Eilenberg $C_0(V(n), M(n) \otimes_{S(V(n))} M(n))$:

(i) para k:

$$\Big\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j] \otimes [x_i, x_j] \Big\},$$

(ii) para $\Lambda^2 V(n)$:

$$\Big\{ \sum_{l=1}^{n} [x_i, x_l] \wedge [x_j, x_l] \Big\}_{1 \leq i < j \leq n},$$

(iii) para $\Lambda^4 V(n)$:

$$\Big\{ \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_4} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \Big\}_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n}.$$

Corolario 4.6.20 (cf. [Mov], Coro. 35)**.** *Todo elemento de $H_1(V(n), M(n) \otimes M(n))$ es la clase de una combinación lineal de ciclos dados por*

(i) En $V(n)$

$$\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_l + \sum_{1 \leq i, j \leq n} ([x_l, x_i] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_j + [x_i, x_j] \otimes [x_l, x_i] \otimes x_j) \}_{1 \leq l \leq n}.$$

(ii) En $\Lambda^3 V(n)$

$$\{ \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \wedge [x_{i_{\sigma(3)}}, x_l] \otimes x_l + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_l] \wedge [x_{i_{\sigma(2)}}, x_l] \otimes x_{i_{\sigma(3)}} \}_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n}.$$

(iii) En $\Lambda^5 V(n)$

$$\{ \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_5} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \otimes x_{i_{\sigma(5)}} \}_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq n}.$$

(iv) Los elementos de $H_{1,j}(V(n), M(n) \otimes M(n))$, con $j \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{l \in L} (m_l x_i \otimes m'_l - m_l \otimes m'_l x_i) \otimes x_i,$$

donde L es un conjunto finito de índices y $m_l, m'_l \in M(n)$ son homogéneos de grado d_l y d'_l tales que $d_l + d'_l = j - 2$, para todo $i \in L$. Denominaremos ***genéricos*** *a estos últimos elementos.*

Demostración. Por la Proposición anterior, todo elemento de $H_1(V(n), M(n) \otimes M(n))$ es suma de un elemento en $\Lambda^5 V(n) \oplus \Lambda^3 V(n) \oplus V(n)$ y un elemento en la imagen del morfismo (4.6.23). Por la Proposición 4.6.17,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i) \otimes x_i$$

es un generador de $\mathrm{Tor}_1^{S(V(n))}(A, A)$ como $S(V(n))$-módulo, y como el morfismo (4.6.23) es $S(V(n))$-lineal, los elementos de la imagen de (4.6.23) son de la forma descripta en el ítem (iv). $\square$

4.7 Homología de Hochschild y homología cíclica del álgebra de Yang-Mills

En esta sección vamos a calcular la homología de Hochschild y cíclica del álgebra de Yang-Mills con n generadores. Como la homología de Hochschild de $\mathrm{YM}(2)$ se calculó en la Sección 3.1, Ejemplo 3.2.6, nos vamos a concentrar en el caso $n \geq 3$, salvo que se diga expresamente lo contrario.

En primer lugar, será necesario demostrar previamente algunos resultados auxiliares, que veremos en la primera subsección acerca de la homología $H^\bullet(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}))$. En la Subsección 4.7.2 usaremos estos cálculos para hallar el grupo de cohomología $HH^1(\mathrm{YM}(n))$. Finalmente, en la Subsección 4.7.3 presentaremos el cálculo del resto de las homologías de Hochschild de $YM(n)$ a partir del estudio de la homología cíclica de álgebras graduadas.

4.7.1 Cálculo de la homología $H^\bullet(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}))$, para $\bullet = 0, 1$

Análisis de la sucesión espectral

En esta subsección vamos a calcular $H^\bullet(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}))$ para $\bullet = 0, 1$ y abreviaremos $I = \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)})$.

Consideramos la filtración creciente $F_\bullet I$ de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos graduados de I compatible con la acción de $\mathfrak{so}(n)$ dada de la forma siguiente

$$F_p I = \begin{cases} I, & \text{si } p \geq -1, \\ I^{-p}, & \text{si } p \leq -2. \end{cases}$$

Notar que la filtración anterior es exhaustiva y Hausdorff.

Empleando el complejo $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), I)$ (también es posible usar el complejo de Chevalley-Eilenberg $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), I)$), vemos que la filtración anterior induce una filtración creciente $F_\bullet C_\bullet(\mathrm{YM}(n), I)$ exhaustiva y Hausdorff del complejo $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), I)$ (resp. $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), I)$) dada por $F_\bullet C_\bullet(\mathrm{YM}(n), I) = C_\bullet(\mathrm{YM}(n), F_\bullet I)$ (resp. $F_\bullet C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), I) = C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), F_\bullet I)$). Por lo tanto, obtenemos una sucesión espectral cuyo paso cero es

$$E^0_{p,q} = F_p C_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q} = C_{p+q}(\mathrm{YM}(n), F_p I)/C_{p+q}(\mathrm{YM}(n), F_{p-1} I) \simeq C_{p+q}(\mathrm{YM}(n), F_p I/F_{p-1} I).$$

Además, a partir del isomorfismo de álgebras graduadas $\mathrm{TYM}(n) \simeq TW(n)$, resulta el isomorfismo de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos graduados homogéneo de grado cero $\mathfrak{so}(n)$-equivariante

$$F_p I/F_{p-1} I = \begin{cases} I^{-p}/I^{-p+1} \simeq W(n)^{\otimes(-p)}, & \text{si } p \leq -1, \\ 0, & \text{si } p \geq 0. \end{cases}$$

Esto implica que la sucesión espectral anterior puede escribirse de la forma

$$E^0_{p,q} \simeq C_{p+q}(\mathrm{YM}(n), F_p I/F_{p-1} I) \simeq \begin{cases} C_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), I^{-p}/I^{-p+1}) \simeq C_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes(-p)}), & \text{si } p \leq -1, \\ 0, & \text{si } p \geq 0, \end{cases}$$

En consecuencia,

$$E^1_{p,q} \simeq \begin{cases} H_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), I^{-p}/I^{-p+1}) \simeq H_{p+q}(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes(-p)}), & \text{si } p \leq -1, \\ 0, & \text{si } p \geq 0. \end{cases}$$

Los isomorfismos anteriores son homogéneos de grado 0 y $\mathfrak{so}(n)$-equivariantes.

Por el Corolario 4.6.8, como $H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$, para $i \geq 2$, vemos que $E^1_{p,2-p} = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$, salvo para $p = -1$. A su vez, por la Proposición 4.6.2, $H_3(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes i}) = 0$, para $i \geq 1$, vemos entonces que $E^1_{p,3-p} = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, por el Corolario 4.6.9 la sucesión espectral es acotada y por lo tanto convergente. Luego, $H_3(\mathfrak{ym}(n), I) = 0$.

Gráficamente

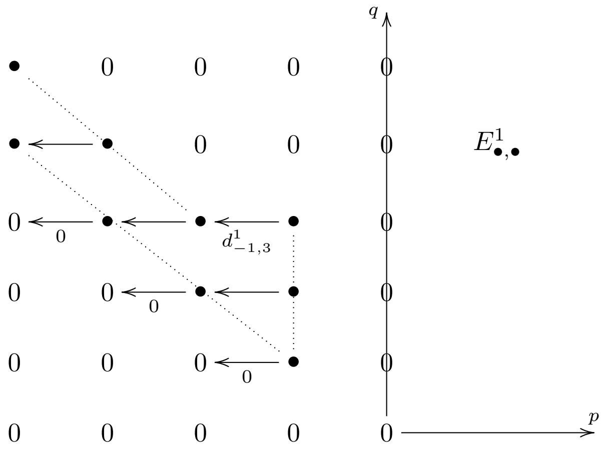

Figura 4.1: Primer paso $E^1_{\bullet,\bullet}$ de la sucesión espectral. Las líneas punteadas indican los límites entre los cuales la sucesión espectral está acotada

Vamos a estudiar la diferencial

$$d^1_{-1,3} : E^1_{-1,3} = H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)) \to H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes 2}) = E^1_{-2,3}.$$

Se va a demostrar en la Proposición 4.7.8 del parágrafo siguiente que el núcleo de $d^1_{-1,3}$ es $V(n)[-4]$, cuya base está dada por el Corolario 4.6.20. Esto implica directamente que $E^2_{-1,3} \simeq V(n)[-4]$ (isomorfismo homogéneo de grado 0 y de $\mathfrak{so}(n)$-módulos). Por lo tanto, $H_2(\mathfrak{ym}(n), I)$ es un subcociente de $V(n)[-4]$. Sin embargo, como la sucesión espectral está definida en la categoría de $\mathfrak{so}(n)$-módulos debe ser un subcociente como $\mathfrak{so}(n)$-módulo. Como $V(n)[-4]$ es un $\mathfrak{so}(n)$-módulo irreducible, sólo puede ser $H_2(\mathfrak{ym}(n), I) \simeq V(n)[-4]$ o $H_2(\mathfrak{ym}(n), I) = 0$. El último caso no puede ser, ya que, dado $i = 1, \dots, n$, los ciclos

$$\sum_{l=1} [x_i, x_l] \otimes x_l \in C_2(\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{tym}(n)) \subseteq C_2(\mathfrak{ym}(n), I)$$

considerados en el Lema 4.7.2 no son triviales, por cuestiones de grado homológico. Más aún, de la misma forma que en esa proposición, los ciclos anteriores dan lugar a un conjunto de clases de homología linealmente independiente.

Por lo tanto, hemos obtenido que

Teorema 4.7.1 (cf. [Mov], Prop. 37). *Si $n \geq 3$, $H_2(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)})) = H_2(\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{tym}(n))$ es isomorfo a $V(n)[-4]$ y $H_3(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)}))$ es nulo.*

Cálculo del núcleo de $d^1_{-1,3}$

En esta subsección vamos a probar que $\mathrm{Ker}(d^1_{-1,3}) \simeq V(n)[-4]$.

Utilizando el isomorfismo de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos graduados homogéneo de grado cero $W(n)^{\otimes 2} \simeq \Lambda^2 W(n) \oplus S^2 W(n)$, y la aplicación suryectiva $B_1' : H_1(V(n), W(n)^{\otimes 2}) \to H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n))$ dada en el Teorema 4.6.4 (cf. Proposición 4.6.6), si definimos $H_2^s(\mathfrak{ym}(n), W(n)) = \mathrm{Im}(B_1'|_{S^2 W(n)})$ y $H_2^a(\mathfrak{ym}(n), W(n)) = \mathrm{Im}(B_1'|_{\Lambda^2 W(n)})$, resulta que $H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)) = H_2^s(\mathfrak{ym}(n), W(n)) + H_2^a(\mathfrak{ym}(n), W(n))$.

El siguiente lema nos será de utilidad

Lema 4.7.2 (cf. [Mov], Prop. 38). *Sea $x = \sum_{i=1}^n w_i \otimes w_i' \otimes x_i$ un ciclo en $W(n)^{\otimes 2} \otimes V(n)$ que representa un elemento $\bar{x}$ de $H_1(V(n), W(n)^{\otimes 2})$, donde $w_i, w_i' \in W(n)$, $\forall i = 1, \dots, n$. De acuerdo con* (4.5.5)*, podemos escribir*

$$[x_i, w_i'] = x_i.w_i' + \sum_{l \in L_i} [v_{i,l}, v_{i,l}'],$$

donde L_i es un conjunto finito de índices y $v_{i,l}, v'_{i,l} \in \mathfrak{tym}(n)$, para todo $i = 1, \dots, n$, $l \in L_i$. Entonces $B'_1(\bar{x})$ es la clase en $H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n))$ del siguiente ciclo en $W(n) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{ym}(n)$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes w'_i \wedge x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l \in L_i} w_i \otimes v_{i,l} \wedge v'_{i,l}.$$

Demostración. Denotaremos $\tilde{B}'_1(x)$ al elemento que representa a $B'_1(\bar{x})$ dado en el enunciado anterior. Es directo ver que $\tilde{B}'_1(x)$ es un ciclo en $W(n) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{ym}(n)$.

Por el Corolario 4.6.20, x es combinación lineal de elementos de los conjuntos siguientes

(i) $\{\sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_l + \sum_{1 \leq i,j \leq n} ([x_l, x_i] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_j + [x_i, x_j] \otimes [x_l, x_i] \otimes x_j)\}_{1 \leq l \leq n}$,

(ii) $\{\sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \wedge [x_{i_{\sigma(3)}}, x_l] \otimes x_l + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_l] \wedge [x_{i_{\sigma(2)}}, x_l] \otimes x_{i_{\sigma(3)}}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n}$,

(iii) $\{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_5} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \otimes x_{i_{\sigma(5)}}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq n}$,

(iv) $\sum_{i=1}^{n} (m x_i \otimes m' - m \otimes m' x_i) \otimes x_i$, donde $m, m' \in M$ son homogéneos de grado d y d' tales que $d + d' = j - 2$,

que pertenecen a $V(n)$, $\Lambda^3 V(n)$, $\Lambda^5 V(n)$ o son genéricos, respectivamente. Estos elementos pertenecen a $W(n)^{\otimes 2} \otimes V(n)$.

Para hallar la imagen bajo B'_1 de estos elementos es necesario inspeccionar el complejo doble (4.6.1) dado en la Observación 4.6.3 cuya sucesión espectral degenera en una sucesión exacta larga. En ese caso, la aplicación B'_1 está dada por (4.6.3), en la Observación 4.6.5. Sin embargo, el codominio de (4.6.3) es el complejo $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W(n))$. Para obtener un elemento en el complejo de Chevalley-Eilenberg $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), W(n))$, es necesario aplicar el morfismo de comparación (3.2.9) dado al final de la Subsección 3.2.1. La demostración es bastante engorrosa, ya que requiere analizar cada caso en particular. Más aún, el procedimiento anterior no da exactamente el ciclo del enunciado, sino que difiere de él en general en un borde.

Por otro lado, $H_1(V(n), W(n)^{\otimes 2})$ está generado como $S(V(n))$-módulo por los ciclos dados por los ítems (i), (ii), (iii) y

$$\sum_{i=1}^{n} ([x_j, x_l] x_i \otimes [x_{j'}, x_{l'}] - [x_j, x_l] \otimes [x_{j'}, x_{l'}] x_i) \otimes x_i,$$

ya que $H_1(V(n), A^{\otimes 2})$ está generado como $S(V(n))$-módulo por

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i) \otimes x_i$$

y $W(n)$ está generado por $\{[x_i, x_j]\}_{1 \leq i < j \leq n}$. Como el morfismo del enunciado es $S(V(n))$-lineal, basta demostrar que el procedimiento descripto en el párrafo anterior coincide con el morfismo del enunciado de la proposición en esos casos.

Diremos en cada caso cómo es la aplicación B'_1 dada por (4.6.3) con imagen en $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W(n))$, y la correspondiente con imagen en $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), W(n))$, al aplicar el morfismo de comparación dado al final de la Subsección 3.2.1. Finalmente, explicitaremos los bordes necesarios para obtener $\tilde{B}'_1$ a partir de B'_1.

Dado l, con $1 \leq l \leq n$, sea

$$x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_l + \sum_{1 \leq i,j \leq n} ([x_l, x_i] \otimes [x_i, x_j] \otimes x_j + [x_i, x_j] \otimes [x_l, x_i] \otimes x_j).$$

En este caso, la imagen de B'_1 en $C_\bullet(\mathrm{YM}(n), W(n))$ es

$$\sum_{j=1}^{n} [x_l, x_j] \otimes x_j$$

y al aplicar η dado en (3.2.9), resulta

$$\sum_{i,j=1}^{n} ([x_l, x_j] x_l \otimes x_l \wedge x_j + [x_l, x_j] \otimes x_l \wedge [x_l, x_j]).$$

Por otro lado, como $[x_l,[x_i,x_j]] = x_l.[x_i,x_j]$ por cuestiones de grado homológico, entonces

$$\tilde{B}'_1(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n}[x_i,x_j]\otimes[x_i,x_j]\wedge x_l + \sum_{1\leq i,j\leq n}([x_l,x_i]\otimes[x_i,x_j]\wedge x_j + [x_i,x_j]\otimes[x_l,x_i]\wedge x_j).$$

En este caso,

$$\tilde{B}'_1(x) = B'_1(x) - d_3^{\mathrm{CE}}(\sum_{1\leq j<i\leq n}[x_i,x_j]\otimes x_l\wedge x_i\wedge x_j).$$

Dados $1\leq i_1<i_2<i_3\leq n$, sea

$$x = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3}\epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\wedge[x_{i_{\sigma(3)}},x_l]\otimes x_l + \sum_{l=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3}\epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}},x_l]\wedge[x_{i_{\sigma(2)}},x_l]\otimes x_{i_{\sigma(3)}}.$$

La imagen de este elemento bajo B'_1 en $C_\bullet(\mathrm{YM}(n),W(n))$ es

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{A}_3}[x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\otimes x_{i_{\sigma(3)}}$$

y al aplicar el morfismo η, resulta

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{A}_3}([x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]x_i\otimes x_i\wedge x_{i_{\sigma(3)}} + [x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\otimes x_i\wedge[x_i,x_{i_{\sigma(3)}}].$$

Usando nuevamente que $[x_l,[x_i,x_j]] = x_l.[x_i,x_j]$, entonces

$$\begin{aligned}\tilde{B}'_1(x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{A}_3}&([x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\otimes[x_{i_{\sigma(3)}},x_l]\wedge x_l + [x_{i_{\sigma(1)}},x_l]\otimes[x_{i_{\sigma(2)}},x_l]\wedge x_{i_{\sigma(3)}}\\ &-[x_{i_{\sigma(3)}},x_l]\otimes[x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\wedge x_l - [x_{i_{\sigma(2)}},x_l]\otimes[x_{i_{\sigma(1)}},x_l]\wedge x_{i_{\sigma(3)}}).\end{aligned}$$

En este caso,

$$\tilde{B}'_1(x) = B'_1(x) + d_3^{\mathrm{CE}}(\sum_{l=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{A}_3}[x_{i_{\sigma(1)}},x_l]\otimes x_l\wedge x_{i_{\sigma(2)}}\wedge x_{i_{\sigma(3)}}).$$

Dados $1\leq i_1<i_2<i_3<i_4<i_5\leq n$, sea

$$x = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_5}\epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\otimes[x_{i_{\sigma(3)}},x_{i_{\sigma(4)}}]\otimes x_{i_{\sigma(5)}}.$$

Empleando la identidad de Jacobi, la imagen de este elemento bajo B'_1 es cero tanto en $C_\bullet(\mathrm{YM}(n),W(n))$ como en el complejo de Chevalley-Eilenberg $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n),W(n))$.

Resulta

$$\tilde{B}'_1(x) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_5}\epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\otimes[x_{i_{\sigma(3)}},x_{i_{\sigma(4)}}]\wedge x_{i_{\sigma(5)}},$$

y entonces

$$\tilde{B}'_1(x) = -d_3^{\mathrm{CE}}(\frac{1}{3}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_5}\epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}},x_{i_{\sigma(2)}}]\otimes x_{i_{\sigma(3)}}\wedge x_{i_{\sigma(4)}}\wedge x_{i_{\sigma(5)}}).$$

Por otro lado, dados $1\leq i<j\leq n$ y $w\in W(n)$, sea

$$x = \sum_{l=1}^{n}(wx_l\otimes[x_i,x_j] - w\otimes[x_i,x_j].x_l)\otimes x_l.$$

La imagen de este elemento bajo B'_1 en $C_\bullet(\mathrm{YM}(n),W(n))$ es $(wx_j\otimes x_i - wx_i\otimes x_j)$, y al aplicar η, resulta

$$\sum_{l=1}^{n}(wx_jx_l\otimes x_l\wedge x_i + wx_j\otimes x_l\wedge[x_l,x_i] - wx_ix_l\otimes x_l\wedge x_j - wx_i\otimes x_l\wedge[x_l,x_j]).$$

En este caso sí debemos considerar términos en $[\mathfrak{tym}(n), \mathfrak{tym}(n)]$:

$$[x_l, [[x_i, x_j], x_l] = -[[x_l, [x_l, x_i]], x_j] - [x_i, [x_l, [x_l, x_j]]] - 2[[x_l, x_i], [x_l, x_j]],$$

y por lo tanto,

$$\tilde{B}_1'(x) = \sum_{l=1}^{n} (wx_l \otimes [x_i, x_j] \wedge x_l - w \otimes [x_i, x_j].x_l \wedge x_l + 2w \otimes [x_l, x_i] \wedge [x_l, x_j]).$$

La diferencia está dada por

$$\tilde{B}_1'(x) = B_1'(x) + d_3^{\mathrm{CE}}(\sum_{l=1}^{n} (w \otimes [x_i, x_l] \wedge x_j \wedge x_l - w \otimes [x_j, x_l] \wedge x_i \wedge x_l - wx_l \otimes x_i \wedge x_j \wedge x_l)).$$

La proposición queda demostrada. □

Podemos aplicar la proposición anterior de la forma siguiente. Sea $\bar{x} \in H_1(V(n), S^2M(n))$ la clase de un ciclo de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes_s w_i' \otimes x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (w_i \otimes w_i' \otimes x_i + w_i' \otimes w_i \otimes x_i).$$

Vemos de forma inmediata que

$$\tilde{B}_1'(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (w_i \otimes w_i' \wedge x_i + w_i' \otimes w_i \wedge x_i) + \sum_{l \in L_i} w_i \otimes v_{i,l} \wedge v_{i,l}' + \sum_{l' \in L_i'} w_i' \otimes u_{i,l'} \wedge u_{i,l'}', \tag{4.7.1}$$

donde L_i y L_i' son dos conjuntos finitos de índices y $v_{i,l}, v_{i,l}', u_{i,l'}, u_{i,l'}' \in \mathfrak{tym}(n)$ satisfacen que

$$[x_i, w_i] = x_i.w_i + \sum_{l' \in L_i'} [u_{i,l'}, u_{i,l'}'], \tag{4.7.2}$$

$$[x_i, w_i'] = x_i.w_i' + \sum_{l \in L_i} [v_{i,l}, v_{i,l}'], \tag{4.7.3}$$

para todo $i = 1, \dots, n$, $l \in L_i$ y $l' \in L_i'$.

Por otro lado, si $\bar{x} \in H_1(V(n), \Lambda^2 M(n))$ es la clase de un ciclo de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} w_i \wedge w_i' \otimes x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (w_i \otimes w_i' \otimes x_i - w_i' \otimes w_i \otimes x_i),$$

resulta que

$$\tilde{B}_1'(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (w_i \otimes w_i' \wedge x_i - w_i' \otimes w_i \wedge x_i) + \sum_{l \in L_i} w_i \otimes v_{i,l} \wedge v_{i,l}' - \sum_{l' \in L_i'} w_i' \otimes u_{i,l'} \wedge u_{i,l'}', \tag{4.7.4}$$

donde L_i y L_i' son dos conjuntos finitos de índices.

Proposición 4.7.3 (cf. [Mov], Prop. 39)**.** *La restricción*

$$d_{-1,3}^1|_{H_2^a(\mathfrak{ym}(n), W(n))} : H_2^a(\mathfrak{ym}(n), W(n)) \to H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes 2}).$$

es inyectiva. Más aún, $B_1' \circ I_2 \circ d_{-1,3}^1 : H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)) \to H_2^a(\mathfrak{ym}(n), W(n))$ es la proyección natural.

Demostración. Basta demostrar el segundo enunciado, ya que el primero es consecuencia del segundo.

La diferencial $d_{p,q}^1$ es el morfismo inducido de la diferencial del complejo $C_\bullet(\mathfrak{ym}(n), I)$, es decir, si $p \leq -1$ y $x \in I^{-p}/I^{-p+1} \otimes \Lambda^{p+q}\mathfrak{ym}(n)$ es un representante de la clase $\bar{x} \in E_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_pC_{p+\bullet}/F_{p-1}C_{p+\bullet})$, entonces $d_{p,q}^1(\bar{x})$ es la clase en $E_{p-1,q}^1$ de $d_{p+q}^{\mathrm{CE}}(x)$.

Sea $\bar{x} \in H_2^s(V(n), M(n))$ (resp. $\bar{x} \in H_2^a(V(n), M(n))$) la clase de un ciclo $x \in I/I^2 \otimes \Lambda^2\mathfrak{ym}(n)$. Empleando la identidad (4.7.4) (resp. (4.7.1)), podemos suponer que x es de la forma

$$x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} ((w_i \otimes w_i' \wedge x_i \pm w_i' \otimes w_i \wedge x_i) + \sum_{l \in L_i} w_i \otimes v_{i,l} \wedge v_{i,l}' \pm \sum_{l' \in L_i'} w_i' \otimes u_{i,l'} \wedge u_{i,l'}').$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d_2^{\mathrm{CE}}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} &\big(([w_i, w_i'] \otimes x_i - [w_i, x_i] \otimes w_i' - w_i \otimes [w_i', x_i]) \pm ([w_i', w_i] \otimes x_i - [w_i', x_i] \otimes w_i - w_i' \otimes [w_i, x_i]) \\ &+ \sum_{l \in L_i} ([w_i, v_{i,l}] \otimes v_{i,l}' - [w_i, v_{i,l}'] \otimes v_{i,l} - w_i \otimes [v_{i,l}, v_{i,l}']) \\ &\pm \sum_{l' \in L_i'} ([w_i', u_{i,l'}] \otimes u_{i,l'}' - [w_i', u_{i,l'}'] \otimes u_{i,l'} - w_i' \otimes [u_{i,l'}, u_{i,l'}'])\big). \end{aligned}$$

Si tomamos clase en $I^2/I^3 \otimes \mathfrak{ym}(n)$ y tenemos en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i x_i \otimes w_i' \pm w_i' \otimes x_i w_i + w_i \otimes w_i' x_i \pm w_i' x_i \otimes w_i) = 0,$$

resulta que $d_{-1,3}^1(\bar{x})$ es la clase de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Big(&\sum_{l \in L_i} ([w_i, v_{i,l}] \otimes v_{i,l}' - [w_i, v_{i,l}'] \otimes v_{i,l} - [v_{i,l}, v_{i,l}'] \otimes w_i) \\ &+ \sum_{l' \in L_i'} ([w_i', u_{i,l'}] \otimes u_{i,l'}' - [w_i', u_{i,l'}'] \otimes u_{i,l'} - [u_{i,l}, u_{i,l}'] \otimes w_i')\Big), \end{aligned}$$

si $\bar{x} \in H_2^s(V(n), M(n))$, y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Big(2[w_i, w_i'] \otimes x_i + &\sum_{l \in L_i} ([w_i, v_{i,l}] \otimes v_{i,l}' - [w_i, v_{i,l}'] \otimes v_{i,l} - [v_{i,l}, v_{i,l}'] \otimes w_i) \\ &- \sum_{l' \in L_i'} ([w_i', u_{i,l'}] \otimes u_{i,l'}' - [w_i', u_{i,l'}'] \otimes u_{i,l'} - [u_{i,l}, u_{i,l}'] \otimes w_i')\Big), \end{aligned}$$

si $\bar{x} \in H_2^a(V(n), M(n))$.

Como I_2 es el morfismo inducido en la homología por la aplicación $\mathrm{id}_{W(n)^{\otimes 2}} \otimes \pi$, donde $\pi : \mathfrak{ym}(n) \to V(n)$ es la proyección canónica (cf. Observación 4.6.5), obtenemos que $I_2 \circ d_{-1,3}^1(\bar{x})$ es la clase del elemento nulo si $\bar{x} \in H_2^s(V(n), M(n))$, y es la clase del elemento

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i \otimes w_i' \otimes x_i - w_i' \otimes w_i \otimes x_i),$$

si $\bar{x} \in H_2^a(V(n), M(n))$. Por lo tanto, $B_1' \circ I_2 \circ d_{-1,3}^1(\bar{x}) = 0$ si $\bar{x} \in H_2^s(V(n), M(n))$, y $B_1' \circ I_2 \circ d_{-1,3}^1(\bar{x}) = \bar{x}$, si $\bar{x} \in H_2^a(V(n), M(n))$. La proposición queda demostrada. □

Sea $\mathfrak{h}(n) = \mathfrak{tym}(n)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{tym}(n))$ el segundo término de la serie central descendente de $\mathfrak{tym}(n)$. Como espacio vectorial graduado, vemos que $\mathfrak{h}(n) \simeq W(n) \oplus \Lambda^2 W(n)$. Además, $\Lambda^2 W(n) = \mathcal{Z}(\mathfrak{h}(n))$ y $[\,,] : W(n) \wedge W(n) \to \Lambda^2 W(n)$ es un isomorfismo homogéneo de grado 0. Como $\mathfrak{tym}(n)$ es un álgebra de Lie libre, $\mathfrak{h}(n)$ es un álgebra de Lie nilpotente libre de índice de nilpotencia 2.

La acción adjunta de $\mathfrak{ym}(n)$ en $\mathfrak{tym}(n)$ induce una acción en el cociente $\mathfrak{h}(n)$. Por lo tanto, el espacio vectorial graduado $S^2\mathfrak{h}(n)$ posee una acción natural (graduada) de $\mathfrak{ym}(n)$, y podemos considerar el espacio vectorial graduado $(S^2\mathfrak{h}(n))_{\mathfrak{tym}(n)}$, que denotaremos $D(\mathfrak{h}(n))$. Por lo dicho antes, $D(\mathfrak{h}(n))$ posee una acción graduada de $\mathfrak{ym}(n)$ tal que $\mathfrak{tym}(n)$ actúa de forma nula, y en consecuencia, la acción graduada de $\mathfrak{ym}(n)$ en $D(\mathfrak{h}(n))$ induce una acción graduada de $V(n) = \mathfrak{ym}(n)/\mathfrak{tym}(n)$ en $D(\mathfrak{h}(n))$.

Si $a, b \in \mathfrak{h}(n)$, denotaremos $a \circ b \in D(\mathfrak{h}(n))$ a la clase de $a \otimes_s b$ en $D(\mathfrak{h}(n))$. En este caso,

$$x_i.(a \circ b) = [x_i, a] \circ b + a \circ [x_i, b].$$

Proposición 4.7.4 (cf. [Mov], Prop. 40). *Existe un sucesión exacta corta de $S(V(n))$-módulos*

$$0 \to \Lambda^3 W(n) \xrightarrow{\alpha} D(\mathfrak{h}(n)) \xrightarrow{\beta} S^2 W(n) \to 0,$$

donde β está inducido por la proyección natural de $S^2\mathfrak{h}(n) \to S^2W(n)$ y el morfismo α está dado por

$$w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \mapsto \bar{w}_1 \circ \overline{[w_2, w_3]},$$

donde $w_1, w_2, w_3 \in W(n)$.

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{h}(n) \simeq W(n) \oplus \Lambda^2W(n)$ como espacios vectoriales graduados. Por lo tanto, $D(\mathfrak{h}(n))$ es un cociente de $S^2\mathfrak{h}(n) \simeq S^2W(n) \oplus W(n) \otimes \Lambda^2W(n) \oplus S^2\Lambda^2W(n)$ (isomorfismo de espacios vectoriales graduados).

Sin embargo, el último sumando pertenece a $\mathfrak{tym}(n).S^2\mathfrak{h}(n)$. Esto se debe a que, dados $v, v', w, w' \in W(n)$,

$$v.(\bar{w} \circ \overline{[v', w']}) = \overline{[v, w]} \circ \overline{[v', w']} + \bar{w} \circ \overline{[v, [v', w']]} = \overline{[v, w]} \circ \overline{[v', w']},$$

ya que $[v, [v', w']] \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{tym}(n))$. En consecuencia, vemos que el subconjunto de $D(\mathfrak{h}(n))$ formado por las clases de los elementos del espacio vectorial $W(n) \otimes \Lambda^2W(n) \subseteq S^2\mathfrak{h}(n)$ es un $V(n)$-submódulo de $D(\mathfrak{h}(n))$.

Como $\mathfrak{tym}(n)$ es el álgebra de Lie libre generada por el espacio vectorial $W(n)$, se puede demostrar sin dificultad que $S^2W \cap \mathfrak{tym}(n).S^2\mathfrak{h}(n) = 0$. En consecuencia, la proyección $p : D(\mathfrak{h}(n)) \to S^2W(n)$ es un epimorfismo lineal. Este morfismo es $S(V(n))$-lineal, ya que las clases en $D(\mathfrak{h}(n))$ de los elementos en $W(n) \otimes \Lambda^2W(n) \subseteq S^2\mathfrak{h}(n)$ forman un $S(V(n))$-módulo y p es la proyección natural dada por el cociente por ese submódulo.

A su vez, dado $v \otimes_s [w, w']$ en la componente $W(n) \otimes \Lambda^2W(n) \subseteq S^2\mathfrak{h}(n)$, resulta que

$$v \otimes_s [w, w'] = -v \otimes_s [w', w] = -w' \otimes_s [w, v] + w.(v \otimes_s w').$$

Por lo tanto, el morfismo α está bien definido, y es claramente $S(V(n))$-lineal. Más aún, vemos que $\mathrm{Im}(\alpha)$ es igual a la clase en $D(\mathfrak{h}(n))$ de los elementos en $W(n) \otimes \Lambda^2W(n) \subseteq S^2\mathfrak{h}(n)$. La inyectividad de α se sigue de que $\mathfrak{tym}(n)$ es un álgebra de Lie libre generada por $W(n)$. $\square$

A partir de ahora, será conveniente identificar $\Lambda^3W(n)$ con la imagen de α en $D(\mathfrak{h}(n))$. Más aún, por lo anterior, no escribiremos las barras que denotan clase para los elementos de $W(n)$, y por lo tanto, escribiremos muchas veces $w_1 \circ [w_2, w_3] \in \Lambda^3W(n)$ en lugar de $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$.

Por la sucesión exacta corta anterior, obtenemos un morfismo $\delta : H_1(V(n), S^2W(n)) \to H_0(V(n), \Lambda^3W(n))$ en la homología. Por el lema de la serpiente, resulta que δ es el morfismo inducido por

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes_s w'_i \otimes x_i \mapsto \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{l' \in L'_i} u_{i,l'} \wedge u'_{i,l'} \wedge w'_i + \sum_{l \in L_i} v_{i,l} \wedge v'_{i,l} \wedge w_i\Big), \tag{4.7.5}$$

donde empleamos la notación de (4.7.2) y (4.7.3).

Usando la notación dada en (4.1.2), resulta

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes_s w'_i \otimes x_i \mapsto \sum_{i=1}^{n}(\rho_i^2(w_i) \circ w'_i + \rho_i^2(w'_i) \circ w_i). \tag{4.7.6}$$

Por otro lado, la restricción del morfismo $B_2 : H_0(V(n), W(n)^{\otimes 3}) \to H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes 2})$ de la sucesión exacta larga del Teorema 4.6.4 a $H_0(V(n), \Lambda^3W(n))$ está inducida por (cf. Observación 4.6.5)

$$w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \mapsto w_1 \wedge w_2 \otimes w_3 + w_2 \wedge w_3 \otimes w_1 + w_3 \wedge w_1 \otimes w_2. \tag{4.7.7}$$

Proposición 4.7.5 (cf. [Mov], Prop. 41). *Si $\delta : H_1(V(n), S^2W(n)) \to H_0(V(n), \Lambda^3W(n))$ es el morfismo asociado a la sucesión exacta corta de la Proposición 4.7.4, el siguiente diagrama resulta conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
H_1(V(n), S^2W(n)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "B'_1"] & H_0(V(n), \Lambda^3W(n)) \arrow[d, "B_2"] \\
H_2(\mathfrak{ym}(n), W(n)) \arrow[r, "d^1_{-1,3}"] & H_1(\mathfrak{ym}(n), W(n)^{\otimes 2})
\end{tikzcd}$$

Demostración. Es directo de la expresiones para los morfismos dados por (4.7.5), (4.7.7), (4.7.1), recordando que $d^1_{-1,3}$ es el morfismo inducido por d_2^{CE}. $\square$

Proposición 4.7.6 (cf. [Mov], Prop. 42). *La restricción del morfismo B_1' a $H_1(V(n), S^2W(n))$ tiene núcleo $\Lambda^5 V(n)$, mientras que la restricción del morfismo B_2 a $H_0(V(n), \Lambda^3 W(n))$ es inyectiva.*

Demostración. Veamos primero que $\mathrm{Ker}(B_1'|_{H_1(V(n),S^2V(n))}) = \Lambda^5 V(n)$. Por la demostración de la Proposición 4.6.6, vemos que $\Lambda^5 V(n) \subset \mathrm{Ker}(B_1')$. Más aún, por la expresión de los ciclos dados en el Corolario 4.6.20, $\Lambda^5 V(n) \subseteq H_1(V(n), S^2V(n))$.

Por otro lado, por la exactitud de la sucesión exacta del Teorema 4.6.4, $\mathrm{Ker}(B_1') = \mathrm{Im}(S_1')$. Empleando el mismo teorema, S_1' es inyectivo y $H_3(V(n), W(n)) \simeq \Lambda^5 V(n)$, y por lo tanto $\mathrm{Ker}(B_1') \simeq \Lambda^5 V(n)$. Por lo tanto, la restricción del morfismo B_1' a $H_1(V(n), S^2V(n))$ tiene núcleo $\Lambda^5 V(n)$.

Veamos ahora el caso del morfismo $B_2|_{H_0(V(n),\Lambda^3 W(n))}$. Por un lado, por la exactitud de la sucesión exacta del Teorema 4.6.4, $\mathrm{Ker}(B_2) = \mathrm{Im}(S_2) = S_2(H_2(V(n), W(n)^{\otimes 2}))$.

Por el mismo teorema, $H_2(V(n), W(n)^{\otimes 2}) \simeq \Lambda^6 V(n)$. De hecho, utilizando las ideas explicadas en la Proposición 4.6.6, los ciclos

$$\{\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_6} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \otimes x_{i_{\sigma(5)}} \wedge x_{i_{\sigma(6)}} : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 < i_6 \leq n\}$$

forman una base para $H_2(V(n), W(n)^{\otimes 2})$, ya que, a partir del complejo doble (4.6.1), la Observación 4.6.5 y [Wei], Exercise 5.1.2, el morfismo $\Lambda^6 V(n) = H_6(V(n), k) \hookrightarrow H_2(V(n), W(n)^{\otimes 2})$ está inducido por

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge x_{i_4} \wedge x_{i_5} \wedge x_{i_6} \mapsto \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_6} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \otimes x_{i_{\sigma(5)}} \wedge x_{i_{\sigma(6)}},$$

donde el elemento de la derecha es un ciclo en $\Lambda^2 V(n) \otimes W(n)^{\otimes 2}$. Al igual que en la Proposición 4.6.6 para la aplicación S_1, el morfismo S_2 en un elemento de la base es la clase de un ciclo la forma

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_6} \epsilon(\sigma)[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(3)}}, x_{i_{\sigma(4)}}] \otimes [x_{i_{\sigma(5)}}, x_{i_{\sigma(6)}}].$$

Por lo tanto, $\mathrm{Im}(S_2) \subseteq H_0(V(n), S^3W(n))$. Como $S^3W(n) \cap \Lambda^3 W(n) = \{0\}$, resulta que $\mathrm{Ker}(B_2|_{H_0(V(n),\Lambda^3W(n))}) = 0$. $\square$

Proposición 4.7.7 (cf. [Mov], Prop. 43). *El núcleo del morfismo $\delta : H_1(V(n), S^2W(n)) \to H_0(V(n), \Lambda^3 W(n))$ dado en (4.7.5) es $V(n)[-4] \oplus \Lambda^5 V(n)$.*

Demostración. Puede comprobarse directamente de la expresión para los ciclos de $\Lambda^5 V(n)$, los ciclos de $V(n)$ (dados en el Corolario 4.6.20) y la expresión para δ (dada en la identidad (4.7.5)) que $\Lambda^5 V(n) \oplus V(n)[-4] \subseteq \mathrm{Ker}(\delta)$ (el cambio en el grado proviene de que en el Corolario 4.6.20 se estudió la homología de $M(n)$). Los elementos dados por ciclos de $(\Lambda^3 V(n))[-2]$ pertenecen a $H_1(V(n), \Lambda^2 W(n))$ y por lo tanto, no están al núcleo de δ.

En consecuencia, basta demostrar que δ es inyectiva en los elementos genéricos de $H_1(V(n), S^2W(n))$, lo cual es tedioso. Incluimos de todos modos la demostración completa de este hecho ya que la misma no es evidente.

Un elemento genérico de $H_1(V(n), S^2W(n))$ puede escribirse como combinación lineal de ciclos de la forma

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} \big(& ([x_i, x_j]x_l \otimes \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q] - [x_i, x_j] \otimes \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q]x_l) \otimes x_l \\ & + (\bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q] \otimes [x_i, x_j]x_l - \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q]x_l \otimes [x_i, x_j]) \otimes x_l \big)\end{aligned} \tag{4.7.8}$$

con $|i| > 0$, que se obtiene del morfismo (4.6.23) aplicado al elemento

$$([x_i, x_j] \otimes \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q] - \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q] \otimes [x_i, x_j]) \otimes (\sum_{l=1}^{n}(x_l \otimes 1 - 1 \otimes x_l) \otimes x_l) \in C_0(V(n), \Lambda^2 W(n)) \otimes C_1(V(n), A^{\otimes 2}). \tag{4.7.9}$$

Denotaremos $\tilde{c} = ([x_i, x_j] \otimes \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q] - \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q] \otimes [x_i, x_j])$.

Notar que el morfismo (4.6.23) "intercambia paridad" entre $H_0(V(n), W(n)^{\otimes 2})$ y $H_1(V(n), W(n)^{\otimes 2})$, i.e., envía el módulo $H_0(V(n), \Lambda^2 W(n))$ en $H_1(V(n), S^2W(n))$ y $H_0(V(n), S^2W(n))$ en $H_1(V(n), \Lambda^2 W(n))$.

Sea c el ciclo dado por (4.7.8) y $\bar{c}$ su clase en la homología. Si utilizamos la identidad dada en (4.7.6), entonces $\delta(\bar{c})$ está dado el ciclo

$$\sum_{l=1}^{n}\Big(\overbrace{\rho_l^2([x_i,x_j]x_l)\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]}^{a_1^l}+\overbrace{[x_i,x_j]x_l\circ\rho_l^2((\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])}^{b_1^l}-\overbrace{\rho_l^2([x_i,x_j])\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l}^{a_2^l}-\overbrace{[x_i,x_j]\circ\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l)}^{b_2^l}$$
$$+\overbrace{\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])\circ[x_i,x_j]x_l}^{a_3^l}+\overbrace{\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]\circ\rho_l^2([x_i,x_j]x_l)}^{b_3^l}-\overbrace{\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l)\circ[x_i,x_j]}^{a_4^l}-\overbrace{\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l\circ\rho_l^2([x_i,x_j])}^{b_4^l}\Big). \tag{4.7.10}$$

A su vez, como

$$\begin{aligned}
a_1^l+a_2^l&=(\rho_l^2([x_i,x_j]x_l)+\rho_l^2([x_i,x_j])x_l)\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]-d_1^{\mathrm{CE}}(\rho_l^2([x_i,x_j])\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]\otimes x_l),\\
b_1^l+b_2^l&=-[x_i,x_j]\circ(\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])x_l+\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l))+d_1^{\mathrm{CE}}([x_i,x_j]\circ\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])\otimes x_l),\\
a_3^l+a_4^l&=-(\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l)+\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l))\circ[x_i,x_j]+d_1^{\mathrm{CE}}(\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])\circ[x_i,x_j]\otimes x_l),\\
b_3^l+b_4^l&=\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]\circ(\rho_l^2([x_i,x_j]x_l)+\rho_l^2([x_i,x_j])x_l)-d_1^{\mathrm{CE}}(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]\circ\rho_l^2([x_i,x_j])\otimes x_l),
\end{aligned}$$

resulta que $\delta(\bar{c})$ es la clase del ciclo

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}\Big(&(\rho_l^2([x_i,x_j]x_l)+\rho_l^2([x_i,x_j])x_l)\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]-[x_i,x_j]\circ(\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])x_l+\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l))\\
&-(\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]x_l)+\rho_l^2(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])x_l)\circ[x_i,x_j]+\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]\circ(\rho_l^2([x_i,x_j]x_l)+\rho_l^2([x_i,x_j])x_l)\Big).
\end{aligned}\tag{4.7.11}$$

Podemos simplificar la identidad anterior a partir de la siguiente definición. Dado $w\in W(n)$, sea

$$\Delta(w)=\sum_{i=1}^{n}[x_i,[x_i,w]].$$

Recordando que $q.w=0$, resulta que

$$\Delta(w)=\sum_{i=1}^{n}x_i\rho_i^2(w)+\rho_i^2(x_iw)+\tilde{w},$$

donde $\tilde{w}\in\oplus_{p\geq 3}\mathfrak{tym}(n)^p$.

Entonces, podemos reescribir el ciclo (4.7.11) de la forma

$$\begin{aligned}
\Delta([x_i,x_j])\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]-[x_i,x_j]\circ\Delta(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])-\Delta(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])\circ[x_i,x_j]+\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]\circ\Delta([x_i,x_j])\\
=2(\Delta([x_i,x_j])\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]-[x_i,x_j]\circ\Delta(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])).
\end{aligned}\tag{4.7.12}$$

Empleando las relaciones del álgebra de Yang-Mills (3.1.1), no es difícil demostrar que

$$\Delta([x_i,x_j])=2\sum_{l=1}^{n}[[x_l,x_i],[x_l,x_j]].$$

De la misma forma, debemos encontrar alguna expresión para $\Delta(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])$. Para ello, consideramos el siguiente elemento en $\mathfrak{tym}(n)$

$$\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_l,[x_{i_1},\dots,[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]]], \tag{4.7.13}$$

donde $\bar{x}^{\bar{i}}=x_{i_1}\dots x_{i_r}$ y $r\geq 1$. La componente del elemento anterior en $\mathfrak{tym}(n)^2$ se obtiene reemplazando en la expresión anterior $[x_t,-]$ por $x_t.(-)+\rho_t^2(-)$ y resulta

$$\Delta(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q])+\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}x_l^2x_{i_1}\dots x_{i_{h-1}}\rho_{i_h}^2(x_{i_{h+1}}\dots x_{i_r}[x_p,x_q]). \tag{4.7.14}$$

Notaremos $p_2 : \mathfrak{tym}(n) \twoheadrightarrow \mathfrak{tym}(n)^2$ la proyección. Empleando la identidad anterior vemos que

$$
\begin{aligned}
&[x_i, x_j] \circ p_2(\sum_{l=1}^{n}[x_l, [x_l, [x_{i_1}, \dots, [x_{i_r}, [x_p, x_q]] \dots]]]) \\
&= [x_i, x_j] \circ (\Delta(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q]) + \sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} x_l^2 x_{i_1} \dots x_{i_{h-1}} \rho_{i_h}^2 (x_{i_{h+1}} \dots x_{i_r}[x_p, x_q])) \\
&= [x_i, x_j] \circ \Delta(\bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q]) - d_1^{\mathrm{CE}}([x_i, x_j]x_l \circ \sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} x_{i_1} \dots x_{i_{h-1}} \rho_{i_h}^2 (x_{i_{h+1}} \dots x_{i_r}[x_p, x_q]) \otimes x_l) \\
&- d_1^{\mathrm{CE}}([x_i, x_j] \circ \sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} x_l x_{i_1} \dots x_{i_{h-1}} \rho_{i_h}^2 (x_{i_{h+1}} \dots x_{i_r}[x_p, x_q]) \otimes x_l),
\end{aligned}
\tag{4.7.15}
$$

es decir, $\delta(\bar{c})$ está dado por el ciclo

$$
2(2\sum_{l=1}^{n}[[x_l, x_i], [x_l, x_j]] \circ \bar{x}^{\bar{i}}[x_p, x_q] - [x_i, x_j] \circ p_2(\sum_{l=1}^{n}[x_l, [x_l, [x_{i_1}, \dots, [x_{i_r}, [x_p, x_q]] \dots]]])). \tag{4.7.16}
$$

A su vez, el elemento (4.7.13) se puede escribir también como

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}[x_l, [x_l, [x_{i_1}, \dots, [x_{i_r}, [x_p, x_q]] \dots]]] &= \sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_l, [x_{i_1}, \dots, [[x_l, x_{i_h}], \dots [x_{i_r}, [x_p, x_q]] \dots]]]] \\
&+ \sum_{l=1}^{n}[x_l, [x_{i_1}, \dots, [x_{i_r}, [x_l, [x_p, x_q]] \dots]]] \\
&= \sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_l, [x_{i_1}, \dots [[x_l, x_{i_h}], \dots [x_{i_r}, [x_p, x_q]] \dots]]]] \\
&+ \sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_{i_1}, \dots [[x_l, x_{i_h}], \dots [x_{i_r}, [x_l, [x_p, x_q]]] \dots]]] \\
&+ 2\sum_{l=1}^{n}[x_{i_1}, \dots, [x_{i_r}, [[x_l, x_p], [x_l, x_q]] \dots]],
\end{aligned}
\tag{4.7.17}
$$

donde en la última igualdad utilizamos las relaciones del álgebra de Yang-Mills (3.1.1).

Además, usando también las relaciones del álgebra de Yang-Mills (3.1.1), vemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]\dots]] \\
&=\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\sum_{g=1}^{h}[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_g}],\dots[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]\dots]\dots] \\
&+\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_{i_1},\dots,[[x_l,[x_l,x_{i_h}]],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]\dots] \\
&+\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\sum_{g=h+1}^{r}[x_{i_1},\dots[[x_l,x_{i_h}],\dots[[x_l,x_{i_g}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]\dots]\dots] \\
&+\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_l,[x_p,x_q]]]\dots]\dots] \\
&=\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\sum_{g=1}^{h}[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_g}],\dots[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]\dots]\dots] \\
&+\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\sum_{g=h+1}^{r}[x_{i_1},\dots[[x_l,x_{i_h}],\dots[[x_l,x_{i_g}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]\dots]\dots] \\
&+\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_l,[x_p,x_q]]]\dots]\dots].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]\dots]] \\
&-\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_l,[x_p,x_q]]]\dots]\dots]\in\bigoplus_{p>2}\mathfrak{tym}(n)^p.
\end{aligned}
$$

Hemos probado entonces que

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_l,[x_{i_1},\dots,[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]]] &= \sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_{i_1},\dots,[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]]]]] \\
&+\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_{i_1},\dots,[x_{i_r},[x_l,[x_p,x_q]]\dots]]] \\
&=2\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_{i_1},\dots[[x_l,x_{i_h}],\dots[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]]]]] \\
&+2\sum_{l=1}^{n}[x_{i_1},\dots,[x_{i_r},[[x_l,x_p],[x_l,x_q]]\dots]]+\tilde{w},
\end{aligned}
\tag{4.7.18}
$$

donde $\tilde{w}\in\bigoplus_{p>2}\mathfrak{tym}(n)^p$. Luego,

$$
\begin{aligned}
&p_2(\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_l,[x_{i_1},\dots,[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]]]) \\
&=2\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}x_l x_{i_1}\dots[[x_l,x_{i_h}],\dots x_{i_r}[x_p,x_q]]+2\sum_{l=1}^{n}\bar{x}^{\bar{i}}[[x_l,x_p],[x_l,x_q]].
\end{aligned}
\tag{4.7.19}
$$

Utilizando esta expresión en la identidad (4.7.16) resulta

$$
\begin{aligned}
&2(2\sum_{l=1}^{n}[[x_l,x_i],[x_l,x_j]]\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]-[x_i,x_j]\circ p_2(\sum_{l=1}^{n}[x_l,[x_l,[x_{i_1},\dots,[x_{i_r},[x_p,x_q]]\dots]]]))\\
&=4\sum_{l=1}^{n}(\overbrace{[[x_l,x_i],[x_l,x_j]]\circ\bar{x}^{\bar{i}}[x_p,x_q]}^{*_1}-\overbrace{[x_i,x_j]\circ\bar{x}^{\bar{i}}[[x_l,x_p],[x_l,x_q]]}^{*_2})\\
&-4\sum_{h=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\overbrace{[x_i,x_j]\circ x_lx_{i_1}\dots[[x_l,x_{i_h}],\dots x_{i_r}[x_p,x_q]]}^{*_3}.
\end{aligned}
\tag{4.7.20}
$$

Denominaremos a este ciclo c'.

Consideremos la aplicación k-lineal

$$\xi:\Lambda^3W(n)\to\Lambda^2V(n)\otimes\Lambda^2W(n),$$

dada por

$$
\begin{aligned}
\xi([x_{i_1},x_{j_1}]z_1\wedge[x_{i_2},x_{j_2}]z_2\wedge[x_{i_3},x_{j_3}]z_3)&=z_1(0)x_{i_1}\wedge x_{j_1}\otimes[x_{i_2},x_{j_2}]z_2\wedge[x_{i_3},x_{j_3}]z_3\\
&+z_2(0)x_{i_2}\wedge x_{j_2}\otimes[x_{i_3},x_{j_3}]z_3\wedge[x_{i_1},x_{j_1}]z_1\\
&+z_3(0)x_{i_3}\wedge x_{j_3}\otimes[x_{i_1},x_{j_1}]z_1\wedge[x_{i_2},x_{j_2}]z_2,
\end{aligned}
$$

donde $z_i\in S(V(n))$, $i=1,2,3$.

Es directo aunque engorroso chequear que, si consideramos a $\Lambda^2V(n)$ con la acción trivial de $S(V(n))$ (i.e., la provista por la aumentación de $S(V(n))$), ξ es $S(V(n))$-lineal y $\mathfrak{so}(n)$-equivariante. Por lo tanto, ξ induce un morfismo entre las homologías

$$\bar{\xi}:H_0(V(n),\Lambda^3W(n))\to H_0(V(n),\Lambda^2V(n)\otimes\Lambda^2W(n))=\Lambda^2V(n)\otimes H_0(V(n),\Lambda^2W(n)).$$

Vamos a probar que $\bar{\xi}(\delta(\bar{c}))$ es la clase del ciclo dado por

$$2\sum_{1\le s<t\le n}x_s\wedge x_t\otimes(x_s\wedge x_t).\tilde{c}+\sum_{l=1}^{n}\Big(\delta_{|\bar{i}|,0}x_p\wedge x_q\otimes[x_l,x_i]\wedge[x_l,x_j]-\delta_{|\bar{i}|,0}x_i\wedge x_j\otimes[x_l,x_p]\wedge[x_l,x_q]\Big),\tag{4.7.21}$$

donde $(x_p\wedge x_q).\tilde{c}$ denota la acción de $x_p\wedge x_q\in\Lambda^2V(n)\simeq\mathfrak{so}(n)$ on $\tilde{c}$ (cf. [FH], §20.1, (20.4)). La expresión (4.7.21) no depende de la elección de $\tilde{c}$ ya que la diferencial del complejo de Chevalley-Eilenberg es $\mathfrak{so}(n)$-equivariante.

Vamos a calcular $\bar{\xi}(\delta(\bar{c}))$. Para ello, basta aplicar ξ al ciclo c' dado en (4.7.20). Luego $\xi(c')$ la clase del ciclo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}\Big(\overbrace{x_l\wedge x_i\otimes[x_l,x_j]\wedge\bar{x}_{\bar{i}}[x_p,x_q]+x_l\wedge x_j\otimes\bar{x}_{\bar{i}}[x_p,x_q]\wedge[x_l,x_i]+\delta_{|\bar{i}|,0}x_p\wedge x_q\otimes[x_l,x_i]\wedge[x_l,x_j]}^{\xi(*_1)}\\
&-\overbrace{(\underbrace{x_i\wedge x_j\otimes\bar{x}_{\bar{i}}([x_l,x_p]\wedge[x_l,x_q])}_{\star_1}+x_l\wedge x_q\otimes[x_i,x_j]\wedge\bar{x}_{\bar{i}}[x_l,x_p]+x_l\wedge x_p\otimes\bar{x}_{\bar{i}}[x_l,x_q]\wedge[x_i,x_j])}^{\xi(*_2)}\\
&\overbrace{-\sum_{h=1}^{r}\underbrace{x_i\wedge x_j\otimes x_lx_{i_1}\dots([x_l,x_{i_h}]\wedge x_{i_{h+1}}\dots x_r[x_p,x_q])}_{\star_2}}^{\xi(*_3),\ \text{first part}}\\
&\overbrace{-\sum_{h=1}^{r}x_l\wedge x_{i_h}\otimes x_lx_{i_1}\dots\hat{x}_{i_h}\dots x_r[x_p,x_q]\wedge[x_i,x_j]}^{\xi(*_3),\ \text{second part}}\Big),
\end{aligned}
$$

donde usamos que

$$\sum_{l=1}^{n}x_p\wedge x_q\otimes[x_i,x_j]\wedge x_lx_{i_1}\dots x_{i_{r-1}}[x_l,x_{i_r}]=\sum_{l=1}^{n}x_p\wedge x_q\otimes[x_i,x_j]\wedge x_{i_1}\dots x_{i_{r-1}}[x_l,[x_l,x_{i_r}]]=0.$$

En este caso, como $\star_2$ es claramente un borde y $\star_1$ es un borde si $|\bar{i}| > 0$, $\xi(c')$ es equivalente a

$$2\sum_{l=1}^{n}\Big(x_l \wedge x_i \otimes [x_l, x_j] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}[x_p, x_q] - x_l \wedge x_j \otimes [x_l, x_i] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}[x_p, x_q]$$

$$+ \delta_{|\bar{i}|,0} x_p \wedge x_q \otimes [x_l, x_i] \wedge [x_l, x_j] - \delta_{|\bar{i}|,0} x_i \wedge x_j \otimes [x_l, x_p] \wedge [x_l, x_q]$$

$$+ x_l \wedge x_p \otimes [x_i, x_j] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}[x_l, x_q] - x_l \wedge x_q \otimes [x_i, x_j] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}[x_l, x_p]$$

$$+ \sum_{h=1}^{r} x_l \wedge x_{i_h} \otimes [x_i, x_j] \wedge x_l x_{i_1} \dots \hat{x}_{i_h} \dots x_r [x_p, x_q]\Big)$$

o también a

$$2\sum_{l=1}^{n}\Big(x_l \wedge x_i \otimes (x_l \wedge x_i).[x_i, x_j] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}[x_p, x_q] + x_l \wedge x_j \otimes (x_l \wedge x_j).[x_i, x_j] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}[x_p, x_q]$$

$$+ x_l \wedge x_p \otimes [x_i, x_j] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}(x_l \wedge x_p).[x_p, x_q] + x_l \wedge x_q \otimes [x_i, x_j] \wedge \bar{x}_{\bar{i}}(x_l \wedge x_q).[x_p, x_q]$$

$$+ \delta_{|\bar{i}|,0} x_p \wedge x_q \otimes [x_l, x_i] \wedge [x_l, x_j] - \delta_{|\bar{i}|,0} x_i \wedge x_j \otimes [x_l, x_p] \wedge [x_l, x_q]$$

$$+ \sum_{h=1}^{r} x_l \wedge x_{i_h} \otimes [x_i, x_j] \wedge (x_l \wedge x_{i_h})(\bar{x}_{\bar{i}})[x_p, x_q]\Big)$$

que se puede simplificar para obtener

$$2\sum_{1 \le s < t \le n} x_s \wedge x_t \otimes (x_s \wedge x_t).\tilde{c} + \sum_{l=1}^{n} \delta_{|\bar{i}|,0}\Big(x_p \wedge x_q \otimes [x_l, x_i] \wedge [x_l, x_j] - x_i \wedge x_j \otimes [x_l, x_p] \wedge [x_l, x_q]\Big).$$

Si $|\bar{i}| > 0$, i.e., $\bar{\tilde{c}}$ tiene grado estrictamente mayor qur 4, entonces

$$\bar{\xi}(\delta(\bar{c})) = 2\sum_{1 \le s < t \le n} x_s \wedge x_t \otimes (x_s \wedge x_t).\bar{\tilde{c}}.$$

En este caso, si $\bar{c} \in \mathrm{Ker}(\delta)$, luego, como $\{x_s \wedge x_t\}_{1 \le s < t \le n}$ es una base de $\Lambda^2 V(n)$, resulta $(x_s \wedge x_t).\bar{\tilde{c}} = 0$, para todo $1 \le s < t \le n$. Esto implica que $\bar{\tilde{c}}$ pertenece a la representación trivial de $\mathfrak{so}(n)$ en $H_0(V(n), W(n)^{\otimes 2})$. Sin embargo, por la Proposición 4.6.13 esto no es posible.

Si $|\bar{i}| = 0$, $\bar{\tilde{c}}$ tiene grado 4 y

$$\bar{\xi}(\delta(\bar{c})) = 2\sum_{1 \le s < t \le n} x_s \wedge x_t \otimes (x_s \wedge x_t).\bar{\tilde{c}} + \sum_{l=1}^{n}\Big(x_p \wedge x_q \otimes [x_l, x_i] \wedge [x_l, x_j] - x_i \wedge x_j \otimes [x_l, x_p] \wedge [x_l, x_q]\Big). \quad (4.7.22)$$

Si $n = 3$, como $H_0(V(n), \Lambda^2 W(n))$ coincide con el núcleo del morfismo dado por (4.6.23), no es necesario considerar este caso (cf. Observación 4.6.15).

Supongamos que $n \ge 4$ y que $\bar{\tilde{c}}$ es un elemento no trivial de una componente isotípica en $H_0(V(n), \Lambda^2 W(n))$ diferente de (las que aparecen en) $\Lambda^2 V(n)$. En este caso, como el morfismo dado por (4.6.23) y δ son $\mathfrak{so}(n)$-equivariant, la composición de estos dos morfismos aplicada en $\bar{\tilde{c}}$ se anula si y sólo si esa composición se anula en toda la componente isotípica a la que $\bar{\tilde{c}}$ pertenece. Fijamos

$$\tilde{c} = \begin{cases} [e_1, e_2] \wedge [e_1, e_4] \in \Gamma_{2L_1}, & \text{if } n = 4, \\ [e_1, e_2] \wedge [e_1, e_5] \in \Gamma_{2L_1 + L_2}, & \text{if } n = 5, \\ [e_1, e_2] \wedge [e_1, e_3] \in \Gamma_{2L_1 + L_2 + L_3}, & \text{if } n \ge 7, \end{cases}$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $V(n)$ para la que la forma cuadrática de $V(n)$ resulta polarizada (cf. [FH], §18.1). Podemos elegir esta base como se explicó en la Subsección 4.5.2. Sea $m = [n/2]$ la parte entera de $n/2$. Si n es par, se define $e_j = (x_j + i x_{j+m})/\sqrt{2}$ y $e_{j+m} = (x_j - i x_{j+m})/\sqrt{2}$, para $1 \le j \le m$; mientras que, si n es impar, $e_n = x_n$.

Omitimos de forma intencional el caso $n = 6$ en la lista anterior ya que debemos considerar dos componentes isotípicas diferentes: $\tilde{c} = [e_1, e_2] \wedge [e_1, e_3] \in \Gamma_{2L_1+L_2+L_3}$ y $\tilde{c} = [e_1, e_2] \wedge [e_1, e_6] \in \Gamma_{2L_1+L_2-L_3}$.

Vamos a ver que la composición de $\bar{\xi} \circ \delta$ con (4.6.23) aplicada a $\bar{\tilde{c}}$ no se anula en ningún caso. Primero recordamos el siguiente hecho elemental: Consideramos un k-espacio vectorial V de dimensión finita n, $\phi \in (V^* \otimes V^*)^*$ una morfismo bilineal en V^*, y una base $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$, con base dual $\{v_1^*, \dots, v_n^*\} \subseteq V^*$. Por la identificación canónica $(V^* \otimes V^*)^* \simeq V \otimes V$, vemos que la expresión

$$\sum_{i,j=1}^{n} \phi(v_i^*, v_j^*) v_i \otimes v_j \in V^{\otimes 2}$$

se identifica con ϕ, y es por lo tanto indenpendiente de la base elegida. Cuando V está provista con una forma bilineal simétrica no degenerada $Q : V^{\otimes 2} \to k$, podemos considerar $\phi = Q^{-1}$, la forma inversa de Q.

Aplicamos el hecho anterior para reescribir la ecuación (4.7.22) como sigue. Primero,

$$\sum_{l=1}^{n} x_l \otimes x_l = \sum_{l=1}^{m} (e_l \otimes e_{l+m} + e_{l+m} \otimes e_l) + \delta_{n-2m,1} e_n \otimes e_n,$$

donde usamos ϕ igual a la forma inversa de $V(n)$. A su vez, la forma bilineal simétrica no degenerada $K(x_s \wedge x_t, x_{s'} \wedge x_{t'}) = \delta_{s,s'}\delta_{t,t'} - \delta_{s,t'}\delta_{t,s'}$ es invariante, y por lo tanto es una forma de Killing en $\Lambda^2 V(n)$, y coincide con $\mathrm{tr}((-) \circ (-))/(-8)$ bajo la identificación canónica $\Lambda^2 V(n) \simeq \mathfrak{so}(n)$ (cf. [FH], §20.1, (20.4)). Por lo tanto,

$$\sum_{1 \le s < t \le n} (x_s \wedge x_t) \otimes (x_s \wedge x_t) = \sum_{\substack{1 \le s < t \le n \\ 1 \le s' < t' \le n}} K^{-1}((e_s \wedge e_t)^*, (e_{s'} \wedge e_{t'})^*)(e_s \wedge e_t) \otimes (e_{s'} \wedge e_{t'}).$$

Por las consideraciones anteriores, podemos reescribir la expresión (4.7.22) para la composición de $\bar{\xi} \circ \delta$ con (4.6.23) aplicada a $\bar{\tilde{c}}$, donde $\tilde{c} = [e_1, e_2] \wedge [e_1, e_h]$ and $h \in \{3, 4, 5, 6\}$ está dado de acuerdo con la elección previa de ciclos. Hay un término de la forma $(e_1 \wedge e_2) \otimes a_{1,2}$ en el ciclo que representa la clase de homología de la composición de $\bar{\xi} \circ \delta$ con (4.6.23) aplicada a $\bar{\tilde{c}}$, donde

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= (e_{1+m} \wedge e_{2+m})([e_1, e_2] \wedge [e_1, e_h]) - \sum_{l=1}^{m} ([e_l, e_1] \wedge [e_{l+m}, e_h] + [e_{l+m}, e_1] \wedge [e_l, e_h]) \\ &\quad - \delta_{n-2m,1}[e_n, e_1] \wedge [e_n, e_h] \\ &= [e_1, e_{1+m}] \wedge [e_1, e_h] - [e_1, e_2] \wedge [e_{2+m}, e_h] - [e_{2+m}, e_2] \wedge [e_1, e_h] \\ &\quad - \sum_{l=1}^{m} ([e_l, e_1] \wedge [e_{l+m}, e_h] + [e_{l+m}, e_1] \wedge [e_l, e_h]) - \delta_{n-2m,1}[e_n, e_1] \wedge [e_n, e_h], \end{aligned}$$

y por lo tanto no se anulah. Como no hay bordes en este grado, la composición de $\bar{\xi} \circ \delta$ con (4.6.23) aplicada a $\bar{\tilde{c}}$ no se anula La proposición queda demostrada. □

Volvamos ahora al estudio de la sucesión espectral

Proposición 4.7.8. *El núcleo de la diferencial $d^1_{-1,3}$ es isomorfo a $V(n)[-4]$, donde $V(n)[-4]$ está dado en el Corolario 4.6.20.*

Demostración. De la proposición anterior, la Proposición 4.7.5 y la Proposición 4.7.6, obtenemos que $\mathrm{Ker}(d^1_{-1,3}) = V(n)[-4]$. □

4.7.2 Cálculo de $HH^1(\mathrm{YM}(n))$

En esta subsección vamos a calcular $HH^1(\mathrm{YM}(n))$, para $n \geq 3$. Empecemos para ello describiendo algunas derivaciones de $\mathrm{YM}(n)$.

Proposición 4.7.9 (cf. [Mov], Lemma 45)**.** *Tenemos un mofismo k-lineal inyectivo homogéneo de grado* 0

$$k \oplus V(n)[2] \oplus \Lambda^2(V(n)[1]) \hookrightarrow HH^1(\mathrm{YM}(n)).$$

Demostración. Consideramos las siguientes derivaciones (no graduadas) de $\mathrm{YM}(n)$.

En primer lugar, el morfismo homogéneo de grado 0

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{eu}} : \mathrm{YM}(n) &\to \mathrm{YM}(n) \\ z &\mapsto |z|z, \end{aligned}$$

donde $z \in \mathrm{YM}(n)$ es homogéneo de grado usual $|z|$, es una derivación de $\mathrm{YM}(n)$, denominada **euleriana**, como se puede comprobar fácilmente.

Por otro lado, en la Subsección 3.2.2, se consideraron las derivaciones d_i, $i = 1, \dots, n$ de grado -1 inducidas por los morfismos (3.2.15).

Finalmente, como $\mathfrak{so}(n) \simeq \Lambda^2 V(n)$ actúa en $\mathrm{YM}(n)$ por derivaciones de grado 0, obtenemos inmediatamente que a cada elemento de $\Lambda^2 V(n)$ le podemos asociar una derivación.

Es fácil probar que se induce un morfismo k-lineal inyectivo homogéneo de grado cero

$$k \oplus V(n)[2] \oplus \Lambda^2(V(n)[1]) \hookrightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{YM}(n)). \tag{4.7.23}$$

Por cuestiones de graduación sólo es necesario ver que el conjunto formado por las derivaciones asociadas a una base de $\mathfrak{so}(n)$ y la derivación euleriana es linealmente independiente, lo que es inmediato.

La aplicación del enunciado consiste de componer el morfismo (4.7.23) con la proyección canónica

$$\mathrm{Der}(\mathrm{YM}(n)) \to \mathrm{Der}(\mathrm{YM}(n))/\mathrm{Innder}(\mathrm{YM}(n)) \simeq HH^1(\mathrm{YM}(n)).$$

Como las derivaciones interiores tienen grado mayor o igual que 1, salvo la derivación trivial, se deduce inmediatamente que la composición anterior sigue siendo inyectiva. La proposición queda demostrada. □

Ahora vamos a presentar los cálculos necesarios para hallar exactamente la homología anterior, y probaremos que el monomorfismo de la proposición anterior es un isomorfismo. Esto lo haremos a partir de una sucesión espectral asociada a una filtración de $S(\mathfrak{ym}(n))$.

En principio, como $\mathrm{YM}(n) \simeq S(\mathfrak{ym}(n))$ como $\mathfrak{ym}(n)$-módulos graduados (isomorfismo homogéneo de grado 0 $\mathfrak{so}(n)$-equivariante), entonces

$$HH^1(\mathrm{YM}(n)) \simeq H^1(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{YM}(n)) \simeq H^1(\mathfrak{ym}(n), S(\mathfrak{ym}(n))) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} H^1(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{ym}(n))).$$

Sea $I \subseteq S(\mathfrak{ym}(n))$ el ideal generado por $\mathfrak{tym}(n)$. Como $\mathfrak{tym}(n)$ es un $\mathfrak{ym}(n)$-módulo, se deduce inmediatamente que I es también un $\mathfrak{ym}(n)$-módulo. Por lo tanto, podemos considerar la filtración decreciente $\{F^\bullet S(\mathfrak{ym}(n))\}_{\bullet \in \mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos de $S(\mathfrak{ym}(n))$ dada por

$$F^p S(\mathfrak{ym}(n)) = \begin{cases} I^p, & \text{si } p \geq 1, \\ S(\mathfrak{ym}(n)), & \text{si } p \leq 0. \end{cases}$$

Vemos directamente que $F^\bullet S(\mathfrak{ym}(n))$ es exhaustiva y Hausdorff. Dado $i \in \mathbb{N}$, la filtración anterior induce una filtración decreciente $\{F^\bullet S^i(\mathfrak{ym}(n))\}_{\bullet \in \mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos en $S^i(\mathfrak{ym}(n))$ de forma que también resulta exhaustiva y Hausdorff. Dado $p \leq 0$, tenemos el isomorfismo natural de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos graduados homogéneo de grado cero

$$F^p S^i(\mathfrak{ym}(n))/F^{p+1} S^i(\mathfrak{ym}(n)) \simeq S^{i-p} V(n) \otimes S^p(\mathfrak{tym}(n)),$$

donde la acción de $\mathfrak{ym}(n)$ en $S^{i-p}V(n)$ es trivial.

La filtración anterior da lugar a una colección de sucesiones espectrales

$${}^iE_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathfrak{ym}(n), S^{i-p} V(n) \otimes S^p(\mathfrak{tym}(n))), \tag{4.7.24}$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$, donde por definición $S^q(-) = 0$, para $q < 0$. Cada una de estas sucesiones espectrales está acotada, y por lo tanto, es convergente. La sucesión espectral total $E_\bullet^{\bullet,\bullet}$, dada por la suma directa de las sucesiones espectrales ${}^\bullet E_\bullet^{\bullet,\bullet}$, es entonces convergente.

Como el isomorfismo de $\mathfrak{ym}(n)$-módulos graduados $S(\mathfrak{tym}(n)) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{tym}(n))$ preserva el grado homológico, induce un isomorfismo $S^+(\mathfrak{tym}(n)) \simeq \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)})$, y en consecuencia

$$H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)})) \simeq H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S^+(\mathfrak{tym}(n))) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{tym}(n))).$$

Por el Teorema 4.7.1, $H_3(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)})) = 0$, lo que implica directamente que $H_\bullet(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{tym}(n))) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por otro lado, empleando el mismo teorema, $H_2(\mathfrak{ym}(n), \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathfrak{tym}(n)})) \simeq H_2(\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{tym}(n)) \simeq V(n)[-4]$, y por lo tanto, resulta que $H_2(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{tym}(n))) = 0$, para todo $i \geq 2$.

Empleando la dualidad de Poincaré del álgebra de Yang-Mills, resulta

Proposición 4.7.10. *Los grupos de homología $H^1(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{tym}(n)))$ con $i \geq 2$ y $H^0(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{tym}(n)))$, con $i \geq 1$ son nulos. A su vez, $H^1(\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{tym}(n)) \simeq H^1(\mathfrak{ym}(n), k) \simeq V(n)$.*

A partir de la proposición anterior y teniendo en cuenta que

$$ {}^iE_\infty^{p,q} \simeq F^pH^1(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{ym}(n)))/F^{p+1}H^1(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{ym}(n))), $$

concluimos que $H^1(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{ym}(n)))$ es suma directa (como espacio vectorial graduado) de un subcociente de ${}^iE_2^{1,0}$ y un subcociente de ${}^iE_2^{0,1}$.

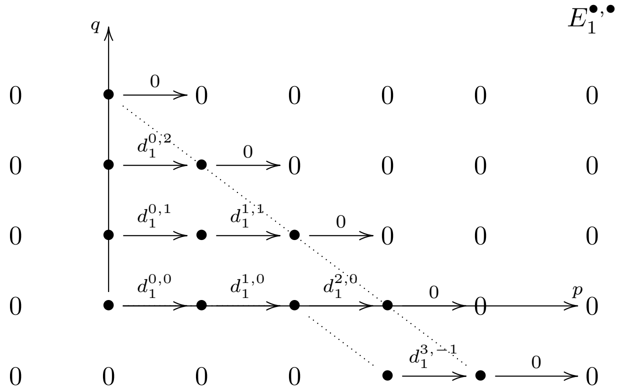

Figura 4.2: Primer paso $E_1^{\bullet,\bullet}$ de la sucesión espectral. Las líneas punteadas indican los límites entre los cuales la sucesión espectral está acotada

Empecemos estudiando ${}^iE_2^{1,0}$. Para ello es necesario calcular el núcleo de ${}^id_1^{1,0}$ y la imagen de ${}^id_1^{0,0}$.

En primer lugar, empleando las identificaciones

$$ {}^iE_1^{0,0} = H^0(\mathfrak{ym}(n), S^iV(n)) \simeq S^iV(n) $$

y

$$ {}^iE_1^{1,0} = H^1(\mathfrak{ym}(n), S^{i-1}V(n) \otimes \mathfrak{tym}(n)) \simeq S^{i-1}V(n) \otimes V(n) $$

dadas por la Proposición 4.7.10, es fácil ver que ${}^id_1^{0,0}$ se identifica con la la diferencial de de Rham d_{dR}^0 restringida a la componente i-ésima del álgebra simétrica $S(V(n))$. Recordamos que la diferencial de de Rham está dada por

$$ \begin{aligned} d_{\mathrm{dR}}^p : S^iV(n) \otimes \Lambda^pV(n) &\to S^{i-1}V(n) \otimes \Lambda^{p+1}V(n) \\ z \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} &\mapsto \partial_j(z) \otimes x_j \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}. \end{aligned} \tag{4.7.25} $$

Los siguientes lemas serán de utilidad en el estudio de la sucesión espectral anterior.

Lema 4.7.11 (cf. [Mov], Lemma 48)**.** *La imagen de la diferencial*

$$ {}^2d_1^{1,0} : {}^2E_1^{1,0} = H^1(\mathfrak{ym}(n), V(n) \otimes \mathfrak{tym}(n)) \to {}^2E_1^{2,0} = H^2(\mathfrak{ym}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n))) $$

es naturalmente isomorfa a $\Lambda^2V(n)$. De hecho, la imagen de ${}^2d_1^{1,0}$ coincide con la imagen del monomorfismo lineal

$$ \bar{\iota} : \Lambda^2V(n) \to H^2(\mathfrak{ym}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n))) \tag{4.7.26} $$

dado por la composición del morfismo $\iota : \Lambda^2 V(n) \to Z^2(\mathrm{YM}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n)))$ *dado por*

$$\iota(x_i \wedge x_j) = \sum_{p,l=1}^{n} \Big(4[x_i, x_l][[x_j, x_p], x_l] \otimes x_p - 4[[x_i, x_p], x_l][x_j, x_l] \otimes x_p \\ - 2[x_i, x_l][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_p + 2[[x_i, x_l], x_p][x_j, x_l] \otimes x_p \Big).$$

y la proyección canónica $Z^2(\mathrm{YM}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n))) \to H^2(\mathfrak{ym}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n)))$.

Demostración. Por la Proposición 4.7.10, $H^1(\mathfrak{ym}(n), V(n) \otimes \mathfrak{tym}(n)) \simeq V(n)^{\otimes 2}$. De hecho, empleando el Teorema 4.7.1, dado $x_i \otimes x_j$, su correspondiente clase de cohomología $\bar{x}_{i,j}$ es la determinada por el cociclo

$$\sum_{l=1}^{n} x_i \otimes [x_j, x_l] \otimes x_l \in V(n) \otimes C^1(\mathrm{YM}(n), \mathfrak{tym}(n)).$$

Por lo tanto, obtenemos que $d_1^{1,0}(\bar{x}_{i,j})$ está dado por el cociclo

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,l=1}^{n} (2[x_i, x_p][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_l - 2[[x_i, x_p], x_l][x_j, x_l] \otimes x_p \\
&- 2[x_i, x_l][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_p + [x_i, x_l][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_p + [[x_i, x_l], x_p][x_j, x_l] \otimes x_p) \\
&= \sum_{p,l=1}^{n} (2[x_i, x_p][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_l - 2[[x_i, x_p], x_l][x_j, x_l] \otimes x_p \\
&- [x_i, x_l][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_p + [[x_i, x_l], x_p][x_j, x_l] \otimes x_p) \\
&= \sum_{p,l=1}^{n} (2[x_i, x_l][[x_j, x_p], x_l] \otimes x_p - 2[[x_i, x_p], x_l][x_j, x_l] \otimes x_p \\
&- [x_i, x_l][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_p + [[x_i, x_l], x_p][x_j, x_l] \otimes x_p).
\end{aligned}$$

Es fácil ver entonces que $d_1^{1,0}(\bar{x}^s_{i,j}) = 0$, si $\bar{x}^s_{i,j} = \bar{x}_{i,j} + \bar{x}_{j,i}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Por otro lado, si $\bar{x}^a_{i,j}$ es la clase asociada a $x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i$, $d_1^{1,0}(\bar{x}^a_{i,j})$ está dado por el cociclo

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,l=1}^{n} (4[x_i, x_l][[x_j, x_p], x_l] \otimes x_p - 4[[x_i, x_p], x_l][x_j, x_l] \otimes x_p \\
&- 2[x_i, x_l][[x_j, x_l], x_p] \otimes x_p + 2[[x_i, x_l], x_p][x_j, x_l] \otimes x_p).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d_1^{1,0}(\bar{x}^a_{i,j})$ está inducido por un cociclo de grado 2.

Por otro lado, ι es inyectiva, como se demuestra a continuación. Consideremos primero el caso $n \neq 4$. Como el morfismo ι es $\mathfrak{so}(n)$-equivariante y no trivial y $\Lambda^2 V(n)$ es irreducible, esto implica que ι es monomórfica. Para el caso $n = 4$ podemos proceder de forma análoga, pero teniendo en cuenta que $\Lambda^2 V(n) \simeq \Gamma_{L_1+L_2} \oplus \Gamma_{L_1-L_2}$ e ι no se anula en ningún sumando directo.

Del complejo $C^{\bullet}(\mathrm{YM}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n)))$, vemos que el espacio $B^2(\mathrm{YM}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n)))_8$ de cobordes de grado 8 es una imágen epimórfica de $S^2(\mathfrak{tym}(n))_4 \simeq S^2(\Lambda^2 V(n))$ bajo el morfismo $\mathfrak{so}(n)$-equivariante d_3. No es difícil de probar que la intersección entre la imágen de ι y $B^2(\mathrm{YM}(n), S^2(\mathfrak{tym}(n)))_8$ es trivial, y por lo tanto $\bar{\iota}$ es también inyectiva. Esto se puede deducir de argumentos sobre las componentes isotípicas, que explicamos a continuación. Si $n \neq 6$, la Observación 4.6.15 dice que $\mathrm{Im}(\iota) \simeq \Lambda^2 V(n)$ no es una componente isotípica de $S^2(\Lambda^2 V(n))$, que implica que la intersección anterior es trivial. El caso $n = 6$ es análogo. $\square$

Lema 4.7.12. *Si denotamos $p : V(n)^{\otimes 2} \to \Lambda^2 V(n)$ la proyección canónica, el siguiente diagrama resulta conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
{}^iE_1^{1,0} \arrow[rr, "{}^id_1^{1,0}"] \arrow[d, equal] & & {}^iE_1^{2,0} \arrow[d, equal] \\
H^1(\mathfrak{ym}(n), S^{i-1}V(n) \otimes \mathfrak{tym}(n)) \arrow[d, "\simeq"] & & H^1(\mathfrak{ym}(n), S^{i-2}V(n) \otimes S^2(\mathfrak{tym}(n))) \\
S^{i-1}V(n) \otimes V(n) \arrow[r, "d_{\mathrm{dR}}^0 \otimes \mathrm{id}_{V(n)}"] & S^{i-2}V(n) \otimes V(n)^{\otimes 2} \arrow[r, "\mathrm{id}_{S^{i-2}V(n)} \otimes p"] & S^{i-2}V(n) \otimes \Lambda^2 V(n) \arrow[u, hook, "\mathrm{id}_{S^{i-2}V(n)} \otimes \bar{\iota}"']
\end{tikzcd}$$

donde d_{dR}^0 es la diferencial de de Rham.

Además, notar que $(\mathrm{id}_{S^{i-2}V(n)} \otimes p) \circ (d_{\mathrm{dR}}^0 \otimes \mathrm{id}_{V(n)}) = d_{\mathrm{dR}}^1$.

Demostración. Basta probar el lema para el caso en que $\bar{c} \in H^1(\mathfrak{ym}(n), S^iV(n))$ esté representado por

$$\sum_{l=1}^{n} z \otimes [x_j, x_l] \otimes x_l,$$

donde $z = x_{j_1} \dots x_{j_{i-1}} \in S^{i-1}V(n)$. En este caso, ${}^id_1^{1,0}(\bar{c})$ está representado por el cociclo

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}\sum_{g=1}^{n}\sum_{h=1}^{i-1}(2x_{j_1} \dots [x_{j_h}, x_g] \dots x_{j_{i-1}} \otimes [[x_j, x_l], x_g] \otimes x_l - 2x_{j_1} \dots [[x_{j_h}, x_g], x_l] \dots x_{j_{i-1}} \otimes [x_j, x_l] \otimes x_g \\
&- 2x_{j_1} \dots [x_{j_h}, x_l] \dots x_{j_{i-1}} \otimes [[x_j, x_l], x_g] \otimes x_g + x_{j_1} \dots [x_{j_h}, x_l] \dots x_{j_{i-1}} \otimes [[x_j, x_l], x_g] \otimes x_g \\
&+ x_{j_1} \dots [[x_{j_h}, x_l], x_g] \dots x_{j_{i-1}} \otimes [x_j, x_l] \otimes x_g \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \partial_r(z)(2[x_r, x_g] \otimes [[x_j, x_l], x_g] \otimes x_l - 2[[x_r, x_g], x_l] \otimes [x_j, x_l] \otimes x_g \\
&- 2[x_r, x_l] \otimes [[x_j, x_l], x_g] \otimes x_g + [x_r, x_l] \otimes [[x_j, x_l], x_g] \otimes x_g + [[x_r, x_l], x_g] \otimes [x_j, x_l] \otimes x_g \\
&= \sum_{r=1}^{n} \partial_r(z) \otimes \iota(x_r \wedge x_j).
\end{aligned}$$

El lema está demostrado. $\square$

Como consecuencia directa de los lemas anteriores resulta la siguiente proposición.

Proposición 4.7.13 (cf. [Mov], Coro. 50)**.** *El siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
{}^iE_1^{0,0} \arrow[r, "{}^id_1^{0,0}"] \arrow[d, "\simeq"] & {}^iE_1^{1,0} \arrow[r, "{}^id_1^{1,0}"] \arrow[d, "\simeq"] & {}^iE_1^{1,1} \arrow[d, equal, "\simeq"] \\
S^iV(n) \arrow[r, "d_{\mathrm{dR}}^1"] & S^{i-1}V(n) \otimes V(n) \arrow[r, "d_{\mathrm{dR}}^2"] & S^{i-2}V(n) \otimes \Lambda^2 V(n)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Como $H_{\mathrm{dR}}^1(S(V(n))) = 0$ (cf. [Wei], Cor. 9.9.3), esto implica que ${}^iE_2^{1,0} = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Por la proposición anterior concluimos que ${}^iE_2^{1,0} = 0$ y por lo tanto $H^1(\mathfrak{ym}(n), S^i(\mathfrak{ym}(n)))$ es isomorfo (como espacio vectorial graduado) a un subcociente de ${}^iE_2^{0,1}$. Como ${}^iE_2^{0,1} = \mathrm{Ker}({}^id_1^{0,1})$, es conveniente hallar explícitamente este morfismo.

Lema 4.7.14 (cf. [Mov], Lemma 52)**.** *La imagen de la diferencial*

$${}^1d_1^{0,1} : {}^1E_1^{0,1} = H^1(\mathfrak{ym}(n), V(n)) \to {}^1E_1^{1,1} = H^2(\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{tym}(n))$$

es naturalmente isomorfa a $S_{\mathrm{irr}}^2 V(n) \simeq S^2V(n)/k.\bar{q}$, donde $\bar{q} = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i$. De hecho, la imagen de ${}^2d_1^{0,1}$ coincide con la imagen del monomorfismo lineal

$$\bar{\iota}' : S_{\mathrm{irr}}^2 V(n) \to H^2(\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{tym}(n)) \tag{4.7.27}$$

dado por la composicióon de $\iota' : S^2_{\mathrm{irr}}V(n) \to Z^2(\mathrm{YM}(n), \mathfrak{tym}(n))$ definido como

$$\iota'(\overline{x_i \otimes_s x_j}) = \sum_{p,l=1}^{n} (-2[[x_i, x_p], x_j] \otimes x_p - 2[[x_j, x_p], x_i] \otimes x_p)$$

y la proyección canónica $Z^2(\mathrm{YM}(n), \mathfrak{tym}(n)) \to H^2(\mathfrak{ym}(n), \mathfrak{tym}(n))$.

Demostración. Por la Proposición 4.7.10, $H^1(\mathfrak{ym}(n), V(n)) \simeq V(n)^{\otimes 2}$. Sea $\bar{x}_{i,j}$ la clase de cohomología asociada a $x_i \otimes x_j \in C^1(\mathrm{YM}(n), V(n))$. De forma análoga al lema anterior hallamos que, si $\bar{x} = \bar{x}_{i,j}$, $d_1^{0,1}(\bar{x})$ está dado por el cociclo

$$\sum_{p=1}^{n}(-2[[x_i, x_p], x_j] \otimes x_p - [[x_i, x_j], x_p] \otimes x_p). \tag{4.7.28}$$

Empleando la identidad de Jacobi es directo comprobar que la identidad anterior es exactamente nula si tomamos $\bar{x}$ como $\bar{x}^a_{i,j} = \bar{x}_{i,j} - \bar{x}_{j,i}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Del mismo modo, por las relaciones de Yang-Mills (3.1.1), si $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_{i,i}$, el cociclo $d_1^{0,1}(\bar{x})$ es identicamente nulo.

Por otro lado, si $\bar{x}^s_{i,j}$ es la clase asociada a $x_i \otimes x_j + x_j \otimes x_i$, $d_1^{0,1}(\bar{x}_{i,j})$ está dado por el cociclo

$$\sum_{p,l=1}^{n} (-2[[x_i, x_p], x_j] \otimes x_p - 2[[x_j, x_p], x_i] \otimes x_p). \tag{4.7.29}$$

Por lo tanto, $d_1^{0,1}(\bar{x}^s_{i,j})$ está inducido por un cociclo de grado 0. En este caso hay cobordes de este grado, que son de la forma

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{1 \le a < b \le n} c_{a,b}[[x_a, x_b], x_p] \otimes x_p. \tag{4.7.30}$$

Por lo tanto, vemos que el cociclo (4.7.29) es equivalente a

$$-4 \sum_{p,l=1}^{n} [[x_i, x_p], x_j] \otimes x_p. \tag{4.7.31}$$

Es fácil ver que ι' es inyectiva, ya que ι' es un morfismo no trivial $\mathfrak{so}(n)$-equivariante y $S^2_{\mathrm{irr}}V(n)$ es un $\mathfrak{so}(n)$-módulo irreducible.

Considerando el complejo $C^\bullet(\mathrm{YM}(n), \mathfrak{tym}(n))$, vemos que el subespacio $B^2(\mathrm{YM}(n), \mathfrak{tym}(n))_6$ expandido por los cobordes de grado 6 es una imágen epimórfica de $(\mathfrak{tym}(n))_4 \simeq \Lambda^2 V(n)$ bajo el morfismo $\mathfrak{so}(n)$-equivariante d_3. La intersección entre $B^2(\mathrm{YM}(n), \mathfrak{tym}(n))_6$ y la imágen de ι' es trivial, ya que $\mathrm{Im}(\iota') \simeq S^2_{\mathrm{irr}}V(n)$ no es una componente isotípica de $\Lambda^2 V(n)$. Esto implica que $\bar{\iota}'$ es monomórfica. □

Lema 4.7.15. *Si denotamos $p' : V(n)^{\otimes 2} \to S^2_{\mathrm{irr}}V(n)$ la proyección canónica, el siguiente diagrama resulta conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
{}^iE_1^{0,1} \arrow[rr, "{}^id_1^{0,1}"] \arrow[d, equal] & & {}^iE_1^{1,1} \\
H^1(\mathfrak{ym}(n), S^iV(n)) \arrow[d, "\simeq"] & & H^1(\mathfrak{ym}(n), S^{i-1}V(n) \otimes \mathfrak{tym}(n)) \arrow[u, equal] \\
S^iV(n) \otimes V(n) \arrow[r, "d^0_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{id}_{V(n)}"] & S^{i-1}V(n) \otimes V(n)^{\otimes 2} \arrow[r, "\mathrm{id}_{S^{i-1}V(n)} \otimes p'"] & S^{i-1}V(n) \otimes S^2_{\mathrm{irr}}V(n) \arrow[u, hook, "\mathrm{id}_{S^{i-1}V(n)} \otimes \bar{\iota}'"']
\end{tikzcd}$$

donde d^0_{dR} es la diferencial de de Rham.

Demostración. Basta probar el lema para el caso en que $\bar{c} \in H^1(\mathfrak{ym}(n), S^iV(n))$ esté representado por $z \otimes x_j$, donde $z = x_{j_1} \dots x_{j_i} \in S^iV(n)$. En este caso, ${}^id_1^{0,1}(\bar{c})$ está representado por el cociclo

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} \sum_{h=1}^{i} (-2x_{j_1} \dots [[x_{j_h}, x_l], x_j] \dots x_{j_i} \otimes x_l + x_{j_1} \dots [[x_{j_h}, x_j], x_l] \dots x_{j_i} \otimes x_l) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \partial_r(z) \otimes (-2[[x_r, x_l], x_j] + [[x_r, x_j], x_l]) \otimes x_l.
\end{aligned}$$

□

Por el lema anterior hallamos que

Proposición 4.7.16 (cf. [Mov], Prop. 53). *El espacio* ${}^{i}E_2^{0,1} = 0$ *para* $i \geq 3$. *Más aún,*

(1) ${}^{0}E_2^{0,1}$ *es el espacio vectorial con base formada por los cociclos* $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$, *donde* $x_i \in V(n) = C^1(\mathrm{YM}(n), k)$,

(2) ${}^{1}E_2^{0,1}$ *es el espacio vectorial con base formada por los cociclos*

$$\{x_i \otimes x_j - x_j - x_i : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\sum_{i}^{n} x_i \otimes x_i\} \subseteq C^1(\mathrm{YM}(n), V(n)),$$

(3) ${}^{2}E_2^{0,1}$ *es el espacio vectorial con base formada por los cociclos*

$$\{\sum_{i=1}^{n} x_j x_i \otimes x_i - \frac{1}{2} x_i^2 \otimes x_j : i = 1, \dots, n\} \subseteq C^1(\mathrm{YM}(n), S^2V(n)).$$

Demostración. En primer lugar, es directo comprobar todos los elementos de $C^1(\mathrm{YM}(n), k)$ son cociclos, ya que $H^1(\mathrm{YM}(n), k) \simeq V(n)$. Por otro lado, por el Lema 4.7.15, $\mathrm{Ker}({}^{1}d_1^{0,1})$ está expandido por los cociclos dados en el ítem (2).

Sea $i \geq 2$ y consideramos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_j \otimes x_j \in S^iV(n) \otimes V(n)$$

un representante de una clase de cohomología $\bar{z}$ en ${}^{i}E_1^{0,1}$. Luego

$$(\mathrm{id}_{S^{i-1}V(n)} \otimes p') \circ (d^1_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{id}_{V(n)})(\sum_{j=1}^{n} z_j \otimes x_j) = \sum_{j,h=1}^{n} \partial_h(z_j) \otimes \overline{x_h \otimes_s x_j} \in S^{i-1}V(n) \otimes S^2_{\mathrm{irr}}V(n).$$

Por lo tanto, $\bar{z} \in \mathrm{Ker}({}^{i}d_1^{0,1})$ si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes

(i) $\partial_h z_j = -\partial_j z_h$, $\forall\, h, j = 1, \dots, n$ tales que $h \neq j$,

(ii) $\partial_h z_h = \partial_j z_j$, $\forall\, h, j = 1, \dots, n$.

Analizaremos en primer lugar el caso $i = 2$. Para ello, suponemos

$$z_j = \sum_{m,l=1}^{n} a^j_{l,m} x_l x_m \in S^2V(n),$$

donde $a^j_{l,m} = a^j_{m,l} \in k$, $\forall\, l, m = 1, \dots, n$. Las condiciones anteriores son equivalentes a

(a) $a^j_{l,m} = -a^l_{j,m}$, $\forall\, j, l, m = 1, \dots, n$ tales que $j \neq l$,

(b) $a^j_{j,m} = a^l_{l,m}$, $\forall\, j, l, m = 1, \dots, n$,

respectivamente. La primera condición implica directamente que, si j, l, m son todos diferentes entre sí,

$$-a^m_{l,j} = a^j_{l,m} = -a^l_{j,m} = a^m_{j,l},$$

y por lo tanto, debe ser $a^j_{l,m} = 0$. Por otro lado, las dos condiciones implican que, dados $j \neq l$,

$$-a^l_{j,j} = a^j_{l,j} = a^l_{l,l}.$$

Notaremos a este elemento α_l.

Aplicando estos resultados podemos simplificar la expresión de z de la forma siguiente

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{m,l=1}^{n} a^j_{l,m} x_l x_m \otimes x_j = \sum_{j=1}^{n}(2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq j}} a^j_{j,m} x_j x_m \otimes x_j + \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq j}} a^j_{m,m} x_m^2 \otimes x_j + a^j_{j,j} x_j^2 \otimes x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq j}} 2\alpha_m x_j x_m \otimes x_j - \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq j}} \alpha_j x_m^2 \otimes x_j + \alpha_j x_j^2 \otimes x_j) \\ &= \sum_{m=1}^{n} 2\alpha_m (\sum_{j=1}^{n} x_j x_m \otimes x_j - \frac{1}{2} x_j^2 \otimes x_m), \end{aligned}$$

donde en la segunda suma omitimos escribir los términos con $a^j_{l,m}$, ya que son nulos. En consecuencia, hemos probado que ${}^2E_1^{0,1}$ está expandido por la base del ítem (3) del enunciado.

Ahora probaremos que ${}^iE_1^{0,1} = 0$ para $i \geq 3$. Esto es consecuencia directa del siguiente lema auxiliar.

Lema 4.7.17. *Sea $n \geq 3$ y sean $z_1, \dots, z_n$ polinomios homogéneos de grado $i \geq 3$ en $k[x_1, \dots, x_n]$ que satisfacen que*

(I) $\partial_h z_j = -\partial_j z_h$, $\forall\, h, j = 1, \dots, n$ tales que $h \neq j$,

(II) $\partial_h z_h = \partial_j z_j$, $\forall\, h, j = 1, \dots, n$.

Entonces $z_1 = \cdots = z_n = 0$.

Demostración. La demostración es elemental pero la incluimos por completitud. Aplicando la condición (I), resulta

$$\partial_{j_2}\partial_{j_3} p_{j_1} = \partial_{j_3}\partial_{j_2} p_{j_1} = -\partial_{j_3}\partial_{j_1} p_{j_2} = -\partial_{j_1}\partial_{j_3} p_{j_2} = \partial_{j_1}\partial_{j_2} p_{j_3} = \partial_{j_2}\partial_{j_1} p_{j_3} = -\partial_{j_2}\partial_{j_3} p_{j_1}.$$

Por lo tanto, $\partial_{j_2}\partial_{j_3} p_{j_1} = 0$, $\forall\, j_1, j_2, j_3$ distintos entre sí. Esto implica que

$$p_j = a_j x_j^i + \sum_{\substack{h = 1, \dots, n \\ h \neq j}} a^j_h x_j^{i-1} x_h.$$

Por otro lado,

$$\partial_j p_j = i a_j x_j^{i-1} + (i-1) \sum_{\substack{h = 1, \dots, n \\ h \neq j}} a^j_h x_j^{i-2} x_h.$$

En particular, la condición (II) implica que $a_j = a^j_h = 0$, $\forall\, j, h = 1, \dots, n$ tales que $h \neq j$. El lema queda demostrado. □

La proposición queda demostrada. □

Proposición 4.7.18 (cf. [Mov], Lemma 54). *El núcleo de ${}^2d_2^{0,1}$ es nulo. En consecuencia, ${}^2E_3^{0,1} = 0$.*

Demostración. Si aplicamos la diferencial ${}^2d_2^{0,1}$ a la clase de cohomología dada por un cociclo de la forma

$$\sum_{l=1}^{n}(x_j x_l \otimes x_l - \frac{1}{2} x_l^2 \otimes x_j), \tag{4.7.32}$$

obtenemos la clase de cohomología dada por el cociclo

$$\sum_{l,m=1}^{n} (2[x_j, x_m] \otimes_s [x_l, x_m] \otimes x_l - 2[x_j, x_l] \otimes_s [x_l, x_m] \otimes x_m - [x_l, x_m] \otimes_s [x_l, x_m] \otimes x_j) \in C_1(\mathrm{YM}(n), S^2(\mathfrak{ym}(n))).$$

Notamos que las clases de cohomología de los cociclos anteriores son linealmente independientes, lo que implica que $\mathrm{Ker}({}^2d_2^{0,1}) = 0$. Esto se puede demostrar como sigue. Teniendo en cuenta que ${}^2E_2^{0,1}$ es un $\mathfrak{so}(n)$-módulo irreducible y ${}^2d_2^{0,1}$ es $\mathfrak{so}(n)$-equivariant, el último es un isomorfismo si no se anula. Como no hay cobordes del mismo grado interno y los cociclos (4.7.32) no se anulan, concluimos que $\mathrm{Ker}({}^2d_2^{0,1}) = 0$. □

Empleando las Proposiciones 4.7.9, 4.7.16 y 4.7.18 hallamos

Teorema 4.7.19. *El morfismo de la Proposición 4.7.9 es biyectivo, en otras palabras,*

$$HH^1(\mathrm{YM}(n)) \simeq k \oplus V(n)[2] \oplus \Lambda^2(V(n)[1]).$$

4.7.3 Homología de Hochschild y cíclica de $\mathrm{YM}(n)$

Generalidades y homología cíclica de álgebras libres graduadas

En esta subsección, A será una k-álgebra (graduada) conexa (i.e., $A_0 = k$). Notaremos $HC_\bullet(A)$ ($HC_\bullet^{gr}(A)$) el $\bullet$-ésimo grupo de homología cíclica (graduada) de A y $\overline{HC}_\bullet(A) = HC_\bullet(A)/HC_\bullet(k)$ ($\overline{HC}_\bullet^{gr}(A) = HC_\bullet^{gr}(A)/HC_\bullet^{gr}(k)$) el $\bullet$-ésimo grupo de homología cíclica (graduada) reducida. De la misma forma, $\overline{HH}_\bullet(A) = HH_\bullet(A)/HH_\bullet(k)$ ($\overline{HH}_\bullet^{gr}(A) = HH_\bullet^{gr}(A)/HH_\bullet^{gr}(k)$) denotará $\bullet$-ésimo grupo de homología de Hochschild reducida. Notar que $\overline{HH}_\bullet(A) = HH_\bullet(A)$, para $\bullet \geq 1$, $\overline{HH}_0(A) = HH_0(A)/k$, $HH_0(A) = HC_0(A)$ y $\overline{HH}_0(A) = \overline{HC}_0(A)$, y lo mismo para el caso graduado.

Como es usual, si A es $\mathbb{N}_0$-graduada, la homología cíclica (graduada) posee dos grados, el homológico, y el interno. Por este motivo, notaremos $HC_{i,j}(A)$ ($HC_{i,j}^{gr}(A)$) y $\overline{HC}_{i,j}(A)$ ($\overline{HC}_{i,j}^{gr}(A)$) las componentes de grado interno j del grupo i-ésimo de homología cíclica (graduada) y de homología cíclica (graduada) reducida de A. Esto implica que es estos grupos son espacios vectoriales graduados con respecto al grado interno.

Si A es un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada, la relación entre las homologías (graduadas) anteriores está dada por la sucesión exacta corta de espacios vectoriales graduados con morfismos homogéneos de grado 0 (cf. [Wei], Thm. 9.9.1, [Lo], Thm. 4.1.13)

$$0 \to \overline{HC}_{i-1}(A) \to \overline{HH}_i(A) \to \overline{HC}_i(A) \to 0 \tag{4.7.33}$$

y

$$0 \to \overline{HC}_{i-1}^{gr}(A) \to \overline{HH}_i^{gr}(A) \to \overline{HC}_i^{gr}(A) \to 0, \tag{4.7.34}$$

proveniente de la sucesión exacta larga de Connes ([Lo], Prop. 5.3.12).

Sea $i \in \mathbb{N}$ y E un espacio vectorial $\mathbb{Z}^i$-graduado, es decir,

$$E = \bigoplus_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^i} E_{\bar{j}}.$$

Como es usual, $|\bar{j}| = j_1 + \cdots + j_i$ denotará el grado total. Para abreviar, diremos que E es i-graduado.

Notar que, empleando la graduación dada por el grado total, un espacio i-graduado resulta graduado en el sentido usual.

De la misma forma que para el caso de un espacio vectorial graduado, la serie de Hilbert del espacio vectorial i-graduado E está dada por la serie formal de potencias en $\mathbb{Z}[[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_i, t_i^{-1}]]$

$$E(t_1, \dots, t_i) = E(\bar{t}) = \sum_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^i} \dim_k(E_{\bar{j}}) \bar{t}^{\bar{j}}.$$

Un álgebra libre i-graduada es el álgebra asociativa TE con la i-graduación asociada a la graduación de E. Del mismo modo que antes, TE resulta un álgebra graduada con la graduación dada por el grado total. En este caso, podemos considerar la homología cíclica graduada $HC_0^{gr}(TE)$ de TE, que coincide con el espacio de palabras cíclicas graduadas $\mathrm{Cyc}^{gr}(E)$. Denotaremos $\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(E) = \mathrm{Cyc}^{gr}(E)/k$ y por lo tanto, $\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(E) \simeq \overline{HC}_0^{gr}(TE)$.

Aunque el siguiente lema es conocido en la literatura, lo incluimos por completitud.

Lema 4.7.20 (cf. [Mov], Prop. 56)**.** *Todos los grupos de homología cíclica graduada reducida de TE son nulos salvo $\overline{HC}_0(TE)$, cuya serie de Hilbert está dada por*

$$\overline{HC}_0^{gr}(TE)(t_1, \dots, t_i) = \overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(E)(t_1, \dots, t_i) = -\sum_{l \geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(1 - E((-1)^{l+1} t_1^l, \dots, (-1)^{l+1} t_i^l)),$$

donde φ es la función de Euler.

Demostración. La demostración de que los grupos de homología cíclica graduada reducida de TE son nulos salvo $\overline{HC}_0^{gr}(TE)$ es directa de la sucesión exacta corta (4.7.33), empleando que $\overline{HH}_\bullet^{gr}(TE) = 0$, para $\bullet \geq 2$ (cf. [Wei], Prop. 9.1.6). Más aún, por el mismo hecho, obtenemos el isomorfismo homogéneo de grado 0

$$HH_1^{gr}(TE) \simeq \overline{HH}_1^{gr}(TE) \simeq \overline{HC}_0^{gr}(TE),$$

por lo que basta calcular este último grupo. Recordamos que $HH_0^{gr}(TE) \simeq HC_0^{gr}(TE)$.

Vamos a calcular $HH_1^{gr}(TE)$, teniendo en cuenta los siguientes isomorfismos homogéneos de grado 0

$$HH_1^{gr}(TE) = H_1^{gr}(TE, TE) \simeq \mathrm{Tor}_1^{TE}(k, TE) \simeq \mathrm{Tor}_1^{TE}(k, S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))) \simeq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Tor}_1^{TE}(k, S_{gr}^p(\mathfrak{f}_{gr}(E))),$$

donde $S^p_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))$ posee la acción adjunta. Denotaremos $\overline{HC}^p_0(TE) = \mathrm{Tor}^{TE}_0(k, S^p_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E)))$. Notar que

$$\overline{HC}^{gr}_0(TE) \simeq HC^{gr}_0(\overline{TE}) \simeq HH^{gr}_0(\overline{TE}) \simeq \mathrm{Tor}^{TE}_0(k,\overline{TE}) \simeq \mathrm{Tor}^{TE}_0(k, S^+_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))) \simeq \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Tor}^{TE}_0(k, S^p_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))). \tag{4.7.35}$$

Empleamos la resolución de TE-módulos graduados a derecha de k (con morfismos homogéneos de grado 0) análoga a la dada en [Wei], Prop. 9.1.6,

$$0 \to E \otimes TE \xrightarrow{\mu} TE \xrightarrow{\epsilon} k \to 0.$$

Al tensorizar con $S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))$ obtenemos el complejo que calcula la homología $HH^{gr}_1(TE)$, que denominaremos $C_\bullet(E)$,

$$0 \to E \otimes S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E)) \to S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E)) \to 0. \tag{4.7.36}$$

El complejo anterior es suma directa de los complejos, que denominaremos $C^p_\bullet(E)$,

$$0 \to E \otimes S^{p-1}_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E)) \to S^p_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E)) \to 0, \tag{4.7.37}$$

para todo $p \in \mathbb{N}_0$. Notar que, a partir del complejo anterior y la sucesión exacta corta (4.7.33), resulta que

$$\mathrm{Tor}^{TE}_1(k, S^p_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))) \simeq \overline{HC}^{p+1}_0(TE), \forall\, p \geq 0$$

(cf. [Wei], Thm. 9.1.6, Prop. 6.1.10).

Como los morfismos de los complejos anterior son homogéneos con repecto al grado interno de E, la característica de Euler de (4.7.36) coincide con la de su homología. Por lo tanto,

$$S^p_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t}) - S^{p-1}_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t})E(\bar{t}) = \chi_{C^p_\bullet(E)(\bar{t})} = \chi_{H(C^p_\bullet(E))(\bar{t})} = HC^p_0(TE)(\bar{t}) - \overline{HC}^{p+1}_0(TE)(\bar{t}).$$

Al sumar las identidades anteriores, por un lado hallamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{N}_0} \chi_{C^p_\bullet(E)(\bar{t})} t^p &= \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (S^p_{gr}(\mathfrak{f}(E))(\bar{t}) - S^{p-1}_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t})E(\bar{t}))t^p \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (S^p(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t}) - S^{p-1}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t})E(\bar{t}))t^p \\
&= (1 - E(\bar{(t)})) \sum_{p\in\mathbb{N}_0} S^p_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t})t^p \\
&= (1 - E(\bar{(t)}))S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t}, t),
\end{aligned} \tag{4.7.38}$$

mientras que, por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{N}_0} \chi_{H(C^p_\bullet(E))(\bar{t})} t^p &= \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (HC^p_0(TE)(\bar{t}) - \overline{HC}^{p+1}_0(TE)(\bar{t}))t^p \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (S^p(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t}) - S^{p-1}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t})E(\bar{t}))t^p \\
&= (1 - \frac{1}{t}) \sum_{p\in\mathbb{N}} \overline{HC}^p_0(TE)(\bar{t})t^p + 1. \\
&= (1 - \frac{1}{t})\overline{HC}^{gr}_0(TE)(\bar{t}, t) + 1,
\end{aligned} \tag{4.7.39}$$

donde

$$\overline{HC}^{gr}_0(TE)(\bar{t}, t) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \overline{HC}^p_0(TE)(\bar{t})t^p.$$

Por lo tanto,

$$\overline{HC}^{gr}_0(TE)(\bar{t}, t) = \frac{t((S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t}, t))(1 - E(\bar{t})) - 1)}{t - 1}.$$

Notar que, como $\overline{HC}_0^{gr}(TE)(\bar{t}) = \overline{HC}_0^{gr}(TE)(\bar{t},1)$, la expresión anterior es una suma formal en t que en realidad converge para cada $\bar{t}^{\bar{i}}$ fijo.

En consecuencia, podemos calcular esta última expresión empleando la regla de Bernouilli-L'Hospital, es decir,

$$\overline{HC}_0^{gr}(TE)(\bar{t}) = \lim_{t\to 1}(\frac{\partial S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t},t)}{\partial t}(1-E(\bar{t}))).$$

Si E' es un espacio vectorial i-graduado, entonces es sencillo probar que (cf. [PP], Chapter 2, Section 2, Example 3)

$$S_{gr}(E')(\bar{t}) = \frac{\prod_{|\bar{j}|\in 2.\mathbb{Z}+1}(1+\bar{t}^{\bar{j}})^{\dim(E'_{\bar{j}})}}{\prod_{|\bar{j}|\in 2.\mathbb{Z}}(1-\bar{t}^{\bar{j}})^{\dim(E'_{\bar{j}})}}. \tag{4.7.40}$$

Luego,

$$S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t},t) = \frac{\prod_{|\bar{j}|\in 2.\mathbb{Z}+1}(1+t\bar{t}^{\bar{j}})^{\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})}}{\prod_{|\bar{j}|\in 2.\mathbb{Z}}(1-t\bar{t}^{\bar{j}})^{\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} t\frac{\partial \log(S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(-\bar{t},t))}{\partial t} &= \sum_{|\bar{j}|\in 2.\mathbb{Z}+1}\frac{-t\bar{t}^{\bar{j}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})}{1-t\bar{t}^{\bar{j}}} + \sum_{|\bar{j}|\in 2.\mathbb{Z}}\frac{t\bar{t}^{\bar{j}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})}{1-t\bar{t}^{\bar{j}}} \\ &= \sum_{\bar{j}\in\mathbb{N}_0^i}\frac{(-1)^{|\bar{j}|}t\bar{t}^{\bar{j}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})}{1-t\bar{t}^{\bar{j}}}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{\partial S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(-\bar{t},t)}{\partial t} = \sum_{\bar{j}\in\mathbb{N}_0^i}\frac{(-1)^{|\bar{j}|}t\bar{t}^{\bar{j}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})}{1-t\bar{t}^{\bar{j}}}S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(-\bar{t},t).$$

En este caso el límite cuando t tiende a 1 es sencillo

$$\overline{HC}_0^{gr}(TE)(\bar{t}) = \sum_{\bar{j}\in\mathbb{N}_0^i}\frac{(-1)^{|\bar{j}|}\bar{t}^{\bar{j}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})}{1-\bar{t}^{\bar{j}}}S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(-\bar{t},1)(1-E(-\bar{t})), \tag{4.7.41}$$

ya que, como $S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E)) \simeq \mathcal{U}_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E)) \simeq TE$ es Koszul, resulta

$$S_{gr}(\mathfrak{f}_{gr}(E))(\bar{t},1) = (1-E(\bar{t}))^{-1}. \tag{4.7.42}$$

Por otro lado, a partir de las identidades (4.7.40) y (4.7.42), resulta

$$\begin{aligned} \log(\frac{1}{1-E'(-\bar{t})}) = -\log(1-E'(-\bar{t})) &= \sum_{|\bar{j}|\in 2\mathbb{Z}+1}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E')_{\bar{j}})\log(1-\bar{t}^{\bar{j}}) \\ &- \sum_{|\bar{j}|\in 2\mathbb{Z}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E')_{\bar{j}})\log(1-\bar{t}^{\bar{j}}) = \sum_{\bar{j}\in\mathbb{N}_0^i}(-1)^{|\bar{j}|}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E')_{\bar{j}})\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{z^{m\bar{j}}}{m}. \end{aligned} \tag{4.7.43}$$

A su vez, por la identidad

$$\sum_{\substack{r,\,s\,\in\,\mathbb{N}\\ rs\,=\,t}}\frac{\varphi(r)}{rs} = 1, \forall\, t\in\mathbb{N},$$

resulta

$$\begin{aligned} -\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{\varphi(l)}{l}\log(1-E(-t_1^l,\dots,-t_i^l)) &= \sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{\bar{j}\in\mathbb{N}_0^i}\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{\varphi(l)}{l}(-1)^{|\bar{j}|}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})\frac{z^{ml\bar{j}}}{m} \\ &= \sum_{\bar{j}\in\mathbb{N}_0^i}\sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^{|\bar{j}|}z^{p\bar{j}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}})\frac{\varphi(l)}{lm} \\ &= \sum_{\bar{j}\in\mathbb{N}_0^i}\sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^{|\bar{j}|}z^{p\bar{j}}\dim(\mathfrak{f}_{gr}(E)_{\bar{j}}) = \overline{HC}_0(TE)(-\bar{t}). \end{aligned} \tag{4.7.44}$$

El lema queda demostrado. □

Podemos aplicar la proposición anterior para el estudio de la homología cíclica (no graduada) de un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada A. Recordamos que

$$\chi_{\overline{HC}_\bullet(A)(t)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p\overline{HC}_p(A)(t). \tag{4.7.45}$$

En este caso, hallamos la siguiente proposición, conocida en la literatura (cf. [I]), que se encuentra incorrecta en [Mov].

Proposición 4.7.21. *(cf. [Mov], Prop. 58) Si A es un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada, entonces*

$$\chi_{\overline{HC}_\bullet(A)(t)} = \sum_{l\geq 1}\frac{\varphi(l)}{l}\log(A(t^l)).$$

Demostración. Supongamos en principio que A está concentrada en grados pares y sea $\bar{A}$ el núcleo de la aumentación de A. Empleando [Lo], Proposición 2.2.16, resulta que $\overline{HC}_\bullet(A) \simeq HC_\bullet(\bar{A})$. Consideramos el siguiente espacio bigraduado $B_{\bullet,\bullet}$

$$B_{p,q} = \begin{cases}\bar{A}_p, & \text{si } q=1,\\ 0, & \text{si no.}\end{cases}$$

La identidad induce un morfismo del complejo de Connes $C^\lambda_\bullet(\bar{A})$ en $\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)$ (cf. [Lo], 2.1.4). Si consideramos la graduación en el complejo de Connes $C^\lambda_\bullet(\bar{A})$ dada por $\bullet + p + 1$, donde p es el grado interno de A y la graduación total en $\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)$, el morfismo anterior es homogéneo de grado 0. En consecuencia,

$$\dim(\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)_{p,q+1}) = \dim(C^\lambda_q(\bar{A})_p), \tag{4.7.46}$$

donde $C^\lambda_q(\bar{A})_p$ es la componente de grado interno p de $C^\lambda_q(\bar{A})$.

Además,

$$\chi_{C^\lambda_\bullet(\bar{A})} = \sum_{j\in\mathbb{N}}(-1)^j C^\lambda_j(\bar{A})(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0}(-1)^j\overline{HC}_j(A)(t) = \chi_{\overline{HC}_\bullet(A)(t)}. \tag{4.7.47}$$

Como

$$\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)(t_1,t_2) = \sum_{i_1,i_2\in\mathbb{N}_0}\dim(\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)_{i_1,i_2})t_1^{i_1}t_2^{i_2},$$

empleando las identidades (4.7.46) y (4.7.47) resulta que

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)(t,-1) &= \sum_{i_1,i_2\in\mathbb{N}_0}(-1)^{i_2}\dim(\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)_{i_1,i_2})t^{i_1}\\ &= \sum_{i_2\in\mathbb{N}_0}(-1)^{i_2}\sum_{i_1\in\mathbb{N}_0}\dim(C^\lambda_{i_2-1}(\bar{A})_{i_1})t^{i_1} = \sum_{i_2\in\mathbb{N}_0}(-1)^{i_2}C^\lambda_{i_2-1}(\bar{A})(t)\\ &= -\chi_{C^\lambda_\bullet(\bar{A})(t)} = -\chi_{\overline{HC}_\bullet(A)(t)}.\end{aligned} \tag{4.7.48}$$

Por otro lado, empleando que

$$B(t_1,t_2) = (A(t_1)-1)t_2$$

y el Lema 4.7.20, hallamos que

$$\overline{\mathrm{Cyc}}^{gr}(B)(t,-1) = -\sum_{l\geq 1}\frac{\varphi(l)}{l}\log(1-B((-1)^{l+1}t^l,-1)) = -\sum_{l\geq 1}\frac{\varphi(l)}{l}\log(A((-1)^{l+1}t^l)).$$

Finalmente, por la identidad (4.7.48) concluimos que

$$\chi_{\overline{HC}_\bullet(A)(t)} = \sum_{l\geq 1}\frac{\varphi(l)}{l}\log(A((-1)^{l+1}t^l)) = \sum_{l\geq 1}\frac{\varphi(l)}{l}\log(A(t^l)),$$

ya que A está concentrada en grados pares.

Ahora supongamos que A es un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada cualquiera. En este caso, considerando la graduación duplicada de A obtenemos un álgebra concentrada en grados pares, es decir, se define A' tal que

$$\begin{cases} A'_p = A_{\frac{p}{2}}, & \text{si } p \in 2\mathbb{N}_0, \\ A'_p = 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

El resultado anterior aplicado a A' nos permite hallar la característica de Euler $\chi_{\overline{HC}_\bullet(A')(t)}$. Como $A'(t) = A(t^2)$ y $\chi_{\overline{HC}_\bullet(A')(t)} = \chi_{\overline{HC}_\bullet(A)(t^2)}$, resulta

$$\chi_{\overline{HC}_\bullet(A)(t)} = \sum_{l\geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(A(t^l)).$$

□

Usando las Proposiciones 4.7.21 y 3.4.1, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.7.22. *Si* $\mathrm{YM}(n)$ *es el álgebra de Yang-Mills con* n *generadores con la graduación usual, entonces*

$$\chi_{\overline{HC}_\bullet(\mathrm{YM}(n))(t)} = \sum_{l\geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(\mathrm{YM}(n)(t^l)) = -\sum_{l\geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(1 - nt^l + nt^{3l} - t^{4l}).$$

Homología de Hochschild y homología cíclica del álgebra de Yang-Mills

Empezamos observando que por el Corolario 4.3.6, el Teorema 4.7.19 y las Proposiciones 4.7.22 y 3.4.1,

$$\begin{aligned} \overline{HH}_3(\mathrm{YM}(n))(t) &= t^4, \\ \overline{HH}_2(\mathrm{YM}(n))(t) &= (\frac{n(n-1)}{2} + 1)t^4 + nt^3, \\ \chi_{\overline{HC}_\bullet(\mathrm{YM}(n))(t)} &= -\sum_{l\geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(1 - nt^l + nt^{3l} - t^{4l}), \end{aligned}$$

donde usamos la dualidad de Poincaré. Vamos a hallar las series de Hilbert de los demás grupos de homología a partir de éstos.

Por la sucesión exacta corta (4.7.33) y teniendo en cuenta que $HH_\bullet(\mathrm{YM}(n)) = 0$ para $\bullet \geq 4$, concluimos que $\overline{HC}_\bullet(\mathrm{YM}(n)) = 0$ para $\bullet \geq 3$. Más aún,

$$\begin{aligned} \overline{HC}_2(\mathrm{YM}(n))(t) &= \overline{HH}_3(\mathrm{YM}(n))(t), \\ \overline{HC}_1(\mathrm{YM}(n))(t) &= \overline{HH}_2(\mathrm{YM}(n))(t) - \overline{HC}_2(\mathrm{YM}(n))(t) \\ &= \overline{HH}_2(\mathrm{YM}(n))(t) - \overline{HH}_3(\mathrm{YM}(n))(t), \\ \overline{HC}_0(\mathrm{YM}(n))(t) &= \overline{HH}_0(\mathrm{YM}(n))(t). \end{aligned} \tag{4.7.49}$$

Como se notó en [CD2], Eq. (1.22), a partir de la propiedad Koszul de $\mathrm{YM}(n)$, resulta que

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \overline{HH}_i(\mathrm{YM}(n))(t) = 0. \tag{4.7.50}$$

Finalmente, se puede verificar directamente de (4.7.33) que

$$\chi_{\overline{HC}_\bullet(\mathrm{YM}(n))(t)} = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \overline{HC}_i(\mathrm{YM}(n))(t) = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i (3-i) \overline{HH}_i(\mathrm{YM}(n))(t). \tag{4.7.51}$$

Estas dos últimas identidades forman el siguiente sistema lineal determinado

$$\begin{aligned} 3\overline{HH}_0(\mathrm{YM}(n))(t) - 2\overline{HH}_1(\mathrm{YM}(n))(t) &= \chi_{\overline{HC}_\bullet(\mathrm{YM}(n))(t)} - \overline{HH}_2(\mathrm{YM}(n))(t), \\ \overline{HH}_0(\mathrm{YM}(n))(t) - \overline{HH}_1(\mathrm{YM}(n))(t) &= \overline{HH}_3(\mathrm{YM}(n))(t) - \overline{HH}_2(\mathrm{YM}(n))(t), \end{aligned}$$

que da como solución

$$\begin{aligned} \overline{HH}_0(\mathrm{YM}(n))(t) &= \chi_{\overline{HC}_\bullet(\mathrm{YM}(n))(t)} - 2\overline{HH}_3(\mathrm{YM}(n))(t) + \overline{HH}_2(\mathrm{YM}(n))(t), \\ \overline{HH}_1(\mathrm{YM}(n))(t) &= \chi_{\overline{HC}_\bullet(\mathrm{YM}(n))(t)} - 3\overline{HH}_3(\mathrm{YM}(n))(t) + 2\overline{HH}_2(\mathrm{YM}(n))(t), \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado

Teorema 4.7.23. *Si $n \geq 3$, entonces la homología de Hochschild está dada por*

$$
\begin{aligned}
&HH_\bullet(\mathrm{YM}(n))(t) = 0, && \textit{si } \bullet \geq 4,\\
&HH_3(\mathrm{YM}(n))(t) = t^4,\\
&HH_2(\mathrm{YM}(n))(t) = (\frac{n(n-1)}{2} + 1)t^4 + nt^3,\\
&HH_1(\mathrm{YM}(n))(t) = -\sum_{l\geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(1 - nt^l + nt^{3l} - t^{4l}) + (n(n-1) - 1)t^4 + 2nt^3,\\
&HH_0(\mathrm{YM}(n))(t) = -\sum_{l\geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(1 - nt^l + nt^{3l} - t^{4l}) + (\frac{n(n-1)}{2} - 1)t^4 + nt^3 + 1,
\end{aligned}
$$

Por otro lado, la homología cíclica está dada por

$$
\begin{aligned}
&HC_{4+2\bullet}(\mathrm{YM}(n))(t) = 1, && \textit{si } \bullet \geq 0,\\
&HC_{3+2\bullet}(\mathrm{YM}(n))(t) = 0, && \textit{si } \bullet \geq 0,\\
&HC_2(\mathrm{YM}(n))(t) = 1 + t^4,\\
&HC_1(\mathrm{YM}(n))(t) = \frac{n(n-1)}{2}t^4 + nt^3,\\
&HC_0(\mathrm{YM}(n))(t) = -\sum_{l\geq 1} \frac{\varphi(l)}{l} \log(1 - nt^l + nt^{3l} - t^{4l}) + (\frac{n(n-1)}{2} - 1)t^4 + nt^3 + 1.
\end{aligned}
$$

Por completitud citamos el siguiente teorema, que se obtiene directamente del Ejemplo 3.2.6 y las relaciones (4.7.49)

Teorema 4.7.24. *Si $n = 2$, entonces la homología de Hochschild está dada por*

$$
\begin{aligned}
&HH_\bullet(\mathrm{YM}(2))(t) = 0, && \textit{si } \bullet \geq 4,\\
&HH_3(\mathrm{YM}(2))(t) = \frac{t^4}{1-t^2},\\
&HH_2(\mathrm{YM}(2))(t) = 2t^3\frac{1 + t - t^2}{(1-t^2)(1-t)},\\
&HH_1(\mathrm{YM}(2))(t) = t\frac{(2-t)(1+t^2)}{(1-t)^2},\\
&HH_0(\mathrm{YM}(2))(t) = \frac{1}{(1-t)^2}.
\end{aligned}
$$

A su vez, la homología cíclica está dada por

$$
\begin{aligned}
&HC_{4+2\bullet}(\mathrm{YM}(2))(t) = 1, && \textit{si } \bullet \geq 0,\\
&HC_{3+2\bullet}(\mathrm{YM}(2))(t) = 0, && \textit{si } \bullet \geq 0,\\
&HC_2(\mathrm{YM}(2))(t) = 1 + \frac{t^4}{1-t^2},\\
&HC_1(\mathrm{YM}(2))(t) = \frac{(2-t)t^3}{(1-t)^2},\\
&HC_0(\mathrm{YM}(2))(t) = \frac{1}{(1-t)^2}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 5

Representaciones del álgebra de Weyl

Debido al Teorema 3.5.1, toda representación de (toda) álgebra de Weyl es una representación de (toda) álgebra de Yang-Mills con $n \geq 3$. En esta sección vamos a presentar el estudio hecho en [BB] de ciertas subcategorías de representaciones de las álgebras de Weyl. Esta información nos ayudará a entender parcialmente la correspondiente categoría de módulos sobre las álgebras de Yang-Mills.

5.1 Definición de álgebra de Weyl generalizada

Las representaciones de $A_n(k)$ están más o menos descriptas en [BB], donde aparecen como caso particular de representaciones álgebras de Weyl generalizadas (o álgebras de Bavula).

En las definiciones que siguen supondremos que k es un anillo conmutativo con unidad. Sea D una k-álgebra (con unidad), $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ una n-upla de automorfismos k-lineales de D que conmutan entre sí y $a = (a_1, \dots, a_n)$ una n-upla de elementos centrales de D tales que $\sigma_i(a_j) = a_j$, para $i \neq j$. El **álgebra de Weyl generalizada (GWA), o álgebra de Bavula, sobre k de grado n**, $D(\sigma, a)$, es el álgebra sobre D generada por las indeterminadas $x_1^+, \dots, x_n^+, x_1^-, \dots, x_n^-$ sujetas a las relaciones

$$x_i^- x_i^+ = a_i, \qquad x_i^+ x_i^- = \sigma_i(a_i),$$
$$x_i^{\pm} d = \sigma_i^{\pm 1}(d) x_i^{\pm}, \; \forall\, d \in D,$$
$$[x_i^-, x_j^-] = [x_i^+, x_j^+] = [x_i^+, x_j^-] = 0, \; \forall\, i \neq j.$$

Observación 5.1.1. *Notar que el producto tensorial de una colección de k-álgebras de Bavula $\{D_i(\sigma_i, a^i) : i = 1, \dots, m\}$, donde $D_i(\sigma_i, a^i)$ es de grado n_i, es un álgebra de Bavula:*

$$D_1(\sigma^1, a^1) \otimes_k \cdots \otimes_k D_m(\sigma^m, a^m) = (D_1 \otimes_k \cdots \otimes_k D_m)((\sigma^1, \dots, \sigma^m), (a^1, \dots, a^m)),$$

de grado $n_1 + \cdots + n_m$, donde $\sigma^i = (\sigma_1^i, \dots, \sigma_{n_i}^i)$ es una n_i-upla de automorfismos de D_i que conmutan y $a^i = (a_1^i, \dots, a_{n_i}^i)$ es una n_i-upla de elementos centrales de D_i tales que $\sigma_j^i(a_k^i) = a_k^i$, para $k \neq j$, con $j, k = 1, \dots, n_i$.

A su vez, si $A = D(\sigma, a)$ es una k-álgebra de Weyl generalizada de grado n, entonces su álgebra opuesta A^{op} es un álgebra de Weyl generalizada de grado n, teniendo en cuenta que

$$A^{\mathrm{op}} \simeq D^{\mathrm{op}}(\sigma^{-1}, \sigma(a)),$$

donde $\sigma^{-1} = (\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1})$ y $\sigma(a) = (\sigma_1(a_1), \dots, \sigma_n(a_n))$.

De ahora en adelante, a menos que sea necesario, omitiremos en general la referencia al anillo de base.

Sea $D(\sigma, a)$ un álgebra de Bavula de grado n, y sea $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Definimos

$$v_{\bar{m}} = (x_1^{\mathrm{sgn}(m_1)})^{|m_1|} \dots (x_n^{\mathrm{sgn}(m_n)})^{|m_n|},$$

donde $(x_i^{\pm})^0 = 1_D$. Definiendo $D(\sigma, a)_{\bar{m}} = D.v_{\bar{m}} = v_{\bar{m}}.D$, entonces el álgebra de Weyl generalizada resulta graduada de la forma

$$D(\sigma, a) = \bigoplus_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^n} D(\sigma, a)_{\bar{m}},$$

y la graduación es compatible con la estructura multiplicativa, i.e.

$$D(\sigma,a)_{\bar{m}}D(\sigma,a)_{\bar{m}'} \subseteq D(\sigma,a)_{\bar{m}+\bar{m}'}, \forall\, \bar{m},\bar{m}' \in \mathbb{Z}^n,$$

es decir, $D(\sigma,a)$ es un álgebra $\mathbb{Z}^n$-graduada. Esto implica que $D(\sigma,a)$ es libre como D-módulo a izquierda y a derecha.

Supongamos que $A = D(\sigma,a)$ sea un álgebra de Weyl generalizada de grado 1, i.e., $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(D)$ y $a \in \mathcal{Z}(D)$. Por lo tanto, el álgebra A está generada por D y las indeterminadas $x = x_1^+$ e $y = x_1^-$, con las relaciones

$$yx = a, \qquad xy = \sigma(a), \qquad xd = \sigma(d)x, \qquad yd = \sigma^{-1}(d)y, \forall\, d \in D.$$

Por lo dicho antes, A es $\mathbb{Z}$-graduada $A = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} A_m$, donde $A_m = Dv_m = v_m D$, y

$$v_m = \begin{cases} x^m & \text{si } m > 0, \\ y^{-m} & \text{si } m < 0, \\ 1_D & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Esto implica que existen $\langle m,m'\rangle_l, \langle m,m'\rangle_r \in D$ tales que

$$v_m v_{m'} = \langle m,m'\rangle_l v_{m+m'} = v_{m+m'}\langle m,m'\rangle_r.$$

Más aún, $\langle m,m'\rangle_l = \sigma^{m+m'}(\langle m,m'\rangle_r)$ y si $m,m' > 0$, entonces

$$\langle m,-m'\rangle_l = \begin{cases} \sigma^m(a)\dots\sigma^{m-m'+1}(a) & \text{si } m \geq m', \\ \sigma^m(a)\dots\sigma(a) & \text{si } m \leq m', \end{cases} \qquad \langle -m,m'\rangle_l = \begin{cases} \sigma^{-m+1}(a)\dots\sigma^{-m+m'}(a) & \text{si } m \geq m', \\ \sigma^{-m+1}(a)\dots\sigma(a) & \text{si } m \leq m', \end{cases}$$

y en todo otro caso es $\langle m,m'\rangle = 1$.

Ejemplo 5.1.2. *El álgebra de Weyl $A_1(k) \simeq k\langle x,\partial\rangle/\langle[\partial,x]-1\rangle$ es isomorfa a un álgebra de Bavula con $D = k[h]$, $\sigma(h) = h-1$ y $a = h$, mediante el isomorfismo*

$$\begin{aligned} A_1(k) &\to k[h](\sigma,a), \\ x &\mapsto x^+, \\ \partial &\mapsto x^-, \\ \partial x &\mapsto h. \end{aligned}$$

Además la n-ésima álgebra de Weyl $A_n(k) \simeq \otimes_{i=1}^n A_1(k) \simeq k[h_1,\dots,h_n](\sigma_1,\dots,\sigma_n,h_1,\dots,h_n)$ es un álgebra de Bavula por la Observación 5.1.1, donde $\sigma_i(h_j) = h_j - \delta_{ij}$ (cf. [BB], Sec. 1.4).

Sea ahora $D(\sigma,a)$ un álgebra de Bavula de grado n. Del mismo modo que para el caso de grado 1, las relaciones del álgebra implican que existen $\langle\bar{m},\bar{m}'\rangle_l, \langle\bar{m},\bar{m}'\rangle_r \in D$ tales que

$$v_{\bar{m}}v_{\bar{m}'} = \langle\bar{m},\bar{m}'\rangle_l v_{\bar{m}+\bar{m}'} = v_{\bar{m}+\bar{m}'}\langle\bar{m},\bar{m}'\rangle_r.$$

De hecho, resulta

$$\langle\bar{m},\bar{m}'\rangle_l = \prod_{i=1}^n \langle m_i,m_i'\rangle_l, \qquad \langle\bar{m},\bar{m}'\rangle_r = \prod_{i=1}^n \langle m_i,m_i'\rangle_r,$$

donde cada $\langle m_i,m_i'\rangle_l$ y $\langle m_i,m_i'\rangle_r$ es el definido anteriormente.

Proposición 5.1.3. *Sea $D(\sigma,a)$ un álgebra de Weyl generalizada sobre el anillo D. Entonces*

(i) Si D es noetheriana como D-módulo a izquierda (resp. derecha), luego $D(\sigma,a)$ es noetheriana como $D(\sigma,a)$-módulo a izquierda (resp. derecha).

(ii) Si D es íntegra y $a_i \neq 0, \forall\, i = 1,\dots,n$, entonces $D(\sigma,a)$ es íntegra.

Demostración. Cf. [Ba]. □

De ahora en adelante, del mismo modo que en [BB], Sec. 1.4, trabajaremos con álgebras de Bavula sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y $D = k[h_1, \ldots, h_n]$, tales que los automorfismos cumplan que

$$\sigma_i(h_j) = \begin{cases} h_j, & \text{si } j \neq i, \\ \lambda_i h_i + \mu_i, & \text{si } j = i, \end{cases}$$

donde $\lambda_i, \mu_i \in k$, y $a_i \in k[h_i] \subseteq k[h_1, \ldots, h_n]$, para $i = 1, \ldots, n$. De manera directa,

$$D(\sigma, a) = \bigotimes_{i=1}^{n} k[h_i](\sigma_i|_{k[h_i]}, a_i)$$

(cf. Observación 5.1.1).

Denotaremos G el grupo generado por los automorfismos σ_i, $i = 1, \ldots, n$, que actúa de manera natural en el conjunto de ideales maximales $\mathrm{mSpec}(D)$ de D. Notar que si G_i es el grupo generado por σ_i, entonces $G \simeq G_1 \times \cdots \times G_n$. A su vez, $\mathrm{mSpec}(D)$ se identifica con k^n, ya que todo ideal maximal de D es de la forma $\langle \{h_1 - \gamma_1, \ldots, h_n - \gamma_n\} \rangle$, donde $\gamma_i \in k$, $i = 1, \ldots, n$. Llamaremos $max : \mathrm{mSpec}(D) \xrightarrow{\simeq} k^n$ al isomorfismo k-lineal. Mediante esta identificación, la acción de G en k^n es de la forma

$$\sigma_i.(\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_n) = (\gamma_1, \ldots, \lambda_i^{-1}(\gamma_i - \mu_i), \ldots, \gamma_n).$$

Sea H el k-espacio vectorial k^n, y sea $\{h_i : i = 1, \ldots, n\}$ su base canónica. El dual $H^* = \mathrm{Hom}_k(H, k)$ de este espacio vectorial se denomina **espacio de pesos de** $D(\sigma, a)$, y un elemento ξ de H^*, un **peso de** $D(\sigma, a)$. Notamos que H^* está provisto de la acción dual de la acción de G en H, i.e., $\sigma_i.\xi = \xi \circ \sigma_i^{-1}$.

En el caso $n = 1$, una órbita de $\gamma \in k$ es el conjunto de los elementos de la forma $\mathcal{O}(\gamma) = \{\sigma^i(\gamma) : i \in \mathbb{Z}\} \subseteq k$. La órbita se dirá **degenerada** si contiene una raíz del polinomio $a \in k[h]$. En caso contrario se dirá **no degenerada**. A su vez, una órbita $\mathcal{O}(\gamma)$ se dice **cíclica de longitud** l (resp. **lineal**) si su cardinal es finito e igual a l (resp. infinito). El conjunto de las órbitas cíclicas (resp. lineales) se denotará Cyc (resp. Lin). A su vez, el conjunto de las órbitas cíclicas (resp. lineales) no degeneradas se denotará Cycn (resp. Linn). En el caso del álgebra de Weyl $A_1(k)$, donde $\sigma(\gamma) = \gamma + 1$, todas la órbitas de las álgebras de Weyl son cíclicas, y una órbita $\mathcal{O}$ es degenerada si y sólo si $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$.

Cada órbita lineal $\mathcal{O}(\gamma)$ puede ser identificada con el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\gamma) &\to \mathbb{Z} \\ \sigma^i(\gamma) &\mapsto i. \end{aligned}$$

Esto induce un orden en $\mathcal{O}(\gamma)$ y, de hecho, tenemos definido los intervalos de la forma $(-\infty, \alpha]$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, etc. Por ejemplo, $[\alpha, \beta] = \{\sigma^i(\gamma) : a \leq i \leq b\}$, donde $\sigma^a(\gamma) = \alpha$ y $\sigma^b(\gamma) = \beta$.

Si la órbita $\mathcal{O}(\gamma)$ es cíclica de longitud l, se define el segmento $(\alpha, \beta] = \{\sigma^i(\alpha) : 0 < i \leq j \leq l\}$ donde j es el mínimo entero positivo que cumple que $\sigma^j(\alpha) = \beta$.

Las raíces $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$ (resp. $\lambda_1, \ldots, \lambda_s = \sigma^{i_s}(\lambda_1)$, con $0 < i_2 < \cdots < i_s < l$) del polinomio a en una órbita lineal (resp. cíclica de longitud l) degenerada $\mathcal{O}$ forman una descomposición en $s + 1$ conjuntos disjuntos (resp. s conjuntos disjuntos)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = (-\infty, \lambda_1], \Gamma_2 = (\lambda_1, \lambda_2], \ldots, \Gamma_s = (\lambda_{s-1}, \lambda_s], \Gamma_{s+1} = (\lambda_s, \infty) \\ (resp., \Gamma_1 = (\lambda_s, \lambda_1], \Gamma_2 = (\lambda_1, \lambda_2], \ldots, \Gamma_s = (\lambda_{s-1}, \lambda_s]). \end{aligned}$$

Diremos que dos elementos α y β en k son **equivalentes**, $\alpha \sim \beta$, si pertenecen a la misma órbita y ésta es no degenerada, o, si es degenerada, pertenecen al mismo conjunto Γ_i. El conjunto de las clases de equivalencia en la órbita $\mathcal{O}$ se denotará $\hat{\mathcal{O}}$ y $\Gamma(\gamma)$ la clase equivalencia de $\gamma \in k$. Una clase de equivalencia Γ se denomina **marcada** si contiene una raíz de a.

En el caso general ($n \in \mathbb{N}$), vemos que $D(\sigma, a) = \otimes_{i=1}^{n} D_i(\sigma_i, a_i)$, y podemos aplicar las definiciones anteriores a cada $D_i(\sigma_i, a_i)$. En este caso definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathrm{mSpec}(\mathcal{D}(\sigma, a)) \simeq k^n$ como el producto de las relaciones de equivalencia $\sim_i$ en cada $D_i(\sigma_i, a_i)$. Análogamente, el conjunto de las clases de equivalencia en la órbita $\mathcal{O}$ se denotará $\hat{\mathcal{O}}$ y $\Gamma(\gamma)$ la clase equivalencia de $\gamma \in k^n$.

5.2 Representaciones de peso y representaciones peso generalizadas

En esta sección recordamos la noción de módulo de peso, módulo de peso generalizado en el contexto de las álgebras de Weyl generalizadas.

Un $D(\sigma, a)$-módulo M se dice **de peso** si

$$M = \bigoplus_{\xi \in H^*} M_\xi = \bigoplus_{\xi \in H^*} \{m \in M : (\tilde{h} - \xi(\tilde{h}))m = 0, \forall \tilde{h} \in H\}$$

y $\dim_k(M_\xi) < \infty, \forall \xi \in H^*$. Análogamente, un $D(\sigma, a)$-módulo M se dice **de peso generalizado** si

$$M = \bigoplus_{\xi \in H^*} M^\xi = \bigoplus_{\xi \in H^*} \{m \in M : \exists k(m) \in \mathbb{N} \text{ tal que } (\tilde{h} - \xi(\tilde{h}))^{k(m)} m = 0, \forall \tilde{h} \in H\}$$

y $\dim_k(M^\xi) < \infty, \forall \xi \in H^*$. Notar que un módulo de peso es un módulo de peso generalizado. Esta definición es análoga a la definición de módulo de pesos para las representaciones de álgebras de Lie semisimples o de Kac-Moody.

Se define el **soporte de un módulo de peso** (resp. **de peso generalizado**) como el conjunto

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\xi \in H^* : M_\xi \neq 0 \text{ (resp. } M^\xi \neq 0)\}.$$

La categoría de $D(\sigma, a)$-módulos de peso generalizado es una subcategoría plena de la categoría de $D(\sigma, a)$-módulos. De hecho, si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

es una sucesión exacta corta de $D(\sigma, a)$-módulos de peso generalizado, entonces $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') + \mathrm{Supp}(M'')$ y $\dim_k(M^\xi) = \dim_k((M')^\xi) + \dim_k((M'')^\xi)$, para todo $\xi \in H^*$.

A su vez,

$$x_i^{\pm} M^\xi \subseteq M^{\sigma_i^{\pm 1} \cdot \xi}, \qquad x_i^{\pm} M_\xi \subseteq M_{\sigma_i^{\pm 1} \cdot \xi}, \forall \xi \in H^*,$$

lo que implica que todo $D(\sigma, a)$-módulo de peso puede descomponerse como suma de $D(\sigma, a)$-módulos de acuerdo a las órbitas

$$M = \bigoplus_{\mathcal{O}} M_{\mathcal{O}} = \bigoplus_{\mathcal{O}} \bigoplus_{\xi \in \mathcal{O}} M_\xi$$

y análogamente, todo $D(\sigma, a)$-módulo de peso generalizado puede descomponerse como suma de $D(\sigma, a)$-módulos

$$M = \bigoplus_{\mathcal{O}} M^{\mathcal{O}} = \bigoplus_{\mathcal{O}} \bigoplus_{\xi \in \mathcal{O}} M^\xi.$$

En ambos casos, las sumas están indexadas por el conjunto de órbitas $\{\mathcal{O}\}$. Esto implica que, si M es indescomponible, luego su soporte está incluido en una órbita.

Recordamos los siguientes resultados:

Lema 5.2.1. *Si M es un módulo de peso (resp. de peso generalizado), entonces $\dim_k(M_\xi) = \dim_k(M_{\xi'})$ (resp. $\dim_k(M^\xi) = \dim_k(M^{\xi'})$) para pesos equivalentes $\xi \sim \xi'$.*

Demostración. Cf. [BB], Lemma 1.6.1. □

Corolario 5.2.2. *El soporte de un módulo de peso generalizado es la unión disjunta de clases de equivalencia.*

Demostración. Cf. [BB], Coro. 1.6.2. □

Denotaremos, como en [BB], $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ y $\mathcal{GW}(\mathcal{O})$ las categorías de módulos de peso y módulos de peso generalizado con soporte en una órbita $\mathcal{O}$, respectivamente, e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O}))$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{GW}(\mathcal{O}))$ los conjuntos de clases de isomorfismo de módulos de peso indescomponibles y módulos de peso generalizado indescomponibles con soporte en una órbita $\mathcal{O}$, respectivamente.

5.3 Categorías asociadas

En esta sección todas las categorías que consideremos serán k-lineales, i.e., el conjunto de morfismos entre dos objetos cualesquiera de la categoría será un k-módulo, y la composición k-bilineal. Recomendamos consultar [Mit] para mayores referencias en categorías k-lineales.

Si $\mathcal{O} \subseteq k^n$ es una órbita de $D(\sigma, a)$, [BB] definen la categoría k-lineal $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ de la siguiente forma. La clase de objetos está dada por la órbita $\mathcal{O}$, y la clase de flechas de la categoría está generada por el conjunto

$$\{X_{\alpha,i}, Y_{\alpha,i}, H_{\alpha,i} : \alpha \in \mathcal{O}, i = 1, \dots, n\},$$

donde

$$\begin{aligned} X_{\alpha,i} &: \alpha \to \sigma_i(\alpha), \\ Y_{\alpha,i} &: \sigma_i(\alpha) \to \alpha, \\ H_{\alpha,i} &: \alpha \to \alpha, \end{aligned}$$

con las relaciones

$$\begin{gathered} Y_{\alpha,i}X_{\alpha,i} = a_i(H_{\alpha,i}), \qquad X_{\alpha,i}Y_{\alpha,i} = \sigma_i(a_i)(H_{\sigma_i(\alpha),i}), \\ X_{\alpha,i}H_{\alpha,i} = \sigma_i(H_{\sigma_i(\alpha),i})X_{\alpha,i}, \qquad Y_{\alpha,i}H_{\sigma_i(\alpha),i} = \sigma_i^{-1}(H_{\alpha,i})Y_{\alpha,i}, \\ U_{\alpha,i}V_{\beta,j} - V_{\gamma,j}U_{\delta,i} = 0, \forall\, i \neq j, \end{gathered}$$

donde $U, V \in \{H, X, Y\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{O}$ y las composiciones tengan sentido.

Si definimos $h_{\alpha,i} = H_{\alpha,i} - \alpha_i$, $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{O}$, en función de los nuevos generadores

$$\{X_{\alpha,i}, Y_{\alpha,i}, h_{\alpha,i} : \alpha \in \mathcal{O}, i = 1, \dots, n\},$$

las relaciones que definen la categoría $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ pueden escribirse como

$$\begin{gathered} Y_{\alpha,i}X_{\alpha,i} = a_i(h_{\alpha,i} + \alpha_i), \qquad X_{\alpha,i}Y_{\alpha,i} = a_i(\lambda_i h_{\sigma_i(\alpha),i} + \alpha_i), \\ X_{\alpha,i}h_{\alpha,i} = \lambda_i h_{\sigma_i(\alpha),i}X_{\alpha,i}, \qquad h_{\alpha,i}Y_{\alpha,i} = \lambda_i Y_{\alpha,i}h_{\sigma_i(\alpha),i}, \\ U_{\alpha,i}V_{\beta,j} - V_{\gamma,j}U_{\delta,i} = 0, \forall\, i \neq j, \end{gathered}$$

donde $U, V \in \{h, X, Y\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{O}$ y las composiciones tengan sentido.

Notar que, si escribimos $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$, entonces resulta el producto tensorial (externo)

$$\mathcal{C}_\mathcal{O} \simeq \boxtimes_{i=1}^n \mathcal{C}_{\mathcal{O}_i}.$$

Denotaremos $\mathcal{C}_\mathcal{O}(\mathrm{nil})$ la categoría de $\mathcal{C}_\mathcal{O}$-módulos localmente de dimensión finita tales que los generadores $h_{\alpha,i}$ actúan por morfismos nilpotentes, y $\mathcal{C}_\mathcal{O}(0)$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}_\mathcal{O}$-módulos localmente de dimensión finita tales que los generadores $h_{\alpha,i}$ actúan por el morfismo cero.

La utilidad de esta categoría es la siguiente: existen equivalencias de categorías

$$\begin{aligned} \mathcal{GW}(\mathcal{O}) &\simeq \mathcal{C}_\mathcal{O}(\mathrm{nil}), \\ \mathcal{W}(\mathcal{O}) &\simeq \mathcal{C}_\mathcal{O}(0). \end{aligned}$$

Supongamos por un momento $n = 1$. Sea $\mathcal{O} \in \mathrm{Lin}$ una órbita lineal, $\alpha, \beta = \sigma^i(\alpha) \in \mathcal{O}$ ($i \in \mathbb{Z}$). Se definen

$$l_{\alpha\beta} = X_{\sigma^{i-1}(\alpha)} \dots X_{\sigma(\alpha)}X_\alpha,$$

si $i \in \mathbb{N}$, $l_{\alpha\alpha} = 1$, y

$$l_{\beta\alpha} = Y_{\sigma^{-i}(\alpha)} \dots Y_{\sigma^{-1}(\alpha)},$$

si $i \in -\mathbb{N}$. Si $\mathcal{O} \in \mathrm{Cyc}$ es una órbita cíclica, $|\mathcal{O}| = l$, $\alpha \neq \beta = \sigma^i(\alpha) \in \mathcal{O}$ ($0 < i < l$). Se definen

$$c_{\alpha,+} = X_{\sigma^{l-1}(\alpha)} \dots X_{\sigma(\alpha)}X_\alpha$$

y

$$c_{\alpha,-} = Y_{\sigma^{-l}(\alpha)} \dots Y_{\sigma^{-1}(\alpha)}.$$

A su vez, dado $m \in \mathbb{N}$, se define la categoría

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O},m} = \mathcal{C}_{\mathcal{O}}/\langle\{h_{\alpha,i}^m, \forall\, \alpha \in \mathcal{O}, i = 1, \dots, n\}\rangle.$$

Para cada $m \geq 2$, tenemos el funtor canónico

$$p_{\mathcal{O},m} : \mathcal{C}_{\mathcal{O},m} \to \mathcal{C}_{\mathcal{O},m-1},$$

ya que $\mathcal{C}_{\mathcal{O},m-1}$ es un cociente de $\mathcal{C}_{\mathcal{O},m}$.

La siguiente proposición es directa:

Proposición 5.3.1. *Dada una órbita $\mathcal{O} \subseteq k^n$ tenemos las siguientes equivalencias de categorías*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}}(\mathrm{nil}) \simeq \varprojlim \mathcal{C}_{\mathcal{O},m},$$
$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}}(0) \simeq \mathcal{C}_{\mathcal{O},1}.$$

Demostración. Cf. [BB], Lemma 2.2.1. □

Si $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ es una clase de equivalencia en una órbita $\mathcal{O}$, luego cada Γ_i no contiene más que una raíz del elemento $a_i \in k[h_i]$. Denotaremos $\langle\Gamma, i\rangle$ la multiplicidad de esa raíz (en caso de existir). A su vez, dados Γ e $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos $\Gamma[i] = \Gamma$, si $\sigma_i(\Gamma) \subseteq \Gamma$, y $\Gamma[i] = \Gamma'$, en caso contrario y $\Gamma' \cap \sigma_i(\Gamma) \neq \emptyset$ (notar que Γ' está unívocamente determinado por esta condición). Se define $\Gamma[i,0] = \Gamma$ y $\Gamma[i,j] = \Gamma[i,j-1][i]$, si $j \in \mathbb{N}$. Notar que $\Gamma[i,1] = \Gamma[i]$.

Para cada órbita $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$ consideramos la categoría $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ definida de la siguiente forma. La clase de los objetos está dado por el conjunto $\hat{\mathcal{O}}$, y las flechas están dadas por el conjunto de generadores

$$h_{\Gamma,i} : \Gamma \to \Gamma, \text{para cada } \Gamma \in \hat{\mathcal{O}},$$
$$x_{\Gamma,i} : \Gamma \to \Gamma[i], \text{para cada } \Gamma \in \hat{\mathcal{O}} \text{ tal que } \Gamma_i \text{ es marcada},$$
$$y_{\Gamma,i} : \Gamma[i] \to \Gamma, \text{para cada } \Gamma \in \hat{\mathcal{O}} \text{ tal que } \Gamma_i \text{ es marcada},$$
$$g_{\Gamma,i}, g_{\Gamma,i}^{-1} : \Gamma \to \Gamma, \text{para cada } \Gamma \in \hat{\mathcal{O}} \text{ tal que } \mathcal{O}_i \text{ es cíclica no degenerada},$$

donde $i = 1, \dots, n$, con las relaciones

$$x_{\Gamma,i}h_{\Gamma,i} = \lambda_i^{|\Gamma[i]_i|\langle\Gamma,i\rangle} h_{\Gamma[i],i}x_{\Gamma,i}, \qquad h_{\Gamma,i}y_{\Gamma,i} = \lambda_i^{|\Gamma[i]_i|} y_{\Gamma,i}h_{\Gamma[i],i},$$
$$y_{\Gamma,i}x_{\Gamma,i} = h_{\Gamma,i}^{\langle\Gamma,i\rangle}, \qquad x_{\Gamma,i}y_{\Gamma,i} = \lambda_i^{|\Gamma[i]_i|\langle\Gamma,i\rangle} h_{\Gamma[i],i}^{\langle\Gamma,i\rangle},$$
$$u_{\Gamma,i}v_{\Gamma',j} - v_{\Gamma'',j}u_{\Gamma''',i} = 0, \text{para } i \neq j,$$

donde $u, v \in \{x, y, h, g\}$, $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma''' \in \hat{\mathcal{O}}$, las composiciones sean posibles y $|\Gamma[i]_i|$ es el cardinal de la i-ésima componente de $\Gamma[i]$, si es finita, y $|\Gamma[i]_i| = 1$, si no.

A su vez, dado $m \in \mathbb{N}$, se define la categoría

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O},m} = \mathcal{C}_{\mathcal{O}}/\langle\{h_{\Gamma,i}^m, \forall\, \Gamma \in \hat{\mathcal{O}}, i = 1, \dots, n\}\rangle.$$

Para cada $m \geq 2$, tenemos el funtor canónico

$$\pi_{\mathcal{O},m} : \mathcal{C}_{\mathcal{O},m} \to \mathcal{L}_{\mathcal{O},m-1},$$

ya que $\mathcal{L}_{\mathcal{O},m-1}$ es un cociente de $\mathcal{L}_{\mathcal{O},m}$. Se define

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O},\mathrm{nil}} = \varprojlim \mathcal{L}_{\mathcal{O},m}.$$

Vemos fácilmente que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}} \simeq \boxtimes_{i=1}^n \mathcal{L}_{\mathcal{O}_i},$$
$$\mathcal{L}_{\mathcal{O},m} \simeq \boxtimes_{i=1}^n \mathcal{L}_{\mathcal{O}_i,m}.$$

Proposición 5.3.2. *Dada una órbita $\mathcal{O} \subseteq k^n$, las categorías $\mathcal{L}_{\mathcal{O},\mathrm{nil}}$ y $\mathcal{L}_{\mathcal{O},1}$ son esqueletos de las categorías $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}(\mathrm{nil})$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}(0)$, respectivamente.*

Demostración. Cf. [BB], Prop. 2.3.1. □

El funtor que da la equivalencia anterior se puede describir de la forma siguiente. Por un lado, para cada $i = 1, \dots, n$, definimos las funciones

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{O}_i,m} &: \hat{\mathcal{O}}_i \to \mathcal{O}_i, \\ \Gamma &\mapsto \begin{cases} \beta, & \text{si } \Gamma = (-\infty, \beta], (\alpha, \beta] \text{ o } (\sigma^{-1}(\beta), \infty), \\ \beta_0^i, & \text{si no,} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\beta_0^i \in \Gamma_i \subseteq \mathcal{O}_i$ es un elemento fijo (cualquiera).

Por otro lado, para cada $i = 1, \dots, n$, se definen

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{O}_i,m} : \operatorname{Arr}(L_{\mathcal{O}_i,m}) &\to \operatorname{Arr}(C_{\mathcal{O}_i,m}), \\ h_{\Gamma_i} &\mapsto h_{P_{\mathcal{O}_i}(\Gamma_i)}, \\ g_{\Gamma_i} &\mapsto c_{P_{\mathcal{O}_i}(\Gamma_i),+}, \text{si } \mathcal{O}_i \text{ es cíclica no degenerada,} \\ y_{\Gamma_i} &\mapsto l_{\alpha_i,\beta_i}, \\ x_{\Gamma_i} &\mapsto l_{\beta_i\alpha_i} b^{-1}_{\alpha_i,\beta_i}(H_{\alpha_i}), \end{aligned}$$

donde, si $\mathcal{O}$ es una órbita lineal degenerada o cíclica degenerada y la clase de equivalencia Γ_i contiene una raíz $\alpha_i = P_{\mathcal{O}_i}(\Gamma_i)$ del polinomio a_i, luego $\beta_i = P_{\mathcal{O}_i}(\Gamma[i]_i) = \sigma^{l_i}(\alpha_i)$, para algún $l_i \in \mathbb{N}$, $l_{\alpha_i\beta_i} l_{\beta_i\alpha_i} = h_{\alpha_i}^{\langle \Gamma_i, 1\rangle} b_{\alpha_i\beta_i}(H_{\alpha_i})$ y $b_{\alpha_i,\beta_i}(H) = \sigma_i^{-(l_i+1)}(a_i) \dots a_i/(H - \alpha_i)^{\langle \Gamma_i, i\rangle}$.

Luego, se define el funtor

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{O},m} &: \mathcal{L}_{\mathcal{O},m} \to \mathcal{C}_{\mathcal{O},m}, \\ P_{\mathcal{O},m} &= \boxtimes_{i=1}^n P_{\mathcal{O}_i,m}. \end{aligned}$$

5.4 Teoremas principales

Recordamos que una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ se dice **salvaje** si existe un $\mathcal{C}$-$k\langle x, y\rangle$-bimódulo M libre como $k\langle x, y\rangle$-módulo a derecha y tal que el funtor de la categoría de $k\langle x, y\rangle$-módulos a izquierda de dimensión finita en la categoría de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda

$$\begin{aligned} {}_{k\langle x,y\rangle}\mathrm{mod} &\to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{mod} \\ N &\mapsto M \otimes_{k\langle x,y\rangle} N \end{aligned}$$

preserve indescomponibilidad y clases de isomorfismo.

Por otro lado, $\mathcal{C}$ se dice **mansa** si para cada entero $m \in \mathbb{N}$ existe una cantidad finita de $\mathcal{C}$-$k[x]$-bimódulos $\{M_i : i = 1, \dots, d_m\}$ tales que para cada $i = 1, \dots, d_m$ el $k[x]$-módulo a derecha M_i es libre y finitamente generado, y cada $\mathcal{C}$-módulo a izquierda indescomponible de dimensión m es isomorfo a $M_i \otimes_{k[x]} S$, para algún $k[x]$-módulo a derecha simple S.

Dado un $\mathcal{L}_{\mathcal{O},m}$-módulo M (o $\mathcal{L}_{\mathcal{O},\mathrm{nil}}$-módulo), obtenemos un $\mathcal{C}_{\mathcal{O},m}$-módulo $M_{\mathcal{O}}$ de la forma siguiente: dado $\alpha \in \Gamma$, se define $M_{\mathcal{O}}(\alpha) = M(\Gamma)$, provisto de la acción

(i)
$$M_{\mathcal{O}}(H_{\alpha,i}) = \lambda_1^{s_1} \dots \lambda_n^{s_n} M(h_{\Gamma,i}) + \alpha_i E,$$
donde $i = 1, \dots, n$, $\alpha \in \Gamma$ y $P_{\mathcal{O},m}(\Gamma) = \tau_1^{s_1} \dots \tau_n^{s_n}(\alpha)$.

(ii)
$$M_{\mathcal{O}}(X_{\alpha,i}) = \begin{cases} M(x_{\Gamma,i}) M_{\mathcal{O}}(b_{\alpha_i\beta_i}(H_{\alpha,i})), & \text{si } \alpha_i \text{ es una raíz de } a_i, \\ M(g_{\Gamma,i}), & \text{si } \mathcal{O}_i \in \mathrm{Cycn} \text{ y } \alpha_i = P_{\mathcal{O},m}(\Gamma)_i, \\ E, & \text{si no.} \end{cases}$$

(iii)

$$M_{\mathcal{O}}(Y_{\alpha,i}) = \begin{cases} M_{\mathcal{O}}(a_i(H_{\alpha,i}))M^{-1}(g_{\Gamma,i}), & \text{si } \mathcal{O}_i \in \text{Cycn y } \alpha_i = P_{\mathcal{O},m}(\Gamma)_i, \\ M(y_{\Gamma,i})M_{\mathcal{O}}^{-1}(a_i(H_{\sigma_i^{t_i-1}(\alpha),i}))\dots M_{\mathcal{O}}^{-1}(a_i(H_{\sigma_i(\alpha),i})), & \text{si } \alpha_i \text{ es una raíz de } a_i, \\ M_{\mathcal{O}}(a_i(H_{\alpha,i})), & \text{si no,} \end{cases}$$

donde $P_{\mathcal{O},m}(\Gamma[i]) = \sigma_i^{t_i}(P_{\mathcal{O},m}(\Gamma))$.

Dado un $\mathcal{L}_{\mathcal{O},m}$-módulo M (o $\mathcal{L}_{\mathcal{O},\mathrm{nil}}$-módulo), obtenemos un $D(\sigma,a)$-módulo $M_{\mathcal{O}}$ de la forma siguiente: el espacio vectorial es $M_{\mathcal{O}} = \oplus_{\alpha\in\mathcal{O}} M(\alpha)$, donde $M(\alpha) = M(\Gamma)$, si $\alpha \in \Gamma$, provisto de la acción

$$X_i m = M_{\mathcal{O}}(X_{\alpha,i})m, \qquad Y_i m = M_{\mathcal{O}}(Y_{\sigma_i^{-1}(\alpha),i})m, \qquad H_i m = M_{\mathcal{O}}(H_{\alpha,i})m,$$

donde $m \in M(\alpha)$.

Por otro lado, [BB] consideran la siguiente lista de categorías mansas (cf. [BB], Sec. 2.5):

$\mathcal{A} = k$,

$\mathcal{B} = k\langle t\rangle$, t es nilpotente,

$\mathcal{C} = k\langle t, t^{-1}\rangle$,

$\mathcal{D}$
$$\begin{tikzcd} \bullet^1 \arrow[r, shift left, "a"] & \bullet^2 \arrow[l, shift left, "b"] \end{tikzcd}$$
ab es nilpotente,

$\mathcal{E}$
$$\begin{tikzcd} \bullet^1 \arrow[loop left, "a_{11}"] \arrow[r, shift left, "a_{21}"] & \bullet^2 \arrow[l, shift left, "a_{12}"] \arrow[loop right, "a_{22}"] \end{tikzcd}$$
$a_{11}^2 = a_{12}a_{21}$, $a_{22}^2 = a_{21}a_{12}$, $a_{21}a_{11} = a_{22}a_{21}$,

$a_{12}a_{22} = a_{11}a_{12}$, a_{11}, a_{22} nilpotentes,

$\mathcal{F}$
$$\begin{tikzcd} \bullet^1 \arrow[r, shift left, "a_2"] \arrow[d, shift left, "b_1"] & \bullet^2 \arrow[l, shift left, "b_2"] \arrow[d, shift left, "a_3"] \\ \bullet^0 \arrow[u, shift left, "a_1"] \arrow[r, shift left, "b_4"] & \bullet^3 \arrow[l, shift left, "a_4"] \arrow[u, shift left, "b_3"] \end{tikzcd}$$
$a_ib_i = b_ia_i = 0$, $i = 1,\dots,4$,

$a_ia_j = b_lb_m = 0$, $\forall\, i,j,l,m = 1,\dots,4$, si posible,

$\mathcal{G}$
$$\begin{tikzcd} \bullet^1 \arrow[r, shift left, "d"] & \bullet^0 \arrow[l, shift left, "c"] \arrow[r, shift left, "a"] & \bullet^2 \arrow[l, shift left, "b"] \end{tikzcd}$$
$ba = dc$, ab y cd nilpotentes,

$\mathcal{H}^m (m \in \mathbb{N})$
$$\begin{tikzcd} \bullet^0 \arrow[r, shift left, "a_1"] & \bullet^1 \arrow[l, shift left, "b_1"] \arrow[r, dotted, no head] & \bullet^{m-1} \arrow[r, shift left, "a_m"] & \bullet^m \arrow[l, shift left, "b_m"] \end{tikzcd}$$
$a_ib_i = b_ia_i = 0$, $i = 1,\dots,m$,

$\mathcal{I}^m (m \in \mathbb{N})$
$$\begin{tikzcd} \bullet^1 \arrow[r, shift left, "a_1"] \arrow[d, shift left, "b_m"] & \bullet^2 \arrow[l, shift left, "b_1"] \arrow[d, shift left, "a_2"] \\ \bullet^m \arrow[u, shift left, "a_m"] \arrow[r, dotted, no head] & \bullet^3 \arrow[u, shift left, "b_2"] \end{tikzcd}$$
$a_ib_i = b_ia_i = 0$, $i = 1,\dots,m$.

Por otro lado, definen la siguiente colección de módulos, que verifican las propiedades enunciadas a continuación:

(i) Los $\mathcal{B}$-módulos $\mathcal{B}_n = k[t]/(t^n)$, donde $n \in \mathbb{N}$, que cumplen que

Proposición 5.4.1. *Se verifica que*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Cf. [BB], Sec. 3.1. □

(ii) El $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{C}_{f,n} = k[t]/(f^n)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathrm{Irr}(k[t]) \setminus \{t\}$.

Proposición 5.4.2. *Se verifica que*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}_{f,n} : n \in \mathbb{N}, f \in \mathrm{Irr}(k[t]) \setminus \{t\}\}.$$

Demostración. Cf. [BB], Sec. 3.1. □

(iii) Los $\mathcal{D}$-módulos $\mathcal{D}_{n,i}$ ($n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$) definidos por el k-espacio vectorial con base $e_1, \dots, e_n$, tal que $\mathcal{D}_{n,1}(1)$, $\mathcal{D}_{n,2}(2)$ y $\mathcal{D}_{n,1}(2)$, $\mathcal{D}_{n,2}(1)$ contienen el vector e_j con índices impares y pares, respectivamente. La acción está dada por $ue_j = e_{j+1}$ y $ve_j = e_{j+1}$ ($e_{n+1} = 0$).

Proposición 5.4.3. *Se verifica que*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{D}_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2\}\}.$$

Demostración. Cf. [BB], Sec. 3.1. □

(iv) Sea W el monoide libre en dos letras a, b. Para cada "palabra" $w = w_1 \dots w_n$ en W de longitud n, y $j \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, definimos el $\mathcal{I}^m$-módulo $\mathcal{I}^m_{j,w}$ de la manera siguiente. Posee una base como k-espacio vectorial dada por $\{e_0, \dots, e_n\}$, y cada $\mathcal{I}^m_{j,w}(l)$ posee como base $\{e_k : j + k \equiv l(\mathrm{mod}.m)\}$. La acción está dada por

$$a_l e_k = \begin{cases} e_{k+1}, & \text{si } k \neq n \text{ y } w_{k+1} = a, \\ 0, & \text{si no}, \end{cases}$$

$$b_{l-1} e_k = \begin{cases} e_{k-1}, & \text{si } w_k = b, \\ 0, & \text{si no}. \end{cases}$$

Si $w = \emptyset$, luego $\mathcal{I}_{j,\emptyset}$ es el $\mathcal{I}^m$-módulo simple en j.

Diremos que una palabra w es una m-**palabra** si su longitud es múltiplo de m, y **no periódica** si no es la potencia de otra m-palabra. Para cada polinomio indescomponible $f = \alpha_1 + \dots + \alpha_d x^{d-1} + x^d \neq x^d$ y una m-palabra no periódica w en W de longitud n, definimos el $\mathcal{I}^m$-módulo $\mathcal{I}^m_{w,f}$ de la manera siguiente. Posee una base como k-espacio vectorial dada por $\{e_{k,s} : k = 0, \dots, n-1, s = 1, \dots, d\}$, y cada $\mathcal{I}^m_{w,f}(l)$ posee como base $\{e_{k,s} : k \equiv l(\mathrm{mod}.m)\}$. La acción está dada por

$$a_l e_{k,s} = \begin{cases} e_{k+1,s}, & \text{si } k \neq n-1 \text{ y } w_{k+1} = a, \\ e_{0,s+1}, & \text{si } k = n-1, w_n = a \text{ y } s \neq d, \\ -\sum_r \alpha_r e_{0,r}, & \text{si } k = n-1, w_n = a \text{ y } s = d, \\ 0, & \text{si no}. \end{cases}$$

$$b_{l-1} e_{k,s} = \begin{cases} e_{k-1,s}, & \text{si } k \neq 0 \text{ y } w_k = b, \\ e_{n-1,s+1}, & \text{si } k = 0, w_n = b \text{ y } s \neq d, \\ -\sum_r \alpha_r e_{n-1,r}, & \text{si } k = 0, w_n = b \text{ y } s = d, \\ 0, & \text{si no}. \end{cases}$$

Dos palabras $w = w_{1,1} \dots w_{k,m}$ y $w' = w_{s,m+1} \dots w_{k,m} w_{1,1} \dots w_{s,m}$ se dicen **equivalentes**, $1 \leq s \leq k$. Denotaremos Ω_m el conjunto de clases de equivalencias de m-palabras no periódicas, e $\mathrm{Ind}(k[t])$ el conjunto de polinomios mónicos indescomponobles con excepción de $\{t^d : d \in \mathbb{N}\}$.

Proposición 5.4.4. *Dado $m \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{I}^m) = \{\mathcal{I}^m_{j,w}, \mathcal{I}^m_{z,f} : z \in \Omega_m, w \in W, f \in \mathrm{Ind}(k[t]), j = 0, \dots, m-1\}.$$

Demostración. Cf. [BB], Sec. 3.2. □

(v) Como la categoría $\mathcal{F}$ es cociente de $\mathcal{I}^4$, entonces podemos definir los $\mathcal{F}$-módulos $\mathcal{F}_{1,x-1} = \mathcal{I}^4_{aabb,x-1}$, $\mathcal{F}_{2,x-1} = \mathcal{I}^4_{bbaa,x-1}$, $\mathcal{F}_{1,f} = \mathcal{I}^4_{abab,f}$, $\mathcal{F}_{2,f} = \mathcal{I}^4_{baba,f}$ y $\mathcal{F}_{j,w} = \mathcal{I}^4_{j,w}$, donde $f \in \mathrm{Ind}(k[t]), j = 0, \ldots, m-1$, $w = b^p(ab)^q a^r$, $q \in \mathbb{N}_0$, $p, r \in \{0, 1\}$.

Proposición 5.4.5.

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{F}_{1,x-1}, \mathcal{F}_{2,x-1}, \mathcal{F}_{1,f}, \mathcal{F}_{2,f}, \mathcal{F}_{j,w} : f \in \mathrm{Ind}(k[t]), j = 0, \ldots, m-1, w = b^p(ab)^q a^r, q \in \mathbb{N}_0, p, r \in \{0, 1\}\}.$$

Demostración. Cf. [BB], Sec. 3.3. □

(vi) Análogamente, usando el funtor $\mathcal{H}^m \to \mathcal{I}^{m+2}$, dado por $i \mapsto i$, $a_i \mapsto a_i$ y $b_i \mapsto b_i$, podemos definir la familia de $\mathcal{H}^m$-módulos $\mathcal{H}^m_{j,w} = \mathcal{I}^{m+2}_{j,w}$, donde $w \in W$, $|w| \leq m - j$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Proposición 5.4.6.

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{H}^m) = \{\mathcal{H}^m_{j,w} : w \in W, |w| \leq m - j, j = 0, \ldots, m-1\}.$$

Demostración. Cf. [BB], Sec. 3.4. □

Los siguientes teoremas describen las categorías $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ y $\mathcal{GW}(\mathcal{O})$:

Teorema 5.4.7. *La categoría $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ donde $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ es mansa si y sólo si el número δ de órbitas infinitas no degeneradas $\mathcal{O}_i$ es mayor o igual que $n-2$, y si $\delta = n-2$ todas las órbitas son infinitas y cada órbita no degenerada contiene exactamente una raíz del polinomio a_i.*

Si todas las órbitas $\mathcal{O}_i$ son infinitas y no hay más de una órbita degenerada, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ contiene solamente un número finito de módulos indescomponibles no isomorfos entre sí.

Demostración. Cf. [BB], Thm. 1. □

Teorema 5.4.8. *La categoría $\mathcal{GW}(\mathcal{O})$ donde $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ es mansa si y sólo si $n = 1$, la órbita $\mathcal{O}$ es infinita y no contiene más de dos raíces del polinomio a, y si contiene exactamente dos raíces, entonces las dos son simples, y si contiene una sola raíz entonces su multiplicidad es menor o igual que 2.*

Demostración. Cf. [BB], Thm. 2. □

A su vez, por aplicación directa de los teoremas anteriores para el caso de álgebras de Weyl y el estudio de las categorías anteriores se obtienen los siguientes teoremas. Notar que, a partir del Corolario 3.5.3, éstos permiten obtener familias de representaciones de las álgebras de Yang-Mills para $n \geq 3$ generadores.

Teorema 5.4.9. *Consideramos el álgebra de Weyl $A_1(k)$. Entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ es mansa para toda órbita $\mathcal{O}$.*

Si $\mathrm{char}(k) = 0$ y $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{A}}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{A}_{\mathcal{O}}\}$.

Si $\mathrm{char}(k) \neq 0$ y $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{C}_{\mathcal{O},f,n} : n \in \mathbb{N}, f \in \mathrm{Irr}(k[t]) \setminus \langle t \rangle\}$.

Si $\mathrm{char}(k) = 0$ y $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{H}^1}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{H}^1_{\mathcal{O},j,w}\}$.

Si $\mathrm{char}(k) \neq 0$ y $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{I}^1}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{I}^1_{\mathcal{O},w}, \mathcal{I}^1_{\mathcal{O},z,f}\}$.

La categoría $\mathcal{GW}(\mathcal{O})$ es mansa si y sólo si $\mathrm{char}(k) = 0$.

En este caso, si $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{GW}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{GW}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{B}_{\mathcal{O},n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Si $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{GW}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{GW}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{D}_{\mathcal{O},n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 1, 2\}$.

Demostración. Cf. [BB], Sec. 4.1. □

Teorema 5.4.10. *Consideramos el álgebra de Weyl $A_2(k)$, con $\mathrm{char}(k) = 0$. Entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ es mansa para toda órbita $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$.*

Si $\mathcal{O}_1 \neq \mathbb{Z}$ y $\mathcal{O}_2 \neq \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{A}}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{A}_{\mathcal{O}}\}$.

Si $\mathcal{O}_i = \mathbb{Z}$ y $\mathcal{O}_j \neq \mathbb{Z}$ ($i, j \in \{1, 2\}$), entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{H}^1}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{H}^1_{\mathcal{O},j,w}\}$.

Si $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{F}}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{F}_{\mathcal{O},1,x-1}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},2,x-1}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},1,f}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},2,f}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},j,w}\}$.

Si $\mathrm{char}(k) \neq 0$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ es salvaje.

La categoría $\mathcal{GW}(\mathcal{O})$ es salvaje.

Demostración. Cf. [BB], Sec. 4.2. □

Teorema 5.4.11. *Sea $A_n(k)$ el álgebra de Weyl, con $n \geq 3$ y $\mathrm{char}(k) = 0$. Escribimos una órbita de la forma $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$.*

Si $\mathcal{O}_i \neq \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{A}}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{A}_{\mathcal{O}}\}$.

Si el número de órbitas no degeneradas $\mathcal{O}_i$ es $n-1$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{H}^1}\mathrm{Mod}$ e $\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{H}^1_{\mathcal{O},j,w}\}$.

Si el número de órbitas no degeneradas $\mathcal{O}_i$ es $n-2$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) \simeq {}_{\mathcal{F}}\mathrm{Mod}$ e

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{W}(\mathcal{O})) = \{\mathcal{F}_{\mathcal{O},1,x-1}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},2,x-1}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},1,f}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},2,f}, \mathcal{F}_{\mathcal{O},j,w}\}.$$

Si el número de órbitas no degeneradas $\mathcal{O}_i$ es menor o igual que $n-3$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ es salvaje.

Si $\mathrm{char}(k) \neq 0$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ es salvaje.

La categoría $\mathcal{GW}(\mathcal{O})$ es salvaje.

Demostración. Cf. [BB], Sec. 4.3. □

Capítulo 6

Ejemplos

En este capítulo presentaremos un ejemplo de representaciones de álgebras de Yang-Mills que aparece naturalmente en geometría (no)conmutativa y en teoría de campos de gauge. Esencialmente, mostraremos que si A es un álgebra con una acción por derivaciones del álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}^n$, todo A-módulo proyectivo finitamente generado (i.e., "secciones globales (no conmutativas) de un fibrado vectorial") provisto de una conexión posee una acción natural del álgebra de Yang-Mills con n generadores. Luego, discutiremos un caso interesante para la teoría de campos no conmutativa: el espacio plano no conmutativo.

6.1 Generalidades

Comenzamos haciendo una pequeña introducción sobre conexiones en geometría (no) conmutativa (cf. [Kar], Chap. I).

Sea A una k-álgebra, y sea

$$\Omega^{\bullet}(A) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} \Omega^m(A)$$

una k-álgebra diferencial graduada, con diferencial d de grado 1 tal que $\Omega^0(A) = A$. Llamaremos a $\Omega^{\bullet}(A)$ la **resolución de de Rham (no conmutativa) de** A y a su cohomología, la **cohomología (no conmutativa) de de Rham de** A. Si A es el anillo de funciones $C^{\infty}(X, \mathbb{R})$ de una variedad C^{∞}-diferenciable real X, y $\Omega^{\bullet}(A) = \Omega^{\bullet}(X)$ es el complejo de formas diferenciales de X, obtenemos la definición usual de cohomología de de Rham de variedades diferenciables.

Notar que cada $\Omega^m(A)$ es un A-bimódulo, $m \in \mathbb{N}_0$, con la acción inducida de la multiplicación (graduada) de $\Omega^{\bullet}(A)$.

Sea M es un A-módulo a derecha finitamente generado y proyectivo. Una **conexión sobre** M es un morfismo k-lineal

$$D : M \to M \otimes_A \Omega^1(A),$$

que cumple que

$$D(ma) = D(m) \otimes a + m \otimes d(a),$$

donde $m \in M$ y $a \in A$. La estructura de A-módulo a derecha de $M \otimes_A \Omega^1(A)$ está inducida por la correspondiente de $\Omega^1(A)$.

Notar que, si D y D' son dos conexiones sobre el mismo módulo, entonces $D - D'$ es un endomorfismo A-lineal de M.

Observación 6.1.1. *Sea $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $A = C^{\infty}(X, K)$ el anillo de funciones $\mathcal{C}^{\infty}$ de una variedad diferenciable real compacta X (resp. el anillo de funciones continuas de un espacio topológico Hausdorff compacto X) y sea $\mathrm{Vect}_K(X)$ la categoría de K-fibrados vectoriales diferenciables (resp. continuos) sobre X. Si $\mathrm{Proj}({}_A\mathrm{mod})$ es la subcategoría plena de ${}_A\mathrm{mod}$ de A-módulos proyectivos finitamente generados, el Teorema de Swan (cf. [Sw] y [Ro], Thm. 1.6.3) asegura que el funtor secciones globales*

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}_K(X) &\xrightarrow{\Gamma} \mathrm{Proj}({}_A\mathrm{mod}) \\ E &\longmapsto \Gamma(X, E) \end{aligned}$$

es una equivalencia de categorías.

En este caso, si $\Omega^\bullet(A)$ es el complejo de formas diferenciables de la variedad X y M es el A-módulo de secciones globales de un fibrado vectorial real E sobre X, es inmediato ver que la definición de conexión anterior coincide con la definición usual de geometría diferencial.

Ejemplo 6.1.2. *(i) Si $M = A^m$ es un A-módulo libre de tipo finito, podemos definir la aplicación k-lineal*

$$\begin{aligned} d_m : A^m &\to \Omega^1(A)^m \simeq A^m \otimes_A \Omega^1(A) \\ (a_1, \dots, a_m) &\mapsto (d(a_1), \dots, d(a_m)), \end{aligned}$$

*denominada **conexión de Levi-Civita**, y que notaremos usualmente con la letra d. En general, una conexión en A^m es de la forma $D = d + \Gamma$, donde $\Gamma \in \mathrm{End}_A(\Omega^1(A)^m) \simeq \mathrm{M}_m(A) \otimes \Omega^1(A)$.*

(ii) Sea M un sumando directo del módulo libre A^m, dado por el núcleo del proyector $p \in \mathrm{End}_A(A^m)$. Si denotamos $i : M \hookrightarrow A^m$ la inclusión de M en A^m, podemos definir la aplicación k-lineal

$$\begin{aligned} D : M &\to M \otimes_A \Omega^1(A) \\ n &\mapsto ((p \otimes \mathrm{id}_{\Omega^1(A)}) \circ d \circ i)(n) \end{aligned}$$

inducida por la conexión de Levi-Civita en A^m. En general, en esta situación omitiremos en la escritura el morfismo de inclusión i, ya que realizaremos los cálculos dentro de A^m.

La siguiente proposición es directa:

Proposición 6.1.3. *Si D es una conexión sobre M, entonces existe un único morfismo k-lineal*

$$D^\bullet : M \otimes_A \Omega^\bullet(A) \to M \otimes_A \Omega^\bullet(A),$$

con $D^0 = D$, tal que

$$D(m\omega) = D(m)\omega + (-1)^{|m|} m d(\omega),$$

donde $m \in M \otimes_A \Omega^\bullet(A)$ y $\omega \in \Omega^\bullet(A)$ son homogéneos (la estructura de $\Omega^\bullet(A)$-módulo a derecha de $M \otimes_A \Omega^\bullet(A)$ está dada por extensión de escalares).

Demostración. Cf. [Kar], Prop. 1.10. □

Notar que $D^\bullet$ resulta de grado 1. Además, por la proposición anterior, escribiremos $D^\bullet = D$ sin que ello cause problema alguno.

A pesar de que D no es $\Omega^\bullet(A)$-lineal, $D \circ D$ sí resulta serlo:

$$\begin{aligned} D(D(m\omega)) &= D(D(m)\omega + (-1)^{|m|} m \otimes d(\omega)) \\ &= D(D(m))\omega + (-1)^{|m|+1} D(m)d(\omega) + (-1)^{|m|} D(m)d(\omega) + m \otimes d(d(\omega)) \\ &= D(D(m))\omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D \circ D$ está determinada por el morfismo A-lineal

$$R : M \simeq M \otimes_A \Omega^0(A) \to M \otimes_A \Omega^2(A),$$

que denominamos **curvatura de la conexión** D. Del mismo modo que para las conexiones, escribiremos R tanto para $D \circ D$ como para su componente de grado 0.

Ejemplo 6.1.4. *(i) Como $d^2 = 0$, vemos directamente que la curvatura de la conexión de Levi-Civita es cero.*

Si consideramos una conexión en A^m de la forma $D = d + \Gamma$, la curvatura resulta, haciendo uso del isomorfismo canónico $A^m \otimes_A \Omega^2(A) \simeq \Omega^2(A)^m$,

$$\begin{aligned} R = (d + \Gamma)(d + \Gamma) &= d^2 + d\Gamma + \Gamma d + \Gamma^2 \\ &= d(\Gamma) - \Gamma d + \Gamma d + \Gamma^2 \\ &= d(\Gamma) + \Gamma^2, \end{aligned}$$

que implica que

$$R \in \mathrm{End}_A(A^m, A^m \otimes_A \Omega^2(A)) \simeq \mathrm{M}_m(\Omega^2(A)).$$

(ii) *En el caso de la conexión inducida en un módulo proyectivo finitamente generado M por Levi-Civita en un módulo libre de la forma A^m, la curvatura resulta*

$$R = pdpd = pd(p)d + ppd^2 = pd(p)d.$$

Por otro lado, como $p^2 = p$, resulta

$$d(p) = d(p^2) = d(p)p + pd(p),$$

y por lo tanto $pd(p) = d(p)(\mathrm{id} - p)$ y $(\mathrm{id} - p)d(p) = d(p)p$.

A su vez, si $x \in M = \mathrm{Im}(p)$, entonces $p(x) = x$, lo que implica que $d(x) = d(p(x)) = d(p)(x) + p(d(x))$, es decir, al restringirnos a M, $d(p) = (\mathrm{id} - p)d$.

En consecuencia, $R = pd(p)d = d(p)(\mathrm{id} - p)d = d(p)(\mathrm{id} - p)^2 d = d(p)(\mathrm{id} - p)d(p) = pd(p)d(p)$. En adelante, por motivos de sencillez, escribiremos dp, en lugar de $d(p)$.

(iii) *Supongamos que el proyector del ejemplo anterior es la composición de dos morfismos A-lineales f y g, i.e., $p = fg$, donde $gf = \mathrm{id}$. En este caso, g es un epimorfismo y f un monomorfismo, $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id} - p)$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p) = \mathrm{Im}(p)$. Además, de $gf = \mathrm{id}$, resulta que $dgf + gdf = 0$, es decir, $dgf = -gdf$.*

La curvatura en $M = \mathrm{Im}(p)$ resulta

$$\begin{aligned} R &= pdpdp = pd(fg)d(fg) = fg(dfg + fdg)(dfg + fdg) = (fgdfg + fgfdg)(dfg + fdg) \\ &= (-fdgfg + fdg)(dfg + fdg) = fdg(\mathrm{id} - p)(dfg + fdg) \\ &= fdgdfg + fdgfdg - fdgpdfg - fdgpfdg = fdgdfg + fdgfdg - fdgfgdfg - fdgfgfdg \\ &= fdgdfg + fdgfdg + fdgfdgfg - fdgfdg = fdgdfg + fdgfdg. \end{aligned}$$

Análogamente, la curvatura en $M' = \mathrm{Ker}(p)$ es

$$R = (\mathrm{id} - p)dpdp = (\mathrm{id} - p)dfgdfg + (\mathrm{id} - p)dfdg.$$

Teniendo la graduación de $\Omega^\bullet(A)$, consideremos la graduación inducida en $M \otimes_A \Omega^\bullet(A)$ y el álgebra graduada de endomorfismos $\mathrm{End}_{\Omega^\bullet(A)}(M \otimes_A \Omega^\bullet(A))$, con el producto dado por la composición. Por la proposición anterior, $R \in \mathrm{End}_{\Omega^\bullet(A)}(M \otimes_A \Omega^\bullet(A))$.

Consideremos la derivación graduada

$$\begin{aligned} [D, -] : \mathrm{End}_{\Omega^\bullet(A)}(M \otimes_A \Omega^\bullet(A)) &\to \mathrm{End}_{\Omega^\bullet(A)}(M \otimes_A \Omega^\bullet(A)), \\ T &\mapsto D \circ T - (-1)^{|T|} T \circ D. \end{aligned}$$

Notar que $[D, -]$ está bien definida, ya que

$$\begin{aligned} [D, T](m\omega) &= D(T(m\omega)) - (-1)^{|T|} T(D(m\omega)) = D(T(m)\omega) - (-1)^{|T|} T(D(m)\omega + (-1)^{|m|} md(\omega)) \\ &= D(T(m))\omega + (-1)^{|m|+|T|} T(m)d(\omega) - (-1)^{|T|} T(D(m))\omega + (-1)^{|T|+|m|} T(m)d(\omega) \\ &= D(T(m))\omega - (-1)^{|T|} T(D(m))\omega = [D, T](m)\omega, \end{aligned}$$

y es de grado 1.

La demostración de la siguiente proposición es directa:

Proposición 6.1.5. *La curvatura satisface la siguiente igualdad, denominada* ***identidad de Bianchi****,*

$$[D, R] = 0.$$

Una familia importante de resoluciones de de Rham (no conmutativas) es el desarrollado por Connes en [Con]. Nosotros presentaremos una variación de la exposición de Connes.

Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie de dimensión finita N que actúa por derivaciones en un álgebra A. Consideramos la resolución de de Rham dada por el espacio vectorial graduado por $\bullet$

$$\Omega^\bullet(A) = A \otimes_k \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*.$$

La diferencial d del espacio anterior es la dada por la fórmula de BRST, es decir, si $\{y_1, \dots, y_N\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, entonces

$$d(a \otimes z) = \sum_{i=1}^{N} (y_j.a \otimes y_j^* \wedge z + \frac{1}{2} a \otimes y_j^* \wedge y_j.z),$$

donde $a \in A$, $z \in \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$, $y_j.a$ indica la acción de $\mathfrak{g}$ en A e $y_j.z$ es la acción dada al extender por derivaciones (no graduadas) la acción coadjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*$.

Observación 6.1.6. *El método BRST fue estudiado por primera vez en [BRS] y es un mecanismo empleado usualmente en física para analizar cuantizaciones con vínculo de primera clase para teorías de campos invariantes de gauge (cf. [KoS]).*

Si $\langle\, ,\rangle$ es una forma k-bilineal no degenerada del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, induce una forma k-bilineal no degenerada en $\mathfrak{g}^*$ al identificar $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ a través del par canónico dado por la evaluación $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \to k$. Ésta última induce la siguiente forma k-bilineal no degenerada en $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$

$$\langle x_1^* \wedge \cdots \wedge x_j^*, y_1^* \wedge \cdots \wedge y_l^* \rangle = \begin{cases} \sum\limits_{\sigma \in \mathbb{S}_j} \prod\limits_{i=1}^{j} \epsilon(\sigma) \langle x_i^*, y_{\sigma(i)}^* \rangle, & \text{si } j = l, \\ 0, & \text{si } j \neq l. \end{cases}$$

Si el álgebra de Lie es compleja (o si estudiamos representaciones complejas) el isomorfismo de Hodge puede estar dado a partir de la forma sesquilineal del espacio complejo $\mathfrak{g}$ (o $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$).

Sea $\langle\, ,\rangle$ una forma k-bilineal (o sesquilineal si $k = \mathbb{C}$) no degenerada del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathrm{vol} \in \Lambda^N \mathfrak{g}^*$ una forma de volumen, i.e., de norma uno. Denotaremos $*_{\mathfrak{g}} : \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^* \to \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo de Hodge de $\mathfrak{g}$, es decir, el morfismo k-lineal definido mediante la fórmula $\omega \wedge *_{\mathfrak{g}}(\omega') = \langle \omega, \omega' \rangle \mathrm{vol}$ (resp. $\omega \wedge *_{\mathfrak{g}}(\bar{\omega}') = \langle \omega, \omega' \rangle \mathrm{vol}$ en el caso sesquilineal).

Recordamos que si $\{x_1, \dots, x_N\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ y $\mathrm{vol} = x_1^* \wedge \cdots \wedge x_N^*$, entonces

- Si $\{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_{N-l}\} = \{1, \dots, N\}$, entonces
$$*_{\mathfrak{g}} (v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_l}) = \epsilon (v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_{N-l}}), \tag{6.1.1}$$
donde $\epsilon = \mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_{N-l})$. En particular $*_{\mathfrak{g}}(\mathrm{vol}) = 1$ y $*_{\mathfrak{g}}(1) = \mathrm{vol}$.
- Si $\omega \in \Lambda^l \mathfrak{g}^*$, $\omega' \in \Lambda^{N-l} \mathfrak{g}^*$
$$\langle \omega, *_{\mathfrak{g}}(\omega') \rangle = (-1)^{l(N-l)} \langle *_{\mathfrak{g}}(\omega), \omega' \rangle.$$
Por lo tanto, $*_{\mathfrak{g}}$ es una isometría de $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$.

Para la demostración de las propiedades anteriores puede consultarse [La1], Ch. X, Sec. 4, o [Huy], Prop. 1.2.20.

Si M es un A-módulo a derecha, entonces una conexión resulta ser un morfismo k-lineal de la forma

$$D : M \to M \otimes_A (A \otimes \mathfrak{g}^*) \simeq M \otimes \mathfrak{g}^*.$$

Dado $x \in \mathfrak{g}$, denotamos D_x al endomorfismo k-lineal de M, denominado **componente x-ésima de la conexión** D, definido por la identidad

$$D_x(m) = \langle D(m), x \rangle.$$

En este caso

$$D(m) = \sum_{j=1}^{N} D_{y_j}(m) y_j^*.$$

Para simplificar, escribiremos usualmente D_j en lugar de D_{y_j}.

Notar que la igualdad anterior nos permite visualizar a la conexión como un elemento de $\mathrm{End}_k(M) \otimes \mathfrak{g}^* \subseteq \mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$, donde $\mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$ es un álgebra graduada por $\bullet$.

Por otro lado, la curvatura resulta

$$R : M \to M \otimes_A (A \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g}^*) \simeq M \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g}^*.$$

Dados $x, y \in \mathfrak{g}$, denotamos $R_{x,y}$ al endomorfismo k-lineal de M, denominado **componente (x, y)-ésima de la curvatura de** D, definido por la identidad

$$R_{x,y}(m) = \langle D(m), x \wedge y \rangle.$$

De manera directa, vemos que $R_{x,y} = -R_{y,x}$ y $R_{x,y} = D_x \circ D_y - D_y \circ D_x - D_{[x,y]}$. Por otro lado, la curvatura se puede escribir como

$$R(m) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} R_{y_i, y_j}(m) y_i^* \wedge y_j^*.$$

Análogamente al caso de la conexión, escribiremos usualmente $R_{i,j}$ en lugar de R_{y_i,y_j}.

La igualdad anterior implica que la curvatura es un elemento de $\mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \subseteq \mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$.

Notar que en este caso, el álgebra $\mathrm{End}_{\Omega^\bullet(A)}(M \otimes_A \Omega^\bullet(A))$ es una subálgebra de $\mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$, debido a la siguiente cadena de isomorfismos

$$\mathrm{End}_{\Omega^\bullet(A)}(M \otimes_A \Omega^\bullet(A)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, M \otimes_A \Omega^\bullet(A)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, M \otimes_k \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, M) \otimes_k \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*.$$

Hemos visto que la conexión y la curvatura en este caso son elementos de la k-álgebra graduada $\mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$.

Proposición 6.1.7. *La identidad $[D, R] = 0$ (visto como conmutador graduado en el álgebra $\mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$) es equivalente a la colección de igualdades*

$$[R_{i,j}, D_l] + [R_{j,l}, D_i] + [R_{l,i}, D_j] = 0,$$

para todas las ternas i, j, l tales que $1 \leq i < j < l \leq N$. Más aún, éstas igualdades siempre son ciertas.

Demostración. Para demostrar la proposición, basta escribir el conmutador $[D, R]$ en componentes:

$$\begin{aligned}
[D, R] &= DR - (-1)^{|D||R|} RD = DR - RD \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{1 \leq j < l \leq N} D_i R_{j,l} y_i^* \wedge y_j^* \wedge y_l^* - \sum_{i=1}^{N} \sum_{1 \leq j < l \leq N} R_{j,l} D_i y_j^* \wedge y_l^* \wedge y_i^*.
\end{aligned}$$

Al extraer la componente de tipo $y_{i_0}, y_{j_0}, y_{l_0}$, con $1 \leq i_0 < j_0 < l_0 \leq N$, resulta entonces

$$(D_{i_0} R_{j_0,l_0} - D_{j_0} R_{i_0,l_0} + D_{l_0} R_{i_0,j_0}) - (R_{j_0,l_0} D_{i_0} - R_{i_0,l_0} D_{j_0} + R_{i_0,j_0} D_{l_0}),$$

que se puede reescribir de la forma

$$[R_{i_0,j_0}, D_{l_0}] + [R_{j_0,l_0}, D_{i_0}] + [R_{l_0,i_0}, D_{j_0}] = 0.$$

Como $\{y_{i_0}^* \wedge y_{j_0}^* \wedge y_{l_0}^*\}_{1 \leq i_0 < j_0 < l_0 \leq N}$ es una base de $\Lambda^3 \mathfrak{g}^*$, el primer enunciado de la proposición queda demostrado.
El segundo es directo a partir de la Proposición 6.1.5. □

Si el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es conmutativa, entonces las componentes de la curvatura se puedan escribir como sigue

$$R_{i,j} = [D_i, D_j],$$

y por lo tanto las identidades de Bianchi son equivalentes a escribir

$$[[D_i, D_j], D_l] + [[D_j, D_l], D_i] + [[D_l, D_i], D_j] = 0,$$

para todas las ternas i, j, l tales que $i < j < l$ y $i, j, l = 1, \ldots, N$, es decir, son equivalentes a la identidad de Jacobi para los endomorfismos D_i, D_j y D_l en $\mathfrak{gl}_k(M)$.

Definimos $* = \mathrm{id}_{\mathrm{End}_k(M)} \otimes *_{\mathfrak{g}}$ el isomorfismo de Hodge de $\mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$.

Proposición 6.1.8. *La identidad $[D, *(R)] = 0$ (visto como conmutador graduado en el álgebra $\mathrm{End}_k(M) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$) es equivalente a la colección de igualdades*

$$\sum_{i=1}^{N} [D_i, R_{i,j}] = 0,$$

para todo j, $1 \leq j \leq N$.

Demostración. Demostraremos la proposición escribiendo el conmutador $[D, *(R)] \in \Lambda^{N-1} \mathfrak{g}^*$ en componentes:

$$\begin{aligned}
[D, *(R)] &= D * (R) - (-1)^{|D||*(R)|} * (R) D = D * (R) - (-1)^N * (R) D \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{1 \leq j < l \leq N} D_i R_{j,l} y_i^* \wedge *(y_j^* \wedge y_l^*) - (-1)^N \sum_{i=1}^{N} \sum_{1 \leq j < l \leq N} R_{j,l} D_i * (y_j^* \wedge y_l^*) \wedge y_i^* \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{1 \leq j < l \leq N} (D_i R_{j,l} - R_{j,l} D_i) y_i^* \wedge *(y_j^* \wedge y_l^*) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{1 \leq j < l \leq N} (D_i R_{j,l} - R_{j,l} D_i) y_i^* \wedge (-1)^{j+l-1} y_1^* \wedge \cdots \wedge \hat{y_j^*} \wedge \cdots \wedge \hat{y_l^*} \wedge \cdots \wedge y_N^* \\
&= \sum_{1 \leq j < l \leq N} (D_j R_{j,l} - R_{j,l} D_j) y_j^* \wedge (-1)^{j+l-1} y_1^* \wedge \cdots \wedge \hat{y_j^*} \wedge \cdots \wedge \hat{y_l^*} \wedge \cdots \wedge y_N^* \\
&+ \sum_{1 \leq j < l \leq N} (D_l R_{j,l} - R_{j,l} D_l) y_l^* \wedge (-1)^{j+l-1} y_1^* \wedge \cdots \wedge \hat{y_j^*} \wedge \cdots \wedge \hat{y_l^*} \wedge \cdots \wedge y_N^* \\
&= \sum_{1 \leq j < l \leq N} (D_j R_{j,l} - R_{j,l} D_j) (-1)^l y_1^* \wedge \cdots \wedge \hat{y_l^*} \wedge \cdots \wedge y_N^* \\
&+ \sum_{1 \leq j < l \leq N} (D_l R_{j,l} - R_{j,l} D_l) (-1)^{j-1} y_1^* \wedge \cdots \wedge \hat{y_j^*} \wedge \cdots \wedge y_N^*.
\end{aligned}$$

Si extraemos la componente de tipo $y_1^* \wedge \cdots \wedge \hat{y_{j_0}^*} \wedge \cdots \wedge y_N^*$, con $1 \leq j_0 \leq N$, resulta

$$(-1)^{j_0}\big(\sum_{1 \leq j < j_0} (D_j R_{j,j_0} - R_{j,j_0} D_j) - \sum_{j_0 < j \leq N} (D_j R_{j_0,j} - R_{j_0,j} D_j)\big),$$

que podemos reescribir

$$\sum_{i=1}^{N} [D_j, R_{j,j_0}] = 0.$$

Nuevamente, como $y_1^* \wedge \cdots \wedge \hat{y_{j_0}^*} \wedge \cdots \wedge y_N^*$ forman una base de $\Lambda^{N-1}\mathfrak{g}^*$, con $1 \leq j_0 \leq N$, la proposición queda demostrada. $\square$

Las igualdades anteriores son denominadas **ecuaciones de Yang-Mills**, ya que son análogas a las consideradas para las teorías de gauge en geometría diferencial y teoría de campos clásicas (cf. [De&al], I-Classical Fields, Ch. 4). En el caso en que el álgebra de Lie es conmutativa, obtenemos exactamente las relaciones que definían el álgebra de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(N)$, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{N} [D_i, [D_i, D_j]] = 0,$$

para todo $1 \leq j \leq N$, es decir, M es un $\mathfrak{ym}(N)$-módulo.

Nuevamente, de forma análoga al caso de las teorías de gauge (cf. [De&al]), si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión 4, un **instantón** es una conexión sobre un módulo M tal que su curvatura cumple que

$$*(R) = \pm R.$$

En el caso que el signo de la ecuación anterior sea positivo, el instantón se dice **auto-dual**, y si es negativo, **anti-auto-dual**. Para $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^4$ (o $\mathbb{C}^4$) las componentes de un instantón cumplen las ecuaciones de Yang-Mills, y M resulta un $\mathfrak{ym}(4)$-módulo.

6.2 Ejemplo: Instantones en el espacio plano no conmutativo $\mathbb{R}^4_\theta$

En esta sección presentamos un ejemplo importante de la teoría de campos no conmutativa: los instantones en el espacio plano no conmutativo. Seguiremos esencialmente [Sch] o [KS], aunque completamos todos los detalles.

Sea θ una matriz antisimétrica invertible en $M_d(\mathbb{R})$, cuyas componentes escribiremos θ_{jl}, $1 \leq j, l \leq d$, e $Y(d) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle y_1, \ldots, y_d\rangle$. Se define usualmente el **espacio plano no conmutativo** como la $\mathbb{C}$-álgebra dada por

$$\mathbb{R}^d_\theta = T(Y(d))/\langle\{[y_j, y_l] - i\theta_{j,l}\}\rangle.$$

Aunque ésta es la definición más usual de espacio plano no conmutativo en el mundo naif de la teoría de campos no conmutativa, como se verá en esta sección (siguiendo a [KS]), este álgebra no es apropiada para analizar instantones (o solitones) no conmutativos, sino que es necesario emplear ciertas "completaciones" (cf. Observación 6.2.6).

Por este motivo, usaremos diversas versiones del espacio plano no conmutativo como $*$-álgebras de Fréchet o C^*-álgebras, que describimos a continuación. Empleamos la misma notación que antes: θ es una matriz anti-simétrica invertible en $M_d(\mathbb{R})$.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita d, que consideraremos como grupo de Lie abeliano real, y sea A un $\mathbb{C}$-espacio de Fréchet, es decir, un espacio vectorial topológico localmente convexo, dado por una familia a lo sumo numerable de seminormas $\{\|-\|_j\}_{j \in N}$ y completo. Consideraremos a A provisto de una acción α de V **isométrica** y **fuertemente continua**, es decir, un morfismo $\mathbb{C}$-lineal $\alpha : V \otimes_{\mathbb{C}} A \to A$ que satisface que $\|\alpha(v \otimes a)\|_j = \|a\|_j$, $\forall\, a \in A$, $v \in V$, $j \in N$ y, para todo $a \in A$, la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha(-, a) : V &\to A \\ v &\mapsto \alpha(v \otimes a) \end{aligned}$$

es continua, respectivamente.

Un elemento $a \in A$ se dice **suave** si $\alpha(-, a)$ es un morfismo C^∞. El subconjunto de elementos suaves de A es una subálgebra de A, que denotaremos A^∞, y es una subrepresentación de A para la acción de V.

Si $\{e_1, \dots, e_d\}$ es una base de V, dado $i = 1, \dots, d$, se denotará ∂_i o α_{e_i} la derivación asociada del álgebra de Lie de V (que se identifica canónicamente con V) en la dirección de e_i. En A^∞ consideraremos la colección de seminormas

$$\|a\|_{j,l} = \sup_{i \leq j} \sum_{|\bar{n}| \leq l} \frac{\|\partial^{\bar{n}} a\|_i}{\bar{n}!}, \tag{6.2.1}$$

donde la suma anterior es sobre los multiíndices $\bar{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$ tales que $|\bar{n}| = n_1 + \cdots + n_d \leq l$ y se define $\bar{n}! = n_1! \dots n_d!$.

Supongamos que A es un **álgebra de Fréchet**, i.e., A está provista de una multiplicación continua. Esto es equivalente a que las seminormas $\{\|-\|_j\}_{j \in N}$ sean **submultiplicativas**, es decir, para todo j existe l y una constante c_j tal que $\|ab\|_j \leq c_j \|a\|_l \|b\|_l$, para todo $a, b \in A$. En este caso, la familia de seminormas (6.2.1) definidas en A^∞ también resulta submultiplicativa y A^∞ es por lo tanto un álgebra de Frechet.

Ejemplo 6.2.1. *Supongamos que tenemos un álgebra de Fréchet A' provista de una familia de seminormas $\{\|-\|'_j\}_{j \in N}$. Consideramos $C_b(V, A')$ el espacio de Fréchet de de funciones continuas acotadas de V en B, con las seminormas $\|f\|_j = \sup_{v \in V} \|f(v)\|'_j$, $\forall\, j \in N$ y provisto de la acción dada por traslaciones, i.e., $\alpha(v, f)(w) = f(v + w)$. Esta acción es isométrica pero no es fuertemente continua. Sea $A = C_u(V, A')$ el subespacio maximal de $C_b(V, A')$ en el que α es fuertemente continua, que resulta ser el espacio de funciones uniformemente continuas acotadas de V en A'. En este caso, denotamos $\mathcal{B}^{A'} = A^\infty$ el espacio de los vectores suaves de A. Si $A' = \mathbb{C}$, escribimos $\mathcal{B}^{A'} = \mathcal{B}(V)$, o simplemente $\mathcal{B}$, que coincide con el espacio $\mathcal{B}$ de L. Schwartz (cf. [Sch]). Si A' es una C^*-álgebra, $\mathcal{B}^{A'}$ resulta una $*$-álgebra de Fréchet, considerando la involución $f^*(v) = (f(v))^*$.*

Por otro lado, se define $\mathcal{S}^{A'}$ el espacio de las funciones C^∞ de V en A' tales que todos los productos de sus derivadas por polinomios en V están acotados para cada seminorma de A'. $\mathcal{S}^{A'}$ es un espacio e Fréchet para la colección de seminormas siguientes: dados p un polinomio, $\bar{n} \in \mathbb{N}_0^d$ un multiíndice, y $j \in N$, se define $\|f\|_{p,\bar{n},j} = \|p(x^{\bar{n}} f)\|'_j$. Notamos que la acción anterior no es isométrica para estas seminormas. Si $A' = \mathbb{C}$, $\mathcal{S}^{A'} = \mathcal{S}(V)$, que también escribiremos $\mathcal{S}$, es el espacio de Schwartz.

Consideramos en A^∞ el producto, denominado **estrella** o **deformado**, dado por la integral oscilatoria (cf. [Shu], Sec. 23.2, [Rie2], Ch. 1, y Def. 2.1)

$$(a \star b) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(\theta u)(a) \alpha(v)(b) e^{iuv} d\mu(u) d\mu(v), \tag{6.2.2}$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

El producto anterior es asociativo (cf. [Rie2], Thm. 2.14), las seminormas (6.2.1) son submultiplicativas (cf. [Rie2], Prop 2.2), la acción de $\mathbb{R}^d$ sigue siendo diferenciable por automorfismos del producto estrella (cf. [Rie2], Prop. 2.5) y la involución $*$ de A es una involución con respecto al producto estrella ya que θ es antisimétrica (cf. [Rie2], Prop. 2.19). Por lo tanto, A^∞ resulta una $*$-álgebra de Fréchet, que denotaremos $\tilde{A}_\theta$. Notemos que la topología inducida por las seminormas es independiente de la elección de la base de V.

Ejemplo 6.2.2. *$\mathcal{S}^{A'} \subseteq \mathcal{B}^{A'}$ es un ideal para el producto deformado, y para todo $f \in \mathcal{B}^{A'}$, la multiplicación*

$$\begin{aligned} L_f : \mathcal{S}^{A'} &\to \mathcal{S}^{A'} \\ g &\mapsto f * g, \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

es continua para la topología de $\mathcal{S}^{A'}$ (cf. [Rie2], Prop. 3.3).

Además, $\mathcal{S}^{A'}$ está provista de una forma con valores en A'

$$\langle f, g \rangle'_{A'} = \int_V f(v) g(v) d\mu(v).$$

Si A' es una C^*-álgebra, $\mathcal{S}^{A'}$ resulta un módulo prehilbertiano sobre A', considerando la forma A'-lineal $\langle f, g \rangle_{A'} = \langle f^*, g \rangle'_{A'}$ (cf. [Rie2], p. 29) y puede demostrarse que si $f \in \mathcal{S}^{A'}$, el operador L_f dado en (6.2.3) *resulta acotado para la estructura de $\mathcal{S}^{A'}$ de A'-módulo prehilbertiano (cf. [Rie2], Lemma 4.3). Más aún, si $f \in \mathcal{B}^{A'}$, L_f es un operador acotado para la estructura de $\mathcal{S}^{A'}$ de A'-módulo prehilbertiano (cf. [Rie2], Thm. 4.6).*

Supongamos ahora que A es una C^*-álgebra. Entonces, es posible definir una norma en A^∞ de forma tal que resulte una pre-C^*-álgebra del modo siguiente (cf. [Rie2], Ch. 4). Consideramos los espacios $\mathcal{B}^A$ y $\mathcal{S}^A$ presentados en los Ejemplos 6.2.1 y 6.2.2. En este caso, tenemos un $*$-morfismo equivariante con respecto a la acción de V de la forma

$$\begin{aligned} \phi : A &\to C_u(V, A) \\ a &\mapsto (v \mapsto \alpha(v \otimes a)), \end{aligned}$$

y por lo tanto satisface que $\phi(A^\infty) \subseteq \mathcal{B}^A$ y es un morfismo para el producto deformado (cf. [Rie2], Prop 2.10).

Denotamos L_a el operador acotado $L_{\phi(a)}$ considerado en (6.2.3). Se define $\|a\| = \|L_a\|$. Esta norma le da a A^∞ una estructura de pre-C^*-álgebra, con el producto estrella y la involución de A. La completación de A^∞ con respecto a esta norma es una C^*-álgebra, que denotaremos A_θ, y se denomina la **cuantización por deformación estricta** de A (cf. [Rie2], Def. 4.9).

Es posible extender la acción de V en A a una acción de V en A^∞ de forma fuertemente continua tanto para la estructura de Fréchet, como para la estructura de pre-C^*-álgebra (cf. [Rie2], p. 44), y por lo tanto, resulta una acción fuertemente continua de V en A_θ (cf. [Rie2], Prop. 5.11).

Observación 6.2.3. *En [Rie3], Prop. 2.14, se probó que la C^*-álgebra A_θ es el álgebra de punto fijo generalizado para la acción de de V en A (cf. [Rie1], Def. 1.4) y por lo tanto es equivalente Morita estricto a la C^*-álgebra producto cruzado entre $\mathcal{S}^A$ y V por la acción ρ definida como $\rho_v(f)(w) = \alpha_v(f(w-v))$ (cf. [Rie3], Thm. 3.2)*

Podemos aplicar las prescripciones anteriores al siguiente caso particular.

Sea $A = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ la C^*-álgebra de funciones continuas que tienden a cero en infinito provista de la norma del supremo y la conjugación, con la acción de $V = \mathbb{R}^d$ en A dada por traslaciones, i.e., $\alpha(v, f)(w) = f(v + w)$. Notar que en este ejemplo $A \subseteq C_b(V, \mathbb{C})$, con la estructura de C^*-álgebra inducida y la acción inducida de V. Se define $\tilde{\mathbb{R}}^d_\theta = A^\infty$. Es fácil ver que

$$\tilde{\mathbb{R}}^d_\theta = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : \lim_{x\to\infty} \partial^{\bar{n}}_{\bar{x}} f = 0, \forall\, \bar{n} \in \mathbb{N}^d_0\},$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$, $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d_0$, $\partial^{\bar{n}}_{\bar{x}} = \partial^{n_1}_{x_1} \ldots \partial^{n_d}_{x_d}$, con el producto (estrella) dado por

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(x + \theta u) g(x + v) e^{iuv} d\mu(u) d\mu(v),$$

donde μ es la medida de Lebesgue, y la involución es la conjugación.

En este caso, es fácil ver que $A^\infty \hookrightarrow \mathcal{B}$ es un $*$-morfismo continuo que preserva el producto deformado (cf. [Rie2], Prop 2.10) y $\mathcal{S} \subseteq A^\infty$. En consecuencia, $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathbb{R}}^d_\theta$ es un ideal (bilátero) de $\tilde{\mathbb{R}}^d_\theta$ con respecto al producto estrella (cf. [Rie2], Coro. 4.4). Más aún, dado $f \in \tilde{\mathbb{R}}^d_\theta$, el operador L_f es acotado, y definiendo $\|f\| = \|L_f\|$, $\tilde{\mathbb{R}}^d_\theta$ resulta una pre-C^*-álgebra, como se vio en el caso general, y su completación es una C^*-álgebra, que denotaremos $\mathbb{R}^d_\theta$. A su vez, es posible extender (de forma fuertemente continua) a $\mathbb{R}^d_\theta$ la acción de $\mathbb{R}^d$ en $\tilde{\mathbb{R}}^d_\theta$.

Consideramos ahora otra versión del espacio plano no conmutativo. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_\theta, \mathbb{C})$, o más simplemente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_\theta)$, la $*$-álgebra de Fréchet definida de la forma siguiente. Dado $x \in \mathbb{R}^d$, notaremos $\langle x \rangle = (1 + ||x||^2)^{1/2}$. El espacio vectorial es el espacio de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : |\langle x \rangle^p \partial^{\bar{n}}_{\bar{x}} f| \leq C_{p,\bar{n}}, \forall\, \bar{n} \in \mathbb{N}^d_0, p \in \mathbb{N}_0\},$$

con el producto definido por la integral anterior, la involución dada por la conjugación de funciones y la topología dada por la familia de seminormas definidas por las constantes $C_{\bar{n},p}$ ($\bar{n} \in \mathbb{N}^d_0$ y $p \in \mathbb{N}_0$).

Dados $m \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \leq 1$, se define ([Shu], Def. 23.1)

$$\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : |\partial^{\bar{n}}_{\bar{x}} f(x)| \leq C_{\bar{n}} \langle x \rangle^{m - \rho|\bar{n}|}\},$$

que posee una estructura de espacio de Fréchet dada por la familia de seminormas definidas por las constantes $C_{\bar{n}}$ ($\bar{n} \in \mathbb{N}^d_0$).

Deseamos notar que (cf. [Shu], Eq. (23.2))

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \cap_{m\in\mathbb{R}} \Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d).$$

El producto usual de funciones cumple que, si $f_1 \in \Gamma^{m_1}_\rho(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in \Gamma^{m_2}_\rho(\mathbb{R}^d)$, entonces $f_1.f_2 \in \Gamma^{m_1+m_2}_\rho(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Shu], Sec 23.1).

Sea $f \in \Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$ y d par, $d = 2d'$. Se define el **operator pseudodiferencial** $\mathrm{Op}(f)$ **asociado a la amplitud** f a partir de la integral

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(f) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'})\\ u &\mapsto (x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d'}}\int_{\mathbb{R}^{d'}} f(x,\xi)u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}d\mu(y)d_1\mu(\xi)),\end{aligned}$$

que es continuo con la topogía de Fréchet usual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'})$. Más aún, puede ser extendido a un operador continuo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d'})$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d'})$ (cf. [Shu], Sec. 23.2). Notaremos $G^m_\rho(\mathbb{R}^d)$ la imagen bajo Op del espacio $\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$. Notar que Op induce un isomorfismo lineal de $\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$ en $G^m_\rho(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Shu], Thm. 23.2).

Observación 6.2.4. *Si $f \in \Gamma^0_\rho(\mathbb{R}^d)$, el operador $\mathrm{Op}(f)$ puede extenderse a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^{d/2})$ (cf. [Shu], Thm. 24.3), y si $f \in \Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$, con $m < 0$, puede extenderse a un operador compacto en $L^2(\mathbb{R}^{d/2})$ (cf. [Shu], Thm. 24.4).*

Por lo tanto, tenemos las siguiente colección de $*$-álgebras de Fréchet, que usualmente se identifican con el espacio plano no conmutativo,

- $\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d) = \cup_{m\in\mathbb{R}}\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$,
- Γ^m_ρ, si $m < 0$,
- $\Gamma^{<0}_\rho(\mathbb{R}^d) = \cup_{m<0}\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$,
- $\Gamma^{\leq 0}_\rho(\mathbb{R}^d) = \cup_{m\leq 0}\Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$,

con la involución dada por conjugación. Notar que $\Gamma^{<0}_\rho(\mathbb{R}^d) \subseteq \tilde{\mathbb{R}}^d_\theta$.

La clase de módulos proyectivos finitamente generados sobre la C^*-álgebra $\mathbb{R}^d_\theta$ está en correspondencia con la clase de módulos proyectivos finitamente generados sobre Γ^m_ρ ($m < 0$), que a su vez están en correspondencia con la clase de módulos proyectivos finitamente generados sobre un álgebra de operadores compactos de un espacio de Hilbert (cf. [Rie2]).

Por otra parte, dados $m \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \leq 1$, definimos

$$\tilde{\Gamma}^m_\rho(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : |f(x)| \leq C_0\langle x\rangle^m, |\partial^{\bar{n}}_{\bar{x}} f(x)| \leq C_{\bar{n}}\langle x\rangle^{-\rho|\bar{n}|}\}.$$

Se puede demostrar que $\tilde{\Gamma}^m_\rho(\mathbb{R}^d) \subseteq \Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^d)$. Consideremos el **espacio de amplitudes hiperbólicas** (cf. [Shu], Def. 25.1)

$$H\Gamma^{m,m'}_\rho(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : C\langle x\rangle^{m'} \leq |f(x)| \leq C_0\langle x\rangle^m, |\partial^{\bar{n}}_{\bar{x}} f(x)| \leq C_{\bar{n}}\langle x\rangle^{-\rho|\bar{n}|}\}.$$

Notar que el espacio anterior se puede definir también de la forma siguiente

$$H\Gamma^{m,m'}_\rho(\mathbb{R}^d) = \{f \in \tilde{\Gamma}^m_\rho(\mathbb{R}^d) : \exists g \in \tilde{\Gamma}^{-m'}_\rho, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - f.g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\}$$

y que, dados $f_1 \in H\Gamma^{m_1,m'_1}_\rho(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in H\Gamma^{m_2,m'_2}_\rho(\mathbb{R}^d)$ y $f_3 \in \Gamma^{m_3}_\rho(\mathbb{R}^d)$, con $m_3 < m'_1$, entonces $f_1^* \in H\Gamma^{m_1,m'_1}_\rho(\mathbb{R}^d)$, $f_1 + f_3 \in H\Gamma^{m_1,m'_1}(\mathbb{R}^d)$ y $f_1.f_2 \in H\Gamma^{m_1+m_2,m'_1+m'_2}_\rho(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Shu], Lemma 25.1). Notaremos $HG^{m,m'}_\rho(\mathbb{R}^d)$ la imagen bajo Op del espacio $H\Gamma^{m,m'}_\rho(\mathbb{R}^d)$, denominado **espacio de operadores hiperbólicos**.

Además, el operador pseudodiferencial $\mathrm{Op}(f)$ asociado a $f \in H\Gamma^{m,m'}_\rho(\mathbb{R}^d)$ es un operador Fredholm de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, y de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Shu], Thm. 25.3).

Por otro lado, si $f_1 \in H\Gamma^{m_1,m'_1}_\rho(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in H\Gamma^{m_2,m'_2}_\rho(\mathbb{R}^d)$, entonces $f_1 \star f_2 \in H\Gamma^{m_1+m_2,m'_1+m'_2}_\rho(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Fo], Thm. 2.47, Eq. (2.44b)). Más aún, resulta que Op es un morfismo de álgebras, al considerar el producto estrella (cf. [Fo], Eq. (2.44b)). Al aplicar este morfismo a $\tilde{\mathbb{R}}^d_\theta$, vemos que induce una $*$-representación irreducible de $\mathbb{R}^d_\theta$ en $L^2(\mathbb{R}^{d'})$, lo que implica que Op es un monomorfismo de $\mathbb{R}^d_\theta$ en $L^2(\mathbb{R}^{d'})$ (cf. [Cor], Thm. 1.2; [Fo], Thm. 1.30; [Rie2], pp. 31, 39).

Dado $f \in H\Gamma^{m,m'}_\rho(\mathbb{R}^d)$, entonces existe $g \in H\Gamma^{-m,-m'}_\rho(\mathbb{R}^d)$, denominada **parametriz**, tal que

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - g \star f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Notar que, si g, g' son dos parametrices de f, entonces $g - g' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Shu], Thm. 25.1).

Sea $f \in H\Gamma_\rho^{m,m'}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathrm{Op}(f)$ su operador pseudodiferencial asociado. Supongamos que $\mathrm{Op}(f)$ es inyectivo (por [Shu], Eq. (25.7), no importa dónde). Si nos restringimos al espacio de Schwartz con el producto sesquilineal inducido de $L^2(\mathbb{R}^{d'})$, vemos que $\mathrm{Op}(f)^*\mathrm{Op}(f)$ es inyectivo, ya que, si $v \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Op}(f)^*\mathrm{Op}(f))$

$$0 = \langle \mathrm{Op}(f)^*\mathrm{Op}(f)v, v\rangle = \langle \mathrm{Op}(f)v, \mathrm{Op}(f)v\rangle,$$

lo que implica que $\mathrm{Op}(f)v = 0$, y por lo tanto $v = 0$.

A su vez, como $\mathrm{Op}(f)^*\mathrm{Op}(f)$ es autoadjunto, posee inversa (cf. [Sch], Thm. 25.4). Entonces, existe un operador $T = \mathrm{Op}(f)(\mathrm{Op}(f)^*\mathrm{Op}(f))^{-1/2}$ tal que $T^*T = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$. Además, las amplitudes asociadas a T y T^* pertenecen a $H\Gamma_\rho^{0,0}(\mathbb{R}^d)$, y por la unicidad de la parametriz, $\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} - TT^*$ es un operador integral con núcleo en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$.

Observación 6.2.5. *Siguiendo a [Hör], todas las definiciones y resultados anteriores pueden obtenerse en el caso más general de funciones con valores en un espacio* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$, *donde E y F son dos* $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales de dimensión finita, y el valor absoluto es reemplazado por la norma usual de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$.

En este caso, denotaremos los espacios anteriores de la forma $\mathbb{R}^d_\theta(N, N')$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_\theta)(N, N')$ *y* $\Gamma_\rho^\bullet(\mathbb{R}^d_\theta)(N, N')$ *(*$\bullet = m, < 0, \leq 0$*), si* $\dim_{\mathbb{C}}(E) = N$ *y* $\dim_{\mathbb{C}}(F) = N'$.

Los resultados anteriores (salvo el caso de operadores hiperbólicos) son válidos para multiplicaciones (matriciales) $g.f$ *de funciones, con f tomando valores en* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$ *y g en* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F, G)$. *En el caso de operadores hiperbólicos, elegimos* $E = F$, *y notaremos* $H\Gamma_\rho^{m,m'}(\mathbb{R}^d_\theta)(N)$.

Estaremos particularmente interesados en el caso $m = n = 4$, con el álgebra de Lie $\mathbb{R}^4$, que actúa sobre el espacio no conmutativo $\mathbb{R}^4_\theta$ por las derivaciones usuales. En este caso, existe un procedimiento para describir instantones, denominado **ADHM no conmutativo**, que es una generalización del método de Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin en geometría diferencial (cf. [ADHM]) y que procedemos a explicar.

En primer lugar, sean V y W dos $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, y consideremos los morfismos de espacios vectoriales $B_1, B_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $I \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ y $J \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$. Además, definimos los elementos de $\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$

$$z_1 = y_1 + iy_2,$$
$$z_2 = y_3 + iy_4.$$

y los números complejos $\zeta_c, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ mediante

$$[z_1, z_2] = \zeta_c, \qquad [z_1, \bar{z}_1] = -\zeta_1, \qquad [z_2, \bar{z}_2] = -\zeta_2,$$

donde $\bar{z}_1 = y_1 - iy_2$, $\bar{z}_2 = y_3 - iy_4$ (los números complejos anteriores se escriben como combinación lineal de los elementos de matriz de θ, ya que son los corchetes de Poisson de las funciones coordenadas (cf. [Rie4], p. 72)). Además, $\zeta_r = \zeta_1 + \zeta_2$.

Comencemos considerando el morfismo de $\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$-módulos

$$D^* : (V \oplus V \oplus W) \otimes \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d) \to (V \oplus V) \otimes \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$$

dado en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} -B_2 + z_2 & B_1 - z_1 & I \\ B_1^* - \bar{z}_1 & B_2^* - \bar{z}_2 & J^* \end{pmatrix}.$$

Notar que este operador está bien defindo ya que $\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d) \star \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d) \subseteq \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$ (cf. [Shu], Sec. 23.2).

Sean

$$\mu_r = [B_1, B_1^*] + [B_2, B_2^*] + II^* - J^*J,$$
$$\mu_c = [B_1, B_2] + IJ,$$
$$\bar{\mu}_c = [B_2^*, B_1^*] + J^*I^*,$$

entonces, las identidades

$$\mu_r = \zeta_r,$$
$$\mu_c = \zeta_c,$$
$$\bar{\mu}_c = \bar{\zeta}_c,$$

denominadas **ecuaciones ADHM**, implican que $D^*D \in \mathrm{End}_{\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)}((V \oplus V) \otimes \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d))$ se puede escribir de la forma

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

donde $\Delta \in \mathrm{End}_{\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)}(V \otimes \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d))$ está dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= (B_1 - z_1)(B_1^* - \bar{z}_1) + (B_2 - z_2)(B_2^* - \bar{z}_2) + II^*, \\ &= (B_1^* - \bar{z}_1)(B_1 - z_1) + (B_2^* - \bar{z}_2)(B_2 - z_2) + J^*J. \end{aligned}$$

El morfismo Δ es claramente inyectivo (más aún, es definido positivo) y autoadjunto.

Por otro lado, Δ es un elemento de $H\Gamma_1^{2,2}(\mathbb{R}^4)(2)$, ya que es la suma $II^* \in H\Gamma_1^{0,0}(\mathbb{R}^4)(2)$ y de

$$A(z_1, z_2) = (B_1 - z_1)(B_1^* - \bar{z}_1) + (B_2 - z_2)(B_2^* - \bar{z}_2),$$

que pertenece a $H\Gamma_1^{2,2}(\mathbb{R}^4)(2)$. Para demostrar esto último

$$A(z_1, z_2) = B_1B_1^* - z_1B_1^* - B_1\bar{z}_1 + |z_1|^2 + B_2B_2^* - z_2B_2^* - B_2\bar{z}_2 + |z_2|^2,$$

y como $B_1B_1^*, B_2B_2^* \in \Gamma_1^0(\mathbb{R}^4)(2,2)$; $B_1\bar{z}_1, B_1^*z_1, B_2\bar{z}_2, B_2^*z_2 \in \Gamma_1^1(\mathbb{R}^4)(2,2)$ y $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z|^2 \in H\Gamma_1^{2,2}(\mathbb{R}^4)(2)$, entonces $A \in H\Gamma_1^{2,2}(\mathbb{R}^d)(2)$.

Finalmente, como Δ es inyectivo, autoadjunto y pertenece a $H\Gamma_1^{2,2}(\mathbb{R}^4)(2)$, es un isomorfismo.

Podemos definir entonces los morfismos de $\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$-módulos $p = D(D^*D)^{-1}D^*$ y $p' = 1 - p$ en $(V \oplus V \oplus W) \otimes \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$, que cumplen $p^2 = p$, $p'^2 = p'$ y $pp' = p'p = 0$. Consideramos el $\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$-módulo $M = \mathrm{Ker}(D^*) = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p')$, que es proyectivo finitamente generado, ya que es sumando directo (como $\Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$-módulo) de $(V \oplus V \oplus W) \otimes \Gamma_\rho(\mathbb{R}^d)$ y la conexión inducida por Levi-Civita en M.

Observación 6.2.6. *En [Ne2], pp. 13–14, o [NS], está demostrado que Δ es un morfismo inyectivo. Sin embargo, este morfismo no es biyectivo al emplear la definición de espacio plano no conmutativo presente en esos artículos, y por lo tanto no se puede obtener un módulo proyectivo finitamente generado de acuerdo a las prescripciones anteriores en ese contexto (cf. [Sch], p. 2).*

Si definimos $f = D$ y $g = (D^*D)^{-1}D^*$, la curvatura correspondiente es la calculada en el Ejemplo 6.1.4, (iii),

$$\begin{aligned} R &= p'dD(D^*D)^{-1}D^*dD(D^*D)^{-1}D^* + p'dDd((D^*D)^{-1}D^*) \\ &= p'dD(D^*D)^{-1}D^*dD(D^*D)^{-1}D^* - p'dD(D^*D)^{-1}d(D^*D)(D^*D)^{-1}D^* + p'dD(D^*D)^{-1}dD^*, \end{aligned}$$

ya que

$$d(a^{-1}) = -a^{-1}d(a)a^{-1}.$$

Más aún, como $d(D^*D) = dD^*D + D^*dD$, resulta

$$\begin{aligned} R &= p'dD(D^*D)^{-1}D^*dD(D^*D)^{-1}D^* - p'dD(D^*D)^{-1}dD^*D(D^*D)^{-1}D^* \\ &\quad - p'dD(D^*D)^{-1}D^*dD(D^*D)^{-1}D^* + p'dD(D^*D)^{-1}dD^* \\ &= p'dD(D^*D)^{-1}dD^* - p'dD(D^*D)^{-1}dD^*p, \end{aligned}$$

y como R está restringido a $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p')$, obtenemos

$$R = p'dD(D^*D)^{-1}dD^*p'.$$

De la definición de D^* resulta la siguiente expresión matricial para la curvatura

$$R = 2p' \begin{pmatrix} i\Delta^{-1}\omega_1 & \Delta^{-1}(\omega_2 + i\omega_3) & 0 \\ \Delta^{-1}(\omega_2 - i\omega_3) & -i\Delta^{-1}\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p',$$

donde ω_i, $i = 1, 2, 3$, son 2-formas con valores en el álgebra de Lie $\mathbb{R}^4$ dados por

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx_2dx_1 + dx_3dx_4, \\ \omega_2 &= dx_1dx_3 + dx_2dx_4, \\ \omega_3 &= dx_4dx_1 + dx_2dx_3. \end{aligned}$$

De la escritura anterior, vemos inmediatamente que R es auto-dual. Esto implica que las componenetes de la conexión de Levi-Civita para el módulo M cumplen las ecuaciones de Yang-Mills, y por lo tanto M es un $\mathrm{YM}(4)$-módulo.

Observación 6.2.7. *De igual modo que en la geometría conmutativa, en el caso de los instantones en el espacio plano no conmutativo se imponen condiciones de crecimiento en infinito, cf. [Sch], Sec. 3.*

Referencias

[Ada] Adams, J. *On the cobar construction*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **42**, (1956), pp. 409–412.

[ADHM] Atiyah, M.; Drinfel'd, V.; Hitchin, N.; Manin, Yu., *Construction of Instantons*. Phys. Lett. A**65**, (1978), no. 3, pp. 185–187.

[Ba] Bavula, V. *Generalized Weyl algebras and their representations*. Algebra i Analiz **4**, (1992), no. 1, pp. 75–97. English translation, St. Petersburg Math. J. **4**, (1993), no. 1, pp. 71–92.

[BB] Bavula, V.; Bekkert, V. *Indecomposable representations of generalized Weyl algebras*. Comm. Algebra **28**, (2000), no. 11, pp. 5067–5100.

[BRS] Becchi, C.; Rouet, A.; Stora, R. *Renormalization of gauge theories*. Ann. Physics. **98**, (1976), no. 2, pp. 287–321.

[BR1] Benkart, G.; Roby, T. *Down-up algebras*. J. Algebra **209**, (1998), no. 1, pp. 305–344.

[BR2] Benkart, G.; Roby, T. *Addendum: "Down-up algebras"*. J. Algebra **213**, (1999), no. 1, p. 378.

[Ber1] Berger, R. *Koszulity for nonquadratic algebras*. J. Algebra **239**, (2001), no. 2, pp. 705–734.

[Ber2] Berger, R. *La catégorie graduée*. Preprint. `http://webperso.univ-st-etienne.fr/~rberger/mes-textes.html`.

[BDVW] Berger, R.; Dubois-Violette, M.; Wambst, M. *Homogeneous algebras*. J. Algebra **261**, (2003), no. 1, pp. 172–185.

[Bour] Bourbaki, N. *Lie groups and Lie algebras*. Éléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II: Algèbres de Lie libres. Chapitre III: Groupes de Lie. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349. Hermann, Paris, 1972.

[Car] Cartan, H. *Séminaire H. Cartan de l'Ecole Normale Supérieure*. Paris, 1954-55.

[CE] Cartan, H.; Eilenberg, S. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[CM] Carvalho, P.; Musson, I. *Down-up algebras and their representation theory*. J. Algebra **228**, (2000), no. 1, pp. 286–310.

[CG] Chriss, N.; Ginzburg, V. *Representation theory and complex geometry*. Birkhäuser, Boston, 1997.

[C&al] Clerc, J.-L., et al. *Analyse Harmonique*. Les cours du C.I.M.P.A, Nice, 1983.

[Con] Connes, A. *C^*-algèbres et géométrie différentielle*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **290**, (1980), no. 13, pp. A599–A604.

[CD1] Connes, A.; Dubois-Violette, M. *Yang-Mills Algebra*. Lett. Math. Phys. **61**, (2002), no. 2, pp. 149–158.

[CD2] Connes, A.; Dubois-Violette, M. *Yang-Mills and some related algebras*. Rigorous quantum field theory, pp. 65–78, Progr. Math., **251**, Birkhäuser, Basel, 2007.

[Cor] Cordes, H. *On pseudodifferential operators and smoothness of special Lie-group representations*. Manuscripta Math. **28**, (1979), no. 1–3, pp. 51–69.

[Cou] Coutinho, S. *A primer of algebraic D-modules*. London Mathematical Society Student Texts, **33**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[De&al] Deligne, P. et al. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*. Vol. 1, 2. Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997. Edited by Pierre Deligne, Pavel Etingof, Daniel S. Freed, Lisa C. Jeffrey, David Kazhdan, John W. Morgan, David R. Morrison and Edward Witten. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 1999.

[Dix1] Dixmier, J. *Enveloping algebras*. Revised reprint of the 1977 translation. Graduate Studies in Mathematics, **11**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Dix2] Dixmier, J. *Sur les algèbres de Weyl*. Bull. Soc. Math. France **96**, (1968), pp. 209–242.

[DVP] Dubois-Violette, M.; Popov, T. *Homogeneous algebras, statistics and combinatorics*. Lett. Math. Phys. **61**, (2002), no. 2, pp. 159–170.

[EM] Eilenberg, S.; Mac Lane, S. *On the groups of* $H(\Pi, n)$. I. Ann. of Math. (2) **58**, (1953), pp. 55–106.

[Fo] Folland, G. *Harmonic Analysis in Phase Space*. Annals of Mathematics Studies, **122**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[FH] Fulton, W.; Harris, J. *Representation theory. A first Course*. Graduate Texts in Mathematics, **129**. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[GK] Gelfand, I.; Kirillov, A. *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **31**, (1966), pp. 5–19.

[Gra] de Graaf, W. *Hall and Gröbner bases and rewriting in free Lie algebras*. Proceedings of the FLoC Workshop Gröbner bases and Rewriting Techniques, Trento, June 30-July 1, 1999.

[GS] Griffiths, P.; Schmid, W. *Locally homogeneous complex manifolds*. Acta Mathematica, **123**, (1969), pp. 253–302.

[Hart] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Hör] Hörmander, L. *The Weyl calculus of pseudodifferential equations*. Comm. Pure Appl. Math. **32**, (1979), no. 3, pp. 360–444.

[Hum] Humphreys, J. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, **9**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[Hum2] Humphreys, J. *Linear algebraic groups*. Graduate Texts in Mathematics, **21**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[Huy] Huybrechts, D. *Complex geometry. An introduction*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[I] Igusa, K. *Cyclic homology and the determinant of the Cartan matrix*. J. of Pure and Applied Algebra **83**, (1992), pp. 101–119.

[Kar] Karoubi, M. *Homologie cyclique et* K*-théorie*. Astérisque, No. **149**, (1987), 147 pp.

[Ka] Kassel, C. *Quantum groups*. Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Kel1] Keller, B. *Corrections to 'Sur les* A_∞*-catégories'*. Preprint. `http://www.math.jussieu.fr/~keller/lefevre/TheseFinale/corrainf.pdf`.

[Kel2] Keller, B. *Deriving DG categories*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27**, (1994), no. 1, pp. 63–102.

[Kel3] Keller, B. *Bimodule complexes via strong homotopy actions*. Special issue dedicated to Klaus Roggenkamp on the occasion of his 60th birthday. Algebr. Represent. Theory **3** (2000), no. 4, pp. 357–376.

[Kel4] Keller, B. *Introduction to A-infinity algebras and modules*, Homology Homotopy Appl. **3**, (2001), no. 1, pp. 1–35 (electronic).

[Khal] Khalkhali, M. *Cyclic homology of dg coalgebras and a Künneth formula*. `http://arxiv.org/abs/math/9806110`.

[Kir] Kirillov, A. *Lectures on the orbit method*. Graduate Studies in Mathematics, **64**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[KS] Konechny, A.; Schwarz, A. *Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry*. Phys. Rep. **360**, (2002), no. 5-6, pp. 353–465.

[KoS] Kostant, B.; Sternberg, S. *Symplectic reduction, BRS cohomology and infinite dimensional Clifford algebras*. Ann. Physics **176**, (1987), no. 1, pp. 49–113.

[Lan] Landi, G. *Examples of noncommutative instantons*. Geometric and topological methods for quantum field theory, pp. 39–72, Contemp. Math., **434**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[La1] Lang, S. *Differential and riemannian geometry*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, **160**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[La2] Lang, S. *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, **211**, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Lef] Lefèvre-Hasegawa, K. *Sur les A_∞-catégories*. Thèse de Doctorat, Spécialité: Mathématiques, Université Paris 7, novembre 2003. `http://www.math.jussieu.fr/~keller/lefevre/TheseFinale/tel-00007761.pdf`.

[Lo] Loday, J-L. *Cyclic homology*. Appendix E by María O. Ronco. Second edition. Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **301**. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Mac] MacLane, S. *Homology*. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Mar] Marconnet, N. *Homologies d'algèbres Artin-Schelter regulières cubiques*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris Ser. I **338**, (2004), no. 2, pp. 117–120.

[McR] McConnell, J.; Robson, J. *Noncommutative noetherian rings*. With the cooperation of L. W. Small. Revised edition. Graduate Studies in Mathematics, **30**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Mit] Mitchell, B. *Rings with several objects*. Adv. in Math. **8**, (1972), pp. 1–161.

[Mi] Miyanishi, M. *Algebraic geometry*. Translated from the 1990 Japanese original by the author. Translations of Mathematical Monographs, **136**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[Mont] Montgomery, S. *Hopf algebras and their actions on rings*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **82**, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[Mov] Movshev, M. *On deformations of Yang-Mills algebras*. `http://arxiv.org/abs/hep-th/0509119`.

[MS] Movshev, M.; Schwarz, A. *Algebraic structure of Yang-Mills theory*. The unity of mathematics, pp. 473–523, Progr. Math., **244**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[MO] Munthe-Kaas, H.; Owren, B. *Computations in a free Lie algebra*. R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **357**, (1999), no. 1754, pp. 957–981.

[Ne1] Nekrasov, N. *Lectures on open strings and noncommutative gauge fields*. Unity from duality: gravity, gauge theory and strings (Les Houches, 2001), pp. 477–495, NATO Adv. Study Inst., EDP Sci., Les Ulis, 2003.

[Ne2] Nekrasov, N. *Noncommutative instantons revisited*. Commun. Math. Phys. **241**, (2003), no. 1, pp. 143–160.

[NS] Nekrasov, N.; Schwarz, A. *Instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$, and $(2,0)$ superconformal six-dimensional theory*. Comm. Math. Phys. **198**, (1998), no. 3, pp. 689–703.

[Nu] Nuss, P. *Homologie des algèbres commutatives et presque commutatives*. Thèse de Doctorat, Spécialité: Mathématiques, Université Louis Pasteur, Strasbourg, février 1990.

[Pri] Priddy, S. *Koszul resolutions*. Trans. Amer. Math. Soc. **152**, (1970), pp. 39–60.

[PP] Polishchuk, A.; Positselski, L. *Quadratic Algebras*. University Lecture Series, **37**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Rie1] Rieffel, M. *Proper actions of groups on C^*-algebras*. Mappings of operator algebras (Philadelphia, PA, 1988), pp. 141–182, Progr. Math., 84, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Rie2] Rieffel, M. *Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$*. Mem. Amer. Math. Soc. **106**, (1993), no. 506.

[Rie3] Rieffel, M. *K-groups of C^*-algebras deformed by actions of $\mathbb{R}^d$*. J. Funct. Anal. **116**, (1993), no. 1, pp. 199–214.

[Rie4] Rieffel, M. *Quantization and C^*-álgebras*. C^*-algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), pp. 66–97, Contemp. Math. **167**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1994).

[Ro] Rosenberg, J. *Algebraic K-theory and its applications*. Graduate Texts in Mathematics, **147**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Sa] Saneblidze, S. *On the homotopy classification of spaces by the fixed loop space homology*. Proc. A. Razmadze Math. Inst. **119**, (1999), pp. 155–164.

[Sch] Schwarz, A. *Noncommutative instantons: a new approach*. Commun. Math. Phys. **221**, (2001), no. 2, pp. 433–450.

[Shu] Shubin, M. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Translated from the 1978 Russian original by Stig I. Andersson. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2001

[Sm] Smith, J. *Iterating the cobar construction*. Mem. Amer. Math. Soc. **109**, (1994), no. 524.

[Sta] Stasheff, J. *Homotopy associativity of H-spaces*. I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **108**, (1963), pp. 275–292; ibid. **108**, (1963), pp. 293–312.

[Sw] Swan, R. *Vector bundles and projective modules*. Trans. Amer. Math. Soc. **105**, (1962), pp. 264–277.

[Tay] Taylor, J. *Several complex variables with connections to algebriac geometry and Lie groups*. Graduate Studies in Mathematics, **46**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Um] Umble, R. *The deformation complex for differential graded Hopf algebras*. J. Pure Appl. Algebra **106**, (1996), no. 2, pp. 199–222.

[Wei] Weibel, C. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Žel] Želobenko, D. *Compact Lie groups and their representations*. Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations. Translations of Mathematical Monographs, Vol. **40**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1973.