UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Funciones que alcanzan su norma: operadores lineales, multilineales y polinomios.

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas

Martin D. Mazzitelli

Consejero de estudios: Dr. Daniel G. Carando
Director de tesis: Dr. Daniel G. Carando
Directora asistente: Dra. Silvia B. Lassalle

Buenos Aires, 2015

Fecha de defensa: 5 de marzo de 2015

Funciones que alcanzan su norma: operadores lineales, multilineales y polinomios.

Resumen

A lo largo de esta tesis, estudiamos problemas relacionados con la densidad de funciones que alcanzan la norma. Mediante técnicas de *linealización* a través de productos tensoriales, obtenemos resultados del tipo Lindenstrauss, es decir, de densidad de funciones cuyas extensiones al bidual alcanzan su norma. Tratamos, además, estos problemas en el marco de ideales de operadores multilineales.

Dado X un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación, probamos que el conjunto de polinomios homogéneos de X en un espacio dual Y' cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma, es denso en todo el espacio. Para ello establecemos una fórmula integral para la dualidad entre tensores y polinomios homogéneos.

Extendiendo la dualidad al espacio de polinomios de grado a lo sumo k, obtenemos una fórmula integral análoga a la del caso homogéneo. Luego, bajo las mismas hipótesis que antes sobre los espacios de salida y de llegada, probamos teoremas del tipo Lindenstrauss para el espacio de polinomios de grado a lo sumo k y para el álgebra de funciones holomorfas en la bola abierta $\overset{\circ}{B}_X$ y uniformemente continuas en la bola cerrada B_X. Con las misma técnicas, obtenemos un resultado análogo para el espacio de operadores multilineales simétricos. En todos los casos anteriores, probamos que los resultados del tipo Lindenstrauss también se satisfacen si las funciones toman valores en cualquier espacio Z con la propiedad (β) de Lindenstrauss.

Por otro lado, mostramos que el ya conocido teorema de Lindenstrauss multilineal sobre densidad de operadores N-lineales cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma (aquí, sin hipótesis adicionales sobre los espacios de salida y de llegada), se extiende a cualquier ideal de operadores N-lineales que verifique cierta hipótesis de *estabilidad*. Como consecuencia de este resultado, en el caso de operadores bilineales y de formas trilineales obtenemos el teorema de Lindenstrauss para cualquier ideal. También, abordamos una versión cuantitativa (del tipo Bollobás) de estos resultados. Mostramos que un resultado del tipo Lindenstrauss-Bollobás no se satisface con total generalidad en ningún ideal de multilineales.

Haciendo uso de ciertos preduales de espacios de sucesiones de Lorentz, mostramos ejemplos en los cuales no se verifica un resultado del tipo Bishop-Phelps polinomial y multilineal simétrico, pero sí se verifican nuestros resultados del tipo Lindenstrauss (es decir, las funciones que alcanzan la norma no son densas en el espacio, pero aquellas cuyas extensiones al bidual alcanzan la norma sí lo son). Estos mismos espacios son contraejemplos a resultados del tipo Lindenstrauss-Bollobás. Mostramos también, un ejemplo para funciones holomorfas a valores vectoriales en el cual no se verifica Bishop-Phelps pero sí se verifica Lindenstrauss.

Analizamos una versión *fuerte* de los teoremas de Lindenstrauss y Bishop-Phelps en el álgebra de funciones holomorfas uniformemente continuas en B_X, al considerar, en este espacio, la norma dada por $\|f\|_s = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq s\}$ para $0 < s \leq 1$.

Palabras clave: fórmula integral, funciones que alcanzan la norma, teoremas del tipo Lindenstrauss y del tipo Bishop-Phelps, preduales de Lorentz.

Norm attaining functions: linear and multilinear operators and polynomials.

Abstract

On this thesis, we study problems related to the density of norm-attaining functions. By means of *linearization* techniques through tensor products, we obtain Lindenstrauss-type results of density of functions whose extensions to the bidual attain their norms. We also treat these problems in the context of ideals of multilinear mappings.

Given a Banach space X whose dual is separable and has the approximation property, we prove that the set of homogeneous polynomials from X to a dual space Y' whose Aron-Berner extensions attain the norm, is dense in the whole space. For this purpose we stablish an integral formula for the duality between tensor products and homogeneous polynomials.

Extending the duality to the space of polynomials of degree less than or equal to k, we obtain an analogous integral formula. Then, under the same hypothesis on the domain and range spaces, we prove Lindenstrauss-type theorems for the space of polynomials of degree less than or equal to k and for the algebra of holomorphic functions in the open unit ball $\overset{\circ}{B}_X$ which are uniformly continuous in the closed unit ball B_X. Using the same techniques, we obtain an analogous result for the space of symmetric multilinear mappings. We prove that all these Lindenstrauss-type results also hold for functions with values in any Banach space Z with the property (β) of Lindenstrauss.

On the other hand, we show that the already known multilinear Lindenstrauss theorem about density of N-linear mappings whose Arens extensions attain the norm (here, without the additional hypothesis on the domain and range spaces), can be extended to any ideal of N-linear mappings satisfying certain *stability* hypothesis. As a consequence of this result, we obtain the Lindenstrauss theorem for any ideal of bilinear mappings and trilinear forms. Also, we address a quantitative (Bollobás-type) version of these results. We show that a Lindenstrauss-Bollobás-type theorem is not satisfied with full generality in any ideal of multilinear mappings.

Making use of preduals of Lorentz sequence spaces, we exhibit examples in which there is no Bishop-Phelps theorem for polynomials and symmetric multilinear mappings, but our Lindenstrauss-type theorems apply (that is, the norm-attaining functions are not dense in the whole space, but those whose extensions to the bidual attain the norm, are dense). The same spaces are counterexamples to Lindenstrauss-Bollobás-type results. We also show an example for vector-valued holomorphic functions, in which there is no Bishop-Phelps theorem but the Lindenstrauss theorem is satisfied.

We study a *strong* version of the Lindenstrauss and Bishop-Phelps theorems in the algebra of holomorphic functions which are uniformly continuous in B_X, considering, in this space, the norm given by $\|f\|_s = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq s\}$ for $0 < s \leq 1$.

Keywords: integral formula, norm-attaining functions, Lindenstrauss and Bishop-Phelps type-theorems, preduals of Lorentz.

Agradecimientos

En primerísimo lugar, les agradezco a Dani y a Silvia, que son los principales artífices de todo esto; por suerte (para mí) nunca sentí que nos juntábamos a trabajar sino a charlar, tomar mates y pensar algún problema. Todo lo bueno que pueda decir de ellos, es poco en comparación con la realidad . . .

Por otra parte, a lo largo de todos estos años, hubo mucha gente, muchas situaciones, muchos factores que (con o sin saberlo) me ayudaron a llegar hasta acá . . . sin repetir y sin soplar, ahí va una lista (muy) incompleta de todos ellos: mis padres + Javi, Lau y Ro, que me acompañaron y ayudaron tanto desde siempre, Neri, Santi y Diego (los sobrevivientes del Crisol), mis abuelos, Juliana + Javier + Rafa y Amanda, Lía + Paco + Sayri (mi ahijada mágica), Sofi y Pauli (la mafia de "La Zia"), todos en el grupo de funcional, Roman (hombre de luz), Marto 1, Pablo, Dany, Santi, Damián, Vero, Nacho, Pablo Sevilla (el integrante extranjero), Marto 2 (¿cuál es cuál?), Tomás; Caro, Vicky, Magui, Ani, Cristian, Nico, Anto, Andrea, Mariano (el prócer) y todos los que pasaron por la 2046, mi segunda oficina (la de los físicos) y sus integrantes *particulares*, Mona, la 2038 y su eterno postergar de un desafío futbolístico, Marian, las probabilistas que me ayudaron a entender algo de lo que hacen, Juli y Flor (mis compa's de Proba (C)), Anita, Inés, pepas Terepín y Trío, los partidos de los jueves y todos sus participantes, Champagne FC, Manolo, Marce (C), Abdallah Talhaoui (o como sea que se escriba), el profesor Aiena, García-Maestre (el dúo *Sui Generis* valenciano), CBC-San Isidro, San Carlos de Bariloche, la calle Pampa, *lo de Nacho*, los *droopies*, Fer de Warhol, mi computadora ya cansada de tanto maltrato, etc., etc., etc . . .

Un párrafo aparte para Déborah y los jurados de esta tesis, Pedro, Daniel y María, que se adaptaron a mis tiempos; gracias a ellos, hoy estoy escribiendo desde mi nuevo hogar patagónico.

Y por último pero primera, gracias a mi *orange juice*, Merce, y a todos los que se vengan con nosotros . . . por lo pronto, ya hay uno en camino.

Índice general

Introducción

El estudio de la densidad de funciones que alcanzan la norma tiene sus raíces en una caracterización de reflexividad de espacios de Banach, probada por James entre fines de los años '50 y principios de los '60. En [60] James demuestra que si X es un espacio de Banach separable, entonces X es reflexivo si y sólo si toda funcional lineal φ en X' (el espacio dual de X) alcanza la norma supremo; esto es, si para cada $\varphi \in X'$ existe un elemento $a \in B_X$ tal que $|\varphi(a)| = \sup_{x \in B_X} |\varphi(x)|$. En [61], James completa este resultado demostrando que la hipótesis de separabilidad no es necesaria. Se tiene entonces el siguiente resultado clásico de la teoría de espacios de Banach.

Teorema (James)**.** *Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si toda funcional lineal $\varphi \in X'$ alcanza la norma.*

Teniendo en cuenta este resultado, es razonable llamar *subreflexivos* a aquellos espacios normados X para los cuales las funcionales lineales que alcanzan la norma son simplemente densas en X'. Al mismo tiempo que James probaba su primera versión del teorema, Phelps se encontraba investigando la propiedad de subreflexividad. En [73, 74] mostró, entre otras cosas, que existe un espacio normado incompleto que no es subreflexivo y que varios de los clásicos ejemplos de espacios de Banach no reflexivos (c_0, ℓ_1, $C(K)$, etc.) son subreflexivos. En 1961, Bishop y Phelps [21] demuestran un resultado fundamental.

Teorema (Bishop-Phelps)**.** *Dado un espacio de Banach X, el conjunto de funcionales lineales y acotadas en X que alcanzan la norma es denso en X'. Es decir, dados $\varphi \in X'$ y $\varepsilon > 0$, existe $\psi \in X'$ una funcional lineal que alcanza la norma y tal que $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$.*

El teorema de Bishop-Phelps dejó en claro que la subreflexividad es una propiedad trivial, en el sentido de que todo espacio de Banach la posee. Desde la aparición del teorema de Bishop-Phelps, el estudio de las funciones que alcanzan su norma despertó un gran interés. En esta dirección, Lindenstrauss estudió en un trabajo fundamental [65], la posible validez del teorema de Bishop-Phelps para operadores lineales, exhibiendo ejemplos de espacios en los que los operadores que alcanzan su norma no son densos en el espacio de todos los operadores. Sin embargo, probó que los operadores lineales continuos cuyos bitranspuestos alcanzan la norma, sí son densos. Este resultado es conocido como el teorema de Lindenstrauss para operadores lineales.

Teorema (Lindenstrauss)**.** *Sean X, Y espacios de Banach. El conjunto de operadores lineales en $\mathcal{L}(X;Y)$ cuyos bitranspuestos alcanzan la norma es denso en todo el espacio de operadores $\mathcal{L}(X;Y)$.*

Por otro lado, Lindenstrauss comenzó un estudio sistemático acerca de la validez del teorema de Bishop-Phelps en espacios de operadores a través de las siguientes preguntas.

- ¿Para qué espacios X es cierto que para todo Banach Y , los operadores que alcanzan su norma son densos en $\mathcal{L}(X;Y)$?

- ¿Para qué espacios Y es cierto que para todo Banach X, los operadores que alcanzan su norma son densos en $\mathcal{L}(X;Y)$?

Desde entonces, diversos autores se han enfocado en estudiar propiedades de los espacios (de partida y de llegada) para los cuales se verifica un teorema del tipo Bishop-Phelps y dar ejemplos en los que no. Otro tema de interés, ha sido el de las posibles extensiones del teorema de Bishop-Phelps y de Lindentrauss a espacios de operadores multilineales, polinomios y funciones analíticas.

Siguiendo una de las líneas de estudio iniciadas por Lindenstrauss en [65], en 1995 Aron, Finet y Werner [19] dieron resultados positivos sobre la densidad del conjunto de las formas multilineales que alcanzan su norma, cuando el dominio tiene la propiedad de Radon-Nikodým, generalizando algunos de los resultados de Bourgain en [27]. Más resultados positivos del tipo Bishop-Phelps para multilineales, polinomios y funciones holomorfas pueden verse en [1, 6, 13, 14, 19, 20, 37, 38]. Cabe destacar, sin embargo, que en todos estos resultados se establecen sobre los espacios en el dominio o los espacios de llegada de las funciones, hipótesis suficientes para la validez del teorema . De hecho, Acosta, Aguirre y Payá [5] mostraron un contraejemplo a la versión bilineal del teorema de Bishop-Phelps: a partir de un espacio (un predual de Lorentz) que había sido utilizado por Gowers [53] en el contexto de operadores que alcanzan la norma, construyeron una forma bilineal que no puede ser aproximada por bilineales que alcanzan la norma. Este contraejemplo fue posteriormente refinado en [62] en el marco de formas N-lineales y polinomios N-homogéneos a valores escalares, con $N \geq 2$. Es un hecho remarcable que, si bien Lindenstrauss [65] ya había probado que el teorema de Bishop-Phelps no se verifica para operadores lineales, no se deduce de ello la no validez del mismo para espacios de operadores multilineales o polinomios. De aquí la importancia de los contraejemplos exhibidos en [5, 62]. Más contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps también fueron exhibidos en [6, 12, 36].

Ahora bien, de la misma manera que el bitranspuesto de un operador es una extensión natural del mismo al bidual, para operadores multilineales $T\colon X_1 \times \cdots \times X_N \to Y$ hay un procedimiento canónico que nos permite obtener $N!$ extensiones al bidual $\overline{T}\colon X_1'' \times \cdots \times X_N'' \to Y''$, denominadas extensiones de Arens. Asimismo, dado un polinomio $P\colon X \to Y$ hay una extensión canónica al bidual $\overline{P}\colon X'' \to Y''$, llamada extensión de Aron-Berner. Luego, tiene sentido preguntarse sobre la validez de un resultado análogo al de Lindenstrauss en los contextos multilineal y polinomial. Un resultado de Acosta del '98 [1], mejorado posteriormente por Aron, García y Maestre [20], muestra que el conjunto de todas las formas bilineales tales que sus extensiones al bidual alcanzan la norma, es un conjunto denso en el espacio de todas las formas bilineales, lo que da el caso bilineal del teorema de Lindenstrauss. Recién en 2006, Acosta, García y Maestre [11] lograron demostrar el teorema de Lindenstrauss multilineal para cualquier grado de linealidad. En el marco de polinomios homogéneos, Aron, García y Maestre [20] probaron la densidad del conjunto de polinomios continuos 2-homogéneos a valores escalares, cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma. Esto fue posteriormente extendido por Choi, Lee y Song [38] al caso de polinomios 2-homogéneos a valores vectoriales, quedando demostrado de esta manera un teorema de Lindenstrauss polinomial para el caso 2-homogéneo.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es el estudio de las posibles extensiones de un teorema de Lindenstrauss al caso polinomial homogéneo, polinomial no-homogéneo y holomorfo. Obtenemos resultados parciales en este sentido. Probamos que si X es un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación e Y es un espacio de Banach cualquiera, entonces el conjunto de polinomios N-homogéneos en $\mathcal{P}(^N X; Y')$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma, es denso en $\mathcal{P}(^N X; Y')$. Para demostrar este resultado, establecemos una fórmula integral para la dualidad entre polinomios homogéneos y tensores simétricos,

$$\mathcal{P}(^N X; Y') = \left[(\tilde{\otimes}^{N,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right]'.$$

Esto es, bajo las hipótesis ya mencionadas sobre los espacios de llegada y de salida, demostramos que para cada $u \in (\tilde{\otimes}^{N,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y$ existe una medida regular de Borel μ_u en $B_{X''} \times B_{Y''}$ tal que $\|\mu_u\| \leq \|u\|_\pi$ y

$$\langle u, P\rangle = \int_{B_{X''}\times B_{Y''}} \overline{P}(x'')(y'')d\mu_u(x'', y''),$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^N X; Y')$. Extendiendo la dualidad al espacio $\mathcal{P}_k(X; Y')$ de polinomios de grado a lo sumo k, obtenemos que $\mathcal{P}_k(X; Y') = \left[\oplus_{j=0}^k(\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s} X\tilde{\otimes}_\pi Y)\right]'$ y probamos una fórmula integral análoga a la del caso homogéneo. De esta manera, bajo las mismas hipótesis que antes sobre el espacio X, probamos un teorema del tipo Lindenstrauss para el espacio $\mathcal{P}_k(X; Y')$ y, como consecuencia inmediata, extendemos el resultado al espacio de funciones uniformemente continuas en la bola cerrada B_X y holomorfas en la bola abierta $\overset{\circ}{B}_X$, $\mathcal{A}_u(X; Y')$. En esta misma línea, utilizando la técnica de linealización a través de productos tensoriales y una fórmula integral correspondiente, probamos un resultado del tipo Lindenstrauss para operadores multilineales simétricos.

En [65], con el objetivo de encontrar espacios Y tales que se verifique el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(X; Y)$ para todo espacio X, se considera una propiedad geométrica denominada propiedad (β), que extiende al caso infinito-dimensional la noción de espacio cuya bola unidad es un poliedro. Siguiendo ideas de [37] probamos que los resultados del tipo Lindenstrauss obtenidos para polinomios, funciones holomorfas y operadores multilineales simétricos, siguen siendo válidos cuando consideramos funciones a valores en espacios con la propiedad (β). Dado que hay espacios con la propiedad (β) que no son duales, esto nos provee de nuevos ejemplos de espacios para los cuales se verifica un teorema de Lindenstrauss.

Teniendo en cuenta que un resultado del tipo Bishop-Phelps implica trivialmente uno del tipo Lindenstrauss, nos proponemos mostrar ejemplos de espacios para los cuales no se verifica el teorema de Bishop-Phelps polinomial, holomorfo y multilineal simétrico, pero sí se verifican los resultados del tipo Lindenstrauss mencionados anteriormente. Con ese propósito, recurrimos a ciertos preduales $d_*(w, 1)$ de espacios de sucesiones de Lorentz, que son los espacios que han sido utilizados en [5, 62] para mostrar contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps en los casos multilineal y polinomial a valores escalares. Extendemos estos contraejemplos al caso de funciones a valores vectoriales en espacios duales y espacios con propiedad (β), demostrando así que hay espacios para los cuales se verifica el teorema de Lindenstrauss polinomial y multilineal simétrico, pero no se verifica el teorema de Bishop-Phelps. Para funciones holomorfas, vemos que el mismo contraejemplo al teorema de Bishop-Phelps para operadores lineales mostrado por Lindenstrauss en [65], funciona como contraejemplo en $\mathcal{A}_u$ en el caso de funciones a valores vectoriales. Al igual que antes, esto nos muestra que para funciones holomorfas, también hay casos en los que no se verifica el teorema de Bishop-Phelps pero sí se verifica el teorema de Lindenstrauss.

Hasta donde sabemos, se desconocen contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps para funciones holomorfas a valores escalares en $\mathcal{A}_u(X)$. En [6] se estudian ciertas versiones *fuertes* de Bishop-Phelps, más específicamente, se considera en $\mathcal{A}_u(X)$ la norma dada por

$$\|f\|_s = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq s\} \quad \text{para } 0 < s \leq 1$$

y se prueba que existen espacios de Banach (preduales de Lorentz) para los cuales el conjunto de funciones en $\mathcal{A}_u(X)$ que alcanzan la $\|\cdot\|_s$-norma para $0 < s < 1/e$, no es denso (con la norma supremo) en $\mathcal{A}_u(X)$. Mejoramos este resultado, mostrando que vale para cualquier $0 < s < 1$; más aún, damos contraejemplos al Bishop-Phelps *fuerte* en el caso vectorial $\mathcal{A}_u(X; Z)$ para ciertos Z espacios duales y con la propiedad (β). Además, probamos que en estos casos se verifica la correspondiente versión *fuerte* de Lindenstrauss.

En [11], en el marco de ideales de operadores multilineales, donde la topología es más fuerte que la usual y por lo tanto “la densidad” es más difícil, se demostró la validez del teorema de Lindenstrauss para multilineales nucleares e integrales y, más en general, para todo ideal de operadores multilineales que sea dual a una norma tensorial asociativa. Generalizamos estos resultados introduciendo la propiedad de *estabilidad* en ideales de operadores multilineales, propiedad que poseen, entre otros, los ideales de operadores multilineales integrales, nucleares, extendibles, múltiple p-sumantes y r-dominados. Basándonos en las demostraciones de [11], mostramos que si un ideal es *estable* entonces verifica el teorema de Lindenstrauss; también notamos que si un ideal es dual a una norma tensorial asocativa entonces es estable, pero que no vale la recíproca. En el caso bilineal y trilineal (este último a valores escalares), vemos que todo ideal es estable y en consecuencia verifica el teorema de Lindenstrauss. Por otro lado, siguiendo lo hecho en [20, 38], donde se demuestra el teorema de Lindenstrauss para polinomios 2-homogéneos, probamos que este último se verifica para *todo* ideal de polinomios 2-homogéneos.

En 1970, Bollobás [23] presenta una versión cuantitativa del teorema de Bishop-Phelps, en vistas de aplicarlo al estudio del rango numérico de operadores. La versión cuantitativa del teorema de Bishop-Phelps probada por Bollobás, afirma que si $\varphi \in X'$ “casi” alcanza su norma en $\tilde{x} \in B_X$, se pueden encontrar $\psi \in X'$ y $a \in B_X$ tales que ψ alcanza su norma en a, con a “cerca” de $\tilde{x}$ y con ψ “cerca” de φ. Específicamente:

Teorema (Bishop-Phelps-Bollobás). *Dado $\varepsilon > 0$, si $\tilde{x} \in S_X$ y $\varphi \in S_{X'}$ son tales que $|\varphi(\tilde{x})| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$, entonces existen $a \in S_X$ y $\psi \in S_{X'}$ tales que $\psi(a) = 1$, $\|a - \tilde{x}\| < \varepsilon$ y $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$.*

En los últimos años, se ha prestado una creciente atención al estudio de resultados del tipo Bishop-Phelps-Bollobás para operadores lineales y multilineales. Es decir, para aquellos espacios en los cuales se verifica un teorema del tipo Bishop-Phelps, resulta de interés saber si es posible mejorar tales resultados en un sentido cuantitativo. En [7], se demostraron resultados del tipo Bishop-Phelps-Bollobás para operadores en $\mathcal{L}(X; Y)$ bajo ciertas hipótesis sobre los espacios X e Y. A partir de este trabajo, han surgido muchos otros en los que se estudian espacios para los cuales es posible demostrar versiones cuantitativas de Bishop-Phelps (ver [9, 17, 18, 39, 63]). En la misma dirección de los resultados de Lindenstrauss probados para ideales de operadores multilineales, siguiendo ideas de [4, 64], probamos un resultado del tipo Bishop-Phelps cuantitativo para multilineales en espacios uniformemente convexos. Mostramos que si $X_1, \ldots, X_N$ son uniformemente convexos e Y es un espacio de Banach cualquiera, se verifica una versión ligeramente más débil del teorema de Bishop-Phelps-Bollobás en $\mathcal{U}(X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ para cualquier ideal $\mathcal{U}$ de operadores N-lineales.

Por otro lado, teniendo en cuenta la validez del teorema de Lindenstrauss para operadores multilineales y, bajo ciertas hipótesis, para polinomios homogéneos y no-homogéneos, es natural preguntarse si se puede demostrar una versión cuantitativa del teorema de Lindenstrauss en cada uno de estos casos. En [7] se muestra que esto no es posible en el caso de operadores lineales. Haciendo uso nuevamente de los preduales de Lorentz, mostramos contraejemplos al teorema de Lindenstrauss-Bollobás en los casos multilineal y polinomial. También, teniendo en mente la validez del teorema de Lindenstrauss en cualquier ideal estable de operadores multilineales, nos servimos de un contraejemplo de Choi y Song [39] al Bishop-Phelps-Bollobás para formas bilineales para mostrar contraejemplos al teorema de Lindenstrauss-Bollobás en *todo* ideal de multilineales.

Los resultados de esta tesis aparecen, principalmente, en [32, 33, 34]. La misma, está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 fijamos la notación y enunciamos algunas definiciones y propiedades que serán las herramientas básicas para lo que sigue; también, hacemos un breve repaso por los principales resultados en el tema. En el Capítulo 2 probamos los resultados del tipo Lindenstrauss para polinomios homogéneos, no-homogéneos, funciones en $\mathcal{A}_u$ y operadores multilineales simétricos. Estos son los resultados principales de la tesis. En el Capítulo 3 exhibimos los contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps en todos los casos para los que anteriormente demostramos el teorema de Lindenstrauss. También damos contraejemplos al teorema de Lindenstrauss-Bollobás en los casos multilineal y polinomial. En el Capítulo 4 estudiamos las mencionadas versiones fuertes de Lindenstrauss y Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u$. Finalmente, en el Capítulo 5 probamos los resultados en ideales de Banach. Demostramos el teorema de Lindenstrauss en ideales estables de multilineales, en ideales de polinomios 2-homogéneos y abordamos también las versiones cuantitativas (del tipo Bollobás) en el contexto de ideales.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo veremos algunas definiciones y resultados clásicos, así como también fijaremos la notación, que vamos a utilizar a lo largo de toda la tesis. En 1.1 haremos un repaso de las funciones (operadores multilineales, polinomios y funciones holomorfas) con las que trabajaremos en los siguientes capítulos; veremos además en 1.1.1 las definiciones de las extensiones canónicas (de Arens y de Aron-Berner) de una función al bidual. En 1.2 daremos algunas propiedades de los productos tensoriales entre espacios de Banach y en 1.3 nos enfocaremos en los espacios cuyo dual es separable y tiene la llamada propiedad de aproximación. Estas serán herramientas de gran utilidad en los resultados que probaremos más adelante. Finalmente, en 1.4 haremos un breve resumen sobre el estado del arte del estudio de la densidad de funciones que alcanzan la norma.

Un poco de notación

A lo largo de estas notas, X, Y, Z, W denotarán espacios de Banach. Dado un espacio de Banach X denotaremos X' a su espacio dual topológico. La norma de un espacio X será denotada por $\|\cdot\|_X$ ó $\|\cdot\|$, si se sobreentiende el espacio que se está considerando, mientras que $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ será la bola unidad cerrada, $\overset{\circ}{B}_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ la bola unidad abierta y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera de X. Los elementos de un espacio X serán usualmente representados por $x, a, \widetilde{x}, \ldots$, mientras que $x', a', \widetilde{x}', \ldots$ y $x'', a'', \widetilde{x}'', \ldots$ serán elementos en X' y X'' respectivamente. Notaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ al cuerpo de los escalares y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ serán elementos en $\mathbb{K}$.

Los operadores multilineales serán usualmente denotados con las letras Φ, Ψ cuando sean a valores vectoriales y ϕ, ψ cuando tomen valores en $\mathbb{K}$; utilizaremos también las letras T, S para referirnos a operadores lineales y φ para funcionales lineales. Los polinomios serán P, Q cuando tomen valores vectoriales y p, q cuando tomen valores escalares. Las funciones holomorfas serán denotadas con f, g y h.

1.1. Operadores multilineales, polinomios y funciones holomorfas

El desarrollo de la teoría de funciones holomorfas en espacios de Banach, encuentra sus raíces en el estudio de operadores multilineales y polinomios. Veamos las definiciones de estos espacios de funciones y algunas propiedades que utilizaremos a lo largo del texto.

Funcionales lineales

Dado un espacio de Banach X, una funcional lineal en X es una función $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$ lineal y continua. La norma supremo de φ está dada por

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in B_X} |\varphi(x)|.$$

Recordemos que una funcional lineal φ es continua si y sólo si es continua en el origen y esto a su vez es equivalente a decir que sea acotada, es decir, $\|\varphi\| < \infty$. Decimos que φ *alcanza la norma* si existe un elemento $a \in B_X$ tal que

$$\|\varphi\| = |\varphi(a)|.$$

El espacio X', el dual topológico de X, es el espacio de todas las funcionales lineales en X y resulta un espacio de Banach con la norma supremo.

Operadores lineales

Dados X e Y espacios de Banach, notamos $\mathcal{L}(X;Y)$ al espacio de Banach de todos los operadores lineales y continuos $T\colon X \to Y$, con la norma supremo dada por

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

Al igual que para funcionales lineales, un operador lineal $T\colon X \to Y$ es continuo si y sólo si es acotado. Decimos que el operador T alcanza la norma si existe un $a \in B_X$ tal que $\|T\| = \|T(a)\|$.

Operadores multilineales

Dados $N \in \mathbb{N}$ y $X_1, \ldots, X_N, Y$ espacios de Banach, denotamos $\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ al espacio de Banach de todos los operadores N-lineales continuos (equivalentemente, acotados) $\Phi\colon X_1 \times \cdots \times X_N \to Y$, con la norma supremo dada por

$$\|\Phi\| = \sup\{\|\Phi(x_1, \ldots, x_N)\| : \quad x_j \in B_{X_j}, \quad 1 \leq j \leq N\}.$$

Cuando $Y = \mathbb{K}$, simplemente notamos $\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N)$ y llamamos *formas N-lineales* a las funciones ϕ en este espacio. En el caso en que $X_1 = \cdots = X_N = X$ notamos $\mathcal{L}(^N X; Y)$. Cuando sea conveniente, notaremos $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ al espacio producto y $\mathcal{L}(^N \mathbf{X}; Y)$ al espacio de operadores N-lineales de $\mathbf{X}$ en Y.

Decimos que $\Phi \in \mathcal{L}(^N X; Y)$ es un operador N-lineal *simétrico* si

$$\Phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}) = \Phi(x_1, \ldots, x_N)$$

para todo $x_1, \ldots, x_N \in X$ y toda σ permutación de $\{1, \ldots, N\}$. Notamos $\mathcal{L}_s(^N X; Y)$ al espacio de operadores N-lineales simétricos.

Un operador multilineal $\Phi \in \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ alcanza la norma, si existe una N-upla $(a_1, \ldots, a_N) \in B_{X_1} \times \cdots \times B_{X_N}$ tal que $\|\Phi\| = \|\Phi(a_1, \ldots, a_N)\|$. Notamos $NA\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ al conjunto de operadores multilineales que alcanzan la norma (NA por la abreviatura en inglés de *norm attaining*).

Un operador multilineal $\Phi \in \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ es de *tipo finito* si existen $m \in \mathbb{N}$, $(x_1^k)', \ldots, (x_m^k)'$ en X_k' para cada $k = 1, \ldots, N$ e $y_1, \ldots, y_m$ en Y tales que

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{m} (x_j^1)'(x_1) \cdots (x_j^N)'(x_N) y_j$$

para cada N-upla $(x_1, \ldots, x_N)$. Notamos $\mathcal{L}_f(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ a la clase de operadores de tipo finito.

Polinomios

Dados $N \in \mathbb{N}$ y X, Y espacios de Banach, una aplicación $P\colon X \to Y$ es un *polinomio N-homogéneo* si existe un operador N-lineal $\Psi\colon X \times \cdots \times X \to Y$ tal que

$$P(x) = \Psi(x, \ldots, x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Dado un polinomio P, existe un único operador N-lineal simétrico Φ verificando la igualdad anterior. Este operador puede ser obtenido a partir de P vía la fórmula de polarización:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{2^N N!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N P\left(\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j x_j\right).$$

Notamos $\mathcal{P}(^N X; Y)$ al espacio de Banach de todos los polinomios N-homogéneos continuos $P\colon X \to Y$, con la norma supremo dada por

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|.$$

En el caso $Y = \mathbb{K}$, simplemente escribimos $\mathcal{P}(^N X)$.

Un polinomio N-homogéneo P es continuo si y sólo si es acotado, es decir, $\|P\| < \infty$. Es sencillo ver que $\|P\|$ es la menor constante tal que $\|P(x)\| \leq \|P\| \|x\|^N$ para todo $x \in X$. Como es de esperar, decimos que P alcanza la norma si existe un $a \in B_X$ tal que $\|P\| = \|P(a)\|$ y notamos $NA\mathcal{P}(^N X; Y)$ al conjunto de polinomios en $\mathcal{P}(^N X; Y)$ que alcanzan la norma. Dado un polinomio N-homogéneo P y su operador N-lineal simétrico asociado Φ, se deduce de la fórmula de polarización que

$$\|P\| \leq \|\Phi\| \leq \frac{N^N}{N!} \|P\|. \tag{1.1}$$

Decimos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^N X; Y)$ es de *tipo finito* si existen $m \in \mathbb{N}$, $x_1', \ldots, x_m' \in X'$ e $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tales que $P(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j'(x)^N y_j$ para todo $x \in X$. Denotamos $\mathcal{P}_f(^N X; Y)$ a la clase de polinomios de tipo finito.

Dado $k \in \mathbb{N}$, se denota $\mathcal{P}_k(X; Y)$ al espacio de *polinomios continuos de grado menor o igual que k* de X en Y, es decir, las funciones de la forma

$$P = P_0 + \cdots + P_k \quad \text{con } P_j \in \mathcal{P}(^j X; Y) \text{ para cada } j = 0, \ldots, k.$$

Por convención, $\mathcal{P}(^0X;Y) = Y$. Se puede ver fácilmente que dado un polinomio de grado a lo sumo k, existen únicos P_j verificando la igualdad anterior. Como consecuencia de las desigualdades de Cauchy (ver (1.2) más adelante) se verifica $\|P_j\| \leq \|P\|$ para todo $j = 0, \ldots, k$. Al espacio de todos los polinomios (de cualquier grado) de X en Y lo notamos $\mathcal{P}(X;Y)$. En el caso $Y = \mathbb{K}$ notamos $\mathcal{P}_k(X)$ y $\mathcal{P}(X)$. Los espacios $\mathcal{P}_k(X;Y)$ y $\mathcal{P}(X;Y)$ resultan espacios de Banach con la norma

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|.$$

Decimos que un polinomio P alcanza la norma si existe un $a \in B_X$ tal que $\|P\| = \|P(a)\|$. Como es usual, $NA\mathcal{P}_k(X;Y)$ denota al conjunto de polinomios que alcanzan la norma.

Un polinomio $P \in \mathcal{P}_k(X;Y)$ se dice de tipo finito si $P = P_0 + \cdots + P_k$ con $P_j \in \mathcal{P}_f(^NX;Y)$ para cada $j = 0, \ldots, k$. Notamos $\mathcal{P}_{f,k}(X;Y)$ a la clase de polinomios de tipo finito de grado a lo sumo k.

Funciones holomorfas

En esta parte, dado que se considerarán funciones holomorfas, todos los espacios de Banach serán complejos, es decir, sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Sean X, Y espacios de Banach y $U \subseteq X$ un conjunto abierto. Decimos que una función $f\colon U \to Y$ es *holomorfa en* U, si para cada $a \in U$ existen polinomios $P_{j,f,a} \in \mathcal{P}(^jX;Y)$ y un $r > 0$ tales que:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j,f,a}(x-a) \quad \text{para todo } x \in B(a,r) \subseteq U,$$

donde la convergencia es uniforme en $B(a,r) = \{x \in X : \|x-a\| \leq r\}$. La escritura de f en serie de Taylor alrededor de a es única. Si notamos $r_c(f,a)$ al radio de convergencia de la serie, entonces se verifica la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{r_c(f,a)} = \limsup_{n\to\infty} \|P_{n,f,a}\|^{1/n}.$$

Notamos $D^jf(a) \in \mathcal{P}(^jX;Y)$ a la *derivada j-ésima* de f alrededor de a, dada por $\frac{D^jf(a)}{j!} = P_{j,f,a}$. Escribimos $\mathcal{H}(U;Y)$ para denotar el espacio de funciones holomorfas en U a valores en Y.

Si $P \in \mathcal{P}(X;Y)$ entonces P es una función holomorfa en X y para cada $a \in X$ se tiene

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^jP(a)}{j!}(x-a) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Más aún, si P es de grado a lo sumo k entonces $D^jP(a) \equiv 0$ para todo $j > k$.

Las siguientes, son las conocidas desigualdades de Cauchy. El resultado puede verse, por ejemplo, en [45, Proposición 3.2].

Proposición 1.1.1. *Sean X, Y espacios de Banach y $U \subseteq X$ abierto. Sean $f \in \mathcal{H}(U;Y)$, $a \in U$ y $r > 0$ tales que $B(a,r) \subseteq U$. Supongamos además que f es acotada en $B(a,r)$. Luego*

$$\left\|\frac{D^jf(a)}{j!}\right\| \leq \frac{1}{r^j}\|f\|_{B(a,r)}, \tag{1.2}$$

donde $\|f\|_{B(a,r)} = \sup_{x \in B(a,r)} \|f(x)\|$.

Las desigualdades de Cauchy junto con la fórmula de Cauchy-Hadamard nos dicen que si f es acotada en $B(a,r)$ entonces $r_c(f,a) \geq r$.

Enunciamos ahora el principio de módulo máximo para funciones holomorfas en espacios de Banach. El mismo puede verse en [67, Proposición 5.9] para el caso escalar y se extiende fácilmente a funciones a valores en un espacio estrictamente convexo. Recordemos que un espacio de Banach Y es *estrictamente convexo* si para cada $y_1, y_2 \in Y$,

$$\|y_1\| = \|y_2\| = \left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\| \quad \text{implica} \quad y_1 = y_2.$$

Equivalentemente, $\|y_1\| = \|y_2\| = \|ty_1 + (1-t)y_2\|$ para algún $0 < t < 1$ implica $y_1 = y_2$.

Proposición 1.1.2. *Sean X, Y espacios de Banach con Y estrictamente convexo y sea $f \in \mathcal{H}(U;Y)$ donde $U \subseteq X$ es abierto conexo. Si existe un $a \in U$ tal que $\|f(x)\| \leq \|f(a)\|$ para todo $x \in U$, entonces f es constante en U.*

Dado un conjunto abierto U de X, $H^\infty(U;Y)$ denota el espacio de Banach de todas las funciones holomorfas y acotadas de U en Y, con la norma supremo dada por $\|f\| = \sup_{x\in U}\|f(x)\|$. En particular, tenemos el espacio $H^\infty(\overset{\circ}{B}_X;Y)$ de las funciones holomorfas y acotadas en la bola abierta de X. Dentro de este espacio, podemos considerar al álgebra de Banach $\mathcal{A}_u(X;Y)$ de todas las funciones holomorfas en la bola abierta $\overset{\circ}{B}_X$ a valores en Y, que son uniformemente continuas en la bola cerrada B_X. Naturalmente, la norma en este espacio es $\|f\| = \sup_{x\in B_X}\|f(x)\|$. Es sabido y sencillo de demostrar (ver, por ejemplo, [51]) que cada $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ es límite uniforme de polinomios en $\mathcal{P}(X;Y)$. Es decir, se verifica el siguiente resultado.

Observación 1.1.3. *Dada $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ existe una sucesión $(P_n)_n$ de polinomios en $\mathcal{P}(X;Y)$ tal que $\|f - P_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

El resultado anterior no implica que, si $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ y $P_n = \sum_{j=0}^n \frac{D^j f(0)}{j!}(x)$ para cada n, entonces $\|f - P_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. La convergencia de las sumas parciales de la serie de Taylor puede fallar en la frontera de la bola cerrada.

Como es de esperar, decimos que $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ alcanza la norma si existe un $a \in B_X$ tal que $\|f\| = \|f(a)\|$ y notamos $NA\mathcal{A}_u(X;Y)$ al conjunto de funciones que alcanzan la norma.

En el caso de $H^\infty(\overset{\circ}{B}_X;Y)$, notar que si Y es estrictamente convexo y $f \in H^\infty(\overset{\circ}{B}_X;Y)$ alcanza su norma, entonces por el principio de módulo máximo f resulta constante. Por este motivo, los resultados sobre densidad de fuciones holomorfas que alcanzan la norma serán de interés en el espacio $\mathcal{A}_u(X;Y)$ y no así en $H^\infty(\overset{\circ}{B}_X;Y)$. De cualquier manera, en el Capítulo 4 analizaremos unas versiones *fuertes* de este tipo de resultados, cuando para cada $0 < s < 1$ consideremos la norma

$$\|f\|_s = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq s\}.$$

En este contexto, sí nos resultará de interés considerar funciones en el espacio $H^\infty(\overset{\circ}{B}_X;Y)$.

1.1.1. Extensiones de Arens y Aron-Berner

Las extensiones de Arens y de Aron-Berner, son las extensiones canónicas de los operadores multilineales, polinomios y funciones holomorfas al bidual. Antes de definirlas, comencemos mencionando las extensiones de funcionales y operadores lineales al bidual. En primer lugar, recordemos que la topología débil-$*$ del espacio dual de un espacio de Banach X, es la menor topología en X' tal que, para cada $x \in X$, la funcional lineal $x' \mapsto x'(x)$ es continua con respecto a esa topología. Dada una red $(x'_\alpha)_\alpha \subseteq X'$, se verifica que $x'_\alpha \xrightarrow{w^*} x'$ si y sólo si $x'_\alpha(x) \to x'(x)$ para cada $x \in X$.

Dada una funcional lineal $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$, hay una manera natural de extenderla al bidual , definiendo $\overline{\varphi}\colon X'' \to \mathbb{K}$ como $\overline{\varphi}(x'') = x''(\varphi)$. Luego, es claro que:

- $\overline{\varphi}(J_X(x)) = \varphi(x)$ para todo $x \in X$, donde $J_X\colon X \hookrightarrow X''$ es la inclusión canónica. Es decir, $\overline{\varphi}$ es efectivamente una extensión de φ.
- $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.
- $\overline{\varphi}$ es w^*-continua. Es decir, $\overline{\varphi}(x''_\alpha) \to \overline{\varphi}(x''_0)$ siempre que $(x''_\alpha)_\alpha \subseteq X''$ sea una red w^*-convergente a un $x''_0 \in X''$.

Si, en cambio, tenemos un operador lineal, la manera natural de extenderlo al bidual es vía el bitranspuesto. Recordemos que dado $T\colon X \to Y$, su operador transpuesto $T'\colon Y' \to X'$ está definido por $T'(y')(x) = y'(T(x))$. Luego $T''\colon X'' \to Y''$, que está dado por $T''(x'')(y') = x''(T'(y'))$, es la extensión canónica de T al bidual. Es sencillo notar que $T''(x'')(y') = \overline{y' \circ T}(x'')$, donde $y' \circ T\colon X \to \mathbb{K}$ es una funcional lineal y $\overline{y' \circ T}$ es su extensión canónica al bidual. Aquí también, se deduce fácilmente que:

- $T''(J_X(x)) = T(x)$, para todo $x \in X$.
- $\|T''\| = \|T\|$.
- T'' es w^*-w^*-continua. Es decir, $T''(x''_\alpha) \xrightarrow{w^*} T''(x''_0)$ siempre que $(x''_\alpha)_\alpha \subseteq X''$ sea una red w^*-convergente a un $x''_0 \in X''$.

La manera natural de extender operadores multilineales al bidual es vía la llamada *extensión de Arens* (ver [15] y [43, 1.9]). En primer lugar, veamos cómo se construye en el caso a valores escalares. Dada $\phi \in \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N)$ y fijados $x_i \in X_i$ para $i = 1, \ldots, N-1$, es claro que $\phi(x_1, \ldots, x_{N-1}, \cdot) \in X'_N$. Luego, dado $x''_N \in X''_N$ podemos definir

$$\begin{aligned} \overline{x''_N}\colon \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N) &\longrightarrow \mathcal{L}(^{N-1} X_1 \times \cdots \times X_{N-1}) \\ \overline{x''_N}(\phi)(x_1, \ldots, x_{N-1}) &= x''_N(\phi(x_1, \ldots, x_{N-1}, \cdot)). \end{aligned}$$

Tenemos ahora una forma $(N-1)$-lineal y, fijando las primeras $(N-2)$-coordenadas y dado $x''_{N-1} \in X''_{N-1}$ podemos obtener de la misma manera que antes una forma $(N-2)$-lineal. Iterando este procedimiento, construímos la *extensión de Arens de* ϕ, que notamos $\overline{\phi} \in \mathcal{L}(^N X''_1 \times \cdots \times X''_N)$ y está dada por

$$\overline{\phi}(x''_1, \ldots, x''_N) = \overline{x''_1} \circ \cdots \circ \overline{x''_N}(\phi). \tag{1.3}$$

En la construcción anterior, elegimos un orden en el cual fuimos extendiendo las variables. Cabe destacar que, en general, la extensión depende del orden elegido. Luego, dada ϕ tenemos

$N!$ posibles extensiones de Arens al bidual. A menos que indiquemos lo contrario, notaremos $\overline{\phi}$ para referirnos a alguna de esas $N!$ posibles extensiones, sin especificar a cual de ellas.

En el caso a valores vectoriales, dada $\Phi \in \mathcal{L}({}^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ construímos su extensión $\overline{\Phi} \in \mathcal{L}({}^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y'')$ de la siguiente manera:

$$\overline{\Phi}(x_1'', \dots, x_N'')(y') = \overline{y' \circ \Phi}(x_1'', \dots, x_N'') \quad \text{para cada } y' \in Y',$$

donde $\overline{y' \circ \Phi}$ es la extensión de $y' \circ \Phi \in \mathcal{L}({}^N X_1 \times \cdots \times X_N)$ dada en (1.3). Al igual que antes tenemos $N!$ posibles extensiones, dependiendo de la extensión de $y' \circ \Phi$ que consideremos. Notar que cuando $N = 1$, la extensión de Arens no es otra cosa que el bitranspuesto de un operador.

Al igual que en el caso de funcionales y operadores lineales, se verifican las siguientes propiedades:

- $\overline{\Phi}(J_{X_1}(x_1), \dots, J_{X_N}(x_N)) = \Phi(x_1, \dots, x_N)$, para todo $x_j \in X_j$ $(1 \leq j \leq N)$.
- $\|\overline{\Phi}\| = \|\Phi\|$.
- $\overline{\Phi}$ es w^*-w^*-continua en la última variable en la que se extiende. Por ejemplo, si se extiende en el orden de (1.3), $\overline{\Phi}$ es w^*-w^*-continua en la primer variable.

Se puede probar que dada $\Phi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_N; Y)$, su extensión $\overline{\Phi} : X_1'' \times \cdots \times X_N'' \longrightarrow Y''$ está dada por

$$\overline{\Phi}(x_1'', \dots, x_N'') = w^* - \lim_{\alpha_1} \dots \lim_{\alpha_N} \Phi(x_{1,\alpha_1}, \dots, x_{N,\alpha_N}) \tag{1.4}$$

donde $(x_{j,\alpha_j})_{\alpha_j} \subseteq X$ es una red w^*-convergente a $x_j'' \in X_j''$, $j = 1, \dots, N$. En lo que sigue, esta será la forma que utilizaremos para calcular la extensión de Arens de un operador multilineal.

Es fácil ver que si consideramos $\Phi \in \mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_N; Y)$ de tipo finito, las $N!$ extensiones de Arens de Φ coinciden.

El siguiente paso es extender polinomios al bidual. Dado un polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}({}^N X; Y)$, consideremos $\Phi \in \mathcal{L}({}^N X; Y)$ el operador multilineal simétrico asociado. La restricción de $\overline{\Phi}$ a la diagonal es independiente de la extensión de Arens que consideremos, es decir, $x'' \mapsto \overline{\Phi}(x'', \dots, x'')$ no depende del orden en el cual se extienden las variables. Luego, tendremos una única extensión canónica de P al bidual dada por $\overline{P}(x'') = \overline{\Phi}(x'', \dots, x'')$. Este polinomio $\overline{P} \in \mathcal{P}({}^N X''; Y'')$ es la llamada *extensión de Aron-Berner de* P (ver [16]). Dados $x'' \in X''$ e $y' \in Y'$, se verifica $\overline{P}(x'')(y') = \overline{y' \circ P}(x'')$. Davie y Gamelin probaron en [41] que la extensión de Aron-Berner preserva la norma, esto es, $\|\overline{P}\| = \|P\|$. A diferencia de lo que ocurre en el caso lineal, la extensión de Aron-Berner de un polinomio P no es necesariamente w^*-continua. En el caso particular en que se considera $P \in \mathcal{P}_f({}^N X; Y)$ un polinomio de tipo finito, es sencillo verificar que su extensión $\overline{P}$ sí resulta w^*-continua.

Para un polinomio $P = \sum_{j=0}^k P_j \in \mathcal{P}_k(X; Y)$, la extensión de Aron-Berner está dada por $\overline{P} = \sum_{j=0}^k \overline{P_j}$.

Por último, veamos cómo se construyen las extensiones de Aron-Berner para funciones holomorfas. Si $f \in H^\infty(B_X^\circ; Y)$, por los comentarios hechos anteriormente sobre el radio de convergencia, la serie de Taylor alrededor del 0, $f = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j f(0)}{j!}$, converge en $\overset{\circ}{B}_X$. Luego, la extensión de Aron-Berner de f se define como

$$\overline{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\frac{D^j f(0)}{j!}},$$

la cual resulta una función holomorfa y acotada en $\overset{\circ}{B}_{X''}$. En el caso particular en que se considere $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de polinomios convergiendo uniformemente a f, entonces $(\overline{P_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en la bola abierta $\overset{\circ}{B}_{X''}$, y en consecuencia converge uniformemente a $\overline{f}$. Esto significa que $\overline{f}$ puede extenderse a una función uniformemente continua en la bola cerrada de X''. Esta extensión, que seguimos llamando $\overline{f}$, es la extensión de Aron-Berner de $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$. Por el teorema de Davie-Gamelin, se tiene $\|\overline{f}\| = \|f\|$. Por otro lado, es fácil ver que $\overline{f}(x'')(y') = \overline{y' \circ f}(x'')$ para todo $x'' \in X''$ e $y' \in Y'$.

1.2. Productos tensoriales

El estudio de productos tensoriales en espacios de Banach está íntimamente relacionado con el estudio de ideales normados de operadores. Esta relación tiene sus orígenes en trabajos de Grothendieck [55, 56] a mediados de los años ‘50. Sin embargo, las técnicas tensoriales dentro de la teoría de ideales de operadores comienzan a tomar fuerza varios años después. Para una lectura precisa en el tema, ver [43, 48].

En esta sección, daremos una breve introducción a los productos tensoriales. Nos interesan principalmente los productos tensoriales simétricos, que resultarán de gran utilidad en los Capítulos 2 y 4.

Productos tensoriales y linealización de bilineales

Dados dos espacios de Banach X e Y, su producto tensorial $X \otimes Y$ puede construírse como un espacio de funcionales lineales sobre $\mathcal{L}(^2X \times Y)$. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, el *tensor elemental* $x \otimes y$ está determinado por la dualidad $\langle x \otimes y, \phi \rangle = \phi(x, y)$ para cada $\phi \in \mathcal{L}(^2X \times Y)$. Luego, el producto tensorial $X \otimes Y$ es el subespacio de $\mathcal{L}(^2X \times Y)^*$, el dual algebraico de $\mathcal{L}(^2X \times Y)$, generado por estos tensores elementales. Un elemento en $X \otimes Y$ es de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \otimes y_j \quad \text{donde } m \in \mathbb{N},\ \lambda_j \in \mathbb{K},\ x_j \in X \text{ e } y_j \in Y.$$

Es importante notar que la representación de un elemento u no es única. La dualidad entre u y las formas bilineales está dada por $\langle u, \phi \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi(x_j, y_j)$, siendo el valor de $\langle u, \phi \rangle$ independiente de la representación del elemento u.

Las siguientes propiedades, sencillas de verificar, nos muestran que $(x, y) \mapsto x \otimes y$ se comporta como una especie de *producto*:

- $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.
- $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$.

- $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$.
- $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$.

La tercer propiedad nos muestra que un elemento $u \in X \otimes Y$ siempre puede reescribirse de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j. \tag{1.5}$$

La razón principal de considerar el producto tensorial $X \otimes Y$ es la de *linealizar* operadores bilineales definidos en $X \times Y$. Expliquemos brevemente a qué nos referimos con esto. Dada $\phi \in \mathcal{L}(^2X \times Y)$, tomemos $L_\phi : X \otimes Y \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $u \mapsto \langle u, \phi \rangle$, que resulta claramente una funcional lineal sobre $X \otimes Y$. Luego, la aplicación $\phi \mapsto L_\phi$ define un operador lineal inyectivo de $\mathcal{L}(^2X \times Y)$ en $(X \otimes Y)^*$. Por otro lado, se verifica fácilmente que dada L una funcional lineal en $X \otimes Y$, existe una forma bilineal ϕ tal que $L = L_\phi$. En efecto, basta considerar $\phi(x, y) = L(x \otimes y)$. En consecuencia, tenemos que

$$\mathcal{L}(^2X \times Y) = (X \otimes Y)^* \tag{1.6}$$

donde $(X \otimes Y)^*$ denota el dual algebraico de $X \otimes Y$ y la igualdad anterior es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

En el caso de operadores bilineales a valores en un espacio de Banach Z, la misma idea de linealización puede ser aplicada. En efecto, dado $\Phi \in \mathcal{L}(^2X \times Y; Z)$, se considera

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \otimes y_j \mapsto \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi(x_j, y_j),$$

lo cual define un operador lineal de $X \otimes Y$ en Z. De esta forma, se tiene $\mathcal{L}(^2X \times Y; Z) = \mathcal{L}(X \otimes Y; Z)$ donde la igualdad representa nuevamente un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Linealización de multilineales

Si consideramos ahora $X_1, \dots, X_N$ espacios de Banach, podemos definir el producto tensorial $X_1 \otimes \cdots \otimes X_N$ de la siguiente manera. Dados $x_i \in X_i$, $1 \le i \le N$, los tensores elementales $x_1 \otimes \cdots \otimes x_N$ están determinados por la dualidad $\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_N, \phi \rangle = \phi(x_1, \dots, x_N)$ para cada $\phi \in \mathcal{L}(^NX_1 \times \cdots \times X_N)$. Luego, el producto tensorial $X_1 \otimes \cdots \otimes X_N$ es el subespacio de $\mathcal{L}(^NX_1 \times \cdots \times X_N)^*$ generado por estos tensores elementales. Es decir que, un elemento u en $X_1 \otimes \cdots \otimes X_N$ es de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N \quad \text{con } m \in \mathbb{N},\ \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ y } x_j^i \in X_i \text{ para } 1 \le i \le N.$$

Como en (1.5), siempre podemos escribir los elementos de la forma $u = \sum_{j=1}^{m} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N$. Al igual que en el caso de formas bilineales , el producto tensorial entre N-espacios de Banach linealiza formas y operadores N-lineales. Tenemos entonces

$$\mathcal{L}(^NX_1 \times \cdots \times X_N) = (X_1 \otimes \cdots \otimes X_N)^*$$

con el isomorfismo dado por $\phi \mapsto L_\phi$, donde $L_\phi\left(\sum_j x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N\right) = \sum_j \phi(x_j^1, \ldots, x_j^N)$. Análogamente,

$$\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y) = \mathcal{L}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_N; Y), \tag{1.7}$$

donde, como en todos estos casos, la igualdad representa un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Normas tensoriales

Hasta aquí, hemos visto que los productos tensoriales de espacios de Banach *linealizan* operadores multilineales desde un punto de vista algebraico. Dotando a los productos tensoriales de diversas normas, obtenemos isomorfismos isométricos entre clases (ideales) de operadores lineales definidos en el producto tensorial e ideales de operadores multilineales.

El estudio de normas tensoriales y su relación con la teoría de ideales de operadores comienza con el trabajo de Grothendieck (ver [56]) quien define las normas proyectiva e inyectiva en el producto entre dos espacios de Banach. Más en general, tenemos las normas proyectiva e inyectiva para el producto de N espacios.

Definición 1.2.1. *Sean $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach y $\otimes_{i=1}^N X_i$ el producto tensorial.*

(i) *La norma tensorial proyectiva de orden N en $\otimes_{i=1}^N X_i$, está dada por*

$$\|u\|_\pi = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^m \|x_j^1\| \cdots \|x_j^N\| : \ m \in \mathbb{N},\ u = \sum_{j=1}^m x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N\right\}.$$

(ii) *La norma tensorial inyectiva de orden N en $\otimes_{i=1}^N X_i$, está dada por*

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^m x_1'(x_j^1) \cdots x_N'(x_j^N)\right| : \ x_1' \in B_{X_1'}, \ldots, x_N' \in B_{X_N'}\right\},$$

si $u = \sum_{j=1}^m x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N$.

Si $\alpha = \pi$ ó ε, notamos $(\otimes_{i=1}^N X_i, \alpha)$ ó $\otimes_{\alpha,i=1}^N X_i$ al espacio $\otimes_{i=1}^N X_i$ dotado con la norma α y $\tilde{\otimes}_{\alpha,i=1}^N X_i$ a la completación del espacio normado $\otimes_{\alpha,i=1}^N X_i$. Tanto la norma proyectiva como la inyectiva, son normas *asociativas*. Esto es, si para cada n notamos α_n a la norma (proyectiva o inyectiva) de orden n, entonces dado $1 \leq k \leq n$ se verifica

$$\left(\left(\otimes_{i=1}^k X_i, \alpha_k\right) \otimes X_{k+1} \otimes \cdots \otimes X_n, \alpha_{n-k+1}\right) = \left(X_1 \otimes \cdots \otimes X_k \otimes \left(\otimes_{i=k+1}^n X_i, \alpha_{n-k}\right), \alpha_{k+1}\right)$$

y además estos productos son iguales a $(\otimes_{i=1}^n X_i, \alpha_n)$. Volveremos sobre las normas asociativas recién en el Capítulo 5.

Un hecho que utilizaremos a lo largo de toda la tesis, es que todo elemento u del espacio completado $\tilde{\otimes}_{\pi,i=1}^N X_i$ tiene una representación de la forma $u = \sum_{j=1}^\infty x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N$ con $\sum_{j=1}^\infty \|x_j^1\| \cdots \|x_j^N\| < \infty$ y su norma π está dada por

$$\|u\|_\pi = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^\infty \|x_j^1\| \cdots \|x_j^N\| : \ u = \sum_{j=1}^\infty x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N\right\}.$$

Volviendo sobre la igualdad (1.6) y, más en general, sobre (1.7), Grothendieck demostró (en el caso particular $N = 2$) que cuando se dota a los productos tensoriales con las normas proyectiva o inyectiva, las mismas aplicaciones consideradas antes definen isomorfismos isométricos entre los espacios de Banach de operadores multilineales y de operadores lineales definidos en el producto tensorial. Para la norma proyectiva se verifica

$$\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y) = \mathcal{L}(\otimes_{\pi,i=1}^N X_i; Y) = \mathcal{L}(\tilde{\otimes}_{\pi,i=1}^N X_i; Y). \tag{1.8}$$

Como consecuencia, se tienen en particular

$$\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N) = (\tilde{\otimes}_{\pi,i=1}^N X_i)' \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y') = (\tilde{\otimes}_{\pi,i=1}^N X_i \tilde{\otimes}_\pi Y)'. \tag{1.9}$$

Las dualidades (1.9) entre tensores u y operadores lineales Φ, son las que nos interesarán más adelante (notar que la primera es un caso particular de la segunda). Las denotaremos indistintamente $\langle u, \Phi \rangle$ ó $L_\Phi(u)$. Específicamente, si $u = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N \in \tilde{\otimes}_{\pi,i=1}^N X_i$ y $\phi \in \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N)$, tenemos

$$\langle u, \phi \rangle = L_\phi(u) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \phi(x_j^1, \ldots, x_j^N),$$

mientras que en el caso a valores vectoriales,

$$\langle u, \Phi \rangle = L_\Phi(u) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \Phi(x_j^1, \ldots, x_j^N)(y_j)$$

para cada $u = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^N \otimes y_j \in \tilde{\otimes}_{\pi,i=1}^N X_i \tilde{\otimes}_\pi Y$ y cada $\Phi \in \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y')$.

Cuando dotamos al producto tensorial con la norma inyectiva, tenemos

$$\mathcal{I}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y) \overset{1}{=} \mathcal{I}(\tilde{\otimes}_{\varepsilon,i=1}^N X_i; Y),$$

donde $\mathcal{I}$ denota al ideal de operadores integrales. Por el momento, obviamos la definición de ideal de operadores y de operadores integrales, que no serán de importancia en lo inmediato. Las mismas, se verán en el Capítulo 5.

A partir de los resultados de Grothendieck, ha surgido un gran interés en el estudio de normas tensoriales. Si bien no nos detendremos en el tema, damos la definición de norma tensorial.

Definición 1.2.2. *Una norma tensorial α de orden N, es una asignación para cada N-upla de espacios $(X_1, \ldots, X_N)$ de una norma $\| \cdot \|_\alpha$ en el producto tensorial $\otimes_{i=1}^N X_i$, tal que:*

(i) $\| \cdot \|_\varepsilon \leq \| \cdot \|_\alpha \leq \| \cdot \|_\pi$.

(ii) *Para cada $T_i \in \mathcal{L}(X_i; Y_i)$, $i = 1, \ldots, N$,*

$$\| \otimes_{i=1}^N T_i \colon \otimes_{\alpha,i=1}^N X_i \longrightarrow \otimes_{\alpha,i=1}^N Y_i \| \leq \prod_{i=1}^N \|T_i\|,$$

donde $\otimes_{i=1}^N T_i$ está definida por $\otimes_{i=1}^N T_i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_N) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_N(x_N)$ (esta es la llamada "metric mapping property").

Productos tensoriales simétricos

Así como consideramos productos tensoriales para linealizar espacios de operadores multilineales, el objetivo de considerar productos tensoriales simétricos será el de linealizar espacios de operadores multilineales simétricos y de polinomios homogéneos. Dado un espacio de Banach X, notamos $\otimes^{N,s}X$ al subespacio de $\otimes^N X = X \otimes \overset{N}{\cdots} \otimes X$ formado por los tensores simétricos, esto es, los tensores en $\otimes^N X$ de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j^N,$$

donde $x_j^N = \otimes^N x_j = x_j \otimes \overset{N}{\cdots} \otimes x_j$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $x_j \in X$ para cada $j = 1, \ldots, m$. A diferencia de lo visto en (1.5), en el caso de tensores simétricos en $\otimes^{N,s}X$ con X un espacio real y N par, no podemos reescribir los elementos sin los $\lambda_j \in \mathbb{K}$. La aplicación

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_N \mapsto \frac{1}{N!} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(N)} \quad \sigma \text{ permutación de } \{1, \ldots, N\},$$

define una proyección de $\otimes^N X$ en $\otimes^{N,s}X$.

Dado un operador multilineal simétrico $\Phi \in \mathcal{L}_s(^N X; Y)$, la aplicación

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j^N \mapsto \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi(x_j, \ldots, x_j) \tag{1.10}$$

define un operador lineal de $\otimes^{N,s}X$ en Y. Luego, tenemos un isomorfismo $\mathcal{L}_s(^N X; Y) = \mathcal{L}(\otimes^{N,s}X; Y)$ entre espacios vectoriales. Por otro lado, si P es un polinomio en $\mathcal{P}(^N X; Y)$ entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j^N \mapsto \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P(x_j) \tag{1.11}$$

define nuevamente un operador lineal de $\otimes^{N,s}X$ en Y. Esto nos muestra que también tenemos un isomorfismo $\mathcal{P}(^N X; Y) = \mathcal{L}(\otimes^{N,s}X; Y)$ que linealiza los polinomios desde el punto de vista algebraico.

Con el propósito de estudiar polinomios homogéneos, Ryan introdujo en su tesis [77] normas tensoriales en el producto tensorial simétrico. En analogía con la Definición 1.2.1, se define la norma proyectiva simétrica.

Definición 1.2.3. *Sea X un espacio de Banach y $\otimes^{N,s}X$ el producto tensorial simétrico. La norma tensorial proyectiva simétrica de orden N en $\otimes^{N,s}X$, está dada por*

$$\|u\|_{\pi_s} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| \|x_j\|^N : \ m \in \mathbb{N},\, u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j^N \right\}.$$

Notaremos $(\otimes^{N,s}X, \pi_s)$ ó $\otimes_{\pi_s}^{N,s}X$ al producto tensorial simétrico dotado con la norma proyectiva simétrica y $\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s}X$ a la completación del espacio normado $\otimes_{\pi_s}^{N,s}X$. Todo elemento u en el espacio completado tiene una representación de la forma $u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j^N$ con

$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|x_j\|^N < \infty$ y su norma está dada por

$$\|u\|_{\pi_s} = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|x_j\|^N : \; u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j^N \right\}.$$

Ahora bien, cuando dotamos al producto tensorial simétrico con la norma proyectiva simétrica π_s, razonando igual que en (1.11) se obtiene un isomorfismo isométrico,

$$\mathcal{P}(^N X; Y) = \mathcal{L}(\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X; Y)$$

que nos da la deseada linealización de polinomios homogéneos vía productos tensoriales simétricos. Como casos particulares, obtenemos las siguientes dualidades,

$$\mathcal{P}(^N X) = (\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X)' \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(^N X; Y') = \left[(\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X) \tilde{\otimes}_{\pi} Y \right]'. \tag{1.12}$$

La dualidad en el caso escalar (que es un caso particular del vectorial) está dada por

$$\langle u, P \rangle = L_P(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P(x_j) \tag{1.13}$$

para $P \in \mathcal{P}(^N X)$ y $u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j^N \in \tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X$, mientras que en el caso vectorial se tiene

$$\langle u, P \rangle = L_P(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j} P(x_{k,j})(y_k) \tag{1.14}$$

para $P \in \mathcal{P}(^N X; Y')$ y $u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \otimes y_k$, donde $(y_k)_k \subseteq Y$ y $(v_k)_k \subseteq (\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X)$, con $v_k = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j} x_{k,j}^N$ para todo k.

Por último, cuando consideramos $(\tilde{\otimes}_{\pi}^{N,s} X)$ el producto tensorial simétrico con la norma proyectiva π (no la simétrica) que hereda como subespacio de $(\tilde{\otimes}_{\pi}^{N} X)$, razonando como en (1.10) obtenemos el deseado isomorfismo isométrico entre operadores multilineales simétricos y operadores definidos en el producto tensorial simétrico,

$$\mathcal{L}_s(^N X; Y) = \mathcal{L}(\tilde{\otimes}_{\pi}^{N,s} X; Y).$$

Nuevamente, como consecuencia de lo anterior tenemos

$$\mathcal{L}_s(^N X; Y') = \left[(\tilde{\otimes}_{\pi}^{N,s} X) \tilde{\otimes}_{\pi} Y \right]', \tag{1.15}$$

donde la dualidad viene dada por

$$\langle u, \Phi \rangle = L_\Phi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j} \Phi(x_{k,j}, \ldots, x_{k,j})(y_k) \tag{1.16}$$

para cualquier $\Phi \in \mathcal{L}_s(^N X; Y')$ y $u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \otimes y_k$, donde $(y_k)_k \subseteq Y$ y $(v_k)_k \subseteq (\tilde{\otimes}_{\pi}^{N,s} X)$, con $v_k = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j} x_{k,j}^N$ para todo k.

1.3. Dual separable y propiedad de aproximación

En esta sección, nos enfocaremos en aquellos espacios de Banach X tales que X' es separable y tiene la propiedad de aproximación. La razón por la cual estamos interesados en espacios verificando estas hipótesis, es que serán aquellos para los cuales demostraremos los resultados del tipo Lindenstrauss en los Capítulos 2 y 4. Comenzamos dando algunas definiciones y nociones generales y luego enunciamos, en la Proposición 1.3.4, la propiedad de estos espacios en la cual estamos interesados. Todos los resultados de esta sección, pueden encontrarse en [35].

Definición 1.3.1. *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación (AP para abreviar) si para todo conjunto compacto K en X y todo $\varepsilon > 0$, existe un operador $T \in \mathcal{L}(X;X)$ de rango finito tal que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$.*

Por mucho tiempo, desde que Mazur en la década del '30 y más tarde (e independientemente) Grothendieck en la década del '50 plantearon la pregunta, se mantuvo abierto el problema de la existencia de un espacio de Banach que no tuviera la propiedad de aproximación. Este problema fue resuelto recién en los años '70 por Enflo [46], quien construyó el primer ejemplo de espacio sin la AP. A partir de ese momento, varios autores demostraron la existencia y construyeron otros espacios sin la AP. Hay que destacar que prácticamente todos estos ejemplos provienen de construcciones muy "artificiales". El primer espacio "conocido" sin la AP es el espacio $\mathcal{L}(H;H)$ de operadores acotados en un Hilbert H de dimensión infinita. Esto fue demostrado en [79]. No nos vamos a detener en ninguno de estos ejemplos, pero recalcamos que la AP es una propiedad "natural" que comparten la gran mayoría de los espacios en los que uno trabaja.

Un espacio X tiene la AP si y sólo si existe una red $(T_\alpha)_\alpha$ de operadores de rango finito convergiendo a Id_X, el operador identidad en X, uniformemente sobre compactos. Por otro lado, cabe mencionar que si X' tiene la AP entonces X también la tiene.

La definición de AP no pone ninguna restricción sobre la norma de los operadores de rango finito que aproximan a la identidad. En ese sentido, se introduce la siguiente versión más fuerte de la propiedad de aproximación.

Definición 1.3.2. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq \lambda < \infty$. Decimos que X tiene la λ-propiedad de aproximación acotada (λ-BAP) si para todo compacto K en X y todo $\varepsilon > 0$, existe un operador $T \in \mathcal{L}(X;X)$ de rango finito tal que $\|T\| \leq \lambda$ y $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$. Se dice que X tiene la propiedad de aproximación acotada (BAP) si tiene la λ-BAP para algún λ. Cuando $\lambda = 1$ se dice que X tiene la propiedad de aproximación métrica (MAP).*

Un espacio de Banach X tiene la BAP si y sólo si existe una red *uniformemente acotada* $(T_\alpha)_\alpha$ de operadores de rango finito en X que converge a Id_X en la topología fuerte de operadores (SOT), es decir, $\|T_\alpha(x) - x\| \underset{\alpha}{\to} 0$ para cada $x \in X$. Más aún, cuando el espacio X es separable, en lugar de una red podemos considerar una sucesión uniformemente acotada $(T_n)_n$ de operadores de rango finito verificando lo anterior. Estos resultados pueden verse en [35, Teorema 3.3 y Corolario 3.4].

Como consecuencia del principio de reflexividad local, cuando consideramos un espacio cuyo dual tiene la BAP, tenemos el siguiente resultado (ver [35, Proposición 3.5]).

Proposición 1.3.3. *Sea X un espacio de Banach tal que X' tiene la BAP. Luego, existe una red uniformemente acotada $(T_\alpha)_\alpha$ de operadores de rango finito en X que converge a Id_X en* *la topología SOT y tal que la red de los operadores transpuestos $(T'_\alpha)_\alpha$ converge a $Id_{X'}$ en la topología SOT.*

Si además X' es separable, en lugar de una red podemos considerar una sucesión de operadores $(T_n)_n$.

Por último, en [35, Teorema 3.10] se prueba que si X es un espacio de Banach cuyo dual es separable, entonces X' tiene la BAP si y sólo si tiene la AP. Luego, juntando esto con la proposición anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.4. *Sea X un espacio tal que X' es separable y tiene la propiedad de aproximación. Luego existe una sucesión $(T_n)_n$ de operadores en X de rango finito tal que $T_n \longrightarrow Id_X$ y $T'_n \longrightarrow Id_{X'}$ en la topología fuerte de operadores. Más aún,*

$$\sup_n \|T_n\| < \infty, \quad T_n''(X'') \subseteq J_X(X) \quad y \quad T_n''(x'') \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} x'' \text{ para todo } x'' \in X'', \tag{1.17}$$

donde $J_X : X \hookrightarrow X''$ es la inclusión canónica.

Queremos destacar que de las hipótesis que se piden sobre X en la proposición anterior, y que serán las mismas que pediremos para demostrar los resultados del tipo Lindenstrauss en capítulos siguientes, la que es verdaderamente restrictiva es la de separabilidad. De hecho, como ya mencionamos antes, la propiedad de aproximación es una propiedad que poseen la gran mayoría de los espacios de Banach que conocemos.

Ejemplos clásicos de espacios de Banach satisfaciendo la propiedad de la proposición anterior, son los espacios con base de Schauder achicante. Para una lectura detallada sobre espacios con base de Schauder ver [66]. Repasamos aquí algunas definiciones y observaciones relacionadas.

Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Decimos que $(x_n)_n$ es una *base de Schauder* para X, si todo elemento $x \in X$ se escribe de manera única como $x = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i$, para ciertos escalares $(a_n)_n$. En tal caso, se definen las funcionales coordenadas $x'_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ como $x'_n(x) = a_n$ y las proyecciones $\pi_n : X \longrightarrow X$ como

$$\pi_n(x) = \sum_{i=1}^n x'_i(x) x_i, \tag{1.18}$$

las cuales resultan operadores de rango finito verificando $\sup_n \|\pi_n\| < \infty$ y $\pi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_X} x$ para todo $x \in X$. La sucesión $(x'_n)_n$ se denomina la *sucesión básica dual* de la base $(x_n)_n$. Ejemplos de espacios de Banach con base de Schauder son: c_0, ℓ_p con $1 \le p < \infty$, los preduales de espacios de sucesiones de Lorentz $d_*(w,1)$ que estudiaremos en el Capítulo 3, $C[0,1]$, $L_p[0,1]$ con $1 \le p < \infty$. El espacio ℓ_∞ no tiene base puesto que no es separable.

Dada una base de Shauder $(x_n)_n$, $K = \sup_n \|\pi_n\|$ se denomina la *constante de la base*. Cuando $K = 1$ se dice que la base es *monótona*. Ejemplos de espacios con base monótona son las bases canónicas de c_0, ℓ_p con $1 \le p < \infty$ y $d_*(w,1)$. Un ejemplo de base no-monótona es la base $\{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots\}$ de c_0.

Dado un espacio de Banach X con base $(x_n)_n$, decimos que la base es *achicante* si se verifica que la sucesión básica dual $(x'_n)_n$ es base de X'. Por ejemplo, la base canónica $(e_n)_n$

de c_0 es una base achicante ya que su sucesión básica dual es la base canónica de ℓ_1; en cambio, la base canónica de ℓ_1 no es achicante puesto que ℓ_∞ no tiene base.

Ahora, si X es un espacio de Banach con base achicante $(x_n)_n$, entonces las proyecciones π_n juegan el rol de los operadores T_n en la Proposición 1.3.4. De hecho, es claro que $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{SOT} Id_X$ por ser $(\pi_n)_n$ las proyecciones de una base y que $\pi_n' \xrightarrow[n\to\infty]{SOT} Id_{X'}$, puesto que la base es achicante y $(\pi_n')_n$ resultan las proyecciones de la sucesión básica dual. De aquí se deduce (1.17). De hecho, un cálculo sencillo nos muestra que, por un lado,

$$\pi_n''(x'') = \sum_{i=1}^{n} x''(x_i')J_X(x_i) \in J_X(X) \quad \text{para todo } x'' \in X''.$$

Y por otro lado, dado $x' \in X'$ se tiene

$$|\pi_n''(x'')(x') - x''(x')| = \left| x'' \left(\sum_{i=1}^{n} x'(x_i)x_i' - x' \right) \right| \leq \|x''\| \, \|\pi_n'(x') - x'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puesto que la base es achicante, y en consecuencia $\pi_n''(x'') \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} x''$ para todo $x'' \in X''$.

1.4. Antecedentes históricos

En esta sección, haremos un breve repaso de algunos de los resultados más importantes en el estudio de la densidad de funciones que alcanzan la norma. En primer lugar, nos enfocaremos en los resultados que dieron origen al estudio de estos temas y luego haremos una síntesis de los resultados más recientes en el área. Para una lectura más detallada, se puede ver el *survey* de Acosta [3] y la introducción en [4].

Los pioneros: Bishop-Phelps, Lindenstrauss y Bollobás

Como mencionamos en la Introducción, el estudio de problemas referidos a la densidad de funciones que alcanzan la norma tiene sus raíces en una caracterización de reflexividad dada por James hacia fines de los años '50. La misma, afirma que un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si toda funcional lineal $\varphi \in X'$ alcanza la norma. A partir de este resultado, se llamó *subreflexivos* a todos aquellos espacios X para los cuales las funcionales φ en X' que alcanzan la norma, son densas en X' (densidad en la norma supremo $\|\cdot\|$ de X'). El teorema probado en el año '61 por Bishop y Phelps [21] afirma que todo espacio de Banach es subreflexivo, y es aquel que da origen al estudio de densidad de funciones que alcanzan la norma.

Teorema (Bishop-Phelps)**.** *Dado X un espacio de Banach, el conjunto de las funcionales lineales sobre X que alcanzan la norma es denso en X'. Es decir, dados $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in X'$, existe $\psi \in X'$ que alcanza su norma tal que $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$.*

También en [21], Bishop y Phelps dejaron abierta la pregunta acerca de si era posible o no extender su resultado para operadores lineales entre dos espacios de Banach cualesquiera.

Lindenstrauss, quien fue el primero en estudiar estos problemas en el contexto de operadores lineales, mostró en su trabajo [65] del año '63 varios resultados positivos sobre densidad de operadores que alcanzan la norma y exhibió el primer contraejemplo al teorema de Bishop-Phelps para operadores lineales. A continuación, veremos el contraejemplo de Lindenstrauss [65, Proposición 4] e incluiremos su demostración puesto que es sencilla de reproducir y es la base de gran cantidad de contraejemplos que surgieron más adelante.

En lo que sigue, vamos a considerar $\mathcal{Z} = c_0$ con la norma equivalente dada por

$$\|x\|_{\mathcal{Z}} = \|x\|_\infty + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x(i)}{2^i} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Este espacio resulta estrictamente convexo; más aún, su bidual $\mathcal{Z}''$ también es estrictamente convexo.

Proposición 1.4.1. *No se verifica el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(c_0; \mathcal{Z})$.*

Demostración. En primer lugar veamos que si $S : c_0 \to \mathcal{Z}$ alcanza su norma, entonces es un operador de rango finito. Digamos que $a \in B_{c_0}$ es tal que $\|S(a)\| = \|S\|$. Es sencillo verificar que fijado $0 < \delta < 1$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a + \delta e_n\| \leq 1 \quad \text{para todo } n \geq n_0. \tag{1.19}$$

Como consecuencia de esto, resulta claro que

$$\|S(a \pm \delta e_n)\| = \|S(a) \pm \delta S(e_n)\| \leq \|S\| \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Ahora bien, si llamamos $z^+ = S(a + \delta e_n)$ y $z^- = S(a - \delta e_n)$, la desigualdad anterior nos dice que

$$\|z^+\| = \|z^-\| = \left\| \frac{z^+ + z^-}{2} \right\|,$$

y puesto que $\mathcal{Z}$ es estrictamente convexo resulta $z^+ = z^-$, o lo que es equivalente, $S(e_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Esto demuestra que S es un operador de rango finito.

Ahora probemos que no se verifica Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(c_0; \mathcal{Z})$. Para ello, basta considerar el operador identidad $I : c_0 \to \mathcal{Z}$ y notar que no puede ser aproximado por operadores de rango finito, ya que de lo contrario resultaría un operador compacto. Luego, no puede ser aproximado por operadores que alcanzan la norma. □

La propiedad (1.19) junto con la estricta convexidad del espacio de llegada son fundamentales en el ejemplo anterior y son claves a la hora de obtener contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps. Para nosotros, serán de gran utilidad en el Capítulo 3. La propiedad (1.19) está referida a la ausencia de puntos extremales de la bola de c_0. Recordemos que dado C un subconjunto convexo de un espacio de Banach X, decimos que $x \in C$ es *punto extremal* de C si $x = y = z$ cada vez que $x = ty + (1-t)z$ para algún $0 < t < 1$ e $y, z \in C$. Esto extiende la noción de vértice de un polígono convexo en el plano. Por otro lado, desde un punto de vista geométrico, la estricta convexidad de un espacio nos habla de la "redondez" de la bola unidad.

Como ya mencionamos, en su trabajo [65], Lindenstrauss demostró algunos resultados positivos del tipo Bishop-Phelps para operadores lineales. Allí definió las llamadas propiedades A y B para espacios de Banach de la siguiente manera.

- Un espacio de Banach X tiene la propiedad A si para todo espacio de Banach Y, $NA\mathcal{L}(X;Y)$ es un conjunto denso en $\mathcal{L}(X;Y)$.
- Un espacio de Banach Y tiene la propiedad B si para todo espacio de Banach X, $NA\mathcal{L}(X;Y)$ es un conjunto denso en $\mathcal{L}(X;Y)$.

Uno de los principales resultados demostrados por Lindenstrauss [65, Teorema 1] es el siguiente.

Teorema (Lindenstrauss)**.** *Sean X, Y espacios de Banach. El conjunto de operadores lineales en $\mathcal{L}(X;Y)$ cuyos bitranspuestos alcanzan la norma es denso en $\mathcal{L}(X;Y)$. Es decir, dados $\varepsilon > 0$ y $T \in \mathcal{L}(X;Y)$, existe $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ tal que S'' alcanza la norma y tal que $\|T - S\| < \varepsilon$.*

Por lo tanto, todo espacio reflexivo tiene la propiedad A.

Este teorema, así como sus extensiones al contexto multilineal y polinomial 2-homogéneo que mencionaremos más adelante, son los puntos de partida de esta tesis. Nuestro principal objetivo, será extenderlos (bajo ciertas hipótesis) al marco de polinomios, funciones holomorfas, multilineales simétricas e ideales de multilineales. Daremos una idea de la demostración del teorema de Lindenstrauss. Como se verá, las técnicas de las demostraciones de los Capítulos 2 y 4 son completamente distintas, pero las del Capítulo 5 siguen esta línea.

Idea de la demostración de Lindenstrauss. Sean $T \in \mathcal{L}(X;Y)$, que podemos suponer de norma $\|T\| = 1$, y $0 < \varepsilon < 1/3$. En primer lugar se elige una sucesión decreciente de números positivos $(\alpha_i)_i$, tales que

$$2\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \varepsilon, \quad 2\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i < \alpha_k^2 \quad \text{y} \quad \alpha_k < \frac{1}{10k} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{1.20}$$

Luego, se construyen inductivamente una sucesión de operadores $(T_k)_k \subseteq \mathcal{L}(X;Y)$ y sucesiones $(a_k)_k \subseteq S_X$ y $(y'_k)_k \subseteq S_{Y'}$, de forma tal que $T_1 = T$,

$$\|T_k(a_k)\| \geq \|T_k\| - \alpha_k^2, \quad |y'_k(T_k(a_k))| = \|T_k(a_k)\| \quad \text{y} \quad T_{k+1}(\cdot) = T_k(\cdot) + \alpha_k y'_k(T_k(\cdot))T_k(a_k).$$

La sucesión $(T_k)_k$ verifica $1 \leq \|T_k\| \leq 4/3$ y $\|T_{k+1} - T_k\| < \alpha_k$, y por la elección de los (α_i) en (1.20) resulta ser una sucesión convergente a un operador $S \in \mathcal{L}(X;Y)$. Más aún, se tiene $\|T - S\| < \varepsilon$. Por otro lado, se prueba que $|y'_j(S(a_k))| \geq \|S\| - 1/j$ para todo $j \leq k$ y en consecuencia, si $a'' \in S''_X$ es un límite débil-$*$ de la sucesión $(a_k)_k$, entonces

$$|S''(a'')(y'_j)| \geq \|S''\| - 1/j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Luego S'' alcanza su norma en a'', lo cual demuestra el resultado. $\square$

Algunos resultados más del "inspirador" trabajo de Lindenstrauss son los siguientes.

- El espacio $L_1(\mu)$ tiene la propiedad A si y sólo si μ es puramente atómica. En particular, ℓ_1 tiene la propiedad A.
- El espacio $C(K)$ con K compacto metrizable tiene la propiedad A si y sólo si K es un conjunto finito.
- En relación con la propiedad B definida anteriormente, Lindenstrauss define la siguiente propiedad, sobre la cual volveremos de manera recurrente en los siguientes capítulos.

Definición 1.4.2. *Un espacio de Banach Z tiene la propiedad (β) si existe un subconjunto $\{(z_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in \Lambda\} \subset Z \times Z'$ satisfaciendo:*

(i) $\|z_\alpha\| = \|g_\alpha\| = g_\alpha(z_\alpha) = 1$

(ii) *Existe λ, $0 \leq \lambda < 1$ tal que $|g_\alpha(z_\beta)| \leq \lambda$ para $\alpha \neq \beta$.*

(iii) *Para todo $z \in Z$, $\|z\| = \sup_{\alpha \in \Lambda} |g_\alpha(z)|$.*

En el caso finito-dimensional, los espacios con propiedad (β) son aquellos cuya bola unidad es un poliedro. En dimensión infinita, ejemplos de espacios con esta propiedad son c_0, ℓ_∞ y $C(K)$ con K teniendo un conjunto denso de puntos aislados. Otro de los resultados de Lindenstrauss, es el siguiente: si Z es un espacio de Banach con la propiedad (β), entonces tiene la propiedad B. En particular, c_0, ℓ_∞ tienen la propiedad B.

En vistas de aplicarlo al estudio del rango numérico de operadores, Bollobás [23] demostró en el año '70 la siguiente versión cuantitativa del teorema de Bishop-Phelps.

Teorema (Bishop-Phelps-Bollobás). *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que $\varphi \in S_{X'}$ y $\tilde{x} \in S_X$ son tales que $|\varphi(\tilde{x}) - 1| \leq \varepsilon^2/2$ para un $0 < \varepsilon < 1/2$. Luego, existen $\psi \in S_{X'}$ y $a \in S_X$ tales que*

$$\psi(a) = 1, \quad \|a - \tilde{x}\| < \varepsilon + \varepsilon^2 \quad y \quad \|\varphi - \psi\| \leq \varepsilon.$$

Repasemos brevemente la motivación de Bollobás en el estudio de esta versión cuantitativa. Dado un espacio de Banach X, consideremos el subconjunto de $X \times X'$ dado por

$$\Pi(X) = \{(x, x') : \ x \in S_X,\ x' \in S_{X'},\ x'(x) = 1\}.$$

Si $f : S_X \to X$ es una función acotada, el *rango numérico de f* es el conjunto de escalares

$$V(f) = \{x'(f(x)) : \ (x, x') \in \Pi(X)\}.$$

Resulta claro entonces, que las propiedades del conjunto $\Pi(X)$ juegan un rol importante en el estudio del rango numérico. El teorema de Bishop-Phelps-Bollobás nos muestra que los pares ordenados $(x, x') \in X \times X'$ que "casi pertenecen" a $\Pi(X)$, pueden ser aproximados (en la norma producto) por elementos de $\Pi(X)$. Ahora, dado un operador lineal $T \in \mathcal{L}(X; X)$, es sencillo verificar que $V(T) \subseteq V(T')$, donde T' es el operador transpuesto de T. Más aún, se sabe que la inclusión anterior puede ser estricta. Como consecuencia de su versión cuantitativa del teorema de Bishop-Phelps, Bollobás demuestra en [23] el siguiente resultado.

Teorema 1.4.3. *$\overline{V(T)} = \overline{V(T')}$, donde $\overline{A}$ denota la clausura de $A \subseteq \mathbb{K}$.*

Resultados más recientes

En lo que resta, repasaremos algunos de los resultados más importantes que surgieron a partir de los trabajos de Bishop y Phelps, Lindenstrauss y Bollobás. Mencionaremos en primer lugar aquellos del tipo Bishop-Phelps, es decir, de densidad de funciones que alcanzan la norma. Luego nos enfocaremos en los resultados del tipo Lindenstrauss, esto es, de densidad de funciones cuyas extensiones canónicas al bidual alcanzan la norma, y por último veremos algunos resultados cuantitativos del tipo Bishop-Phelps-Bollobás, que han surgido como un tema de gran interés en los últimos años.

Resultados del tipo Bishop-Phelps

Siguiendo la línea de estudio inaugurada por Lindenstrauss, Bourgain mostró en [27] una condición suficiente para que un espacio posea la propiedad A, que es más general que la condición de reflexividad dada por el teorema de Lindenstrauss. Específicamente, un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* (RNp) si el teorema de Radon-Nikodým se verifica en X. Es decir, si Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y $\mu\colon \Sigma \to X$ es una medida (a valores vectoriales) de variación acotada que es absolutamente continua con respecto a una medida finita, positiva λ, entonces existe una función λ-Bochner integrable $f\colon \Omega \to X$ tal que

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda$$

para todo $E \in \Sigma$. Espacios con la RNp son, entre otros, ℓ_1, espacios reflexivos y espacios duales separables. En cambio, los espacios c_0, $L_\infty(\Omega)$, $L_1(\Omega)$ para Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ ó $C(K)$ para K un espacio compacto infinito, no poseen la RNp.

Volviendo al comienzo, Bourgain introdujo la *propiedad de Bishop-Phelps* para espacios de Banach, la cual resulta ser, en principio, más fuerte que la propiedad A (en esta parte, no nos detendremos en los detalles técnicos) y probó lo siguiente.

Teorema 1.4.4. *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Bishop-Phelps si y sólo si tiene la RNp.*

Completando esta caracterización, se tiene el siguiente resultado de Huff [59].

Teorema 1.4.5. *Sea X un espacio de Banach. Luego X tiene la RNp si y sólo para todos Z e Y espacios de Banach isomorfos a X, $NA\mathcal{L}(Z;Y)$ es denso en $\mathcal{L}(Z;Y)$.*

En relación con los espacios de llegada, Schachermayer [78] fue la primera en dar un ejemplo de un espacio clásico sin la propiedad B, demostrando que $NA\mathcal{L}(L_1[0,1];C[0,1])$ no es denso en $\mathcal{L}(L_1[0,1];C[0,1])$. Para los espacios ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) esta pregunta se mantuvo abierta hasta principios de los '90. En [53], Gowers mostró que si $1 < p < \infty$ entonces ℓ_p no tiene la propiedad B; esto mismo fue posteriormente probado por Acosta [2] para el espacio ℓ_1. El espacio dominio utilizado por Gowers para mostrar que ℓ_p no tiene la propiedad B es $d_*(w,1)$, el predual del espacio de sucesiones de Lorentz $d(w,1)$ con $w = (1/i)_i$. Volveremos con más detalle sobre los preduales de Lorentz en el Capítulo 3; por el momento, simplemente aclaremos que el predual $d_*(w,1)$ con $w = (1/i)_i$, es el espacio de todas las sucesiones $(x(i))_i$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n x^*(i)}{W(n)} = 0,$$

donde $x^* = (x^*(i))_i$ es el reordenamiento decreciente de $(x(i))_i$ y $W(n) = \sum_{i=1}^n 1/i$. Éste resulta un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|x\|_W := \sup_n \frac{\sum_{i=1}^n x^*(i)}{W(n)} < \infty.$$

Una de las propiedades fundamentales de este espacio es la ausencia de puntos extremales de su bola unidad. Esta misma propiedad también la comparte el espacio de sucesiones c_0. Sin embargo, a diferencia de este último, en el caso del predual de Lorentz se tiene $d_*(w,1) \hookrightarrow \ell_p$ para todo $1 < p < \infty$. Estas dos propiedades son la clave del ejemplo de Gowers, así como también lo son en los contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps multilineal y polinomial que veremos más adelante.

Una pregunta natural que surge en el contexto de los problemas del tipo Bishop-Phelps, es la posible extensión de ciertos resultados al marco de operadores multilineales y polinomios. En [19], Aron, Finet y Werner estudiaron la densidad de formas N-lineales que alcanzan la norma. Allí, probaron el siguiente resultado, que extiende (en parte) el Teorema 1.4.4.

Teorema 1.4.6. *Si X tiene la RNp, entonces $NA\mathcal{L}(^N X)$ es denso en $\mathcal{L}(^N X)$.*

En esta misma dirección, Choi y Kim demostraron en [37] varios resultados positivos del tipo Bishop-Phelps para operadores multilineales y polinomios. Enunciamos algunos de ellos.

• Sea Y un espacio de Banach arbitrario. Luego, $NA\mathcal{L}(^N\ell_1;Y)$ es denso en $\mathcal{L}(^N\ell_1;Y)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Esto mismo se verifica para la clase de operadores multilineales simétricos.

• Sean X, Y espacios de Banach y supongamos que X tiene la RNp. Luego $NA\mathcal{P}(^N X;Y)$ es denso en $\mathcal{P}(^N X;Y)$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Los resultados anteriores, extienden el obtenido en el Teorema 1.4.6. El primero de ellos, es una extensión al caso vectorial, cuando se considera $X = \ell_1$. El segundo, es la versión polinomial homogénea (también a valores vectoriales).

• Un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Dunford-Pettis* si para cada espacio Y, todo operador débil compacto de X en Y es completamente continuo, es decir, manda sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.

Si X tiene la propiedad de Dunford-Pettis y tiene base monótona achicante, entonces $NA\mathcal{L}(^N X)$ es denso en $\mathcal{L}(^N X)$. Un ejemplo clasico de espacio verificando las hipótesis anteriores es $X = c_0$. Luego, $NA\mathcal{L}(^N c_0)$ es denso en $\mathcal{L}(^N c_0)$.

Lo mismo se prueba para operadores multilineales simétricos y polinomios homogéneos.

• Sean X, Y espacios de Banach y supongamos que Y tiene la propiedad (β). Luego, si $NA\mathcal{L}(^N X)$ es denso en $\mathcal{L}(^N X)$ entonces $NA\mathcal{L}(^N X;Y)$ es denso en $\mathcal{L}(^N X;Y)$.

Lo mismo se verifica para operadores multilineales simétricos y polinomios homogéneos.

Este último resultado será de importancia en los capítulos que siguen. En el Capítulo 3 probaremos la recíproca, mientras que en el Capítulo 2 veremos una versión análoga, en el contexto de los teoremas del tipo Lindenstrauss.

Mediante la demostración de una fórmula integral comparable con las que veremos en los Capítulos 2 y 4, Grecu y Ryan [54] probaron el siguiente resultado positivo.

• Sean $X_1, \dots, X_N$ espacios de Banach tales que (al menos) $N-1$ de los duales X_i' $(1 \le i \le N)$ tiene la propiedad de aproximación. Supongamos también que $X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_N$ es separable y no contiene una copia de ℓ_1. Luego, $NA\mathcal{L}(^N X_1' \times \cdots \times X_N')$ es denso en $\mathcal{L}(^N X_1' \times \cdots \times X_N')$.

En el caso $X_1 = \cdots = X_N = X$, lo mismo sucede para operadores multilineales simétricos en X'.

Luego de demostrar resultados positivos del tipo Bishop-Phelps para formas multilineales (entre ellos, el Teorema 1.4.6), en [19] se plantea la pregunta acerca de la validez (o no) con total generalidad, de un teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(^N X)$. Nos detendremos por un momento en este punto, ya que es una pregunta que puede generar cierta confusión. Teniendo en cuenta que el teorema de Bishop-Phelps no se verfica ni siquiera para operadores lineales (ver Proposición 1.4.1), resulta natural pensar que no puede verificarse en espacios de operadores multilineales y polinomios. Sin embargo, si bien esto es efectivamente así, no es un hecho trivial. Pensemos en el caso más sencillo de todos, el de las formas bilineales. Sabemos que hay una identificación isométrica entre espacios de formas bilineales y de operadores lineales, dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(^2 X \times Y) & \longrightarrow & \mathcal{L}(X; Y') \\ \varphi & \longmapsto & T_\varphi, \end{array}$$

donde $T_\varphi(x)(y) = \varphi(x, y)$. Es claro que si φ alcanza la norma, entonces T_φ también lo hace. Esto nos dice que si existieran X e Y espacios de Banach tales que $NA\mathcal{L}(X; Y')$ no es denso en $\mathcal{L}(X; Y')$, entonces $NA\mathcal{L}(^2 X \times Y)$ no sería denso en $\mathcal{L}(^2 X \times Y)$. Por otro lado, es fácil ver que T_φ puede alcanzar la norma pero φ no, lo cual nos muestra que puede haber ejemplos en los que se verifique el teorema de Bishop-Phelps para operadores, pero no se verifique para el espacio asociado de formas bilineales.

Ahora bien, modificando levemente el ejemplo de la Proposición 1.4.1, se puede ver que $NA\mathcal{L}(c_0; \mathcal{Z}'')$ no es denso en $\mathcal{L}(c_0; \mathcal{Z}'')$, lo que nos muestra que no se verifica el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(^2 c_0 \times \mathcal{Z}')$. Sin embargo, ¿qué podemos decir acerca de la validez del teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(^2 X)$? Razonando como antes, bastaría ver que existe un espacio X tal que $NA\mathcal{L}(X; X')$ no es denso en $\mathcal{L}(X; X')$. También, en virtud de las observaciones anteriores, podría existir un X tal que $NA\mathcal{L}(X; X')$ sea denso en $\mathcal{L}(X; X')$, pero igualmente no se verifique Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(^2 X)$.

Al momento en que se planteó la pregunta acerca de la validez del teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(^N X)$, no se conocía ningún espacio que responda a alguno de los problemas anteriores. Por este motivo, determinar la validez del teorema de Bishop-Phelps para formas bilineales en $X \times X$ resultó un problema de interés. Acosta, Aguirre y Payá [5] mostraron que el mismo espacio predual de Lorentz utilizado por Gowers para probar que los espacios ℓ_p no tienen la propiedad B, sirve de contraejemplo en este caso.

Teorema 1.4.7. *Sea $X = d_*(w, 1)$ con $w = (1/i)_i$. Luego, $NA\mathcal{L}(^2 X)$ no es denso en $\mathcal{L}(^2 X)$.*

Posteriormente, Choi fue el primero en mostrar un espacio clásico que también sirve como contraejemplo. En [36], probó que $NA\mathcal{L}(^2 L_1[0, 1])$ no es denso en $\mathcal{L}(^2 L_1[0, 1])$.

En lo que respecta a los contraejemplos para operadores N-lineales ($N > 2$) y polinomios homogéneos, la validez del teorema de Bishop-Phelps sigue siendo una pregunta no trivial. En [62], Jiménez Sevilla y Payá generalizaron el contraejemplo de Acosta, Aguirre y Payá, obteniendo una caracterización de aquellos preduales de Lorentz para los cuales se verifica el teorema de Bishop-Phelps en espacios de operadores multilineales y polinomios homogéneos. Entre otras cosas, probaron lo siguiente.

Teorema 1.4.8. *Dada una sucesión admisible w y $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, son equivalentes:*

(i) $NA\mathcal{L}(^N d_*(w, 1))$ *es denso en* $\mathcal{L}(^N d_*(w, 1))$.

(ii) $NA\mathcal{P}(^N d_*(w, 1))$ *es denso en* $\mathcal{P}(^N d_*(w, 1))$.

(iii) $w \notin \ell_N$.

La definición de sucesión admisible y de los espacios preduales de Lorentz $d_*(w,1)$ se verán en el Capítulo 3.

Por último, mencionamos algunos resultados del tipo Bishop-Phelps para el espacio de funciones holomorfas en la bola abierta y uniformemente continuas en la bola cerrada. En [6], Acosta, Alaminos, García y Maestre extienden los resultados en [19] y [37], demostrando que si X es un espacio con la RNp, entonces para cualquier espacio de Banach Y, el conjunto $NA\mathcal{A}_u(X;Y)$ es denso en $\mathcal{A}_u(X;Y)$. También, utilizan los espacios preduales de Lorentz para mostrar contraejemplos a ciertas versiones "fuertes" del teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u$. Volveremos con detalle sobre estas versiones en el Capítulo 4.

Resultados del tipo Lindenstrauss

El teorema de Lindenstrauss muestra la densidad del conjunto de operadores cuyas extensiones canónicas al bidual (los bitranspuestos) alcanzan la norma. Ante la negativa acerca de la validez del Bishop-Phelps multilineal y polinomial, este teorema se presenta como un resultado con posibilidades de ser extendido al marco de multilineales y polinomios. Recordemos que en estos casos, las extensiones canónicas al bidual están dadas por las extensiones de Arens y de Aron-Berner.

En [1], Acosta abordó este problema en el contexto de formas bilineales. Allí demostró el siguiente resultado.

Teorema 1.4.9. *Sean X, Y espacios de Banach. El conjunto de formas bilineales en $\mathcal{L}(^2X \times Y)$ tales que (una de) sus extensiones de Arens alcanzan la norma es denso en $\mathcal{L}(^2X \times Y)$.*

La demostración de este resultado, utiliza fuertemente un principio de optimización estudiado en [76]. La idea es "perturbar" una bilineal dada, por una que sea producto de dos funcionales, de manera que su extensión al bidual alcance la norma.

El resultado de Acosta fue posteriormente mejorado por Aron, García y Maestre en [20]. Basándose en la idea de la demostración del teorema de Lindenstrauss, probaron lo siguiente.

Teorema 1.4.10. *Sean X, Y espacios de Banach. El conjunto de formas bilineales en $\mathcal{L}(^2X \times Y)$ cuyas dos extensiones de Arens alcanzan la norma en el mismo elemento, es denso en $\mathcal{L}(^2X \times Y)$.*

Además, los autores dieron un ejemplo que muestra que el conjunto de formas bilineales tales que sus dos extensiones de Arens alcanzan simultáneamente la norma, es un subconjunto propio del conjunto de formas bilineales tales que sólo una de ellas alcanza la norma. Por otro lado, siguiendo la misma línea de demostración que en el teorema anterior, probaron el teorema de Lindenstrauss para polinomios 2-homogéneos a valores escalares. Este resultado fue extendido por Choi, Lee y Song [38] para el caso a valores vectoriales. En definitiva, quedó demostrado lo siguiente.

Teorema 1.4.11. *Sean X, Y espacios de Banach. El conjunto de polinomios en $\mathcal{P}(^2X;Y)$ cuyas extensiones de Aron-Berner alcanzan la norma es denso en $\mathcal{P}(^2X;Y)$.*

En el contexto más general de operadores N-lineales, Acosta, García y Maestre [11] lograron extender el Teorema 1.4.10, probando con total generalidad un teorema de Lindenstrauss multilineal.

Teorema 1.4.12. *Sean $X_1, \dots, X_N, Y$ espacios de Banach. Luego, el conjunto de operadores N-lineales en $\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma simultáneamente en la misma N-upla, es denso en $\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$.*

La demostración de este teorema, como veremos en el Capítulo 5, es nuevamente una adaptación de las ideas de Lindenstrauss. También en [11], se demuestra este mismo resultado para ciertas clases de operadores multilineales, como los operadores integrales ó nucleares.

En [3] se plantean algunos problemas abiertos relacionados con la densidad de funciones que alcanzan la norma. Entre ellos, la validez del Teorema 1.4.12 para la clase de operadores multilineales simétricos y la posible extensión del Teorema 1.4.11 al caso N-homogéneo con $N \geq 3$. Estas preguntas serán analizadas en el Capítulo 2.

Resultados del tipo Bishop-Phelps-Bollobás

Tomando como punto de partida el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para funcionales lineales, se ha generado en los últimos años un gran interés por el estudio de problemas del tipo Bishop-Phelps cuantitativos. Más específicamente, supongamos que tenemos dos espacios de Banach X e Y, para los cuales se verifica el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{L}(X;Y)$, $\mathcal{L}(^N X;Y)$ ó $\mathcal{P}(^N X;Y)$. ¿Es posible obtener una versión cuantitativa (del tipo Bollobás) del teorema en alguna de estas situaciones? Los primeros resultados en este sentido se deben a Acosta, Aron, García y Maestre [7], en el contexto de operadores lineales. Allí, definieron la *propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás* para operadores lineales de la siguiente manera.

Definición 1.4.13. *Sean X e Y espacios de Banach. Decimos que $\mathcal{L}(X;Y)$ tiene la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás ($BPBp$), si para cada $\varepsilon > 0$ existen $\eta(\varepsilon), \beta(\varepsilon) > 0$ (con $\beta(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$) tales que: dados $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $\tilde{x} \in B_X$ con $\|T(\tilde{x})\| > \|T\| - \eta(\varepsilon)$, existen $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $a \in B_X$ satisfaciendo:*

$$\|S(a)\| = \|S\|, \quad \|a - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon) \quad y \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

La definición de $BPBp$ se extiende de manera análoga a los casos multilineal y polinomial, incluso en el marco de ideales. Estudiaremos esa clase de problemas en el Capítulo 5.

En [7], los autores demostraron que $\mathcal{L}(\ell_1; Y)$ tiene la $BPBp$ si y sólo si Y tiene la llamada propiedad $AHSP$ (por *approximate hyperplane series property*). Esta última propiedad la satisfacen, por ejemplo, los espacios de Banach finito-dimensionales, $L_1(\mu)$ para una medida μ σ-finita, los espacios $C(K)$ y los espacios de Banach uniformemente convexos. En particular, $\mathcal{L}(\ell_1, \ell_\infty)$ tiene la $BPBp$. El resultado anterior, muestra que no siempre es posible extender un resultado del tipo Bishop-Phelps a su correspondiente versión cuantitativa. De hecho, si Y no tiene la $AHSP$ entonces $\mathcal{L}(\ell_1; Y)$ no tiene la $BPBp$, pero sí se verifica en este espacio el teorema de Bishop-Phelps (por un resultado de Choi y Kim [37] mencionado anteriormente). Muchos otros resultados del tipo Bishop-Phelps-Bollobás surgieron a partir del trabajo de Acosta, Aron, García y Maestre. Algunos de ellos pueden verse en [4, 10, 9, 17, 18, 64].

En la misma línea de investigación, Choi y Song extendieron la pregunta al caso bilineal en [39]; allí demostraron que, en contraste con el resultado positivo para $\mathcal{L}(\ell_1, \ell_\infty)$, las formas bilineales en $\ell_1 \times \ell_1$ no verifican un teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Por otro lado, también se probaron algunos resultados positivos en el marco de formas bilineales. En [9], donde se demostraron los primeros resultados en este sentido, se caracterizaron los espacios de Banach Y para los cuales $\mathcal{L}(^2\ell_1 \times Y)$ tiene la $BPBp$. También se probó un resultado positivo cuando se consideran formas bilineales en productos de espacios uniformemente convexos. Aclaremos que un espacio de Banach X es *uniformemente convexo* si dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\text{si } x_1, x_2 \in B_X \text{ satisfacen } \frac{\|x_1 + x_2\|}{2} > 1 - \delta, \quad \text{entonces} \quad \|x_1 - x_2\| < \varepsilon.$$

Los espacios de Hilbert y los espacios $L_p(\mu)$ con $1 < p < \infty$ son uniformemente convexos. Por el teorema de Milman-Pettis, todo espacio uniformemente convexo es reflexivo, aunque la recíproca no se verifica (ver [42]).

Más en general, en [9] se demostró que si $X_1, \ldots, X_N$ son espacios de Banach uniformemente convexos, entonces $\mathcal{L}(^N X \times \cdots \times X_N; Y)$ tiene la $BPBp$. Este resultado extiende uno en [64], que afirma que si X es uniformemente convexo, entonces $\mathcal{L}(X; Y)$ tiene la $BPBp$ para todo espacio de Banach Y. Siguiendo las ideas de la demostración expuesta en [64], en [4] se probó la correspondiente versión polinomial homogénea del resultado anterior. Esto es, si X es uniformemente convexo entonces $\mathcal{P}(^N X; Y)$ tiene la $BPBp$ para todo espacio de Banach Y y todo $N \in \mathbb{N}$. También en [4], se demostró que si Y es un espacio de Banach con la propiedad (β) y $\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N)$ tiene la $BPBp$, entonces $\mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ tiene la $BPBp$. Lo mismo sucede en el caso polinomial homogéneo.

La correspondiente versión cuantitativa del teorema de Lindenstrauss para operadores lineales fue también encarada en [7]. Más precisamente, se planteó la siguiente pregunta:

¿Existe una función $\gamma : \mathbb{R}^+ \to (0, 1)$, $\lim_{t \to 0} \gamma(t) = 0$, tal que para cualquier par de espacios de Banach (X, Y) y cualquier $\varepsilon > 0$ se verifica lo siguiente: dados $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $\tilde{x} \in B_X$ con $\|T(\tilde{x})\| > \|T\| - \gamma(\varepsilon)$, existen $S \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $a'' \in B_{X''}$ satisfaciendo

$$\|S''(a'')\| = \|S\|, \quad \|a'' - \tilde{x}\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|S - T\| < \varepsilon\,?$$

Desafortunadamente, incluso esta pregunta tiene una respuesta negativa en general, como puede verse en el siguiente ejemplo. El mismo, sigue las líneas del contraejemplo al teorema de Bishop-Phelps para operadores, exhibido por Lindenstrauss [65] (ver Proposición 1.4.1). Incluímos la idea de la demostración, ya que será la misma que aplicaremos en algunos contraejemplos del Capítulo 3.

Ejemplo 1.4.14 ([7, Ejemplo 6.3]). Sea $\mathcal{Z}$ el renormamiento de c_0 tal que $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z}''$ son estrictamente convexos. Dado $0 < \varepsilon < 1$, consideremos $T = I$ el operador identidad en $\mathcal{L}(c_0; \mathcal{Z})$ y un elemento $\tilde{x} \in B_{c_0}$ tal que $\|T(\tilde{x})\| > \|T\| - \gamma(\varepsilon)$ para cualquier $\gamma(\varepsilon > 0)$. Supongamos que existen $S \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $a'' \in B_{X''}$ satisfaciendo

$$\|S''(a'')\| = \|S\|, \quad \|a'' - \tilde{x}\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

Es fácil verificar que $\|a'' - \tilde{x}\| < \varepsilon$ implica que a'' satisface la condición (1.19) y en consecuencia, razonando como en la demostración de la Proposición 1.4.1, resulta $S(e_n) = 0$ para todo n

suficientemente grande. Dado que $\|T(e_n)\| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos la contradicción deseada.

Capítulo 2

Teoremas de Lindenstrauss

En este capítulo probaremos resultados del tipo Lindenstrauss para polinomios, funciones holomorfas y operadores multilineales simétricos. En la Sección 2.1 probaremos un teorema de Lindenstrauss para polinomios homogéneos definidos en un espacio cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación y a valores en un espacio dual o un espacio con la propiedad (β) de Lindenstrauss. La clave de la demostración será la fórmula integral que probaremos para la dualidad entre tensores y polinomios homogéneos. En la Sección 2.2, adaptando las ideas del caso polinomial homogéneo, extenderemos los resultados del tipo Lindenstrauss para los espacios de polinomios no-homogéneos y de funciones holomorfas en $\mathcal{A}_u$. Finalmente, en la Sección 2.3 extenderemos la fórmula integral para la dualidad entre tensores y operadores multilineales simétricos y probaremos un teorema del tipo Lindenstrauss también en este caso.

2.1. Caso polinomial homogéneo

El principal resultado de esta sección es el Teorema 2.1.3, donde probamos el mencionado teorema de Lindenstrauss para polinomios homogéneos. A tal fin, demostramos en el Teorema 2.1.2 una fórmula integral para la dualidad $\mathcal{P}(^N X; Y') = \left[(\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right]'$ entre polinomios homogéneos y productos tensoriales. En la Proposición 2.1.5 mostramos que si se verifica el teorema de Lindenstrauss para polinomios a valores escalares entonces se verifica para polinomios a valores en cualquier espacio con propiedad (β). Esto nos permite extender, en el Teorema 2.1.6, el resultado del tipo Lindenstrauss para polinomios a valores en un espacio con propiedad (β).

Motivación: linealización del problema

La idea fundamental en la demostración de nuestro resultado del tipo Lindenstrauss, será la de *linealizar* el problema a través de la dualidad isométrica que existe entre espacios de polinomios homogéneos y productos tensoriales simétricos (ver Sección 1.2). Por simplicidad, vamos a exponer las ideas en el caso particular de polinomios homogéneos a valores escalares.

Dado $Q \in \mathcal{P}(^N X)$, consideremos la funcional lineal asociada $L_Q \in (\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X)'$ definida como en (1.13). El teorema de Bishop-Phelps nos dice que L_Q se puede aproximar por funcionales lineales que alcanzan la norma que, vía la isometría $\mathcal{P}(^N X) = (\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X)'$, resultan ser de la forma L_P para ciertos $P \in \mathcal{P}(^N X)$. Ahora bien, si L_P alcanza la norma, ¿esto implica que P ó $\overline{P}$ alcanzan la norma? Supongamos que L_P alcanza la norma en un $u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j^N \in (\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X)'$ con $\|u_0\|_{\pi_s} \leq 1$ y donde elegimos los λ_j de forma tal que $x_j \in B_X$ para todo j. Luego,

$$\|P\| = |L_P(u_0)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P(x_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j P(x_j)| \leq \|P\| \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|. \tag{2.1}$$

Por la definición de la norma π_s, en principio se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \geq 1$. Notemos que si fuese $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| = 1$, entonces (2.1) nos diría que P alcanza la norma, más aún, que $|P(x_j)| = \|P\|$ para todo j. Esto implicaría la validez de un teorema del tipo Bishop-Phelps polinomial, el cual sabemos que no se verifica con total generalidad.

Pensando en la validez de un teorema del tipo Lindenstrauss, notando que $\|P\| = \|\overline{P}\|$ por Davie-Gamelin [41], que $\overline{P}(x_j) = P(x_j)$ para todo j y considerando la medida $\mu_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \delta_{x_j}$ en $(B_{X''}, w^*)$, podemos reescribir (2.1) de la siguiente manera:

$$\|\overline{P}\| = |L_P(u_0)| = \left| \int_{B_{X''}} \overline{P}(x'') d\mu_0 \right| \leq \int_{B_{X''}} |\overline{P}(x'')| d|\mu_0| \leq \|\overline{P}\| \|\mu_0\|. \tag{2.2}$$

La restricción $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| = 1$ se reescribe en este caso como $\|\mu_0\| = 1$. Ahora, si bien no esperamos que se verifique $\|\mu_0\| = 1$ (de hecho, ya notamos que eso no sucede en general), podemos preguntarnos si existe otra medida $\tilde{\mu}_0$ en $(B_{X''}, w^*)$ tal que $\|\tilde{\mu}_0\| = 1$ y

$$L_P(u_0) = \int_{B_{X''}} \overline{P}(x'') d\tilde{\mu}_0, \tag{2.3}$$

ya que esto nos daría un resultado del tipo Lindenstrauss polinomial. Nuestro objetivo entonces, será demostrar fórmulas integrales de la forma de (2.3).

El siguiente lema será de utilidad para la demostración de la fórmula integral. Es aquí donde entran en juego las hipótesis de separabilidad y propiedad de aproximación vistas en la Sección 1.3.

Lema 2.1.1. *Sean X, Y espacios de Banach y supongamos que X' es separable y tiene la propiedad de aproximación. Luego, para cada polinomio $P \in \mathcal{P}(^N X; Y')$ existe una sucesión $\|\cdot\|$-acotada, multi-indexada de polinomios de tipo finito*

$$(P_{n_1,\dots,n_N})_{(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{N}^N} \subset \mathcal{P}_f(^N X; Y')$$

tal que la extensión de Aron-Berner de P está dada por el límite iterado

$$\overline{P}(x'')(y'') = \lim_{n_1\to\infty} \dots \lim_{n_N\to\infty} \overline{P_{n_1,\dots,n_N}}(x'')(y''), \tag{2.4}$$

para cada $x'' \in X''$ e $y'' \in Y''$.

Demostración. Por la Proposición 1.3.4, hay una sucesión $(T_n)_n$ de operadores en X de rango finito tales que

$$\sup_n \|T_n\| < \infty, \quad {T_n}''(X'') \subseteq J_X(X) \quad \text{y} \quad {T_n}''(x'') \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} x'' \text{ para todo } x'' \in X''. \tag{2.5}$$

Sea Φ la multilineal simétrica asociada a P y fijemos $x'' \in X''$. A partir de (2.5), podemos calcular la extensión de Aron-Berner de P como

$$\begin{aligned}\overline{P}(x'') &= w^* - \lim_{n_1\to\infty} \dots \lim_{n_N\to\infty} \overline{\Phi}(T''_{n_1}(x''), \dots, T''_{n_N}(x''))\\ &= w^* - \lim_{n_1\to\infty} \dots \lim_{n_N\to\infty} \overline{\Phi \circ (T_{n_1}, \dots, T_{n_N})}(x'', \dots, x'').\end{aligned}$$

Luego el resultado se deduce tomando, para cada $(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$, el polinomio homogéneo $P_{n_1,\dots,n_N} \colon X \longrightarrow Y'$ dado por $P_{n_1,\dots,n_N} = \Phi \circ (T_{n_1}, \dots, T_{n_N})$. $\square$

En la Sección 1.3 observamos que si X es un espacio de Banach con base de Schauder achicante $(x_n)_n$, entonces las proyecciones $(\pi_n)_n$ verifican (2.5). Luego, en el caso en que consideramos un espacio con base achicante, los polinomios $P_{n_1,\dots,n_N} \colon X \longrightarrow Y'$ están dados por $P_{n_1,\dots,n_N} = \Phi \circ (\pi_{n_1}, \dots, \pi_{n_N})$, es decir,

$$P_{n_1,\dots,n_N}(x) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} x'_{i_1}(x) \cdots x'_{i_N}(x) \Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_N}).$$

Ahora probaremos la representación integral para los elementos en el producto tensorial $(\tilde{\otimes}^{N,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y$. La misma, puede compararse con aquellas de [54, Teorema 1] y [52, Observación 3.6]. Consideraremos $B_{X''}$ y $B_{Y''}$ dotadas de la topología débil-$*$, con la cual resultan conjuntos compactos.

Teorema 2.1.2. *Sean X, Y espacios de Banach y supongamos que X' es separable y tiene la propiedad de aproximación. Luego, para cada $u \in (\tilde{\otimes}^{N,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y$ existe una medida regular de Borel μ_u on $(B_{X''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)$ tal que $\|\mu_u\| \leq \|u\|_\pi$ y*

$$\langle u, P \rangle = \int_{B_{X''}\times B_{Y''}} \overline{P}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y''), \tag{2.6}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^N X; Y')$.

Demostración. En primer lugar probamos la fórmula integral para polinomios de tipo finito. Los polinomios de tipo finito de X a Y' pueden verse como un subespacio isométrico de $C(B_{X''} \times B_{Y''})$, identificando cada polinomio $P(\cdot) = \sum_{j=1}^m (x'_j)^N(\cdot) y'_j$ con la función

$$(x'', y'') \mapsto \sum_{i=1}^m x''(x'_j)^N \; y''(y'_j) = \overline{P}(x'')(y''). \tag{2.7}$$

Esto se debe a que dado un polinomio de tipo finito, su extensión de Aron-Berner resulta w^*-continua. La parte de la isometría se debe a que $\|P\| = \|\overline{P}\|$. Por otro lado, la dualidad $\mathcal{P}(^N X; Y') = \left((\tilde{\otimes}^{N,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right)'$ nos dice que cada $u \in (\tilde{\otimes}^{N,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y$ define una funcional lineal

$$\Lambda_u(P) = \langle u, P \rangle$$

en el espacio $\mathcal{P}_f(^N X; Y')$ de los polinomios de tipo finito y que $\|\Lambda_u\| \leq \|u\|_\pi$. Dado que $\mathcal{P}_f(^N X; Y')$ es subespacio isométrico de $C(B_{X''} \times B_{Y''})$, por el teorema de Hahn-Banach podemos extender Λ_u a una funcional lineal continua en $C(B_{X''} \times B_{Y''})$ preservando la norma. Ahora, por el teorema de representación de Riesz, hay una medida regular de Borel μ_u en $(B_{X''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)$ tal que $\|\mu_u\| \leq \|u\|_\pi$ y

$$\Lambda_u(f) = \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} f(x'', y'') d\mu_u(x'', y'')$$

para $f \in C(B_{X''} \times B_{Y''})$, donde seguimos notando Λ_u a su extensión a $C(B_{X''} \times B_{Y''})$. En particular, considerando $f = \sum_{i=1}^m (x_j')^N \otimes y_j'$, vía la identificación (2.7) obtenemos la fórmula integral (2.6) para polinomios de tipo finito.

Consideremos ahora $P \in \mathcal{P}(^N X; Y')$. Por el Lema 2.1.1, existe una sucesión $\| \cdot \|$-acotada, multi-indexada de polinomios de tipo finito

$$(P_{n_1,\ldots,n_N})_{(n_1,\ldots,n_N) \in \mathbb{N}^N}$$

satisfaciendo la ecuación (2.4). Puesto que ya probamos la fórmula integral para polinomios de tipo finito, tenemos que

$$\langle u, P_{n_1,\ldots,n_N} \rangle = \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} \overline{P_{n_1,\ldots,n_N}}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y''),$$

para todo $(n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{N}^N$. Dado que la sucesión $(P_{n_1,\ldots,n_N})_{(n_1,\ldots,n_N) \in \mathbb{N}^N}$ es $\| \cdot \|$-acotada, podemos aplicar N-veces el teorema de convergencia mayorada de forma de obtener

$$\begin{aligned} \lim_{n_1 \to \infty} \ldots \lim_{n_N \to \infty} \langle u, P_{n_1,\ldots,n_N} \rangle &= \lim_{n_1 \to \infty} \ldots \lim_{n_N \to \infty} \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} \overline{P_{n_1,\ldots,n_N}}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y'') \\ &= \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} \overline{P}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y''). \end{aligned}$$

Sólo resta probar que $\langle u, P \rangle = \lim_{n_1 \to \infty} \ldots \lim_{n_N \to \infty} \langle u, P_{n_1,\ldots,n_N} \rangle$. Esto se deduce del hecho que $\langle \cdot , P \rangle$ y $\lim_{n_1 \to \infty} \ldots \lim_{n_N \to \infty} \langle \cdot , P_{n_1,\ldots,n_N} \rangle$ son funciones lineales continuas en $(\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X) \tilde{\otimes}_\pi Y$ que coinciden en tensores elementales. $\square$

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema de Lindenstrauss para polinomios homogéneos a valores en un espacio dual. Cabe destacar que el caso 2-homogéneo fue demostrado con total generalidad en [20, Teorema 2.1] para el caso a valores escalares y posteriormente en [38, Teorema 2.3] para el caso a valores vectoriales.

Teorema 2.1.3. *Sean X, Y espacios de Banach. Supongamos que X' es separable y tiene la propiedad de aproximación. Luego, el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}(^N X; Y')$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma es denso en $\mathcal{P}(^N X; Y')$.*

Demostración. Dado $Q \in \mathcal{P}(^N X; Y')$ consideremos su funcional lineal continua asociada $L_Q \in \left((\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{N,s} X) \tilde{\otimes}_\pi Y\right)'$, definida en (1.14). Por el teorema de Bishop-Phelps, dado $\varepsilon > 0$ existe una funcional $L = L_P$ que alcanza la norma tal que $\|L_Q - L_P\| < \varepsilon$, donde P es un polinomio en $\mathcal{P}(^N X; Y')$. Dado que $\|L_Q - L_P\| = \|Q - P\|$, el teorema quedará demostrado si vemos que $\overline{P}$ alcanza la norma.

Tomemos $u \in (\tilde{\otimes}^{N,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y$ tal que $\|u\|_\pi = 1$ y $|L_P(u)| = \|L_P\| = \|P\|$. Por el Teorema 2.1.2, existe una medida regular de Borel μ_u en $B_{X''}$ tal que

$$\langle u, P\rangle = \int_{B_{X''}\times B_{Y''}} \overline{P}(x'')(y'')d\mu_u(x'', y'') \quad \text{y} \quad \|\mu_u\| \leq \|u\|_\pi = 1. \tag{2.8}$$

Luego,

$$\|P\| = |L_P(u)| \leq \int_{B_{X''}\times B_{Y''}} |\overline{P}(x'')(y'')|\, d|\mu_u|(x'', y'') \leq \|\overline{P}\|\|\mu_u\| \leq \|P\|$$

y en consecuencia,

$$\|P\| = \int_{B_{X''}\times B_{Y''}} |\overline{P}(x'')(y'')|\, d|\mu_u|(x'', y''). \tag{2.9}$$

Dado que $\|\mu_u\| \leq 1$ y que $|\overline{P}(x'')(y'')| \leq \|P\|$ para todo $(x'', y'') \in B_{X''} \times B_{Y''}$, de la igualdad (2.9) se deduce que $\|\mu_u\| = 1$ y $|\overline{P}(x'')(y'')| = \|P\|$ en casi todo punto (para μ_u). Por lo tanto, $\overline{P}$ alcanza la norma. $\square$

Como consecuencia inmediata, tenemos la versión escalar del resultado anterior.

Corolario 2.1.4. *Sea X un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación. Luego, el conjunto de todos los polinomios en $\mathcal{P}(^N X)$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma es denso en $\mathcal{P}(^N X)$.*

Es sabido [5, 62] que no se verifica con total generalidad un resultado del tipo Bishop-Phelps para polinomios homogéneos; sin embargo, por otra parte, hay una gran cantidad de espacios para los cuales sí se verifica. En consecuencia, resulta natural preguntarse si existen ejemplos de espacios que verifiquen las hipótesis del Teorema 2.1.3, pero que no verifiquen un resultado del tipo Bishop-Phelps. Como vimos en la Sección 1.3, los espacios de Banach con base achicante satisfacen las hipótesis del teorema anterior. Los preduales de espacios de sucesiones de Lorentz son ejemplos de espacios de Banach no reflexivos con base achicante y son los clásicos contraejemplos a resultados del tipo Bishop-Phelps que estudiaremos en el Capítulo 3.

Es preciso notar que las hipótesis del Teorema 2.1.3 sobre los espacios de salida y de llegada, no son hipótesis necesarias para la validez del Lindenstrauss polinomial. En [37, Teorema 2.7] se prueba que si X tiene la propiedad de Radon-Nikodým e Y es cualquier espacio de Banach, entonces el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}(^N X, Y)$ que alcanzan la norma es denso en $\mathcal{P}(^N X, Y)$, para cualquier $N \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, para polinomios homogéneos de ℓ_1 (cuyo dual no es separable) a cualquier espacio Y (no necesariamente un espacio dual) se satisface un resultado del tipo Bishop-Phelps y, en consecuencia, se verifica el Lindenstrauss polinomial.

Para finalizar esta sección, probaremos que podemos extender el teorema de Lindenstrauss para polinomios homogéneos tomando valores en ciertos espacios Z que no sean necesariamente espacios duales. Recordemos que en la Sección 1.4, vimos la definición de espacios de Banach con la propiedad (β) de Lindenstrauss (ver Definición 1.4.2). Esta propiedad extendía, al caso infinito-dimensional, la noción de espacio cuya bola unidad es un poliedro. El espacio c_0 es un ejemplo clásico de espacio que posee la propiedad (β) y que no es un espacio dual.

Siguiendo las ideas de [65, Proposición 3], Choi y Kim probaron [37, Teorema 2.1] que si se verifica el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{P}(^N X)$, entonces se verifica en $\mathcal{P}(^N X; Z)$ para todo espacio Z con propiedad (β). Con una demostración casi idéntica probaremos un resultado análogo para el teorema de Lindenstrauss. Dado que hay espacios con propiedad (β) que no son espacios duales, el Corolario 2.1.4 junto con la siguiente proposición proporcionan nuevos ejemplos de espacios verificando el teorema de Lindenstrauss.

Proposición 2.1.5. *Sea Z un espacio de Banach con propiedad (β). Luego, si se verifica el teorema de Lindenstrauss para $\mathcal{P}(^N X)$ entonces se verifica para $\mathcal{P}(^N X; Z)$.*

Demostración. Consideremos $Q \in \mathcal{P}(^N X; Z)$ y $\varepsilon > 0$. Podemos suponer $\|Q\| = 1$ sin pérdida de generalidad. Dado que Z tiene la propiedad (β), existen $\{(z_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in \Lambda\} \subset Z \times Z'$ y $0 \leq \lambda < 1$ tales que $\|z_\alpha\| = \|g_\alpha\| = g_\alpha(z_\alpha) = 1$,

$$|g_\alpha(z_\beta)| \leq \lambda \ \ (\alpha \neq \beta) \quad \text{y} \quad \|z\| = \sup_{\alpha\in\Lambda} |g_\alpha(z)| \quad \text{para todo } z \in Z.$$

Es fácil ver que $1 = \|Q\| = \sup_\alpha \|g_\alpha \circ Q\|$ y, en consecuencia, se puede tomar α_0 tal que $\|g_{\alpha_0} \circ Q\| \geq 1 - \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{4}$. Por hipótesis existe $p \in \mathcal{P}(^N X)$, con $\|p\| = \|g_{\alpha_0} \circ Q\|$, tal que $\|g_{\alpha_0} \circ Q - p\| < \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{2}$ y $\overline{p}$ alcanza su norma, digamos, en $a'' \in B_{X''}$. Sea $P \in \mathcal{P}(^N X; Z)$ definido por $P(x) = Q(x) + ((1+\varepsilon)p(x) - g_{\alpha_0} \circ Q(x))\, z_{\alpha_0}$ y notemos que

$$\|Q - P\| \leq \varepsilon\|p\| + \|g_{\alpha_0} \circ Q - p\| \leq \varepsilon + \varepsilon(1-\lambda) \leq 2\varepsilon.$$

Falta probar que $\overline{P}$ alcanza la norma. Para ello, probaremos primero que $\|P\| = \|g_{\alpha_0} \circ P\|$. Notemos que $\|P\| = \sup_\alpha \|g_\alpha \circ P\|$ y que dado cualquier α se tiene

$$\begin{aligned} \|g_\alpha \circ P\| &\leq \|g_\alpha \circ Q\| + |g_\alpha(z_{\alpha_0})| \left(\varepsilon\|p\| + \|p - g_{\alpha_0} \circ Q\|\right) \\ &\leq 1 + \lambda\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{2}\right) \leq 1 + \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $g_{\alpha_0} \circ P = (1+\varepsilon)p$ y $\|p\| = \|g_{\alpha_0} \circ Q\| \geq 1 - \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{4}$, tenemos

$$\|g_{\alpha_0} \circ P\| \geq (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{4}\right) \geq 1 + \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{2}$$

que, junto con la desigualdad anterior, nos dice que $\|P\| = \|g_{\alpha_0} \circ P\|$. Notando que $\overline{g_{\alpha_0} \circ P}(x'') = \overline{P}(x'')(g_{\alpha_0})$ y recordando que $\overline{p}$ alcanza la norma en a'', obtenemos

$$\begin{aligned} \|P\| &= \|g_{\alpha_0} \circ P\| = (1+\varepsilon)\|p\| = (1+\varepsilon)|\overline{p}(a'')| \\ &= |\overline{P}(a'')(g_{\alpha_0})| \leq \|\overline{P}(a'')\| \leq \|P\|. \end{aligned}$$

Al ser $\|\overline{P}\| = \|P\|$, tenemos que $\overline{P}$ alcanza la norma, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Como consecuencia del Teorema 2.1.3, el Corolario 2.1.4 y la Proposición 2.1.5 obtenemos lo siguiente.

Teorema 2.1.6. *Sean X un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación y Z un espacio dual o un espacio con propiedad (β). Luego, el conjunto de todos los polinomios en $\mathcal{P}(^N X; Z)$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma es denso en $\mathcal{P}(^N X; Z)$.*

2.2. Caso polinomial no-homogéneo y holomorfo

Recordemos que $\mathcal{P}_k(X;Z)$ denota al espacio de Banach de polinomios continuos de X en Z de grado menor o igual que k y que $\mathcal{A}_u(X;Z)$ es el álgebra de funciones uniformemente continuas en la bola cerrada B_X y holomorfas en la bola abierta B_X°. Los resultados principales de esta sección son los siguientes.

Teorema 2.2.1. *Sean X un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación y Z un espacio dual o un espacio con propiedad (β). Luego, el conjunto de todos los polinomios en $\mathcal{P}_k(X;Z)$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma es denso en $\mathcal{P}_k(X;Z)$.*

Teorema 2.2.2. *Sean X un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación y Z un espacio dual o un espacio con propiedad (β). Luego, el conjunto de todas las funciones en $\mathcal{A}_u(X;Z)$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma es denso en $\mathcal{A}_u(X;Z)$. Más aún, dada $g \in \mathcal{A}_u(X;Z)$ y $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $\overline{P}$ alcanza la norma y $\|g - P\| < \varepsilon$.*

La demostración del Teorema 2.2.1 está basada en una extensión al caso no-homogéneo de la fórmula integral del Teorema 2.1.2 y de la Proposición 2.1.5. Para extender la fórmula integral al caso polinomial no-homogéneo, debemos en primer lugar extender la ya conocida dualidad entre polinomios homogéneos y productos tensoriales. Para ello consideraremos simplemente la suma directa de los productos tensoriales de orden menor o igual a k, con una norma definida apropiadamente, de manera que la dualidad resulte isométrica.

Dualidad para polinomios no homogéneos

Como sabemos, los polinomios en $\mathcal{P}(^jX;Y')$ pueden pensarse como funcionales lineales continuas en $\left((\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right)'$ donde la dualidad isométrica está dada por $P \mapsto L_P = \langle \cdot, P\rangle$. Consideremos

$$G_k := \bigoplus_{j=0}^{k} \left((\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right),$$

donde $\tilde{\otimes}^{0,s}_{\pi_s}X = \mathbb{K}$. Notando que los elementos en G_k son de la forma $u = \sum_{j=0}^k u_j$ con $u_j \in (\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y$, dotemos a este espacio con la norma

$$\|u\|_{G_k} = \sup_{Q \in B_{\mathcal{P}_k(X;Y')}} \left| \sum_{j=0}^{k} \langle u_j, Q_j\rangle \right|,$$

donde Q_j es la parte j-homogénea de Q. Es sencillo verificar que $(G_k, \|\cdot\|_{G_k})$ es un espacio de Banach.

Ahora bien, dado $P \in \mathcal{P}_k(X;Y')$, como consecuencia de las desigualdades de Cauchy (1.2) se tiene $\|P_j\| \leq \|P\|$ para todo $0 \leq j \leq k$. Luego, si $u_j \in (\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y$, resulta

$$\|0 + \cdots + u_j + \cdots + 0\|_{G_k} = \sup_{Q \in B_{\mathcal{P}_k(X;Y')}} |\langle u_j, Q_j\rangle| \leq \sup_{Q \in B_{\mathcal{P}_k(X;Y')}} \|u_j\|_\pi \|Q_j\| \leq \|u_j\|_\pi.$$

Resumiendo, hemos probado lo siguiente.

Observación 2.2.3. *El espacio $\mathcal{P}({}^jX;Y')$ es 1-complementado en $\mathcal{P}_k(X;Y')$. También, $(\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y$ es 1-complementado en G_k.*

El siguiente lema nos muestra que G_k *linealiza* polinomios de grado a lo sumo k.

Lema 2.2.4. *Sean X, Y espacios de Banach y $k \in \mathbb{N}$. La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(X;Y') &\longrightarrow (G_k, \|\cdot\|_{G_k})' \\ P &\longmapsto L_P \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $L_P(u) = \langle u, P\rangle = \sum_{j=0}^k \langle u_j, P_j\rangle$, es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Veamos que es una isometría. Por un lado tenemos,

$$|L_P(u)| = \|P\| \left| \sum_{j=0}^k \langle u_j, \frac{P_j}{\|P\|}\rangle \right| \leq \|P\|\|u\|_{G_k},$$

lo que implica que $L_P \in G_k'$ con $\|L_P\| \leq \|P\|$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$ sean $x_0 \in B_X$, $y_0 \in B_Y$ tales que $|P(x_0)(y_0)| > \|P\| - \varepsilon$ y tomemos

$$u_0 = \sum_{j=0}^k x_0 \otimes \overset{j}{\cdots} \otimes x_0 \otimes y_0.$$

Luego $u_0 \in B_{G_k}$ y $|L_P(u_0)| = |P(x_0)(y_0)| > \|P\| - \varepsilon$, lo cual demuestra la otra desigualdad.

Veamos ahora que la aplicación (2.10) es suryectiva. Dada $L \in G_k'$, sea L_j su restricción a $(\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y$, esto es,

$$\begin{aligned} L_j := L|_{(\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y} &: (\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y \longrightarrow \mathbb{K} \\ L_j(u_j) &= L(0 + \cdots + u_j + \cdots + 0). \end{aligned}$$

Es claro que L_j es lineal y, por la Obsevación 2.2.3, $|L(u_j)| \leq \|L\|\|u_j\|_\pi$ para cada $u_j \in (\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y$. Luego $L_j \in \left((\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s}X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right)'$ y, en consecuencia, existe un polinomio $P_j \in \mathcal{P}({}^jX;Y')$ tal que $L_j = L_{P_j}$. Ahora, tomando $P = P_0 + \cdots + P_k \in \mathcal{P}_k(X;Y')$ se verifica fácilmente que $L = L_P$. □

Recordemos que $\mathcal{P}_{f,k}(X;Y')$ es el subespacio de polinomios de tipo finito de grado menor o igual que k, es decir, aquellos de la forma $P = P_0 + \cdots + P_k$ donde cada P_j es un polinomio j-homogéneo de tipo finito. El siguiente resultado, es la extensión al caso no-homogéneo de la fórmula integral demostrada en el Teorema 2.1.2.

Lema 2.2.5. *Sean X, Y espacios de Banach y supongamos que X' es separable y tiene la propiedad de aproximación. Luego, para cada $u \in G_k$ existe una medida regular de Borel μ_u en $(B_{X''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)$ tal que $\|\mu_u\| \leq \|u\|_{G_k}$ y*

$$\langle u, P\rangle = \int_{B_{X''}\times B_{Y''}} \overline{P}(x'')(y'')d\mu_u(x'', y''), \tag{2.11}$$

para todo $P \in \mathcal{P}_k(X;Y')$.

Demostración. En primer lugar probamos la fórmula para el conjunto $\mathcal{P}_{f,k}(X;Y')$ de polinomios de tipo finito de grado a lo sumo k. Dado $u \in G_k$ se define

$$\begin{aligned} \Lambda_u : \mathcal{P}_{f,k}(X;Y') &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \Lambda_u(P) &= \langle u, P\rangle, \end{aligned}$$

que verifica $\|\Lambda_u\| \leq \|u\|_{G_k}$. Los polinomios de tipo finito pueden verse como un subespacio isométrico de $C(B_{X''} \times B_{Y''})$, con las bolas $B_{X''}$ y $B_{Y''}$ dotadas de la topología w^*, identificando un polinomio $P \in \mathcal{P}_{f,k}(X;Y')$ con la función $(x'', y'') \mapsto \overline{P}(x'')(y'')$. Luego, por el teorema de Hahn-Banach podemos extender Λ_u a una funcional lineal continua en $C(B_{X''} \times B_{Y''})$ preservando la norma. Ahora, por el teorema de representación de Riesz, hay una medida regular de Borel μ_u en $(B_{X''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)$ tal que $\|\mu_u\| \leq \|u\|_{G_k}$ y

$$\Lambda_u(f) = \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} f(x'', y'') d\mu_u(x'', y''),$$

para $f \in C(B_{X''} \times B_{Y''})$; notar que seguimos llamando Λ_u a su extensión a $C(B_{X''} \times B_{Y''})$. En particular, tomando $f = P \in \mathcal{P}_{f,k}(X;Y')$ obtenemos la fórmula integral para polinomios de tipo finito.

Sea ahora $P = P_0 + \cdots + P_k \in \mathcal{P}_k(X;Y')$. Por el Lema 2.1.1, para cada P_j, $0 \leq j \leq k$, existe una sucesión $\|\cdot\|$-acotada, multi-indexada de polinomios de tipo finito $(P_{j,n_1,\ldots,n_j})_{(n_1,\ldots,n_j)\in\mathbb{N}^j}$ tales que

$$\overline{P_j}(x'')(y'') = \lim_{n_1\to\infty} \cdots \lim_{n_j\to\infty} \overline{P_{j,n_1,\ldots,n_j}}(x'')(y'').$$

Fijado $0 \leq j \leq k$ definimos $P_{j,n_1,\ldots,n_k} := P_{j,n_1,\ldots,n_j}$ para todo $n_{j+1}, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $0 \leq j \leq k$, las sucesiones $(P_{j,n_1,\ldots,n_k})_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k}$ están indexadas en el mismo conjunto de índices y verifican:

$$\overline{P_j}(x'')(y'') = \lim_{n_1\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \overline{P_{j,n_1,\ldots,n_k}}(x'')(y'').$$

Ahora, consideremos $P_{n_1,\ldots,n_k} = \sum_{j=0}^k P_{j,n_1,\ldots,n_k} \in \mathcal{P}_{f,k}(X;Y')$. Dado que probamos la fórmula integral para polinomios de tipo finito, resulta

$$\langle u, P_{n_1,\ldots,n_k}\rangle = \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} \overline{P_{n_1,\ldots,n_k}}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y''),$$

para todo $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$. Como la sucesión $(P_{n_1,\ldots,n_k})_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k}$ es acotada, podemos aplicar k-veces el teorema de convergenca mayorada y así obtener

$$\begin{aligned} \lim_{n_1\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \langle u, P_{n_1,\ldots,n_k}\rangle &= \lim_{n_1\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} \overline{P_{n_1,\ldots,n_k}}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y'') \\ &= \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} \overline{P}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y''). \end{aligned}$$

Sólo falta ver que $\langle u, P\rangle = \lim_{n_1\to\infty} \ldots \lim_{n_k\to\infty} \langle u, P_{n_1,\ldots,n_k}\rangle$. Notar que, para cada $0 \leq j \leq k$, tanto $\langle \cdot\,, P_j\rangle$ como $\lim_{n_1\to\infty} \ldots \lim_{n_k\to\infty} \langle \cdot\,, P_{j,n_1,\ldots,n_k}\rangle$ son funciones lineales continuas en $(\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y$ que coinciden en tensores elementales. Esto demuestra que $\langle u, P_j\rangle = \lim_{n_1\to\infty} \ldots \lim_{n_k\to\infty} \langle u, P_{j,n_1,\ldots,n_k}\rangle$. Dado que $P = \sum_{j=0}^k P_j$ y $P_{n_1,\ldots,n_k} = \sum_{j=0}^k P_{j,n_1,\ldots,n_k}$ se deduce lo que se quería probar. $\square$

El siguiente lema es la versión no-homogénea y holomorfa de la Proposición 2.1.5. Omitimos su demostración, que es completamente análoga a la del ya mencionado resultado.

Lema 2.2.6. *Sea Z un espacio de Banach con propiedad (β). Luego, si se verifica el teorema de Lindenstrauss para $\mathcal{P}_k(X)$ (respectivamente $\mathcal{A}_u(X)$) entonces se verifica para $\mathcal{P}_k(X;Z)$ (respectivamente $\mathcal{A}_u(X;Z)$).*

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar los teoremas de tipo Lindenstrauss enunciados al comienzo de la sección.

Demostración de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2. Supongamos primero que Z es un espacio dual, digamos $Z = Y'$, y probemos el resultado para el caso polinomial no-homogéneo. Dado $Q \in \mathcal{P}_k(X;Y')$ consideremos su funcional lineal asociada $L_Q \in G_k'$, definida como en el Lema 2.2.4. El teorema de Bishop-Phelps nos dice que, dado $\varepsilon > 0$, existe una funcional que alcanza la norma $L = L_P \in G_k'$ tal que $\|L_Q - L_P\| < \varepsilon$, donde P es un polinomio en $\mathcal{P}_k(X;Y')$. Dado que $\|L_Q - L_P\| = \|Q - P\|$, basta probar que $\overline{P}$ alcanza la norma.

Tomemos $u \in G_k$ tal que $\|u\|_{G_k} = 1$ y $|L_P(u)| = \|L_P\| = \|P\|$, y sea μ_u la medida regular de Borel en $B_{X''} \times B_{Y''}$ dada por el Lema 2.2.5. Luego,

$$\|P\| = |L_P(u)| \leq \int_{B_{X''} \times B_{Y''}} |\overline{P}(x'')(y'')| \, d|\mu_u|(x'', y'') \leq \|\overline{P}\| \|\mu_u\| \leq \|P\|.$$

En consecuencia $|\overline{P}(x'')(y'')| = \|P\|$ en casi todo punto (para μ_u), lo que nos dice que $\overline{P}$ alcanza la norma. En particular, obtenemos el caso a valores escalares.

Ahora, el Lema 2.2.6 junto con el caso a valores escalares demuestran el resultado cuando consideramos Z un espacio con propiedad (β).

Por último, puesto que las funciones en $\mathcal{A}_u(X;Z)$ son límite uniforme de polinomios (ver Observación 1.1.3) y dado que, por lo visto, cada uno de ellos se aproxima por polinomios cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma, obtenemos el teorema de Lindenstrauss para el espacio $\mathcal{A}_u(X;Z)$. $\square$

2.3. Caso multilineal simétrico

En esta sección, extendemos los resultados del tipo Lindenstrauss probados anteriormente para la clase de operadores multilineales simétricos. Recordar que, dados X, Y espacios de Banach, $\mathcal{L}_s(^N X; Y)$ denota el espacio de operadores multilineales simétricos de $X \times \cdots \times X$ en Y. Nuestro resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.3.1. *Sean X un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación y Z un espacio dual o un espacio con la propiedad (β). Luego, todo operador multilineal simétrico en $\mathcal{L}_s(^N X; Z)$ puede aproximarse por operadores multilineales simétricos cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma en la misma N-upla.*

La demostración de este resultado se basa en dos lemas auxiliares. En el primero, probamos una fórmula integral para operadores multilineales (no necesariamente simétricos) análoga a las del Teorema 2.1.2 y el Lema 2.2.5. El segundo lema es la versión multilineal simétrica de la Proposición 2.1.5.

En lo que sigue, dados $X_1, \dots, X_N$ espacios de Banach, notamos $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ al espacio producto y $\mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y)$ al espacio de operadores N-lineales continuos de $X_1 \times \cdots \times X_N$ en Y.

Lema 2.3.2. *Sea $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ una N-upla de espacios de Banach, cada uno de los cuales tiene dual separable y con propiedad de aproximación, y sea Y un espacio de Banach. Luego, para cada $u \in (\tilde{\otimes}_{\pi,j=1}^N X_j)\tilde{\otimes}_\pi Y$, existe una medida regular de Borel μ_u en $(B_{X_1''}, w^*) \times \cdots \times (B_{X_N''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)$ tal que $\|\mu_u\| \leq \|u\|_\pi$ y*

$$\langle u, \Psi \rangle = \int_{B_{X_1''} \times \cdots \times B_{X_N''} \times B_{Y''}} \overline{\Psi}(x_1'', \dots, x_N'')(y'') d\mu_u(x_1'', \dots, x_N'', y''), \tag{2.12}$$

para todo $\Psi \in \mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y')$, donde $\overline{\Psi}$ es cualquiera de las $N!$ extensiones de Arens de Ψ.

Demostración. Dado que para cada $j = 1, \dots, N$, el espacio X_j tiene dual separable con propiedad de aproximación, la Proposición 1.3.4 nos dice que existe $(T_n^j)_n$ una sucesión de operadores de rango finito verificando (2.5) para X_j.

Ahora, dado $\Psi \in \mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y')$, para cada $(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$ definimos el operador multilineal de tipo finito

$$\Psi_{n_1,\dots,n_N} = \Psi \circ (T_{n_1}^1, \dots, T_{n_N}^N)$$

y, razonando como en el Lema 2.1.1, vemos que la extensión canónica de Arens de Ψ está dada por

$$\overline{\Psi}(x_1'', \dots, x_N'')(y'') = \lim_{n_1 \to \infty} \cdots \lim_{n_N \to \infty} \overline{\Psi_{n_1,\dots,n_N}}(x_1'', \dots, x_N'')(y''). \tag{2.13}$$

Teniendo en cuenta la dualidad $\mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y') = \Big((\tilde{\otimes}_{\pi,j=1}^N X_j)\tilde{\otimes}_\pi Y\Big)'$ definida en (1.9), cada $u \in (\tilde{\otimes}_{\pi,j=1}^N X_j)\tilde{\otimes}_\pi Y$ define la funcional lineal

$$\begin{aligned} \Lambda_u : \mathcal{L}_f(^N\mathbf{X}; Y') &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \Lambda_u(\Psi) &= \langle u, \Psi \rangle, \end{aligned}$$

que verifica $\|\Lambda_u\| \leq \|u\|_\pi$. Puesto que $\mathcal{L}_f(^N\mathbf{X}; Y')$ es subespacio isométrico de $C\big((B_{X_1''}, w^*) \times \cdots \times (B_{X_N''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)\big)$, por el teorema de Hahn-Banach podemos extender esta funcional a $C\big((B_{X_1''}, w^*) \times \cdots \times (B_{X_N''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)\big)$ y aplicando el teorema de representación de Riesz obtenemos una medida μ tal que $\|\mu\| \leq \|u\|_\pi$ y verifica (2.12) para operadores multilineales de tipo finito. Notar que μ no depende de cuál sea la extensión de Arens que se considere, pues los operadores multilineales de tipo finito tienen una única extensión. Luego, podemos usar (2.13), el teorema de convergencia mayorada y la densidad de combinaciones lineales de tensores elementales para mostrar que (2.12) se verifica para todo operador multilineal.

Notar que, cambiando el orden de los límites iterados en (2.13), obtenemos las $N!$ extensiones de Arens de Ψ. Luego, razonando de la misma manera obtenemos (2.12) para cualquiera de estas extensiones. □

En el siguiente lema, cabe aclarar que cuando nos referimos al teorema de Lindenstrauss para operadores multilineales simétricos, esto significa que los operadores multilineales simétricos cuyas $N!$ extensiones de Arens alcanzan la norma en la misma N-upla, son densos en todo el espacio de operadores multilineales simétricos. Omitimos la demostración del lema, que es completamente análoga a la de la Proposición 2.1.5.

Lema 2.3.3. *Sea Z un espacio de Banach con propiedad (β). Luego, si se verifica el teorema de Lindenstrauss para $\mathcal{L}_s(^N X)$, entonces se verifica para $\mathcal{L}_s(^N X; Z)$.*

Ahora sí, estamos en condiciones de probar nuestro resultado del tipo Lindenstrauss multilineal. En lo que sigue, vamos a considerar el producto tensorial simétrico $\otimes^{N,s} X$ dotado con la norma proyectiva π que hereda como subespacio de $\tilde{\otimes}_\pi^N X$, es decir, la norma π restringida a $\tilde{\otimes}^{N,s} X$. Recordemos que con esta norma (ver (1.15)), tenemos la dualidad isométrica

$$\mathcal{L}_s(^N X; Y') = \left((\tilde{\otimes}_\pi^{N,s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right)'$$

entre operadores multilineales simétricos y tensores simétricos.

Demostración del Teorema 2.3.1. Supongamos primero que Z es un espacio dual, digamos $Z = Y'$. Tomemos $\Phi \in \mathcal{L}_s(^N X; Y')$ y $\varepsilon > 0$, y consideremos la funcional lineal asociada $L_\Phi \in \left((\tilde{\otimes}_\pi^{N,s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y\right)'$ dada en (1.16). Por el teorema de Bishop-Phelps, existe una funcional $L = L_\Psi$ para algún $\Psi \in \mathcal{L}_s(^N X; Y')$, que alcanza la norma y tal que $\|\Phi - \Psi\| = \|L_\Phi - L_\Psi\| < \varepsilon$. Sea $u \in (\tilde{\otimes}_\pi^{N,s} X)\tilde{\otimes}_\pi Y$ con $\|u\|_\pi = 1$ tal que $|L_\Psi(u)| = \|L_\Psi\| = \|\Psi\|$. Por el Lema 2.3.2, existe una medida regular de Borel μ_u satisfaciendo (2.12) y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|\Psi\| &= |L_\Psi(u)| \le \int_{B_{X''}\times\cdots\times B_{X''}\times B_{Y''}} |\overline{\Psi}(x_1'', \dots, x_N'')(y'')| d|\mu_u|(x_1'', \dots, x_N'', y'') \\ &\le \|\overline{\Psi}\|\|\mu_u\| \le \|\Psi\|. \end{aligned}$$

Luego, $|\overline{\Psi}(x_1'', \dots, x_N'')(y'')| = \|\Psi\|$ en casi todo punto (para μ_u) y entonces $\overline{\Psi}$ alcanza su norma. Notando que (2.12) se verifica para todas las extensiones de Arens de Ψ, resulta que cualquiera de ellas alcanza su norma en casi todo punto (para μ). En particular, existe una N-upla en la cual todas las extensiones de Arens de Ψ alcanzan la norma simultáneamente.

Lo que acabamos de probar, implica el teorema de Lindenstrauss en el caso a valores escalares. Luego, el Lema 2.3.3 nos da el resultado para Z con propiedad (β). □

Capítulo 3

Contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps

En este capítulo mostraremos ejemplos de espacios para los cuales no se verifica el teorema de Bishop-Phelps, pero sí se aplican los resultados del tipo Lindenstrauss del capítulo anterior. Para ello trabajaremos fundamentalmente con preduales de espacios de sucesiones de Lorentz, que son los clásicos contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps en los casos multilineal y polinomial homogéneo a valores escalares. En la Sección 3.1 definiremos estos espacios y veremos algunas propiedades de los mismos, que resultan fundamentales a la hora de exhibir los contraejemplos. En la Sección 3.2 mostraremos los mencionados contraejemplos y en la Sección 3.3 veremos que los preduales de Lorentz también sirven como contraejemplos a versiones cuantitativas (del tipo Bollobás) del teorema de Lindenstrauss.

3.1. Preduales de Lorentz

Los preduales de espacios de sucesiones de Lorentz aparecen relacionados con el estudio de la densidad de funciones que alcanzan la norma como una herramienta útil a la hora de mostrar contraejemplos a los teoremas del tipo Bishop-Phelps. Gowers, en [53], fue el primero en considerar uno de estos preduales para mostrar que los espacios ℓ_p $(1 < p < \infty)$ no tienen la propiedad B de Lindenstrauss (ver Sección 1.4). Más tarde, el mismo espacio se utilizó en [5] para mostrar que no se verifica el teorema de Bishop-Phelps para formas bilineales y polinomios 2-homogéneos a valores escalares. En [62], se caracterizaron aquellos preduales de espacios de sucesiones de Lorentz en los cuales se verifica el teorema de Bishop-Phelps para formas multilineales y polinomios N-homogéneos a valores escalares.

Veamos la definición y algunas propiedades elementales de estos espacios (ver [66, Sección 4.e] para una exposición detallada de este tema). Sea $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números reales no negativos con $w_1 = 1$, $\lim w_i = 0$ y $\sum_i w_i = \infty$. Tales sucesiones se llaman *admisibles*. Si fijamos $1 \leq s < \infty$, el espacio de sucesiones de Lorentz $d(w, s)$ asociado a la sucesión admisible $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es el espacio vectorial de todas las sucesiones acotadas $x = (x(i))_i$ tales que

$$\|x\|_{w,s} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^*(i)^s w_i\right)^{1/s} < \infty,$$

donde $x^* = (x^*(i))_i$ es el reordenamiento decreciente de $(x(i))_i$. Se verifica que $d(w,s)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{w,s}$ y que es reflexivo si y solo si $1 < s < \infty$.

Para $s = 1$, es decir, el caso no reflexivo, el espacio dual de $d(w,1)$ se denota $d^*(w,1)$ y consiste de todas las sucesiones x tales que

$$\|x\|_W := \sup_n \frac{\sum_{i=1}^n x^*(i)}{W(n)} < \infty, \tag{3.1}$$

donde $W(n) = \sum_{i=1}^n w_i$. El predual del espacio de Lorentz $d(w,1)$, denotado por $d_*(w,1)$, es el subespacio de $d^*(w,1)$ de todas las sucesiones x que satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n x^*(i)}{W(n)} = 0. \tag{3.2}$$

Sea X cualquiera de los espacios $d_*(w,1), d(w,1), d^*(w,1)$. La condición $w_1 = 1$ es equivalente a pedir que $\|e_i\| = 1$ para todo i in $\mathbb{N}$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico de X. Para cualquier sucesión admisible w, X está contenido en c_0 como conjunto y en consecuencia, para cada elemento $x \in X$ existe una aplicación inyectiva $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que x^* es de la forma $x^* = (|x(\sigma(i))|)_i$.

Si $w \in \ell_r$ para $1 < r < \infty$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*} = 1$, una aplicación directa de la desigualdad de Hölder nos muestra que la inclusión canónica $\ell_{r^*} \hookrightarrow d(w,1)$ es un operador acotado. Luego, transponiendo y restringiendo obtenemos que los operadores naturales

$$d^*(w,1) \hookrightarrow \ell_r \quad \text{y} \quad d_*(w,1) \hookrightarrow \ell_r \tag{3.3}$$

también son acotados. La geometría de la bola unidad de $d_*(w,1)$, más específicamente la *ausencia de puntos extremales*, juega un papel crucial en la caracterización de aquellos espacios $d_*(w,1)$ para los cuales se verifica el Bishop-Phelps multilineal y polinomial homogéneo [62, Teorema 2.6 y Teorema 3.2], y será igual de importante en los resultados que probaremos en las siguientes secciones. La propiedad fundamental de estos preduales (ver, por ejemplo, [62, Lemma 2.2]) es que dado $x \in B_{d_*(w,1)}$, se satisface lo siguiente:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\text{ y }\; \delta > 0 \;\text{ tales que }\; \|x + \lambda e_n\| \leq 1,\ \forall\, |\lambda| \leq \delta \text{ y } \; n \geq n_0. \tag{\textbf{APE}}$$

Notar que esta misma propiedad la poseen los elementos de la bola unidad de c_0, aunque en este último caso, no se verifica la inclusión (3.3) que también será de importancia a la hora de construir los contraejemplos.

Por último, destacamos que los preduales de espacios de sucesiones de Lorentz tienen base achicante y en consecuencia tienen dual separable y con propiedad de aproximación. Luego, en vistas de los resultados obtenidos en el Capítulo 2, el teorema de Lindenstrauss se satisface en $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); Z)$, $\mathcal{P}_k(d_*(w,1); Z)$, $\mathcal{A}_u(d_*(w,1); Z)$ y $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); Z)$ para cualquier Z espacio dual o con la propiedad (β).

3.2. Contraejemplos

En esta sección mostramos los contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps polinomial, holomorfo y multilineal simétrico, que extienden aquellos estudiados en [5, 62]. Obtenemos de esta manera, ejemplos de espacios en los cuales se verifican los teoremas de Lindenstrauss probados en el capítulo anterior, pero no se satisfacen los respectivos teoremas de Bishop-Phelps. En la Sección 3.2.1 nos centramos en el caso polinomial homogéneo y desarrollamos las ideas que serán la base de los contraejemplos de todo el capítulo. El resultado principal de esta parte será la Proposición 3.2.5. También resulta de interés en sí misma la Proposición 3.2.4, donde mostramos que el teorema de Bishop-Phelps se verifica para funciones a valores escalares si y sólo si se verifica para funciones a valores en un espacio con la propiedad (β). En la Sección 3.2.2 mostramos los contraejemplos en el caso polinomial no-homogéneo. Los resultados principales de esta sección son la Proposición 3.2.9 y la Proposición 3.2.10. En la Sección 3.2.3 abordamos el caso holomorfo. Dejando de lado los preduales de Lorentz y recurriendo al clásico contraejemplo de Lindenstrauss al Bishop-Phelps para operadores lineales, mostramos en la Proposición 3.2.12 que no se verifica el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u$ en el caso a valores vectoriales. Finalmente, en la Sección 3.2.4 volvemos sobre los preduales de Lorentz y mostramos los contraejemplos en el caso multilineal simétrico. Los mismos, se enuncian en la Proposición 3.2.14.

3.2.1. Caso polinomial homogéneo

El siguiente resultado [62, Teorema 3.2], caracteriza, en términos de la sucesión admisible, aquellos preduales de Lorentz para los cuales se verifica el Bishop-Phelps polinomial homogéneo a valores escalares. En particular nos muestra que existe un espacio de Banach verificando el teorema de Lindenstrauss polinomial N-homogéneo a valores escalares, que no verifica el teorema de Bishop-Phelps, para todo $N \geq 2$; en efecto, basta considerar $w \in \ell_2$. Recordar que aquí, y en lo que sigue, el prefijo NA indica el conjunto de funciones que alcanzan la norma. Además, denotamos $\mathcal{L}_{wsc}$ y $\mathcal{P}_{wsc}$ a las clases de multilineales y polinomios *débil secuencialmente continuos*. Recordemos que un operador multilineal $\Phi \in \mathcal{L}(^N X_1 \times \cdots \times X_N; Y)$ es débil secuencialmente continuo si dadas $(x_n^i)_n \subseteq X_i$ $(1 \leq i \leq N)$ sucesiones tales que $x_n^i \xrightarrow[n\to\infty]{w} x^i$ (esto es, $\varphi(x_n^i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x^i)$ para toda $\varphi \in X_i'$), se tiene $\Phi(x_n^1, \ldots, x_n^N) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \Phi(x^1, \ldots, x^N)$. Por otra parte, un polinomio $P \in \mathcal{P}(X; Y)$ es débil secuencialmente continuo si dada una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$, se tiene $P(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} P(x)$.

Teorema 3.2.1. *Dada una sucesión admisible w y $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, son equivalentes:*

(i) $NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ *es denso en* $\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$.

(ii) $w \notin \ell_N$.

(iii) $\mathcal{P}(^N d_*(w,1)) = \mathcal{P}_{wsc}(^N d_*(w,1))$.

Nuestro próximo objetivo será extender estos contraejemplos al caso vectorial, cuando los polinomios homogéneos toman valores en un espacio dual o con la propiedad (β). Para ello, necesitaremos tres resultados auxiliares que enunciamos a continuación. Los primeros dos se encuentran, esencialmente, en [62, Lema 3.1 y Teorema 3.2]. El tercero nos da la recíproca de [37, Teorema 2.1]. Recordemos que un *espacio de Banach de sucesiones* es un subespacio normado completo de la familia de todas las sucesiones $(\lambda_n)_n$ con $\lambda_n \in \mathbb{K}$.

Lema 3.2.2. *En el caso complejo, sea X un espacio de Banach de sucesiones e Y estrictamente convexo. Si $P \in \mathcal{P}(^N X; Y)$ alcanza su norma en un elemento que satisface la condición (**APE**) para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $P(e_n) = 0$, para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Sea $a \in B_{d_*(w,1)}$ tal que $\|P(a)\| = \|P\|$ y sean $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ tales que $\|a + \lambda e_n\| \leq 1$ para todo $|\lambda| \leq \delta$ y todo $n \geq n_0$. Fijemos $n \geq n_0$ y consideremos la función holomorfa

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow Y \\ \lambda &\mapsto P(a + \lambda e_n). \end{aligned}$$

Dado que g alcanza un máximo local en $\lambda = 0$, el principio del módulo máximo (aquí necesitamos que Y sea estrictamente convexo y que los espacios sean complejos) nos dice que g es constante. Pero entonces, si Ψ es la multilineal simétrica asociada a P, resulta

$$\begin{aligned} P(a) &= P(a + \lambda e_n) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \Psi(a, \overset{N-i}{\ldots}, a, \lambda e_n, \overset{i}{\ldots}, \lambda e_n) \\ &= P(a) + \sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \Psi(a, \overset{N-i}{\ldots}, a, \lambda e_n, \overset{i}{\ldots}, \lambda e_n) + \lambda^N P(e_n) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, de donde se deduce que $P(e_n) = 0$. □

Como ya mencionamos, todo elemento a en la bola unidad de $d_*(w, 1)$ satisface la condición (**APE**). Luego, el lema anterior se aplica a cada polinomio, definido en $d_*(w, 1)$ y a valores en un espacio estrictamente convexo, que alcance la norma. La demostración del siguiente resultado la extraemos de [62, Teorema 3.2].

Lema 3.2.3. *Para el caso real, sea w una sucesión admisible en ℓ_N, $N \geq 2$, y consideremos M el menor número natural tal que $w \in \ell_M$. Supongamos que $p \in \mathcal{P}(^N d_*(w, 1))$ alcanza su norma en $a \in B_{d_*(w,1)}$ y sea ψ la forma N-lineal simétrica asociada a p.*

(i) *Si* $p(a) > 0$ *entonces* $\limsup_n \psi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \leq 0$.

(ii) *Si* $p(a) < 0$ *entonces* $\liminf_n \psi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \geq 0$.

Demostración. Sean $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que $\|a + \lambda e_n\| \leq 1$ para todo $|\lambda| \leq \delta$ y todo $n \geq n_0$. En primer lugar supongamos que $p(a) > 0$. Por un lado tenemos

$$p(a + \lambda e_n) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \psi(a, \overset{N-i}{\ldots}, a, \lambda e_n, \overset{i}{\ldots}, \lambda e_n) \leq p(a) \tag{3.4}$$

para todo $n \geq n_0$ y todo $|\lambda| \leq \delta$. Por otro lado, [62, Proposición 2.4] nos dice que toda forma k-lineal continua en $d_*(w, 1) \times \cdots \times d_*(w, 1)$ es débil secuencialmente continua si $k < M$. Dado que $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$, resulta

$$\psi(a, \overset{N-k}{\ldots}, a, e_n, \overset{k}{\ldots}, e_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{para todo } k < M$$

y, en consecuencia, haciendo $n \to \infty$ y dividiendo por λ^M en (3.4), obtenemos

$$\limsup_n \left(\sum_{i=M}^{N} \binom{N}{i} \lambda^{i-M} \psi(a, \overset{N-i}{\ldots}, a, e_n, \overset{i}{\ldots}, e_n) \right) \leq 0$$

para todo $0 < \lambda \leq \delta$. De aquí se deduce fácilmente que

$$\limsup_n \psi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \leq 0,$$

que es lo que se quería probar.

En el caso $p(a) < 0$, el resultado se obtiene aplicando el argumento anterior a $-p$. $\square$

El último de los resultados auxiliares, aunque enunciado en esta sección, en el marco de polinomios homogéneos, sigue siendo válido para los espacios de polinomios no-homogéneos, funciones holomorfas en $\mathcal{A}_u$ y operadores multilineales simétricos, y será también de utilidad en las Secciones 3.2.2 y 3.2.4. Este resultado nos muestra que vale la recíproca de [37, Teorema 2.1], donde se prueba que si se verifica el teorema de Bishop-Phelps para funciones (polinomios, funciones holomorfas, operadores multilineales simétricos) a valores escalares, entonces también se verifica para funciones a valores en un espacio con propiedad (β).

Proposición 3.2.4. *Sea X un espacio de Banach. El teorema de Bishop-Phelps se verifica en $\mathcal{P}(^N X)$ si y sólo si se verifica en $\mathcal{P}(^N X; Z)$ para todo (o algún) espacio de Banach Z con la propiedad (β).*

El mismo resultado sigue siendo válido, si en lugar de polinomios homogéneos consideramos funciones en $\mathcal{P}_k(X)$, $\mathcal{A}_u(X)$ ó $\mathcal{L}_s(^N X)$.

Demostración. Probaremos el caso polinomial homogéneo, siendo los otros completamente análogos. En virtud de [37, Teorema 2.1], sólo debemos probar una de las implicaciones. Sean $\{(z_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in \Lambda\} \subset Z \times Z'$ y $0 \leq \lambda < 1$ satisfaciendo la definición de propiedad (β), $\lambda < \lambda_0 < 1$ y $\varepsilon < \lambda_0 - \lambda$. Consideremos $q \in \mathcal{P}(^N X)$ con $\|q\| = 1$ y veamos que puede ser aproximado por polinomios que alcanzan la norma. Fijado cualquier $\alpha_0 \in \Lambda$, tomemos

$$Q(x) = q(x) z_{\alpha_0} \in \mathcal{P}(^N X; Z).$$

Por hipótesis, existe $P \in \mathcal{P}(^N X; Z)$ con $\|P\| = 1$, que alcanza su norma en algún $a \in B_X$ y tal que $\|Q - P\| < \varepsilon$. Luego, $\|g_\alpha \circ Q - g_\alpha \circ P\| < \varepsilon$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y en consecuencia

$$\|g_\alpha \circ P\| \leq \varepsilon + \|g_\alpha \circ Q\| \leq \varepsilon + \lambda < \lambda_0 \quad \text{para todo } \alpha \neq \alpha_0. \tag{3.5}$$

Dado que

$$1 = \|P(a)\| = \sup_{\alpha \in \Lambda} |g_\alpha(P(a))|,$$

se sigue de (3.5) que $|g_{\alpha_0} \circ P(a)| = \|g_{\alpha_0} \circ P\| = 1$. Por lo tanto, $g_{\alpha_0} \circ P$ alcanza la norma y $\|q - g_{\alpha_0} \circ P\| < \varepsilon$, lo cual demuestra el resultado. $\square$

Ahora sí, probemos los ya mencionados contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps para polinomios homogéneos. Por completitud, incluimos los contraejemplos a valores escalares demostrados en [62, Teorema 3.2].

Proposición 3.2.5. *Sea w una sucesión admisible en ℓ_r para algún $1 < r < \infty$ y sea Z un espacio con propiedad (β).*

(i) $NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ *no es denso en* $\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ *si* $N \geq r$.

(ii) $NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1); Z)$ *no es denso en* $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); Z)$ *si* $N \geq r$.

(iii) *En el caso complejo,* $NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1); \ell_s)$ *no es denso en* $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); \ell_s)$ *para todo* $N \in \mathbb{N}$ *y todo* $s \geq r$.

En el caso real, si M es el menor número natural tal que $w \in \ell_M$ entonces $NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1); \ell_M)$ no es denso en $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); \ell_M)$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Además, en todos los casos anteriores se verifica el teorema de Lindenstrauss.

Demostración. (i) *En el caso complejo*, consideremos el polinomio $q \in \mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ dado por

$$q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)^N,$$

el cual está bien definido en virtud de (3.3). Dado que $|q(e_n)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos del Lema 3.2.2 que $\|p - q\| \geq 1$ para todo $p \in NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$. Luego q no puede ser aproximado por polinomios que alcanzan la norma y esto prueba (i) (caso complejo).

En el caso real, consideremos M el menor número natural tal que $w \in \ell_M$ y definamos

$$q(x) = x(1)^{N-M} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x(i)^M$$

que, nuevamente por (3.3), resulta un polinomio en $\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$. Si ϕ es la multilineal simétrica asociada a q, se verifica fácilmente que

$$\binom{N}{M} \phi(x, \ldots, x, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) = (-1)^n x(1)^{N-M}$$

para todo $x \in d_*(w,1)$ y todo $n \geq 2$. En consecuencia,

$$\binom{N}{M} \limsup_n \phi(x, \ldots, x, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) = |x(1)|^{N-M} = -\binom{N}{M} \liminf_n \phi(x, \ldots, x, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n).$$

Supongamos que q puede ser aproximado por polinomios que alcanzan la norma. Dado $\varepsilon > 0$, sea $p \in NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ tal que $\|p - q\| < \varepsilon \frac{N!}{N^N}$, de forma que si ψ es la multilineal simétrica asociada a p, por (1.1) se verifique $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$. Sea $a \in B_{d_*(w,1)}$ tal que $\|p\| = |p(a)|$. Por el Lema 3.2.3, si $p(a) > 0$ resulta

$$\begin{aligned} \binom{N}{M}^{-1} |a(1)|^{N-M} &= \limsup_n \phi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \\ &\leq \limsup_n \psi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) + \varepsilon \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

mientras que si $p(a) < 0$

$$\begin{aligned} -\binom{N}{M}^{-1} |a(1)|^{N-M} &= \liminf_n \phi(a,\dots,a,e_n,\overset{M}{\dots},e_n) \\ &\geq \liminf_n \psi(a,\dots,a,e_n,\overset{M}{\dots},e_n) - \varepsilon \geq -\varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, en cualquier caso, se tiene $|a(1)|^{N-M} \leq \binom{N}{M}\varepsilon$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \|q\| \leq \|p\| + \varepsilon\frac{N!}{N^N} &= |p(a)| + \varepsilon\frac{N!}{N^N} \\ &\leq |q(a)| + 2\varepsilon\frac{N!}{N^N} \\ &\leq |a(1)|^{N-M} \sum_{i=1}^{\infty} |a(i)|^M + 2\varepsilon \\ &\leq \varepsilon\left(\binom{N}{M}\sum_{i=1}^{\infty} w_i^M + 2\right). \end{aligned}$$

Puesto que esta desigualdad se verifica para calquier $\varepsilon > 0$, se obtiene $\|q\| = 0$, que es la contradicción deseada.

(ii) Se deduce de (i) y la Proposición 3.2.4.

(iii) *El caso complejo*. Fijemos $N \in \mathbb{N}$ y $s \geq r$. Dado que $w \in \ell_r$ y $\ell_r \hookrightarrow \ell_s$ consideremos $Q\colon d_*(w,1) \longrightarrow \ell_s$ dado por $Q(x) = (x(i)^N)_i$, que en virtud de (3.3), es un polinomio continuo N-homogéneo. Puesto que $\|Q(e_n)\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el Lema 3.2.2 nos dice que $\|P - Q\| \geq 1$ para todo $P \in NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1);\ell_s)$ y en consecuencia Q no puede ser aproximado por polinomos que alcanzan la norma.

El caso real. Consideramos $Q\colon d_*(w,1) \longrightarrow \ell_M$ el polinomio continuo definido por $Q(x) = (x(1)^{N-1}x(i))_i$. Supongamos que Q se aproxima por polinomios que alcanzan la norma y fijemos $\varepsilon > 0$. Los polinomios M-homogéneos de norma uno (en ℓ_M) son uniformemente equicontinuos. Entonces, podemos tomar $P \in NA\mathcal{P}(^N d_*(w,1);\ell_M)$ suficientemente cerca de Q tal que

$$\|q \circ Q - q \circ P\| < \varepsilon\,\tfrac{(NM)!}{(NM)^{NM}} \tag{3.6}$$

para todo polinomio $q \in \mathcal{P}(^M \ell_M)$ de norma uno.

Sea $a \in B_{d_*(w,1)}$ tal que $\|P(a)\| = \|P\|$ y consideremos el polinomio M-homogéneo de norma uno $q_{P,a}\colon \ell_M \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$q_{P,a}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^M\, x(i)^M,$$

donde $\lambda_i = 1$ si $P(a)(i) \geq 0$ y $\lambda_i = -1$ en otro caso. Notar que $q_{P,a} \circ P\colon d_*(w,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio NM-homogéneo que alcanza su norma en a, con $q_{P,a} \circ P(a) = \|P\|^M$. Además,

$$q_{P,a} \circ Q(x) = x(1)^{M(N-1)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^M\, x(i)^M \quad \text{para todo} \quad x \in d_*(w,1),$$

y en consecuencia $\|q_{P,a} \circ Q\| = \|Q\|^M$. Ahora, sean ψ y ϕ las formas NM-lineales simétricas asociadas a $q_{P,a} \circ P$ y $q_{P,a} \circ Q$, respectivamente, y notemos que por (3.6), se tiene $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$. Dado que $q_{P,a} \circ P(a) > 0$, el Lema 3.2.3 nos dice que

$$\limsup_n \psi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \leq 0. \tag{3.7}$$

Por otro lado,

$$\tbinom{NM}{M}\phi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) = \lambda_n^M a(1)^{M(N-1)}. \tag{3.8}$$

Supongamos que M es par. Puesto que $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$, combinando (3.7) y (3.8) obtenemos

$$|a(1)|^{M(N-1)} = \tbinom{NM}{M} \lim_n \phi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \leq \tbinom{NM}{M}\varepsilon. \tag{3.9}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|Q\|^M = \|q_{P,a} \circ Q\| &\leq \|q_{P,a} \circ P\| + \varepsilon \, \tfrac{(NM)!}{(NM)^{NM}} \\ &< |q_{P,a} \circ Q(a)| + 2\varepsilon \, \tfrac{(NM)!}{(NM)^{NM}} \\ &\leq |a(1)|^{M(N-1)} \sum_{i=1}^{\infty} |a(i)|^M + 2\varepsilon \\ &\leq \varepsilon\Big(\tbinom{NM}{M} \sum_{i=1}^{\infty} w_i^M + 2\Big). \end{aligned}$$

Dado que esta última desigualdad se verifica para todo $\varepsilon > 0$, obtenemos $\|Q\| = 0$, que es una contradicción. Esto demuestra el caso real cuando M es par.

Supongamos ahora que M es impar. Veremos la demostración para el caso en que N es par, siendo el otro caso análogo. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a(1) \geq 0$. Notar que $q_{P,a} \circ P$ también alcanza la norma en $-a$ y $q_{P,a} \circ P(-a) = \|P\|^M$. Por el Lema 3.2.3,

$$\limsup_n \psi(-a, \ldots, -a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \leq 0.$$

Luego $\liminf_n \psi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \geq 0$ y en consecuencia, por (3.7),

$$\lim_n \psi(a, \ldots, a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) = 0. \tag{3.10}$$

Si $\lambda_n = 1$ para infinitos n's, usando (3.8) y el límite anterior obtenemos nuevamente $|a(1)|^{M(N-1)} < \binom{NM}{M}\varepsilon$. Entonces, podemos proceder como antes para obtener $\|Q\| = 0$, que es la contradicción deseada. En cambio, si $\lambda_n = 1$ sólo para finitos n's, dado que

$$\tbinom{NM}{M}\phi(-a, \ldots, -a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) = -\lambda_n^M a(1)^{M(N-1)},$$

resulta

$$\tbinom{NM}{M} \limsup_n \phi(-a, \ldots, -a, e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) = |a(1)|^{M(N-1)}.$$

Junto con (3.10), esto implica que $|a(1)|^{M(N-1)} < \binom{NM}{M}\varepsilon$. Luego, deducimos otra vez que $\|Q\| = 0$, y el resultado se sigue por contradicción.

Sólo resta mencionar que en todos los casos anteriores, el teorema de Lindenstrauss se verifica como consecuencia del Teorema 2.1.6. $\square$

En el caso complejo, tomemos $\mathcal{Z} = c_0$ con la norma equivalente dada por $\|x\|_{\mathcal{Z}} = \|x\|_\infty + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x(i)}{2^i}\right)^2\right)^{1/2}$, al igual que en la Proposición 1.4.1. Este espacio, verifica que $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z}''$ son estrictamente convexos. Ahora, el polinomio $Q(x) = (x(i)^N)_i$ considerado en la demostración de (iii) está bien definido de $d_*(w, 1)$ a $\mathcal{Z}''$, sin importar si w pertenece a algún ℓ_r. En consecuencia, con la misma demostración de antes, se prueba que $NA\mathcal{P}(^N d_*(w, 1); \mathcal{Z}'')$ no es denso en $\mathcal{P}(^N d_*(w, 1); \mathcal{Z}'')$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y toda sucesión admisible w. Notar que en los ítems (i) y (ii) de la proposición anterior, si queremos un espacio para el cual no se verifique el teorema de Bishop-Phelps para todo grado de homogeneidad, debemos considerar la sucesión admisible w de forma tal que pertenezca a ℓ_2. En cambio, ahora vemos que eligiendo apropiadamente el espacio de llegada, el teorema de Bishop-Phelps no se verifica para todo grado de homogeneidad, independientemente de la sucesión admisible. Por otra parte, el teorema de Lindenstrauss sí se verifica, pues $d_*(w, 1)$ tiene base achicante y $\mathcal{Z}''$ es un espacio dual.

También en el caso complejo, si consideramos un espacio de Banach estrictamente convexo Y y $w \in \ell_r$, entonces el conjunto $NA\mathcal{P}(^N d_*(w, 1); Y)$ no es denso en $\mathcal{P}(^N d_*(w, 1); Y)$ para $N \geq r$. De hecho, basta considerar $Q(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x(i)^N\right) y_0$ para cualquier $y_0 \in W$ de norma uno, y razonar como en Proposición 3.2.5 (i).

3.2.2. Caso polinomial no-homogéneo

Con el propósito de obtener los contraejemplos en el caso polinomial no-homogéneo, probaremos en la Proposición 3.2.9 una generalización del Teorema 3.2.1. Para ello, comenzamos por extender los Lemas 3.2.2 y 3.2.3. Recordar que en la página 46, definimos la propiedad (**APE**) relacionada con la ausencia de puntos extremales de la bola unidad.

Lema 3.2.6. *En el caso complejo, sea X un espacio de Banach de sucesiones e Y estrictamente convexo. Si un polinomio $P : X \to Y$ alcanza su norma en un elemento $a \in B_X$ que satisface la condición (**APE**) para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $D^j P(a)(e_n) = 0$ para todo $j \geq 1$ y todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Fijemos $n \geq n_0$. Puesto que P alcanza su norma en a, la norma de la función holomorfa

$$\begin{array}{rcl} \{|\lambda| < \delta\} & \longrightarrow & Y \\ \lambda & \mapsto & P(a + \lambda e_n) \end{array}$$

alcanza un máximo local en el origen. Por el principio del módulo máximo, esta función es constante. Ahora, consideremos la expansión en serie de P alrededor de a,

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j P(a)}{j!}(x - a).$$

Evaluando en $x = a + \lambda e_n$ y recordando que $\lambda \mapsto P(a + \lambda e_n)$ es una función constante, obtenemos

$$P(a) = P(a + \lambda e_n) = P(a) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j P(a)}{j!}(e_n)\lambda^j$$

para todo $|\lambda| < \delta$. Luego $0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j P(a)}{j!}(e_n)\lambda^j$ para todo $|\lambda| < \delta$ y en consecuencia $D^j P(a)(e_n) = 0$ para todo $j \geq 1$. □

Lema 3.2.7. *Para el caso real, sea w una sucesión admisible en ℓ_N, $N \geq 2$, y sea M el menor número natural tal que $w \in \ell_M$. Supongamos que $p \in \mathcal{P}_k(d_*(w,1))$, $k \geq N$, alcanza su norma en $a \in B_{d_*(w,1)}$.*

(i) *Si $p(a) > 0$ entonces* $\limsup_n \frac{D^M p(a)}{M!}(e_n) \leq 0$.

(ii) *Si $p(a) < 0$ entonces* $\liminf_n \frac{D^M p(a)}{M!}(e_n) \geq 0$.

Demostración. Dado que $a \in B_{d_*(w,1)}$, consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que se satisface (**APE**). Supongamos primero que $p(a) > 0$. Luego,

$$p(a + \lambda e_n) = p(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{D^j p(a)}{j!}(e_n)\lambda^j \leq p(a) \tag{3.11}$$

para todo $|\lambda| \leq \delta$ y $n \geq n_0$. Por el Teorema 3.2.1, para $j < M$, el polinomio j-homogéneo $\frac{D^j p(a)}{j!}$ es débil secuencialmente continuo y en consecuencia $\lim_{n\to\infty} \frac{D^j p(a)}{j!}(e_n) = 0$. Ahora, tomando límite en (3.11) y dividiendo por λ^M, obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=M}^{k} \frac{D^j p(a)}{j!}(e_n)\lambda^{j-M} \leq 0$$

para todo $0 < \lambda \leq \delta$. De aquí se deduce que $\limsup_n \frac{D^M p(a)}{M!}(e_n) \leq 0$, que es lo que queríamos probar.

Si $p(a) < 0$, razonando de la misma manera con $-p$ obtenemos (ii). □

En el siguiente lema auxiliar, resumimos algunos resultados conocidos en lo referido a cotas para las derivadas de polinomios; estos resultados se pueden ver, por ejemplo, en [57, 58].

Lema 3.2.8. *Sean X e Y espacios de Banach sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Fijados $1 \leq j \leq k$ números naturales, existe una constante $C_{k,j} > 0$ (dependiendo sólo de j y k) tal que*

$$\left\| \frac{D^j P(x)}{j!} \right\| \leq C_{k,j} \|P\|$$

para todo $P \in \mathcal{P}_k(X;Y)$ y $x \in B_X$.

Ahora sí, estamos en condiciones de extender el Teorema 3.2.1 al caso polinomial no-homogéneo.

Proposición 3.2.9. *Dada una sucesión admisible w y $k \geq 2$, son equivalentes:*

(i) *$NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ es denso en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$.*

(ii) *$w \notin \ell_k$.*

(iii) $\mathcal{P}_k(d_*(w,1)) = \mathcal{P}_{k,wsc}(d_*(w,1))$.

Demostración. Veamos primero la implicación (i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que $w \in \ell_k$.

En el caso complejo, tomemos $q \in \mathcal{P}(^k d_*(w,1))$ dado por

$$q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)^k,$$

que está bien definido por (3.3). Si $p \in \mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ alcanza su norma en $a \in B_{d_*(w,1)}$, el Lema 3.2.6 nos asegura que $D^k p(a)(e_n) = 0$ para todo n suficientemente grande. Ahora bien, puesto que $\frac{D^k q(a)}{k!} = q$, por el Lema 3.2.8 resulta

$$1 = \left| \frac{D^k q(a)}{k!}(e_n) - \frac{D^k p(a)}{k!}(e_n) \right| \leq \left\| \frac{D^k q(a)}{k!} - \frac{D^k p(a)}{k!} \right\| \leq C_{k,k} \|q - p\|,$$

para n suficientemente grande y, en consecuencia, q no puede ser aproximado por polinomios que alcanzan la norma.

En el caso real, sea $M \leq k$ el menor número natural tal que $w \in \ell_M$ y consideremos $q \in \mathcal{P}(^k d_*(w,1))$ dado por

$$q(x) = x(1)^{k-M} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x(i)^M.$$

Supongamos que q se aproxima por polinomios en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ que alcanzan la norma. Fijado $\varepsilon > 0$, en virtud del Lema 3.2.8 podemos considerar $p \in NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ tal que

$$\left\| \frac{D^M q(x)}{M!} - \frac{D^M p(x)}{M!} \right\| < \varepsilon, \tag{3.12}$$

para todo $x \in B_{d_*(w,1)}$. Digamos que p alcanza la norma en $a \in B_{d_*(w,1)}$. Por otro lado, se puede ver fácilmente que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{D^M q(a)}{M!}(e_n) = |a(1)|^{k-M} = -\liminf_{n \to \infty} \frac{D^M q(a)}{M!}(e_n).$$

Luego, por (3.12) y el Lema 3.2.7, si $p(a) > 0$ tenemos

$$|a(1)|^{k-M} = \limsup_{n \to \infty} \frac{D^M q(a)}{M!}(e_n) \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{D^M p(a)}{M!}(e_n) + \varepsilon \leq \varepsilon,$$

mientras que si $p(a) < 0$, entonces resulta

$$-|a(1)|^{k-M} = \liminf_{n \to \infty} \frac{D^M q(a)}{M!}(e_n) \geq \liminf_{n \to \infty} \frac{D^M p(a)}{M!}(e_n) - \varepsilon \geq -\varepsilon.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|q\| &\leq \|p\| + \varepsilon = |p(a)| + \varepsilon \leq |q(a)| + 2\varepsilon \\ &= |a(1)|^{k-M} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a(i)|^M \right) + 2\varepsilon < \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{\infty} w(i)^M + 2 \right). \end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$ era arbitrario, resulta $\|q\| = 0$, que es la contradicción deseada.

Para probar la implicación (ii) $\Rightarrow$ (iii) notemos que si $w \notin \ell_k$ entonces $w \notin \ell_j$ para todo $j \leq k$. Luego, por el Teorema 3.2.1 resulta $\mathcal{P}(^j d_*(w,1)) = \mathcal{P}_{wsc}(^j d_*(w,1))$ para todo $j \leq k$ y en consecuencia $\mathcal{P}_k(d_*(w,1)) = \mathcal{P}_{k,wsc}(d_*(w,1))$.

Por último, probemos (iii) $\Rightarrow$ (i). Por [44, Proposición 10], (iii) implica que todo polinomio en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ se aproxima por sumas finitas de polinomios de la forma $e'_{i_1}(\cdot)\cdots e'_{i_j}(\cdot)$ con $i_1,\ldots,i_j \in \mathbb{N}$ y $j \leq k$, donde $(e'_i)_i$ es la base canónica de $d(w,1)$. Veamos que, dado que la base $(e_i)_i$ de $d_*(w,1)$ es monótona, estos polinomios alcanzan la norma, lo cual demuestra (i). En efecto, sea p un polinomio que es suma finita de polinomios de la forma $e'_{i_1}(\cdot)\cdots e'_{i_j}(\cdot)$. Luego existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $p(x) = p(\pi_m(x))$ para todo $x \in d_*(w,1)$, donde π_m es la proyección definida en (1.18) sobre el espacio $[e_1,\ldots,e_m]$ generado por los primeros m vectores canónicos. Esto nos dice que $\|p\| = \sup_{x\in\pi_m(B_{d_*(w,1)})} |p(x)|$ y este supremo se alcanza ya que π_m tiene rango finito y en consecuencia $\pi_m(B_{d_*(w,1)})$ es compacto. Ahora, dado que $(e_i)_i$ es base monótona de $d_*(w,1)$, resulta $\pi_m(B_{d_*(w,1)}) \subseteq B_{d_*(w,1)}$ y en consecuencia se tiene que p alcanza la norma. Luego, queda probado (i). $\square$

Finalmente, enunciamos los contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps para polinomios no-homogéneos. En el caso a valores escalares, esto nos permite extender el contraejemplo obtenido en [6, Corolario 4.4], enunciado para sucesiones admisibles $w \in \ell_2$.

Proposición 3.2.10. *Sea w una sucesión admisible, $w \in \ell_r$ para algún $1 < r < \infty$ y sea Z un espacio con propiedad (β).*

(i) *$NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ no es denso en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ si $k \geq r$.*

(ii) *$NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1);Z)$ no es denso en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1);Z)$ si $k \geq r$.*

(iii) *En el caso complejo, $NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\ell_s)$ no es denso en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\ell_s)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $s \geq r$.*

En el caso real, si M es el menor número natural tal que $w \in \ell_M$ y M es par (suponemos que tal M existe), entonces $NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\ell_M)$ no es denso en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\ell_M)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Además, en todos los casos anteriores se verifica el teorema de Lindenstrauss.

Demostración. El ítem (i) es consecuencia inmediata de la Proposición 3.2.9, mientras que (ii) se desprende de (i) y la Proposición 3.2.4.

Para probar (iii), consideremos $Q(x) = x$. *En el caso complejo*, si $P \in \mathcal{P}_N(d_*(w,1);\ell_s)$ alcanza su norma en $a \in B_{d_*(w,1)}$, por el Lema 3.2.6 sabemos que $D^1P(a)(e_n) = 0$ para todo n suficientemente grande. Por otro lado $D^1Q(a) = Q$ y en consecuencia

$$1 = \left|D^1Q(a)(e_n) - D^1P(a)(e_n)\right| \leq \left\|D^1Q(a) - D^1P(a)\right\| \leq C_{k,1}\|Q - P\|$$

para n suficientemente grande, donde la última desigualdad se debe al Lema 3.2.8. Esto nos muestra que Q no puede ser aproximado por polinomios que alcanzan la norma.

En el caso real, supongamos que Q se aproxima por polinomios en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\ell_M)$ que alcanzan su norma. Dado que los polinomios M-homogéneos de norma uno son uniformemente equicontinuos, dado $0<\varepsilon<1$ podemos tomar $P\in NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\ell_M)$ tal que

$$\|q\circ Q - q\circ P\| < \varepsilon C_{Mk,M}^{-1} \tag{3.13}$$

para todo polinomio $q\in\mathcal{P}(^M\ell_M)$ de norma uno, donde $C_{Mk,M}$ es la constante dada en el Lema 3.2.8. Ahora bien, si $a\in B_{d_*(w,1)}$ es tal que $\|P(a)\|=\|P\|$, consideramos el polinomio M-homogéneo de norma uno $q_{P,a}:\ell_M\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por $q_{P,a}(x)=\sum_{i=1}^\infty x(i)^M$. Notar que $q_{P,a}\circ P\in\mathcal{P}_{Mk}(d_*(w,1))$ alcanza la norma y que $q_{P,a}\circ P(a)=\|P\|^M$. Por otra parte, $q_{P,a}\circ Q(x)=\sum_{i=1}^\infty x(i)^M$ y por la desigualdad (3.13) resulta

$$\left\|\frac{D^M(q_{P,a}\circ Q)(x)}{M!}-\frac{D^M(q_{P,a}\circ P)(x)}{M!}\right\|<\varepsilon.$$

Notando, por el Lema 3.2.7, que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{D^M(q_{P,a}\circ P)(a)}{M!}(e_n)\le 0,$$

y por otro lado que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{D^M(q_{P,a}\circ Q)(a)}{M!}(e_n)=1,$$

obtenemos

$$1=\limsup_{n\to\infty}\frac{D^M(q_{P,a}\circ Q)(a)}{M!}(e_n)\le\limsup_{n\to\infty}\frac{D^M(q_{P,a}\circ P)(a)}{M!}(e_n)+\varepsilon\le\varepsilon.$$

Puesto que $0<\varepsilon<1$, tenemos la contradicción deseada.

Por último, en todos los ejemplos anteriores se verifica el teorema de Lindenstrauss como consecuencia del Teorema 2.2.1. $\square$

Al igual que observamos al final de la Proposición 3.2.5, en el caso complejo, si tomamos $\mathcal{Z}$ el renormamiento de c_0 tal que su bidual es estrictamente convexo, entonces $NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\mathcal{Z}'')$ no es denso en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1);\mathcal{Z}'')$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y toda sucesión admisible w, sin importar si pertenece a algún ℓ_r. También, si $w\in\ell_r$ e Y es estrictamente convexo, entonces el conjunto $NA\mathcal{P}_k(d_*(w,1);Y)$ no es denso en $\mathcal{P}_k(d_*(w,1);Y)$ para $k\ge r$.

3.2.3. Un contraejemplo en $\mathcal{A}_u$

En esta sección veremos que el teorema de Bishop-Phelps no se verifica en $\mathcal{A}_u$ cuando consideramos funciones a valores vectoriales. Desconocemos contraejemplos en el caso a valores escalares, para el cual estudiaremos versiones *fuertes* de los teoremas de Lindenstrauss y Bishop-Phelps en el Capítulo 4. En primer lugar, precisamos el siguiente lema auxiliar que es la versión holomorfa del Lema 3.2.6. Notemos que, en los resultados para funciones holomorfas, sólo consideramos espacios de Banach complejos.

Lema 3.2.11. *Sean X un espacio de Banach de sucesiones e Y un espacio estrictamente convexo. Supongamos que $a \in B_X$ satisface la condición (**APE**) para ciertos $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$.*

(i) *Para toda $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ y todo $n \geq n_0$, la función*

$$\begin{array}{rcl} g_f : \{|\lambda| < \delta/2\} & \longrightarrow & Y \\ \lambda & \longmapsto & f(a + \lambda e_n) \end{array}$$

es holomorfa.

(ii) *Si además f alcanza su norma en a, entonces $D^j g_f(0) = 0$ para todo $j \geq 1$.*

Demostración. Para probar (i), tomemos una sucesión $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $1/2 < \alpha_i < 1$ y $\alpha_i \nearrow 1$. Para $n \geq n_0$ definimos $g_i : \{|\lambda| < \delta/2\} \to Y$ por

$$g_i(\lambda) = f(\alpha_i a + \lambda e_n).$$

Por la elección de los α_i y dado que $a \in B_X$ satisface la condición (**APE**) para $n \geq n_0$ y $\delta > 0$, resulta que $\alpha_i a + \lambda e_n$ pertenece a $\alpha_i B_X$ para todo $|\lambda| < \delta/2$. Luego, puesto que f es holomorfa en la bola abierta $\overset{\circ}{B}_X$, para cada $i \geq 1$ la función g_i es holomorfa. Veamos que g_i converge uniformemente a g_f. Puesto que f es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta' > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, siempre que $x, y \in B_X$ satisfagan $\|x - y\| < \delta'$. Tomando i suficientemente grande, tenemos $1 - \alpha_i < \delta'$ y en consecuencia $\|(\alpha_i a + \lambda e_n) - (a + \lambda e_n)\| < \delta'$. Luego, existe i_0 tal que

$$\|g_i(\lambda) - g_f(\lambda)\| = \|f(\alpha_i a + \lambda e_n) - f(a + \lambda e_n)\| < \varepsilon,$$

para todo $|\lambda| < \delta/2$ y todo $i \geq i_0$. Esto prueba que g_f es holomorfa, ya que es límite uniforme de funciones holomorfas.

Para (ii), basta notar que g_f alcanza su máximo en 0 y como consecuencia del principio de módulo máximo, es constante. Luego $D^j g_f(0) = 0$ para todo $j \geq 1$. □

En el siguiente contraejemplo consideramos nuevamente $\mathcal{Z}$, el renormamiento de c_0 tal que su bidual es estrictamente convexo.

Proposición 3.2.12. *El conjunto $NA\mathcal{A}_u(c_0;\mathcal{Z}'')$ no es denso en $\mathcal{A}_u(c_0;\mathcal{Z}'')$.*

Por otro lado, sí se verifica el teorema de Lindenstrauss en $\mathcal{A}_u(c_0;\mathcal{Z}'')$.

Demostración. Consideremos $Q : c_0 \to \mathcal{Z}''$ dada por $Q(x) = x$. Es claro que $Q \in \mathcal{A}_u(c_0;\mathcal{Z}'')$ y que $\|Q(e_n)\|_{\mathcal{Z}''} \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $0 < \delta < 1$, tomemos $f \in NA\mathcal{A}_u(c_0;\mathcal{Z}'')$ y sea $a \in B_{c_0}$ tal que $\|f(a)\| = \|f\|$. Dado que a satisface la condición (**APE**) para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ y el δ fijado anteriormente, el Lema 3.2.11 nos dice que la función

$$g_f : \{|\lambda| < \delta/2\} \to \mathcal{Z}''$$
$$g_f(\lambda) = f(a + \lambda e_n)$$

es holomorfa para un $n \geq n_0$ fijo y verifica $D^1 g_f(0) = 0$. Por otro lado, si definimos $g_Q(\lambda) = Q(a + \lambda e_n)$ entonces g_Q es holomorfa y $D^1 g_Q(0)(\lambda) = \lambda Q(e_n)$. Ahora, por las desigualdades de Cauchy (ver (1.2)) obtenemos

$$1 \leq \|D^1 g_Q(0) - D^1 g_f(0)\| \leq \frac{1}{(\delta/2)} \sup_{|\lambda|<\delta/2} \|g_Q(\lambda) - g_f(\lambda)\| \leq \frac{2}{\delta}\|Q - f\|.$$

Luego, Q no puede ser aproximado por funciones en $\mathcal{A}_u(c_0;\mathcal{Z}'')$ que alcancen su norma.

Que el teorema de Lindenstrauss se verifica en este caso, es consecuencia del Teorema 2.2.2. $\square$

Cabe señalar que el argumento de la demostración anterior no funciona si consideramos funciones definidas en $d_*(w,1)$ (en lugar de c_0) a valores en un espacio de Banach estrictamente convexo. La razón es que, si bien todo elemento $a \in B_{d_*(w,1)}$ satisface la condición (**APE**), no podemos fijar el δ independientemente del elemento. Luego, δ dependería de f (pues depende del elemento en el cual f alcanza la norma) y podría ser arbitrariamente chico. Por lo tanto, no podríamos deducir que Q no puede ser aproximado por funciones que alcanzan la norma.

3.2.4. Caso multilineal simétrico

El siguiente lema, que puede encontrarse esencialmente en [62, Lema 2.2] y [65, Proposición 4], es la versión multilineal del Lema 3.2.2. Notar que en este marco, no es necesario pedir que los espacios sean complejos.

Lema 3.2.13. *Sean $X_1,\dots,X_N$ espacios de Banach de sucesiones y sea Y un espacio de Banach estrictamente convexo. Si $\Psi \in \mathcal{L}(^N X_1,\dots,X_N;Y)$ alcanza su norma en un elemento $(a_1,\dots,a_N) \in B_{X_1}\times\cdots\times B_{X_N}$ tal que $a_1,\dots,a_N$ satisfacen la propiedad (**APE**), entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Psi(e_{n_1},\dots,e_{n_N}) = 0$, para todo $n_1,\dots,n_N \geq n_0$.*

Demostración. Dado que $a_1,\dots,a_N$ satisfacen la propiedad (**APE**), existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que
$$\|a_j + \lambda e_n\| \leq 1 \quad \text{para todo } |\lambda| \leq \delta,\ n \geq n_0 \text{ y } j = 1,\dots,N.$$
Consideremos $1 \leq k \leq N$ y $n_k \geq n_0$ y notemos que
$$\begin{aligned}\|\Psi(a_1,\dots,a_N) \pm \delta\Psi(a_1,\dots,a_{k-1},e_{n_k},a_{k+1},\dots,a_N)\| =\\ = \|\Psi(a_1,\dots,a_{k-1},a_k \pm \delta e_{n_k},a_{k+1},\dots,a_N)\| \leq \|\Psi\| = \|\Psi(a_1,\dots,a_N)\|.\end{aligned} \tag{3.14}$$
Luego, si llamamos
$$\begin{aligned} z_+ &= \Psi(a_1,\dots,a_N) + \delta\Psi(a_1,\dots,a_{k-1},e_{n_k},a_{k+1},\dots,a_N)\\ z_- &= \Psi(a_1,\dots,a_N) - \delta\Psi(a_1,\dots,a_{k-1},e_{n_k},a_{k+1},\dots,a_N),\end{aligned}$$
la desigualdad (3.14) nos dice que
$$\|z_+\| = \|z_-\| = \left\|\frac{z_+ + z_-}{2}\right\| = \|\Psi\|.$$
Puesto que Y es estrictamente convexo resulta $z_+ = z_-$ y en consecuencia
$$\Psi(a_1,\dots,a_{k-1},e_{n_k},a_{k+1},\dots,a_N) = 0 \quad \text{para todo} \quad 1 \leq k \leq N \text{ y } n_k \geq n_0. \tag{3.15}$$
Ahora sean $1 \leq l,k \leq N$ cualesquiera (digamos $l < k$) y sean $n_l, n_k \geq n_0$. Por lo visto en (3.15) resulta
$$\begin{aligned}\|\Psi(a_1,\dots,a_N) \pm \delta^2\Psi(a_1,\dots,a_{l-1},e_{n_l},a_{l+1},\dots,a_{k-1},e_{n_k},a_{k+1},\dots,a_N)\| =\\ = \|\Psi(a_1,\dots,a_{l-1},a_l \pm \delta e_{n_l},a_{l+1},\dots a_{k-1},a_k \pm \delta e_{n_k},a_{k+1},\dots,a_N)\| \leq \|\Psi\|,\end{aligned}$$

y razonando igual que antes obtenemos $\Psi(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_{n_l}, a_{l+1}, \ldots, a_{k-1}, e_{n_k}, a_{k+1}, \ldots, a_N) = 0$ para todo $n_l, n_k \geq n_0$. Inductivamente, luego de N pasos, queda probado el resultado. $\square$

La siguiente proposición nos muestra los contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps en el caso multilineal simétrico, que son análogos a los vistos en las Proposiciones 3.2.5 y 3.2.10.

Proposición 3.2.14. *Sea w una sucesión admisible tal que $w \in \ell_r$ para algún $1 < r < \infty$ y sea Z un espacio de Banach con propiedad (β).*

(i) $NA\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1))$ *no es denso en* $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1))$ *si* $N \geq r$.

(ii) $NA\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); Z)$ *no es denso en* $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); Z)$ *si* $N \geq r$.

(iii) $NA\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); \ell_s)$ *no es denso en* $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); \ell_s)$ *para todo* $N \in \mathbb{N}$ *y todo* $s \geq r$.

Además, el teorema de Lindenstrauss se verifica en los tres casos anteriores.

Demostración. Para probar (i), consideremos la forma N-lineal simétrica

$$\phi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) \cdots x_N(i)$$

que está bien definida en virtud de (3.3) y la desigualdad de Hölder. Notar que si $\psi \in \mathcal{L}_s(^N d_*(w,1))$ alcanza su norma, el Lema 3.2.13 nos dice que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(e_n, \ldots, e_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Luego, tomando $n \geq n_0$ tenemos

$$1 = |\phi(e_n, \ldots, e_n) - \psi(e_n, \ldots, e_n)| \leq \|\phi - \psi\|$$

y en consecuencia ϕ no puede ser aproximada por multilineales que alcanzan la norma. El ítem (ii) es consecuencia de (i) y la Proposición 3.2.4.

Para (iii), consideramos el operador N-lineal simétrico $\Phi(x_1, \ldots, x_N) = (x_1(i) \cdots x_N(i))_i$ y razonamos nuevamente como en (i).

Por último, el teorema de Lindenstrauss se verifica en los casos anteriores como consecuencia del Teorema 2.3.1. $\square$

Al igual que en los casos polinomiales, si consideramos $\mathcal{Z}$ el renormamiento de c_0, entonces $NA\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); \mathcal{Z}'')$ no es denso en $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); \mathcal{Z}'')$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y cualquier sucesión admisible w. Por otro lado, (i) se sigue verificando cuando consideramos multilineales a valores en un espacio Y estrictamente convexo.

3.3. Contraejemplos al teorema de Lindenstrauss-Bollobás

Como mencionamos en la Sección 1.4, Bollobás demostró [23] una versión *cuantitativa* del teorema de Bishop-Phelps, conocida hoy en día como el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. La misma afirma, en términos generales, que para un espacio de Banach X cualquiera, dada una funcional lineal $\varphi \in X'$ y un elemento $\tilde{x} \in B_X$ tales que $\varphi(\tilde{x})$ está "suficientemente cerca" de $\|\varphi\|$, es posible encontrar una funcional lineal $\psi \in X'$ "cerca" de φ alcanzando su norma en un elemento $a \in B_X$ "cercano" a $\tilde{x}$. Las correspondientes versiones cuantitativas de los teoremas de Bishop-Phelps para operadores lineales, multilineales y polinomios han cobrado gran interés en los últimos años, a partir de algunos resultados de Acosta, Aron, García y Maestre [7]. Allí mismo, también se planteó la pregunta acerca de la validez de una versión cuantitativa del teorema de Lindenstrauss para operadores lineales, y se mostró que no es posible dar un resultado positivo con total generalidad (ver Ejemplo 1.4.14).

En esta sección, abordamos las versiones cuantitativas del teorema Lindenstrauss para operadores multilineales, polinomios y funciones en $\mathcal{A}_u$ y vemos que los contraejemplos al teorema de Bishop-Phelps exhibidos en las secciones anteriores, también nos sirven como contraejemplos a los teoremas del tipo Lindenstrauss-Bollobás. En primer lugar, siguiendo la misma línea de la Definición 1.4.13 de la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás ($BPBp$), definimos la *propiedad de Lindenstrauss-Bollobás* para operadores lineales, multilineales, polinomios y funciones en $\mathcal{A}_u$. En lo que sigue, dados $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach, notamos $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ y $\mathbf{X}' = X_1' \times \cdots \times X_N'$. Por otro lado, S_X denota la esfera de un espacio de Banach X y $S_{\mathbf{X}} = S_{X_1} \times \cdots \times S_{X_N}$ la esfera de la N-upla $\mathbf{X}$ considerada con la norma supremo $\|(x_j)_{j=1}^N\| = \sup_j \|x_j\|$.

Definición 3.3.1. *Sean $X, X_1, \ldots, X_N$ e Y espacios de Banach.*

(i) *Decimos que $\mathcal{L}(X;Y)$ tiene la propiedad de Lindenstrauss-Bollobás (LBp), si para cada $\varepsilon > 0$ existen $\eta(\varepsilon), \beta(\varepsilon) > 0$ (con $\beta(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$) tales que: dados $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ de norma $\|T\| = 1$ y $\tilde{x} \in S_X$ con $\|T(\tilde{x})\| > 1-\eta(\varepsilon)$, existen $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $a'' \in S_{X''}$ verificando*

$$\|S''(a'')\| = \|S''\| = 1, \quad \|a'' - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon) \quad y \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

Notar que cuando consideramos $\|a'' - \tilde{x}\|$, estamos pensando (vía la inclusión canónica) a $\tilde{x}$ como elemento del bidual.

(ii) *Decimos que $\mathcal{L}(^N\mathbf{X};Y)$ tiene la LBp, si con ε, $\eta(\varepsilon)$ y $\beta(\varepsilon)$ como antes, dados $\Phi \in \mathcal{L}(^N\mathbf{X};Y)$ de norma $\|\Phi\| = 1$ y $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_j)_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}}$ verificando $\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}})\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, existen $\Psi \in \mathcal{L}(^N\mathbf{X};Y)$, $\|\Psi\| = 1$, y $\mathbf{a}'' = (a_j'')_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}''}$ tales que,*

$$\|\overline{\Psi}(\mathbf{a}'')\| = 1, \quad \|\mathbf{a}'' - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon) \quad y \quad \|\Phi - \Psi\| < \varepsilon,$$

donde $\|\overline{\Psi}(\mathbf{a}'')\| = 1$ significa que todas las extensiones de Arens de Ψ alcanzan la norma en $\mathbf{a}''$ y $\|\mathbf{a}'' - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon)$ significa que $\|a_j'' - \tilde{x}_j\| < \beta(\varepsilon)$ para $j = 1, \ldots, N$.

Cambiando $\mathcal{L}(^N X_1, \ldots, X_N; Y)$ por $\mathcal{L}_s(^N X_1, \ldots, X_N; Y)$ tenemos la definición de LBp para multilineales simétricas.

(iii) *Decimos que $\mathcal{P}(^N X;Y)$ tiene la LBp, si con $\varepsilon, \eta(\varepsilon)$ y $\beta(\varepsilon)$ como antes, dados $Q \in \mathcal{P}(^N X;Y)$ de norma $\|Q\| = 1$ y $\tilde{x} \in S_X$ satisfaciendo $\|Q(\tilde{x})\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, existen $P \in \mathcal{P}(^N X;Y)$, $\|P\| = 1$, y $a'' \in S_{X''}$ tales que*

$$\|\overline{P}(a'')\| = 1, \quad \|a'' - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon) \quad y \quad \|P - Q\| < \varepsilon.$$

(iv) *En (iii), cambiando $\mathcal{P}(^N X;Y)$ por $\mathcal{P}_k(X;Y)$ o $\mathcal{A}_u(X;Y)$ respectivamente, obtenemos las correspondientes definiciones para polinomios no-homogéneos y funciones holomorfas.*

En vistas de probar los deseados contraejemplos a la LBp, cabe aclarar que las condiciones $\|T\| = \|S\| = 1$ y $\|\tilde{x}\| = \|a''\| = 1$ en (i) no serán restrictivas en el siguiente sentido: si $\mathcal{L}(X;Y)$ tiene la (LBp), entonces dados $\varepsilon > 0$ y $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ existen $\eta(\varepsilon), \beta(\varepsilon) > 0$ como antes, aunque dependiendo en este caso de $\|T\|$, tales que si $\tilde{x} \in B_X$ satisface $\|T(\tilde{x})\| > \|T\| - \eta(\varepsilon)$, entonces existen $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $a'' \in B_{X''}$ verificando

$$\|S''(a'')\| = \|S''\|, \quad \|a'' - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon) \quad \text{y} \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

Lo mismo sucede con las definiciones en (ii), (iii) y (iv). Vale la aclaración, ya que en algunos casos no nos preocuparemos por considerar funciones de norma igual a uno.

El siguiente lema, que es la clave para demostrar los contraejemplos que siguen, nos muestra que los elementos en $B_{d^*(w,1)}$ que están *cerca* de elementos en $d_*(w,1)$, satisfacen la condición (**APE**) definida en la Sección 3.1. Notar la analogía con el caso en que se consideran elementos en la bola de ℓ_∞ cercanos a elementos en c_0, donde la misma propiedad, que es la clave del Ejemplo 1.4.14, se verifica fácilmente.

Lema 3.3.2. *Sea w una sucesión admisible. Sea $z \in B_{d^*(w,1)}$ y supongamos que existe $x \in d_*(w,1)$ tal que $\|z - x\| < \frac{1}{2}$. Luego, z satisface la condición (**APE**), es decir: existen $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\|z + \lambda e_n\| \leq 1, \quad \textit{para todo} \quad |\lambda| \leq \delta \quad \textit{y todo} \quad n \geq n_0.$$

Demostración. Si $z^*(i) = 0$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $z \in d_*(w,1)$ y no hay nada que probar. Podemos, entonces, suponer que $z^*(i) > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Fijemos $\rho > 0$ tal que $\|z - x\| < \rho < \frac{1}{2}$. Dado que $x \in d_*(w,1)$, recordando que la norma en $d_*(w,1)$ está dada por (3.1) y que los elementos de este espacio verifican (3.2), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_1$,

$$\frac{\sum_{i=1}^n x^*(i)}{W(n)} < \rho \quad \text{y} \quad \frac{\sum_{i=1}^n (z-x)^*(i)}{W(n)} < \rho. \tag{3.16}$$

Ahora, si $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva es tal que $z^* = (|z(\sigma(i))|)_i$, entonces

$$\sum_{i=1}^n z^*(i) = \sum_{i=1}^n |z(\sigma(i))| \leq \sum_{i=1}^n |z(\sigma(i)) - x(\sigma(i))| + \sum_{i=1}^n |x(\sigma(i))| \leq \sum_{i=1}^n (z-x)^*(i) + \sum_{i=1}^n x^*(i).$$

Luego, por (3.16) se tiene

$$\sum_{i=1}^n z^*(i) \leq \sum_{i=1}^n (z-x)^*(i) + \sum_{i=1}^n x^*(i) < 2\rho W(n), \tag{3.17}$$

para todo $n \geq n_1$.

Sea n_2 el menor número natural tal que $n_2 > n_1$ y $z^*(n_2) < z^*(n_2 - 1)$. Por (3.17) y la elección de ρ, podemos considerar $\delta > 0$ tal que

$$z^*(n_2) + \delta < z^*(n_2 - 1) \qquad \text{y} \qquad \frac{\sum_{i=1}^n z^*(i) + \delta}{W(n)} < 1, \quad \text{para todo } n \geq n_1.$$

Recordemos que $z^* = (|z(\sigma(i))|)_i$, consideremos $n_0 > \text{máx}\{\sigma(1), \dots, \sigma(n_2)\}$ y veamos que $\|z + \lambda e_n\| \leq 1$ para todo $|\lambda| < \delta$ y todo $n \geq n_0$. Notemos que por la elección de n_0, si $n \geq n_0$ entonces $|z(n)| \leq z^*(n_2)$ y

$$|z(n) + \lambda| < |z(n)| + \delta \leq z^*(n_2) + \delta < z^*(n_2 - 1) \leq z^*(n_1) \leq \dots \leq z^*(1).$$

En consecuencia, si $m < n_2$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} (z + \lambda e_n)^*(i) = \sum_{i=1}^{m} z^*(i) \leq W(m).$$

Por otro lado, si $m \geq n_2$,

$$\sum_{i=1}^{m} (z + \lambda e_n)^*(i) \leq \sum_{i=1}^{m} z^*(i) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda e_n)^*(i) \leq \sum_{i=1}^{m} z^*(i) + \delta < W(m).$$

Luego, de las dos últimas desigualdades se deduce el resultado. □

A continuación, nos enfocamos en los contraejemplos a la LBp para multilineales y polinomios en preduales de espacios de Lorentz. En primer lugar, enunciamos tres resultados auxiliares. El primero de ellos, en la misma línea que la Proposición 3.2.4, nos muestra que la propiedad LBp se verifica para funciones a valores en c_0 (que tiene la propiedad (β)) si y sólo si se verifica para funciones a valores escalares. Los dos restantes, son análogos a los Lemas 3.2.3 y 3.2.7, pero en este caso, para polinomios definidos en el dual de un espacio de sucesiones de Lorentz; los mismos serán de utilidad cuando consideremos espacios reales.

Lema 3.3.3. *Sean w una sucesión admisible y $N \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathcal{P}(^N d_*(w, 1))$ tiene la LBp si y sólo si $\mathcal{P}(^N d_*(w, 1); c_0)$ tiene la LBp.*

Lo mismo se verifica para los espacios de polinomios no-homogéneos $\mathcal{P}_k(d_*(w, 1))$, de operadores multilineales $\mathcal{L}(^N d_*(w, 1))$ y de operadores multilineales simétricos $\mathcal{L}_s(^N d_*(w, 1))$.

Demostración. Suponiendo que $\mathcal{P}(^N d^*(w, 1))$ tiene la LBp y razonando como en la Proposición 2.1.5, obtenemos que $\mathcal{P}(^N d^*(w, 1); Z)$ tiene la LBp para cualquier espacio Z con la propiedad (β), en particular para $Z = c_0$.

Supongamos ahora que $\mathcal{P}(^N d^*(w, 1); c_0)$ tiene la LBp, sean ε, $\eta(\varepsilon)$ y $\beta(\varepsilon)$ como en la definición de LBp y consideremos $q \in \mathcal{P}(^N d^*(w, 1))$ de norma $\|q\| = 1$ y $\tilde{x} \in B_{d_*(w,1)}$ tales que $|q(\tilde{x})| > 1 - \eta(\varepsilon)$. Fijemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ cualquiera y consideremos

$$Q(x) = q(x)e_{n_0} \in \mathcal{P}(^N d^*(w, 1); c_0), \quad \text{con } \|Q\| = 1.$$

Por hipótesis existen $P \in \mathcal{P}(^N d^*(w, 1); c_0)$, de norma $\|P\| = 1$, y $a'' \in B_{d^*(w,1)}$ tales que

$$\|\overline{P}(a'')\| = 1, \quad \|a'' - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon) \quad \text{y} \quad \|P - Q\| < \varepsilon.$$

Luego es claro que $\|e'_n \circ P - e'_n \circ Q\| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(e'_n)_n$ es la sucesión básica dual de los vectores canónicos (esto es, la base canónica en ℓ_1). En particular,

$$\|e'_n \circ P\| = \|e''_n \circ \overline{P}\| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \neq n_0$$

y dado que
$$1 = \|\overline{P}(a'')\| = \sup_n |e''_n \circ \overline{P}(a'')|$$
resulta $|e''_{n_0} \circ \overline{P}(a'')| = 1$. De esta forma, probamos que
$$\|\overline{e_{n_0} \circ P}(a'')\| = \|\overline{e_{n_0} \circ P}\| = 1, \quad \|a'' - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon) \quad \text{y} \quad \|e_{n_0} \circ P - q\| < \varepsilon,$$
y en consecuencia $\mathcal{P}(^N d^*(w,1))$ tiene la LBp.

La demostración en los casos multilineal y polinomial no-homogéneo es completamente análoga. □

Desconocemos si este resultado sigue siendo válido cuando cambiamos c_0 por cualquier espacio Z con la propiedad (β).

Omitimos las demostraciones de los siguientes lemas, que son similares a las de los ya mencionados Lemas 3.2.3 y 3.2.7.

Lema 3.3.4. *Para el caso real, sea w una sucesión admisible en ℓ_N, $N \geq 2$, y consideremos M el menor número natural tal que $w \in \ell_M$. Supongamos que $p \in \mathcal{P}(^N d^*(w,1))$ alcanza su norma en un elemento $a'' \in B_{d^*(w,1)}$ que satisface la condición (**APE**) y sea ψ la forma N-lineal simétrica asociada a p.*

(i) *Si* $p(a'') > 0$ *entonces* $\limsup_n \psi(a'', \ldots, a'', e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \leq 0$.

(ii) *Si* $p(a'') < 0$ *entonces* $\liminf_n \psi(a'', \ldots, a'', e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \geq 0$.

Lema 3.3.5. *Para el caso real, sea w una sucesión admisible en ℓ_N, $N \geq 2$, y sea M el menor número natural tal que $w \in \ell_M$. Supongamos que $p \in \mathcal{P}_N(d^*(w,1))$ alcanza su norma en un elemento $a'' \in B_{d^*(w,1)}$ que satisface la condición (**APE**).*

(i) *Si* $p(a'') > 0$ *entonces* $\limsup_n \frac{D^M p(a'')}{M!}(e_n) \leq 0$.

(ii) *Si* $p(a'') < 0$ *entonces* $\liminf_n \frac{D^M p(a'')}{M!}(e_n) \geq 0$.

Ahora sí, estamos en condiciones de probar los contraejemplos a la LBp. Los razonamientos serán expuestos sin mucho detalle, ya que son prácticamente los mismos que los de las Proposiciones 3.2.5, 3.2.10 y 3.2.14.

Proposición 3.3.6. *Sea w una sucesión admisible, $w \in \ell_r$ para algún $1 < r < \infty$. Los siguientes epacios no tienen la LBp.*

(a) *En el caso multilineal:*

  (i) $\mathcal{L}(^N d_*(w,1))$ *si* $N \geq r$.

  (ii) $\mathcal{L}(^N d_*(w,1); c_0)$ *si* $N \geq r$.

  (iii) $\mathcal{L}(^N d_*(w,1); \ell_s)$ *para todo* $N \in \mathbb{N}$ *y todo* $s \geq r$.

(b) *En el caso polinomial homogéneo:*

(i) $\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ *si* $N \geq r$.

(ii) $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); c_0)$ *si* $N \geq r$.

(iii) *En el caso complejo,* $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); \ell_s)$ *para todo* $N \in \mathbb{N}$ *y todo* $s \geq r$.
En el caso real, $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); \ell_M)$ *para todo* $N \in \mathbb{N}$*, donde* M *es el menor número natural tal que* $w \in \ell_M$.

(c) *En el caso polinomial no-homogéneo:*

(i) $\mathcal{P}_k(d_*(w,1))$ *si* $k \geq r$.

(ii) $\mathcal{P}_k(d_*(w,1); c_0)$ *si* $k \geq r$.

(iii) *En el caso complejo,* $\mathcal{P}_k(d_*(w,1); \ell_s)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y todo* $s \geq r$.
En el caso real, $\mathcal{P}_k(d_*(w,1); \ell_M)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, donde* M *es el menor número natural tal que* $w \in \ell_M$ *y* M *es par (asumimos que tal* M *existe).*

Por otro lado, el teorema de Lindenstrauss se verifica en todos los casos anteriores.

Demostración. (a) (i) Fijemos $N \geq r$ y consideremos $\phi \in \mathcal{L}(^N d_*(w,1))$ dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) \cdots x_N(i),$$

la cual está bien definida puesto que $w \in \ell_r$. Supongamos que $\mathcal{L}(^N d_*(w,1))$ tiene la LBp y tomemos $0 < \varepsilon < 1$, $\eta(\varepsilon)$ y $\beta(\varepsilon)$ como en la definición (ver también la observación posterior a la misma). Luego, si $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N \in B_{d_*(w,1)}$ son tales que $|\phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)| > \|\phi\| - \eta(\varepsilon)$, existe una multilineal $\psi \in \mathcal{L}(^N d_*(w,1))$ cuyas extensiones de Arens alcanzan su norma en una N-upla $(a_1'', \dots, a_N'') \in B_{d^*(w,1)} \times \cdots \times B_{d^*(w,1)}$ y tal que

$$\|a_j'' - \tilde{x}_j\| < \beta(\varepsilon) \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq N \quad \text{y} \quad \|\phi - \psi\| < \varepsilon.$$

Si ε es suficientemente chico, el Lema 3.3.2 nos dice que cada a_j'' satisface la condición (**APE**). Luego, por el Lema 3.2.13, $\psi(e_n, \dots, e_n) = 0$ para n suficientemente grande. Como $\phi(e_n, \dots, e_n) = 1$ y $\|\phi - \psi\| < \varepsilon$, obtenemos la contradicción deseada.

(ii) Es consecuencia de (i) y el Lema 3.3.3.

(iii) Fijemos $N \geq 1$ y $s \geq r$. Dado que $w \in \ell_r$, el operador multilineal $\Phi \in \mathcal{L}(^N d_*(w,1); \ell_s)$ dado por $\Phi(x_1, \dots, x_N) = (x_1(i) \cdots x_N(i))_{i \in \mathbb{N}}$, está bien definido. Luego, el resultado se deduce razonando igual que en el caso anterior.

(b) (i) *En el caso complejo*, dado que $w \in \ell_r$, para cada $N \geq r$ podemos definir $q \in \mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ dado por

$$q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)^N.$$

Razonando como en el caso multilineal, si suponemos que $\mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ tiene la LBp, existen $p \in \mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ y $a'' \in B_{d^*(w,1)}$ tales que

$$|\overline{p}(a'')| = \|\overline{p}\| = \|p\|, \quad a'' \text{ satisface } (\mathbf{APE}) \quad \text{y} \quad \|p - q\| < \varepsilon$$

para algún $0 < \varepsilon < 1$. Luego el Lema 3.2.2 nos dice que $p(e_n) = 0$ para todo n suficientemente grande. Puesto que $\|p - q\| < \varepsilon$ y $q(e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos la contradicción deseada.

De la misma manera, *en el caso real* consideramos $q \in \mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ dada por

$$q(x) = x(1)^{N-M} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x(i)^M,$$

donde M es el menor número natural tal que $w \in \ell_M$. Suponiendo que se verifica la LBp, tenemos $p \in \mathcal{P}(^N d_*(w,1))$ y $a'' \in B_{d^*(w,1)}$ tales que

$$|\overline{p}(a'')| = \|\overline{p}\| = \|p\|, \quad a'' \text{ satisface } (\mathbf{APE}) \quad \text{y} \quad \|p - q\| < \varepsilon \frac{N!}{N^N}.$$

Luego, si ψ y ϕ son las formas N-lineales simétricas asociadas a $\overline{p}$ y $\overline{q}$, resulta $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$.

Ahora, separando en los casos $\overline{p}(a'') > 0$ y $\overline{p}(a'') < 0$, usando el Lema 3.3.4 y razonando igual que en la Proposición 3.2.5 (i), obtenemos la contradicción deseada.

El ítem (ii) es consecuencia de (i) y el Lema 3.3.3.

(iii) *En el caso complejo*, consideramos $Q(x) = (x(i)^N)_{i\in\mathbb{N}}$ y razonamos combinando el Lema 3.3.2 y la demostración en Proposición 3.2.5 (iii).

En el caso real, procedemos nuevamente como en la Proposición 3.2.5 (iii), usando el Lema 3.3.2 y el Lema 3.3.4. Damos un breve bosquejo de la demostración. Supongamos que se satisface la LBp y consideremos $Q\colon d_*(w,1) \longrightarrow \ell_M$ el polinomio continuo definido por $Q(x) = (x(1)^{N-1}x(i))_i$. En virtud del Lema 3.3.2, dado $0 < \varepsilon < 1$ existen $P \in \mathcal{P}(^N d_*(w,1); \ell_M)$ y $a'' \in B_{d^*(w,1)}$ tales que

$$|\overline{P}(a'')| = \|\overline{P}\| = \|P\|, \quad a'' \text{ satisface } (\mathbf{APE}) \quad \text{y} \quad \|q \circ Q - q \circ P\| < \varepsilon \, \tfrac{(NM)!}{(NM)^{NM}}$$

para todo polinomio $q \in \mathcal{P}(^M \ell_M)$ de norma uno. Ahora, sea $q_{P,a''}\colon \ell_M \longrightarrow \mathbb{R}$ el polinomio M-homogéneo de norma uno dado por

$$q_{P,a''}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^M \, x(i)^M,$$

donde $\lambda_i = 1$ si $\overline{P}(a'')(i) \geq 0$ y $\lambda_i = -1$ en otro caso. Luego, $q_{P,a''} \circ P \in \mathcal{P}(^{NM} d_*(w,1))$ es tal que su extensión de Aron-Berner alcanza la norma en a'', más aún $q_{P,a''} \circ \overline{P}(a'') = \|P\|^M$. Por otro lado,

$$q_{P,a''} \circ \overline{Q}(x'') = x''(1)^{M(N-1)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^M \, x''(i)^M, \quad \text{para todo} \quad x'' \in d^*(w,1),$$

de forma que $\|q_{P,a''} \circ \overline{Q}\| = \|Q\|^M$. Consideremos ψ y ϕ las formas NM-lineales simétricas asociadas a $q_{P,a''} \circ \overline{P}$ y $q_{P,a''} \circ \overline{Q}$, respectivamente, que verifican $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$. Puesto que $q_{P,a''} \circ \overline{P}(a'') > 0$, el Lema 3.3.4 nos dice que

$$\limsup_n \psi(a'', \ldots, a'', e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) \leq 0. \tag{3.18}$$

Por otro lado,

$$\binom{NM}{M}\phi(a'', \ldots, a'', e_n, \overset{M}{\ldots}, e_n) = \lambda_n^M a''(1)^{M(N-1)}. \tag{3.19}$$

A partir de aquí, la demostración es completamente análoga a la de la Proposición 3.2.5 (iii).

(c) En este caso, razonamos como en la Proposición 3.2.10 (i) y (iii), en combinación con los Lemas 3.3.2 y 3.3.5. □

Observación 3.3.7. (i) En la definición de la propiedad LBp para operadores multilineales, se podría pedir una condición formalmente más débil sobre Ψ: que simplemente *una* de sus extensiones de Arens alcance su norma en $(a_1'', \ldots, a_N'')$. No sabemos si la definición correspondiente a esta condición, es equivalente a la dada. De cualquier manera, la demostración anterior prueba que incluso esta versión débil de la LBp no se satisface en ciertos espacios de formas y operadores multilineales.

(ii) El ítem (a) (iii) de la proposición anterior nos muestra que, si $w \in \ell_r$, la inclusión canónica $d_*(w,1) \hookrightarrow \ell_r$ es un contraejemplo a la LBp para operadores lineales. Este nuevo ejemplo se suma al Ejemplo 1.4.14 dado en [7].

(iii) Notar que los mismos contraejemplos dados en el caso multilineal, sirven de contraejemplos en el caso multilineal simétrico. Se deduce entonces que los espacios $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1))$ y $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); c_0)$ para $N \geq r$ y $\mathcal{L}_s(^N d_*(w,1); \ell_s)$ para $N \in \mathbb{N}$ y $s \geq r$, no tienen la LBp.

(iv) Al igual que hicimos en la sección anterior, si consideramos el espacio de Banach $\mathcal{Z}$, renormamiento de c_0, tal que $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z}''$ son estrictamente convexos, entonces para cualquier sucesión admisible w y cualquier $N \in \mathbb{N}$, la demostración de (a) (iii) sigue siendo válida para $\mathcal{L}(^N d_*(w,1); \mathcal{Z})$. Lo mismo sucede, en el caso complejo, con las demostraciones de (b) (iii) y (c) (iii) para $\mathcal{P}(^N d_*(w,1); \mathcal{Z})$ y $\mathcal{P}_k(d_*(w,1); \mathcal{Z})$.

Finalizamos la sección con un contraejemplo a la LBp en el caso holomorfo. Cabe destacar que el contraejemplo es el mismo que el exhibido en el Ejemplo 1.4.14, donde se muestra que $\mathcal{L}(c_0; \mathcal{Z})$ no tiene la LBp.

Proposición 3.3.8. *El espacio $\mathcal{A}_u(c_0; \mathcal{Z})$ no tiene la LBp.*

Demostración. Supongamos que se satisface la LBp y consideremos $Q \in \mathcal{A}_u(c_0; \mathcal{Z})$ dada por $Q(x) = x$, que verifica $\|Q(e_n)\|_{\mathcal{Z}} \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como ya mencionamos anteriormente, es fácil ver que los elementos en B_{ℓ_∞} verifican la misma propiedad demostrada en el Lema 3.3.2 para los elementos en $B_{d^*(w,1)}$. Luego, fijado $0 < \delta < 1$, la LBp nos asegura que existen $f \in \mathcal{A}_u(c_0; \mathcal{Z})$ y $a'' \in B_{\ell_\infty}$ tales que

$$\|\overline{f}(a'')\| = \|\overline{f}\| = \|f\|, \quad a'' \text{ satisface } (\textbf{APE}) \text{ para el } \delta \text{ fijado y algún } n_0 \quad \text{y} \quad \|Q - f\| < \varepsilon$$

para algún $0 < \varepsilon < \delta/2$.

Ahora, si $n \geq n_0$, el Lema 3.2.11 nos dice que la función

$$g_{\overline{f}} : \{|\lambda| < \delta/2\} \to \mathcal{Z}''$$
$$g_{\overline{f}}(\lambda) = \overline{f}(a'' + \lambda e_n)$$

es holomorfa y verifica $D^1 g_{\overline{f}}(0) = 0$. Por otro lado, si $g_{\overline{Q}}(\lambda) = \overline{Q}(a'' + \lambda e_n)$ entonces $g_{\overline{Q}}$ es holomorfa y $D^1 g_{\overline{Q}}(0)(\lambda) = \lambda\overline{Q}(e_n)$. Entonces, por las desigualdades de Cauchy obtenemos

$$1 \leq \|D^1 g_{\overline{Q}}(0) - D^1 g_{\overline{f}}(0)\| \leq \frac{1}{(\delta/2)} \sup_{|\lambda|<\delta/2} \|g_{\overline{Q}}(\lambda) - g_{\overline{f}}(\lambda)\| \leq \frac{2}{\delta}\|Q - f\|,$$

lo que nos da la contradicción deseada. □

Capítulo 4

Versiones fuertes de Lindenstrauss y Bishop-Phelps

Este capítulo puede pensarse como una especie de apéndice de los Capítulos 2 y 3. Mediante las mismas técnicas de linealización a través de productos tensoriales utilizadas en el Capítulo 2, en la Sección 4.1 probaremos una versión *fuerte* del teorema Lindenstrauss en $\mathcal{A}_u(X;Z)$ bajo las hipótesis usuales de separabilidad y propiedad de aproximación sobre los espacios de salida y de dualidad y propiedad (β) sobre los de llegada. En la Sección 4.2, volveremos sobre los preduales de Lorentz para mostrar contraejemplos a las correspondientes versiones *fuertes* de Bishop-Phelps.

En este capítulo, todos los espacios de Banach que consideremos serán complejos.

4.1. Versión fuerte de Lindenstrauss

Si bien hemos visto en la Sección 3.2.3 un contraejemplo al teorema de Bishop-Phelps en el caso holomorfo a valores vectoriales, hasta donde sabemos, se desconoce aún si vale el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u(X)$, es decir, en el caso escalar. En [6], se estudia una versión levemente diferente del teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u(X)$. Específicamente, dados $0 < s \leq 1$ y $f \in \mathcal{A}_u(X)$ se considera

$$\|f\|_s = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq s\},$$

lo cual define una norma en $\mathcal{A}_u(X)$ (notar que cuando $s = 1$ se obtiene la usual norma supremo $\|\cdot\|$). Luego, es natural preguntarse acerca de la densidad de funciones en $\mathcal{A}_u(X)$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$. Nos referiremos a este tipo de resultados (es decir, de densidad de funciones que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$) como *versiones fuertes del teorema de Bishop-Phelps*. En estos casos, vamos a especificar cuidadosamente cuando consideremos la norma supremo $\|\cdot\|$ o alguna otra norma $\|\cdot\|_s$. La siguiente observación nos muestra por qué a estos resultados se los denomina versiones fuertes.

Observación 4.1.1. Sean X, Y espacios de Banach cualesquiera y sean $0 < s \leq s_0 \leq 1$. Notemos que si las funciones que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ son $\|\cdot\|_{s_0}$-densas en $\mathcal{A}_u(X;Y)$ (esto es, densas cuando se considera la norma $\|\cdot\|_{s_0}$), entonces se verifica el teorema de Bishop-Phelps. De hecho, dados $h \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ y $\varepsilon > 0$ tomemos un polinomio Q tal que $\|h - Q\| < \varepsilon/2$ y consideremos $Q_{\frac{1}{s}}$ definido por $Q_{\frac{1}{s}}(\cdot) = Q(\frac{1}{s}\cdot)$. Por hipótesis, hay una función $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ que alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ y tal que $\|Q_{\frac{1}{s}} - f\|_{s_0} < \varepsilon/2$. Ahora, si definimos $f_s \in \mathcal{A}_u(X;Y)$ como $f_s(\cdot) = f(s\cdot)$, entonces f_s alcanza la norma supremo $\|\cdot\|$ y $\|f_s\| = \|f\|_s$. Por otro lado, $\|Q - f_s\| = \|Q_{\frac{1}{s}} - f\|_s \leq \|Q_{\frac{1}{s}} - f\|_{s_0} < \varepsilon/2$ y en consecuencia $\|h - f_s\| < \varepsilon$. Esto nos muestra que se verifica el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u(X;Y)$.

Volviendo a lo mencionado anteriormente, en [6, Corolario 4.5] se demuestra el siguiente resultado, el cual mejoraremos en la Sección 4.2. El mismo, nos muestra que los preduales de Lorentz sirven como contraejemplo a las versiones fuertes de Bishop-Phelps en el caso holomorfo a valores escalares.

Teorema 4.1.2. *Sea w una sucesión admisible, $w \in \ell_2 \backslash \ell_1$. Dado $0 < s < 1/e$, el conjunto de funciones en $\mathcal{A}_u(d_*(w,1))$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ no es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{A}_u(d_*(w,1))$.*

Teniendo en cuenta este resultado, resulta natural preguntarse si se verifican las correspondientes *versiones fuertes de Lindenstrauss* en $\mathcal{A}_u$. El objetivo de esta sección es dar una respuesta parcial positiva a este problema. En ese sentido, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.3. *Sean $0 < s \leq 1$, X un espacio de Banach cuyo dual es separable y tiene la propiedad de aproximación y Z un espacio dual o un espacio de Banach con la propiedad (β). Luego, el conjunto de polinomios de X a Z cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{A}_u(X;Z)$.*

Los argumentos que utilizaremos para la demostración, son ligeras modificaciones de aquellos utilizados para las demostraciones de los teoremas de Lindenstrauss vistos en el Capítulo 2. Como es de esperar, mostraremos una variante de la fórmula integral probada en el Lema 2.2.5 y extenderemos el Lema 2.2.6 sobre el teorema de Lindenstrauss a valores en espacios con propiedad (β), pero para el caso de versiones fuertes.

En primer lugar, enunciamos la siguiente versión más general del conocido teorema de Bishop-Phelps; la misma se enuncia en el comentario final de [21], el mismo artículo en el cual Bishop y Phelps demuestran su famoso teorema (ver también [22]).

Sea X un espacio de Banach real, $C \subseteq X$ un conjunto acotado, cerrado y convexo y sea

$$C^* = \{\varphi \in X' : \ \varphi(a) = \sup_{x \in C} \varphi(x), \ \textit{para algún } a \in C\}.$$

Luego C^* es denso en X'. Si además C es balanceado, luego para X un espacio de Banach real o complejo $C^* = \{\varphi \in X' : \ |\varphi(a)| = \sup_{x \in C} |\varphi(x)|, \ \textit{para algún } a \in C\}$ es denso en X'.

Dados X e Y espacios de Banach, recordemos que

$$G_k := \bigoplus_{j=0}^{k} \left((\tilde{\otimes}^{j,s}_{\pi_s} X) \tilde{\otimes}_\pi Y \right) \quad \text{con la norma} \quad \|u\|_{G_k} = \sup_{Q \in B_{\mathcal{P}_k(X;Y')}} |\langle u, Q \rangle| \, ,$$

es el espacio predual de $\mathcal{P}_k(X;Y')$ definido en la Sección 2.2. Ahora, dado $0 < s \leq 1$ consideremos el subconjunto

$$C_{k,s} = \left\{ u \in G_k : \ \sup_{\|Q\|_s \leq 1} |\langle u, Q \rangle| \leq 1 \right\},$$

que resulta ser acotado, cerrado, balanceado y convexo. Siguiendo las mismas ideas que en el Lema 2.2.4, vemos que

$$\sup_{u \in C_{k,s}} |L_P(u)| = \|P\|_s \quad \text{para todo} \quad P \in \mathcal{P}_k(X; Y'), \tag{4.1}$$

donde $L_P \in G_k'$ está dado por $L_P(u) = \langle u, P\rangle$. En efecto, puesto que $u \in C_{k,s}$ tenemos

$$|L_P(u)| = \|P\|_s \left| \sum_{j=0}^{k} \langle u_j, \frac{P_j}{\|P\|_s} \rangle \right| \leq \|P\|_s \sup_{\|Q\|_s \leq 1} |\langle u, Q\rangle| \leq \|P\|_s,$$

lo cual implica $\sup_{u \in C_{k,s}} |L_P(u)| \leq \|P\|_s$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, si consideramos $x_0 \in B_X$ e $y_0 \in B_Y$ tales que $|P(sx_0)(y_0)| > \|P\|_s - \varepsilon$ y

$$u_0 = \sum_{j=0}^{k} sx_0 \otimes \overset{j}{\cdots} \otimes sx_0 \otimes y_0,$$

entonces $u_0 \in C_{k,s}$ y $|L_P(u_0)| = |P(sx_0)(y_0)| > \|P\|_s - \varepsilon$, lo que nos muestra la otra desigualdad.

Para los elementos en $C_{k,s}$, tenemos la siguiente generalización de la fórmula integral probada en el Lema 2.2.5, cuya demostración es análoga a la del mencionado resultado. Nos enfocaremos solamente en los puntos en que difiere de esta última.

Lema 4.1.4. *Sean $0 < s \leq 1$ y X, Y espacios de Banach tales que X' es separable y tiene la propiedad de aproximación. Luego, para cada $u \in C_{k,s}$ existe una medida regular de Borel μ_u en $(sB_{X''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)$ tal que $\|\mu_u\| \leq 1$ y*

$$\langle u, P\rangle = \int_{sB_{X''} \times B_{Y''}} \overline{P}(x'')(y'') d\mu_u(x'', y''), \tag{4.2}$$

para todo $P \in \mathcal{P}_k(X; Y')$.

Demostración. Primero probamos la fórmula para el conjunto $\mathcal{P}_{f,k}(X; Y')$ de polinomios de tipo finito de grado a lo sumo k. Consideremos en este espacio la norma $\|\cdot\|_s$, con la cual resulta un espacio de Banach. Más aún, $(\mathcal{P}_{f,k}(X; Y'), \|\cdot\|_s)$ puede verse como subespacio isométrico de $C(sB_{X''} \times B_{Y''})$, con las bolas $sB_{X''}$ y $B_{Y''}$ dotadas de la topología débil-$*$, identificando cada polinomio $P \in \mathcal{P}_{f,k}(X; Y')$ con la función $(x'', y'') \mapsto \overline{P}(x'')(y'')$. La isometría se chequea fácilmente usando la igualdad $\|\overline{P}\|_s = \|P\|_s$, lo cual se deduce del teorema de Davie-Gamelin [41] y notando que si tomamos $P_s(\cdot) = P(s\cdot)$ entonces $(\overline{P})_s = \overline{P_s}$.

Ahora, dado $u \in C_{k,s}$ se define

$$\begin{aligned} \Lambda_u : (\mathcal{P}_{f,k}(X; Y'), \|\cdot\|_s) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \Lambda_u(P) &= \langle u, P\rangle, \end{aligned}$$

que verifica $\|\Lambda_u\| \leq 1$. Luego, el teorema de Hahn-Banach nos permite extender Λ_u a una funcional lineal continua en $C(sB_{X''} \times B_{Y''})$ preservando la norma, y por el teorema de representación de Riesz, hay una medida regular de Borel μ_u en $(sB_{X''}, w^*) \times (B_{Y''}, w^*)$ tal que $\|\mu_u\| \leq 1$ y

$$\Lambda_u(f) = \int_{sB_{X''} \times B_{Y''}} f(x'', y'') d\mu_u(x'', y'')$$

para $f \in C(sB_{X''} \times B_{Y''})$; notar que seguimos llamando Λ_u a su extensión a $C(sB_{X''} \times B_{Y''})$. En particular, tomando $f = P \in \mathcal{P}_{f,k}(X;Y')$ obtenemos la fórmula integral para polinomios de tipo finito.

A partir de aquí, la demostración sigue de la misma manera que el Lema 2.2.5. □

A continuación, probaremos la extensión del Lema 2.2.6 al contexto de versiones fuertes. Incluímos la demostración, que es análoga a la de aquel resultado. En la misma, se puede ver fácilmente que si cada función en $\mathcal{A}_u(X)$ se aproxima por *polinomios* cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma $\|\cdot\|_s$, entonces el conjunto de *polinomios* de X a Z cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{A}_u(X;Z)$.

Lema 4.1.5. *Sea Z un espacio de Banach con propiedad (β). Luego, si se verifica una versión fuerte del teorema de Lindenstrauss para $\mathcal{A}_u(X)$ entonces se verifica para $\mathcal{A}_u(X;Z)$.*

Demostración. Sea $0 < s \leq 1$ tal que el conjunto de funciones en $\mathcal{A}_u(X)$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{A}_u(X)$, y sean $\{(z_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in \Lambda\} \subset Z \times Z'$ y $0 \leq \lambda < 1$ como en la Definición 1.4.2 de espacio con propiedad (β). Sean $\varepsilon > 0$ y $h \in \mathcal{A}_u(X;Z)$ que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, de norma $\|h\|_s = 1$. Notar que

$$1 = \|h\|_s = \sup_\alpha \|g_\alpha \circ h\|_s.$$

En efecto, si consideramos $h_s(\cdot) = h(s\cdot)$, puesto que Z tiene la propiedad (β), se verifica fácilmente que

$$1 = \|h\|_s = \|h_s\| = \sup_\alpha \|g_\alpha \circ h_s\| = \sup_\alpha \|g_\alpha \circ h\|_s.$$

Luego podemos tomar α_0 tal que $\|g_{\alpha_0} \circ h\|_s \geq 1 - \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{4}$. Ahora bien, por hipótesis existe $f_0 \in \mathcal{A}_u(X)$, que podemos suponer de norma $\|f_0\|_s = \|g_{\alpha_0} \circ h\|_s$, tal que $\|g_{\alpha_0} \circ h - f_0\| < \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{2}$ y $\overline{f_0}$ alcanza la norma $\|\cdot\|_s$, digamos, en $a'' \in sB_{X''}$. Definamos $f \in \mathcal{A}_u(X;Z)$ como

$$f(x) = h(x) + ((1+\varepsilon)f_0(x) - g_{\alpha_0} \circ h(x))\, z_{\alpha_0}$$

y notemos que $\|h - f\| \leq \varepsilon\|f_0\| + \|g_{\alpha_0} \circ h - f_0\| \leq \varepsilon + \varepsilon(1-\lambda) \leq 2\varepsilon$.

Luego, sólo resta ver que $\overline{f}$ alcanza la norma $\|\cdot\|_s$. Por un lado, para todo α se tiene

$$\begin{aligned} \|g_\alpha \circ f\|_s &\leq \|g_\alpha \circ h\|_s + |g_\alpha(z_{\alpha_0})| \left(\varepsilon\|f_0\|_s + \|f_0 - g_{\alpha_0} \circ h\|_s\right) \\ &\leq 1 + \lambda\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{2}\right) \leq 1 + \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{2} \end{aligned}$$

y por otro lado, dado que $g_{\alpha_0} \circ f = (1+\varepsilon)f_0$ y $\|f_0\|_s = \|g_{\alpha_0} \circ h\|_s \geq 1 - \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{4}$, resulta

$$\|g_{\alpha_0} \circ f\|_s \geq (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{4}\right) \geq 1 + \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{2}.$$

Puesto que $\|f\|_s = \sup_\alpha \|g_\alpha \circ f\|_s$, de las desigualdades anteriores deducimos que $\|f\|_s = \|g_{\alpha_0} \circ f\|_s$. Recordando que $\overline{f_0}$ alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ en a'' y notando que $\overline{g_{\alpha_0} \circ f}(x'') = \overline{f}(x'')(g_{\alpha_0})$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_s &= \|g_{\alpha_0} \circ f\|_s = (1+\varepsilon)\|f_0\|_s = (1+\varepsilon)|\overline{f_0}(a'')| \\ &= |\overline{f}(a'')(g_{\alpha_0})| \leq \|\overline{f}(a'')\| \leq \|f\|_s. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\overline{f}$ alcanza la norma, que es lo que queríamos demostrar. □

Ahora sí, estamos en condiciones de probar la versión fuerte del teorema de Lindenstrauss.

Demostración del Teorema 4.1.3. Bastará ver el caso en que Z es un espacio dual, digamos $Z = Y'$, ya que de aquí se deduce el caso a valores escalares y por el Lema 4.1.5 se obtiene el resultado para cualquier espacio Z con propiedad (β).

Sean $h \in \mathcal{A}_u(X; Y')$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que las funciones en $\mathcal{A}_u(X; Y')$ son límite uniforme de polinomios, existe un polinomio $Q \in \mathcal{P}_k(X; Y')$ para algún $k \in \mathbb{N}$, tal que $\|h - Q\| < \varepsilon/2$. Consideremos su funcional lineal asociada $L_Q \in G_k'$. La versión más general del teorema de Bishop-Phelps mencionada al principio, nos dice que existe una funcional $L = L_P \in G_k'$ tal que

$$\|L_Q - L_P\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |L_P(u_0)| = \sup_{u \in C_{k,s}} |L_P(u)| \text{ para algún } u_0 \in C_{k,s},$$

donde P es un polinomio en $\mathcal{P}_k(X; Y')$. Notar que por (4.1) tenemos que $\|P\|_s = |L_P(u_0)|$. Ahora, si μ_{u_0} es la medida regular de Borel en $sB_{X''} \times B_{Y''}$ dada por el Lema 4.1.4, resulta

$$\|P\|_s = |L_P(u_0)| \leq \int_{sB_{X''} \times B_{Y''}} |\overline{P}(x'')(y'')| \, d|\mu_{u_0}|(x'', y'') \leq \|\overline{P}\|_s \|\mu_{u_0}\| \leq \|P\|_s.$$

En consecuencia, $\overline{P}$ alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ y $\|h - P\| < \varepsilon$. Esto demuestra el teorema. □

Observación 4.1.6. Si $0 < s \leq s_0 \leq 1$, bajo las mismas hipótesis sobre los espacios X y Z, el teorema anterior implica trivialmente la $\|\cdot\|_{s_0}$-densidad en $\mathcal{A}_u(X; Z)$ de aquellos polinomios cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma $\|\cdot\|_s$. En particular, el conjunto de polinomios cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|_s$-denso en $\mathcal{A}_u(X; Z)$. Esta última versión "fuerte" es en realidad equivalente al Lindenstrauss holomorfo probado en el Teorema 2.2.2. En efecto, que una versión fuerte implica el teorema de Lindenstrauss se deduce razonando como en la Observación 4.1.1. Para la recíproca, tomemos $h \in \mathcal{A}_u(X; Z)$ y $\varepsilon > 0$, y consideremos $h_s \in \mathcal{A}_u(X; Z)$ definida por $h_s(\cdot) = h(s\cdot)$. Por hipótesis existe un polinomio P tal que $\|h_s - P\| < \varepsilon$ y $\overline{P}$ alcanza la norma supremo $\|\cdot\|$. Ahora, si definimos $P_{\frac{1}{s}}(\cdot) = P(\frac{1}{s}\cdot)$, es claro que $\|P_{\frac{1}{s}}\|_s = \|P\|$ y que $\overline{P_{\frac{1}{s}}}$ alcanza la norma $\|\cdot\|_s$. Por otro lado, es sencillo ver que $\|h - P_{\frac{1}{s}}\|_s = \|h_s - P\| < \varepsilon$, lo cual nos muestra que se verifica la versión "fuerte" de Lindenstrauss con $s_0 = s$. Resulta clave aquí, que la función P que aproxima a h_s es un polinomio y no cualquier función en $\mathcal{A}_u(X; Y')$. De otra forma, no podríamos definir $P_{\frac{1}{s}}$.

Notemos que si $h \in H^\infty(\overset{\circ}{B}_X; Z)$ y $0 < s_0 < 1$, la función $h_{s_0}(\cdot) = h(s_0\cdot)$ pertenece a $\mathcal{A}_u(X; Z)$. En consecuencia, dados $0 < s \leq s_0 < 1$, si X' es separable y tiene la propiedad de aproximación y Z es un espacio dual o tiene la propiedad (β), entonces el conjunto de polinomios cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|_{s_0}$-denso en $H^\infty(\overset{\circ}{B}_X; Z)$. No sabemos si lo mismo sigue siendo válido cuando $s_0 = 1$.

4.2. Contraejemplos a la versión fuerte de Bishop-Phelps

Como mencionamos al comienzo de la sección anterior, desconocemos si vale el teorema de Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u$ en el caso a valores escalares. Sin embargo, en [6] se introdujeron las versiones fuertes de este teorema y, recurriendo a los clásicos preduales de espacios de Lorentz, se mostraron contraejemplos a algunas de ellas (ver Teorema 4.1.2). Cabe destacar que las correspondientes versiones fuertes del teorema de Lindenstrauss probadas en el Teorema 4.1.3 sí se verifican en estos casos. En esta sección, extenderemos los contraejemplos a las versiones fuertes de Bishop-Phelps probados en [6]; en todos los casos, se verifican las correspondientes versiones fuertes de Lindenstrauss.

En primer lugar, probamos el siguiente lema análogo a los Lemas 3.2.8 y 3.2.6. Recordemos (ver Sección 3.1) que dado X un espacio de Banach de sucesiones, decimos que $x \in B_X$ tiene la propiedad (**APE**) si

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ y } \delta > 0 \text{ tales que } \quad \|x + \lambda e_n\| \leq 1, \quad \forall\, |\lambda| \leq \delta \text{ y } n \geq n_0.$$

En lo que sigue, dado $0 < s < 1$, diremos que un elemento $a \in sB_X$ tiene la propiedad (s-**APE**) si

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ y } \delta > 0 \text{ tal que } \|a + \lambda e_n\| \leq s,\ \forall\, |\lambda| \leq \delta \text{ y } n \geq n_0. \qquad (s\text{-}\mathbf{APE})$$

Es claro que $x \in B_X$ satisface la propiedad (**APE**) si y sólo si $a = sx \in sB_X$ satisface la propiedad (s-**APE**). En particular, como era de esperar, todo elemento en la bola sB_{c_0} o en $sB_{d_*(w,1)}$ satisface la propiedad (s-**APE**).

Lema 4.2.1. *Sea X un espacio de Banach de sucesiones e Y un espacio estrictamente convexo. Sean $0 < s < 1$ y $f \in \mathcal{A}_u(X;Y)$.*

(i) *Fijemos $s < s_0 < 1$ y consideremos $a \in sB_X$. Luego*

$$\left\| \frac{D^j f(a)}{j!} \right\| \leq \frac{1}{(s_0 - s)^j} \|f\|_{s_0}$$

para todo $j \geq 1$.

(ii) *Supongamos que f alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ en un elemento $a \in sB_X$ que satisface la propiedad (s-**APE**) para ciertos $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$. Luego, $D^j f(a)(e_n) = 0$ para todo $j \geq 1$ y $n \geq n_0$.*

Demostración. (i) Fijemos $r = s_0 - \|a\|$ y $x \in \overset{\circ}{B}_X$, y consideremos la función holomorfa de una variable

$$\begin{array}{rcl} g_f : \{|\lambda| < 1\} & \longrightarrow & Y \\ \lambda & \mapsto & f(a + \lambda r x). \end{array}$$

Por las desigualdades de Cauchy tenemos $\left\| \frac{D^j g_f(0)}{j!} \right\| \leq \sup_{|\lambda|<1} \|g_f(\lambda)\| \leq \|f\|_{s_0}$ para todo $j \geq 1$. Ahora, notando que $D^j g_f(0) = r^j D^j f(a)(x)$ deducimos

$$r^j \left\| \frac{D^j f(a)(x)}{j!} \right\| \leq \|f\|_{s_0}$$

y dado que $x \in \overset{\circ}{B}_X$ era arbitrario, queda probado (i).

(ii) Fijado $n \geq n_0$, dado que f alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ en a, el módulo de la función holomorfa

$$\begin{array}{ccc} \{|\lambda| < \delta\} & \longrightarrow & Y \\ \lambda & \mapsto & f(a+\lambda e_n) \end{array}$$

alcanza un máximo local en el origen. Luego, esta función es constante por el principio de módulo máximo. Por otro lado, puesto que $\|a\| \leq s < 1$ y f es holomorfa en $\overset{\circ}{B}_X$, podemos considerar la expansión en serie de f en a,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j f(a)}{j!}(x-a).$$

Ahora, evaluando en $x = a + \lambda e_n$, obtenemos

$$f(a) = f(a+\lambda e_n) = f(a) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j f(a)}{j!}(e_n)\lambda^j$$

para todo $|\lambda| < \delta$. Luego, $0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j f(a)}{j!}(e_n)\lambda^j$ para todo $|\lambda| < \delta$ y en consecuencia $D^j f(a)(e_n) = 0$ para todo $j \geq 1$. □

La siguiente proposición mejora el Corolario 4.5 de [6] enunciado en el Teorema 4.1.2. La demostración es análoga a aquella de la Proposición 3.2.9.

Proposición 4.2.2. *Sean Y un espacio estrictamente convexo y w una sucesión admisible tal que $w \in \ell_N$ para algún $N \geq 2$. Dados $0 < s < s_0 \leq 1$, existe un polinomio N-homogéneo que no puede ser aproximado en la norma $\|\cdot\|_{s_0}$ (ni, en particular, en la norma supremo $\|\cdot\|$) por elementos de $\mathcal{A}_u(d_*(w,1);Y)$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$.*

Demostración. Fijemos un elemento de norma uno $y_0 \in Y$ y definamos $Q : d_*(w,1) \longrightarrow Y$ como

$$Q(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x(i)^N\right) y_0.$$

Luego $Q \in \mathcal{P}(^N d_*(w,1);Y)$ y su restricción a la bola $B_{d_*(w,1)}$ pertenece a $\mathcal{A}_u(d_*(w,1);Y)$. Tomemos ahora una función $f \in \mathcal{A}_u(d_*(w,1);Y)$ que alcanza su norma $\|\cdot\|_s$ en un elemento $a \in sB_{d_*(w,1)}$. Por el Lema 4.2.1 (ii), existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $D^j f(a)(e_n) = 0$ para todo $j \geq 1$ y todo $n \geq n_0$. Por otro lado, tenemos $\frac{D^N Q(a)}{N!} = Q$ y en consecuencia $\|\frac{D^N Q(a)}{N!}(e_n)\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, si $n \geq n_0$, el Lema 4.2.1 (i) nos dice que

$$1 = \left\| \frac{D^N Q(a)}{N!}(e_n) - \frac{D^N f(a)}{N!}(e_n) \right\| \leq \frac{1}{(s_0 - s)^N} \|Q - f\|_{s_0}$$

y en consecuencia Q no puede ser aproximado (en la norma $\|\cdot\|_{s_0}$) por una función $f \in \mathcal{A}_u(d_*(w,1);Y)$ que alcanza su norma $\|\cdot\|_s$. □

Como consecuencia de la proposición anterior, tomando $\mathcal{A}_u(d_*(w,1))$ con $w \in \ell_r$ para algún $1 < r < \infty$ obtenemos, en el caso a valores escalares, los ejemplos de espacios para los cuales las versiones fuertes del teorema de Bishop-Phelps fallan, pero las correspondientes versiones fuertes del teorema de Lindenstrauss se verifican. Notar que tanto el Lema 4.2.1 como la Proposición 4.2.2 siguen siendo válidos si consideramos $H^\infty(B^{\mathrm{o}}_{d_*(w,1)};Y)$ en lugar de $\mathcal{A}_u(d_*(w,1);Y)$.

En relación con los resultados para funciones a valores en un espacio con la propiedad (β), tenemos la siguiente proposición análoga a la Proposición 3.2.4.

Proposición 4.2.3. *Sea X un espacio de Banach. Una versión fuerte del teorema de Bishop-Phelps se verifica en $\mathcal{A}_u(X)$ si y sólo si se verifica en $\mathcal{A}_u(X;Z)$ para todo (o algún) espacio de Banach Z con la propiedad (β).*

Demostración. Supongamos primero que se verifica una versión fuerte de Bishop-Phelps en $\mathcal{A}_u(X)$. Luego, siguiendo la demostración del Lema 4.1.5, notando en este caso que f_0 alcanza la norma (en lugar de su extensión de Aron-Berner) y en consecuencia f alcanza la norma, se prueba que la versión fuerte de Bishop-Phelps se verifica en $\mathcal{A}_u(X;Z)$ para cualquier espacio Z con la propiedad (β).

Para la recíproca, vamos a seguir la demostración de la Proposición 3.2.4. Supongamos que las funciones en $\mathcal{A}_u(X;Z)$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ son $\|\cdot\|$-densas en $\mathcal{A}_u(X;Z)$ para algún espacio Z con la propiedad (β), y sean $\{(z_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in \Lambda\} \subset Z \times Z'$ y $0 \le \lambda < 1$ como en la definición de propiedad (β). Consideremos $\lambda < \lambda_0 < 1$, $\varepsilon < \lambda_0 - \lambda$ y $h \in \mathcal{A}_u(X)$ con $\|h\|_s = 1$, y veamos que h puede ser aproximada por funciones que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$. Fijemos $\alpha_0 \in \Lambda$ y tomemos

$$h_0(x) = h(x) z_{\alpha_0} \in \mathcal{A}_u(X;Z).$$

Por hipótesis, existe $f_0 \in \mathcal{A}_u(X;Z)$ que podemos suponer de norma $\|f_0\|_s = 1$, que alcanza su norma $\|\cdot\|_s$ en algún $a \in sB_X$ y tal que $\|h_0 - f_0\| < \varepsilon$. Luego, $\|g_\alpha \circ h_0 - g_\alpha \circ f_0\|_s \le \|g_\alpha \circ h_0 - g_\alpha \circ f_0\| < \varepsilon$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y en consecuencia

$$\|g_\alpha \circ f_0\|_s \le \varepsilon + \|g_\alpha \circ h_0\|_s \le \varepsilon + \lambda < \lambda_0 \quad \text{para todo } \alpha \ne \alpha_0. \tag{4.3}$$

Ahora bien, puesto que

$$1 = \|f_0(a)\|_s = \sup_{\alpha\in\Lambda} |g_\alpha(f_0(a))|,$$

de la desigualdad (4.3) se deduce que $|g_{\alpha_0} \circ f_0(a)| = \|g_{\alpha_0} \circ f_0\|_s = 1$. Por lo tanto, $f = g_{\alpha_0} \circ f_0$ alcanza la norma $\|\cdot\|_s$ y además, notando que $h = g_{\alpha_0} \circ h_0$, se tiene $\|h - f\| < \varepsilon$. Esto demuestra el resultado. □

Finalmente, tenemos las siguientes equivalencias en el mismo espíritu que las de las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.9. Ver también [8, Proposición 2.6] donde, con las mismas herramientas, se prueba una equivalencia similar.

Corolario 4.2.4. *Sean $0 < s < 1$, w una sucesión admisible y Z un espacio de Banach con la propiedad (β). Son equivalentes.*

(i) *El conjunto de funciones en $\mathcal{A}_u(d_*(w,1))$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{A}_u(d_*(w,1))$.*

(ii) *El conjunto de funciones en $\mathcal{A}_u(d_*(w,1);Z)$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{A}_u(d_*(w,1);Z)$.*

(iii) $w \notin \ell_N$ *para todo* $N \in \mathbb{N}$.

Demostración. En virtud de la Proposición 4.2.3, basta probar la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

La implicación (i) $\Rightarrow$ (iii) se deduce de la Proposición 4.2.2. Para la recíproca, procediendo como en la Proposición 3.2.9 vemos que si $w \notin \ell_N$, entonces el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}_N(d_*(w,1))$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_N(d_*(w,1))$. En efecto, si $w \notin \ell_N$ entonces $w \notin \ell_j$ para todo $j \leq N$ y en consecuencia $\mathcal{P}(^j d_*(w,1)) = \mathcal{P}_{wsc}(^j d_*(w,1))$ para todo $j \leq N$. Esto implica que $\mathcal{P}_N(d_*(w,1)) = \mathcal{P}_{N,wsc}(d_*(w,1))$ y, como consecuencia de [44, Proposición 10], todo polinomio en $\mathcal{P}_N(d_*(w,1))$ se aproxima por sumas finitas de polinomios de la forma $e'_{i_1}(\cdot)\cdots e'_{i_j}(\cdot)$ con $i_1,\ldots,i_j \in \mathbb{N}$ y $j \leq N$, donde $(e'_i)_i$ es la base canónica de $d(w,1)$. Dado que estos polinomios alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$, esto prueba que el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}_N(d_*(w,1))$ que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_N(d_*(w,1))$.

Luego, si $w \notin \ell_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$, el conjunto de polinomios que alcanzan la norma $\|\cdot\|_s$ es denso en el espacio de polinomios $\mathcal{P}(d_*(w,1))$ (de cualquier grado). Entonces, dada $h \in \mathcal{A}_u(d_*(w,1))$ y $\varepsilon > 0$, podemos considerar un polinomio q tal que $\|h-q\| < \varepsilon/2$, y luego un polinomio p que alcanza su norma $\|\cdot\|_s$ tal que $\|q-p\| < \varepsilon/2$. Esto demuestra la implicación (iii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Capítulo 5

Teoremas de Lindenstrauss y Bishop-Phelps en ideales

En este capítulo, abordaremos resultados del tipo Lindenstrauss y Bishop-Phelps en ideales de operadores multilineales. En la Sección 5.1 probaremos que, bajo ciertas hipótesis naturales, si un operador multilineal pertenece a un ideal de Banach entonces puede ser aproximado, en la norma del ideal, por multilineales *pertenecientes al mismo ideal* y tales que sus extensiones de Arens alcanzan sus normas (supremo) en el mismo punto. En particular, obtendremos teoremas de Lindenstrauss multilineal en cualquier ideal de formas trilineales y de operadores bilineales. Esto extiende los resultados del tipo Lindenstrauss multilineal probados en [11]. También mostraremos ejemplos de ideales de multilineales satisfaciendo las hipótesis *naturales* mencionadas anteriormente y, en consecuencia, satisfaciendo el teorema de Lindenstrauss. Por último, probaremos que el teorema de Lindenstrauss se satisface en cualquier ideal de polinomios 2-homogéneos, lo cual extiende al marco de ideales el Lindenstrauss polinomial 2-homogéneo demostrado en [20, 38]. En la Sección 5.2 estudiaremos versiones cuantitativas (del tipo Bollobás) de los teoremas de Lindenstrauss y Bishop-Phelps en ideales de multilineales. Mostraremos que las propiedades de Lindenstrauss-Bollobás (LBp) y de Bishop-Phelps-Bollobás ($BPBp$) son equivalentes en ideales de operadores definidos en espacios de Banach que son L-sumandos en sus biduales y veremos un contraejemplo a estas propiedades para cualquier ideal de operadores multilineales definidos en $\ell_1 \times \cdots \times \ell_1$. También probaremos un resultado del tipo Bishop-Phelps cuantitativo para ideales de operadores definidos en espacios uniformemente convexos.

Idea *detrás* de las demostraciones en ideales

Siguiendo la línea de la demostración del teorema de Lindenstrauss [65, Teorema 1], varias demostraciones relativas a resultados sobre densidad de funciones que alcanzan la norma, se basan en considerar una función cualquiera en el espacio en que estemos trabajando (ya sea de operadores lineales, multilineales o polinomios) y construir recursivamente una sucesión de funciones que “casi” alcanzan la norma (o cuyas extensiones al bidual “casi” alcanzan la norma) que converge a una función que alcanza la norma (o cuyas extensiones la alcanzan) y aproxima a aquella dada originalmente.

Para probar resultados en ideales, nos enfocaremos en las demostraciones de este tipo y veremos que si tomamos una función cualquiera en un ideal, la sucesión que se construye resulta ser una sucesión de funciones que también pertenecen al ideal y la convergencia a la función que alcanza la norma es una convergencia en la norma del ideal. Esto probará los resultados deseados. Cabe destacar que cuando hablamos de resultados del tipo Lindenstrauss o Bishop-Phelps en ideales, las funciones que son densas en el espacio son aquellas que alcanzan la norma supremo (como en toda esta clase de resultados), pero la densidad a la que nos referimos es en la norma del ideal y, por ende, resulta más difícil que la densidad en la norma supremo ya que la topología del ideal es más fuerte que la usual.

5.1. Lindenstrauss multilineal en ideales

En esta sección, demostramos teoremas del tipo Lindenstrauss en ideales de multilineales y polinomios. Los principales resultados serán el Teorema 5.1.3, donde se prueba el teorema de Lindenstrauss para ciertos ideales de formas multilineales que denominamos *estables*, y el Teorema 5.1.13, donde se prueba el teorema de Lindenstrauss para cualquier ideal de polinomios 2-homogéneos. También, exhibimos ejemplos que nos muestran que la *estabilidad* es una propiedad natural, verificada por la gran mayoría de los ideales conocidos; en consecuencia, en todos ellos se verifica el teorema de Lindenstrauss.

Comenzamos recordando un poco de notación que utilizaremos a lo largo de todo el capítulo. Dados los espacios de Banach $X_1, \dots, X_N, Y$, denotamos $\mathbf{X}$ al espacio producto $X_1 \times \cdots \times X_N$ y $\mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y)$ al espacio de operadores N-lineales continuos $\Phi\colon \mathbf{X} \to Y$. También, denotamos $B_{\mathbf{X}}$ a la bola unidad de la N-upla $\mathbf{X}$ dotada con la norma supremo, es decir, $B_{\mathbf{X}} = B_{X_1} \times \cdots \times B_{X_N}$ y $S_{\mathbf{X}} = S_{X_1} \times \cdots \times S_{X_N}$ a la esfera. Por otro lado, dada $\Phi \in \mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y)$ recordemos que las $N!$ extensiones de Arens (ver (1.4)) se obtienen por w^*-densidad y cada una de ellas depende del orden en el cual se extienden las variables. La extensión canónica $\overline{\Phi} : X_1'' \times \cdots \times X_N'' \longrightarrow Y''$ viene dada por

$$\overline{\Phi}(x_1'', \dots, x_N'') = w^* - \lim_{\alpha_1} \dots \lim_{\alpha_N} \Phi(x_{1,\alpha_1}, \dots, x_{N,\alpha_N})$$

donde $(x_{j,\alpha_j})_{\alpha_j} \subseteq X$ es una red (acotada) w^*-convergente a $x_j'' \in X_j''$, $j = 1, \dots, N$.

A continuación, la definición de ideal de operadores multilineales dada por Pietsch en [75].

Definición 5.1.1. *Un ideal normado de operadores N-lineales es un par $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ que para cada N-upla de espacios de Banach $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ y para todo espacio de Banach Y, satisface:*

(i) *$\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y) = \mathcal{U} \cap \mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(^N\mathbf{X}; Y)$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ define una norma en este espacio.*

(ii) *Para cada N-upla de espacios de Banach $\mathbf{Z} = Z_1 \times \cdots \times Z_N$, cada espacio de Banach W y operadores $T_i \in \mathcal{L}(Z_i; X_i)$, $1 \le i \le N$, $S \in \mathcal{L}(Y; W)$ y $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, el operador N-lineal $S \circ \Phi \circ (T_1, \dots, T_N)\colon \mathbf{Z} \longrightarrow W$ dado por*

$$S \circ \Phi \circ (T_1, \dots, T_N)(z_1, \dots, z_N) = S(\Phi(T_1(z_1), \dots, T_N(z_N)))$$

pertenece a $\mathcal{U}(\mathbf{Z}; W)$ con $\|S \circ \Phi \circ (T_1, \dots, T_N)\|_{\mathcal{U}} \le \|S\| \|\Phi\|_{\mathcal{U}} \|T_1\| \dots \|T_N\|$.

(iii) $(z_1, \dots, z_N) \mapsto z_1 \cdots z_N$ *pertenece a* $\mathcal{U}(\mathbb{C}^N; \mathbb{C})$ *y tiene norma* $\| \cdot \|_{\mathcal{U}}$ *igual a uno.*

Si $(\mathcal{U}(\mathbf{X}, Y), \| \cdot \|_{\mathcal{U}})$ *es completo para todos* $\mathbf{X}$ *e* Y*, decimos que* $(\mathcal{U}, \| \cdot \|_{\mathcal{U}})$ *es un ideal de Banach de operadores* N*-lineales. En el caso a valores escalares, esto es, cuando solamente consideramos* $Y = W = \mathbb{K}$ *en* (i) *y* (ii)*, decimos que* $\mathcal{U}$ *es un ideal de formas* N*-lineales y simplemente notamos* $\mathcal{U}(\mathbf{X})$.

Notemos que una combinación de (ii) y (iii) nos muestra que $\| \cdot \| \leq \| \cdot \|_{\mathcal{U}}$ para cualquier ideal $\mathcal{U}$. En efecto, con la misma notación de antes, consideremos $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ y sean $(a_1, \dots, a_N) \in B_{\mathbf{X}}$ tales que $\|\Phi(a_1, \dots, a_N)\| > \|\Phi\| - \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Por otro lado, para cada $1 \leq i \leq N$ sea $T_i \colon \mathbb{C} \to X_i$ dado por $T_i(z_i) = z_i a_i$. Luego,

$$\Phi \circ (T_1, \dots, T_N)(z_1, \dots, z_N) = z_1 \cdots z_N \Phi(a_1, \dots, a_N)$$

y por (iii) resulta $\|\Phi \circ (T_1, \dots, T_N)\|_{\mathcal{U}} = \|\Phi(a_1, \dots, a_N)\| > \|\Phi\| - \varepsilon$. Finalmente, esto junto con la propiedad (ii) nos dice que

$$\|\Phi\| - \varepsilon < \|\Phi \circ (T_1, \dots, T_N)\|_{\mathcal{U}} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{U}} \|T_1\| \dots \|T_N\| \leq \|\Phi\|_{\mathcal{U}}$$

y dado que el $\varepsilon > 0$ era arbitrario, resulta $\|\Phi\| \leq \|\Phi\|_{\mathcal{U}}$ como se quería probar. Esto nos muestra que, como decíamos al comienzo, la densidad en la norma del ideal que queremos demostrar en los resultados de este capítulo es más difícil que la densidad en la norma usual.

Para cada $N \in \mathbb{N}$ y cada $\mathbf{j} = \{j_1, \dots, j_p\}$ subconjunto de $\{1, \dots, N\}$ con $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$, definimos $P_{\mathbf{j}} \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ la proyección dada por

$$P_{\mathbf{j}}(x_1, \dots, x_N) := (y_1, \dots, y_N), \quad \text{donde} \quad y_k = \begin{cases} x_k & \text{if} \quad k \in \mathbf{j} \\ 0 & \text{if} \quad k \notin \mathbf{j} \end{cases}.$$

Si $\mathbf{j}^c$ denota el complemento de $\mathbf{j}$ en $\{1, \dots, N\}$, entonces $P_{\mathbf{j}} + P_{\mathbf{j}^c} = Id_{\mathbf{X}}$, la identidad en $\mathbf{X}$.

Definamos a continuación la propiedad de *estabilidad* para ideales de formas multilineales, que será suficiente para la validez de un teorema del tipo Lindenstrauss.

Definición 5.1.2. *Decimos que un ideal de formas* N*-lineales* $\mathcal{U}$ *es estable en* $\mathbf{X}$ *si existe una constante* $K > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbf{X}$ *y todo* $\mathbf{j} \subset \{1, \dots, N\}$*, la función* $V_{\mathbf{j},\mathbf{a}} \colon \mathcal{L}(^N\mathbf{X}) \to \mathcal{L}(^N\mathbf{X})$ *definida por*

$$V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(\mathbf{x}) = \phi(P_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) + P_{\mathbf{j}^c}(\mathbf{a}))\, \phi(P_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) + P_{\mathbf{j}^c}(\mathbf{x})) \tag{5.1}$$

satisface

$$V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi) \in \mathcal{U}(\mathbf{X}) \quad \textit{para todo } \phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}) \quad \textit{y} \quad \|V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)\|_{\mathcal{U}} \leq K \|\phi\|_{\mathcal{U}}^2 \|a_1\| \cdots \|a_N\|. \tag{5.2}$$

Para darnos una idea de lo que significa ser estable, tomemos $N = 4$ y $\mathbf{j} = \{1, 2\}$. En este caso, lo que se le impone a una forma 4-lineal $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X})$ es que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \phi(x_1, x_2, a_3, a_4)\, \phi(a_1, a_2, x_3, x_4)$$

también pertenezca a $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ para todo $(a_1, \dots, a_4)$, con cierto control sobre la norma.

El siguiente es el resultado principal de esta sección. La demostración está basada en aquellas de [11, Teorema 2.1 y Corolario 2.5] donde se demuestran, respectivamente, los teoremas de Lindenstrauss para formas multilineales y para el ideal de formas multilineales integrales (ver Sección 1.4); más en general, la demostración de [11, Corolario 2.5] se aplica a cualquier ideal de formas multilineales que sea dual a una norma tensorial asociativa (ver los comentarios previos a la Proposición 5.1.11 para más detalles).

Teorema 5.1.3. *Si el ideal de formas N-lineales $\mathcal{U}$ es estable en $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$, el conjunto de formas N-lineales en $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma supremo en la misma N-upla es $\| \cdot \|_{\mathcal{U}}$-denso en $\mathcal{U}(\mathbf{X})$.*

Demostración. Fijados $\phi \in \mathcal{L}(^N\mathbf{X})$, $\|\phi\| = 1$ y $0 < \varepsilon < 1$, en la demostración de [11, Teorema 2.1] se construye una sucesión de formas multilineales $(\phi_n)_n$ con norma $\|\phi_n\| \geq 1$, dadas recursivamente por

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_{n+1} = \phi_n + \sum_{\mathbf{j}} \frac{\alpha_n}{\|\phi_n\|} V_{\mathbf{j},\mathbf{a}^n}(\phi_n), \tag{5.3}$$

donde $V_{\mathbf{j},\mathbf{a}^n}$ se define como en (5.1) para todo $\mathbf{j} \subset \{1, \ldots, N\}$, $(\alpha_i)_i$ es una sucesión de números positivos que satisface $2^{N+2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \varepsilon < 1$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}^n \in B_{\mathbf{X}}$ puede elegirse de forma tal que ϕ_n "casi" alcanza la norma en $\mathbf{a}^n$. No sin esfuerzo, se prueba en [11, Teorema 2.1] que eligiendo cuidadosamente la sucesión $(\alpha_i)_i$ y cada $\mathbf{a}^n$, la sucesión de formas multilineales $(\phi_n)_n$ converge a un elemento $\psi \in \mathcal{L}(^N\mathbf{X})$ cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma en la misma N-upla y tal que $\|\phi - \psi\| < \varepsilon$. De esta manera, se demuestra el teorema de Lindenstrauss multilineal.

Ahora, fijemos $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X})$, $\|\phi\| = 1$ y $0 < \varepsilon < (\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^{-2} K^{-1}$, donde K es la constante dada en (5.2). La estabilidad de $\mathcal{U}$ implica fácilmente que cada ϕ_n en (5.3) pertenece a $\mathcal{U}(\mathbf{X})$. Nuestro objetivo será probar que la multilineal ψ a la que converge la sucesión $(\phi_n)_n$, también pertenece al ideal $\mathcal{U}$ y que $\|\phi - \psi\|_{\mathcal{U}} < K(\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^2 \varepsilon$. Para ello, seguimos los pasos de la demostración de [11, Corolario 2.5]. Notar que por la construcción dada en (5.3), la desigualdad en (5.2) y dado que $\|\phi_n\| \geq 1$ para todo n, tenemos

$$\|\phi_{n+1}\|_{\mathcal{U}} \leq \|\phi_n\|_{\mathcal{U}} + 2^N \alpha_n \|V_{\mathbf{j},\mathbf{a}^n}(\phi_n)\|_{\mathcal{U}} \leq \|\phi_n\|_{\mathcal{U}} + 2^N \alpha_n K \|\phi_n\|_{\mathcal{U}}^2 \tag{5.4}$$

y también

$$\|\phi_{n+1} - \phi_n\|_{\mathcal{U}} \leq 2^N \alpha_n K \|\phi_n\|_{\mathcal{U}}^2. \tag{5.5}$$

De (5.4) se deduce fácilmente que

$$\|\phi_{n+1}\|_{\mathcal{U}} \leq \|\phi\|_{\mathcal{U}} + 2^N \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K \|\phi_i\|_{\mathcal{U}}^2. \tag{5.6}$$

Por otro lado, razonando por inducción, se tiene que $\|\phi_n\|_{\mathcal{U}} \leq \|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, supongamos que $\|\phi_i\|_{\mathcal{U}} \leq \|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego, por la desigualdad vista en (5.6) resulta

$$\begin{aligned}
\|\phi_{n+1}\|_{\mathcal{U}} &\leq \|\phi\|_{\mathcal{U}} + 2^N \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^2 \\
&\leq \|\phi\|_{\mathcal{U}} + K(\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^2\, 2^N \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \\
&\leq \|\phi\|_{\mathcal{U}} + K(\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^2 \varepsilon \leq \|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1, \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

donde las desigualdades en (5.7) se deben a la elección de la sucesión $(\alpha_i)_i$ y del ε fijado al comienzo.

Ahora bien, volviendo a (5.5) obtenemos

$$\|\phi_{n+1} - \phi_n\|_{\mathcal{U}} \leq 2^N \alpha_n K(\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^2 \qquad (5.8)$$

y usando nuevamente que $2^{N+2}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \varepsilon$, probamos que $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i+1} - \phi_i$ es absolutamente convergente en $(\mathcal{U}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$. En consecuencia, la sucesión $(\phi_n)_n$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-convergente a una forma multilineal $\psi_1 \in \mathcal{U}(\mathbf{X})$. Dado que $\|\psi_1 - \phi_n\| \leq \|\psi_1 - \phi_n\|_{\mathcal{U}}$ para todo n y que $(\phi_n)_n$ converge (en norma supremo) a ψ, se deduce que $\psi = \psi_1$ y luego $\psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X})$. Además, se deduce de (5.8) que

$$\|\psi - \phi\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_{i+1} - \phi_i\|_{\mathcal{U}} \leq 2^N \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i K(\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^2 < K(\|\phi\|_{\mathcal{U}} + 1)^2 \varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$ puede ser arbitrariamente chico, esto demuestra que ϕ puede aproximarse, en la norma del ideal, por multilineales en $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma supremo en la misma N-upla. □

Es sencillo notar que si la multilineal ϕ en la demostración anterior es w^*-continua en la última variable, entonces cada ϕ_n de la sucesión construída también lo es y en consecuencia ψ es w^*-continua en la última variable. Esto será de gran utilidad para extender el teorema anterior al caso de operadores multilineales a valores vectoriales.

Dada una forma $(N+1)$-lineal $\phi\colon X_1 \times \cdots \times X_N \times X_{N+1} \to \mathbb{K}$, podemos definir el operador N-lineal asociado $\tilde{\phi}\colon X_1 \times \cdots \times X_N \to X'_{N+1}$ de manera natural:

$$\tilde{\phi}(x_1, \ldots, x_N)(x_{N+1}) = \phi(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}).$$

Notemos que, a pesar de la notación en minúscula, $\tilde{\phi}$ es un operador a valores vectoriales. Ahora, dado un ideal de operadores N-lineales $\mathcal{U}$, se define el ideal de formas $(N+1)$-lineales $\widetilde{\mathcal{U}}$ de la siguiente manera:

$$\phi \in \widetilde{\mathcal{U}} \quad \text{si y sólo si} \quad \tilde{\phi} \in \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \|\phi\|_{\widetilde{\mathcal{U}}} := \|\tilde{\phi}\|_{\mathcal{U}}. \qquad (5.9)$$

Por otro lado, un ideal de Banach $\mathcal{U}$ se dice *regular* si $J_Y \circ \Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y'')$ implica $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ con $\|\Phi\|_{\mathcal{U}} = \|J_Y \circ \Phi\|_{\mathcal{U}}$, donde $J_Y\colon Y \hookrightarrow Y''$ es la inclusión canónica. Más adelante mencionaremos algunos ejemplos de ideales de operadores multilineales regulares y no regulares. Para una lectura más detallada, ver [43]. Finalmente, razonando como en [11, Teorema 2.3], obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1.4. *Con la notación de arriba, si $\mathcal{U}$ es un ideal regular y $\widetilde{\mathcal{U}}$ es estable en $X_1 \times \cdots \times X_N \times Y'$, entonces el conjunto de operadores N-lineales en $\mathcal{U}(\mathbf{X};Y)$ cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma supremo en la misma N-upla es $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-denso en $\mathcal{U}(\mathbf{X};Y)$.*

Demostración. Sean $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X};Y)$ y $\varepsilon > 0$. Definamos la forma $(N+1)$-lineal $\phi\colon X_1 \times \cdots \times X_N \times Y' \to \mathbb{K}$ dada por

$$\phi(x_1,\ldots,x_N,y') = y'(\Phi(x_1,\ldots,x_N)).$$

Si consideramos $\tilde{\phi}\colon \mathbf{X} \to Y''$ la cual viene dada por

$$\tilde{\phi}(x_1,\ldots,x_N)(y') = \phi(x_1,\ldots,x_N,y') = y'(\Phi(x_1,\ldots,x_N)),$$

entonces resulta $J_Y \circ \Phi = \tilde{\phi}$ y, por la propiedad (ii) en la Definición 5.1.1, puesto que $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X};Y)$ se tiene $\tilde{\phi} \in \mathcal{U}(\mathbf{X};Y'')$. Esto nos muestra que $\phi \in \widetilde{\mathcal{U}}(X_1 \times \cdots \times X_N \times Y')$. Además, es claro que ϕ es w^*-continua en la última variable.

Ahora, como $\widetilde{\mathcal{U}}$ es estable en $X_1 \times \cdots \times X_N \times Y'$, por el Teorema 5.1.3 y la observación hecha al final del mismo, existe una forma $(N+1)$-lineal $\psi \in \widetilde{\mathcal{U}}(X_1 \times \cdots \times X_N \times Y')$ w^*-continua en la última variable tal que todas sus extensiones de Arens alcanzan la norma supremo simultáneamente y $\|\phi - \psi\|_{\widetilde{\mathcal{U}}} < \varepsilon$. Como consecuencia de la w^*-continuidad, para cada $(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbf{X}$, la aplicación

$$y' \mapsto \psi(x_1,\cdots,x_N,y')$$

define un elemento en $J_Y(Y) \subseteq Y''$. Identificando $J_Y(Y) = Y$, esto nos permite definir

$$\begin{gathered}\Psi\colon X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow Y \\ \Psi(x_1,\ldots,x_N)(y') = \psi(x_1,\cdots,x_N,y'),\end{gathered}$$

el cual resulta un operador multilineal en $\mathcal{U}(\mathbf{X};Y)$ puesto que $\psi \in \widetilde{\mathcal{U}}$, $\tilde{\psi} = J_Y \circ \Psi$ y $\mathcal{U}$ es un ideal regular. Además, por definición de la norma en $\widetilde{\mathcal{U}}$, se tiene

$$\|\Phi - \Psi\|_{\mathcal{U}} = \|J_Y \circ \Phi - J_Y \circ \Psi\|_{\mathcal{U}} = \|\tilde{\phi} - \tilde{\psi}\|_{\mathcal{U}} = \|\phi - \psi\|_{\widetilde{\mathcal{U}}} < \varepsilon.$$

Luego, sólo resta ver que las extensiones de Arens de Ψ alcanzan la norma supremo en la misma N-upla. Consideremos la $(N+1)$-upla $(a_1'',\ldots,a_N'',y_0''') \in B_{\mathbf{X}''} \times B_{Y'''}$ en la que todas las extensiones de Arens de ψ alcanzan la norma supremo. Dada una permutación θ de $\{1,\ldots,N\}$, llamemos $\overline{\Psi_\theta}$ a la extensión de Arens dada por

$$\overline{\Psi_\theta}(x_1'',\ldots,x_N'') = w^* - \lim_{\alpha_{\theta(1)}} \ldots \lim_{\alpha_{\theta(N)}} \Psi(x_{1,\alpha_1},\ldots,x_{N,\alpha_N})$$

donde $(x_{j,\alpha_j})_{\alpha_j} \subseteq X_j$ es una red w^*-convergente a $x_j'' \in X_j''$, $j = 1,\ldots,N$. Para cada permutación θ sea τ la permutación de $\{1,\ldots,N+1\}$ dada por

$$\tau(k) = \theta(k) \quad \text{si } 1 \leq k \leq N \quad \text{y} \quad \tau(N+1) = N+1.$$

Luego,

$$\|\overline{\Psi_\theta}\| = \|\Psi\| = \|\psi\| = \|\overline{\psi_\tau}\| = |\overline{\psi_\tau}(a_1'',\ldots,a_N'',y_0''')| = |y_0'''(\overline{\Psi_\theta}(a_1'',\ldots,a_N''))| \leq \|\overline{\Psi_\theta}\|$$

y de aquí se deduce que $\|\overline{\Psi_\theta}(a_1'',\ldots,a_N'')\| = \|\overline{\Psi_\theta}\|$. Luego, queda demostrado el resultado. $\square$

Como vemos en la siguiente observación, para obtener un teorema del tipo Lindenstrauss en un ideal $\mathcal{U}$ de operadores multilineales, alcanza con pedir una hipótesis de "estabilidad" menos restrictiva que las hipótesis pedidas en el corolario anterior.

Observación 5.1.5. Sea $\mathcal{U}$ un ideal de Banach de operadores N-lineales. Supongamos que para cada $\phi \in \widetilde{\mathcal{U}}$ de la forma $\phi(x_1, \dots, x_N, y') = y'(\Phi(x_1, \dots, x_N))$ con $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, y para todo $\mathbf{j} \subseteq \{1, \dots, N+1\}$ y $\mathbf{a} \in X_1 \times \cdots \times X_N \times Y'$, se verifica

$$V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(x_1, \dots, x_N, y') = y'(\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_N)) \quad \text{para algún } \Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}} \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y) \tag{5.10}$$

con $\|V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)\|_{\mathcal{U}} \leq K\|\phi\|^2_{\widetilde{\mathcal{U}}}\|a_1\| \cdots \|a_N\|$, donde $V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)$ está dado por (5.1). En otras palabras, $\widetilde{V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)} = J_Y \circ \Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}$ con $\|\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}\|_{\mathcal{U}} \leq K\|\Phi\|^2_{\mathcal{U}}\|a_1\| \cdots \|a_N\|$. Luego, razonando como en la demostración del Teorema 5.1.3, se puede probar el teorema de Lindenstrauss en $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$. En efecto, dados $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ y $\varepsilon > 0$, consideramos $\phi \in \widetilde{\mathcal{U}}$ definida como antes y, siguiendo los pasos de la mencionada demostración, vemos que la condición (5.10) implica que cada ϕ_n es de la forma $\phi_n(x_1, \dots, x_N, y') = y'(\Phi_n(x_1, \dots, x_N))$ para algún operador $\Phi_n \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$. De aquí se deduce que $\psi \in \widetilde{\mathcal{U}}$ es de la forma $\psi(x_1, \dots, x_N, y') = y'(\Psi(x_1, \dots, x_N))$ para un $\Psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$. En consecuencia,

$$\|\Phi - \Psi\|_{\mathcal{U}} = \|\phi - \psi\|_{\widetilde{\mathcal{U}}} < \varepsilon$$

y las extensiones de Ψ alcanzan simultáneamente la norma.

Es sencillo probar que si $\mathcal{U}$ es regular y $\widetilde{\mathcal{U}}$ es estable (como en las hipótesis del Corolario 5.1.4), entonces se verifica (5.10). Como veremos más adelante, hay ideales que no son regulares pero que sí satisfacen la condición (5.10) y, por lo tanto, el teorema de Lindenstrauss.

En la siguiente sección veremos que la mayoría de los ejemplos conocidos de ideales de formas multilineales son estables y, entonces, satisfacen el teorema de Lindenstrauss. Pero primero, veamos que la propiedad de estabilidad es cumplida por *todo* ideal de formas 3-lineales y que la condición (5.10) se satisface para *todo* ideal de operadores bilineales. Como consecuencia, obtenemos el teorema de Lindenstrauss para ideales de formas 3-lineales y de operadores bilineales.

Corolario 5.1.6. *Sea $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de formas 3-lineales. Luego, para todo $\mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times X_3$, el conjunto de formas 3-lineales en $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma supremo en la misma 3-upla es $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-denso en $\mathcal{U}(\mathbf{X})$.*

Demostración. Como ya mencionamos, en virtud del Teorema 5.1.3 bastará ver que $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ es estable en $\mathbf{X}$ para cualquier 3-upla de espacios. Tomemos $\phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X})$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{X}$ con $\|a_k\| = 1$ para $1 \leq k \leq 3$ y sea $\mathbf{j} \subset \{1, 2, 3\}$. Mostraremos que (5.2) se satisface para $\mathbf{j} = \{1, 2\}$, siendo los casos restantes completamente análogos.

Consideremos el operador lineal $T_\phi \colon X_3 \to X_3$ definido por $T_\phi(x_3) = \phi(a_1, a_2, x_3)a_3$. Luego $\|T_\phi\| \leq \|\phi\| \leq \|\phi\|_{\mathcal{U}}$ y

$$V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, a_3)\phi(a_1, a_2, x_3) = \phi(x_1, x_2, T_\phi(x_3)) = \phi \circ (I, I, T_\phi)(x_1, x_2, x_3).$$

Dado que $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ es un ideal de Banach, $V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi) \in \mathcal{U}(\mathbf{X})$ y $\|V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)\|_{\mathcal{U}} \leq \|\phi\|^2_{\mathcal{U}}$. $\square$

Corolario 5.1.7. *Sea $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de operadores bilineales y sean X_1, X_2, Y espacios de Banach. Luego, el conjunto de operadores bilineales en $\mathcal{U}(X_1 \times X_2; Y)$ cuyas extensiones de Arens alcanzan la norma supremo en la misma 2-upla es $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-denso en $\mathcal{U}(X_1 \times X_2; Y)$.*

Demostración. En virtud de la Observación 5.1.5, bastará ver que para cada subconjunto $\mathbf{j} \subseteq \{1, 2, 3\}$ y cada $\mathbf{a} = (a_1, a_2, b') \in X_1 \times X_2 \times Y'$, se satisface (5.10) con control sobre la norma. Consideremos $\Phi \in \mathcal{U}(X_1 \times X_2; Y)$, ϕ la forma 3-lineal asociada y veamos los casos $\mathbf{j} = \{1\}$ y $\{3\}$, siendo los otros completamente análogos.

Cuando $\mathbf{j} = \{1\}$ tenemos

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(x_1, x_2, y') &= \phi(x_1, a_2, b')\, \phi(a_1, x_2, y') \\ &= b'(\Phi(x_1, a_2))\, y'(\Phi(a_1, x_2)) \\ &= y'(\Phi(b'(\Phi(x_1, a_2))a_1, x_2)) \\ &= y'(\Phi \circ (T, I)(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

donde $T\colon X_1 \to X_1$ es el operador lineal dado por $T(x_1) = b'(\Phi(x_1, a_2))a_1$. Luego, tomando $\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}} = \Phi \circ (T, I)$ resulta $V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(x_1, x_2, y') = y'(\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(x_1, x_2))$ con $\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}} \in \mathcal{U}(X_1 \times X_2; Y)$ y $\|\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}\|_{\mathcal{U}} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{U}}^2 \|a_1\| \|a_2\| \|b'\|$. En el caso $\mathbf{j} = \{3\}$, razonando de manera análoga vemos que $V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(x_1, x_2, y') = y'(S \circ \Phi(x_1, x_2))$, donde $S\colon Y \to Y$ está dada por $S(y) = b'(y)\Phi(a_1, a_2)$. Luego, $\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}} = S \circ \Phi$ satisface lo pedido en este caso. $\square$

Ejemplos de ideales que satisfacen el teorema de Lindenstrauss

Comencemos con los ejemplos más sencillos de ideales que satisfacen el teorema de Lindenstrauss. Recordemos que $\mathcal{L}_f$ denota el ideal de operadores multilineales de tipo finito y que un operador N-lineal Φ pertenece a $\mathcal{L}_f({}^N\mathbf{X}; Y)$ si existen $m \in \mathbb{N}$, $(x_1^k)', \ldots, (x_m^k)'$ en X_k' ($k = 1, \ldots, N$) e $y_1, \ldots, y_m$ en Y tales que

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{m} (x_j^1)'(x_1) \cdots (x_j^N)'(x_N) y_j.$$

La clausura (con la norma supremo) de la clase de operadores multilineales de tipo finito es el ideal de *operadores multilineales aproximables* denotado por $\mathcal{L}_{app}$. Ahora, todo operador multilineal de tipo finito en $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ tiene una única extensión de Arens, que resulta w^*-continua en cada coordenada. Luego, $\mathcal{L}_f({}^N\mathbf{X}; Y)$ puede pensarse como subespacio isométrico de las funciones continuas en $(B_{X_1''}, w^*) \times \cdots \times (B_{X_N''}, w^*)$ a valores en Y, vía la aplicación

$$(x_1'', \ldots, x_N'') \mapsto \sum_{j=1}^{m} x_1''((x_j^1)') \cdots x_N''((x_j^N)') y_j.$$

Por el teorema de Banach-Alaoglu, esta extensión alcanza la norma supremo. En consecuencia, todo ideal de Banach $\mathcal{U}$ en el cual los operadores multilineales de tipo finito sean $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-densos satisface el teorema de Lindenstrauss. Este es el caso, por ejemplo, de los ideales de multilineales aproximables y de multilineales nucleares (que definiremos más adelante). Más en general, si $\mathcal{U}$ es un ideal minimal de operadores multilineales, entonces las multilineales de tipo finito son $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-densas en $\mathcal{U}$ (ver [49, 50]) y en consecuencia se satisface el teorema de Lindenstrauss.

Como vimos en el Teorema 5.1.3, para que un ideal de formas multilineales satisfaga el teorema de Lindenstrauss es suficiente pedir la condición de estabilidad sobre el mismo. En [25, 30] (con diferentes terminologías) se estudiaron sucesiones coherentes y multiplicativas de ideales de polinomios. Aquí, presentaremos una versión multilineal de estas propiedades (ver [26], donde se consideran propiedades similares), la cual, junto con la propiedad de simetría que definimos a continuación, implicará la condición (5.2) de estabilidad.

Fijemos $N \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$. Si θ es una permutación de $\{1, \ldots, N\}$, notamos

$$\mathbf{X}_\theta = X_{\theta(1)} \times \cdots \times X_{\theta(N)}$$

y $\mathbf{x}_\theta = (x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)})$. Decimos que el ideal de operadores multilineales $\mathcal{U}_N$ es **simétrico** si para cada $\Phi \in \mathcal{U}_N(\mathbf{X}; Y)$ y cada permutación θ de $\{1, \ldots, N\}$, el operador N-lineal $\theta\Phi\colon \mathbf{X}_\theta \longrightarrow Y$,

$$\theta\Phi(\mathbf{x}_\theta) = \Phi(\mathbf{x})$$

pertenece a $\mathcal{U}_N(\mathbf{X}_\theta; Y)$ con $\|\theta\Phi\|_{\mathcal{U}_N} = \|\Phi\|_{\mathcal{U}_N}$.

Definición 5.1.8. *Sea $\mathfrak{U} = (\mathcal{U}_n)_n$ una sucesión donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ es un ideal de Banach de formas n-lineales. Decimos que $\mathfrak{U}$ es **multiplicativa** si existen constantes positivas C y D tales que, para cada $N \in \mathbb{N}$ y cada $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$:*

(i) *Si $\phi \in \mathcal{U}_N(\mathbf{X})$ y $a_N \in X_N$, la forma $(N-1)$-lineal ϕ_{a_N} dada por*

$$\phi_{a_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}) = \phi(x_1, \ldots, x_{N-1}, a_N),$$

pertenece a $\mathcal{U}_{N-1}(X_1 \times \cdots \times X_{N-1}; Y)$ y $\|\phi_{a_N}\|_{\mathcal{U}_{N-1}} \leq C\|\phi\|_{\mathcal{U}_N}\|a_N\|$.

(ii) *Si $\phi \in \mathcal{U}_k(X_1 \times \cdots \times X_k)$ y $\psi \in \mathcal{U}_{N-k}(X_{k+1} \times \cdots \times X_N)$, la forma N-lineal $\phi \cdot \psi$ dada por*

$$(\phi \cdot \psi)(x_1, \ldots, x_N) = \phi(x_1, \ldots, x_k)\psi(x_{k+1}, \ldots, x_N)$$

pertenece a $\mathcal{U}_N(\mathbf{X})$ and $\|\phi \cdot \psi\|_{\mathcal{U}_N} \leq D^N \|\phi\|_{\mathcal{U}_k}\|\psi\|_{\mathcal{U}_{N-k}}$.

Observación 5.1.9. *Sea $\mathfrak{U} = (\mathcal{U}_n)_n$ una sucesión multiplicativa de ideales de formas multilineales, tal que cada $\mathcal{U}_n$ es simétrico. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, el ideal $\mathcal{U}_n$ es estable en cualquier producto de espacios de Banach.*

Demostración. Sean $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach, $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ y $\phi \in \mathcal{U}_n(\mathbf{X})$. Al igual que en la Definición 5.1.2, consideremos $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{X}$, $\mathbf{j} = \{j_1, \ldots, j_p\}$ un subconjunto de $\{1, \ldots, N\}$ con $j_1 < \cdots < j_p$ y

$$V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(\mathbf{x}) = \phi(P_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) + P_{\mathbf{j}^c}(\mathbf{a}))\phi(P_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) + P_{\mathbf{j}^c}(\mathbf{x})),$$

y veamos que se verifica la condición (5.2) de estabilidad. Si llamamos $\phi_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \phi(P_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) + P_{\mathbf{j}^c}(\mathbf{a}))$ y $\phi_{\mathbf{j}^c}(\mathbf{x}) = \phi(P_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}) + P_{\mathbf{j}^c}(\mathbf{x}))$, dado que la sucesión $\mathfrak{U} = (\mathcal{U}_n)_n$ es multiplicativa, la condición (i) en la Definición 5.1.8 junto con la propiedad de simetría nos dicen que $\phi_{\mathbf{j}} \in \mathcal{U}_p(\mathbf{X}_{\mathbf{j}})$ y $\phi_{\mathbf{j}^c} \in \mathcal{U}_{n-p}(\mathbf{X}_{\mathbf{j}^c})$, donde $\mathbf{X}_{\mathbf{j}} = X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_p}$ y $\mathbf{X}_{\mathbf{j}^c} = X_{k_1} \times \cdots \times X_{k_{n-p}}$ con

$\mathbf{j}^c = \{k_1, \ldots, k_{n-p}\}$, $k_1 < \cdots < k_{n-p}$. Luego, por la condición (ii) de multiplicatividad resulta $\phi_{\mathbf{j}} \cdot \phi_{\mathbf{j}^c} \in \mathcal{U}_n(\mathbf{X}_{\mathbf{j}} \times \mathbf{X}_{\mathbf{j}^c})$. Además, como consecuencia de las acotaciones en (i), (ii) y por la propiedad de simetría, se verifican las desigualdades

$$\begin{aligned} \|\phi_{\mathbf{j}} \cdot \phi_{\mathbf{j}^c}\|_{\mathcal{U}_n} &\leq D^n \|\phi_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{U}_p} \|\phi_{\mathbf{j}^c}\|_{\mathcal{U}_{n-p}} \\ &\leq D^n C^{n-p} \|\phi\|_{\mathcal{U}_n} \|a_{j_1}\| \cdots \|a_{j_p}\| C^p \|\phi\|_{\mathcal{U}_n} \|a_{k_1}\| \cdots \|a_{k_{n-p}}\| \\ &= D^n C^n \|\phi\|^2_{\mathcal{U}_n} \|a_1\| \cdots \|a_n\|. \end{aligned}$$

Ahora, considerando θ la permutación de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $\theta(j_i) = i$ para $i = 1, \ldots, p$ y $\theta(k_i) = p + i$ para $i = 1, \ldots, n - p$, nuevamente por la simetría tenemos que $V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi) = \theta(\phi_{\mathbf{j}} \cdot \phi_{\mathbf{j}^c}) \in \mathcal{U}_n(\mathbf{X})$ con $\|V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)\|_{\mathcal{U}_n} \leq D^n C^n \|\phi\|^2_{\mathcal{U}_n} \|a_1\| \cdots \|a_n\|$, lo cual nos muestra que $\mathcal{U}_n$ es un ideal estable. $\square$

La observación anterior nos muestra que multiplicatividad y simetría son condiciones suficientes para la validez del teorema de Lindenstrauss en ideales. Lo que hace al concepto de multiplicatividad interesante en este marco, es que ya se ha probado que la mayoría de los ideales usuales de formas multilineales son multiplicativos. En [29, 31, 70] pueden verse las demostraciones en el caso polinomial, siendo las del caso multilineal completamente análogas. Entre otras, las sucesiones de ideales de formas nucleares, integrales, extendibles, múltiple p-sumantes ($1 \leq p < \infty$) y r-dominadas son multiplicativas. Cabe destacar que todos estos ideales resultan, además, simétricos. A continuación, vemos las definiciones de los ideales mencionados; las mismas incluyen el caso a valores vectoriales, aunque la propiedad de multiplicatividad es exclusiva de los operadores a valores escalares. Como es usual, dados $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach, notamos $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$.

- *Multilineales nucleares.*

  Un operador multilineal $\Phi : \mathbf{X} \to Y$ es *nuclear* si puede escribirse de la forma

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x_j^1)'(x_1) \cdots (x_j^N)'(x_N) \cdot y_j, \tag{5.11}$$

  donde $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $(x_j^k)' \in X_k'$, $y_j \in Y$ y $\sum_j |\lambda_j| \cdot \|(x_j^1)'\| \cdots \|(x_j^N)'\| \cdot \|y_j\| < \infty$. El espacio de operadores N-lineales nucleares se denota $\mathcal{N}_N(\mathbf{X}; Y)$ y es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|\Phi\|_{\mathcal{N}} = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|(x_j^1)'\| \cdots \|(x_j^N)'\| \cdot \|y_j\| \right\},$$

  donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de Φ de la forma (5.11).

- *Multilineales integrales.*

  Un operador multilineal $\Phi : \mathbf{X} \to Y$ es *Pietsch integral (respectivamente Grothendieck integral)* si existe una medida regular de Borel μ a valores vectoriales en Y (respectivamente Y''), de variación acotada en $(B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_N'}, w^*)$ tal que

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \int_{B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_N'}} x_1'(x_1) \cdots x_N'(x_N) \, d\mu(x_1', \ldots, x_N') \tag{5.12}$$

para todo $x_k \in X_k$. Los espacios de operadores N-lineales Pietsch integrales y Grothendieck integrales se denotan $P\mathcal{I}_N(\mathbf{X};Y)$ y $G\mathcal{I}_N(\mathbf{X};Y)$ respectivamente y son espacios de Banach con la norma definida por $\|\Phi\|_{\mathcal{I}} = \text{ínf}\{\|\mu\|\}$, donde el ínfimo se toma sobre todas las medidas μ que satisfacen (5.12). En el caso escalar, las formas multilineales Pietsch integrales y Grothendieck integrales coinciden y simplemente notamos $\mathcal{I}_N(\mathbf{X})$.

- *Multilineales extendibles.*

  Un operador multilineal $\Phi : \mathbf{X} \to Y$ es *extendible* si para cada espacio de Banach Z_j conteniendo a X_j, existe $\breve{\Phi} \in \mathcal{L}(^N\mathbf{Z};Y)$ una extensión de Φ. El espacio de los operadores N-lineales extendibles se denota $\mathcal{E}_N(\mathbf{X};Y)$ y es un espacio de Banach con la norma definida por

  $$\|\Phi\|_{\mathcal{E}} := \text{ínf}\{c > 0 : \ \forall\ Z_j \supset X_j \text{ existe } \breve{\Phi} \in \mathcal{L}(^N\mathbf{Z};Y) \text{ extensión de } \Phi \text{ con } \|\breve{\Phi}\| \leq c\}.$$

- *Multilineales múltiple p-sumantes.*

  Sea $1 \leq p < \infty$. Un operador multilineal $\Phi : \mathbf{X} \to Y$ es *múltiple p-sumante* si existe una constante $K > 0$ tal que para cualesquiera $(x^j_{i_j})_{i_j=1}^{m_j} \subseteq X_j$, $j = 1, \ldots, N$, se tiene

  $$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{m_1,\ldots,m_N} \|\Phi(x^1_{i_1}, \ldots, x^N_{i_N})\|^p\right)^{1/p} \leq K \prod_{j=1}^{N} \|(x^j_{i_j})_{i_j=1}^{m_j}\|^w_p, \tag{5.13}$$

  donde

  $$\|(x^j_{i_j})_{i_j=1}^{m_j}\|^w_p = \sup\left\{\left(\sum_{i_j=1}^{m_j} |x'_j(x^j_{i_j})|^p\right)^{1/p} : x'_j \in B_{X'_j}\right\}.$$

  La menor constante K satisfaciendo la desigualdad (5.13) es la norma p-sumante de Φ y se denota $\pi_p(\Phi)$. Notamos $\Pi^N_p(\mathbf{X};Y)$ al espacio de operadores multilineales p-sumantes, el cual resulta un espacio de Banach con la norma π_p.

- *Multilineales r-dominados.*

  Sea $r \geq N$. Un operador multilineal $\Phi : \mathbf{X} \to Y$ es *r-dominado* si existe una constante $K > 0$ tal que para cualesquiera $(x^j_i)_{i=1}^m \subseteq X_j$, $j = 1, \ldots, N$, se tiene

  $$\left(\sum_{i=1}^{m} \|\Phi(x^1_i, \ldots, x^N_i)\|^{r/N}\right)^{N/r} \leq K \prod_{j=1}^{N} \|(x^j_i)_{i=1}^m\|^w_r, \tag{5.14}$$

  La menor constante K satisfaciendo la desigualdad (5.14) es la norma r-dominada de Φ y se denota $\|\Phi\|_{\mathcal{D}^N_r}$. Notamos $\mathcal{D}^N_r(\mathbf{X};Y)$ al espacio de operadores multilineales r-dominados, el cual resulta un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^N_r}$.

Luego, el teorema de Lindenstrauss para ideales de formas multilineales probado en Teorema 5.1.3 se satisface para cualquier producto de espacios $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$ si consideramos $\mathcal{U} = \mathcal{N}_N, \mathcal{I}_N, \mathcal{E}_N, \Pi^N_p$ o $\mathcal{D}^N_r$. También, si consideramos formas multilineales en espacios de Hilbert, entonces la clase de formas multilineales de Hilbert-Schmidt y, más en general, las clases de Schatten de multilineales definidas en [40] resultan multiplicativas. En consecuencia, dado que los espacios de Hilbert son reflexivos, estas clases satisfacen un teorema de Bishop-Phelps multilineal.

Es sencillo ver que no toda sucesión de ideales es multiplicativa; más aún, que existe una sucesión de ideales que satisface la condición (i) en la Definición 5.1.8 pero no satisface la condición (ii). En efecto, siguiendo [70, Ejemplo 4.1.1], basta considerar $\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}, \mathcal{U}_2 = \mathcal{L}^2$ y, para todo $n \geq 3, \mathcal{U}_n = \mathcal{L}^n_{wsc0}$, el ideal de formas multilineales débil secuencialmente continuas en 0. Luego, es claro que se verifica (i). Ahora, si consideramos $\phi \in \mathcal{L}(^2\ell_2 \times \ell_2)$ dada por $\phi(x_1, x_2) = \sum_i x_1(i)x_2(i)$, tenemos que $\phi \in \mathcal{U}_2(\ell_2 \times \ell_2)$ pero $\phi \cdot \phi \notin \mathcal{U}_4(\ell_2 \times \ell_2)$ y, por lo tanto, no se verifica (ii). Sin embargo, desconocemos si existen ideales que no verifiquen la condición (5.2) de estabilidad.

Con respecto al teorema de Lindenstrauss para ideales de operadores a valores vectoriales, si consideramos los ideales de operadores N-lineales $\mathcal{U} = G\mathcal{I}_N, \Pi_p^N$ o $\mathcal{D}_r^N$, entonces cada uno de ellos es regular y el ideal de formas $(N+1)$-lineales $\widetilde{\mathcal{U}}$ definido en (5.9), que vuelve a ser de la misma clase, es estable en cualquier producto de $(N+1)$ espacios de Banach. Luego, el Corolario 5.1.4 nos dice que se verifica el teorema de Lindenstrauss. Si $\mathcal{U} = \mathcal{N}_N, P\mathcal{I}_N$ o $\mathcal{E}_N$ entonces $\mathcal{U}$ no es regular y ya no podemos razonar de la misma manera. Sin embargo, como veremos a continuación, en estos casos también se satisface el teorema de Lindenstrauss a valores vectoriales. Si consideramos el ideal de operadores N-lineales nucleares $\mathcal{N}_N$ entonces, como ya mencionamos en la página 86, los operadores multilineales de tipo finito resultan $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$-densos y de aquí se deduce la validez del teorema de Lindenstrauss. Para los ideales de operadores Pietsch integrales y extendibles, tenemos el siguiente resultado.

Observación 5.1.10. *Sean $\mathcal{U} = P\mathcal{I}_N$ o $\mathcal{E}_N$ y $X_1, \ldots, X_N, Y$ espacios de Banach. Luego, se verifica (5.10) y, como consecuencia de la Observación 5.1.5, se satisface el teorema de Lindenstrauss en $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$.*

Demostración. Sean $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\phi \in \widetilde{\mathcal{U}}(X_1 \times \cdots \times X_N \times Y')$ la forma $(N+1)$-lineal dada por $\phi(x_1, \ldots, x_N, y') = y'(\Phi(x_1, \ldots, x_N))$, $\mathbf{j} \subseteq \{1, \ldots, N+1\}$ y $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N, b') \in X_1 \times \cdots \times X_N \times Y'$. Por simplicidad, vamos a suponer que $\mathbf{j} = \{1, \ldots, k\}$ para algún $1 \leq k \leq N+1$; el caso general es completamente análogo.

Supongamos primero que $\mathcal{U}$ es el ideal de los operadores N-lineales extendibles, $\mathcal{E}_N$. Luego,

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(x_1, \ldots, x_N, y') &= y'(\Phi(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_N))\, b'(\Phi(x_1, \ldots, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_N)) \\ &= y'(\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(x_1, \ldots, x_N)) \end{aligned}$$

donde $\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(x_1, \ldots, x_N) = \Phi(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_N)\, b'(\Phi(x_1, \ldots, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_N))$. Ahora, para cada espacio de Banach Z_j que contiene a X_j $(1 \leq j \leq N)$ podemos definir $\breve{\Phi}_{\mathbf{j},\mathbf{a}} \in \mathcal{L}(^N\mathbf{Z}; Y)$ como

$$\breve{\Phi}_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(z_1, \ldots, z_N) = \breve{\Phi}(a_1, \ldots, a_k, z_{k+1}, \ldots, z_N)\, b'(\breve{\Phi}(z_1, \ldots, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_N)),$$

donde $\breve{\Phi}$ es la extensión de Φ. Esto nos muestra que $\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}} \in \mathcal{E}_N(\mathbf{X}; Y)$ con $\|\Phi_{\mathbf{j},\mathbf{a}}\|_{\mathcal{E}_N} \leq \|\Phi\|^2_{\mathcal{E}_N} \|a_1\| \cdots \|a_N\| \|b'\|$.

Supongamos ahora que $\mathcal{U}$ es el ideal de operadores N-lineales Pietsch integrales, $P\mathcal{I}_N$. Sea μ una medida regular de Borel a valores en Y verificando (5.12) y notemos $B_{\mathbf{X}'} = B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_N'}$ y $\mathbf{x}' = (x_1', \cdots, x_N') \in B_{\mathbf{X}'}$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(x_1, \ldots, x_N, y') &= y'(\Phi(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_N))b'(\Phi(x_1, \ldots, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_N)) \\ &= y'\left(\int_{B_{\mathbf{X}'}} \prod_{j=1}^{k} x_j'(a_j) \prod_{j=k+1}^{N} x_j'(x_j)\, d\mu(\mathbf{x}')\right) b'\left(\int_{B_{\mathbf{X}'}} \prod_{j=1}^{k} x_j'(x_j) \prod_{j=k+1}^{N} x_j'(a_j)\, d\mu(\mathbf{x}')\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, sean $A_i \subseteq B_{X_i'}$ subconjuntos de Borel cualesquiera. Por un lado, llamemos μ_1 a la medida regular de Borel a valores vectoriales en Y, de variación acotada en $(B_{X_{k+1}'} \times \cdots \times B_{X_N'}, w^*)$, dada por

$$\mu_1(A_{k+1} \times \cdots \times A_N) = \int_{B_{\mathbf{X}'}} I^1_{A_{k+1},\ldots,A_N}(\mathbf{x}')\, d\mu(\mathbf{x}'),$$

donde $I^1_{A_{k+1},\ldots,A_N}(\mathbf{x}') = x_1'(a_1) \cdots x_k'(a_k)\chi_{A_{k+1}}(x_{k+1}') \cdots \chi_{A_N}(x_N')$ y χ_{A_i} es la función característica de A_i. Por otro lado, sea μ_2 la medida regular de Borel a valores escalares, de variación acotada en $(B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_k'}, w^*)$, dada por

$$\mu_2(A_1 \times \cdots \times A_k) = b'\left(\int_{B_{\mathbf{X}'}} I^2_{A_1,\ldots,A_k}(\mathbf{x}')\, d\mu(\mathbf{x}')\right),$$

donde $I^2_{A_1,\ldots,A_k}(\mathbf{x}') = \chi_{A_1}(x_1') \cdots \chi_{A_k}(x_k')x_{k+1}'(a_{k+1}) \cdots x_N'(a_N)$. Luego, tomando $\mu_{\mathbf{j},\mathbf{a}}$ la medida producto $\mu_1 \times \mu_2$, obtenemos una medida regular de Borel a valores en Y tal que $\|\mu_{\mathbf{j},\mathbf{a}}\| \leq \|\mu\|^2\|a_1\| \cdots \|a_N\|\|b'\|$ y

$$V_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\phi)(x_1, \ldots, x_N, y') = y'\left(\int_{B_{\mathbf{X}'}} x_1'(x_1) \cdots x_N'(x_N)\, d\mu_{\mathbf{j},\mathbf{a}}(\mathbf{x}')\right),$$

lo cual demuestra (5.10) en este caso. □

En [11] se prueba que si $\mathcal{U}$ es un ideal de formas multilineales que es dual a una norma tensorial asociativa (como las normas tensoriales inyectiva o proyectiva ε y π), entonces $\mathcal{U}$ satisface el teorema de Lindenstrauss. Más aún, de la demostración de [11, Corolario 2.5] se desprende que *los ideales que son duales a una norma tensorial asociativa son estables*. Veremos que el ideal de las formas múltiple 2-sumantes no es dual a ninguna norma tensorial asociativa aunque, como ya sabemos, es multiplicativo y en consecuencia satisface el teorema de Lindenstrauss. Recordemos algunas definiciones.

Decimos que un ideal $\mathcal{U}$ de formas N-lineales es *dual a una norma tensorial* α_N de orden N, si para cualesquiera $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach se tiene $\mathcal{U}(\mathbf{X}) = \left(\otimes_{i=1}^N X_i, \alpha_N\right)'$, donde la igualdad es isométrica y viene dada por $\phi \mapsto L_\phi$, con $L_\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_N) = \phi(x_1, \ldots, x_N)$. Más en general, si tenemos una aplicación α que para cada $n \in \mathbb{N}$ define una norma tensorial de orden n (como las normas π y ε), diremos que $\mathfrak{U} = (\mathcal{U}_n)_n$ es dual a la norma tensorial α si $\mathcal{U}_n(\mathbf{X}) = (\otimes_{i=1}^n X_i, \alpha)'$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, decimos que una norma tensorial β de orden 2 es *asociativa* si dados X, Y, Z espacios de Banach, se verifica $(X \otimes_\beta Y) \otimes_\beta Z = X \otimes_\beta (Y \otimes_\beta Z)$. En tal caso, hay una manera natural de definir la norma β de orden 3, poniendo

$$(X \otimes Y \otimes Z, \beta) = (X \otimes_\beta Y) \otimes_\beta Z = X \otimes_\beta (Y \otimes_\beta Z).$$

Más en general, si β es una aplicación que define, para cada $n \in \mathbb{N}$, una norma tensorial de orden n, decimos que β es asociativa si para cada $1 \leq k \leq n$

$$\left(\left(\otimes_{i=1}^k X_i, \beta\right) \otimes X_{k+1} \otimes \cdots \otimes X_n, \beta\right) = \left(X_1 \otimes \cdots \otimes X_k \otimes \left(\otimes_{i=k+1}^n X_i, \beta\right), \beta\right)$$

y además estos productos son iguales a $(\otimes_{i=1}^n X_i, \beta)$.

Como ya mencionamos en la Sección 1.2, las normas tensoriales inyectiva y proyectiva son ejemplos de normas verificando las definiciones anteriores. En efecto, son normas tensoriales asociativas y verifican $\mathcal{L}(^N\mathbf{X}) = \left(\otimes_{i=1}^N X_i, \pi\right)'$ y $\mathcal{I}_N(\mathbf{X}) = \left(\otimes_{i=1}^N X_i, \varepsilon\right)'$, para todo N y cualesquiera $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach. En [72, Proposition 3.1] (ver también [68]) se probó que para cada $N \in \mathbb{N}$, el ideal de formas N-lineales múltiple p-sumantes $\Pi_p^N(X_1 \times \cdots \times X_N)$ es el dual del producto tensorial $X_1 \otimes \cdots \otimes X_N$ dotado con la norma tensorial $\tilde{\alpha}_p$, donde

$$\tilde{\alpha}_p(u) = \text{ínf}\left\{\sum_{m=1}^M \|(\lambda_{m,i_m^1,\ldots,i_m^N})_{i_m^1,\ldots,i_m^N=1}^{I_m^1,\ldots,I_m^N}\|_{p'} . \|(x_{m,i_m^1}^1)_{i_m^1=1}^{I_m^1}\|_p^w \ldots \|(x_{m,i_m^N}^N)_{i_m^N=1}^{I_m^N}\|_p^w\right\} \quad (5.15)$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de la forma

$$u = \sum_{m=1}^M \sum_{i_m^1,\ldots,i_m^N=1}^{I_m^1,\ldots,I_M^N} \lambda_{m,i_m^1,\ldots,i_m^N}\, x_{m,i_m^1}^1 \otimes \cdots \otimes x_{m,i_m^N}^N.$$

Veamos que $\tilde{\alpha}_2$ no es asociativa; más aún, que $(\Pi_2^n)_n$ no es dual a ninguna norma tensorial asociativa.

Proposición 5.1.11. *La sucesión $\mathfrak{U} = (\Pi_2^n)_n$ de ideales de formas múltiple 2-sumantes no es dual a ninguna norma tensorial asociativa.*

Demostración. Tomemos $n = 4$ y $X_1 = \cdots = X_4 = c_0$. Supongamos que β es una norma tensorial asociativa predual de las formas multilineales múltiple 2-sumantes. Luego,

$$\Pi_2^4(c_0 \times \cdots \times c_0) \simeq \Big(\big(c_0 \tilde{\otimes}_\beta c_0\big) \tilde{\otimes}_\beta \big(c_0 \tilde{\otimes}_\beta c_0\big)\Big)'.$$

Por otro lado, por [24, Teorema 3.1] toda forma multilineal en c_0 es múltiple 2-sumante. En consecuencia, dado que

$$\Pi_2^n(c_0 \times \cdots \times c_0) = (\otimes_{i=1}^n c_0, \beta)' \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(^n c_0 \times \cdots \times c_0) = (\otimes_{i=1}^n c_0, \pi)',$$

las normas tensoriales β y π deben ser equivalentes en $c_0 \otimes \cdots \otimes c_0$. Usando este hecho, primero para el producto tensorial $c_0 \otimes c_0 \otimes c_0 \otimes c_0$ y luego para $c_0 \otimes c_0$, tenemos

$$\big(c_0 \tilde{\otimes}_\pi c_0\big) \tilde{\otimes}_\pi \big(c_0 \tilde{\otimes}_\pi c_0\big) \simeq \big(c_0 \tilde{\otimes}_\beta c_0\big) \tilde{\otimes}_\beta \big(c_0 \tilde{\otimes}_\beta c_0\big) \simeq \big(c_0 \tilde{\otimes}_\pi c_0\big) \tilde{\otimes}_\beta \big(c_0 \tilde{\otimes}_\pi c_0\big).$$

En [28] se prueba que $c_0\tilde{\otimes}_\pi c_0$ tiene copias uniformemente complementadas de ℓ_2^n. Luego, los isomorfismos anteriores implican que

$$\ell_2^n \otimes_\pi \ell_2^n \simeq \ell_2^n \otimes_\beta \ell_2^n,$$

uniformemente en $n \in \mathbb{N}$. El Lema de Densidad [43, 13.4] nos dice entonces que

$$\ell_2 \otimes_\pi \ell_2 \simeq \ell_2 \otimes_\beta \ell_2,$$

lo cual implica, tomando dual, que toda forma bilineal en $\ell_2 \times \ell_2$ es múltiple 2-sumante. Pero en espacios de Hilbert, formas múltiple 2-sumantes y formas multilineales de Hilbert-Schmidt coinciden, y claramente existen formas bilineales que no son de Hilbert-Schmidt. Esta contradicción completa la demostración. $\square$

Lindenstrauss en ideales de polinomios 2-homogéneos

En [20, Teorema 2.1] se prueba, utilizando las mismas técnicas que en [11, Teorema 2.1], el teorema de Lindenstrauss para polinomios 2-homogéneos a valores escalares. Con una pequeña modificación en la demostración, esto es posteriormente extendido en [38, Teorema 2.3] al caso vectorial. Es decir, dados X e Y espacios de Banach, el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}(^2X;Y)$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma es denso en $\mathcal{P}(^2X;Y)$. Siguiendo la demostración de este resultado, veremos que el teorema de Lindenstrauss se satisface en cualquier ideal de polinomios 2-homogéneos.

En primer lugar, damos la definición de ideal de polinomios homogéneos, que es análoga a la Definición 5.1.1 de ideal de operadores multilineales.

Definición 5.1.12. *Un ideal normado de polinomios N-homogéneos es un par $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ tal que:*

(i) *$\mathcal{U}(X;Y) = \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(^NX;Y)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{P}(^NX;Y)$ para todos X, Y espacios de Banach y $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ define una norma en este espacio.*

(ii) *Para cada par de espacios de Banach Z y W, si $T \in \mathcal{L}(Z;X)$, $S \in \mathcal{L}(Y;W)$ y $P \in \mathcal{U}(X;Y)$, entonces $S \circ P \circ T$ pertenece a $\mathcal{U}(Z;W)$ con $\|S \circ P \circ T\|_{\mathcal{U}} \leq \|S\|\|P\|_{\mathcal{U}}\|T\|^N$.*

(iii) *$z \mapsto z^N$ pertenece a $\mathcal{U}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ y tiene norma $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ igual a uno.*

Si $(\mathcal{U}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ es completo para todos X e Y, decimos que $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ es un ideal de Banach de polinomios N-homogéneos.

Al igual que en el caso de operadores multilineales, dado un ideal de polinomios N-homogéneos $\mathcal{U}$, se verifica $\|P\| \leq \|P\|_{\mathcal{U}}$ para todo $P \in \mathcal{U}(X;Y)$.

Teorema 5.1.13. *Sea $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de polinomios 2-homogéneos y sean X, Y espacios de Banach. Luego, el conjunto de todos los polinomios en $\mathcal{U}(X;Y)$ cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma supremo es $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-denso en $\mathcal{U}(X;Y)$.*

Demostración. En primer lugar, veamos un bosquejo de la demostración de [38, Teorema 2.3] que luego adaptaremos a cualquier ideal de polinomios 2-homogéneos. Allí, dados $Q \in \mathcal{P}(^2X;Y)$, $\|Q\| = 1$, y $0 < \varepsilon < 1/4$ se considera una sucesión decreciente (α_i) de números positivos que satisfaga las siguientes condiciones:

$$8\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i < \varepsilon, \quad 8\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i < \alpha_n^2, \quad \alpha_n < \frac{1}{10n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego, se definen inductivamente las sucesiones $(Q_n)_n$ en $\mathcal{P}(^2X;Y)$, $(a_n)_n$ en S_X y $(y_n')_n$ en $S_{Y'}$ de forma tal que

$$Q_1 = Q, \quad y_n'(Q_n(a_n)) = \|Q_n(a_n)\| \geq \|Q_n\| - \alpha_n^2 \quad \text{y} \quad Q_{n+1} = Q_n + \alpha_n R_n \tag{5.16}$$

con R_n definido por

$$R_n(x) = (y_n'(\Phi_n(a_n, x)))^2 Q_n(a_n) \quad \text{para cada } x \in X, \tag{5.17}$$

donde Φ_n es el operador bilineal simétrico asociado a Q_n. La sucesión $(Q_n)_n$ resulta uniformemente acotada, más específicamente, $\|Q_n\| \leq 5/4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, se demuestra que la sucesión $(Q_n)_n$ converge a un polinomio 2-homogéneo P tal que su extensión de Aron-Berner alcanza la norma y $\|Q - P\| < \varepsilon$.

Ahora, supongamos que $Q \in \mathcal{U}(X;Y)$, $\|Q\| = 1$ y sea $0 < \varepsilon < 1/4$. Definiendo la sucesión $(Q_n)_n$ como en (5.16), resulta $Q_n \in \mathcal{U}(X;Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, basta notar que $R_n = S_n \circ \iota \circ T_{\Phi_n}$, donde $T_{\Phi_n}\colon X \to \mathbb{K}$ está dada por $T_{\Phi_n}(x) = y_n'(\Phi_n(a_n, x))$, $\iota\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es el polinomio $\iota(z) = z^2$ y $S_n\colon \mathbb{C} \to Y$ viene dado por $S_n(z) = zQ_n(a_n)$. Luego, las propiedades (ii) y (iii) de la Definición 5.1.12 nos dicen que $R_n \in \mathcal{U}(X;Y)$ y en consecuencia $Q_n \in \mathcal{U}(X;Y)$. Por otro lado, puesto que $\|Q_n\| \leq 5/4$ para todo n y por la fórmula de polarización (ver (1.1)), tenemos que

$$\|Q_{n+1} - Q_n\|_{\mathcal{U}} = \alpha_n\|R_n\|_{\mathcal{U}} \leq \alpha_n\|S_n\|\|\iota\|_{\mathcal{U}}\|T_{\Phi_n}\|^2 \leq \alpha_n\frac{5}{4}\|\Phi_n\|^2 \leq \alpha_n\frac{5}{4}4\|Q_n\|^2 \leq \alpha_n\left(\frac{5}{4}\right)^3 4.$$

Dado que $8\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i < \varepsilon$, la desigualdad anterior nos muestra que $\sum_{i=1}^{\infty} Q_{i+1} - Q_i$ es absolutamente convergente en $(\mathcal{U}(X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ y, en consecuencia, $(Q_n)_n$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-convergente a un polinomio $P_1 \in \mathcal{U}(X;Y)$. Dado que $\|P_1 - Q_n\| \leq \|P_1 - Q_n\|_{\mathcal{U}}$ para todo n y que $(Q_n)_n$ converge a P en la norma supremo, resulta $P_1 = P$ y en consecuencia $P \in \mathcal{U}(X;Y)$. Además,

$$\|P - Q\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\|Q_{i+1} - Q_i\|_{\mathcal{U}} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^3 4\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i < \left(\frac{5}{4}\right)^3\varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente chico, esto nos muestra que Q puede ser $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-aproximado por polinomios cuya extensión de Aron-Berner alcanza la norma supremo. □

5.2. Versiones cuantitativas en ideales de multilineales

En esta sección, volveremos al estudio de las versiones cuantitativas (del tipo Bollobás) estudiadas en la Sección 3.3, pero en este caso abordadas desde el punto de vista de ideales de operadores multilineales. Sirviéndonos del contraejemplo exhibido en [39] al teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para formas bilineales en $\ell_1 \times \ell_1$, en la Proposición 5.2.4 mostraremos contraejemplos a la correspondiente versión cuantitativa del teorema de Lindenstrauss en *todo* ideal $\mathcal{U}$ de operadores multilineales. Por otro lado, en el Teorema 5.2.6 probaremos un resultado positivo del tipo Bishop-Phelps cuantitativo para ideales de operadores multilineales definidos en espacios de Banach uniformemente convexos; esto extiende resultados en [4, 9, 64].

Para comenzar, siguiendo la línea de las Definiciones 1.4.13 y 3.3.1, definimos las propiedades de Bishop-Phelps-Bollobás y Lindenstrauss-Bollobás para ideales de operadores multilineales. De forma completamente análoga, se obtienen las definiciones para ideales de polinomios. Recordemos que S_X y $S_{\mathbf{X}}$ denotan las esferas de un espacio de Banach X y de la N-upla $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$, donde $S_{\mathbf{X}} = S_{X_1} \times \cdots \times S_{X_N}$ se considera con la norma supremo. También escribimos $\mathbf{X}'$ en lugar de $X_1' \times \cdots \times X_N'$.

Definición 5.2.1. *Sean $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de operadores N-lineales y $X_1, \ldots, X_N, Y$ espacios de Banach.*

(i) *Decimos que $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ tiene la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás ($BPBp$) si se satisface lo siguiente: dado $\varepsilon > 0$ existen $\beta(\varepsilon)$ y $\eta(\varepsilon)$ con $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \beta(\varepsilon) = 0$ tales que, si $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Phi\| = 1$ y $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_j)_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}}$ verifican $\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}})\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, entonces existen $\Psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Psi\| = 1$, y $\mathbf{a} = (a_j)_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}}$ tales que*

$$\|\Psi(\mathbf{a})\| = 1, \quad \|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon) \quad y \quad \|\Psi - \Phi\|_{\mathcal{U}} < \varepsilon,$$

donde $\|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon)$ significa que $\|a_j - \tilde{x}_j\| < \beta(\varepsilon)$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

(ii) *Decimos que $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ tiene la propiedad de Lindenstrauss-Bollobás (LBp) si, con ε, η y β como antes, dados $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Phi\| = 1$ y $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_j)_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}}$ verificando $\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}})\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, existen $\Psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Psi\| = 1$, y $\mathbf{a}'' = (a_j'')_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}''}$ tales que*

$$\|\overline{\Psi}(\mathbf{a}'')\| = 1, \quad \|\mathbf{a}'' - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon) \quad y \quad \|\Psi - \Phi\|_{\mathcal{U}} < \varepsilon,$$

donde $\|\mathbf{a}'' - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon)$ significa que $\|a_j'' - \tilde{x}_j\| < \beta(\varepsilon)$ para todo $j = 1, \ldots, N$, pensando los $\tilde{x}_j$ como elementos en el bidual.

Cabe mencionar que definiciones de este tipo aparecen en el marco de operadores lineales en [10, 17], donde las subclases consideradas son subespacios (no necesariamente cerrados) de $\mathcal{L}$, dotados con la norma supremo. Aquí, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección anterior, nuestra definición requiere aproximación de multilineales en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ del ideal.

Un contraejemplo

En la Proposición 3.3.6, se probó que si $w \in \ell_r$ para algún $1 < r < \infty$, entonces la LBp no se verifica en $\mathcal{L}({}^N d_*(w, 1))$ si $N \geq r$ y en $\mathcal{L}({}^N d_*(w, 1); \ell_r)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Los contraejemplos dados son operadores diagonales, que no pertenecen a cualquier ideal de multilineales; por ejemplo, estos operadores no son nucleares, aproximables, integrales ni extendibles ya que no son débil secuencialmente continuos. Nuestro propósito ahora, es mostrar contraejemplos a la LBp en todo ideal $\mathcal{U}$ de operadores multilineales. Para ello probaremos primero que, bajo ciertas hipótesis sobre los espacios de salida, la LBp y la $BPBp$ son equivalentes.

Dado un espacio de Banach X, una proyección lineal $P_L : X'' \to X''$ es una L-proyección si
$$\|x''\| = \|P_L(x'')\| + \|x'' - P_L(x'')\| \quad \text{para todo } x'' \in X'',$$
y X es un L-sumando en su bidual si es la imagen de una L-proyección. Ejemplos de espacios que son L-sumandos en sus biduales son los espacios $L_1(\mu)$, los preduales de álgebras de von Neumann y los espacios de sucesiones de Lorentz $d(w,1)$.

Lema 5.2.2. *Sean X, Y espacios de Banach tales que X es un L-sumando en su bidual con L-proyección P_L. Sean $S : X'' \to Y''$ un operador lineal con $\|S\| = 1$, $a'' \in S_{X''}$ y $\tilde{x} \in S_X$ verificando $\|S(a'')\| = 1$ y $\|a'' - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon) < 1$ para algún $\beta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. Luego, para $a = \frac{P_L(a'')}{\|P_L(a'')\|} \in S_X$ y un $\beta'(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ tenemos*
$$\|S(a)\| = 1 \quad y \quad \|a - \tilde{x}\| < \beta'(\varepsilon).$$

Demostración. Dado que $\beta(\varepsilon) > \|a'' - \tilde{x}\| = \|P_L(a'') - \tilde{x}\| + \|(I - P_L)(a'')\|$, se sigue que $\|P_L(a'') - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon)$ y por lo tanto $\|P_L(a'')\| > 1 - \beta(\varepsilon) > 0$. Luego, tiene sentido considerar $a = \frac{P_L(a'')}{\|P_L(a'')\|} \in S_X$. Notando que
$$1 = \|S(a'')\| = \|S(P_L(a'')) + S((I - P_L)(a''))\| \leq \|S(P_L(a''))\| + \|S((I - P_L)(a''))\|$$
obtenemos
$$\|S(P_L(a''))\| \geq 1 - \|S((I - P_L)(a''))\| \geq 1 - \|(I - P_L)(a'')\| = \|P_L(a'')\|$$
y en consecuencia $\|S(a)\| \geq 1$, lo cual nos muestra que $\|S(a)\| = 1$. Ahora, recordando que $\|P_L(a'') - \tilde{x}\| < \beta(\varepsilon)$ y $\|P_L(a'')\| > 1 - \beta(\varepsilon)$, resulta
$$\begin{aligned}
\|a - \tilde{x}\| &= \frac{1}{\|P_L(a'')\|} \Big\| P_L(a'') - \|P_L(a'')\| \, \tilde{x} \Big\| \\
&\leq \frac{1}{\|P_L(a'')\|} \Big(\|P_L(a'') - \tilde{x}\| + \Big\| \tilde{x} - \|P_L(a'')\| \, \tilde{x} \Big\| \Big) \\
&< \frac{1}{1 - \beta(\varepsilon)} \left(\beta(\varepsilon) + 1 - \|P_L(a'')\| \right) \\
&< \frac{2\beta(\varepsilon)}{1 - \beta(\varepsilon)} = \beta'(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$
lo cual demuestra el resultado. □

Proposición 5.2.3. *Sean $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de operadores N-lineales, Y un espacio de Banach cualquiera y $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach que son L-sumandos en sus biduales. Entonces, $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ tiene la $BPBp$ si y sólo si tiene la LBp.*

Demostración. Puesto que la $BPBp$ implica trivialmente la LBp, basta con probar la otra implicación. Llamemos $P_L^1, \ldots, P_L^N$ a las L-proyecciones correspondientes a $X_1, \ldots, X_N$. Sean ε,

$\eta(\varepsilon)$ y $\beta(\varepsilon)$ como en la Definición 5.2.1, con ε suficientemente chico de forma tal que $\beta(\varepsilon) < 1$. Tomemos $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Phi\| = 1$ y $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_j)_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}}$ tales que $\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}})\| > 1 - \eta(\varepsilon)$. Por hipótesis, existen $\Psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Psi\| = 1$, y $\mathbf{a}'' = (a''_j)_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}''}$ verificando

$$\|\overline{\Psi}(\mathbf{a}'')\| = 1, \quad \|\mathbf{a}'' - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon) \quad \text{y} \quad \|\Psi - \Phi\|_{\mathcal{U}} < \varepsilon.$$

Consideremos $S_1 : X''_1 \to Y''$ definido por $S_1(x''_1) = \Psi(x''_1, a''_2, \ldots, a''_N)$. Por el lema anterior

$$\left\| S_1 \left(\frac{P^1_L(a''_1)}{\|P^1_L(a''_1)\|} \right) \right\| = 1 \quad \text{y} \quad \left\| \frac{P^1_L(a''_1)}{\|P^1_L(a''_1)\|} - \tilde{x}_1 \right\| < \beta'(\varepsilon)$$

para algún $\beta'(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$. Ahora, tomando el operador $S_2 : X''_2 \to Y''$ definido por $S_2(x''_2) = \Psi\left(\frac{P^1_L(a''_1)}{\|P^1_L(a''_1)\|}, x''_2, a''_3, \ldots, a''_N \right)$ y aplicando nuevamente el lema anterior, obtenemos

$$\left\| \Psi \left(\frac{P^1_L(a''_1)}{\|P^1_L(a''_1)\|}, \frac{P^2_L(a''_2)}{\|P^2_L(a''_2)\|}, a''_3, \ldots, a''_N \right) \right\| = 1 \quad \text{y} \quad \left\| \frac{P^i_L(a''_i)}{\|P^i_L(a''_i)\|} - \tilde{x}_i \right\| < \beta'(\varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

Inductivamente, si notamos $\mathbf{a} = \left(\frac{P^1_L(a''_1)}{\|P^1_L(a''_1)\|}, \ldots, \frac{P^N_L(a''_N)}{\|P^N_L(a''_N)\|} \right) \in S_{\mathbf{X}}$, obtenemos

$$\|\Psi(\mathbf{a})\| = 1 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta'(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

lo cual demuestra que $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ tiene la $BPBp$. □

En vistas de la equivalencia anterior, a fin de ver que no se verifica la LBp para multilineales en $\ell_1 \times \cdots \times \ell_1$, alcanza con probar que no se verifica la $BPBp$. Modificando ligeramente el contraejemplo dado en [39] para formas bilineales, obtenemos multilineales de tipo finito que sirven como contraejemplo a la LBp en cualquier ideal. Como contrapartida, por lo visto en la sección anterior sabemos que el teorema de Lindenstrauss sí se verifica para una gran cantidad de ideales.

Proposición 5.2.4. *Sea $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de operadores N-lineales con $N \geq 2$ y sea Y un espacio de Banach cualquiera. Luego la LBp (equivalentemente la $BPBp$) no se verifica en $\mathcal{U}(\ell_1 \times \cdots \times \ell_1; Y)$.*

Demostración. Dado que las multilineales de tipo finito pertenecen a cualquier ideal $\mathcal{U}$ de operadores N-lineales, y puesto que siempre se verifica la desigualdad $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ entre las normas, bastará con mostrar que existe un operador N-lineal de tipo finito que no puede ser $\|\cdot\|$-aproximado en el sentido cuantitativo de Bollobás.

Comencemos tomando $n \in \mathbb{N}$ y definiendo el operador de tipo finito $\phi \colon \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{K}$,

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^{2n^2} x_1(i) x_2(j)(1 - \delta_{ij}) \quad \text{para } \delta_{ij} \text{ la delta de Kronecker.}$$

Luego $\|\phi\| = 1$. Consideremos $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in S_{\ell_1} \times S_{\ell_1}$ dado por $\tilde{x}_1(i) = \tilde{x}_2(i) = \frac{1}{2n^2}$ si $1 \leq i \leq 2n^2$ y $\tilde{x}_1(i) = \tilde{x}_2(i) = 0$ en otro caso, y notemos que $\phi(\tilde{\mathbf{x}}) = 1 - \frac{1}{2n^2}$. Ahora, supongamos que existe un operador $\psi \in \mathcal{L}(^2\ell_1 \times \ell_1)$, con $\|\psi\| = 1$, que alcanza la norma y tal que $\|\phi - \psi\| < 1$. Tomemos $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in S_{\ell_1} \times S_{\ell_1}$ tal que $|\psi(\mathbf{a})| = 1$ y veamos que $\|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{x}}\| \geq \frac{1}{2}$. Consideremos $A_1 = sop(a_1)$ y $A_2 = sop(a_2)$, donde para cada $x \in \ell_1$ notamos $sop(x) = \{i : \ x(i) \neq 0\}$. Es claro que

$$\begin{aligned} 1 &= |\psi(\mathbf{a})| = \left| \sum_{(i,j) \in A_1 \times A_2} a_1(i) a_2(j) \psi(e_i, e_j) \right| \\ &\leq \sum_{(i,j) \in A_1 \times A_2} |a_1(i)||a_2(j)||\psi(e_i, e_j)| \leq \|a_1\|\|a_2\| = 1 \end{aligned}$$

y de aquí deducimos que $|\psi(e_i, e_j)| = 1$ para todo $(i, j) \in A_1 \times A_2$. Esto implica que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ya que de lo contrario tendríamos $|\psi(e_{i_0}, e_{i_0})| = 1$ para algún $i_0 \in A_1 \cap A_2$ y dado que $|\phi(e_{i_0}, e_{i_0})| = 0$ se tendría $\|\phi - \psi\| \geq 1$, lo cual nos lleva a una contradicción. Ahora, si $\|a_1 - \tilde{x}_1\| < 1/2$ entonces es fácil ver que $\#(sop(\tilde{x}_1) \cap A_1) > n^2$. Como $sop(\tilde{x}_1) = sop(\tilde{x}_2)$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ entonces $\#(sop(\tilde{x}_2) \cap A_2) < n^2$ y en consecuencia $\|a_2 - \tilde{x}_2\| > n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = 1/2$. Luego $\|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{x}}\| \geq \frac{1}{2}$ y esto nos permite mostrar que no se verifica la $BPBp$ en ningún ideal de formas bilineales. De hecho, suponiendo que sí se verifica, si consideramos $0 < \varepsilon \leq 1$ tal que $\beta(\varepsilon) < 1/2$ y comenzamos la cuenta anterior tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2n^2} < \eta(\varepsilon)$, concluimos que existen ϕ de norma $\|\phi\| = 1$ y $\tilde{\mathbf{x}} \in S_{\ell_1} \times S_{\ell_1}$ tales que $\phi(\tilde{\mathbf{x}}) > 1 - \eta(\varepsilon)$ y para todo ψ de norma $\|\psi\| = 1$ que verifique $\|\phi - \psi\| < \varepsilon$ y que alcance la norma en un cierto $\mathbf{a} \in S_{\ell_1} \times S_{\ell_1}$, se tiene $\|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{x}}\| > \beta(\varepsilon)$.

Finalmente, fijado cualquier $y_0 \in Y$ con $\|y_0\| = 1$, podemos definir el operador N-lineal de tipo finito $\Phi : \ell_1 \times \cdots \times \ell_1 \to Y$ por $\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \phi(x_1, x_2) e'_3(x_3) \cdots e'_N(x_N) y_0$, donde ϕ está definida como arriba y $(e'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es la sucesión básica dual de los vectores canónicos. Esto nos da el deseado contraejemplo a la $BPBp$, y por lo tanto a la LBp, para todo ideal de operadores N-lineales. □

Notemos que, si bien la bilineal ϕ definida en la demostración anterior no puede ser aproximada por bilineales que alcancen la norma en elementos "cercanos" a $\tilde{\mathbf{x}}$, eso no significa que ϕ no alcance la norma; de hecho, se tiene $\phi(e_1, e_2) = 1 = \|\phi\|$. Por otro lado, destacamos el hecho de que si bien la $BPBp$ no se verifica en $\mathcal{U}(\ell_1 \times \cdots \times \ell_1; Y)$ para ningún ideal $\mathcal{U}$, sí se verifica el teorema de Bishop-Phelps. Para $\mathcal{L}(^N\ell_1; Y)$, esto fue probado por Choi y Kim en [37, Teorema 2.4]. Con exactamente la misma demostración, veamos que se sigue verificando el Bishop-Phelps para cualquier ideal de operadores N-lineales.

Observación 5.2.5. *Sea $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de operadores N-lineales y sea Y un espacio de Banach cualquiera. Luego, el conjunto de operadores en $\mathcal{U}(\ell_1 \times \cdots \times \ell_1; Y)$ que alcanzan la norma supremo es $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$-denso en $\mathcal{U}(\ell_1 \times \cdots \times \ell_1; Y)$.*

Demostración. Sean $\Phi \in \mathcal{U}(\ell_1 \times \cdots \times \ell_1; Y)$ y $0 < \varepsilon < \|\Phi\|$. Puesto que

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_N < \infty} x_1(i_1) \cdots x_N(i_N) \Phi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}),$$

se deduce que

$$\|\Phi\| = \sup_{1 \leq i_1, \ldots, i_N < \infty} \|\Phi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N})\|.$$

En consecuencia, podemos elegir $j_1, \dots, j_N$ y un escalar $\lambda \geq 1$ tales que $\|\Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_N})\| > \|\Phi\| - \varepsilon$ y $\lambda\|\Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_N})\| = \|\Phi\|$. Ahora definamos

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \Phi(x_1, \dots, x_N) + (\lambda - 1)\Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_N})e'_{j_1}(x_1) \cdots e'_{j_N}(x_N),$$

que resulta un operador en $\mathcal{U}(\ell_1 \times \cdots \times \ell_1; Y)$ dado que Φ y $e'_{j_1}(\cdot) \cdots e'_{j_N}(\cdot)$ pertenecen al ideal $\mathcal{U}$. Luego $\|\Psi\| = \|\Phi\| = \|\Psi(e_{j_1}, \dots, e_{j_N})\|$ y

$$\|\Phi - \Psi\|_{\mathcal{U}} = (\lambda - 1)\|\Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_N})e'_{j_1}(\cdot) \cdots e'_{j_N}(\cdot)\|_{\mathcal{U}} \leq (\lambda - 1)\|\Phi(e_{j_1}, \dots, e_{j_N})\| < \varepsilon$$

lo cual demuestra el resultado. □

En relación al teorema de Lindenstrauss para polinomios 2-homogéneos visto en el Teorema 5.1.13, desconocemos si existe algún contraejemplo a la LBp en *todo* ideal de polinomos 2-homogéneos. Los contraejemplos que conocemos en este caso, son aquellos vistos en la Proposición 3.3.6 (b).

Un resultado positivo (pero no tanto)

Veamos ahora un resultado positivo del tipo Bishop-Phelps cuantitativo para ideales de operadores multilineales. En [64, Teorema 3.1] se demuestra que si X es uniformemente convexo entonces $\mathcal{L}(X; Y)$ tiene la $BPBp$ para cualquier espacio de Banach Y. Resultados análogos fueron probados en [9, Teorema 2.2] para operadores multilineales y en [4, Teorema 3.1] para polinomios homogéneos. Adaptando las ideas de [4, 64] mostraremos que se verifica una versión ligeramente más débil que la $BPBp$ en todo ideal de operadores multilineales, siempre que los espacios en el dominio sean uniformemente convexos.

Recordemos que un espacio de Banach X es *uniformemente convexo* si dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\text{si } x_1, x_2 \in B_X \text{ satisfacen } \frac{\|x_1 + x_2\|}{2} > 1 - \delta, \quad \text{entonces} \quad \|x_1 - x_2\| < \varepsilon.$$

En tal caso, el módulo de convexidad de X está dado por

$$\delta_X(\varepsilon) := \text{ínf}\left\{1 - \frac{\|x_1 + x_2\|}{2} : x_1, x_2 \in B_X, \|x_1 - x_2\| > \varepsilon\right\}.$$

Ejemplos de espacios uniformemente convexos son los espacios de Hilbert o los espacios $L_p(\mu)$ con $1 < p < \infty$. Por el teorema de Milman-Pettis, todo espacio uniformemente convexo es reflexivo; la recíproca no se verifica, como puede verse en [42].

Sean $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de operadores N-lineales y $X_1, \dots, X_N, Y$ espacios de Banach. Decimos que $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ tiene la *propiedad débil de Bishop-Phelps-Bollobás* (w-$BPBp$) si para cada $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Phi\| = 1$, y $\varepsilon > 0$, existen $\tilde{\beta}(\varepsilon, \|\Phi\|_{\mathcal{U}})$ y $\tilde{\eta}(\varepsilon, \|\Phi\|_{\mathcal{U}})$ **que dependen de** $\|\Phi\|_{\mathcal{U}}$, satisfaciendo lo mismo que $\beta(\varepsilon)$ y $\eta(\varepsilon)$ en la Definición 5.2.1 (i). Es decir, la diferencia entre la w-$BPBp$ y la $BPBp$, es que aquí $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\eta}$ dependen de la norma (en el ideal) de la multilineal que se considere, mientras que en la definición de la $BPBp$ las mismas β y η sirven para cualquier multilineal.

Veamos que cuando consideramos operadores multilineales definidos en espacios uniformemente convexos, todo ideal tiene la w-$BPBp$. Notar que si $\mathcal{U}$ es un ideal cerrado ($i.e.$, $\|\cdot\|_{\mathcal{U}} = \|\cdot\|$), entonces la w-$BPBp$ es justamente la $BPBp$.

Teorema 5.2.6. *Sean $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de operadores N-lineales, $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach uniformemente convexos y $\mathbf{X} = X_1 \times \cdots \times X_N$. Luego $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ tiene la w-$BPBp$ para todo espacio de Banach Y.*

Demostración. Sean $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Phi\| = 1$, $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_{X_1}(\varepsilon), \ldots, \delta_{X_N}(\varepsilon)\}$. Consideremos $\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2^4}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in S_{\mathbf{X}}$ tal que

$$\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}})\| > 1 - \eta(\varepsilon).$$

La idea de la demostración será definir inductivamente una sucesión $((\mathbf{a}_k, \mathbf{x}'_k, y'_k, \Phi_k))_k$ tal que $\Phi_k \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Phi_k\| = 1$, y con $(\mathbf{a}_k, \mathbf{x}'_k, y'_k) \in S_{\mathbf{X}} \times S_{\mathbf{X}'} \times S_{Y'}$ satisfaciendo algunas estimaciones apropiadas.

En primer lugar, sean $\Phi_1 := \Phi$, $\mathbf{a}_1 = \tilde{\mathbf{x}} = (a_{1,j})_{j=1}^N$ y tomemos $\mathbf{x}'_1 = (x'_{1,j})_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}'}$ y $y'_1 \in S_{Y'}$ satisfaciendo

$$x'_{1,j}(a_{1,j}) = 1 \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, N \quad \text{y} \quad |y'_1(\Phi_1(\mathbf{a}_1))| > 1 - \eta(\varepsilon).$$

Ahora supongamos que $(\mathbf{a}_k, \mathbf{x}'_k, y'_k, \Phi_k)$ está definida y satisface

$$x'_{k,j}(a_{k,j}) = 1 \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, N \quad \text{y} \quad |y'_k(\Phi_k(\mathbf{a}_k))| > 1 - \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right).$$

Consideremos el operador multilineal auxiliar

$$\Lambda_{k+1}(\mathbf{x}) := \Phi_k(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} x'_{k,1}(x_1) \cdots x'_{k,N}(x_N) \Phi_k(\mathbf{a}_k) \quad (\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^N \in \mathbf{X}),$$

y notemos que $1 < \|\Lambda_{k+1}\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{k+1}\| &\geq |y'_k(\Lambda_{k+1}(\mathbf{a}_k))| \\ &= |y'_k(\Phi_k(\mathbf{a}_k))| \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \\ &> \left(1 - \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right)\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \\ &> 1, \end{aligned} \tag{5.18}$$

mientras que la otra desigualdad se deduce fácilmente de la definición de Λ_{k+1}. Además, $\Lambda_{k+1} \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ puesto que $\Phi_k(\cdot)$ y $x'_{k,1}(\cdot) \cdots x'_{k,N}(\cdot)\Phi_k(\mathbf{a}_k)$ pertenecen a $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$.

Definamos $\Phi_{k+1} := \frac{\Lambda_{k+1}}{\|\Lambda_{k+1}\|}$ y consideremos $\mathbf{a}_{k+1} \in S_{\mathbf{X}}$ y $y'_{k+1} \in S_{Y'}$ tales que

$$\left|y'_{k+1}\left(\Lambda_{k+1}(\mathbf{a}_{k+1})\right)\right| > \|\Lambda_{k+1}\| - \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right). \tag{5.19}$$

Multiplicando, de ser necesario, las coordenadas de $\mathbf{a}_{k+1}$ por escalares de módulo 1, podemos asumir que $x'_{k,j}(a_{k+1,j}) = |x'_{k,j}(a_{k+1,j})|$. Finalmente, elegimos $\mathbf{x}'_{k+1}$ tal que $x'_{k+1,j}(a_{k+1,j}) = 1$

para todo $j = 1, \ldots, N$, completando de esta manera, el $(k+1)$-ésimo elemento de la sucesión $((\mathbf{a}_k, \mathbf{x}'_k, y'_k, \Phi_k))_k$.

Veamos que $(\Phi_k)_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$. En primer lugar, observemos que $\|\Lambda_{k+1}\|_{\mathcal{U}} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{U}} + 1$ dado que $\|\Lambda_{k+1}\|_{\mathcal{U}} \leq \|\Phi_k\|_{\mathcal{U}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ y

$$\|\Phi_k\|_{\mathcal{U}} = \frac{\|\Lambda_k\|_{\mathcal{U}}}{\|\Lambda_k\|} \leq \frac{\|\Phi_{k-1}\|_{\mathcal{U}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}}{\|\Lambda_k\|} \leq \|\Phi_{k-1}\|_{\mathcal{U}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Luego, por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_{k+1} - \Lambda_{k+1}\|_{\mathcal{U}} &= |1 - \|\Lambda_{k+1}\|| \frac{\|\Lambda_{k+1}\|_{\mathcal{U}}}{\|\Lambda_{k+1}\|} \\ &\leq |1 - \|\Lambda_{k+1}\|| \, \|\Lambda_{k+1}\|_{\mathcal{U}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}(\|\Phi\|_{\mathcal{U}} + 1) \end{aligned} \tag{5.20}$$

y por otro

$$\|\Lambda_{k+1} - \Phi_k\|_{\mathcal{U}} = \left\| \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} x'_{k,1}(\cdot) \cdots x'_{k,N}(\cdot)\Phi_k(\mathbf{a}_k) \right\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}(\|\Phi\|_{\mathcal{U}} + 1). \tag{5.21}$$

Combinando (5.20) con (5.21) obtenemos

$$\|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_{\mathcal{U}} \leq \|\Phi_{k+1} - \Lambda_{k+1}\|_{\mathcal{U}} + \|\Lambda_{k+1} - \Phi_k\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}(\|\Phi\|_{\mathcal{U}} + 1).$$

En consecuencia, $(\Phi_k)_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ y converge a alguna $\Psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ que verifica $\|\Psi\| = 1$ y $\|\Psi - \Phi\|_{\mathcal{U}} < \varepsilon(\|\Phi\|_{\mathcal{U}} + 1)$.

Ahora veamos que, como consecuencia de la convexidad uniforme de cada X_j, la sucesión $(a_{k,j})_k$ es de Cauchy en S_{X_j} para cada $j = 1, \ldots, N$. Por (5.19) y la definición de Λ_{k+1} tenemos

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{k+1}\| - \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) &< \left|y'_{k+1}\left(\Lambda_{k+1}(\mathbf{a}_{k+1})\right)\right| \\ &= \left|y'_{k+1}\left(\Phi_k(\mathbf{a}_{k+1})\right) + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} x'_{k,1}(a_{k+1,1}) \cdots x'_{k,N}(a_{k+1,N}) y'_{k+1}(\Phi_k(\mathbf{a}_k))\right| \\ &\leq 1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} x'_{k,1}(a_{k+1,1}) \cdots x'_{k,N}(a_{k+1,N}). \end{aligned}$$

De aquí se deduce

$$\|\Lambda_{k+1}\| < 1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} x'_{k,1}(a_{k+1,1}) \cdots x'_{k,N}(a_{k+1,N}) + \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right),$$

que junto con la desigualdad (5.19) nos dice que

$$\begin{aligned} \left(1 - \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right)\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) &< 1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} x'_{k,1}(a_{k+1,1}) \cdots x'_{k,N}(a_{k+1,N}) + \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\ 1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} - \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\eta\left(\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right) &< 1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} x'_{k,1}(a_{k+1,1}) \cdots x'_{k,N}(a_{k+1,N}) + \eta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\ 1 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) - \frac{1}{4}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) &< x'_{k,1}(a_{k+1,1}) \cdots x'_{k,N}(a_{k+1,N}) \\ 1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) &< x'_{k,1}(a_{k+1,1}) \cdots x'_{k,N}(a_{k+1,N}). \end{aligned}$$

Dado que para cada $j = 1, \ldots, N$ se tiene $x'_{k,j}(a_{k+1,j}) \leq 1$, resulta

$$1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) < x'_{k,j}(a_{k+1,j}) \leq 1 \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, N.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \left\| \frac{a_{k,j} + a_{k+1,j}}{2} \right\| &\geq x'_{k,j}\left(\frac{a_{k,j} + a_{k+1,j}}{2}\right) \\ &> 1 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\ &> 1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\ &\geq 1 - \delta_{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) \end{aligned}$$

y por la convexidad uniforme esto implica $\|a_{k+1,j} - a_{k,j}\| < \frac{\varepsilon}{2^k}$, lo cual nos muestra que $(a_{k,j})_k$ es de Cauchy en S_{X_j} y converge a un elemento $a_{\infty,j} \in S_{X_j}$ tal que $\|a_{\infty,j} - x_{1,j}\| < \varepsilon$.

Finalmente, tomando $\mathbf{a}_\infty = (a_{\infty,j})_{j=1}^N \in S_{\mathbf{X}}$ tenemos $\|\mathbf{a}_\infty - \tilde{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ y además, dado que las sucesiones $(\Phi_k)_k$ y $(a_{k,j})_k$ son convergentes y $\lim_k \|\Phi_k(\mathbf{a}_k)\| = 1$, resulta que $\|\Psi(\mathbf{a}_\infty)\| = 1$. Luego, $\mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ tiene la w-$BPBp$ con $\tilde{\eta}(\varepsilon, \|\Phi\|_{\mathcal{U}}) = \eta(\varepsilon/(1 + \|\Phi\|_{\mathcal{U}}))$ y $\tilde{\beta}(\varepsilon, \|\Phi\|_{\mathcal{U}}) = \varepsilon/(1 + \|\Phi\|_{\mathcal{U}})$. □

Finalizamos el capítulo, haciendo un par de observaciones relacionadas con el teorema anterior.

• Siguiendo los pasos de la demostración anterior, podemos ver que dados $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ de norma $\|\Phi\| = 1$, $0 < \varepsilon < 1$ y $\tilde{\mathbf{x}} \in S_{\mathbf{X}}$ verificando $\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}})\| > 1 - \frac{\varepsilon}{2^4}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, se pueden obtener $\Psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ y $\mathbf{a}_\infty$ verificando $\|\mathbf{a}_\infty - \tilde{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ y $\|\Psi - \Phi\| < \varepsilon$. Esta última desigualdad, independiente de la norma del ideal, se debe a que $1 < \|\Lambda_{k+1}\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} \|\Phi_{k+1} - \Phi_k\| &\leq \|\Phi_{k+1} - \Lambda_{k+1}\| + \|\Lambda_{k+1} - \Phi_k\| \\ &\leq \left\| \frac{\Lambda_{k+1}}{\|\Lambda_{k+1}\|} - \Lambda_{k+1} \right\| + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \\ &= |1 - \|\Lambda_{k+1}\|| + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Luego, si $X_1, \ldots, X_N$ son uniformemente convexos e Y es un espacio de Banach cualquiera, para cualquier ideal $\mathcal{U}$ de multilineales se tiene que dado $0 < \varepsilon < 1$ existen $\eta(\varepsilon)$ y $\beta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ tales que si $\Phi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$, $\|\Phi\| = 1$, y $\tilde{\mathbf{x}} \in S_{\mathbf{X}}$ satisfacen $\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}})\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, entonces existen $\Psi \in \mathcal{U}(\mathbf{X}; Y)$ con $\|\Psi\| = 1$ y $\mathbf{a}_\infty \in S_{\mathbf{X}}$ verificando:

$$\|\Psi(\mathbf{a}_\infty)\| = 1, \quad \|\mathbf{a}_\infty - \tilde{\mathbf{x}}\| < \beta(\varepsilon) \quad \text{y} \quad \|\Psi - \Phi\| < \varepsilon.$$

La diferencia aquí con la propiedad $BPBp$, es que la densidad de los operadores es con la norma supremo y no con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ del ideal. Un resultado de este tipo fue probado en [17, Corolario 2.5] en el marco de ideales de operadores lineales.

• Con una demostración completamente análoga a la del Teorema 5.2.6, y de hecho, casi idéntica a la de [4, Teorema 3.1] pero con la correspondiente modificación en lo que respecta a la *convergencia en el ideal*, se obtiene el teorema anterior en el marco de polinomios homogéneos. Enunciamos este resultado aunque omitimos su demostración, así como la definición de la w-$BPBp$ para ideales de polinomios que, de cualquier manera, se deduce fácilmente por contexto.

Teorema 5.2.7. *Sean $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ un ideal de Banach de polinomios N-homogéneos y X un espacio de Banach uniformemente convexo. Luego $\mathcal{U}(X;Y)$ tiene la w-$BPBp$ para todo espacio de Banach Y.*

Bibliografía

[1] Acosta, M.D. On multilinear mappings attaining their norms. *Studia Math.*, 131:155-165, 1998.

[2] Acosta, M.D. Norm attaining operators into $L_1(\mu)$. Function spaces, *Contemporary Math.*, 232:1-11, 1999.

[3] Acosta, M.D. Denseness of norm attaining mappings. *RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 100(1-2):9-30, 2006.

[4] Acosta, M.D.; Becerra-Guerrero, J.; Choi, Y.S.; García, D.; Kim, S.G.; Lee, H.J. and Maestre, M. The Bishop-Phelps-Bollobás property for bilinear forms and polynomials. *J. Math. Soc. Japan*, 66(3):957-979, 2014.

[5] Acosta, M.D.; Aguirre, F.J. and Payá, R. There is no bilinear Bishop-Phelps theorem. *Israel J. Math.*, 93:221-227, 1996.

[6] Acosta, M.D.; Alaminos, J.; García, D. and Maestre, M. On holomorphic functions attaining their norms. *J. Math. Anal. Appl.*, 297(2):625-644, 2004.

[7] Acosta, M.D.; Aron, R.M.; García, D. and Maestre M. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators. *J. Funct. Anal.*, 254(11):2780-2799, 2008.

[8] Acosta, M.D.; Aron, R.M. and Moraes, L.A. Boundaries for spaces of holomorphic functions on M-ideals in their biduals. *Indiana Univ. Math. J.*, 58(6):2575-2595, 2009.

[9] Acosta, M.D.; Becerra-Guerrero, J.; García, D. and Maestre, M. The Bishop-Phelps-Bollobás Theorem for bilinear forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(11): 5911-5932, 2013.

[10] Acosta, M.D.; Becerra-Guerrero, J.; García, D.; Kim, S.K. and Maestre, M. Bishop-Phelps-Bollobás property for certain spaces of operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 414(2):532-545, 2014.

[11] Acosta, M.D.; García, D. and Maestre, M. A multilinear Lindenstrauss theorem. *J. Funct. Anal.*, 235(1):122-136, 2006.

[12] Acosta, M.D. and Ruiz, C. Norm attaining operators on some classical Banach spaces. *Math. Nachr.*, 235:17-27, 2002.

[13] Alaminos, J.; Choi, Y.S.; Kim, S.G. and Payá, R. Norm attaining bilinear forms on spaces of continuous functions. *Glasg. Math. J.*, 40:359-365, 1998.

[14] Alaminos, J.; Payá, R. and Villena, A. Norm attaining bilinear forms on C*-algebras. *Studia Math.*, 157:47-56, 2003.

[15] Arens, R. The adjoint of a bilinear operation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:839-848, 1951.

[16] Aron, R.M. and Berner, P.D. A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. *Bull. Soc. Math. France*, 106(1):3-24, 1978.

[17] Aron, R.M.; Cascales, B. and Kozhushkina, O. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem and Asplund operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(10):3553-3560, 2011.

[18] Aron, R.M.; Choi, Y.S.; García, D. and Maestre, M. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for $\mathcal{L}(L_1(\mu), L_\infty[0,1])$. *Adv. Math.*, 228(1):617-628, 2011.

[19] Aron, R.M.; Finet, C. and Werner, E. Some remarks on norm-attaining n-linear forms. *K. Jarosz (Ed.), Proceedings of the Second Conference on Function Spaces, in: Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 172: 19-28, 1995.

[20] Aron, R.M.; García, D. and Maestre, M. On norm attaining polynomials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 39(1):165-172, 2003.

[21] Bishop, E. and Phelps, R.R. A proof that every Banach space is subreflexive. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67:97-98, 1961.

[22] Bishop, E. and Phelps, R. R. The support functionals of a convex set. *Proc. Sympos. Pure Math. Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 27-35, 1963.

[23] Bollobás, B. An extension to the theorem of Bishop and Phelps. *Bull. London Math. Soc.*, 2:181-182, 1970.

[24] Bombal, F.; Pérez-García, D. and Villanueva, I. Multilinear extensions of Grothendieck's theorem. *Q. J. Math.*, 55(4): 441-450, 2004.

[25] Botelho, G. and Pellegrino, D.M. Two new properties of ideals of polynomials and applications. *Indag. Math.*, 16 (2):157-169, 2005.

[26] Botelho, G.; Çalişkan, E. and Pellegrino, D. M. On the representation of multi-ideals by tensor norms. *J. Aust. Math. Soc.*, 90(2):253-269, 2011.

[27] Bourgain, J. On dentability and the Bishop-Phelps property. *Israel J. Math.*, 28:265-271, 1977.

[28] Cabello-Sánchez, F.; Pérez-García, D. and Villanueva, I. Unexpected subspaces of tensor products. *J. London Math. Soc.*, 74(2):512-526, 2006.

[29] Carando, D.; Dimant, V. and Muro, S. Hypercyclic convolution operators on Fréchet spaces of analytic functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 336(2):1324-1340, 2007.

[30] Carando, D.; Dimant, V. and Muro, S. Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces. *Math. Nachr.* 282(8): 1111-1133, 2009.

[31] Carando, D.; Dimant, V. and Muro, S. Holomorphic functions and polynomial ideals on Banach spaces. *Collect. Math.*, 63(1):71-91, 2012.

[32] Carando, D.; Lassalle, S. and Mazzitelli, M. On the polynomial Lindenstrauss theorem. *J. Funct. Anal.*, 263(7):1809-1824, 2012.

[33] Carando, D.; Lassalle, S. and Mazzitelli, M. A Lindenstrauss theorem for some classes of multilinear mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, In Press, Accepted Manuscript, 2014.

[34] Carando, D. and Mazzitelli, M. Bounded holomorphic functions attaining their norms in the bidual. Preprint, http://arxiv.org/abs/1403.6431

[35] Casazza, P. Approximation properties. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, North-Holland, Amsterdam*, 271-316, 2001.

[36] Choi, Y. S. Norm attaining bilinear forms on $L^1[0,1]$. *J. Math. Anal. Appl.*, 211(1):295-300, 1997.

[37] Choi, Y.S. and Kim, S.G. Norm or numerical radius attaining multilinear mappings and polynomials. *J. London Math. Soc. (2)*, 54(1):135-147, 1996.

[38] Choi, Y.S.; Lee, H.J. and Song, H.G. Denseness of norm-attaining mappings on Banach spaces. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 46(1):171-182, 2010.

[39] Choi, Y.S. and Song, H.G. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem fails for bilinear forms on $l_1 \times l_1$. *J. Math. Anal. Appl.*, 360(2):752-753, 2009.

[40] Cobos, F.; Kühn, T. and Peetre, J. Schatten-von Neumann classes of multilinear forms. *Duke Math. J.*, 65(1):121-156, 1992.

[41] Davie, A. M. and Gamelin, T. W. A theorem on polynomial-star approximation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(2):351-356, 1989.

[42] Day, M. Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 47(4):313-317, 1941.

[43] Defant, A. and Floret, K. Tensor norms and operator ideals, *Vol. 176 of North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam*, 1993.

[44] Dimant, V. and Dineen, S. Banach subspaces of spaces of holomorphic functions and related topics. *Math. Scand.*, 83(1):142-160, 1998.

[45] Dineen, S. Complex analysis on infinite-dimensional spaces. *Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London*, 1999.

[46] Enflo, P. A counterexample to the approximation property in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309-317, 1973.

[47] Finet, C. and Payá, R. Norm attaining operators from L_1 into L_∞. *Israel J. Math.*, 108:139-143, 1998.

[48] Floret, K. Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces. In *Proceedings of the Second International Workshop on Functional Analysis (Trier, 1997). Note Mat.*, 17:153-188, 1999.

[49] Floret, K. Minimal ideals of n-homogeneous polynomials on Banach spaces. *Results Math.*, 39(3-4):201-217, 2001.

[50] Floret, K. and García, D. On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces. *Arch. Math. (Basel)*, 81(3):300-308, 2003.

[51] Gamelin, T. Iversen´s theorem an fiber algebras. *Pac. J. Math.*, 46:389-414, 1973.

[52] García, D.; Grecu, B.C. and Maestre, M. Geometry in preduals of spaces of 2-homogeneous polynomials on Hilbert spaces. *Monatsh. Math.*, 157(1):55-67, 2009.

[53] Gowers, W.T. Symmetric block bases of sequences with large average growth. *Israel J. Math.*, 69(2):129-151, 1990

[54] Grecu, B.C. and Ryan, R.A. An integral duality formula. *Math. Scand.*, 98(2):229-236, 2006.

[55] Grothendieck, A. Résumé de la théorie des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, 1953(16):1-79, 1953.

[56] Grothendieck, A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1955:140 p., 1955.

[57] Harris, L.A. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors. *Analyse fonctionnelle et applications (Comptes Rendus Colloq. Analyse, Inst. Mat., Univ. Federal Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1972)*, 145-163. Actualités Aci. Indust., No. 1367, Hermann, Paris, 1975.

[58] Harris, L.A. Markov's inequality for polynomials on normed linear spaces. *Math. Balkanica (N.S.)*, 16:315-326, 2002.

[59] Huff, R.E. On non-density of norm attaining operators. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 25:239-241, 1980.

[60] James, R.C. Reflexivity and the supremum of linear functionals. *Ann. Math.*, 66(2):159-169, 1957.

[61] James, R.C. Weakly compact sets. *Trans. Am. Math. Soc.*, 113:129-140, 1964.

[62] Jiménez-Sevilla, M. and Payá, R. Norm attaining multilinear forms and polynomials on preduals of Lorentz sequence spaces. *Studia Math.*, 127(2):99-112, 1998.

[63] Kim, S.K. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators from c_0 to uniformly convex spaces. *Israel J. Math.*, 197(1):425-435, 2013.

[64] Kim, S.K. and Lee, H.J. Uniform convexity and Bishop-Phelps-Bollobás property. *Canad. J. Math.*, 66(2):373-386, 2014.

[65] Lindenstrauss, J. On operators which attain their norm. *Israel J. Math.*, 1:139-148, 1963.

[66] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. Classical Banach spaces I. Sequence spaces. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 92. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XIII, 190 p.*, 1977.

[67] Mujica, J. Complex analysis in Banach spaces. Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 107. *North-Holland Mathematics Studies*, 120:xii+434 p., 1986. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam.*

[68] Matos, M. Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings. *Collect. Math.*, 54(2):111-136, 2003.

[69] Mujica, J. Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):867-887, 1991.

[70] Muro, S. Funciones holomorfas de tipo acotado e ideales de polinomios homogéneos en espacios de Banach. *PhD thesis, Univ. de Buenos Aires*, 2010.

[71] Payá, R. A counterexample on numerical radius attaining operators. *Israel J. Math.*, 1:83-101, 1992.

[72] D. Pérez-García; I. Villanueva. Multiple summing operators on Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 285 (1):86-96, 2003.

[73] Phelps, R. R.. Subreflexive normed linear spaces. *Arch. Math.*, 8:444-450, 1957.

[74] Phelps, R. R. Some subreflexive Banach spaces. *Arch. Math.*, 10:162-169, 1959.

[75] Pietsch, A. Ideals of multilinear functionals (designs of a theory), Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983). *Teubner-Texte Math.*, 67:185-199, 1984.

[76] Poliquin, R.A. and Zizler, V. Optimization of convex functions on w^*-convex sets. *Manuscripta Math.*, 68:249-270, 1990.

[77] Ryan, R. Applications of Topological Tensor Products to Infinite Dimensional Holomorphy. *Trinity College, Dublin*, 1980.

[78] Schachermayer, W. Norm attaining operators on some classical Banach spaces. *Pacific J. Math.*, 105:427-438, 1983.

[79] Szankowski, A. $B(H)$ does not have the approximation property. *Acta Math.*, 146:89-108, 1981.

Índice alfabético