



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

**Operadores maximales
asociados a esqueletos de cubos**

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el
área Ciencias Matemáticas

Lic. Andrea del Valle Olivo

Director de tesis: Pablo S. Shmerkin

Consejero de estudios: Carlos A. Cabrelli

Buenos Aires, febrero de 2019.

Fecha de defensa: 11 de abril de 2019

Operadores maximales asociados a esqueletos de cubos

Resumen

En esta tesis se estudian operadores maximales que toman promedios sobre (entornos de) bordes de cuadrados o más generalmente sobre k -esqueletos de cubos en dimensión arbitraria.

El interés por este tipo de operadores surge, por un lado, de un problema geométrico en donde se estudia el tamaño de un conjunto que contiene copias re-escaladas y trasladadas del k -esqueleto del cubo unitario en \mathbb{R}^n alrededor de cada punto de un conjunto con cierto tamaño dado. Por otro lado, es una variante natural del célebre operador maximal esférico de Bourgain y Stein.

En una primera parte, encontramos cotas casi óptimas en L^p , con $1 \leq p$, para dichos operadores maximales. Estas cotas se obtienen por medio de un proceso de discretización y linealización, junto con un argumento de dualidad y herramientas combinatorias.

Luego, en una segunda parte, extendemos este resultado usando un método introducido por Schlag en el caso del operador circular, y obtenemos cotas de L^p en L^q , para todo $1 < p \leq q$.

Por último, si $w \geq 0$ es una función localmente integrable, establecemos condiciones necesarias para que estos operadores resulten acotados en $L^p(w)$, $p > 1$. Más aún, para una sucesión particular de valores de p , mostramos que estas condiciones resultan suficientes.

Palabras claves: Funciones maximales, promedios sobre k -esqueletos, cotas casi óptimas, dimensión box.

Maximal operators associated with skeletons of cubes

Abstract

In this thesis we study maximal operators associated to averaging over (neighborhoods of) squares in the plane and, more generally over k -skeletons of cubes with arbitrary dimension.

The interest in this type of operators emerges, on one hand, from a geometric problem about the size of a set containing re-scaled and translated copies of the k -skeleton of the unit cube in \mathbb{R}^n around every point of a set of given size. On the other hand, it is a natural variant of the celebrated spherical maximal operator of Bourgain-Stein.

First, we obtain nearly sharp L^p bounds with $p \geq 1$ for these maximal operators. These bounds are obtained through a discretization and linearization process, together with a duality argument and some combinatorial tools.

In a second part, we extend the result through a method introduced by Schlag in the context of the circular maximal operator, and give bounds in $L^p \rightarrow L^q$, for all $1 < p \leq q$.

Finally, if $w \geq 0$ is a locally integrable function, we establish necessary conditions such that the operators are bounded in $L^p(w)$, $p > 1$. Furthermore, for a particular sequence of values of p , we show that this conditions are sufficient.

Key words: Maximal functions, averages over k -skeletons, nearly sharp bounds, box dimension.

Agradecimientos

A Pablo por su guía, dedicación, paciencia, confianza y respeto durante estos años de trabajo en el doctorado.

A Carlos por darme la posibilidad de venir a Buenos Aires para realizar mi doctorado y a Ursula por conducir junto a Carlos el grupo de Analisis Armónico y Geometría Fractal, el cual colaboró mucho en mi formación. Gracias también a cada uno de sus integrantes por todos los momentos de estudio, seminarios, mates, congresos, etc.

A Carlos Perez, Sheldy Ombrosi y Daniel Carando por aceptar ser jurados de esta tesis.

Al Departamento de Matemática y al IMAS por darme un lugar y un ambiente cálido de trabajo. Al CONICET por la beca recibida.

A la Universidad Nacional del Sur, por su formación. Gracias a todos los profesores, amigos y compañeros que allí conocí.

A mis papás, Marcela y Beto, y a mis hermanas Silvia, Anita y Luci por ser incondicionales y estar para todo, siempre.

A Ezequiel por darme la posibilidad de trabajar juntos, su dedicación y gran generosidad.

A Deby, Moni y Lili por estar ahí siempre que las necesite durante el doctorado.

A todos los que pasaron por la gloriosa (y mejor oficina del mundo) 2046: Cris, Ani, Caro M, Mazzi, Savra, Anto, Turco, Román, Nico F, Nico S, Ro B, Luis, Jesús, Pancho, Sofi, Xime, Javi, Juli... Gracias por hacer los días más divertidos, por las reuniones, salidas, discusiones sobre cualquier cosa y las tardes de mates y facturas. También a los chicos de la 2038 y a toda la gente linda de mesaza por los gloriosos almuerzos (y sus partidos de volley)!!

A Caro M. y Cris, gracias por integrarme en la facu desde el primer día. Mejor dicho, desde el CIMPA de Mar del Plata. Hicieron los primeros días mas fáciles!

A mis vecinos: Lu, Nico F y Nico S. Gracias por invitarme los domingos a comer cosas ricas y compartir todas las ofertas que el barrio tenía!

A Ro, Euge R, Euge C y Mari, lindas amigas que me regaló la matemática. Gracias por todas las charlas entre mates, cafés y recreos por los pasillos.

A Karem, Fede y Caro R. Juntos desde la Famaf. Parecian duros los comienzos, pero acá estamos.

A mis roommates Meli y el Niño rata que no me dejaron sin techo durante un mes.

A todos los compañeros de la Di Tella.

A los chicos de teatro, los Conventilleros, por ser mi cable a tierra y hacerme olvidar los días en que ninguna cuenta cerraba.

A la Mari y a la Meli, amigas de la vida.

A José por su amor, por escucharme, acompañarme, ser incondicional y apoyarme en todo.

De esta etapa me llevo muchos amigos y momentos inolvidables. Gracias a todas las personas que conocí en este camino y que hicieron que estos cinco años fueran maravillosos.

Cuando empecé a estudiar matemática, por el 2007, sin saber bien de que se trataba esto, este momento parecía lejano e imposible. Finalmente lo que había dicho mi profesor de Análisis I era cierto. Se necesitaba paciencia, paciencia y paciencia.

Gracias!!

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
Contenidos	IX
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Nociones de dimensión fractal	1
1.1.1. Medida y dimensión de Hausdorff	2
1.1.2. Dimensión box	6
1.1.3. Medida y dimensión packing	12
1.2. Resultados clásicos de análisis real	14
1.2.1. Definiciones básicas	14
1.2.2. Teoremas de interpolación	16
1.2.3. La clase de pesos A_p de Muckenhoupt	21
2. Problema geométrico	23
2.1. El problema de los k -esqueletos	24
2.2. Estimaciones discretas	26
2.3. Estimaciones para la dimensión box y la dimensión packing	29
2.4. Construcción de un ejemplo	32
3. Operador maximal asociado a los k-esqueletos	39
3.1. Preliminares	39

3.2. Definición y cotas triviales	42
3.3. Discretización y linealización	44
3.4. Estimaciones para la versión lineal	48
3.5. Estimaciones en L^p para el operador maximal	55
3.6. Extensión	59
3.7. Aplicación	62
4. Estimaciones de L^p en L^q	65
4.1. El método combinatorio	66
4.2. El método combinatorio para los k - esqueletos	68
4.3. Estimaciones de L^p en L^q	72
4.4. Extensión	74
5. Estimaciones con pesos	79
5.1. Condición necesaria	79
5.2. Condición suficiente	82
Bibliografía	93

Introducción

A lo largo de la historia los operadores maximales han jugado un rol central en el Análisis Armónico y han sido ampliamente estudiados. Muchas veces, problemas provenientes de otras áreas, como la geometría, encuentran solución o un planteo similar dentro de esta teoría.

Uno de los operadores más conocidos es la función maximal de Hardy-Littlewood, el cual en \mathbb{R}^n se puede definir como

$$\mathcal{M}_{HL}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}_n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy \quad (0.1)$$

para toda función $f \in L^1_{\text{loc}}$, donde \mathcal{L}_n es la medida de Lebesgue n -dimensional y $B(x, r)$ es la bola de centro x y radio r . Esta función maximal está estrechamente relacionada con el problema de estimar el solapamiento que existe entre una familia de bolas con radios y centros variables. En esta dirección, el Lema de cubrimiento de Vitali nos conduce al Teorema de Hardy-Littlewood, en el cual se prueba que la función maximal de Hardy-Littlewood está acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p \leq \infty$.

En muchas aplicaciones en las cuales el operador en cuestión no resulta estar localizado en bolas, la función maximal de Hardy-Littlewood debe ser reemplazada por otros operadores maximales. Por ejemplo, se pueden reemplazar las bolas por cierta clase de rectángulos, segmentos, esferas, tubos, incluso conjuntos de Cantor o cualquier otro objeto geométrico.

En esta tesis estudiamos un operador maximal proveniente de un problema de geometría fractal que pertenece a una familia más general de problemas conocidos como “problemas de tipo Kakeya”. En nuestro caso, los objetos geométricos sobre los cuales se define el operador son los k -esqueletos de cubos n -dimensionales con lados paralelos a los ejes, donde $n \geq 2$ y $0 \leq k < n$ son enteros fijos. Por k -esqueleto nos referimos a la unión de las caras k -dimensionales de un cubo n -dimensional.

Los “problemas de tipo Kakeya” comparten la siguiente estructura: para cada x en algún espacio de parámetros S se define una familia de conjuntos $\mathcal{F}_x \subset \mathbb{R}^n$ y lo que se busca es estimar cuán “chico” puede ser el tamaño de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, suponiendo que contiene un elemento de \mathcal{F}_x , para todo $x \in S$. La noción de tamaño depende en gran parte del problema, puede ser la medida de Lebesgue o alguna dimensión fractal adecuada. Todos estos problemas tienen asociado un operador maximal que usualmente se define

como

$$Mf(x) = \sup_{C \in \mathcal{F}_x} A(f, C),$$

donde f es una función continua en el espacio correspondiente y $A(f, C)$ es el promedio de f sobre el conjunto C (definido usando la medida natural sobre estos conjuntos). Resulta interesante conocer el comportamiento de estos operadores y obtener acotaciones en L^p para valores adecuados de p , pues típicamente esto implica cotas inferiores para el tamaño de los conjuntos B definidos anteriormente.

Antecedentes

Un problema muy famoso es el problema de *Keakeya*. Si bien este problema es relativamente antiguo, dado que data de principios de siglo XX, fue después de 1970 y principalmente a partir de los años 90 que surgieron nuevas y más profundas versiones de este problema conectadas con áreas de la matemática aún en desarrollo.

Un conjunto de *Keakeya* (o de *Besicovitch*) es un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene un segmento unitario en cada dirección posible. *Besicovitch* [Bes19] probó que existen conjuntos de *Keakeya* con medida de Lebesgue cero.

La aún no resuelta conjetura de *Keakeya* afirma que, aunque estos conjuntos pueden ser chicos respecto a la medida de Lebesgue, deben tener dimensión de Hausdorff n . Esto fue probado en el caso $n = 2$ y en dimensiones mayores, si bien ha habido avances significativos, la conjetura continua abierta.

Un planteo más moderno del problema que aparece en algunos trabajos de Córdoba [Cor75, Cor77] consiste en estudiar el operador maximal asociado al problema geométrico. Más precisamente, se define la función maximal de *Keakeya* $\mathcal{K}_\delta f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{K}_\delta f(e) = \frac{1}{\mathcal{L}_n(T_e^\delta(a))} \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{T_e^\delta(a)} |f(y)| dy,$$

donde $T_e^\delta(a)$ es un δ -entorno del segmento unitario centrado en a con dirección e . Entender el comportamiento de este operador es de suma importancia. En efecto, si para todo $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ y $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ vale que

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^n(S^{n-1})} \leq C(n, \varepsilon) \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}, \quad (0.2)$$

entonces la conjetura de *Keakeya* es válida en \mathbb{R}^n .

Utilizando argumentos geométricos, Córdoba probó (0.2) para el caso $n = 2$ y más tarde Bourgain [Bou91] lo demostró usando análisis de Fourier. El caso $n \geq 3$ todavía continua abierto.

Si los segmentos unitarios son reemplazados por esferas, aparece el operador maximal esférico. Más específicamente, sea σ^{n-1} la medida de superficie normalizada sobre S^{n-1} y f una función continua, el operador maximal esférico se define como

$$\mathcal{M}_{esf} f(x) = \sup_{r>0} \int_{S^{n-1}} |f(x + ry)| d\sigma^{n-1}y. \quad (0.3)$$

Stein [Ste76] probó que \mathcal{M}_{esf} está acotado en L^p con $p > n/n - 1$ y $n \geq 3$. El caso $n = 2$, mucho más difícil, fue probado por Bourgain [Bou86] casi diez años más tarde y tanto el resultado como su demostración han sido extremadamente influyentes en el Análisis durante los últimos treinta años. El resultado de Bourgain incluye, además de los círculos, cualquier curva suave con curvatura no nula.

Una consecuencia simple del Teorema de Stein-Bourgain es que si un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene una esfera con centro en cada punto de \mathbb{R}^n , entonces B tiene medida de Lebesgue positiva. En el plano, este resultado fue probado independientemente por Marstrand [Mar87], sin usar operadores maximales. Como B contiene una familia n -dimensional de objetos $(n - 1)$ -dimensionales con poca intersección (pues, por ejemplo, dos círculos diferentes son tangentes o se cortan solo en dos puntos), es esperable que B tenga medida de Lebesgue positiva. Más aún, este hecho se repite si el conjunto de centros es más pequeño. Wolff [Wol00] (para $n = 2$) y Mitsis [Mit99] ($n \geq 3$) probaron que si $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene dimensión de Hausdorff mayor que 1 y B contiene una esfera con centro en cada punto de S , entonces B tiene medida de Lebesgue positiva. Además, Talagrand [Tal80] probó que este último resultado es sharp. Por otro lado, si el conjunto de centros S tiene dimensión de Hausdorff $s \leq 1$, Wolff [Wol97] probó que la dimensión de Hausdorff de B es mayor o igual que $s + n - 1$.

Otro problema similar es considerar fijo el conjunto de los radios en lugar del conjunto de centros. En esta dirección, Besicovitch y Rado [BR68] y Kinney [Kin68] probaron que existe un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{R}^n$ con medida de Lebesgue cero que contiene una esfera de cada radio. Luego, Kolasa y Wolff [KW99] probaron que estos conjuntos tienen dimensión de Hausdorff n como consecuencia de estimaciones de L^p en L^q para el operador $R_\delta f : [1/2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$R_\delta f(r) = \sup_x \frac{1}{\mathcal{L}(C_\delta(x, r))} \int_{C_\delta(x, r)} |f(y)| dy, \tag{0.4}$$

donde $C_\delta(x, r)$ es un δ -entorno de la esfera centro x y radio r .

En un contexto más amplio, para cualquier medida de Borel finita μ , el operador definido en (0.3) se puede generalizar como

$$\mathcal{M}_\mu f(x) = \sup_{r>0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + ry)| d\mu(y).$$

Recientemente, Laba y Pramanik [LP11] estudiaron este operador cuando μ es la medida natural de probabilidad sobre un conjunto de Cantor $C \subset [1, 2]$ (por conjunto de Cantor nos referimos a un conjunto compacto, no vacío, nunca denso y sin puntos aislados). Las autoras construyen un conjunto de Cantor C_s con medida de Hausdorff s , para cada $s \in (2/3, 1]$, tal que \mathcal{M}_μ está acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $p > \frac{2-s}{s}$.

Inmediatamente de aquí obtienen el siguiente resultado geométrico: si $B, S \subset \mathbb{R}$, S tiene medida de Lebesgue positiva y para cada $x \in S$, existe $r > 0$ tal que $rC_s + x \subset B$, entonces B tiene medida de Lebesgue positiva. Máthé [Mat] probó que no es posible extender este resultado a cualquier conjunto de Cantor. En efecto, para cada $s \in (0, 1)$ existe un conjunto

de Cantor C con dimensión de Hausdorff s y un conjunto de Borel B con dimensión de Hausdorff $\frac{s+1}{2}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un $r > 0$ tal que $rC + x \subset B$.

El problema de los k -esqueletos

A diferencia de lo que sucede con los círculos, un resultado seguramente conocido por Wolff es que un conjunto que contiene el borde de un cuadrado con lados paralelos a los ejes y centro en cada punto del $[0, 1]^2$ puede tener medida de Lebesgue cero. Intuitivamente, lo que sucede con los bordes de cuadrados es que pueden ser elegidos de forma tal que se solapen mucho y por lo tanto, la unión de todos resulta ser chica con respecto a la medida de Lebesgue. Un problema que surge naturalmente es estimar el tamaño de este tipo de conjuntos pero utilizando alguna dimensión fractal en lugar de la medida de Lebesgue.

En esta dirección, Keleti, Nagy y Shmerkin [KNS18] probaron que existe un conjunto cerrado $B \subset \mathbb{R}^2$ con dimensión de Hausdorff 1 (la misma que el borde de solo un cuadrado) que contiene el borde de un cuadrado con lados paralelos a los ejes y centro en todo punto de \mathbb{R}^2 . Este resultado poco intuitivo, sugiere que quizás la dimensión de Hausdorff, como noción de tamaño, no es la indicada en este contexto. Otras nociones de dimensión más apropiadas son la dimensión box y la dimensión packing. Los autores probaron que si B contiene el borde de un cuadrado con centro en cada punto de $[0, 1]^2$, entonces B tiene dimensión box mayor o igual a $7/4$. Además, mostraron que este resultado es sharp, es decir, existe un compacto B como antes con dimensión box igual a $7/4$. Estimaciones similares se obtienen cuando el conjunto de centros es un conjunto arbitrario del plano.

En dimensiones mayores, para generalizar el concepto de borde de un cuadrado se introducen los k -esqueletos. Dado $0 \leq k < n \in \mathbb{N}$, definimos el k -esqueleto de un cubo n -dimensional con lados paralelos a los ejes como la unión de sus caras k -dimensionales. Por ejemplo, si $n = 2, k = 1$ entonces el 2-esqueleto de un cubo 2-dimensional (o un cuadrado) es la unión de sus aristas (es decir, el borde). El caso $k = 0$, para cualquier n , hace referencia a los vértices.

Thornton [Tho17] estudió el problema análogo al tratado en [KNS18] en dimensiones mayores y generalizó varios de los resultados allí obtenidos para el caso $n = 2$.

En los dos trabajos citados anteriormente los argumentos utilizados son puramente geométricos y combinatorios y no incluyen operadores maximales.

Nuestro objetivo es estudiar el operador maximal asociado a este problema. Como una generalización directa del operador maximal esférico definido en (0.3) podríamos tomar

$$\mathcal{M}_\delta^k f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}_n(S_{k,\delta}(x,r))} \int_{S_{k,\delta}(x,r)} |f(y)| dy,$$

donde $S_{k,\delta}(x,r)$ es el δ -entorno del k -esqueleto de un cubo n -dimensional con centro en x y lados de longitud $2r$. En otras palabras, reemplazamos directamente las esferas por los k -esqueletos. Veremos que esta definición no resulta adecuada, pues arroja resultados

triviales. Como consecuencia de esta definición se puede probar que si un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^2$ contiene el borde de un cuadrado con centro en todo punto de $[0, 1]^2$ tiene dimensión box mayor que 1. Este resultado es trivial, pues como B contiene al menos el borde de un cuadrado, automáticamente su dimensión box está acotada inferiormente por 1.

Siguiendo las ideas planteadas en [KNS18], un operador más interesante es el siguiente. Dados $0 \leq k < n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathbf{M}_\delta^k f(x) = \sup_{r>0} \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}_n(S_{k,\delta}^j(x,r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x,r)} |f(y)| dy,$$

donde $S_k^j(x,r)$ enumera las N caras del k -esqueleto del cubo n -dimensional con centro en x y lado de longitud $2r$ y con $S_{k,\delta}^j(x,r)$ denotamos un δ -entorno.

Este operador tiene en consideración todas las caras de un k -esqueleto, pero no es sub-lineal y esta es la primer diferencia con los problemas clásicos relacionados.

Si consideramos el caso $n = 2$ y $k = 1$, el operador se define como

$$\mathbf{M}_\delta^1 f(x) = \sup_{r>0} \min_{j=1}^4 \frac{1}{4\delta r} \int_{S_{k,\delta}^j(x,r)} |f(y)| dy.$$

Es decir, promediamos una función sobre el δ - entorno de cada uno de los cuatro lados de un cuadrado.

En un comienzo, como es usual en este tipo de problemas, trabajamos con una versión restringida del operador en la cual los lados de los cubos están acotados. Más precisamente, definimos

$$M_\delta^k f(x) = \sup_{1 \leq r \leq 2} \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}_n(S_{k,\delta}^j(x,r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x,r)} |f(y)| dy. \quad (0.5)$$

Es fácil deducir del Teorema de Hardy-Littlewood que M_δ^k está acotado en L^p , $1 < p$ con una cota que depende de δ . El problema es entender cómo se comporta la norma en L^p de este operador cuando $\delta \rightarrow 0$. Como respuesta, obtuvimos el siguiente resultado casi sharp.

Teorema I. Sean $0 \leq k < n$ enteros dados, $1 \leq p < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Existen constantes positivas $C'(n, k, \varepsilon)$, $C(n, k, p)$ tales que

$$C'(n, k, \varepsilon) \cdot \delta^{\frac{k-n}{2np} + \varepsilon} \leq \|M_\delta^k\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, k, p) \cdot \delta^{\frac{k-n}{2np}},$$

para todo $\delta \in (0, 1)$.

Para probar este resultado seguimos algunas de las estrategias usadas en el estudio de los operadores mencionados anteriormente. Reducimos el problema a un problema de intersecciones de objetos geométricos vía un proceso de discretización, linealización y dualidad. Sin embargo, el hecho de tener un operador que no es sub-lineal requiere introducir algunas variantes en el argumento. Con estas acotaciones para el operador maximal

logramos recuperar algunos de los resultados ya conocidos para el problema geométrico asociado.

Luego, extendimos los resultados obtenidos en el Teorema I para el caso en que consideramos k -esqueletos con lados de longitud $2r$, $\delta < r \leq 2$, usando argumentos de reescalamiento. Además, se puede ver que si la longitud de los lados no está acotada superiormente, el operador \mathbf{M}_δ^k no está acotado en L^p . Por otro lado, si permitimos k -esqueletos con lados más chicos que δ , $S_{k,\delta}(x, r)$ se transforma en un cubo n -dimensional de lado $\approx \delta$. Luego, el operador \mathbf{M}_δ^k toma promedios sobre todo un cubo, similar al operador maximal de Hardy-Littlewood.

Fuera del caso diagonal, obtuvimos acotaciones de L^p en L^q , para $p < q$. Para el caso $p > q$, un ejemplo sencillo muestra que el operador no está acotado.

Para obtener las estimaciones de L^p en L^q , interpolar directamente los resultados en L^p con las estimaciones triviales en L^∞ y de L^1 en L^∞ no es suficiente, pues las cotas que se obtienen no son buenas. Adaptando algunas ideas usadas por Schlag [Sch96] para tratar el caso del operador maximal circular, obtuvimos el siguiente resultado.

Teorema II. Sean $1 < p \leq q \leq \infty$, $\varepsilon > 0$ y $q^* = \frac{2n^2}{(n-k)(2n-1)}$. Para todo $\delta \in (0, 1)$ vale que,

$$\begin{aligned} C'_1 \delta^{\frac{k-n}{2np} + \varepsilon} &\leq \left\| M_\delta^k \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \delta^{\frac{k-n}{2np}} && \text{si } q \leq q^* p \\ C'_2 \delta^{\frac{n}{q} - \frac{n-k}{p}} &\leq \left\| M_\delta^k \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \delta^{\frac{n}{q} - \frac{n-k}{p}} && \text{si } q^* p < q \end{aligned}$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas que dependen de k, n, p, q , $C'_1 = C'_1(k, n, p, q, \varepsilon)$ y $C'_2 = C'_2(k, n)$.

Otra problema que surge naturalmente es caracterizar la clase de pesos para los cuales el operador M_δ^k está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n, w)$, o simplemente $L^p(w)$.

Más precisamente, si $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función localmente integrable, queremos encontrar condiciones necesarias y suficientes para que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\delta^k f(x)|^p w(x) dx \leq C(\delta, w) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx, \tag{0.6}$$

para toda función $f \in L^p(w)$.

Muckenhoupt [Muc72] probó que el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado en $L^p(w)$, $p > 1$, si y sólo si w satisface la condición A_p dada por

$$[w]_{A_p} := \sup_B \left(\int_B w dx \right) \left(\int_B w^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty. \tag{0.7}$$

Como un resultado ideal, quisiéramos encontrar una condición geométrica similar a la condición A_p definida en (0.7) para el caso de los k -esqueletos. Sin embargo, para el caso del operador maximal de Kakeya o el operador maximal esférico, la geometría de estos problemas es mucho más difícil de manejar y no se conocen condiciones geométricas del

tipo A_p . Para el operador maximal de *Keakeya*, algunos resultados sobre estimaciones con pesos se pueden encontrar en [M90], donde el autor obtiene una condición geométrica que no es fácil manipular.

Otro problema relacionado con las desigualdades con pesos es la desigualdad de tipo *Fefferman-Stein*. Dado un operador maximal T , el problema es encontrar el mejor rango de exponentes p para los cuales la siguiente desigualdad es válida para cualquier peso w :

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim \|f\|_{L^p(Tw)},$$

donde el peso de la izquierda es diferente al peso de la derecha. En los trabajos [Var94, MS95, Tan01] se prueban resultados en esta dirección para el operador maximal de *Keakeya*.

Para el operador maximal esférico, tampoco hay una condición geométrica del tipo A_p como en el caso del operador maximal de *Hardy-Littlewood*. Para más detalles, nos referimos a los trabajos [DV96] y [DS02].

Para el operador maximal asociado a los k -esqueletos obtuvimos, hasta ahora, los siguientes resultados: definimos la condición $\mathcal{A}_p^{S_k}$, $1 < p < \infty$, y probamos que si un peso w verifica (0.6), entonces $w \in \mathcal{A}_p^{S_k}$. Por otro lado, para dar condiciones suficientes definimos una clase diferente de pesos, que denotamos por $A_p^{S_k}$. Esta clase de pesos está relacionada con la versión discretizada del operador maximal asociado a los k -esqueletos que se utiliza para obtener las estimaciones en L^p . Probamos que si $w \in A_p^{S_k}$, con $p > 1$ y $\frac{p}{p-1} \in \mathbb{N}$, entonces vale (0.6) y obtuvimos una dependencia cuantitativa del peso. Este resultado además se puede extender para el caso $p = 1$.

Esquema de la tesis

- En el [Capítulo 1](#) incluimos algunas definiciones y resultados básicos que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

Definimos la dimensión de *Hausdorff*, la dimensión *box* y la dimensión *packing* e incluimos varias de las propiedades que estas nociones de dimensión cumplen.

Por otro lado, repasamos conceptos clásicos del análisis real que aplicaremos a lo largo de este trabajo, como definiciones básicas, teoremas de interpolación de operadores, resultados clásicos de la teoría de pesos, etc.

- En el [Capítulo 2](#) desarrollamos el problema geométrico estudiado en [KNS18, Tho17], el cual da origen al operador maximal que estudiamos en esta tesis. Mostramos varios de los resultados que se obtienen en estos trabajos para la versión discreta del problema y cuando se considera la dimensión *box* y la dimensión *packing*.
- En el [Capítulo 3](#) definimos el operador maximal asociado a los k -esqueletos y probamos acotaciones en L^p . Más precisamente probamos el Teorema I. Para esto,

construimos una versión discretizada y linealizada del operador M_δ^k definido en (0.5), denotada por $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ y que aproxima en norma a M_δ^k . La clave para definir esta nueva versión discreta y lineal es, de alguna manera, prescindir del mínimo en la definición de M_δ^k . En este sentido, resulta clave el Lema 3.3.5 en el cual damos un algoritmo para elegir un cara de cada k -esqueleto de modo que tenemos un control del solapamiento entre ellas. Luego, usando un argumento de dualidad, encontramos acotaciones en L^p para $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$, para ciertos valores de p . Finalmente, por interpolación obtenemos la cota superior del Teorema I. Para probar la cota inferior, usamos un conjunto fractal construido en [Tho17] y que desarrollamos en el capítulo anterior.

- En el [Capítulo 4](#) probamos estimaciones de L^p en L^q para el operador M_δ^k definido en (0.5). Para esto, adaptamos un argumento combinatorio, denominado el método combinatorio, utilizado por Schlag [Sch96] para tratar el operador maximal circular. Con dicho método se obtienen estimaciones de tipo débil y luego, usando interpolación, se obtiene el Teorema II.
- En el [Capítulo 5](#) estudiamos el operador maximal asociado a los k -esqueletos con pesos. Damos una condición necesaria para que el operador M_δ^k esté acotado en $L^p(w)$, con w un peso positivo y $p > 1$. Para esto, usamos algunas de las ideas que se utilizan para deducir la condición A_p para el operador maximal de Hardy-Littlewood. Por otro lado, definimos una clase de pesos que acotan a la versión discretizada y linealizada $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ y luego damos condiciones suficientes para que M_δ^k resulte acotada en $L^p(w)$, para ciertos valores de $p \geq 1$ (aquellos para los cuales $p' \in \mathbb{N}$).

Contribuciones originales de la tesis

Las contribuciones originales de esta tesis se encuentran en los capítulos 3, 4 y 5 y dieron origen a las siguientes trabajos:

- A. Olivo and P. Shmerkin, *Maximal operators for cube skeletons*. Preprint, arXiv:1807.05280,2018.
- A. Olivo, *Off-diagonal estimates for cube skeletons maximal operators*.
- A. Olivo and E. Rela, *Weighted estimates for maximal functions associated to skeletons* (en preparación).

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo introducimos algunas definiciones y resultados bien conocidos que aparecerán a lo largo de esta tesis. En la [Sección 1.1](#) definimos y damos algunas propiedades para la dimensión de Hausdorff, la dimensión box y la dimensión packing. En la [Sección 1.2](#) repasamos algunos conceptos básicos sobre acotación de operadores lineales, dos teoremas clásicos de interpolación como el Teorema de Interpolación de Riesz Thorin y el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz. Por último, damos algunos resultados clásicos dentro de la teoría de estimaciones para operadores con pesos.

1.1. Nociones de dimensión fractal

A grandes rasgos, el concepto de dimensión fractal permite diferenciar entre sí conjuntos que para la medida de Lebesgue resultan indistinguibles. A modo de ejemplo consideremos un punto en \mathbb{R} y el conjunto ternario de Cantor $C_{1/3}$. Ambos tienen medida de Lebesgue cero, pero si consideramos la dimensión de Hausdorff, $C_{1/3}$ tiene dimensión $\log 2 / \log 3$, mientras que un punto tiene dimensión 0.

En las definiciones de dimensión que daremos a continuación la idea es medir conjuntos a “escala δ ”. Dado $0 < \delta < 1$, se miden los conjuntos ignorando las irregularidades de tamaño menor que δ y se observa que sucede cuando δ tiende a cero.

En lo que sigue, denotaremos el diámetro de un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ por

$$\text{diám}(F) = \sup_{x,y \in F} d(x,y),$$

donde d es la distancia euclídea en \mathbb{R}^n .

Para $\delta > 0$, un δ -cubrimiento de F es una colección finita o numerable de conjuntos $\{F_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ de manera que $F \subseteq \bigcup_i F_i$ y $\text{diam}(F_i) \leq \delta$ para todo i .

1.1.1. Medida y dimensión de Hausdorff

Comenzaremos definiendo la medida de Hausdorff. Un tratamiento más profundo del tema se puede ver en [Rog98].

Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $s > 0$. Para todo $\delta > 0$ definimos la *medida de Hausdorff s -dimensional* a escala δ de F como

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(F_i)^s : \{F_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\}. \quad (1.1)$$

Si δ decrece, la clase de δ -cubrimientos admisibles para F se reduce y por lo tanto, \mathcal{H}_δ^s es creciente. Luego, consideramos

$$\mathcal{H}^s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) = \sup_{\delta} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

y obtenemos la medida de Hausdorff s -dimensional de F . Este límite existe para cualquier subconjunto F de \mathbb{R}^n , incluyendo el caso en que sea 0 o ∞ .

Se puede probar que \mathcal{H}^s es una medida. Es decir, $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$, si $E \subseteq F$ entonces $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ y si $\{F_i\}$ es una familia numerable de conjuntos, entonces

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_i F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Un caso especial de estas medidas es cuando consideramos un exponente s entero. Por ejemplo, en el caso $s = 1$, claramente \mathcal{H}^1 coincide con la medida usual de Lebesgue en \mathbb{R} . Si tomamos $n > 1$, un resultado no trivial es el siguiente:

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \mathcal{L}_n(F), \quad (1.2)$$

donde c_n es el volumen de la bola unitaria n -dimensional. Es decir, la medida de Hausdorff n -dimensional, salvo constante, coincide con la medida de Lebesgue n -dimensional (lo que usualmente llamamos el volumen n -dimensional). La prueba de este resultado no es simple y su demostración se puede ver en [EG92, Sección 2.2].

Dimensión de Hausdorff

Para empezar, veamos cuál es el rol del parámetro s en la definición de \mathcal{H}^s con las siguientes propiedades.

Proposición 1.1.1. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $0 < s < t$, entonces*

1. $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$.
2. Si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$.

3. Si $\mathcal{H}^t(F) > 0$ entonces $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.

Demostración. Si $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ es un δ -cubrimiento de F ,

$$\begin{aligned} \inf \sum_{i=1}^\infty \text{diám}(F_i)^t &= \inf \sum_{i=1}^\infty \text{diám}(F_i)^{t-s} \text{diám}(F_i)^s \\ &\leq \delta^{t-s} \inf \sum_{i=1}^\infty \text{diam}(F_i)^s \end{aligned}$$

y por lo tanto, el ítem 1 se sigue inmediatamente. Luego, haciendo tender $\delta \rightarrow 0$ podemos ver que si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$, con lo cual el ítem 2 es válido y el ítem 3 es inmediato. \square

Si dibujamos en un gráfico \mathcal{H}^s en función de s (como en la figura 1) podemos ver que existe un valor crítico s_0 en el cual $\mathcal{H}^s(F)$ tiene un salto en el que pasa de $+\infty$ a 0. Este punto crítico separa las medidas \mathcal{H}^s para las cuales el conjunto F es “demasiado grande” (los valores a la izquierda de s_0), pues todas toman el valor $+\infty$, de aquellas medidas \mathcal{H}^s para las cuales el conjunto F es “demasiado chico” (los valores a la derecha de s_0) y todas valen 0. Esto sugiere que, si hay algún candidato que mida adecuadamente el tamaño de F , debe ser \mathcal{H}^{s_0} . El valor crítico $s = s_0$ se define como la *dimensión de Hausdorff* de F , y se denota por $\dim_H(F)$.

Más precisamente, para cualquier conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dim_H(F) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Luego,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F). \end{cases} \quad (1.3)$$

Si $\dim_H(F) = s$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser igual a cero, infinito o satisfacer

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty.$$

Los conjuntos que satisfacen la última condición se conocen como s -sets.

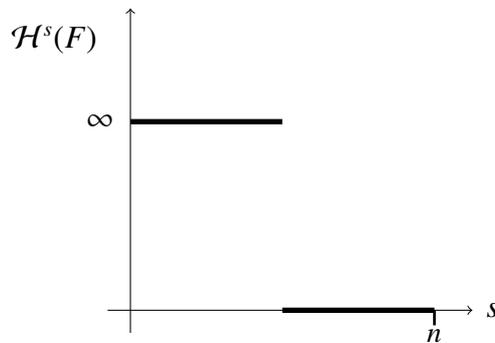


Figura 1. Gráfico de \mathcal{H}^s en función de s para un conjunto F .

Proposición 1.1.2. *La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:*

1. Si $E \subseteq F$, entonces $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.
2. Contablemente estable: si F_1, F_2, \dots es una sucesión numerable de conjuntos, entonces $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_i \{\dim_H(F_i)\}$.
3. Si $F \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\dim_H F \leq n$.

Demostración. Si $E \subseteq F$ entonces $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para todo s , con lo cual el ítem 1 es inmediato.

Para el ítem 2, observemos que $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \dim_H(F_j)$ para cada j , por 1. Por otro lado, si $s > \dim_H(F_i)$ para todo i , entonces $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$ y $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$. Luego, $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq s$ para cualquier s y por lo tanto, $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\}$.

Para probar el ítem 3 es suficiente probar que $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$. Como $\mathcal{L}_n([0, 1]^n) < \infty$, por (1.2) $0 < \mathcal{H}^n([0, 1]^n) < \infty$. Luego, por definición $\dim_H([0, 1]^n) = n$. En general, cualquier cubo en \mathbb{R}^n tiene dimensión de Hausdorff n y luego por (2) y (1) tenemos lo que queríamos. □

Observación 1.1.3. Si $\mathcal{L}_n(F) > 0$ entonces $\dim_H(F) = n$. La vuelta no vale.

El siguiente resultado es una herramienta útil cuando se quiere estimar la dimensión de algún conjunto en particular.

Lema 1.1.4. *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \quad \text{para todo } x, y \in F$$

con constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces, para cada $s > 0$

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

De aquí se obtiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.1.5. *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \text{para todo } x, y \in F.$$

Entonces, $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha) \dim_H F$.

Más aún, si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación bi-Lipschitz, es decir,

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$$

con constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, entonces $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

Este último resultado revela una propiedad fundamental para la dimensión de Hausdorff: invariancia bajo transformaciones bi-Lipschitz. Por lo tanto, si dos conjuntos tienen dimensiones distintas, no existe una aplicación bi-Lipschitz que lleve un conjunto hacia otro.

De los resultados mencionados anteriormente se pueden deducir las siguientes propiedades:

1. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto entonces $\dim_H(F) = n$, pues contiene un cubo con medida de Lebesgue positiva.
2. Si F es numerable entonces $\dim_H F = 0$. En efecto, \mathcal{H}^0 asigna medida uno a cada punto de F y por lo tanto, cada punto tiene dimensión 0. Luego, por el ítem (2) de la Proposición 1.1.2 tenemos que F también tiene dimensión cero.
3. Las curvas suaves tienen dimensión 1 y las superficies suaves tienen dimensión 2. En general, si F es una variedad m -dimensional suave entonces $\dim_H(F) = m$.

Por último, en el siguiente ejemplo vamos a calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto fractal conocido como *Cantor dust*.

Ejemplo 1.1.6. Sea $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ el conjunto de Cantor (Cantor dust) construido a partir del cuadrado unitario como se muestra en la figura 2.

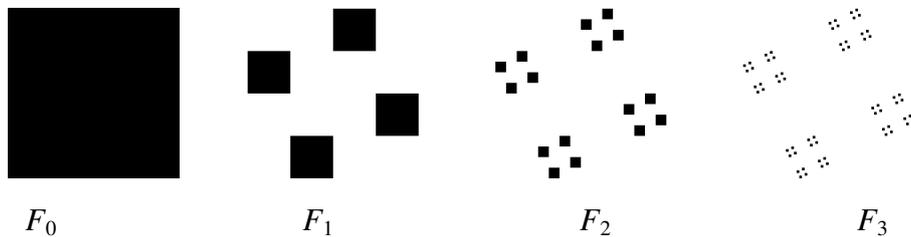


Figura 2. Cantor dust

En cada paso de la construcción los cuadrados se dividen en 4 cuadrados iguales mas pequeños, donde la longitud de sus lados es un cuarto de la longitud del cuadrado del paso anterior que los generó. Veamos que $\dim_H(F) = 1$.

Alcanza con probar que $0 < \mathcal{H}^1(F) < \infty$. En primer lugar notemos que F_i , el i -ésimo paso de la construcción, consiste de 4^i cuadrados de lado 4^{-i} con diámetro $4^{-i} \sqrt{2}$. Si tomamos $\delta = 4^{-i} \sqrt{2}$, los 4^i cuadrados de F_i forman un δ -cubrimiento de F y entonces,

$$\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq \sum_{m=1}^{4^i} 4^{-i} \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Luego, cuando $i \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ y por lo tanto $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

Por otro lado, consideremos la proyección ortogonal P sobre el eje x . Por como está construido F , su proyección sobre el eje x es el intervalo $[0, 1]$. Ahora bien, como las proyecciones ortogonales son transformaciones Lipschitz, pues $|P(x) - P(y)| \leq |x - y|$, usando Corolario 1.1.5 tenemos que

$$1 = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(P(F)) \leq \mathcal{H}^1(F).$$

En conclusión, $1 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq \sqrt{2}$ y por lo tanto, $\dim_H(F) = 1$.

1.1.2. Dimensión box

En esta sección daremos la definición de la dimensión box (también conocida como dimensión de Minkowski) y algunas de sus propiedades más importantes. Para un tratamiento mas exhaustivo del tema referimos al lector a [Fal86, Fal97, Fal03].

Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y sea $N_\delta(F)$ el menor número de conjuntos que forman un δ -cubrimiento de F , es decir,

$$N_\delta(F) := \text{mín} \left\{ m : F \subseteq \bigcup_{i=1}^m F_i, \text{diam}(F_i) \leq \delta \right\}.$$

La *dimensión box inferior* y *superior* de F se definen respectivamente como:

$$\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (1.4)$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (1.5)$$

Si ambos límites coinciden, nos referimos a este valor común como la dimensión box de F ,

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Nota 1.1.7. En adelante, cada vez que nos referimos a la dimensión box (superior e inferior) de un conjunto estamos asumiendo que el conjunto es acotado.

Observación 1.1.8.

1. Si $\delta_1 < \delta_2$ entonces $N_{\delta_2}(F) \leq N_{\delta_1}(F)$.
2. Supongamos que $\dim_B(F) = \alpha$. Esto significa que $N_\delta(F)$ crece como $\delta^{-\alpha}$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Es decir, dado $\varepsilon > 0$,

$$\delta^{-(\alpha-\varepsilon)} \leq N_\delta(F) \leq \delta^{-(\alpha+\varepsilon)}$$

para δ suficientemente pequeño.

3. En la definición de dimensión box es suficiente considerar una sucesión decreciente δ_k tal que $\delta_{k+1} \geq c \delta_k$ para alguna constante $0 < c < 1$. En efecto, sea $0 < \delta < 1$ tal que $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$ para algún k . Luego,

$$\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta}$$

y por lo tanto,

$$\liminf_{\delta_k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta}. \quad (1.6)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} &\leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \\ &\leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c} \end{aligned}$$

y entonces

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log(\delta)} \leq \liminf_{\delta_k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}. \quad (1.7)$$

Luego, por (1.6) y (1.7) concluimos que $\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\delta_k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$. Para el caso de la dimensión box superior la demostración es análoga.

Existen otras definiciones equivalentes para la dimensión box que en ocasiones resultan más convenientes.

Lema 1.1.9. *La misma definición de dimensión box vale si la cantidad N_{δ} se define de alguna de las siguientes formas:*

1. *El menor número de bolas euclideas cerradas de radio δ que cubren F .*
2. *El menor número de cubos n -dimensionales cerrados de lado δ que cubren F .*
3. *El mayor número de bolas euclideas disjuntas de radio δ con centro en F .*
4. *El número de cubos n -dimensionales de una δ -malla que cortan a F . Por δ -malla nos referimos a todos los cubos de la forma $\prod_{i=1}^n [a_i \delta, (a_i + 1) \delta]$, con $a_i \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Comenzaremos probando 4. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y consideremos $N'_{\delta}(F)$ el número de cubos en una δ -malla que cortan a F . Estos cubos forman una familia de $N'_{\delta}(F)$ conjuntos de diámetro $\delta \sqrt{n}$ que cubren F , entonces

$$N_{\delta \sqrt{n}} \leq N'_{\delta}(F).$$

Si $\delta \sqrt{n} < 1$ entonces,

$$\frac{\log N_{\delta \sqrt{n}}}{-\log(\delta \sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}$$

y tomando límite cuando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos,

$$\underline{\dim}_B(F) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B(F) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (1.8)$$

Por otro lado, cualquier conjunto con diámetro a lo sumo δ está contenido en 3^n cubos de la δ -malla (basta con elegir un cubo que contenga algún punto del conjunto junto con sus vecinos), es decir,

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F).$$

Aplicando logaritmo a ambos miembros y tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos las desigualdades opuestas a (1.8). Por lo tanto, para calcular la dimensión box definida en (1.4) y (1.5), podemos tomar N_δ como el menor número de cubos de una δ -malla que cortan a F . Esta definición nos da una interpretación para el significado de la dimensión box. El número de cubos en una δ -malla que cortan a F es un indicador sobre cuan esparcido o irregular es el conjunto cuando lo miramos a escala δ . La dimensión refleja que tan rápidamente cambian las irregularidades cuando $\delta \rightarrow 0$.

Para probar 2, basta notar que cualquier cubo de lado δ tiene diámetro $\delta \sqrt{n}$ y que cada conjunto de diámetro a lo sumo δ está contenido en un cubo de lado δ . Luego, operando de forma similar a lo hecho para 4, se obtiene lo pedido. La parte 1 se obtiene de manera similar.

Ahora veamos 3. Sea $N'_\delta(F)$ el mayor número de bolas euclideas disjuntas de radio δ con centro en F , denotadas por $B_1, \dots, B_{N'_\delta(F)}$. Si $x \in F$, entonces x se encuentra a una distancia menor que δ de alguna de las bolas B_i , pues en caso contrario la bola de centro x y radio δ se podría añadir a la colección de bolas disjuntas. Las $N'_\delta(F)$ bolas concéntricas a B_i de radio 2δ cubren F y entonces

$$N_{4\delta}(F) \leq N'_\delta(F), \quad (1.9)$$

donde $N_{4\delta}(F)$ es el menor número de conjuntos de diámetro a lo sumo 4δ que cubren F .

Por otro lado, sea U_1, \dots, U_k una colección de conjuntos de diámetro a lo sumo δ que cubre F . Como estos conjuntos deben cubrir los centros de cada bola B_i , cada B_i contiene al menos uno de los U_j . Como las bolas B_i son disjuntas, hay tantos conjuntos U_j como bolas B_i . Luego,

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F), \quad (1.10)$$

donde $N_\delta(F)$ es el menor número de conjuntos con diámetro a lo sumo δ que cubren F .

Tomando logaritmo y límite en (1.9) y (1.10) se prueba que en (1.5) y (1.4) se puede reemplazar $N_\delta(F)$ por $N'_\delta(F)$. \square

Existe una formulación un poco diferente para la dimensión box que usaremos más adelante y que vale la pena mencionar.

Dado $\delta > 0$ y $F \subset \mathbb{R}^n$, definimos el δ -entorno F_δ como

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq \delta \text{ para algún } y \in F\},$$

donde d es la distancia inducida por la norma infinito en \mathbb{R}^n .

Otra forma de definir la dimensión box es considerar la rapidez a la cual decrece la medida de Lebesgue de F_δ cuando δ tiende a cero. En \mathbb{R}^3 , si F es un punto entonces F_δ es cubo con $\mathcal{L}(F_\delta) = (2\delta)^3$, si F es un segmento de longitud l entonces $\mathcal{L}(F_\delta) \approx l(2\delta)^2$ y si F es un conjunto plano con área a entonces $\mathcal{L}(F_\delta) \approx a\delta$. En cualquiera de estos casos se puede ver que $\mathcal{L}(F_\delta) \approx \delta^{3-\alpha}$, donde el entero α es la dimensión de F .

Esta idea se puede extender a dimensiones que no son enteras. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ y, para algún $\alpha > 0$, $\mathcal{L}_n(F_\delta)/\delta^{n-\alpha}$ tiende a un número finito y positivo cuando $\delta \rightarrow 0$, entonces diremos que F es α -dimensional. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.10. *Si F es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , entonces*

$$\underline{\dim}_B(F) = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B(F) = n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta}$$

donde F_δ es un δ -entorno de F .

Demostración. Si F se puede cubrir con $N_\delta(F)$ cubos de lado $\delta < 1$, entonces F_δ se puede cubrir con cubos concéntricos de lado 2δ . Luego,

$$\mathcal{L}(F_\delta) \leq N_\delta(F)(2\delta)^n.$$

Tomando logaritmos y dividiendo por $-\log \delta$,

$$\frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

y por lo tanto,

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B(F).$$

Por otro lado, si hay N_δ bolas euclideas disjuntas de radio δ con centro en F y tomamos los cubos de lados $\delta/2$ concéntricos a dichas bolas, tenemos que

$$N_\delta(F)2^{-n}\delta^n \leq \mathcal{L}(F_\delta).$$

Tomando logaritmos y dividiendo por $(-\log \delta)$,

$$\frac{\log N_\delta(F) + n \log \delta - n \log 2}{-\log \delta} \leq \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{-\log \delta}.$$

Si hacemos tender δ a 0, por el ítem 3 del Lema 1.1.9 tenemos

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{-\log \delta} \geq -n + \underline{\dim}_B(F).$$

Luego, $\underline{\dim}_B(F) = n + \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{-\log \delta} = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(F_\delta)}{\log \delta}$ como queríamos probar. El caso restante se prueba de manera análoga. \square

A continuación listamos algunas propiedades elementales para la dimensión box, similares a las de la dimensión de Hausdorff.

Proposición 1.1.11. Sean $E, F \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos acotados. Entonces,

1. Si $E \subseteq F$, entonces $\underline{\dim}_B(E) \leq \underline{\dim}_B(F)$ y $\overline{\dim}_B(E) \leq \overline{\dim}_B(F)$.
2. $\underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F) \leq n$.
3. La dimensión box superior es finitamente estable, es decir,

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F)\}$$

mientras que la dimensión box inferior no lo es.

4. Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación Lipschitz, entonces $\underline{\dim}_B(f(F)) \leq \underline{\dim}_B(F)$. Si f es bi-Lipschitz, entonces $\underline{\dim}_B(f(F)) = \underline{\dim}_B(F)$.

Veamos de que manera están relacionadas la dimensión box y la dimensión de Hausdorff.

Supongamos que $\dim_H(F) = \alpha$. Si F se puede cubrir con $N_\delta(F)$ conjuntos de diámetro δ y $s < \alpha$, por (1.1) y (1.3), tenemos

$$1 < \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s.$$

Si tomamos logaritmos en la desigualdad anterior nos queda $0 < \log N_\delta(F) + s \log \delta$ y por lo tanto,

$$s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

para δ suficientemente chico.

Como $s < \alpha$ es arbitrario, podemos concluir que

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F). \quad (1.11)$$

Esta desigualdad puede ser estricta, pero en cualquier caso, resulta bastante útil para obtener cotas superiores de la dimensión de Hausdorff de un conjunto eligiendo cubrimientos adecuados.

A pesar de estar relacionadas, existe una gran diferencia entre la dimensión box y la dimensión de Hausdorff, como veremos a continuación.

Consideremos un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ y su clausura \overline{F} . Sea B_1, \dots, B_m una colección finita de bolas cerradas de radio δ . Si F está contenido en $\bigcup_{i=1}^m B_i$ entonces \overline{F} también. Por lo tanto, el menor número de bolas cerradas de radio δ que cubren a F también cubren a \overline{F} .

Luego, usando el ítem 1 de la definición 1.1.9 tenemos que

$$\underline{\dim}_B(\overline{F}) = \underline{\dim}_B(F) \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B(\overline{F}) = \overline{\dim}_B(F).$$

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si F es un subconjunto denso de \mathbb{R}^n entonces $\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F) = n$.

Sea $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Como $\overline{F} = [0, 1]$, por lo anterior tenemos que $\dim_B(F) = 1$. Entonces, a diferencia de la dimensión de Hausdorff, un conjunto numerable puede tener dimensión box no nula. Más aún, si consideramos a cada racional como un punto, cada uno tiene dimensión box nula pero la unión de todos ellos tiene dimensión 1. Esto nos demuestra que, en general,

$$\dim_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \neq \sup_i \dim_B(F_i).$$

A continuación daremos algunas propiedades de la dimensión box que se deducen de lo visto anteriormente.

1. Un punto x_0 en \mathbb{R}^n tiene dimensión box 0, pues $N_\delta(x_0) = 1$ para todo δ . Más generalmente, $N_\delta(\{x_1, x_2, \dots, x_m\}) \leq m$. Luego, por definición, conjuntos finitos tienen dimensión box igual a 0.
2. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$, si $\dim_B(F) < n$ entonces $\mathcal{L}(F) = 0$. En efecto, sea $\varepsilon = \frac{1}{2}(n - \dim_B(F))$, por el ítem 1 de la observación 1.1.8, para δ suficientemente pequeño es posible cubrir a F con $\delta^{-(\dim_B(F)+\varepsilon)}$ conjuntos de diámetro $\leq \delta$.

Por otra parte, un conjunto con diámetro $\leq \delta$ se puede cubrir por un conjunto con medida de Lebesgue $c\delta^n$, para alguna constante c . Luego, F se puede cubrir con un conjunto que tiene medida de Lebesgue $\leq c\delta^n \delta^{-(\dim_B(F)+\varepsilon)} \lesssim \delta^\varepsilon$ y como esto vale para δ arbitrariamente chico, se sigue que $\mathcal{L}(F) = 0$.

3. Un segmento en \mathbb{R}^n tiene dimensión box 1. Un subconjunto abierto y acotado de un plano en \mathbb{R}^3 tiene dimensión box 2. Más generalmente, cualquier variedad m -dimensional suave en \mathbb{R}^n tiene dimensión box m .

Para finalizar vamos a calcular la dimensión box del conjunto ternario de Cantor.

Ejemplo 1.1.12. Consideremos la siguiente familia de subconjuntos del intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} F_0 &= [0, 1] \\ F_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ F_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]. \end{aligned}$$

Dado F_i , el conjunto F_{i+1} se obtiene dividiendo cada intervalo de F_i en tres partes iguales y removiendo el tercio del medio (ver figura 3). El conjunto ternario de Cantor se define como $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Veamos que $\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F) = \log 2 / \log 3$.

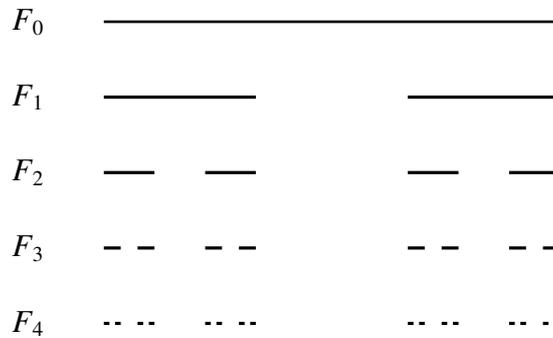


Figura 3. Conjunto ternario de Cantor

En efecto, observemos que F_i , el i -ésimo paso en la construcción de F , consiste de 2^i intervalos de longitud 3^{-i} . Si tomamos $3^{-i} < \delta \leq 3^{-i+1}$ entonces $N_\delta(F) \leq 2^i$ y

$$\overline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 2^i}{\log 3^{i-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por otra parte, si $3^{-i-1} \leq \delta < 3^{-i}$, cualquier intervalo de longitud δ corta a lo sumo uno de los intervalos de longitud 3^{-i} del i -ésimo paso de la construcción de F . Luego, necesitamos al menos 2^i intervalos de longitud δ para cubrir F . Por lo tanto, $N_\delta(F) \geq 2^i$ y entonces $\underline{\dim}_B(F) \geq \log 2 / \log 3$.

1.1.3. Medida y dimensión packing

La dimensión de Hausdorff se define por medio de cubrimientos por bolas pequeñas, mientras que la dimensión box se puede definir por medio de cubrimientos con bolas

pequeñas de igual radio o por medio de bolas disjuntas, como establece la Definición 1.1.9.

Resulta natural tratar de establecer una noción de dimensión que esté definida en términos de bolas pequeñas y disjuntas con diferentes radios. Para esto, siguiendo una construcción parecida a la usada en la definición de la medida y dimensión de Hausdorff, se define la medida packing s -dimensional. Para un tratamiento más detallado del tema referimos al lector a [Fal86, Fal97, Fal03].

Sea $\delta > 0$ y $F \subseteq \mathbb{R}^n$, un δ -packing de F es una colección de bolas disjuntas de radio a lo sumo δ con centros en F . Si $s > 0$ definimos

$$\mathcal{P}_\delta^s(F) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(F_i)^s : \{F_i\} \text{ es un } \delta\text{-packing de } F \right\}.$$

Como $\mathcal{P}_\delta^s(F)$ decrece cuando $\delta \rightarrow 0$, el límite $\mathcal{P}_0^s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P}_\delta^s(F)$ existe. Si tomamos conjuntos numerables densos es fácil ver que \mathcal{P}_0^s no es una medida, pues no resulta subaditiva. Sin embargo, \mathcal{P}_0^s resulta ser una premedida y usando un argumento estándar podemos definir la *medida packing s -dimensional* \mathcal{P}^s de un conjunto F como

$$\mathcal{P}^s(F) := \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}_0^s(E_i) : E \subseteq \bigcup_i E_i \right\}.$$

Al igual que para la medida de Hausdorff, podemos definir la *dimensión packing de F* , denotada por $\dim_p(F)$, como

$$\dim_p(F) = \inf\{s : \mathcal{P}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{P}^s(F) = \infty\}.$$

Se puede probar que $\mathcal{P}^s(F) = \infty$ si $s < \dim_p(F)$ y $\mathcal{P}^s(F) = 0$ si $s > \dim_p(F)$.

A veces resulta útil expresar la dimensión packing en términos de la dimensión superior box. Se puede probar que si $F \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\dim_p = \inf \left\{ \sup_i \overline{\dim}_B(F_i) : F \subset \bigcup_i F_i \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos numerables $\{F_i\}$ de F .

Por estar definida a través de una medida, esta dimensión satisface la propiedad de monotonía: si $E \subseteq F$, $\dim_p(E) \leq \dim_p(F)$. Más aún, es invariante bajo transformaciones bi-Lipschitz, es cero para conjuntos formados por un punto y es contablemente estable.

La dimensión packing está relacionada con la dimensión de Hausdorff y la dimensión box, por medio de la siguiente desigualdad:

$$\dim_H(F) \leq \dim_p(F) \leq \overline{\dim}_B(F). \quad (1.12)$$

La prueba de este resultado se puede ver en [Fal03, Sección 3.3 y 3.4].

Por último, el siguiente resultado establece algunas desigualdades para la dimensión de espacios producto. Para más detalles ver [Fal03, Cap. 7].

Teorema 1.1.13. (Reglas del producto). Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Las siguientes propiedades son válidas:

1. $\dim_H(A) + \dim_H(B) \leq \dim_H(A \times B) \leq \dim_H(A) + \overline{\dim}_B(B)$.
2. $\dim_P(A) + \dim_H(B) \leq \dim_P(A \times B) \leq \dim_P(A) + \dim_P(B)$.
3. $\underline{\dim}_B(A \times B) \geq \underline{\dim}_B(A) + \underline{\dim}_B(B)$.
4. $\overline{\dim}_B(A \times B) \leq \overline{\dim}_B(A) + \overline{\dim}_B(B)$.

1.2. Resultados clásicos de análisis real

En esta sección repasaremos algunos conceptos y definiciones básicas sobre la teoría de operadores. Algunas demostraciones serán omitidas pero se darán las referencias correspondientes.

1.2.1. Definiciones básicas

Sea (X, μ) un espacio de medida σ -finito, donde μ es una medida positiva. En este trabajo, usualmente $\mu = \mathcal{L}_n$ será la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^n y muchas veces, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente \mathcal{L} .

Si $1 \leq p < \infty$, $L^p(X, \mu)$ denota el espacio normados de las funciones μ -medibles $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ para las cuales

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Si $p = \infty$, diremos que $f \in L^\infty(X, \mu)$ si

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(X, \mu)} &= \text{ess sup}_X |f| \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\} < \infty. \end{aligned}$$

Cuando no exista lugar a confusión escribiremos simplemente $L^p(X)$ o incluso, si el espacio sobre el que estamos trabajando está claro, L^p .

Proposición 1.2.1. Sean $1 \leq p < \infty$ y $p' = \frac{p}{p-1}$.

1. **Desigualdad de Hölder:** si f, g son dos funciones medibles en (X, μ) vale que

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

2. **Desigualdad integral de Minkowski:** sea F una función medible en el espacio producto $(X, \mu) \times (Y, \nu)$. Entonces,

$$\left[\int_Y \left(\int_X |F(x, t)| d\mu(x) \right)^p d\nu(t) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left[\int_Y |F(x, t)|^p d\nu(t) \right]^{\frac{1}{p}} d\mu(x).$$

La prueba de esta proposición, así como otras desigualdades clásicas en el análisis, se pueden ver en [Zig65, Sección 1.9].

Definición 1.2.2. Sea f una función medible sobre X . La función de distribución de f es la función $d_f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

Con esta definición tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.3. Para toda $f \in L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha. \quad (1.13)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha &= p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \int_X \mathbf{1}_{\{x: |f(x)| > \alpha\}} d\mu(x) d\alpha \\ &= \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \\ &= \|f\|_{L^p}^p, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos el Teorema de Fubini. \square

Definición 1.2.4. Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(X, \mu)$ débil se define como el conjunto de las funciones μ -medibles $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ para las cuales

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)} = \sup\{\alpha > 0 : \alpha \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}^{1/p}\} < \infty. \quad (1.14)$$

Si una función f satisface (1.14) diremos que $f \in L^{p,\infty}(X, \mu)$.

Se puede ver que $L^p(X, \mu) \subseteq L^{p,\infty}(X, \mu)$. En efecto, sea $f \in L^p$ y tomemos $\alpha > 0$, entonces

$$\alpha^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq \int_{\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}} |f|^p d\mu.$$

Como α es arbitrario y la integral de la derecha es a lo sumo $\|f\|_p^p$, por (1.14) tenemos que $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$. Luego, $f \in L^{p,\infty}$ como queríamos probar.

Observación 1.2.5. La definición de $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ dada en (1.14) no es una norma. Si $p > 1$ se puede probar que el espacio $L^{p,\infty}$ es normable, es decir, existe una norma en $L^{p,\infty}$, denotada por $\|\cdot\|$, equivalente a $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}^p$. Más precisamente, si $f \in L^{p,\infty}(X, \mu)$, se define

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{0 < \mu(E) < \infty} \mu(E)^{\frac{1}{p}-1} \int_E |f| d\mu,$$

para todo conjunto μ -medible de medida finita. Se puede probar que efectivamente $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ es una norma y además, se cumple que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \| |f| \|_{L^{p,\infty}} \leq p' \|f\|_{L^{p,\infty}}. \quad (1.15)$$

Aquí no probaremos estos resultados pero los mismos se pueden encontrar en [GRF, Sección 1.1].

1.2.2. Teoremas de interpolación

Definición 1.2.6. Sean (X, μ) , (Y, ν) dos espacios de medida σ -finitos y sea T un operador definido sobre el espacio de funciones μ -medibles sobre X que toma valores en el espacio de funciones ν -medibles sobre Y . Dadas funciones f, g y $c \in \mathbb{R}$, diremos que T es lineal si

$$T(f + g) = T(f) + T(g) \quad \text{y} \quad T(cf) = cT(f).$$

T se dice sub-lineal si

$$|T(f + g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \quad \text{y} \quad |T(cf)| = |c| |T(f)|.$$

Definición 1.2.7. Sean (X, μ) , (Y, ν) dos espacios de medida σ -finitos y sea T un operador lineal definido sobre todas las funciones simples μ -medibles sobre X y tomando valores en las funciones ν -medibles sobre Y . Diremos que T es

1. Tipo fuerte (p, q) , $1 \leq p, q \leq \infty$, si existe una constante C tal que

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad (1.16)$$

para todas las funciones simples μ -medibles sobre X .

2. Tipo débil (p, q) , con $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, si existe una constante C tal que

$$\|T(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad (1.17)$$

para todas las funciones simples μ -medibles sobre X . Para $q = \infty$, diremos que T es de tipo débil (p, ∞) si $\|T(f)\|_{\infty} \leq C \|f\|_p$.

Observación 1.2.8. Es fácil ver que si T es de tipo fuerte (p, q) entonces T es de tipo débil (p, q) . En efecto, si $q = \infty$ es trivial, pues las definiciones coinciden.

Supongamos $1 \leq q < \infty$ y para cada $\alpha > 0$ consideremos el conjunto $E_\alpha := \{x \in X : |Tf(x)| > \alpha\}$. Entonces,

$$\alpha^q \nu(E_\alpha) = \alpha^q \int_{E_\alpha} d\nu \leq \int_{E_\alpha} |T(f)|^q d\nu$$

y como T es de tipo fuerte (p, q) tenemos

$$\nu(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha^q} \|T(f)\|_q^q \leq \left(\frac{C}{\alpha} \|f\|_p \right)^q,$$

como queríamos probar.

Teorema 1.2.9 (Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin). Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y sea T un operador lineal definido en $(L^{p_0} + L^{p_1})(X, \mu)$ que toma valores en las funciones ν -medibles sobre Y . Supongamos que T es de tipo fuerte (p_0, q_0) y (p_1, q_1) con constantes M_0 y M_1 , es decir,

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$$

y

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Entonces para todo $0 < \theta < 1$,

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \quad \text{para toda } f \in L^p,$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

La demostración de este resultado se puede encontrar en varios libros clásicos de análisis, como por ejemplo [SW71, Capítulo 5].

Teorema 1.2.10 (Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz). Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ con $p_i \leq q_i$, ($i = 0, 1$) y sea T un operador sub-lineal definido en $(L^{p_0} + L^{p_1})(X, \mu)$ y tomando valores en las funciones ν -medibles sobre Y . Supongamos que T es de tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1) con constantes M_0 y M_1 , es decir

$$\nu(\{|T(f)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{M_0}{\lambda} \|f\|_{p_0}\right)^{q_0}$$

y

$$\nu(\{|T(f)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{M_1}{\lambda} \|f\|_{p_1}\right)^{q_1}.$$

Entonces para todo $0 < \theta < 1$, existe una constante M_θ tal que

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M_\theta \|f\|_{L^p} \quad \text{para toda } f \in L^p,$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Además,

$$M_\theta \leq C M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

donde $C = C(p_0, q_0, p_1, q_1, \theta)$ es una constante que tiende a infinito cuando θ tiende a cero y a uno.

Observación 1.2.11. Los pares $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ para los cuales el operador T resulta ser de tipo fuerte (p, q) pertenecen al segmento que une los puntos $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ y $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$.

La demostración del teorema anterior se puede ver en [BS88, Capítulo 4], [SW71, Capítulo 5], etc. En este trabajo sólo vamos a incluir la demostración del Teorema 1.2.10 en el caso en que $p_1 = q_1 = \infty$. Este caso particular será utilizado en el capítulo 4 y nos interesa tener de manera explícita la dependencia de la constante M_θ .

Demostración del Teorema 1.2.10 (caso particular). Sean $p_0 \leq q_0 < \infty$ y $p_1 = q_1 = \infty$. La hipótesis débil (p_1, q_1) se transforma en tipo fuerte (p_1, q_1) , es decir, $\|Tf\|_\infty \leq M_1 \|f\|_\infty$.

Tomemos $c = \frac{1}{2M_1}$ y escribamos $f = f_0 + f_1$ donde

$$f_0 = f \mathbf{1}_{\{|f|>c\alpha\}} \quad \text{y} \quad f_1 = f \mathbf{1}_{\{|f|\leq c\alpha\}}.$$

Como T es de tipo fuerte (∞, ∞) ,

$$\|Tf_1\|_\infty \leq M_1 \|f_1\|_\infty \leq M_1 c \alpha \leq \frac{\alpha}{2},$$

y entonces $d_{Tf_1}(\alpha/2) = \mu(\{x \in X : |Tf_1(x)| > \alpha/2\}) = 0$.

Ahora bien, por (1.2.3) y usando que T es de tipo débil (p_0, q_0) , tenemos

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q^q &= q \int_0^\infty \alpha^{q-1} d_{Tf}(\alpha) d\alpha \leq q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \left[d_{Tf_0}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d_{Tf_1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] d\alpha \\ &\leq q \int_0^\infty \alpha^{q-1} d_{Tf_0}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \leq q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \left(2M_0 \frac{\|f_0\|_{p_0}^{q_0}}{\alpha} \right) d\alpha \\ &\leq q(2M_0)^{q_0} \int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} \left(\int_X |f_0|^{p_0} dx \right)^{\frac{q_0}{p_0}} d\alpha \leq q(2M_0)^{q_0} \int_0^\infty \left(\int_X \alpha^{(q-q_0-1)\frac{p_0}{q_0}} |f_0|^{p_0} dx \right)^{\frac{q_0}{p_0}} d\alpha. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad integral de Minkowski (con $p = q_0/p_0$), para la última integral doble obtenemos

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \left(\int_X \alpha^{(q-q_0-1)\frac{p_0}{q_0}} |f_0|^{p_0} dx \right)^{\frac{q_0}{p_0}} d\alpha \right)^{\frac{p_0}{q_0}} \leq \int_X \left(\int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} |f_0|^{q_0} d\alpha \right)^{\frac{p_0}{q_0}} dx \\ &\leq \int_X \left(\int_0^{\frac{|f|}{c}} \alpha^{q-q_0-1} |f|^{q_0} d\alpha \right)^{\frac{p_0}{q_0}} dx \leq \int_X |f|^{p_0} \left(\frac{\alpha^{q-q_0}}{q-q_0} \right) \Big|_0^{\frac{|f|}{c}} dx \\ &\leq \frac{1}{((q-q_0)c)^{\frac{p_0}{q_0}}} \int_X |f|^{p_0+(q-q_0)\frac{p_0}{q_0}} dx = \frac{1}{((q-q_0)c)^{\frac{p_0}{q_0}}} \int_X |f|^p dx. \end{aligned}$$

Por la observación 1.2.11, aplicada al caso en que $p_1 = q_1 = \infty$, tenemos que el par $(1/p, 1/q)$ satisface que $\frac{1}{q} = \frac{p_0}{q_0} \frac{1}{p}$. Luego, $p_0 = (q-q_0)\frac{p_0}{q_0} = q\frac{p_0}{q_0} = p$.

Por lo tanto, usando que $c = \frac{1}{2M_1}$,

$$\|Tf\|_q^q \leq q(2M_0)^{q_0} \frac{M_1}{q-q_0} \left(\int_X |f|^p dx \right)^{\frac{q_0}{p_0}}.$$

Si $\|f\|_p = 1$, entonces $\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$ con

$$C^q = q(2M_0)^{q_0} \frac{M_1}{q-q_0}.$$

Para $f \in L^p$ con $0 < \|f\|_p < \infty$, basta considerar $\tilde{f} = \|f\|_p^{-1} f$. Usando que T es sub-lineal tenemos que

$$\|Tf\|_q = \|f\|_p \|T\tilde{f}\|_q \leq C \|\tilde{f}\|_p \|f\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Por último, probemos la parte referida a la constante M_θ . Si suponemos $M_0 = M_1 = 1$, tenemos $\|Tf\|_q \leq CM_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p$ con

$$C^q = q \frac{2^{q_0}}{q - q_0}.$$

Veamos qué sucede en el caso $M_0, M_1 \neq 1$. Como T es un operador sublineal, se satisface $|T(cf)| \leq |c|Tf$. Definimos $T_1 = c_1 T$ y $d\nu_1 = c_2 d\nu$, donde c_1, c_2 son dos constantes positivas. Entonces, como T es de tipo fuerte (q_0, p_0) ,

$$\begin{aligned} \nu_1(\{x \in X : |T_1 f(x)| > \alpha\}) &= c_2 \nu(\{x \in X : c_1 |Tf(x)| > \alpha\}) \\ &= c_2 \nu\left(\left\{x \in X : c_1 |Tf(x)| > \frac{\alpha}{c_1}\right\}\right) \leq c_2 \left(M_0 \|f\|_{p_0} \frac{c_1}{\alpha}\right)^{q_0} \\ &\leq \left(c_2^{\frac{1}{q_0}} c_1 M_0 \frac{\|f\|_{p_0}}{\alpha}\right)^{q_0}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como T es de tipo fuerte (∞, ∞) ,

$$\|T_1 f\|_\infty \leq c_1 \|Tf\|_\infty \leq c_1 M_1 \|f\|_\infty.$$

Podemos elegir c_1 y c_2 de forma que $c_1 M_1 = 1$ y $c_2^{1/q_0} c_1 M_0 = 1$ y entonces T_1 es de tipo débil (p_0, q_0) y de tipo fuerte (∞, ∞) con constantes igual a 1. Luego, por lo probado anteriormente, resulta $\|T_1 f\|_{L^q(\nu_1)} \leq C \|f\|_p$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^q(\nu)} &= c_1^{-1} c_2^{-1/q} \|T_1 f\|_{L^q(\nu_1)} \leq c_1^{-1} c_2^{-1/q} (c_2^{1/q_0} c_1 M_0)^{1-\theta} (c_1 M_1)^\theta C \|f\|_p \\ &\leq c_2^{-1/q} c_2^{\frac{1-\theta}{q_0}} C M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \\ &\leq C M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Para probar que un operador es de tipo débil, alcanza con probar que la desigualdad (1.17) vale para un conjunto denso de funciones, como por ejemplo las funciones simples. Existe otra noción de acotación débil, denominada tipo débil restringida, que permite verificar (1.17) sólo para las funciones características de conjuntos con medida finita.

Definición 1.2.12. Sean $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y T un operador lineal definido en las funciones simples μ -medibles sobre X que toma valores en las funciones ν -medibles sobre Y . Diremos que T es de tipo débil restringido (p, q) con constante $C > 0$ si para todo conjunto μ -medible E de medida finita y $0 < \alpha \leq 1$,

$$\nu \{x \in X : |T\mathbf{1}_E(x)| > \alpha\}^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{\alpha} \mu(E)^{1/p}. \quad (1.18)$$

Como (1.18) no es otra cosa que (1.17) para el caso $f = \mathbf{1}_E$, tenemos de inmediato que si T es de tipo débil (p, q) entonces T es de tipo débil restringido (p, q) . La vuelta no es siempre cierta, pero tenemos el siguiente resultado parcial, cuya prueba se puede ver en [BS88, Teorema 5.5.3].

Proposición 1.2.13. *Sean $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ y T un operador sub-lineal definido sobre las funciones simples. Si T es de tipo débil restringido (p, q) , entonces T se puede extender de manera única a un operador sub-lineal de tipo débil (p, q) .*

En el Capítulo 4 haremos uso de este resultado en el caso en que $p = 1$ y $q > 1$, por lo cual haremos sólo la demostración de este caso particular.

Demostración de la Proposición 1.2.13 (caso particular). Sea $p = 1$ y $q > 1$. Si

$$\|T\mathbf{1}_E\|_{q,\infty} \leq M\mu(E)$$

para todo $E \subset X$ de medida finita, queremos ver que

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq M\|f\|_1, \quad (1.19)$$

para toda $f \in L^1(X, \mu)$.

Primero supongamos que f es una función simple no negativa, es decir

$$f = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{A_j}$$

donde $a_j > 0$ y A_j , $j = 1, \dots, m$ son conjuntos medibles disjuntos.

Por la Observación (1.2.5), $\|\cdot\|_{L^{q,\infty}}$ es un espacio normado y vale (1.15). Por lo tanto, usando desigualdad triangular junto con la hipótesis de sublinealidad de T , tenemos que

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq \|Tf\|_{q,\infty} \leq \left\| \sum_{j=1}^m T(a_j \mathbf{1}_{A_j}) \right\|_{q,\infty} \leq \sum_{j=1}^m a_j \|T(\mathbf{1}_{A_j})\|_{q,\infty} \leq \sum_{j=1}^m q' a_j \|T(\mathbf{1}_{A_j})\|_{q,\infty}.$$

Como T es de tipo débil restringido (p, q) ,

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq q' M \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j) = q' M \|f\|_1, \quad (1.20)$$

para toda función simple no negativa. Para cualquier función simple f no necesariamente positiva, consideramos $f = f^+ - f^-$. Entonces, usando (1.20) para f^+ y f^- ,

$$\begin{aligned} \|T(f^+ - f^-)\|_{q,\infty} &\leq \|Tf^+\|_{q,\infty} + \|Tf^-\|_{q,\infty} \\ &\leq \|Tf^+\|_{q,\infty} + \|Tf^-\|_{q,\infty} \\ &\leq q' M (\|f^+\|_1 + \|f^-\|_1) \\ &\leq q' M \|f\|_1. \end{aligned}$$

Luego, por (1.15) tenemos que

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \leq q' M \|f\|_1$$

para toda función simple. □

1.2.3. La clase de pesos A_p de Muckenhoupt

Un *peso* es una función no negativa localmente integrable sobre \mathbb{R}^n que toma valores en el intervalo $(0, \infty)$ en casi todo punto.

Dado un peso w y un conjunto medible A , usaremos la notación

$$w(A) = \int_A w(x) dx$$

para denotar la w -medida de A . Como los pesos son funciones localmente integrables, $w(A) < \infty$ para todos los conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ que estén contenidos en algún cubo o bola n -dimensional. El espacio pesado L^p se denota por $L^p(\mathbb{R}^n, w)$ o simplemente por $L^p(w)$. Diremos que $f \in L^p(w)$ si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx < \infty.$$

Si T es un operador acotado $L^p(\mathbb{R}^n)$, para algún $p \geq 1$, uno de los problemas clásicos de las estimaciones con pesos es caracterizar aquellos pesos w para los cuales T es un operador acotado en $L^p(w)$. Es decir, dar condiciones necesarias y suficientes para que un peso w cumpla que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C_w \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx,$$

para toda $f \in L^p(w)$.

En esta dirección, un operador ampliamente estudiado es la función maximal de Hardy-Littlewood definida como

$$M_{HL}f(x) = \sup_{Q \ni x} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos n -dimensionales que contienen a x .

Muckenhoupt [Muc72] caracterizó los pesos w para los cuales M_{HL} está acotada en $L^p(w)$, $p > 1$, introduciendo la clase de pesos A_p .

Definición 1.2.14. Sea $1 < p < \infty$. Un peso w pertenece a la clase A_p si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{\mathcal{L}(Q)} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{\mathcal{L}(Q)} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} < \infty. \quad (1.21)$$

La expresión dada en (1.21) se denota por $[w]_{A_p}$ y se denomina constante A_p de Muckenhoupt.

Teorema 1.2.15. *Sea $1 < p < \infty$ y w un peso. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si existe una constante C que depende de p y w tal que*

$$\|M_{HL}f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)},$$

para toda $f \in L^p(w)$.

La demostración de este teorema, así como un tratamiento más profundo del tema, se puede ver en [GRF, Cap. 9]

Nota 1.2.16. Una condición similar vale si en lugar de los cubos usamos bolas para definir la función maximal de Hardy-Littlewood, como en (0.1).

La condición A_p caracteriza acotaciones en $L^p(w)$ para otros operadores importantes en el análisis como la transformada de Hilbert, las transformadas de Riesz y operadores de Calderón-Zigmund.

Otro problema de gran interés es obtener estimaciones cuantitativas para la norma de un operador en los espacios $L^p(w)$. Un resultado fundamental en este sentido obtenido por Buckley [Buc93] es el siguiente.

Teorema 1.2.17. *Si $1 < p < \infty$,*

$$\|M_{HL}f\|_{L^p(w)} \leq [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(w)}. \quad (1.22)$$

CAPÍTULO 2

Problema geométrico

Así como el operador maximal esférico definido en (0.3) está asociado al problema de hallar el tamaño de un conjunto que contiene esferas con centros en un conjunto dado, el operador maximal asociado a los k -esqueletos de cubos que tratamos en esta tesis está estrechamente relacionado con el siguiente problema geométrico.

Problema 1. Sean $B, S \subseteq \mathbb{R}^2$ dos conjuntos en el plano y supongamos que B contiene el borde de un cuadrado con lados paralelos a los ejes y centro en cada punto de S , ¿qué relación hay entre los tamaños de B y S ?

Si reemplazamos los bordes de cuadrados por sus vértices, ¿qué relación hay entre los tamaños de B y S , si B contiene los cuatro vértices de un cuadrado con centro en cada punto de S ?

En ambos casos por tamaño nos referimos a la medida de Lebesgue o alguna dimensión fractal.

Es sabido que un conjunto que contiene un círculo con centro en cada punto de $[0, 1]^2$ tiene medida de Lebesgue positiva. Este resultado fue probado de manera independiente por Bourgain [Bou86] y Marstrand [Mar87].

Si en lugar de círculos consideramos bordes de cuadrados los resultados cambian por completo. Probablemente Wolff ya sabía que un conjunto B que contiene el borde de un cuadrado con centro en cada punto del conjunto $[0, 1]^2$ puede tener medida de Lebesgue cero. Intuitivamente lo que sucede es que los círculos se intersectan “menos” que los bordes de cuadrados, pues sólo pueden tener dos puntos en común o ser tangentes. En cambio, los bordes de cuadrados pueden tener lados en común y entonces, si se eligen adecuadamente, su intersección puede ser grande.

En [KNS18], Keleti, Nagy y Shmerkin estudiaron el Problema 1 para diferentes nociones de tamaño como la dimensión de Hausdorff, la dimensión box y la dimensión packing.

Como el borde de un cuadrado tiene dimensión de Hausdorff 1, trivialmente tenemos la siguiente cota inferior: si B contiene el borde de un cuadrado con centro en cada punto de un conjunto S , entonces $\dim_H(B) \geq 1$. Sorprendentemente, como se demostró en [KNS18], esta cota trivial resulta ser óptima: existe un conjunto cerrado $B \subset \mathbb{R}^2$ con di-

dimensión de Hausdorff 1 que contiene el borde de un cuadrado con centro en cada punto de \mathbb{R}^2 .

En otras palabras, B contiene “muchos” bordes de cuadrados (uno por cada punto del plano) pero su dimensión de Hausdorff es uno, es decir, la misma que si tuviésemos sólo el borde de un cuadrado.

Este resultado poco intuitivo sugiere que quizás esta dimensión no es la noción correcta de tamaño o la más adecuada para este problema. Otras dimensiones que resultan más apropiadas son la dimensión box y la dimensión packing.

En dimensiones mayores, el problema 1 fue estudiado por Thornton en [Tho17]. En este caso, los bordes y vértices de cuadrados son reemplazados por los k -esqueletos de cubos en dimensión n , donde $n \geq 2$ y $0 \leq k < n$ son enteros.

El resto del capítulo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2.1 definimos los k -esqueletos y generalizamos el Problema 1 a dimensiones mayores. En la Sección 2.2 damos una versión discreta del problema y algunas de las estimaciones obtenidas en este contexto. En la Sección 2.3 mostramos las estimaciones obtenidas para el problema geométrico cuando se trabaja con la dimensión box y la dimensión packing. Por último, en la Sección 2.4 construimos algunos conjuntos que hacen sharp algunas de las estimaciones obtenidas en las secciones anteriores.

Todos los resultados que se presentan en este capítulo pertenecen a los trabajos [KNS18, Tho17]. Algunas demostraciones serán omitidas, pero se remite al lector a la referencia correspondiente.

2.1. El problema de los k -esqueletos

La expresión $[[a, b]]$, con a, b enteros, hace referencia al intervalo discreto $\{a, a + 1, \dots, b - 1, b\}$ y $\binom{n}{k}$ denota los subconjuntos de k elementos de $[[1, n]]$.

Para $x \in \mathbb{R}^n$, $I \in \binom{n}{k}$, x_I es el vector en \mathbb{R}^k que se forma tomando las coordenadas de x indexadas por I .

En \mathbb{R}^n , por n -cubo nos referiremos a un cubo n -dimensional con lados paralelos a los ejes, a menos que se especifique otra cosa. Es decir, un n -cubo es un conjunto de la forma:

$$x + \prod_{i=1}^n [-r, r] \tag{2.1}$$

para algún $x \in \mathbb{R}^n$ y $0 < r \in \mathbb{R}$. En este caso diremos que el conjunto definido en (2.1) es un n -cubo con centro en x y lado de longitud $2r$.

Definición 2.1.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$, el k -esqueleto de un n -cubo, dado por (2.1),

es el conjunto

$$x + \bigcup_{I \in \binom{[n]}{k}} \prod_{j=1}^n R_{I,j},$$

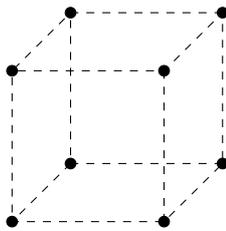
donde

$$R_{I,j} = \begin{cases} [-r, r] & \text{si } j \in I, \\ \{-r, r\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

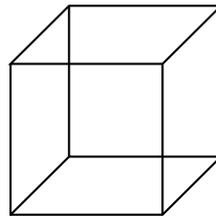
En otras palabras, el k -esqueleto es la unión de las caras k -dimensionales de un n -cubo, en adelante k -caras o simplemente caras.

Ejemplo 2.1.2. Sea $n = 3$ y $0 \leq k < 3$

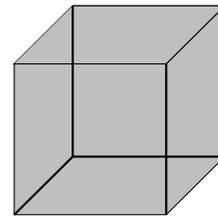
- El 0-esqueleto representa los 8 vértices de un cubo.
- El 1-esqueleto representa las 12 aristas de un cubo.
- El 2-esqueleto representa las 6 caras de un cubo.



$k = 0$



$k = 1$



$k = 2$

En general, el 0-esqueleto de un n -cubo son sus vértices.

Proposición 2.1.3. Sea $0 \leq k < n$ y $N(n, k)$ el número de caras k -dimensionales que forman el k -esqueleto de un n -cubo. Entonces,

$$N(n, k) = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

Demostración. Sean k y n fijos. Para cada $I \in \binom{[n]}{k}$, la expresión $\prod_{j=1}^n R_{I,j}$ determina 2^{n-k} caras k -dimensionales. Luego, como hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir I , se tiene lo pedido. □

Ahora que ya definimos los k -esqueletos, podemos dar una versión general del Problema 1. Notemos que para $n = 2$, los vértices y el borde de un cuadrado se reemplazan por el 0-esqueleto y el 1-esqueleto, respectivamente.

Problema 2. Sea $n \geq 2$, $0 \leq k < n$ dos enteros dados y $B, S \subseteq \mathbb{R}^n$. Si B contiene el k -esqueleto de un n -cubo con centro en cada punto de S , ¿qué relación hay entre los tamaños de B y S ?

2.2. Estimaciones discretas

Existe una versión discreta para el Problema 2 en la cual los conjuntos que se consideran son finitos y como noción de tamaño nos referimos a su cardinalidad.

Los resultados que se obtienen en este contexto son más bien combinatorios y resultan ser la base para las estimaciones que se obtienen con la dimensión box y la dimensión packing.

En esta sección daremos algunos de los resultados que aparecen en [Tho17]. Solo algunas demostraciones serán hechas en detalle, el resto se pueden encontrar en el trabajo mencionado.

Usaremos la notación de Landau O, Ω : si $X > 0$, $O(X)$ denota una cantidad positiva menor que CX y $\Omega(X)$ denota una cantidad que es mayor que cX , donde c y C son constantes universales y positivas.

Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto finito, denotamos con $|E|$ su cardinal.

El siguiente lema establece una relación entre los cardinales de dos conjuntos finitos B y S cuando, por ejemplo, B contiene los vértices de un n -cubo con centro en cada punto de S .

Lema 2.2.1 (Lema n -dimensional). *Sea $n > 0$ y $B, S \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos finitos. Si existen v_1, \dots, v_n vectores linealmente independientes tal que para todo $x \in S$ y $1 \leq j \leq n$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \pm rv_j \in B$, entonces*

$$|B| \geq \Omega(|S|^{2n-1/2n}).$$

En particular, esto se cumple si B contiene los vértices de un n -cubo con lados paralelos a los ejes y centro en cada punto de S .

Demostración. Probaremos que $|B| \geq \frac{1}{2^{n-1}} |S|^{(2n-1)/2n}$ usando inducción.

Si $n = 1$, cualquier punto de S es el punto medio entre dos puntos de B , entonces

$$|S| \leq \binom{|B|}{2} \leq |B|^2.$$

Supongamos que el lema es cierto en \mathbb{R}^n , veamos que vale en \mathbb{R}^{n+1} .

Sea $c = \frac{1}{2^n}$. Consideremos los hiperplanos P_1, \dots, P_j paralelos a v_1, \dots, v_n y las rectas l_1, \dots, l_m paralelas a v_{n+1} que contienen a los puntos de S .

Sea $p_i = |S \cap P_i|$ y $q_i = |S \cap l_i|$. Notemos que para cada $s \in P_i \cap S$, existe algún r tal que $P_i \cap S$ contiene $s \pm rv_i$ para $1 \leq i \leq n$. Luego, por hipótesis inductiva

$$|B \cap P_i| \geq 2cp_i^{(2n-1)/2n} \quad \text{y} \quad |B \cap l_i| \geq q_i^{1/2}$$

y por lo tanto,

$$|B| \geq 2c \sum_{i=1}^j p_i^{(2n-1)/2n} \quad \text{y} \quad |B| \geq \sum_{i=1}^m q_i^{1/2}.$$

Sean a_1, \dots, a_w los valores de p_i que son menores que $|S|^{n/(n+1)}$. Consideremos los siguientes dos casos.

Caso 1: $a_1 + \dots + a_w \geq \frac{1}{2}|S|$. Entonces,

$$|B| \geq 2c \sum_{i=1}^j p_i^{\frac{2n-1}{2n}} \geq 2c \sum_{i=1}^w a_i^{\frac{2n-1}{2n}} \geq \sum_{i=1}^w \frac{a_i}{|S|^{\frac{1}{2(n+1)}}} \geq c|S|^{\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}},$$

donde en la tercera desigualdad usamos que $a_i \leq |S|^{\frac{n}{n+1}}$.

Caso 2: $a_1 + \dots + a_w < \frac{1}{2}|S|$. Para cada plano P_i donde $p_i > |S|^{\frac{n}{n+1}}$, pintamos $P_i \cap S$ de color azul. Notemos que hay a lo sumo $|S|^{\frac{1}{n+1}}$ planos con puntos azules. En efecto, si la cantidad de planos con puntos azules es mayor que $|S|^{\frac{1}{n+1}}$, entonces estos planos contienen al menos $|S|^{\frac{n}{n+1}}|S|^{\frac{1}{n+1}} = |S|$ puntos de S , lo cual es un absurdo.

Sea q'_i el número de puntos azules en l_i . Como l_i no está contenida en ningún P_i tenemos

$$q'_i \leq |S|^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{y} \quad q'_i \leq q_i.$$

Además, como cada punto de S pertenece a alguna recta l_i ,

$$\sum_{i=1}^m q'_i > |S| - a_1 - \dots - a_w \geq \frac{1}{2}|S|$$

y por lo tanto,

$$|B| \geq \sum_{i=1}^m \sqrt{q'_i} \geq \sum_{i=1}^m \frac{q'_i}{|S|^{\frac{1}{2(n+1)}}} \geq \frac{1}{2}|S|^{\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}} \geq c|S|^{\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}}.$$

□

Lema 2.2.2 (Lema (n, ℓ) -dimensional). *Sea $0 \leq \ell \leq n$. Si $A \subset \mathbb{R}^\ell$ y $S \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos finitos tales que*

$$\forall x \in S \quad \exists r \in \mathbb{R}^+ \quad \forall I \in \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \quad \forall \sigma \in \{-1, 1\}^\ell : x_I + r\sigma \in A, \quad (2.2)$$

entonces

$$|A| \geq c_{n,\ell} |S|^{\ell(2n-1)/(2n^2)},$$

donde $c_{n,\ell} > 0$ depende solo de n, ℓ y no de los conjuntos A, S .

En la siguiente sección probaremos que la estimación del lema anterior es sharp.

Geoméricamente, la condición (2.2) significa que A contiene los vértices de un ℓ -cubo alrededor de cada punto en cada proyección de S sobre los ejes coordenados. Por ejemplo, tomemos $n = 3$ y $\ell = 2$ y sea $(x, y, z) \in S$. Existe r tal que

$$(x \pm r, y \pm r) \in A$$

$$(y \pm r, z \pm r) \in A$$

$$(x \pm r, z \pm r) \in A,$$

es decir, A contiene los vértices de un cuadrado con centro en (x, y) , (y, z) y (x, z) .

En la prueba del Lema (n, ℓ) -dimensional se utiliza el Corolario de Lovász del Teorema de Katona-Kruskal. A continuación mencionamos ambos resultados.

Teorema 2.2.3 (Katona [Kat68], Kruskal [Kru63]). *Sea Y un conjunto de subconjuntos con b elementos para algún $b \in \mathbb{N}$, sea X el conjunto que contiene los subconjuntos con $(b - c)$ elementos de Y y sea*

$$|Y| = \binom{n_1}{j} + \binom{n_2}{j-1} + \dots + \binom{n_i}{j-i},$$

donde los n_1, \dots, n_i es una sucesión decreciente de enteros no negativos. Entonces,

$$|X| \geq \binom{n_1}{j-c} + \binom{n_2}{j-c-1} + \dots + \binom{n_i}{j-c-i}.$$

Corolario 2.2.4 (Corolario de Lovász). *Sean X, Y, b, c como en el teorema anterior y sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|Y| = \binom{x}{b}$. Entonces, $|X| \geq \binom{x}{b-c}$, donde $\binom{x}{b} = \frac{x(x-1)\dots(x-b+1)}{b!}$.*

Una prueba corta del Corolario de Lovász se puede ver en [Fra84].

Demostración del Lema 2.2.2. La condición (2.2) implica que el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall I \in \binom{[n]}{\ell} x_I \in A\}$$

y el conjunto S satisfacen las hipótesis del Lema 2.2.1. En efecto, para cada $x \in S$

$$\begin{aligned} \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall \sigma \in \{-1, 1\}^n \forall I \in \binom{[n]}{\ell} : x_I + \sigma_I r \in A \\ \iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall \sigma \in \{-1, 1\}^n \forall I : (x + \sigma r)_I \in A \\ \iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall \sigma \in \{-1, 1\}^n : x + \sigma r \in B. \end{aligned}$$

Luego, por el lema anterior tenemos que

$$|B| \geq \Omega(|S|^{(2n-1)/2n}). \quad (2.3)$$

Para poder comparar los tamaños de A y B hacemos la siguiente simplificación: si trasladamos el conjunto A de manera apropiada podemos asumir que para todo punto $x \in A$, sus coordenadas x_i , $1 \leq i \leq \ell$, son distintas.

Sea \sum_ℓ el grupo simétrico actuando sobre \mathbb{R}^ℓ bajo la acción $\pi(x_1, \dots, x_\ell) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(\ell)})$. Si tomamos la órbita de A bajo \sum_ℓ , el tamaño de A solo se incrementa $\ell!$ veces. Por lo tanto, podemos asumir que si $x \in A$, entonces $(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(\ell)}) \in A$ para toda $\pi \in \sum_\ell$.

Definamos

$$\widehat{A} = \{\{x_1, \dots, x_\ell\} : x \in A\} \quad \text{y} \quad \widehat{B} = \{\{x_1, \dots, x_n\} : x \in B\}.$$

Notemos que $|A| \geq \widehat{A}$ y $|B| \leq n!|\widehat{B}|$. Si $C \in \widehat{B}$ y $C' \subset C$ con $|C'| = \ell$, entonces $C' \in \widehat{A}$ y podemos aplicar el Teorema de Katona-Kruskal-Lovász a \widehat{B} y \widehat{A} .

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\binom{x}{n} = |\widehat{B}|$. Entonces $|\widehat{A}| \geq \binom{x}{\ell}$ y para algún $c \in \mathbb{R}^+$ vale que

$$|A| \geq |\widehat{A}| = \binom{n}{\ell} \geq cx^\ell, \quad \text{y} \quad |B| \leq n!|\widehat{B}| = n! \binom{x}{n} \leq x^n.$$

Combinando esto con (2.3), obtenemos

$$|A| \geq \Omega(|B|^\ell) \geq \Omega(|S|^{\frac{\ell(2n-1)}{2n^2}}).$$

□

El siguiente teorema responde a la pregunta del Problema 2 en el caso discreto, es decir cuando B y S son finitos y la noción de tamaño se reemplaza por cardinalidad. Su demostración está basada en el Lema (n, ℓ) -dimensional, para más detalles ver [Tho17, Teorema 1.3 y Teorema 1.5].

Nota 2.2.5. Dado un n -cubo Q con centro en \mathbb{Z}^n y lado de longitud $r \in \mathbb{Z}$, definimos el k -esqueleto discreto de Q como la intersección del k -esqueleto con \mathbb{Z}^n .

Teorema 2.2.6. Si $B, S \subseteq \mathbb{Z}^n$ son finitos y B contiene el k -esqueleto discreto de un n -cubo alrededor de cada punto de S , entonces para todo $\alpha < 1 - \frac{n-k}{2n^2}$,

$$|B| \geq \Omega(|S|^\alpha).$$

Más aún, para todo $0 \leq k < n$ y para todo $p \geq 0$, existen conjuntos finitos $B, S \subseteq \mathbb{Z}^n$ como antes tales que $|S| = p$ y $|B| \leq O(|S|^{1 - \frac{n-k}{2n^2}})$.

2.3. Estimaciones para la dimensión box y la dimensión packing

Como vimos al comienzo del presente capítulo, la dimensión de Hausdorff no resulta adecuada para este problema, pues las cotas inferiores que se obtienen son las triviales. La dimensión box y la dimensión packing se ajustan mejor al problema de los k -esqueletos y además, por (1.12) y (1.11), ambas son mayores o iguales que la dimensión de Hausdorff.

El problema aquí es determinar la relación entre las dimensiones de B y S para una noción de dimensión dada. Imponemos la misma noción de tamaño para el conjunto S de centros y el conjunto B que contiene un k -esqueleto con centro en cada punto de S . En esta dirección, se conoce el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. Sean $0 \leq k < n$ enteros dados. Si $B, S \subseteq \mathbb{R}^n$ son dos conjuntos tales que B contiene el k -esqueleto de un n -cubo con centro en cada punto de S , entonces

$$(a) \dim_P(B) \geq k + \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2} \dim_P(S).$$

$$(b) \underline{\dim}_B \geq (B) \text{ máx} \left\{ k, \left(1 - \frac{n-k}{2n^2} \right) \underline{\dim}_B(S) \right\}. \text{ Lo mismo vale para } \overline{\dim}_B.$$

Existen construcciones mostrando que las estimaciones dadas en el teorema anterior son sharp en el siguiente sentido.

Teorema 2.3.2. Dados $0 \leq k < n$ y $s \in [0, n]$, existen compactos $B, S, B', S' \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\dim_P(S) = \dim_B(S')$, donde B y B' contienen el k -esqueleto de un n -cubo alrededor de cada punto de S y S' , respectivamente y

$$(a) \dim_P(B) = k + \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2} s.$$

$$(b) \dim_B(B') = \text{máx} \left\{ k, \left(1 - \frac{n-k}{2n^2} \right) s \right\}.$$

Aquí no haremos la demostración del teorema anterior, pero la misma se puede ver en [Tho17, Teorema 1.2].

Demostración del Teorema 2.3.1. Solo probaremos la parte (b) para mostrar de qué manera se utilizan las estimaciones obtenidas para el problema discreto en el Teorema 2.2.6. La demostración de la parte (a) se puede ver en [Tho17, Teorema 1.1].

Como B contiene por lo menos un k -esqueleto, entonces $\overline{\dim}_B(B) \geq k$. Resta ver que $\underline{\dim}_B \geq \left(1 - \frac{n-k}{2n^2} \right) \underline{\dim}_B(S)$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, sea \tilde{x}_m el vértice inferior izquierdo del cubo diádico semiabierto a la derecha con lados de longitud 2^{-m} que contiene a x y \tilde{r} el punto más cercano a r de la forma $2^{-m}j$, $j \in \mathbb{Z}$. Definimos

$$\tilde{S}_m = \{\tilde{x}_m : x \in S\}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que B es la unión de todos los k -esqueletos con centro en S . Esto es, $B = \bigcup_{x \in S} C(x, r(x))$, donde $C(x, r(x))$ es el k -esqueleto de un n -cubo con centro en x y lados de longitud $2r(x)$ dependiendo de x .

Sea $\tilde{B}_m = \bigcup_{x \in S} C(\tilde{x}_m, \tilde{r}(x)_m)$. Como $\tilde{S}_m, \tilde{B}_m \subset 2^{-m}\mathbb{Z}^n$ son finitos y B_m contiene el k -esqueleto de un n -cubo con centro en cada punto de \tilde{S}_m , por el Teorema 2.2.6 tenemos que

$$|\tilde{B}_m| \geq \Omega(|\tilde{S}_m|^{1 - \frac{n-k}{2n^2}}). \quad (2.4)$$

Notemos que el conjunto B corta a $\Omega(|\tilde{B}_m|)$ cubos diádicos de lado 2^{-m} . Si $N_{2^{-m}}(B)$ denota el menor número de cubos diádicos de longitud 2^{-m} que se necesitan para cubrir B , entonces

$$N_{2^{-m}}(B) \geq \Omega(|\tilde{B}_m|). \quad (2.5)$$

Usando (2.4) y (2.5), existen dos constantes positivas c_1, c_2 que dependen solo de k y n tal que

$$N_{2^{-m}}(B) \geq c_1 |\tilde{B}_m| \geq c_1 c_2 |\tilde{S}_m|^{1 - \frac{n-k}{2n^2}}.$$

Tomando logaritmo y dividiendo por $(-\log 2^{-m})$ obtenemos,

$$\frac{\log N_{2^{-m}}(B)}{-\log 2^{-m}} \geq \left(1 - \frac{n-k}{2n^2}\right) \frac{\log |\tilde{S}_m|}{-\log 2^{-m}} + \frac{\log(c_1 c_2)}{-\log 2^{-m}}$$

y haciendo tender m a infinito,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log N_{2^{-m}}(B)}{-\log 2^{-m}} \geq \left(1 - \frac{n-k}{2n^2}\right) \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{S}_m|}{-\log 2^{-m}}.$$

Ahora bien, usando el ítem 4 del Lema 1.1.9 con $\delta = 2^{-m}$ tenemos que

$$\underline{\dim}_B(B) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log N_{2^{-m}}(B)}{-\log 2^{-m}}.$$

Por otro lado, por cómo definimos el conjunto \tilde{S}_m , el conjunto S se puede cubrir con $|\tilde{S}_m|$ cubos diádicos de lado 2^{-m} . Luego, usando nuevamente el ítem 4 del Lema 1.1.9 con $\delta = 2^{-m}$,

$$\underline{\dim}_B(S) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{S}_m|}{-\log 2^{-m}}.$$

Por lo tanto,

$$\underline{\dim}_B(B) \geq \left(1 - \frac{n-k}{2n^2}\right) \underline{\dim}_B(S),$$

como queríamos probar. El resultado para la $\overline{\dim}_B$ se prueba de manera análoga. \square

El siguiente lema es el análogo dimensional del Lema (n, ℓ) -dimensional.

Lema 2.3.3. Si $A \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, y

$$\forall x \in S \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall I \in \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \forall \sigma \in \{-1, 1\}^\ell : x_I + r\sigma \in A,$$

entonces si \dim es $\underline{\dim}_B$, $\overline{\dim}_B$ o \dim_P ,

$$\dim(A) \geq \left(\frac{\ell(2n-1)}{2n^2}\right) \dim(S).$$

Demostración. La demostración es similar a la hecha anteriormente, pero usando el Lema (n, ℓ) -dimensional (Lema 2.2.2), en lugar del Teorema 2.2.6. \square

2.4. Construcción de un ejemplo

Los conjuntos que hacen sharp las estimaciones de las secciones anteriores se construyen de manera explícita tanto en el caso $n = 2$ y $n \geq 3$ en [KNS18] y [Tho17], respectivamente. En esta sección solo mostraremos cómo se construyen ciertos conjuntos que prueban una pequeña generalización del Teorema 2.3.2, ítem (a). Más precisamente, probaremos el teorema que se enuncia a continuación.

Teorema 2.4.1. *Sean $0 \leq k < n$ enteros dados. Para cada $s \in [0, n]$, existen compactos $B, S \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\dim(S) = s$, B contiene el k -esqueleto de un n -cubo alrededor de cada punto de S y*

$$\dim(B) = k + s \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2},$$

donde \dim puede ser la dimensión box o la dimensión packing.

De la demostración del teorema anterior, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2. *Sean $0 \leq k < n$ enteros dados. Existe un compacto B que contiene el k -esqueleto de un n -cubo alrededor de cada punto de $[0, 1]^n$ y*

$$\dim(B) = k + \frac{(n-k)(2n-1)}{2n}.$$

Para probar el Teorema 2.4.1 necesitamos varios resultados y construcciones previas.

El próximo lema muestra la construcción de un conjunto discreto basada en la expansión en base i , con $i \in \mathbb{N}$.

Lema 2.4.3. *Dados $i, n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto*

$$D_{i,n} \subseteq [[-(2i)^{2n}, (2i)^{2n}]]$$

de tamaño $O(i^{2n-1})$ tal que,

$$\forall x_1, \dots, x_n \in [[0, i^{2n} - 1]], \exists r \in [[1, i^{2n}]] : x_j \pm r \in D_{i,n} \quad \forall 1 \leq j \leq n. \quad (2.6)$$

Demostración. Sea

$$D_{i,n} = \left\{ \sum_{j=0}^{2n-1} a_j i^j : a_j \in [[2(1-i), 2(i-1)]], \prod_j a_j = 0 \right\}.$$

Informalmente, $D_{i,n}$ es el conjunto de números con al menos un 0 en su expansión en base i (permitiendo dígitos negativos).

Para formar un elemento de $D_{i,n}$, cada dígito a_j se puede elegir de un conjunto que tiene $(4i-4)$ elementos, con lo cual en principio, tenemos $(4i-4)^{2n}$ elementos distintos. Por otro lado, hay $(4i-5)^{2n}$ formas de elegir todos los $a_j \neq 0$. Luego $|D_{i,n}| \leq (4i-4)^{2n} - (4i-5)^{2n} = O(i^{2n-1})$.

Solo resta probar (2.6). Sean $x_1, \dots, x_n \in [[0, i^{2n} - 1]]$. Denotamos los términos de su expansión en base i por $x_j = x_{j,2n-1} \dots x_{j,0}$, es decir,

$$x_j = \sum_{m=0}^{2n-1} x_{j,m} i^m \quad \text{con } 0 \leq x_{j,m} \leq i - 1.$$

Tomemos $r = x_{n-1,2n-2} 0 \dots 0 x_{1,2} 0 x_{0,0} - x_{n-1,2n-1} \dots, x_{1,3} 0 x_{0,1} 0$, o escrito de otra manera:

$$r = \left(\sum_{m=0}^{n-1} x_{m,2m} i^{2m} \right) - \left(\sum_{m=0}^{n-1} x_{m,2m+1} i^{2m+1} \right).$$

Si permutamos los x_i , podemos asumir que $x_{i,2i}$ o $x_{i,2i+1}$ no son nulos y por lo tanto, r es no nulo.

Para cualquier j ,

$$x_j + r = \left(\sum_{m=0}^{n-1} (x_{j,2m} + x_{m,2m}) i^{2m} \right) + \left(\sum_{m=0}^{n-1} (x_{j,2m+1} - x_{m,2m+1}) i^{2m+1} \right).$$

Usando desigualdad triangular tenemos,

$$|x_{j,m} \pm x_{\lfloor m/2 \rfloor, m}| \leq |x_{j,m}| + |x_{\lfloor m/2 \rfloor, m}| \leq 2(i - 1)$$

y $x_{j,2j+1} - x_{j,2j+1} = 0$. Luego, $x_j + r \in D_{i,n}$. De manera análoga se tiene que $x_j - r \in D_{i,n}$. \square

Observación 2.4.4. Esta construcción muestra que el Lema (n, ℓ) -dimensional (Lema 2.2.2) es sharp salvo constantes, en el siguiente sentido: para todo $p \in \mathbb{N}$, existen dos conjuntos finitos $A \subseteq \mathbb{Z}^\ell$, $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ tales que $|A| \leq O(|S|^{(2n-1)\ell/2n^2})$, $|S| = p$ y

$$\forall x \in S \quad \exists r \in \mathbb{R}^+ \quad \forall I \in \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \quad \forall \sigma \in \{-1, 1\}^\ell : x_I + r\sigma \in A. \quad (2.7)$$

En efecto, si $p = i^{2n^2}$ para algún i , tomemos $A = (D_{i,n})^\ell$ y $S = [[0, i^{2n} - 1]]^n$. Por la definición de $D_{i,n}$ se cumple la condición (2.7). Por otro lado, como $|D_{i,n}| \leq O(i^{2n-1})$ y $|S| = i^{2n^2}$, tenemos que

$$|A| \leq O(i^{(2n-1)\ell}) \leq O(|S|^{(2n-1)\ell/2n^2}).$$

Para otros valores de p , interpolamos tomando i el menor entero tal que $p \leq i^{2n^2}$, S un subconjunto de $[[0, i^{2n} - 1]]^n$ con cardinal p y $A = (D_{i,n})^\ell$. Como $(i+1)^{2n^2} - i^{2n^2} \leq 2^{n^2} i^{2n}$, tenemos que $i^{2n^2} \leq O(p)$ y por lo tanto $|A| \leq O(p^{(2n-1)\ell/2n^2})$, como queríamos probar.

Lema 2.4.5. *Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos un conjunto finito Q_i tal que $|Q_i| = l_i$, $\text{diám} Q_i \leq d_i$, Q_i es δ_i -separado ($x, y \in Q_i, x \neq y \Rightarrow d(x, y) \geq \delta_i$) y*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{mín } Q_i > -\infty \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{máx } Q_i < \infty.$$

Sea

$$P = Q_1 + Q_2 + \dots = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_i : q_i \in Q_i \right\}.$$

1. Si para algún $c < 1$ se cumple que $d_i \leq cd_{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces

$$\overline{\dim}_B(P) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(l_1 \dots l_j)}{-\log(d_j)}.$$

2. Si $d_i + \delta_i \leq \delta_{i-1}$ entonces

$$\dim_H(P) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(l_1 \dots l_j)}{-\log(d_{j+1}l_{j+1})}.$$

Demostración. Aquí solamente vamos a probar la primera parte del lema, la segunda parte se puede ver en [KNS18, Lema 6.1].

P está bien definido y es acotado, debido a las condiciones $\sum_{i=1}^{\infty} \min Q_i > -\infty$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \max Q_i < \infty$. Escribiremos

$$P_{q_1, \dots, q_i} = q_1 + \dots + q_i + Q_{i+1} + Q_{i+2} + \dots \quad (q_1 \in Q_1, \dots, q_i \in Q_i).$$

La condición $d_i \leq cd_{i-1}$ implica que

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{\infty} d_j &= d_i + d_{i+1} + \dots \leq d_i + cd_i + cd_{i+1} + cd_{i+2} + \dots \\ &\leq d_i + c \sum_{j=i}^{\infty} d_j, \end{aligned}$$

y por lo tanto, existe una constante C tal que

$$\sum_{j=i}^{\infty} d_j \leq Cd_i \quad \text{para todo } i. \quad (2.8)$$

Dado $0 < \delta < \sum_{j=1}^{\infty} d_j$, tomemos $i \in \mathbb{N}$ satisfaciendo

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} d_j < \delta \leq \sum_{j=i}^{\infty} d_j. \quad (2.9)$$

Como $|Q_j| = l_j$, P es la unión de $l_1 \dots l_i$ conjuntos de la forma P_{q_1, \dots, q_i} , ($q_1 \in Q_1, \dots, q_i \in Q_i$). Además, dado que q_1, \dots, q_i están fijos y, por hipótesis $\text{diám} Q_j \leq d_j$, de (2.9) tenemos que $\text{diám} P_{q_1, \dots, q_i} = \sum_{j=i+1}^{\infty} d_j < \delta$.

Luego, si denotamos con $N_{\delta}(P)$ al menor número de conjunto de diámetro δ que cubren P , obtenemos $N_{\delta}(P) \leq l_1 \dots l_i$. Con esta estimación, podemos calcular una cota superior para la dimensión box de P .

Por (2.8) y (2.9),

$$\frac{\log N_{\delta}}{-\log \delta} \leq \frac{\log(l_1 \dots l_i)}{-\log(\sum_{j=i}^{\infty} d_j)} \leq \frac{(l_1 \dots l_i)}{-\log(Cd_i)}$$

y por lo tanto, por la definición de dimensión box superior (ver 1.5)

$$\overline{\dim}_B(P) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(l_1 \dots l_j)}{-\log(Cd_j)} = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(l_1 \dots l_j)}{-\log d_j},$$

como queríamos probar. □

Teorema 2.4.6. *Para todo entero positivo n y todo $t \in [0, 1]$ existen conjuntos compactos $A, T \subseteq \mathbb{R}$ tales que*

$$\dim_H(T) = \dim_B(T) = \dim_P(T) = t$$

y para todo $x_1, \dots, x_n \in T$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$x_i \pm r, \dots, x_n \pm r \in A \quad (2.10)$$

y

$$\dim_B(A) = \dim_P(A) = \frac{2n-1}{2n}t.$$

Demostración. Sea

$$\beta_i = ((i-1)!)^{-\frac{2n}{t}} \quad A_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}} D_{i,n} \quad \text{y} \quad T_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}} [[0, i^{2n} - 1]],$$

donde $D_{i,n}$ son como en el Lema 2.4.3.

Definimos $A = \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i$ y $T = \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i$.

Consideremos ℓ^1 el espacio de las sucesiones con la topología discreta y tomemos la función continua $f : \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|_{\ell^1}$. Notemos que cada T_i es compacto y $f(\prod_{i \in \mathbb{N}} T_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i$. Luego, por el Teorema de Tychonoff tenemos que T es compacto. De manera análoga se prueba que A es compacto.

Sea $x_1, \dots, x_n \in T$. Por definición $x_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\beta_i}{i^{2n}} u_{ij}$ con $u_{ij} \in [[0, i^{2n} - 1]]$, $j = 1, \dots, n$. Aplicando el Lema 2.4.3 a $D_{i,n}$ y la n -tupla u_{i1}, \dots, u_{in} , tenemos que existe $r_i \in [[1, i^{2n}]]$ tal que

$$u_{ij} + r_i, u_{ij} - r_i \in D_{i,n} \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Tomemos $r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^{2n}} r_i$. Como $r_i \leq i^{2n}$

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^{2n}} r_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} ((i-1)!)^{-\frac{2n}{t}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\frac{2n}{t}} < \infty,$$

pues $\frac{2n}{t} > 2$.

Luego, por (2.11), para todo $j = 1, \dots, n$

$$x_j \pm r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^{2n}} u_{ij} \pm \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^{2n}} r_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^{2n}} (u_{ij} \pm r_i) \in A,$$

como queríamos probar.

Solo resta verificar que las dimensiones de A y T son las apropiadas.

El conjunto T_i satisface las hipótesis del Lema 2.4.5 con

$$\delta_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}}, \quad d_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}}(i^{2n} - 1), \quad l_i = i^{2n}.$$

En efecto, como $[[0, i^{2n} - 1]] = \{0, 1, \dots, i^{2n} - 1\}$, $|T_i| = i^{2n}$. Si $x \neq y \in T_i$, $x = \frac{\beta_i}{i^{2n}}a$ e $y = \frac{\beta_i}{i^{2n}}b$ con $a, b \in [[1, i^{2n} - 1]]$ y $d(x, y) = \frac{\beta_i}{i^{2n}}d(a, b) \geq \frac{\beta_i}{i^{2n}} = \delta_i$. Como $d(a, b) \leq i^{2n} - 1$, $\text{diám } T_i = \sup\{d(x, y) : x, y \in T_i\} \leq \frac{\beta_i}{i^{2n}}(i^{2n} - 1) = d_i$.

Notemos que,

$$\begin{aligned} d_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}}(i^{2n} - 1) &= \frac{((i-1)!)^{-\frac{2n}{i}}}{i^{2n}}(i^{2n} - 1) = \frac{(i-1)^{-\frac{2n}{i}}}{(i-1)^{2n}}(i^{2n} - 1)\beta_{i-1} \\ &\leq \frac{(i-1)^{-\frac{2n}{i}}}{(i-1)^{2n} - 1}(i^{2n} - 1)d_{i-1} = c_i d_{i-1}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado $c' < 1$, existe $I \in \mathbb{N}$ tal que $c_i < c'$ para todo $i > I$. Por otro lado, sea $c := \max_{i \leq I} c_i < 1$. Luego $d_i \leq cd_{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Luego, por la primera parte del Lema 2.4.5 tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(T) &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(l_1 \dots l_j)}{-\log(d_j)} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(1^{2n} \dots j^{2n})}{-\log(\frac{\beta_j}{j^{2n}}(j^{2n}-1))} \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{2n \log j!}{-\log \beta_j - \log(\frac{j^{2n}-1}{j^{2n}})} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{2n \log j!}{\frac{2n}{t} \log(j-1)! - \log(\frac{j^{2n}-1}{j^{2n}})} \\ &= t. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando que $t \leq 1$ vale

$$\begin{aligned} d_i + \delta_i &= \frac{\beta_i}{i^{2n}}(i^{2n} - 1) + \frac{\beta_i}{i^{2n}} = ((i-1)!)^{-\frac{2n}{i}} \leq (i-1)^{-\frac{2n}{i}} ((i-2)!)^{-\frac{2n}{i}} \\ &\leq \frac{(i-2)!)^{-\frac{2n}{i}}}{(i-1)^{2n}} = \delta_{i-1} \end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Aplicando la segunda parte del Lema 2.4.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \dim_H(T) &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(l_1 \dots l_j)}{-\log(l_{j+1}\delta_{j+1})} = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{2n \log(j!)}{-\log \beta_{j+1}} \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{2n \log(j!)}{\frac{2n}{t} \log(j!)} = t. \end{aligned}$$

Por (1.12) y (1.11) se sigue inmediatamente que $\dim_H(T) = \dim_B(T) = \dim_P(T) = t$.

El conjunto A_i satisface las hipótesis del Lema 2.4.5 con

$$\delta_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}}, \quad d_i = 2^{2n+1}\beta_i, \quad l_i = |D_{i,n}| \leq O(i^{2n-1}).$$

En efecto, si $a, b \in D_{i,n} \subseteq [-(2i)^{2n}, (2i)^{2n}]$, entonces $1 \leq d(a, b) \leq 2^{2n+1}i^{2n}$. Como $A_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}}D_{i,n}$ tenemos que $\text{diám} A_i \leq 2^{2n+1}\beta_i$ y $|A_i| = |D_{i,n}| \leq O(i^{2n-1})$. Si $x \neq y \in A_i$, $x = \frac{\beta_i}{i^{2n}}a$ e $y = \frac{\beta_i}{i^{2n}}b$ con $a, b \in D_{i,n}$ y $d(x, y) = \frac{\beta_i}{i^{2n}}d(a, b) \geq \frac{\beta_i}{i^{2n}} = \delta_i$.

Además, para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos,

$$\begin{aligned} d_i &= 2^{2n+1}\beta_i = 2^{2n+1}((i-1)!)^{-2n^2/t} \\ &= (i-1)^{-2n^2/t} 2^{2n+1}((i-2)!)^{-2n^2/t} \\ &= (i-1)^{-2n^2/t} d_{i-1} \\ &\leq c d_{i-1}, \end{aligned}$$

para alguna constante $c < 1$, pues $(i-1)^{-2n^2/t} \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Luego, por la primera parte del Lema 2.4.5, para alguna constante $c > 0$ dependiendo solo de n vale que:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(A) &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(l_1 \dots l_j)}{-\log(d_j)} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(c 1^{2n-1} \dots c j^{2n-1})}{-\log(2^{2n+1}\beta_j)} \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)\log(j!) + j \log c}{-\log \beta_j - \log(2^{2n+1})} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)\log(j!) + j \log c}{\frac{2n}{t} \log((j-1)!) - \log(2^{2n+1})} \\ &= \frac{2n-1}{2n} t. \end{aligned}$$

Para probar la otra desigualdad, observemos que por las hipótesis del teorema, A y $S = T^n$ satisfacen las hipótesis del Lema 2.3.3 con $\ell = 1$. Luego, usando la regla del producto,

$$\dim(A) \geq \frac{2n-1}{2n^2} \dim(T^n) \geq \frac{2n-1}{2n^2} n \dim(T) = \frac{2n-1}{2n} t,$$

donde \dim puede ser \dim_P o $\underline{\dim}_B$. Finalmente por las desigualdades (1.12) y (1.11) obtenemos,

$$\frac{2n-1}{2n} t \leq \dim_P(A) \leq \overline{\dim}_B(A) \leq \frac{2n-1}{2n} t,$$

y

$$\frac{2n-1}{2n} t \leq \underline{\dim}_B(A) \leq \overline{\dim}_B(A) \leq \frac{2n-1}{2n} t.$$

□

Demostración del Teorema 2.4.1. Primero vamos a construir un conjunto S con la dimensión apropiada y un conjunto A tal que

$$\forall x_1, \dots, x_n \in S \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall I \in \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} \forall j \in I : x_j \pm r \in A. \quad (2.12)$$

El conjunto B se forma tomando copias de A y de \mathbb{R} . Observemos que si existe algún $r > 0$ tal que $x_j \pm r \in A$ para todo $1 \leq j \leq n$, entonces la condición (2.12) se satisface.

Usando el Teorema 2.4.6, construimos un compacto $T \subseteq [0, 1]$ de dimensión $\frac{s}{n}$ y un compacto $A \subseteq \mathbb{R}$ de dimensión $\frac{2n-1}{2n^2}s$ satisfaciendo:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in T \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall 1 \leq j \leq n : x_j \pm r \in A.$$

Como A es compacto, existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subseteq [-a, a]^n$. Tomemos $S = T^n$ y $B = \bigcup_{I \in \binom{[n]}{n-k}} \prod_{j=1}^n A_{I,j}$, donde

$$A_{I,j} = \begin{cases} A & \text{si } j \in I, \\ [-a, a] & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Luego, por las reglas del producto dadas en el Teorema 1.1.13,

$$\dim(S) = n \dim(T) = s,$$

y para cada $I \in \binom{[n]}{n-k}$,

$$\dim_B \left(\prod_{j=1}^n A_{I,j} \right) = k \dim_B([-a, a]) + (n-k) \dim_B(A) = k + (n-k) \frac{2n-1}{2n^2} s.$$

Como B es una unión finita de conjuntos, usando el ítem 3 de la Proposición (1.1.11),

$$\dim_B(B) = k + (n-k) \frac{2n-1}{2n^2} s$$

como queríamos probar. \square

Definición 2.4.7 (Expansión en series de Cantor). Sea $Q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos, $q_i > 1$. Para cada $x \in [0, 1]$ definimos su expansión en la serie Q por:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{q_1 \cdots q_i},$$

donde $e_i \in \{0, 1, \dots, q_i - 1\}$.

Demostración del Corolario 2.4.2. Vamos a probar que si $s = n$ en el Teorema 2.4.1, entonces $T = [0, 1]$.

Si $s = n$, entonces $t = 1$ y las definiciones dadas en el Teorema 2.4.6 se transforman en:

$$T_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}} u_i = \frac{((i-1)!)^{-2n}}{i^{2n}} u_i = \frac{u_i}{i!^{2n}},$$

y

$$T = \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i!^{2n}} u_i,$$

donde $u_i \in [0, i^{2n} - 1]$.

Tomando $q_i = \frac{1}{i^{2n}}$ en la definición anterior, tenemos lo pedido. \square

CAPÍTULO 3

Operador maximal asociado a los k -esqueletos

En este capítulo definimos el operador maximal que da origen al problema tratado en esta tesis. Este operador surge naturalmente del problema geométrico tratado en el [Capítulo 2](#) y también como una generalización del operador maximal esférico definido en (0.3). Es decir, en lugar de promediar funciones sobre esferas, nos gustaría promediar funciones sobre bordes de cuadrados, o más generalmente sobre k -esqueletos de n -cubos.

Veremos que una simple generalización del operador maximal esférico no es la definición más interesante en este contexto. Siguiendo las ideas planteadas en [KNS18], consideramos una variante más adecuada pero que no es sub-lineal y esto presenta la primer diferencia con los problemas clásicos relacionados.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la [Sección 3.1](#) introducimos parte de la notación que usaremos y mostramos cuál es la forma más apropiada de definir el operador maximal asociado a los k -esqueletos. En la [Sección 3.2](#) damos la definición precisa del operador y el problema sobre el cual trabajaremos. En la [Sección 3.3](#) definimos una versión discretizada y linealizada del problema y en la [Sección 3.4](#) obtenemos estimaciones en L^p para esta versión usando un argumento de dualidad. Con estos resultados, en la [Sección 3.5](#) probamos acotaciones en L^p para el operador maximal asociado a los k -esqueletos. Por último, en la [Sección 3.6](#) extendemos los resultados de la sección anterior para una versión más general del operador maximal y en la [Sección 3.7](#) vemos cómo las estimaciones en L^p permiten recuperar parcialmente los resultados obtenidos para el problema geométrico tratado en el [Capítulo 2](#).

3.1. Preliminares

Comenzamos fijando parte de la notación que usaremos de aquí en adelante.

Si $\delta > 0$, definimos el δ -entorno de un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ como

$$F_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(F, x) < \delta\},$$

donde d denota la distancia inducida por la norma infinito.

Definición 3.1.1. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $0 \leq k < n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos:

1. $S(x, r)$ el n -cubo con centro x y lados paralelos a los ejes de longitud $2r$.
2. $S_k(x, r)$ denota el k -esqueleto de $S(x, r)$.
3. $S_k^j(x, r)$, $j = 1, \dots, \binom{n}{k} 2^{n-k}$ enumera cada una de las k -caras de $S_k(x, r)$.
4. $S_{k,\delta}(x, r) = (S_k(x, r))_\delta$ representa un δ -entorno de $S_k(x, r)$.
5. $S_{k,\delta}^j(x, r)$ denota un δ -entorno de $S_k^j(x, r)$, $j = 1, \dots, \binom{n}{k}$.

Con $N = N(n, k)$ denotamos el número de caras del k -esqueleto de un n -cubo. En general, cuando n y k estén claros por contexto, escribiremos simplemente N . En la Proposición 2.1.3 probamos que $N(n, k) = \binom{n}{k} 2^{n-k}$.

Observemos que

$$2^n r^k \delta^{n-k} \leq \mathcal{L}_n(S_{k,\delta}^j(x, r)) = 2^n (r^k \delta^{n-k} + \delta^n) \leq 2^{n+1} r^k \delta^{n-k}. \quad (3.1)$$

Cuando no haya lugar a confusión escribiremos sólo \mathcal{L} en lugar de \mathcal{L}_n .

Si $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ y $F \subset \mathbb{R}^n$, denotamos el promedio de f sobre F por

$$\int_F f(y) dy := \frac{1}{\mathcal{L}(F)} \int_F f(y) dy.$$

Para definir los operadores maximales asociados a los k -esqueletos, vamos a comenzar con un caso sencillo de visualizar. Supongamos que $n = 2$ y $k = 1$, es decir, estamos en el plano y los objetos geométricos son bordes de cuadrados (1-esqueletos de 2-cubos).

Un primero intento para definir la función maximal asociada a los bordes de cuadrados es tratar de generalizar la definición del operador maximal circular definido en (0.3) y promediar funciones sobre el δ -entorno del borde de un cuadrado. Más precisamente, si $0 < \delta < 1$ y $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, definimos

$$\mathbf{M}_\delta f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}(S_{1,\delta}(x, r))} \int_{S_{1,\delta}(x, r)} |f(y)| dy. \quad (3.2)$$

Siguiendo la notación introducida, $S_{1,\delta}(x, r)$ representa el δ -entorno del borde de un cuadrado (1-esqueleto) con centro x y lado de longitud $2r$.

Sin embargo, con el siguiente ejemplo veremos que esta definición no resulta ser la más adecuada.

Sea f la función indicadora de un δ -entorno de $J = [-1, 2] \times \{0\}$. Si $x \in [0, 1]^2$, elegimos $r = r_x$ de manera que J contenga alguno de los lados del borde del cuadrado con centro x

y lados de longitud $2r_x$. Luego, por (3.2) y (3.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\delta f(x) &\geq \frac{1}{\mathcal{L}(S_{1,\delta}(x, r_x))} \int_{S_{1,\delta}(x, r_x)} |f(y)| dy \\ &\geq \frac{\mathcal{L}(J_\delta \cap S_{1,\delta}(x, r))}{\mathcal{L}(S_{1,\delta}(x, r_x))} \\ &\geq \frac{8r\delta}{16r\delta} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]^2$. En otras palabras, encontramos una cota inferior constante para una función con norma muy chica y que sólo toma en cuenta uno de los lados del borde de un cuadrado. Esto genera resultados que no son naturales y resultan triviales, análogo a lo que sucede cuando se considera la dimensión de Hausdorff para estudiar el Problema 1 en el [Capítulo 2](#). En efecto, si tomamos $p > 1$ y f como arriba,

$$\frac{\|\mathbf{M}_\delta f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}} \geq \frac{1/2}{3\delta^{1/p}} \approx \delta^{-1/p}. \quad (3.3)$$

Supongamos que para algún $a > 0$, \mathbf{M}_δ satisface una desigualdad de tipo fuerte (p, p) de la forma

$$\|\mathbf{M}_\delta f\|_{L^p} \leq \delta^{-\frac{1-a}{p}} \|f\|_{L^p}, \quad (3.4)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto que contiene el borde de un cuadrado con centro en cada punto de $[0, 1]^2$ y tomemos $f = \mathbf{1}_{B_\delta}$. Para cada $x \in [0, 1]^2$, existe un $r = r_x$ tal que $S_{1,\delta}(x, r) \subset B_\delta$ y entonces $\mathbf{M}_\delta f(x) \geq 1$. Luego, por (3.4) tenemos que

$$\delta^{1+a} \leq \mathcal{L}(B_\delta).$$

Con esta cota superior para la medida de Lebesgue de un δ -entorno de B y usando la [Proposición 1.1.10](#), obtenemos que

$$\underline{\dim}_B(B) = 2 - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(B_\delta)}{\log \delta} > 2 - (1 + a) > 1 - a.$$

Este resultado es trivial, pues como B contiene al menos el borde de un cuadrado, de inmediato tenemos que $\dim_B(B) > 1$ y en particular $\underline{\dim}_B(B) > 1 - a$.

En dimensiones mayores ocurre algo similar. Si $n > 2$, $0 \leq k < n$ y $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\mathbf{M}_\delta^k f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(x, r))} \int_{S_{k,\delta}(x, r)} |f(y)| dy,$$

es decir, generalizamos la definición dada en (3.2) y promediamos la función f sobre el δ -entorno del k -esqueleto de un n -cubo.

Un ejemplo parecido al anterior muestra que, incluso en dimensiones mayores, esta definición tampoco es la correcta. Tomemos f la indicadora de un δ -entorno de $J =$

$[-1, 2]^k \times \{0\}^{n-k}$. Para cada $x \in [0, 1]^n$ consideramos $S_k(x, r_x)$, el k -esqueleto con centro en x , lados de longitud $2r_x$ y con alguna de sus k -caras contenida en J . Luego, $\mathbf{M}_\delta^k f(x) \geq c_{n,k}$ para todo $x \in [0, 1]^n$ donde $c_{n,k}$ es una constante positiva que sólo depende de n, k . Nuevamente, obtenemos una cota inferior constante para una función con norma muy pequeña y los resultados geométricos que se obtienen son triviales, como en el caso $n = 2, k = 1$.

Seguendo [KNS18, Sección 7], una propuesta más interesante es la siguiente. Sean $0 < \delta < 1$ y $0 \leq k < n$ enteros dados, para cada $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\mathbf{M}_\delta^k f(x) = \sup_{r>0} \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x, r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy, \quad (3.5)$$

donde el mínimo se toma sobre los promedios de f en cada una de los δ -entornos de las $N = \binom{n}{k} 2^{n-k}$ caras de $S_k(x, r)$.

Este operador toma en consideración todas las caras del k -esqueleto de un n -cubo. Sin embargo, no es sublineal y esa una de las diferencias con los problemas clásicos relacionados.

3.2. Definición y cotas triviales

En lo que sigue, la dimensión del espacio ambiente \mathbb{R}^n estará fija como así también el valor de $k, 0 \leq k < n$. Es decir, para cada par de enteros (k, n) definimos un operador lineal asociado a los k -esqueletos de n -cubos.

Como suele suceder en este tipo de problemas, primero consideramos una versión restringida del operador definido en (3.5) en la que solamente permitimos k -esqueletos con lados de longitud acotados.

Definición 3.2.1. Sean $0 < \delta < 1$ y $0 \leq k < n$ enteros dados. Para cada $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, el operador maximal asociado a los k -esqueletos de n -cubos se define por

$$M_\delta^k f(x) = \sup_{1 \leq r \leq 2} \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x, r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy. \quad (3.6)$$

Este operador se puede comparar fácilmente con el operador maximal de Hardy-Littlewood centrado en cubos definido como

$$M_{HL} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}(S(x, r))} \int_{S(x, r)} |f(y)| dy,$$

donde $S(x, r)$ es el n -cubo centrado en x y lados de longitud $2r$. En efecto, dado $r \in [1, 2]$,

es fácil ver que $S_\delta^k(x, r) \subseteq S(x, 2r)$. Por (3.1) y usando que $\mathcal{L}(S(x, 2r)) = (4r)^n$,

$$\begin{aligned} \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x, r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy &\leq \frac{S(x, 2r)}{S_{k,\delta}^j(x, r)} \int_{S(x, 2r)} |f(y)| dy \\ &\leq 2^n (r\delta^{-1})^{n-k} \frac{1}{\mathcal{L}(S(x, 2r))} \int_{S(x, 2r)} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Luego, tomando supremos nos queda

$$M_\delta^k f(x) \leq 2^{2n-k} \delta^{k-n} M_{HL} f(x). \quad (3.7)$$

Por el Teorema de Hardy-Littlewood, M_{HL} está acotado $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p > 1$ y entonces M_δ^k también, es decir,

$$\|M_\delta^k f\|_p \leq C \delta^{k-n} \|f\|_p \quad \text{para toda } f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

donde C es una constante independiente de f y δ . Notemos que δ^{k-n} tiende a infinito cuando δ tiende a cero, pues $k < n$. El problema es conocer la velocidad a la que crece $\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^p}$ cuando $\delta \rightarrow 0$, donde

$$\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^q} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|M_\delta^k f\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}}. \quad (3.8)$$

En este capítulo trabajaremos en el caso $p = q$. El caso $p \neq q$ será tratado más adelante.

Trivialmente, de la Definición 3.2.1 se obtienen las siguientes cotas.

Proposición 3.2.2. *Para toda $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$,*

1. $\|M_\delta^k\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} \leq 1.$
2. $\|M_\delta^k\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq 2^{-n} \delta^{k-n}.$

Demostración. Para 1,

$$\begin{aligned} |M_\delta^k f(x)| &\leq \sup_{1 \leq r \leq 2} \min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy \\ &\leq \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Para 2,

$$\begin{aligned} |M_\delta^k f(x)| &\leq \sup_{1 \leq r \leq 2} \min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{1 \leq r \leq 2} 2^{-n} r^{-k} \delta^{k-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &\leq \delta^{k-n} \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

3.3. Discretización y linealización

Como vimos en la sección anterior, el operador M_δ^k no es sublineal. En esta sección, por medio de un proceso de discretización y linealización, introducimos una nueva función maximal lineal que aproxima en norma a M_δ^k .

Comenzamos con un par de definiciones y fijando la notación.

Definición 3.3.1. Para todo $n \geq 2$ y $0 < \delta < 1$ tal que $1/\delta$ es un entero, definimos:

1. $Q_0 = [0, 1)^n$, el n -cubo unitario semi-abierto a la derecha de lado 1 con vértice inferior izquierdo 0.
2. $Q_0^* = \{x_1, \dots, x_u\}$ denota los centros de los n -cubos semi-abiertos a la derecha con lados de longitud δ , $Q_0(1), \dots, Q_0(u)$, generados por la grilla $Q_0 \cap \delta\mathbb{Z}^n$. Notemos que $u = \delta^{-n}$.
3. La función $\psi(x) : Q_0 \rightarrow Q_0^*$, $x \rightarrow x^*$ le asigna a cada punto de Q_0 el centro del n -cubo semi-abierto a la derecha con vértices en $Q_0 \cap \delta\mathbb{Z}^n$ y lado de longitud δ que contiene a x .

Observación 3.3.2. $\psi(Q_0(i)) = x_i$ y $\psi^{-1}(x_i)$, $i = 1, \dots, u$, forman una partición de Borel para Q_0 .

Definición 3.3.3. Sean $n \geq 2$, $0 \leq k < n$ dos enteros dados y $\{e_1, \dots, e_n\}$ los vectores canónicos de \mathbb{R}^n . Definimos los k -planos coordenados, $\pi_1, \dots, \pi_{\binom{n}{k}}$, como los $\binom{n}{k}$ subespacios de dimensión k generados por $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Diremos que V es un k -plano afín si existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $V = \pi_\omega + v$, para algún $1 \leq \omega \leq \binom{n}{k}$. Si $k = 0$, tomamos como 0-plano al origen.

Ejemplo 3.3.4. Para $n = 2$ y $k = 1$, los 1-planos coordenados serían los ejes coordenados y un 1-plano afín, cualquier recta vertical u horizontal.

Dado el k -esqueleto de un n -cubo, cada una de sus caras está contenida en un k -plano afín. Además, si dos k -esqueletos tienen alguna cara en común (no necesariamente igual, sino que se solapan), entonces ambas están contenidas en un mismo k -plano afín. En cierto modo, si tenemos una familia finita de k -esqueletos, el solapamiento entre ellos está relacionado con la cantidad de k -planos afines diferentes que los contienen. Esta relación la podemos cuantificar gracias al siguiente lema, en cuya demostración resulta crucial el Lema (n, ℓ) -dimensional (Lema 2.2.2).

Lema 3.3.5. Existe una constante $C_{n,k} < \infty$, dependiendo solo de n, k tal que vale lo siguiente: sea $\{S_k(x_i, r_i)\}_{i=1}^m$ una colección finita de k -esqueletos. Es posible elegir una k -cara de cada uno de ellos con la siguiente propiedad: si V es una k -plano afín, entonces V contiene a lo sumo

$$C_{n,k} m^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}}$$

de las k -caras elegidas.

Demostración. Dado un k -plano afín V en \mathbb{R}^n , sea $z(V) \in \mathbb{R}^{n-k}$ la intersección de V con el subespacio ortogonal a V . Si consideramos el k -esqueleto de un n -cubo con centro y lado de longitud $2r$, cada una de sus k -caras pertenece al k -plano V con

$$z(V) = y_I + r\sigma,$$

donde $\sigma \in \{-1, 1\}^{n-k}$ e $I \in \binom{[n]}{n-k}$.

Sea A el conjunto de todos los k -planos afines que contienen alguna k -cara de $S_k(x_i, r_i)$, y escribamos

$$\begin{aligned} A' &= \{z(V) : V \in A\} \\ &= \left\{ (x_j)_I + r_j\sigma : I \in \binom{[n]}{n-k}, \sigma \in \{-1, 1\}^{n-k}, 1 \leq j \leq m \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 2.2.2 a los conjuntos A' y $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ con $\ell = n - k$, y usando que trivialmente $|A| > |A'|$, obtenemos una cota inferior para $|A|$ en términos de m :

$$|A| \geq c_{n,k} m^{(n-k)(2n-1)/2n^2}.$$

Sean $V_1, \dots, V_{|A|}$ los diferentes k -planos en A , y sea n_j el número de k -esqueletos con alguna cara contenida en V_j . Entonces, si $N = \binom{n}{k} 2^{n-k}$ es la cantidad de caras de un k -esqueleto,

$$\sum_{j=1}^{|A|} n_j = mN \Rightarrow \exists j_0 \text{ tal que } n_{j_0} \leq \frac{mN}{|A|} \leq c_{n,k}^{-1} N m^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}}.$$

Para este valor de j_0 , elegimos de cada uno de los n_{j_0} k -esqueletos la cara que está contenida en V_{j_0} .

Luego, aplicamos el mismo procedimiento a los $m_1 := m - n_{j_0}$ esqueletos restantes, y continuamos de esta manera hasta que $m_p > m^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}}$ (donde m es el número original de k -esqueletos). Si $m_p \leq m^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}}$, entonces elegimos de manera arbitraria una cara de cada uno de los esqueletos restantes. □

Definición 3.3.6. Sea Γ_0 la familia de todas las funciones $\rho : Q_0^* \rightarrow [1, 2] \cap \delta\mathbb{Z}$. Para cada ρ , definimos $S_{k,i} = S_k(x_i, r_i)$, donde $r_i = \rho(x_i)$ e $1 \leq i \leq u$. Para esta familia de k -esqueletos definimos la función Φ_ρ como

$$\Phi_\rho(S_k(x_i, r_i)) = \ell_k^i,$$

donde ℓ_k^i denota la k -cara de $S_{k,i}$ seleccionada como en el Lema 3.3.5.

Nota 3.3.7. Cada k -cara ℓ_k^i depende también de la función ρ , la cual una vez elegida está fija, pero para simplificar la notación simplemente escribiremos la dependencia de k y de i .

Definición 3.3.8. Dada $\rho \in \Gamma_0$ y $0 < \delta < 1$, si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definimos la *función maximal asociada a* (ρ, k) de ancho δ como

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f &: Q_0 \rightarrow \mathbb{R} \\ \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x) &= \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{x, \delta})} \int_{\ell_{x, \delta}} f(y) dy, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\ell_{x, \delta}$ es un δ -entorno de $\ell_x := \Phi_\rho(S_k(x^*, \rho(x^*)))$.

Observación 3.3.9. Para cada $x \in Q_0$, el operador lineal definido en (3.9) toma el promedio de f sobre el δ -entorno de ℓ_x , uno de los lados del k -esqueleto $S_k(x^*, \rho(x^*))$.

Por el ítem 4 de la Definición 3.3.1 y la Observación 3.3.2, para todo $x \in \psi^{-1}(x_i)$ tenemos que $x^* = x_i$ y por lo tanto,

$$\widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x) = \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x_i). \quad (3.10)$$

Luego, $\widetilde{M}_{\rho, \delta}^k$ es constante sobre cada $\psi^{-1}(x_i)$, $1 \leq i \leq u$, y como dichos conjuntos forman una partición de Borel para Q_0 , el operador definido en (3.9) queda completamente determinado por los valores que toma en los puntos de $Q_0^* = \{x_1, \dots, x_u\}$.

Denotamos con CQ_0 el n -cubo que tiene el mismo centro que Q_0 y lados de longitud C . Como r está acotado superiormente por 2, en (3.9) es suficiente considerar funciones f soportadas sobre $7Q_0$, pues si $x \in Q_0$ entonces $S_k(x^*, \rho(x^*)) \subseteq 5Q_0$ y como $\delta < 1$, $S_{k, \delta}(x^*, \rho(x^*)) \subseteq 7Q_0$.

El siguiente lema muestra de qué manera el operador maximal lineal que definimos aproxima en norma el operador maximal asociado a los k -esqueletos.

Lema 3.3.10. *Existe una constante $C_{n, k} > 0$ tal que si $0 < \delta < 1$,*

$$\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^p(Q_0)} \leq C_{n, k} \sup_{\rho \in \Gamma_0} \|\widetilde{M}_{\rho, 3\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^p(Q_0)}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $f \in L^p$ tal que $f \geq 0$, $\|f\|_p = 1$ y

$$\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^p(Q_0)} \leq \|M_\delta^k f\|_p + \varepsilon. \quad (3.11)$$

Veamos que existe una función $\rho \in \Gamma_0$ (que depende de f) para la cual se cumple que

$$M_\delta^k f(x) \leq 3^{n-k} \widetilde{M}_{\rho, 3\delta}^k f(x) + \varepsilon, \quad (3.12)$$

para todo $x \in Q_0$. En efecto, si $x \in Q_0$ es fácil ver que $S_{k, \delta}^j(x, r) \subset S_{k, 2\delta}^j(x^*, r)$ para todo $r \in [1, 2]$ y todo $1 \leq j \leq N$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{S_{k, \delta}^j(x, r)} |f(y)| dy &\leq \frac{\mathcal{L}(S_{k, 2\delta}^j(x^*, r))}{\mathcal{L}(S_{k, \delta}^j(x, r))} \int_{S_{k, 2\delta}^j(x^*, r)} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{2^{n+1} r^k (2\delta)^{n-k}}{2^n r^k \delta^{n-k}} \int_{S_{k, 2\delta}^j(x^*, r)} |f(y)| dy \\ &\leq 2^{n-k+1} \int_{S_{k, 2\delta}^j(x^*, r)} |f(y)| dy \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(x,r)} |f(y)| dy \leq 2^{n-k+1} \min_{j=1}^N \int_{S_{k,2\delta}^j(x^*,r)} |f(y)| dy.$$

Tomando supremo sobre r en la desigualdad anterior tenemos que,

$$\begin{aligned} M_\delta^k f(x) &= \sup_{1 \leq r \leq 2} \min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(x,r)} |f(y)| dy \\ &\leq 2^{n-k+1} \sup_{1 \leq r \leq 2} \min_{j=1}^N \int_{S_{k,2\delta}^j(x^*,r)} |f(y)| dy \\ &= 2^{n-k+1} M_{2\delta}^k f(x^*). \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ como arriba, por definición de supremo, para cada x^* existe un $r' = r'(x^*) \in [1, 2]$ tal que

$$M_{2\delta}^k f(x^*) \leq \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,2\delta}^j(x^*, r'))} \int_{S_{k,2\delta}^j(x^*, r')} f(y) dy + \varepsilon.$$

Tomemos $r = r(x^*) \in [1, 2] \cap \delta\mathbb{Z}$ el punto más cercano a r' (si hay dos, elegimos el que esté más a la izquierda) y definamos la función $x \rightarrow \rho(x^*) = r$.

Como $S_{k,2\delta}^j(x^*, r') \subset S_{k,3\delta}^j(x^*, r)$ para todo j , usando (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} M_{2\delta}^k f(x^*) &\leq \min_{j=1}^N \frac{\mathcal{L}(S_{k,3\delta}^j(x^*, r))}{\mathcal{L}(S_{k,2\delta}^j(x^*, r'))} \int_{S_{k,3\delta}^j(x^*, r)} f(y) dy + \varepsilon \\ &\leq \frac{2^{n+1} r^k (3\delta)^{n-k}}{2^n r'^k (2\delta)^{n-k}} \min_{j=1}^N \int_{S_{k,3\delta}^j(x^*, r)} f(y) dy + \varepsilon \\ &\leq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k} \int_{\ell_{x,3\delta}} f(y) dy + \varepsilon \\ &\leq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k} \tilde{M}_{\rho,3\delta}^k f(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$M_\delta^k f(x) \leq 2^{n-k+1} M_{2\delta}^k f(x^*) \leq 2^{n-k+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k} \tilde{M}_{\rho,3\delta}^k f(x) + \varepsilon \leq 3^{n-k} \tilde{M}_{\rho,3\delta}^k f(x) + \varepsilon,$$

tomando normas obtenemos

$$\|M_\delta^k f\|_{L^p(Q_0)} \leq 3^{n-k} \|\tilde{M}_{\rho,3\delta}^k f\|_{L^p(Q_0)} + \varepsilon \quad (3.13)$$

y por lo tanto vale (3.12).

Luego, por (3.11), (3.13) y (3.8), resulta

$$\begin{aligned} \|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^p(Q_0)} &\leq \|M_\delta^k f\|_p + \varepsilon \\ &\leq 3^{n-k} \|\tilde{M}_{\rho,3\delta}^k f\|_{L^p(Q_0)} + 2\varepsilon \\ &\leq 3^{n-k} \|\tilde{M}_{\rho,3\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^p(Q_0)} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluimos la prueba. \square

3.4. Estimaciones para la versión lineal

En esta sección, usando un argumento de dualidad, obtenemos estimaciones en $L^p(Q_0)$ para el operador $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$, para ciertos valores de p . Esto nos permite, en principio, obtener acotaciones en L^p para el operador M_δ^k , al menos sobre Q_0 .

Definición 3.4.1. Sea $\rho \in \Gamma_0$ y sean $\{\ell_k^1, \dots, \ell_k^u\}$ las k -caras definidas por la función Φ_ρ . Diremos que ℓ_k^i es *paralela al k -plano coordenado π_ω* si existe un k -plano afín $V = \pi_\omega + v$ que la contiene. Para cada $1 \leq \omega \leq \binom{n}{k}$ definimos el conjunto

$$E_{\pi_\omega} := \{x_i \in Q_0^* : \Phi_\rho(S_{k,i}) = \ell_k^i \text{ es paralela a } \pi_\omega\}.$$

En el caso $k = 0$, consideraremos directamente todo el espacio Q_0^* .

Observación 3.4.2. Los conjuntos E_{π_ω} son disjuntos y $\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})$, $1 \leq \omega \leq \binom{n}{k}$, forman una partición de Borel de Q_0 .

Para clarificar un poco las ideas, veamos qué significan las dos definiciones anteriores para el caso $n = 2$ y $k = 1$, es decir, cuando estamos en el plano y los k -esqueletos son bordes de cuadrados. En este caso, los 1-planes coordenados resultan ser los ejes cartesianos y los 1-planes afines, las rectas verticales u horizontales.

Ahora bien, supongamos que $\rho \in \Gamma_0$ y la familia de bordes de cuadrados determinada por Φ_ρ es $\{\ell_1^1, \dots, \ell_1^u\}$. Cada uno de estos bordes está contenido en un recta vertical u horizontal y entonces podemos separar a esta familia, según la Definición 3.4.1, en dos grupos:

$$E_{\pi_1} := \{x_i \in Q_0^* : \ell_k^i \text{ es paralela al eje vertical}\}$$

y

$$E_{\pi_2} := \{x_i \in Q_0^* : \ell_k^i \text{ es paralela al eje horizontal}\}.$$

La siguiente proposición permite obtener estimaciones para el operador $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ usando un argumento de dualidad. Algunas de estas ideas son similares a las que se utilizan en [Mat15, Capítulo 22] para tratar el problema de *Takeya*.

Proposición 3.4.3. Sea $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < \delta < 1$, $0 < K < \infty$, y sea $\rho \in \Gamma_0$ una función dada. Fijemos un k -plano coordenado π y sea $s = |E_\pi|$. Enumeremos $E_\pi = \{x_1, \dots, x_s\}$ y escribamos $\ell_{k,\delta}^i$ para denotar el δ -entorno de $\Phi(S_k(x_i, \rho(x_i)))$, $i = 1, \dots, s$. Supongamos que

$$\left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_0)} \leq K$$

con t_1, \dots, t_s números positivos tal que

$$\delta^{n-kp'} \sum_{i=1}^s t_i^{p'} \leq 1.$$

Entonces

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_\pi))} \leq K \|f\|_{L^p(7Q_0)},$$

para toda $f \in L^p(7Q_0)$.

Demostración. Sea $f \in L^p(7Q_0)$. Para comenzar, notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\psi^{-1}(E_\pi)} \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x)^p dx &= \sum_{i=1}^s \int_{\psi^{-1}(x_i)} \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x)^p dx \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{L}_n(\psi^{-1}(x_i)) \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x_i)^p \\ &= \sum_{i=1}^s \delta^n \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x_i)^p, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos (3.10) y en la tercera que $\psi^{-1}(x_i) = Q_0(i)$ es un n -cubo de lado δ , para todo i .

Por dualidad, para cualquier sucesión finita $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, tenemos lo siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^s a_i^p \right)^{1/p} = \max \left\{ \sum_{i=1}^s a_i b_i : b_i \geq 0, \sum_{i=1}^s b_i^{p'} \leq 1 \right\}.$$

Aplicando esto a $a_i = \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x_i) \delta^{n/p}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_\pi))} &= \left(\sum_{i=1}^s \left(|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x_i)| \delta^{n/p} \right)^p \right)^{1/p} \\ &= \max \left\{ \sum_{i=1}^s \delta^{n/p} b_i |\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x_i)| : b_i \geq 0, \sum_{i=1}^s b_i^{p'} \leq 1 \right\} \\ &= \delta^{n-k} \max \left\{ \sum_{i=1}^s t_i |\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x_i)| : \delta^{n-kp'} \sum_{i=1}^s t_i^{p'} \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos el cambio de variable $t_i = \delta^{\frac{n}{p} - (n-k)} b_i$. Además,

$$\sum_{i=1}^s t_i^{p'} = \sum_{i=1}^s \delta^{(\frac{n}{p} - (n-k))p'} b_i^{p'} \leq \delta^{kp' - n}$$

y por lo tanto, existen $t_i \geq 0$ con $\delta^{n-kp'} \sum_{i=1}^s t_i^{p'} \leq 1$ de manera que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_\pi))} &= \delta^{n-k} \sum_{i=1}^s t_i \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x_i) \\ &= \delta^{n-k} \sum_{i=1}^s t_i \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{k,\delta}^i)} \int_{\ell_{k,\delta}^i} |f(y)| dy \\ &\leq 2^{-n} \sum_{i=1}^s t_i \int_{\ell_{k,\delta}^i} f(y) dy, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos (3.1) y que $\rho(x_i) \geq 1$ para todo i .

Finalmente, por la desigualdad de Hölder (y acotando $2^{-n} \leq 1$),

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_\pi))} &\leq \int_{7Q_0} \left(\sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right) |f(y)| dy \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p(7Q_0)} \\ &\leq K \|f\|_{L^p(7Q_0)}, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Observemos que el resultado anterior es independiente del k -plano coordenado π que escojamos. Incluso podríamos repetir la prueba reemplazando $\psi^{-1}(E_\pi)$ directamente por Q_0 y obtener una cota para $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k : L^p(7Q_0) \rightarrow L^p(Q_0)$. En la demostración del próximo teorema veremos por qué resulta conveniente en la proposición anterior fijar un k -plano coordenado π y trabajar sólo en el conjunto $\psi^{-1}(E_\pi)$.

Teorema 3.4.4. Para todo $0 < \delta < 1$, $\rho \in \Gamma_0$, y $f \in L^2(7Q_0)$,

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^2(Q_0)} \leq C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{4n}} \|f\|_{L^2(7Q_0)}, \quad (3.14)$$

donde $C_{n,k} > 0$ depende solo de n, k (en particular, es independiente de ρ).

Demostración. Durante la prueba $C_{n,k}$ denota una constante positiva que depende solamente de n y k ; su valor puede cambiar de una línea a la otra.

Sea $f \in L^2(7Q_0)$ y consideremos los k -planos coordenados π_ω , $\omega = 1, \dots, \binom{n}{k}$. Para probar (3.14) es suficiente acotar la norma en L^2 de $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f$ sobre cada $\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})$. En efecto, como $\{\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})\}$ es una partición de Q_0 ,

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^2(Q_0)}^2 = \sum_{\omega=1}^{\binom{n}{k}} \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^2(\psi^{-1}(E_{\pi_\omega}))}^2. \quad (3.15)$$

Elegimos ω y π_ω , los cuales estarán fijos durante el resto de la demostración. Sean x_1, \dots, x_s los puntos de E_{π_ω} y $\ell_{k,\delta}^1, \dots, \ell_{k,\delta}^s$ como en la Proposición 3.4.3. Por dicha proposición, es suficiente probar que

$$\left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right\|_{L^2(7Q_0)} \leq C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{4n}}, \quad (3.16)$$

siempre que t_1, \dots, t_s sean números reales positivos tal que $\delta^{n-2k} \sum_{i=1}^s t_i^2 \leq 1$. Fijemos entonces, t_1, \dots, t_s cumpliendo esto.

Sea

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &:= \left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right\|_{L^2(7Q_0)}^2 = \int_{7Q_0} \left(\sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right)^2 dx \\
&= \int_{7Q_0} \sum_{i,j=1}^s t_i t_j \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^j} dx \\
&= \sum_{i,j=1}^s t_i t_j \mathcal{L}(\ell_{k,\delta}^i \cap \ell_{k,\delta}^j). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

En la última sumatoria aparece la medida de la intersección de los δ -entornos de $\ell_k^1, \dots, \ell_k^s$.

Lo que nos interesa estimar es la cantidad de sumandos no nulos que hay en (3.17). Por la Definición 3.4.1, todas estas k -caras son paralelas al k -plano coordenado π_ω , es decir, cada una está contenida en algún k -plano afín de la forma $V = \pi_\omega + \nu$, con $\nu \in \mathbb{R}^n$.

Ahora bien, por la Definición 3.3.6, todas las k -caras $\ell_k^1, \dots, \ell_k^s$ fueron seleccionadas de acuerdo al Lema 3.3.5 y este lema nos permite estimar la cantidad de caras que pertenecen a un k -plano afín fijo. Usando esto, vamos a estimar (3.17).

Notemos que para todo i, j , por (3.1),

$$0 \leq \mathcal{L}(\ell_{k,\delta}^i \cap \ell_{k,\delta}^j) \leq 2^{n+k+1} \delta^{n-k}.$$

Por simplicidad, escribamos

$$L_{i,j} = \mathcal{L}(\ell_{k,\delta}^i \cap \ell_{k,\delta}^j).$$

Usando la desigualdad de Cauchy- Schwartz, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \sum_{i,j=1}^s t_i t_j L_{i,j}^{1/2} L_{i,j}^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i,j=1}^s t_i^2 L_{i,j} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^s t_j^2 L_{i,j} \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^s t_i^2 \cdot \sum_{j=1}^s L_{i,j} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^s t_j^2 \cdot \sum_{i=1}^s L_{i,j} \right)^{1/2} \\
&= \sum_{i=1}^s t_i^2 \sum_{j=1}^s L_{i,j}. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Fijamos algún i y denotamos con V_i el k -plano afín que contiene a ℓ_k^i . Queremos dar una cota superior para los valores de j para los cuales $\ell_{k,\delta}^j \cap \ell_{k,\delta}^i \neq \emptyset$. Para esto, alcanza con estimar la cantidad de k -planos afines V_j tal que $(V_i)_\delta \cap (V_j)_\delta \neq \emptyset$ y usar el Lema 3.3.5.

Si ℓ_k^i y ℓ_k^j no pertenecen al mismo k -plano afín, entonces están δ -separadas. Luego, hay una cantidad finita de valores de j , que depende de n y k , para los cuales se cumple que $(V_j)_\delta \cap (V_i)_\delta \neq \emptyset$. Por el Lema 3.3.5, cada uno de estos k -planos afines V_j contiene a lo sumo

$$C_{n,k} \delta^{\left(1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}\right)}$$

de las k -caras $\ell_k^1, \dots, \ell_k^s$ y por lo tanto, existen a lo sumo

$$C_{n,k} \delta^{\left(1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}\right)}$$

pares (i, j) tal que $\ell_{k,\delta}^i \cap \ell_{k,\delta}^j \neq \emptyset$.

Como $s = |E_{\pi_\omega}| \leq \delta^{-n}$, para cada i fijo obtenemos,

$$\sum_{j=1}^s L_{i,j} \leq 2^{n+k+1} \delta^{n-k} C_{n,k} \left(\delta^{-n + \frac{(n-k)(2n-1)}{2n}} \right).$$

Combinando esto con (3.18) y usando que $\sum_{i=1}^s t_i^2 \leq \delta^{2k-n}$,

$$\begin{aligned} I &\leq 2^{n+k+1} C_{n,k} \delta^{n-k} \left(\delta^{-n + \frac{(n-k)(2n-1)}{2n}} \right) \sum_{i=1}^s t_i^2 \\ &\leq C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{2n}}. \end{aligned}$$

Usando esta estimación de I se obtiene inmediatamente (3.16). Luego, por la Proposición 3.4.3,

$$\left\| \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f \right\|_{L^2(\psi^{-1}(E_{\pi_\omega}))} \leq C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{4n}} \|f\|_{L^2(7Q_0)}.$$

Como esto no depende del plano π_ω elegido, usando (3.15) concluimos la prueba. \square

Ahora consideremos $p = \frac{p'}{p'-1}$ con $2 \leq p' \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.4.5. Para todo $\delta > 0$, $\rho \in \Gamma_0$ y $f \in L^p(7Q_0)$, $2 \leq p' \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f \right\|_{L^p(Q_0)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{k-n}{2n} \cdot \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(7Q_0)}, \quad (3.19)$$

donde $C_{k,n}$ depende sólo de n, k (en particular, es independiente de ρ).

Demostración. Durante la prueba $C_{n,k}$ denota una constante positiva que depende solamente de n y k ; su valor puede cambiar de una línea a la otra.

Sea $f \in L^p(7Q_0)$. De manera análoga a la demostración del Teorema 3.4.4, es suficiente acotar la norma en L^p de $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ sobre cada conjunto $\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})$. Fijamos ω y π_ω el resto de la demostración.

Sean x_1, \dots, x_s los puntos de E_{π_ω} y $\ell_{k,\delta}^1, \dots, \ell_{k,\delta}^s$ como en la Proposición 3.4.3. Es suficiente probar que

$$\left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_0)} \leq C_{n,k}^{1/p} \delta^{\frac{k-n}{2n} \cdot \frac{1}{p}}, \quad (3.20)$$

siempre que t_1, \dots, t_s sean números reales positivos tales que $\delta^{n-p'k} \sum_{i=1}^s t_i^{p'} \leq 1$.

Sea

$$\begin{aligned} I &:= \left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_0)}^{p'} = \int_{7Q_0} \left(\sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^i} \right)^{p'} dx \\ &= \int_{7Q_0} \sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1} \dots t_{i_{p'}} \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^{i_1}} \dots \mathbf{1}_{\ell_{k,\delta}^{i_{p'}}} dx \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1} \dots t_{i_{p'}} \mathcal{L}(\ell_{k,\delta}^{i_1} \cap \dots \cap \ell_{k,\delta}^{i_{p'}}). \end{aligned}$$

Igual que en la demostración del Teorema 3.4.4, en la última suma aparece la medida de la intersección de los δ -entornos de las k -caras $\ell_k^1, \dots, \ell_k^s$. Dichas caras fueron seleccionadas según el Lema 3.3.5 y además resultan todas paralelas a π_ω , es decir, cada una pertenece a algún k -plano afín $V = \pi_\omega + v$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Para simplificar la notación, escribamos

$$L_{i_1, \dots, i_{p'}} = \mathcal{L}(\ell_{k,\delta}^{i_1} \cap \dots \cap \ell_{k,\delta}^{i_{p'}}).$$

Luego, utilizando la desigualdad de Hölder generalizada obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1} \dots t_{i_{p'}} L_{i_1, \dots, i_{p'}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1} \dots t_{i_{p'}} L_{i_1, \dots, i_{p'}}^{1/p'} \dots L_{i_1, \dots, i_{p'}}^{1/p'} \\ &\leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1}^m L_{i_1, \dots, i_{p'}} \right)^{1/p'} \dots \left(\sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_{p'}}^{p'} L_{i_1, \dots, i_{p'}} \right)^{1/p'} \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^s t_{i_1}^{p'} \cdot \sum_{i_2, \dots, i_{p'}=1}^s L_{i_1, \dots, i_{p'}} \right)^{1/p'} \dots \left(\sum_{i_{p'}=1}^s t_{i_{p'}}^{p'} \cdot \sum_{i_1, \dots, i_{p'-1}=1}^s L_{i_1, \dots, i_{p'}} \right)^{1/p'} \\ &= \sum_{i_1=1}^s t_{i_1}^{p'} \cdot \sum_{i_2, \dots, i_{p'}=1}^s L_{i_1, \dots, i_{p'}}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde en la última igualdad usamos que los p' factores del paso anterior son iguales.

Fijemos i_1 y sea V_{i_1} el k -plano afín que contiene a $\ell_{i_1}^k$. Queremos estimar la cantidad de veces que $L_{i_1, \dots, i_{p'}}$ es no nulo en (3.21). Para esto, alcanza con ver para cuántas tuplas $(i_2, \dots, i_{p'})$, con $i_2, \dots, i_{p'} = 1, \dots, s$ sucede que

$$(V_{i_1})_\delta \cap (V_{i_2})_\delta \cap \dots \cap (V_{i_{p'}})_\delta \neq \emptyset. \tag{3.22}$$

Notemos que si (3.22) se cumple, entonces

$$(V_{i_1})_\delta \cap (V_{i_2})_\delta \neq \emptyset, \dots, (V_{i_1})_\delta \cap (V_{i_{p'}})_\delta \neq \emptyset.$$

Luego, con un razonamiento análogo al de la demostración de Teorema 3.4.4 para estimar (3.18), tenemos que a lo sumo existen

$$C_{n,k}^{p'-1} s^{(p'-1)\left(1-\frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}\right)}$$

tuplas $(i_2, \dots, i_{p'})$ tal que $\ell_{k,\delta}^{i_1} \cap \dots \cap \ell_{k,\delta}^{i_{p'}} \neq \emptyset$. Como $s = |E_{\pi_\omega}| \leq \delta^{-n}$, para cada i_1 tenemos

$$\sum_{i_2, \dots, i_{p'}=1}^s L_{i_1, \dots, i_{p'}} \leq 2^{n+k+1} \delta^{n-k} C_{n,k}^{p'-1} \left(\delta^{-n+\frac{(n-k)(2n-1)}{2n}} \right)^{p'-1}.$$

Si combinamos esta estimación con (3.21) y usamos que $\sum_{i=1}^s t_i^{p'} \leq \delta^{p'k-n}$ obtenemos

$$\begin{aligned} I &\leq C_{k,n}^{p'-1} \left(\delta^{-n+\frac{(n-k)(2n-1)}{2n}} \right)^{p'-1} \sum_{i_1=1}^s t_{i_1}^{p'} \\ &\leq C_{k,n}^{p'-1} \left(\delta^{-n+\frac{(n-k)(2n-1)}{2n}} \right)^{p'-1} \delta^{p'k-n} \\ &\leq C_{n,k}^{p'-1} \delta^{p'(k-n)+(p'-1)\frac{(n-k)(2n-1)}{2n}} \\ &\leq C_{k,n}^{p'-1} \delta^{\frac{(k-n)(p'-1)}{2n}}. \end{aligned}$$

Luego, (3.20) se sigue de inmediato y por lo tanto,

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_{\pi_\omega}))} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{k-n}{2n} \cdot \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(7Q_0)}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(Q_0)}^p &\leq \sum_{\omega=1}^{\binom{n}{k}} \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_{\pi_\omega}))}^p \\ &\leq \sum_{\omega=1}^{\binom{n}{k}} C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_{L^p(7Q_0)}^p \\ &\leq C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_{L^p(7Q_0)}^p, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Notemos que si $p' \rightarrow \infty$, entonces $p = \frac{p'}{p'-1} \rightarrow 1$. En el siguiente corolario extendemos el resultado anterior al caso $p = 1$.

Corolario 3.4.6. Para todo $0 < \delta < 1$, $\rho \in \Gamma$ y $f \in L^1(7Q_0)$,

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^1(Q_0)} \leq C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_{L^1(7Q_0)}. \quad (3.23)$$

Demostración. Sea $f \in L^\infty(7Q_0)$ y $p = \frac{p'}{p'-1}$ con $2 \leq p'$ entero.

Como estamos trabajando sobre un espacio de medida finita, tenemos que $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_1$, cuando $p' \rightarrow \infty$. Del mismo modo, como $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f$ está acotada, obtenemos que $\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_p \rightarrow \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_1$ cuando $p' \rightarrow \infty$. Luego, haciendo tender p' a infinito en (3.19) obtenemos lo pedido. \square

3.5. Estimaciones en L^p para el operador maximal

Teorema 3.5.1. *Dado $0 \leq k < n$, $1 \leq p < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe una constante positiva $C(n, k, p)$ tal que*

$$\|M_\delta^k\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, k, p) \delta^{\frac{k-n}{2np}},$$

para todo $\delta \in (0, 1)$.

Demostración. En lo que sigue $C_{k,n}$ es una constante positiva que depende de k y n y su valor puede cambiar de una línea a la otra.

Si $f \in L^\infty(7Q_0)$, trivialmente tenemos que

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^\infty(Q_0)} \leq \|f\|_{L^\infty(7Q_0)}, \quad (3.24)$$

es decir, $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo fuerte (∞, ∞) .

Por el Corolario 3.4.6 tenemos que $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo fuerte $(1, 1)$, pues

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^1(Q_0)} \leq C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_{L^1(7Q_0)}.$$

Aplicando el Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin (Teorema 1.2.9) con $p_0 = q_0 = 1$, $p_1 = q_1 = \infty$, $M_0 = C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}}$ y $M_1 = 1$ obtenemos que

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(Q_0)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{k-n}{2np}} \|f\|_{L^p(7Q_0)}, \quad (3.25)$$

para todo $1 < p < \infty$.

Notemos que el resultado obtenido en (3.25) es independiente de la función ρ . Luego, por el Lema 3.3.10 tenemos que

$$\|M_\delta^k f\|_{L^p(Q_0)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{k-n}{2np}} \|f\|_{L^p(7Q_0)}. \quad (3.26)$$

Sea $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ y tomemos

$$Q_z = [z_1, z_1 + 1) \times \dots \times [z_n, z_n + 1). \quad (3.27)$$

Observemos que la acotación obtenida en (3.26) es invariante por traslaciones, es decir, continúa siendo válida si reemplazamos Q_0 por Q_z . Esto nos permite extender el resultado a todo \mathbb{R}^n . Más precisamente, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |M_\delta^k f(x)|^p dx &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int \mathbf{1}_{Q_z} |M_\delta^k f(x)|^p dx \\
&\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|M_\delta^k f\|_{L^p(Q_z)}^p \\
&\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_{L^p(7Q_z)}^p \\
&\leq C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{7Q_z} |f(x)|^p dx \\
&= C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}_{7Q_z}(x) \right) |f(x)|^p dx \\
&\leq C' C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,
\end{aligned}$$

donde $C' = \left\| \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}_{7Q_z}(x) \right\|_\infty$ es una constante finita que depende sólo de n .

Luego,

$$\|M_\delta^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, k, p) \delta^{\frac{k-n}{2np}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

En la siguiente proposición probaremos que el resultado obtenido en el teorema anterior es casi sharp.

Proposición 3.5.2. *Dado $0 \leq k < n$, $1 \leq p < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe una constante positiva $C'(n, k, \varepsilon)$ tal que*

$$\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq C'(n, k, \varepsilon) \cdot \delta^{\frac{k-n}{2np} + \varepsilon}.$$

Demostración. Por el Corolario 2.4.2, existe un conjunto compacto B que contiene el k -esqueleto de un n -cubo con centro en cada punto del $[0, 1]^n$ tal que

$$\dim_B(B) = k + \frac{(n-k)(2n-1)}{2n}.$$

Los k -esqueletos contenidos en B pueden tener lados de longitud $2r$ con $r < 1$ o $r > 2$. Como el operador M_δ^k sólo promedia sobre k -esqueletos con lados de longitud $2r$, $1 \leq r \leq 2$, el primer paso será construirnos, a partir de B , un conjunto \tilde{B} que sólo contenga k -esqueletos en estas condiciones.

Sea $h : [0, 1]^n \rightarrow (0, +\infty)$ la función definida como $h(x) = r_x$, donde x es el centro del k -esqueleto $S_k(x, r_x) \subset B$ y definamos los conjuntos de nivel $H_m := h^{-1}(2^m, 2^{m+1}]$, $m \in \mathbb{Z}$. Siguiendo la construcción de B en la demostración del Teorema 2.4.1 se puede ver que h es medible.

Ahora bien, como $[0, 1]^n$ es la unión disjunta de los conjuntos H_m , existe algún m tal que $\mathcal{L}_n(H_m) > 0$. Trabajaremos con este m el resto de la demostración.

Consideremos la función bi-Lipschitz $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $g(x) = 2^{-m}x$. El nuevo conjunto $\tilde{B} := g(B)$ contiene k -esqueletos con centro en cada punto de H_m y lados de longitud $2r$, $1 \leq r \leq 2$. Más aún, por la Proposición 1.1.11 tenemos que $\dim_B(\tilde{B}) = \dim_B(B)$.

Usando la definición de dimensión box dada en la Proposición 1.1.10, obtenemos una estimación para la medida de Lebesgue de \tilde{B}_δ en términos de δ . En efecto,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}(\tilde{B}_\delta)}{\log \delta} = n - \dim_B(\tilde{B}) = \frac{n-k}{2n}.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$

$$-p\varepsilon < \frac{\log \mathcal{L}(\tilde{B}_\delta)}{\log \delta} - \frac{n-k}{2n} < p\varepsilon$$

para todo $\delta \in (0, 1)$ y por lo tanto,

$$\mathcal{L}(\tilde{B}_\delta) < \delta^{\frac{n-k}{2n} - p\varepsilon}. \quad (3.28)$$

Más adelante veremos cómo se puede estimar la medida de este conjunto de manera más precisa y de forma que no dependa de ε .

Sea f la función indicadora de \tilde{B}_δ . Para todo $x \in H_m$, $S(x, r_x) \subset \tilde{B}$ con $1 \leq r_x \leq 2$ y entonces

$$M_\delta^k f(x) \geq \min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(x, r_x)} |f(y)| dy \geq 1.$$

Tomando norma,

$$\|M_\delta^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \mathcal{L}(H_m)^{1/p} \quad (3.29)$$

y luego, por (3.29) y (3.28) obtenemos que

$$\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq \frac{\|M_\delta^k f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}} \geq \frac{\mathcal{L}(H_m)^{1/p}}{\delta^{\frac{n-k}{2np} - \varepsilon}} \geq C'(n, k, \varepsilon) \delta^{\frac{k-n}{2n} + \varepsilon},$$

como queríamos probar. □

Una estimación más precisa de la cota inferior.

Siguiendo la construcción de B hecha en la demostración del Teorema 2.4.1 podemos encontrar una estimación para la medida de Lebesgue de \tilde{B}_δ que no depende de ε .

Sea $A \subset \mathbb{R}$ el conjunto compacto construido en la demostración del Teorema 2.4.6 para $t = 1$. Podemos asumir que $A \subseteq [-a, a]$, para algún $a > 0$. Por el Teorema 2.4.1 podemos tomar $B = \bigcup_{I \in \binom{[n-k]}{k}} \prod_{j=1}^n A_{I,j}$, donde

$$A_{I,j} = \begin{cases} A & \text{si } i \in I \\ [-a, a] & \text{si no.} \end{cases}$$

Notemos que $\prod_{j=1}^n A_{I,j}$ está formado por $(n - k)$ copias de A y k copias del intervalo $[-a, a]$.

Denotaremos por $N_\delta(X)$ al menor número de conjuntos de diámetro a lo sumo δ que cubren X .

En la demostración del Teorema 2.4.6, probamos que el conjunto A satisface las hipótesis de la primera parte del Lema 2.4.5 con $l_i \leq O(i^{2n} - 1)$, $d_i = 2^{2n+1}\beta_i$ y $\delta_i = \frac{\beta_i}{i^{2n}}$, donde $\beta_i = (i - 1)!^{-2n}$ e $i \in \mathbb{N}$. Siguiendo la demostración de este lema 2.4.5, tenemos que

$$N_\delta(A) \leq l_1 \dots l_i \leq C_1^i i!^{2n-1}, \quad (3.30)$$

donde C_1 es una constante positiva (podemos asumir ≥ 1) y δ es elegido de forma que

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} d_j < \delta < \sum_{j=i}^{\infty} d_j.$$

Por (2.8) tenemos que $\sum_{j=i}^{\infty} d_j \leq C d_i$ para todo i y entonces,

$$d_{i+1} \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} d_j < \delta < \sum_{j=i}^{\infty} d_j \leq C d_i.$$

Usando que $d_j = 2^{2n+1}\beta_j = 2^{2n+1}(j - 1)!^{-2n}$ en la desigualdad anterior, nos queda

$$2^{2n+1}(i!)^{-2n} \leq \delta \leq 2^{2n+1}C((i - 1)!)^{-2n}. \quad (3.31)$$

Combinando (3.31) con (3.30) tenemos

$$N_\delta(A) \leq C_2^i i^{2n-1} \delta^{-\frac{2n-1}{2n}}.$$

Probaremos que existe una constante absoluta $C > 0$ tal que

$$N_\delta(A) \leq \delta^{-\frac{2n-1}{2n} - C/\log \log(1/\delta)}.$$

En efecto, si i es suficientemente grande, $i^{2n-1} \leq C_2^{i-1}$ y $C_2^i \leq (2C_2)^{i-1}$. Entonces $i^{2n-1}C_2^i \leq (C_2^{2n-1})^{i-1} := C_3^{i-1}$ y

$$N_\delta(A) \leq C_3^{i-1} \delta^{-\frac{2n-1}{2n}}.$$

Por la fórmula de Stirling, si j es suficientemente grande,

$$j \frac{\log(j)}{2} \leq \log(j!) \leq j \log(j). \quad (3.32)$$

Aplicando (3.32) con $j = i - 1$, y usando que $\log(i - 1)/\log i \rightarrow 1$,

$$\begin{aligned} \log(C_3^{i-1}) &= (i - 1) \log(C_3) =: C_4(i - 1) \leq 2C_4 \frac{\log((i - 1)!)}{\log(i - 1)} \\ &\leq \frac{C_5}{\log i} \log((i - 1)!)^4 \leq \frac{C_5}{\log i} \log(\delta^{-1}) \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$C_3^{i-1} \leq \delta^{-C_5/\log i}.$$

Por (3.31), si δ es suficientemente chico

$$\log(1/\delta) \leq \log(i!^{2n}) \leq 2n \log(i!)$$

y usando nuevamente (3.32),

$$\log(1/\delta) \leq 2n(i \log i).$$

Tomando logaritmo en la desigualdad anterior,

$$\log \log(1/\delta) \leq \log(2n(i \log i)) \leq n \log(i).$$

En conclusión,

$$N_\delta(A) \leq C_3^{i-1} \delta^{-\frac{2n-1}{2n}} \leq \delta^{-\frac{2n-1}{2n} - C_4/\log i} \leq \delta^{-\frac{2n-1}{2n} - C/\log \log(1/\delta)}$$

con $C = 2C_5 > 0$.

Ahora bien, usando la estimación de $N_\delta(A)$, vamos a acotar $N_\delta(B)$. Cada intervalo $[-a, a]$ se cubre con $2a\delta^{-1}$ intervalos de diámetro δ . Para cubrir el conjunto $\prod_{j=1}^n A_{I,j}$ con conjuntos de diámetro δ , alcanza con cubrir los k intervalos $[-a, a]$ y los $n - k$ conjuntos A que lo forman. Luego,

$$N_\delta \left(\prod_{j=1}^n A_{I,j} \right) \leq (2a)^k \delta^{-k} \times \delta^{-(n-k) \left(\frac{2n-1}{2n} + C/\log \log(1/\delta) \right)}.$$

Como $B = \bigcup_{I \in \binom{[n]}{n-k}} \prod_{j=1}^n A_{I,j}$, tenemos que B se puede cubrir con

$$N_\delta(B) \leq C_{n,k} \delta^{-k - (n-k) \frac{2n-1}{2n} - C/\log \log(1/\delta)}$$

conjuntos de diámetro a lo sumo δ . Ahora bien, si tomamos un n -cubo de lado 2δ que contenga a cada uno de estos conjuntos, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B_\delta) &\leq (2\delta)^n N_\delta(B) \leq C_{n,k} \delta^n \delta^{-k - (n-k) \frac{2n-1}{2n} - C/\log \log(1/\delta)} \\ &\leq C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n} - C/\log \log(1/\delta)}. \end{aligned}$$

3.6. Extensión

Cuando definimos el operador maximal asociado a los k -esqueletos de n -cubos en la Sección 3.2 nos restringimos sólo a k -esqueletos con lados de longitud $2r$, $1 \leq r \leq 2$. En esta sección extenderemos los resultados del Teorema 3.5.1 para una versión un poco más general del operador maximal asociado a los k -esqueletos.

Definición 3.6.1. Para $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\mathbf{M}_\delta^k f(x) = \sup_{r: \mathbb{R}^n \rightarrow (\delta, 2]} A_{r,\delta}^k f(x),$$

donde

$$A_{r,\delta}^k f(x) = \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x, r(x)))} \int_{S_{k,\delta}^j(x, r(x))} |f(y)| dy.$$

Probaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.6.2. *Dados $0 \leq k < n$ enteros y $p \in [1, \infty)$, existe una constante positiva $C_{n,k}$ tal que*

$$\|\mathbf{M}_\delta^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{2np}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Comencemos observando qué sucede si, en lugar de considerar $1 \leq r \leq 2$, tomamos $2^t \leq r \leq 2^{t+1}$, con $t \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.6.3. Sean $0 \leq k < n$ enteros dados y $0 < \delta < 1$. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$M_{\delta,t}^k f(x) = \sup_{2^t \leq r \leq 2^{t+1}} \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x, r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy, \quad (3.33)$$

donde $t \in \mathbb{Z}$ está fijo.

Por un argumento de re-escalamiento, podemos ver que el comportamiento del operador definido en (3.33) es esencialmente el mismo que el operador M_δ^k , donde $1 \leq r \leq 2$.

Lema 3.6.4.

$$\|M_{\delta,t}^k\|_{L^p \rightarrow L^p} = 2 \|M_{2^{-t}\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^p}.$$

Demostración. Sea $2^t \leq r \leq 2^{t+1}$, $\tilde{r} = 2^{-t}r$ y $S_{k,\delta}(x, r)$ el k -esqueleto de un n -cubo con centro en x y lados de longitud $2r$.

Haciendo un cambio de variables obtenemos

$$\int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy = \int_{S_{k,2^{-t}\delta}^j(2^{-t}x, \tilde{r})} |f(2^t y)| 2^{tn} dy,$$

donde $S_{k,2^{-t}\delta}(2^{-t}x, \tilde{r})$ es un $(2^{-t}\delta)$ -entorno de un k -esqueleto con centro en $2^{-t}x$ y lados de longitud $2\tilde{r}$, $1 \leq \tilde{r} \leq 2$.

Usando 3.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{S_{k,\delta}^j(x, r)} |f(y)| dy &= \frac{\mathcal{L}(S_{k,2^{-t}\delta}^j(2^{-t}x, \tilde{r}))}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x, r))} \int_{S_{k,2^{-t}\delta}^j(2^{-t}x, \tilde{r})} |f(2^t y)| 2^{tn} dy \\ &= 2 \int_{S_{k,2^{-t}\delta}^j(2^{-t}x, \tilde{r})} |f(2^t y)| dy. \end{aligned}$$

Si $g(\cdot) = f(2^t \cdot)$, de la igualdad anterior se sigue que

$$M_{\delta,t}^k f(x) = 2M_{2^{-t}\delta}^k g(2^{-t}x), \quad (3.34)$$

donde el operador de la derecha no es más que el operador definido en (3.6) con $2^{-t}\delta$ en lugar de δ .

Observemos que si $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $\|h(ax)\|_p = a^{-n/p} \|h(x)\|_p$, $a \in \mathbb{R}$.

Tomando norma en (3.34) y usando la observación anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\|M_{\delta,t}^k f\|_p}{\|f\|_p} &= 2^{1+tn/p} \frac{\|M_{2^{-t}\delta}^k g\|_p}{\|f\|_p} \\ &= 2^{1+tn/p} \frac{\|M_{2^{-t}\delta}^k g\|_p}{2^{tn/p} \|g\|_p} \\ &= 2 \frac{\|M_{2^{-t}\delta}^k g\|_p}{\|g\|_p}. \end{aligned}$$

Finalmente, por (3.8)

$$\|M_{\delta,t}^k\|_{L^p \rightarrow L^p} = 2 \|M_{2^{-t}\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^p},$$

como queríamos probar. \square

Observación 3.6.5. Combinando la cota inferior obtenida en el Teorema 3.5.1 junto con el Lema 3.6.4 tenemos que,

$$\begin{aligned} C'(n, k, \varepsilon)(2^{-t}\delta)^{\frac{k-n}{2np} + \varepsilon} &\leq 2 \|M_{2^{-t}\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^p} \\ &= \|M_{\delta,t}^k\|_{L^p \rightarrow L^p}. \end{aligned}$$

Ahora bien, consideremos el operador definido en (3.5),

$$\mathbf{M}_{\delta}^k f(x) = \sup_{r>0} \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x,r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x,r)} |f(y)| dy.$$

Para cualquier $t \in \mathbb{Z}$ y $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ vale que $\mathbf{M}_{\delta}^k f(x) \geq M_{\delta,t}^k f(x)$. Tomando normas y usando la desigualdad anterior, tenemos que

$$\|\mathbf{M}_{\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq C'(n, k, \varepsilon)(2^{-t}\delta)^{\frac{k-n}{2np} + \varepsilon}$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$. Entonces, si permitimos k -esqueletos con lados arbitrariamente grandes, es decir, $2^t \leq r \leq 2^{t+1}$ con t arbitrariamente grande, la expresión de la derecha es tan grande como se quiera y por lo tanto \mathbf{M}_{δ}^k no puede estar acotado.

Por otro lado, si permitimos lados más chicos que δ , $S_{k,\delta}(x,r)$ resulta ser un n -cubo con centro en x y lado de longitud $\approx \delta$. En este caso el operador \mathbf{M}_{δ}^k estaría promediando sobre todo un cubo, similar al operador maximal de Hardy-Littlewood clásico. Por estas razones, en la Definición 3.6.1 consideraremos solamente n -cubos con lados $2r$, $\delta < r \leq 2$.

Demostración del Teorema 3.6.2. Fijemos una función $r : \mathbb{R}^n \rightarrow (\delta, 2]$ y consideremos los conjuntos de nivel

$$\Omega_t := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^t \leq r(x) < 2^{t+1}\}.$$

Si \log es el logaritmo en base 2, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (A_{r,\delta}^k f(x))^p dx &= \sum_{t=\lfloor \log(\delta) \rfloor}^0 \int_{\Omega_t} (A_{r,\delta}^k f(x))^p dx \\ &\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\delta,t}^k f(x))^p dx \\ &\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 \|M_{2^{-t}\delta}^k f\|_p^p \\ &\leq C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_p^p \sum_{t=-\infty}^0 2^{t\frac{n-k}{2n}} \\ &= C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier función r , obtenemos lo que queríamos. \square

3.7. Aplicación

El siguiente corolario del Teorema 3.6.2 recupera parcialmente el resultado del Teorema 2.3.1, ítem (b) para el caso en que $\dim_{\mathbb{B}}(S) = n$.

Corolario 3.7.1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos acotados tales que $\dim_{\mathbb{B}}(A) = n$ y B contiene el k -esqueleto de un n -cubo con centro en cada punto de A , entonces

$$\underline{\dim}_{\mathbb{B}}(B) \geq n - \frac{1}{2} + \frac{k}{2n}.$$

Demostración. Como B es acotado, re-escalando podemos asumir que todos los n -cubos tienen lados de longitud $2r$, con $r \leq 2$. Fijemos $\delta > 0$. Notemos que para cada $x \in A_\delta$ existe un $r \in (\delta, 2]$ tal que $S_{k,\delta}(x, r) \subset B_{2\delta}$. Si tomamos $f = \mathbf{1}_{B_{2\delta}}$ entonces,

$$\mathbf{M}_\delta^k \mathbf{1}_{B_{2\delta}}(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in A_\delta.$$

Luego, aplicando el Teorema 3.6.2 con $p = 1$,

$$\mathcal{L}(A_\delta) \leq \|\mathbf{M}_\delta^k \mathbf{1}_{B_{2\delta}}\| \leq C_{n,k} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \mathcal{L}(B_{2\delta}).$$

Ahora bien, como $\delta < 1$,

$$\frac{\log \mathcal{L}(A_\delta)}{\log \delta} \geq \frac{\log \mathcal{L}(B_{2\delta})}{\log \delta} + \frac{\log C_{n,k}}{\log \delta} + \frac{k-n}{2n}.$$

Tomando límite superior cuando $\delta \rightarrow 0$ y usando la definición de dimensión box dada en la Proposición 1.1.10 tenemos que

$$n - \underline{\dim}_B(A) \geq \frac{k-n}{2n} + n - \underline{\dim}_B(A).$$

Luego, como $\underline{\dim}_B(A) = n$, se obtiene que $\underline{\dim}_B(B) \geq n + \frac{k-n}{2n}$, como queríamos probar. \square

CAPÍTULO 4

Estimaciones de L^p en L^q

En este capítulo daremos acotaciones de L^p en L^q , $1 < p \leq q \leq \infty$, para el operador maximal asociado a los k -esqueletos definido en el [Capítulo 3](#).

Por el Teorema [3.5.1](#), sabemos que el operador M_δ^k está acotado en L^p , $p \geq 1$, y por estimaciones triviales está acotado en L^∞ y también de L^1 en L^∞ . Usando directamente interpolación podemos probar que dicho operador está acotado de L^p en L^q con $1 < p \leq q$, pero las cotas que se obtienen no son buenas.

En [[KW99](#)], Kolasa y Wolff dan acotaciones de L^p en L^q para el operador $R_\delta f : [1/2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$R_\delta f(r) = \sup_x \frac{1}{\mathcal{L}(C_\delta(x, r))} \int_{C_\delta(x, r)} |f(y)| dy,$$

para toda $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $C_\delta(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : r - \delta \leq d(y, x) \leq r + \delta\}$, donde d es la distancia euclídea. Para tratar este operador utilizan un argumento combinatorio y definen la noción de *multiplicidad* μ para una familia de anillos en \mathbb{R}^2 . Ciertas estimaciones para μ permiten obtener estimaciones de L^p en L^q para el operador R_δ . Como consecuencia de estos resultados, probaron que si un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ contiene una esfera para cada radio, entonces $\dim_H(E) = n$ si $n \geq 3$ y $\dim_H(E) \geq 11/6$ si $n = 2$.

En [[Sch96](#)], Schlag aplica estas ideas en lo que denomina el método combinatorio y obtiene acotaciones de L^p en L^q para el operador maximal circular restringido definido como

$$\overline{\mathcal{M}}_{\text{esf}} f(x) = \sup_{1 < r < 2} \int_{S^1} |f(x - ry)| d\sigma(y).$$

Siguiendo estas ideas, encontramos acotaciones de tipo débil para el operador maximal lineal asociado $M_{\rho, \delta}^k$ y luego, encontramos acotaciones de L^p en L^q para el operador M_δ^k .

El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera: en la [Sección 4.1](#) introducimos una versión generalizada del método combinatorio que se aplica a objetos más generales que anillos en \mathbb{R}^2 y permite encontrar acotaciones de tipo débil para ciertos operadores maximales. Aplicando este método al caso particular de los k -esqueletos, en la [Sección 4.2](#) obtenemos una estimación de tipo débil $(1, q)$, $q > 1$, para el operador $\widetilde{M}_{\rho, \delta}^k$.

En la [Sección 4.3](#) mostramos las estimaciones encontradas de L^p en L^q , $1 < p \leq q$, para el operador maximal asociado a los k -esqueletos y además, probamos que dicho operador no está acotado si $p > q$. Por último, en la [Sección 4.4](#) damos resultados para el caso en que el operador maximal que consideramos no tiene restricción sobre la longitud de los lados de los k -esqueletos.

4.1. El método combinatorio

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto boreliano e I un conjunto de índices. Para cada $x \in \Omega$ consideremos $\mathcal{H}_x = \{H_{x,r}\}_{r \in I}$ una familia de conjuntos con medida de Lebesgue finita y positiva en \mathbb{R}^n . Pedimos además que $\inf_x (\inf_{r \in I} \mathcal{L}(H_{x,r})) \geq \delta^\tau$ para algún $\tau \in \mathbb{R}$ y $0 < \delta < 1$. Intuitivamente podemos pensar que $H_{x,r}$ son conjuntos definidos a escala δ y que todos tienen medida de Lebesgue de orden δ^τ . Por ejemplo, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $I = [1, 2]$ y $\mathcal{H}_x = \{C_\delta(x, r)\}_{r \in I}$, con $C_\delta(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : r - \delta < d(x, y) < r + \delta\}$.

Supongamos que existe una constante $C > 0$, independiente de x , tal que

$$\text{diám} \left(\{x\} \cup \bigcup_{r \in I} H_{x,r} \right) \leq C. \quad (4.1)$$

Es decir, para cada x , pedimos que todos los conjuntos $H_{x,r}$ estén contenidos en la bola euclídea n -dimensional de centro x y radio C .

Consideremos el operador maximal $Tf : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$Tf(x) = \sup_{r \in I} \frac{1}{\mathcal{L}(H_{x,r})} \int_{H_{x,r}} |f(y)| dy, \quad (4.2)$$

para toda $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Fijemos $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, $0 < \lambda \leq 1$ y consideremos el conjunto

$$\begin{aligned} F &:= \{x \in \Omega : T\mathbf{1}_E(x) > \lambda\} \\ &= \{x \in \Omega : (\exists r \in I) \mathcal{L}(H_{x,r} \cap E) \geq \lambda \mathcal{L}(H_{x,r})\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por la condición (4.1), el conjunto F resulta acotado.

Sea $\{x_j\}_{j=1}^m$ un conjunto δ -separado maximal en F y tomemos $r_j \in I$ de forma que

$$\mathcal{L}(H_{x_j, r_j} \cap E) > \lambda \mathcal{L}(H_{x_j, r_j}) \quad (4.4)$$

para todo $j = 1, \dots, m$. En lo que sigue escribiremos H_j en lugar de H_{x_j, r_j} y H_j^* en vez de $H_{x_j, r_j} \cap E$.

Consideremos la función de multiplicidad Υ definida por

$$\Upsilon(x) = \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{H_j^*}(x).$$

Siguiendo las ideas planteadas en [Sch96, KW99], definimos la noción de *multiplicidad* μ como el menor entero para el cual existen al menos $m/2$ valores de j tales que

$$\mathcal{L}\{x \in H_j^* : \Upsilon(x) \leq \mu\} \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}(H_j).$$

De manera análoga, podemos encontrar al menos $m/2$ valores de j para los cuales

$$\mathcal{L}\{x \in H_j^* : \Upsilon(x) \geq \mu\} \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}(H_j).$$

El objetivo es encontrar cotas superiores para μ en términos de m , λ y δ .

Notemos que

$$\mu \mathcal{L}(E) \geq \int_{\{x \in E : \Upsilon(x) \leq \mu\}} \Upsilon dx = \sum_j \mathcal{L}\{x \in H_j^* : \Upsilon(x) \leq \mu\} \geq \frac{\lambda}{2} m \delta^\tau. \quad (4.5)$$

El siguiente lema caracteriza las estimaciones sobre μ requeridas para obtener estimaciones de tipo débil (p, q) para el operador T definido en (4.2).

Lema 4.1.1. *Sea $\alpha \geq 0$ y $0 < \beta < 1$. Supongamos que para toda elección de un conjunto acotado E , $0 < \lambda \leq 1$ y $\delta > 0$, tenemos que $\mu \leq K\lambda^{-\alpha}m^\beta$. Entonces, T es un operador de tipo débil restringido (p, q) con constante $CK^{1/p}\delta^{-\gamma}$, donde $p = \alpha + 1$, $q = p(1 - \beta)^{-1}$, $\gamma = \frac{\tau}{p} - \frac{n}{q}$ y $C = C(n, q)$ es una constante positiva.*

Demostración. Por la Definición 1.2.12 queremos ver que

$$\mathcal{L}\{x \in \Omega : (T\mathbf{1}_E)(x) > \lambda\}^{1/q} \leq CK^{1/p}\delta^{-\gamma}\lambda^{-1}\mathcal{L}(E)^{1/p}, \quad (4.6)$$

para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ de medida finita y $0 < \lambda \leq 1$.

Primero supongamos que E es acotado. Sea $\{x_j\}_{j=1}^m$ un conjunto δ -separado maximal para el conjunto E definido en (4.3), entonces

$$\mathcal{L}\{x \in \Omega : (T\mathbf{1}_E)(x) > \lambda\} \leq c_n m \delta^n,$$

donde c_n denota la medida de la bola euclídea n -dimensional de radio 1.

Usando la cota inferior para la medida de Lebesgue de E dada en (4.5) y la hipótesis sobre μ obtenemos

$$\begin{aligned} K^{1/p}\delta^{-\gamma}\lambda^{-1}\mathcal{L}(E)^{1/p} &\geq K^{1/p}\delta^{-\gamma}\lambda^{-1}(K^{-1}(\lambda/2)^{1+\alpha}m^{1-\beta}\delta^\tau)^{1/p} \\ &= \frac{1}{2}\delta^{-\gamma+\tau/p}m^{\frac{1-\beta}{p}} \\ &= \frac{1}{2}(m\delta^n)^{1/q}. \end{aligned}$$

Luego, tomando $C = 2c_n^{1/q}$, (4.6) vale para todo conjunto acotado E de medida finita.

Ahora supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ no es acotado. Sean Q_z , $z \in \mathbb{Z}$, los n -cubos de lado 1 con vértice inferior izquierdo z . Escribamos $E = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} E_z$, donde $E_z = E \cap Q_z$.

Sea $x \in \Omega$ tal que $T\mathbf{1}_E(x) > \lambda$. Existe $r > 0$ tal que

$$\lambda < \frac{\mathcal{L}(E \cap H_{x,r})}{\mathcal{L}(H_{x,r})} = \frac{\mathcal{L}(\bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (E_z \cap H_{x,r}))}{\mathcal{L}(H_{x,r})} \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}} \frac{\mathcal{L}(E_z \cap H_{x,r})}{\mathcal{L}(H_{x,r})}.$$

Por la condición (4.1), sólo hay una cantidad finita de valores de z para los cuales $\mathcal{L}(E_z \cap H_{x,r}) > 0$. Si denotamos esta cantidad por c_x , podemos elegir $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{\mathcal{L}(E_z \cap H_{x,r})}{\mathcal{L}(H_{x,r})} > \frac{\lambda}{c_x}.$$

Tomando $c = \sup_{x \in \Omega} c_x$ y $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$, podemos concluir que

$$\{x \in \Omega : T\mathbf{1}_E(x) > \lambda\} \subseteq \bigcup_z \{x \in \Omega : T\mathbf{1}_{E_z}(x) > \tilde{\lambda}\}.$$

Finalmente, usando que (4.6) vale sobre cada conjunto E_z , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x \in \Omega : T\mathbf{1}_E(x) > \lambda\} &\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}\{x \in \Omega : T\mathbf{1}_{E_z}(x) > \tilde{\lambda}\} \\ &\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}} (CK^{\frac{1}{p}} \delta^{-\gamma} \tilde{\lambda}^{-1})^q \mathcal{L}(E_z)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq (CK^{\frac{1}{p}} \delta^{-\gamma} \tilde{\lambda}^{-1})^q \sum_{z \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(E_z)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq (CK^{\frac{1}{p}} \delta^{-\gamma} \tilde{\lambda}^{-1})^q \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(E_z) \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq (CK^{\frac{1}{p}} \delta^{-\gamma} \lambda^{-1})^q \mathcal{L}(E)^{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

y entonces T resulta ser de tipo débil restringido (p, q) como queríamos probar. \square

4.2. El método combinatorio para los k - esqueletos

En esta sección aplicamos el método combinatorio para el caso particular de los k -esqueletos y el operador lineal $\tilde{M}_{\rho, \delta}^k$. Si bien es un caso particular de lo visto en la sección anterior, por completitud incluiremos todos los cálculos.

Primero vamos a recordar un par de definiciones que hemos dado en la [Sección 3.3](#).

- $Q_0 = [0, 1]^n$ y $Q_0^* = \{x_1, \dots, x_u\}$, con $u = \delta^{-n}$, denota los centros de los n -cubos semi-abiertos de lado δ , $Q_0(1), \dots, Q_0(u)$, generados por la grilla $Q_0 \cap \delta\mathbb{Z}^n$.

- Para cada función $\rho : Q_0^* \rightarrow [1, 2] \cap \delta\mathbb{Z}$, definimos $S_{k,i} = S_k(x_i, \rho(x_i))$, $i = 1, \dots, u$ la familia de k -esqueletos con centros en Q_0^* asociada a ρ .
- $\Phi_\rho(S_k(x_i, \rho(x_i))) = \ell_k^i$ elige una k -cara de cada uno de los k -esqueletos.
- Para cada k -plano coordenado π_ω (ver Definición 3.4.1) definimos los conjuntos

$$E_{\pi_\omega} := \{x_i \in Q_0^* : \ell_k^i \text{ es paralela a } \pi_\omega\},$$

$$\text{con } 1 \leq \omega \leq \binom{n}{k}.$$

- La función $\psi(x) : Q_0 \rightarrow Q_0^*$, $x \rightarrow x^*$ le asigna a cada punto de Q_0 el centro del n -cubo semi-abierto a la derecha con vértices en $Q_0 \cap \delta\mathbb{Z}^n$ y lados de longitud δ que contiene a x .
- Los conjuntos $\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})$, $i = 1, \dots, u$ forman una partición de Borel de Q_0 .

Recordemos que la función maximal asociada a (ρ, k) de ancho δ se define como

$$\tilde{M}_{\rho,\delta}^k f : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x) = \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{x,\delta})} \int_{\ell_{x,\delta}} f(y) dy,$$

donde $\ell_{x,\delta}$ es un δ -entorno de $\ell_x := \Phi_\rho(S_k(x^*, \rho(x^*)))$.

Como vimos en la observación 3.3.9, esta función maximal queda completamente determinada por los valores que toma sobre el conjunto $Q_0^* = \{x_1, \dots, x_u\}$ y además, basta considerar funciones f soportadas en $7Q_0$.

En la Sección 3.4, para acotar $\tilde{M}_{\rho,\delta}^k$, fue necesario definir los conjuntos E_{π_ω} y separar los elementos de Q_0^* de acuerdo a la disposición que tienen $\{\ell_k^i, \dots, \ell_k^u\}$ en el espacio. En la demostración del Teorema 3.4.4 fue crucial hacer esta distinción y trabajar con k -caras paralelas a un mismo k -plano coordenado π_ω para poder aplicar el Lema 3.3.5.

En este caso, necesitamos hacer algo similar. Esta es la razón por la cual aquí también trabajaremos con los conjuntos $\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})$, en lugar de tomar directamente Q_0 .

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, $0 < \lambda \leq 1$ y $1 \leq \omega \leq \binom{n}{k}$. Definimos el conjunto

$$\begin{aligned} F_\omega &:= \{x \in \psi^{-1}(E_{\pi_\omega}) : \tilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E(x) > \lambda\} \\ &= \{x \in \psi^{-1}(E_{\pi_\omega}) : \mathcal{L}(E \cap \ell_{x,\delta}) > \lambda \mathcal{L}(\ell_{x,\delta})\}. \end{aligned}$$

Alcanza considerar sólo aquellos conjuntos E para los cuales $E \cap 7Q_0 \neq \emptyset$, pues en caso contrario $F_\omega = \emptyset$.

Siguiendo la construcción hecha en la sección anterior, el siguiente paso es tomar un conjunto δ -separado maximal en F_ω y la familia de conjuntos asociados que satisface la condición (4.4).

Notemos que $Q_0^* \cap F_\omega = \{x_j\}_{j=1}^{m_\omega}$ es un conjunto δ -separado maximal en F_ω con cardinal m_ω y para cada x_j tenemos que

$$\mathcal{L}(E \cap \ell_{k,\delta}^j) > \lambda \mathcal{L}(\ell_{k,\delta}^j). \quad (4.7)$$

En lo que sigue, escribiremos $(\ell_\delta^j)^*$ en lugar de $E \cap \ell_{k,\delta}^j$ y ℓ_δ^j en lugar de $\ell_{k,\delta}^j$.

Si tomamos cualquier otro conjunto δ -separado maximal en F_ω , por como está definido el operador $\tilde{M}_{\rho,\delta}^k$, la familia de conjuntos asociada que cumple la condición (4.7) es la misma que si consideramos el conjunto $\{x_j\}_{j=1}^{m_\omega}$.

Definimos la función de multiplicidad asociada a F_ω como

$$\Upsilon_\omega = \sum_{j=1}^{m_\omega} \mathbf{1}_{(\ell_\delta^j)^*}.$$

Siguiendo las ideas de la sección anterior, definimos μ como el menor entero para el cual existen al menos $m_\omega/2$ valores de j tales que

$$\mathcal{L}\{x \in (\ell_\delta^j)^* : \Upsilon_\omega(x) \leq \mu\} \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}(\ell_\delta^j). \quad (4.8)$$

Por (3.1) tenemos que $\mathcal{L}(\ell_\delta^j) \geq 2^n r^k \delta^{n-k}$ y usando (4.5) obtenemos una cota inferior para la medida de Lebesgue de E :

$$\mu \mathcal{L}(E) \geq 2^{n-1} \lambda m_\omega \delta^{n-k}. \quad (4.9)$$

Observación 4.2.1. Si $x \in E$, como $(\ell_\delta^j)^* \subseteq \ell_\delta^j$, tenemos que

$$\Upsilon_\omega(x) = \sum_{j=1}^{m_\omega} \mathbf{1}_{(\ell_\delta^j)^*}(x) \leq \sum_{j=1}^{m_\omega} \mathbf{1}_{\ell_\delta^j}(x).$$

Recordemos que las caras $\{\ell^1, \dots, \ell^{m_\omega}\}$ fueron seleccionadas de una familia de k -esqueletos de acuerdo al Lema 3.3.5 y todas pertenecen a k -planos afines paralelos a π_ω .

Fijemos j_0 y sea $x \in \ell_\delta^{j_0}$. Usando el Lema 3.3.5 podemos estimar a cuántas otras caras ℓ_δ^j pertenece x . Más específicamente, obtenemos que

$$\Upsilon_\omega(x) \leq C_{k,n} m_\omega^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}},$$

para todo $x \in \ell_\delta^{j_0}$.

Luego, como esto es independiente del j_0 elegido, para todo $j = 1, \dots, \omega$ vale que

$$\mathcal{L}\left\{x \in (\ell_\delta^j)^* : \Upsilon_\omega(x) \leq C_{k,n} m_\omega^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}}\right\} = \mathcal{L}((\ell_\delta^j)^*) = \mathcal{L}(E \cap \ell_\delta^j) \geq \lambda \mathcal{L}(\ell_\delta^j),$$

donde en la última desigualdad usamos (4.7).

Ahora bien, por la definición de μ dada en (4.8) obtenemos que

$$\mu \leq C_{k,n} m_\omega^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}}. \quad (4.10)$$

En el siguiente lema aplicamos el método combinatorio y obtenemos estimaciones de tipo débil para el operador $M_{\rho,\delta}^k$.

Lema 4.2.2. *Para todo $1 < q < \infty$ existe una constante positiva $C(k, n)$ tal que*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k\|_{q,\infty} &\leq C(k, n) \delta^{\frac{k-n}{2n}} \|f\|_1 && \text{si } 1 < q \leq q^* \\ \|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k\|_{q,\infty} &\leq C(k, n) \delta^{\frac{n}{q}+k-n} \|f\|_1 && \text{si } q^* < q < \infty, \end{aligned}$$

para toda $f \in L^1(7Q_0)$ y $q^* = \frac{2n^2}{(n-k)(2n-1)}$.

Demostración. Consideremos el operador restringido $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k : \psi^{-1}(E_{\pi_\omega}) \rightarrow \mathbb{R}$, para algún $1 \leq \omega \leq \binom{n}{k}$. Notemos que la cota superior para μ dada en (4.10) vale para cualquier elección de E , λ y $\delta > 0$.

Aplicando el Lema 4.1.1 con $\alpha = 0$, $\beta = 1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}$, $K = C_{k,n}$ y $\tau = n - k$ obtenemos

$$\mathcal{L}\{x \in \psi^{-1}(E_{\pi_\omega}) : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E(x) > \lambda\}^{1/q^*} \leq C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \lambda^{-1} \mathcal{L}(E), \quad (4.11)$$

para todo $E \subset 7Q_0$ y $q^* = \frac{2n^2}{(n-k)(2n-1)}$. Es decir, $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo débil restringido $(1, q^*)$ sobre el conjunto $\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})$.

Como los conjuntos $\psi^{-1}(E_{\pi_\omega})$, $\omega = 1, \dots, \binom{n}{k}$, forman una partición de Borel para Q_0 , por (4.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x \in Q_0 : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E(x) > \lambda\} &\leq \sum_{\omega=1}^{\binom{n}{k}} \mathcal{L}\{x \in \psi^{-1}(E_{\pi_\omega}) : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E(x) > \lambda\} \\ &\leq \binom{n}{k} (C_{k,n} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \lambda^{-1} \mathcal{L}(E))^{q^*} \end{aligned}$$

y entonces

$$\mathcal{L}\{x \in Q_0 : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E(x) > \lambda\}^{1/q^*} \leq C(k, n) \delta^{\frac{k-n}{2n}} \lambda^{-1} \mathcal{L}(E)$$

para todo $E \subset 7Q_0$. Luego, $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo débil restringido $(1, q^*)$, con $q^* = \frac{2n^2}{2n^2 - n + k}$.

Por otro lado, si $1 < q < q^*$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x \in Q_0 : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E > \lambda\}^{1/q} &\leq \mathcal{L}\{x \in Q_0 : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E > \lambda\}^{1/q^*} \\ &\leq C(k, n) \lambda^{-1} \delta^{\frac{k-n}{2n}} \mathcal{L}(E) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo débil restringido $(1, q)$.

Si $q > q^*$, tomemos $v > 0$ de forma que $\frac{1}{q} = \frac{1}{q^*} - v$. Trivialmente en (4.10) tenemos

$$\mu \leq C_{k,n} m_\omega^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2}} \leq C_{k,n} m_\omega^{1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2} + v}.$$

Usando nuevamente el Lema 4.1.1 con $\beta = 1 - \frac{(n-k)(2n-1)}{2n^2} + v$, $\alpha = 0$ y $K = C_{k,n}$, nos queda

$$\mathcal{L}\{x \in \psi^{-1}(E_{\pi_w}) : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E(x) > \lambda\}^{1/q} \leq C_{k,n} \delta^{\frac{n}{q} - (n-k)} \lambda^{-1} \mathcal{L}(E).$$

Como $\{\psi^{-1}(E_{\pi_w})\}_\omega$ es partición de Borel de Q_0 , tenemos que

$$\mathcal{L}\{x \in Q_0 : \widetilde{M}_{\rho,\delta}^k \mathbf{1}_E(x) > \lambda\}^{1/q} \leq C(k,n) \delta^{\frac{n}{q} + k - n} \lambda^{-1} \mathcal{L}(E)$$

y entonces, $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo débil restringido $(1, q)$, $q > q^*$.

Finalmente, usando la demostración de la Proposición 1.2.13, tenemos que $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo débil $(1, q)$ para todo $q > 1$, como queríamos probar. \square

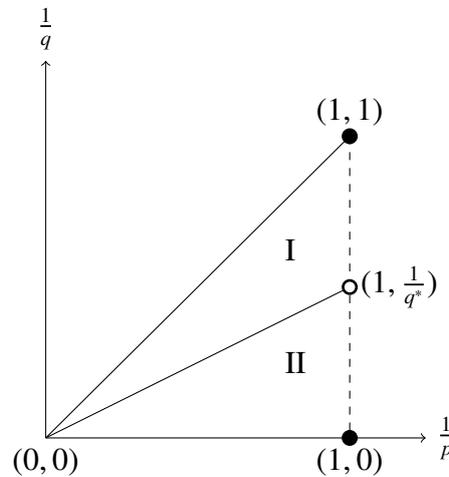
4.3. Estimaciones de L^p en L^q

En esta sección mostramos las acotaciones de L^p en L^q encontradas para el operador maximal asociado a los k -esqueletos. Para esto usaremos los resultados de la sección anterior y técnicas de interpolación.

Teorema 4.3.1. Sean $1 < p \leq q \leq \infty$, $\varepsilon > 0$ y $q^* = \frac{2n^2}{(n-k)(2n-1)}$. Para todo $\delta \in (0, 1)$ vale que

$$\begin{aligned} C'_1 \delta^{\frac{k-n}{2np} + \varepsilon} &\leq \|M_\delta^k\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \delta^{\frac{k-n}{2np}} && \text{si } q \leq q^* p \text{ (región I)} \\ C'_2 \delta^{\frac{n}{q} - \frac{n-k}{p}} &\leq \|M_\delta^k\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \delta^{\frac{n}{q} - \frac{n-k}{p}} && \text{si } q^* p < q \text{ (región II)} \end{aligned}$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas que dependen de k, n, p, q , $C'_1 = C'_1(k, n, p, q, \varepsilon)$ y $C'_2 = C'_2(k, n)$.



Regiones del Teorema 4.3.1

Demostración. Sean $1 < q_0 \leq q^*$. Por el Lema 4.2.2, $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo débil $(1, 1/q_0)$ con constante $C(k, n)\delta^{\frac{k-n}{2n}}$ y trivialmente se tiene que

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz (ver Teorema 1.2.10) con $p_0 = 1$, q_0 y $p_1 = q_1 = \infty$, para todo $0 < \theta < 1$ tenemos que

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^q} \leq C_I(k, n, q_0, p) \delta^{\frac{k-n}{2np}} \|f\|_{L^p},$$

para toda $f \in L^p(7Q_0)$, donde

$$\frac{1}{p} = 1 - \theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = \frac{1 - \theta}{q_0}. \quad (4.12)$$

Como esto vale para todo $1 < q_0 \leq q^*$, tenemos que

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^q(Q_0)} \leq C_I \delta^{\frac{k-n}{2np}}, \quad (4.13)$$

para cada par $(1/p, 1/q)$ dentro de la región I. Por la demostración del Teorema 1.2.10, la constante C_I tiende a infinito cuando $p \rightarrow 1$.

Si $q_0 > q^*$, por el Lema 4.2.2, $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ es de tipo débil $(1, 1/q_0)$ con constante $C(k, n)\delta^{\frac{n}{q} - (n-k)}$. Usando nuevamente interpolación con $p_0 = 1$, q_1 y $p_1 = q_1 = \infty$, para todo $0 < \theta < 1$, obtenemos

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^q} \leq C_{II}(k, n, q_0, p) \delta^{\frac{n}{q} + \frac{k-n}{p}} \|f\|_{L^p},$$

para toda $f \in L^p(7Q_0)$ y donde $(1/p, 1/q)$ satisfacen las ecuaciones (4.12). Luego, para todo par $(1/p, 1/q)$ dentro de la región II tenemos que

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^q(Q_0)} \leq C_{II} \delta^{\frac{k-n}{2np}}. \quad (4.14)$$

La constante C_{II} tiende a infinito cuando $p \rightarrow 1$.

Ahora bien, por (4.13), (4.14) y el Lema 3.3.10 obtenemos

$$\begin{aligned} \|M_{\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^q(Q_0)} &\leq C_1 \delta^{\frac{k-n}{2np}} && \text{si } q \leq q^* p \\ \|M_{\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^q(Q_0)} &\leq C_2 \delta^{\frac{n}{q} - \frac{n-k}{p}} && \text{si } q > q^* p. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Notemos que ambas estimaciones son invariantes por traslaciones, es decir, lo mismo vale si reemplazamos Q_0 por $Q_z = [z_1, z_1 + 1) \times \dots \times [z_n, z_n + 1)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Luego, de manera análoga a lo que hicimos para demostrar el Teorema 3.5.1, podemos extender la estimaciones obtenidas en (4.15) a todo el espacio \mathbb{R}^n y así obtener las cotas superiores buscadas.

Para terminar la demostración sólo resta probar las cotas inferiores. El caso $q \leq q^* p$, se obtiene igual que el caso diagonal usando la Proposición 3.5.2.

Para el caso $q > q^*p$ consideremos $f = \mathbf{1}_{B_{6\delta}}$, donde B es el k -esqueleto de un n -cubo con centro en algún punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y lados de longitud $2r_0$, $1 \leq r_0 \leq 2$. Si x pertenece a un δ -entorno de x_0 , $S_{k,\delta}(x, r_0) \subseteq B_{6\delta}$ y entonces, $M_\delta f(x) \geq 1$. Como $\mathcal{L}(B_{6\delta}) \leq c_{n,k}\delta^{n-k}$ tenemos que

$$\frac{\|M_\delta^k f\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} \geq c_{n,k}\delta^{\frac{n-k}{q} - \frac{n-k}{p}}$$

y por lo tanto, $\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^q} \geq C'_2 \delta^{\frac{n-k}{q} - \frac{n-k}{p}}$.

□

Observación 4.3.2. Si $p > q$ un ejemplo sencillo muestra que M_δ^k no puede estar acotado. Sea $1 \ll N \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $f = \mathbf{1}_{B_N}$, donde B es el n -cubo centrado en x_0 con lados de longitud N y tomemos B_{N-6} , el n -cubo con centro x_0 y lados de longitud $N-6$.

Si $x \in B_{N-6}$ entonces $S_{k,\delta}(x, r) \subset B_N$ para todo $1 \leq r \leq 2$ y por lo tanto, $M_\delta^k f(x) \geq 1$. Luego,

$$\frac{\|M_\delta^k f\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} \geq (N-6)^{n/q} N^{-n/p}$$

y entonces $\|M_\delta^k\|_{L^p \rightarrow L^q}$ crece con N .

4.4. Extensión

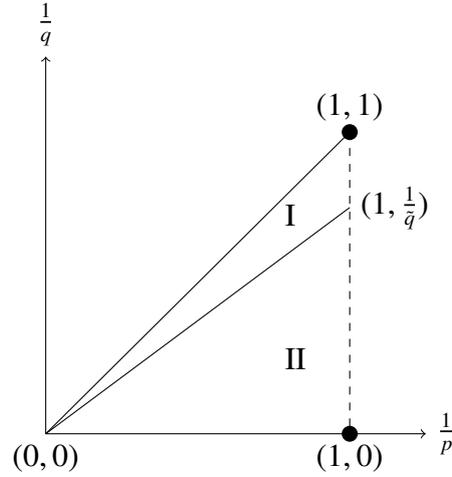
En esta sección probaremos un resultado análogo al Teorema 3.6.2, pero para el caso $p \neq q$. Más precisamente, probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Si $1 < p \leq q < \infty$ vale que*

$$\begin{aligned} \|M_\delta^k f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq C \delta^{\frac{k-n}{2n^p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & \text{si } q \leq \tilde{q}p \\ \|M_\delta^k f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq C' \delta^{-n(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & \text{si } \tilde{q}p < q, \end{aligned}$$

donde $\tilde{q} = \frac{2n^2}{2n^2 - n + k}$ y C, C' son constantes positivas dependiendo de k, n, p, q .

Notemos que $\tilde{q} < q^*$.



Regiones del Teorema 4.4.1

Consideremos el operador definido en (3.33) y que considera k -esqueletos con lados $2r$, $2^t \leq r \leq 2^{t+1}$, con $t \in \mathbb{Z}$ fijo.

Lema 4.4.2.

$$\|M_{\delta,t}^k\|_{L^p \rightarrow L^q} = 2^{m(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+1} \|M_{2^{-t}\delta}^k\|_{L^p \rightarrow L^q}.$$

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g(\cdot) = f(2^t \cdot)$. Igual que en la demostración del Lema 3.6.4 tenemos que $M_{\delta,t}^k f(x) = 2M_{2^{-t}\delta}^k g(2^{-t}x)$ y

$$\|M_{\delta,t}^k f\|_q = 2^{\frac{m}{q}+1} \|M_{2^{-t}\delta}^k g\|_q.$$

Luego, usando que $\|g\|_p 2^{m/p} = \|f\|_p$,

$$\frac{\|M_{\delta,t}^k f\|_q}{\|f\|_p} = 2^{m/q+1} \frac{\|M_{2^{-t}\delta}^k g\|_q}{2^{m/p} \|g\|_p} = 2^{m(1/q-1/p)+1} \frac{\|M_{2^{-t}\delta}^k g\|_q}{\|g\|_p},$$

como queríamos probar. □

Demostración del Teorema 4.4.1. Fijemos una función $r : \mathbb{R}^n \rightarrow (\delta, 2]$ y consideremos los conjuntos de nivel

$$\Omega_t := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^t \leq r(x) < 2^{t+1}\},$$

con $[\log \delta] \leq t \leq 0$.

Supongamos que $q \leq q^* p$, usando el Lema 4.4.2 y el Teorema 4.3.1

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (A_{r,\delta} f(x))^q dx &\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 \int_{\Omega_t} (A_{r,\delta} f(x))^q dx \\
&\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\delta,t} f(x))^q dx \\
&\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 \|M_{\delta,t}^k f\|_q^q \\
&\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 2^q 2^{tn} \|M_{2^{-t}\delta}^k g\|_p^q \\
&\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 2^q 2^{tn} C_1^q (2^{-t}\delta)^{q\frac{k-n}{2n}} \|g\|_p^q \\
&= \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 2^q 2^{tn} C_1^q (2^{-t}\delta)^{q\frac{k-n}{2np}} 2^{-tnq/p} \|f\|_p^q \\
&= 2^q C_1^q \delta^{q\frac{k-n}{2np}} \|f\|_p^q \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 2^{-tq(\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q})}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Si $\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q} < 0$ (es decir, $q < p\tilde{q}$), la suma en (4.16) nos queda

$$\sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 2^{-tq(\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \leq \sum_{t=-\infty}^0 2^{-tq(\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \leq 1.$$

Como esto vale para cualquier función r , si $p \leq q < p\tilde{q}$ vale que

$$\|M_{\delta}^k f\|_q \leq C \delta^{\frac{k-n}{2np}} \|f\|_p,$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Si $\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q} \geq 0$ (es decir, $q \geq p\tilde{q}$), la suma en (4.16) nos queda

$$\sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 2^{-tq(\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \leq c_{n,k,p,q} \delta^{-q(\frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{k-n}{2np})}.$$

Luego, si $p\tilde{q} \leq q \leq pq^*$ obtenemos

$$\|M_{\delta}^k f\|_q \leq \tilde{C} \delta^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|f\|_p, \tag{4.17}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Por último, supongamos que $q > pq^*$. De forma análoga al caso anterior, usando de nuevo el Lema 4.4.2 y el Teorema 4.3.1 nos queda

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (A_{r,\delta} f(x))^q dx &\leq \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 \|M_{\delta,t}^k f\|_q^q \\ &\leq C_2^q \delta^{n+q\frac{k-n}{p}} \|f\|_p^q \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^0 2^{-ktq/p} \\ &\leq C_2^q \delta^{n+q\frac{k-n}{p}} \|f\|_p^q \delta^{-kq/p} \\ &\leq \tilde{C}' \|f\|_p^q \delta^{-qn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $pq^* < q < \infty$,

$$\|M_{\delta}^k f\|_q \leq \tilde{C}' \delta^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_p. \quad (4.18)$$

Usando (4.17) y (4.18), si $p\tilde{q} \leq q < \infty$ tenemos que

$$\|M_{\delta}^k f\|_q \leq C' \delta^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_p,$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Observación 4.4.3. Si $q > \tilde{q}p$, se puede probar que el operador

$$M_{\delta}^k f(x) = \sup_{r:\mathbb{R}^2 \rightarrow (\delta, \infty)} A_{r,\delta}^k f(x),$$

donde

$$A_{r,\delta}^k f(x) = \min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x, r(x)))} \int_{S_{k,\delta}^j(x, r(x))} |f(y)| dy,$$

está acotado. Es decir, podemos tomar k -esqueletos con lados de longitud no acotada. Esto vale porque en la demostración del teorema anterior podemos considerar $\lfloor \log \delta \rfloor < t$ y las series que aparecen son convergentes. En efecto, si $p\tilde{q} < q \leq pq^*$, vale que

$$\sum_{t=1}^{\infty} 2^{-tq(\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q})} < \infty$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{t=\lfloor \log \delta \rfloor}^{\infty} 2^{-tq(\frac{k-n}{2np} + \frac{n}{p} - \frac{n}{q})} &\leq \sum_{t=0}^{-\lfloor \log \delta \rfloor} 2^{tq(\frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{k-n}{2np})} + \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-tq(\frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{k-n}{2np})} \\ &\leq c_{k,n,p,q} \delta^{-q(\frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{k-n}{2np})} + 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{t=\lceil \log \delta \rceil}^{\infty} \|M_{\delta,t}^k f\|_q^q &\leq 2^q C_1^q \delta^{q \frac{k-n}{2np}} \|f\|_p^q \sum_{t=\lceil \log \delta \rceil}^{\infty} 2^{-tq(\frac{k-n}{2np} + \frac{n-n}{p-q})} \\ &\leq 2^q C_1^q \delta^{q \frac{k-n}{2np}} \|f\|_p^q \left(c \delta^{-q(\frac{n-n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{k-n}{2np})} + 1 \right) \\ &\leq C \delta^{-q(\frac{n-n}{p} - \frac{n}{q})} \|f\|_p^q, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{n-k}{2p}$.

Lo mismo sucede en el caso $q > pq^*$, pues $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{-ktq/p} < \infty$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{t=\lceil \log \delta \rceil}^{\infty} \|M_{\delta,t}^k f\|_q^q &\leq C_2 \delta^{n+q \frac{k-n}{p}} \|f\|_p^q \sum_{t=\lceil \log \delta \rceil}^{\infty} 2^{-ktq/p} \\ &\leq C_2 \delta^{n+q \frac{k-n}{p}} \|f\|_p^q \left(1 + \sum_{t=\lceil \log \delta \rceil}^0 2^{-ktq/p} \right) \\ &\leq C_2 \delta^{-q(\frac{n-n}{p} - \frac{n}{q})} \|f\|_p^q. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

Estimaciones con pesos

Resulta completamente natural preguntarse cuáles son las clases de pesos que caracterizan la acotación en $L^p(w)$ para el operador maximal asociado a los k -esqueletos, es decir, caracterizar todos los pesos w para los cuales se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\delta^k f(x)|^p w(x) dx \leq C(p, \delta, w) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx, \quad (5.1)$$

para toda función $f \in L^p(w)$.

Un resultado ideal sería encontrar una condición geométrica similar a la condición A_p de Muckenhoupt dada en la Definición 1.2.14 y probar que esta condición es necesaria y suficiente.

En este capítulo mostramos los resultados encontrados, hasta el momento, en esta dirección. En la Sección 5.1 damos una condición necesaria para que se cumpla (5.1). En la Sección 5.2 damos una condición suficiente, diferente a la condición necesaria, para la cual se cumple (5.1) y además, damos una dependencia cuantitativa del peso para la norma del operador en $L^p(w)$. Para probar esto, buscamos condiciones suficientes para la versión discretizada y linealizada del operador maximal asociado a los k -esqueletos, siguiendo la misma estrategia que usamos para probar que el operador M_δ^k está acotado en L^p .

5.1. Condición necesaria

Sea \mathcal{S} la familia de todos los k -esqueletos de n -cubos con centro $x \in \mathbb{R}^n$ y lados de longitud $2r$, $1 \leq r \leq 2$. Cada elemento de esta familia se denota por $S_k(x, r)$.

Siguiendo la notación introducida en la Definición 3.1.1, con $S_k^j(x, r)$, $j = 1, \dots, N$, enumeramos cada una de las k -caras de $S_k(x, r)$. Para cada $0 < \delta < 1$, $S_{k,\delta}(x, r)$ y $S_{k,\delta}^j(x, r)$ denotamos el δ -entorno de $S_k(x, r)$ y $S_k^j(x, r)$, respectivamente.

Definición 5.1.1. Sea w un peso, $0 < \delta < 1$ y $1 < p < \infty$. Diremos que w pertenece a la clase $\mathcal{A}_{\delta,p}^{S,k}$ si

$$\sup_{S_k(x,r) \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(x,r))} \int_{Q_\delta(x)} w \right) \left(\int_{\ell_{k,\delta}(x,r)} w^{-\frac{p'}{p}} \right)^p \left(\int_{S_{k,\delta}(x,r)} w^{-\frac{p'}{p}} \right)^{-1} < \infty,$$

donde $Q_\delta(x)$ es el n -cubo con centro x y lados de longitud δ y $\ell_{k,\delta}(x,r)$ denota la k -cara de $S_{k,\delta}(x,r)$ en la cual se alcanza el siguiente mínimo:

$$\min_{j=1}^N \frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}^j(x,r))} \int_{S_{k,\delta}^j(x,r)} w^{-\frac{p'}{p}} dy.$$

Cuando es finito, el supremo se denotará por $[w]_{\mathcal{A}_{\delta,p}^{S,k}}$.

Teorema 5.1.2. Sea w un peso en \mathbb{R}^n y supongamos que el operador maximal asociado los k -esqueletos M_δ^k , para algún δ fijo, está acotado en $L^p(w)$, $1 < p < \infty$. Entonces, el peso w pertenece a la clase $\mathcal{A}_{\delta,p}^{S,k}$.

Demostración. Queremos probar que si M_δ^k satisface (5.1) para algún peso w , entonces w satisface la condición dada en la Definición 5.1.1.

Dado $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, consideremos $S_k(\tilde{x}, r) \in \mathcal{S}$ y la función $f \mathbf{1}_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)}$. Sea $Q_\delta(\tilde{x})$ el n -cubo con centro \tilde{x} y lado de longitud δ . Para cada $x \in Q_\delta(\tilde{x})$, vale que

$$S_{k,\delta}(\tilde{x}, r) \subseteq S_{k,4\delta}(x, r).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(\tilde{x}, r)} |f \mathbf{1}_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)}(y)| dy &\leq \min_{j=1}^N \int_{S_{k,4\delta}^j(x, r)} |f \mathbf{1}_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)}(y)| dy \\ &\leq M_{4\delta}^k f \mathbf{1}_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)}(x). \end{aligned}$$

Usando esta estimación y (5.1), obtenemos

$$\begin{aligned} w(Q_\delta(\tilde{x})) \left(\min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(\tilde{x}, r)} |f \mathbf{1}_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)}(y)| dy \right)^p &\leq \int_{Q_\delta(\tilde{x})} |M_{4\delta}^k f \mathbf{1}_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)}(x)|^p w(x) dx \\ &\leq C(4\delta, w) \int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} |f(x)|^p w(x) dx \end{aligned}$$

y esto vale para toda función f y $r \in [1, 2]$.

Si tomamos $f = w^{-p'/p}$ en la desigualdad anterior, nos queda

$$w(Q_\delta(\tilde{x})) \left(\min_{j=1}^N \int_{S_{k,\delta}^j(\tilde{x}, r)} w^{-p'/p} dx \right)^p \leq C(4\delta, w) \int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-p'/p} dx.$$

Denotemos por $\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r)$ la k -cara que alcanza el mínimo, entonces

$$w(Q_\delta(\tilde{x})) \left(\int_{\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-p'/p} dx \right)^p \left(\int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-p'/p} dx \right)^{-1} \leq C(4\delta, w),$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{w(Q_\delta(\tilde{x}))}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \left(\int_{\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-p'/p} dx \right)^p \left(\int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-p'/p} dx \right)^{-1} \leq C(4\delta, w).$$

Tomando supremo sobre todos los elementos de \mathcal{S} , obtenemos

$$\sup_{S_k(\tilde{x}, r) \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \int_{Q_\delta(\tilde{x})} w dx \right) \left(\int_{\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{p'}{p}} dx \right)^p \left(\int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{p'}{p}} dx \right)^{-1} \leq C(4\delta, w).$$

□

Ejemplo

El siguiente cálculo sencillo muestra que si $w \in A_p$ entonces $w \in \mathcal{A}_{\delta,p}^{S_k}$. Recordemos que A_p es la condición dada en la Definición 1.2.14.

Necesitamos acotar la expresión

$$A = \left(\frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \int_{Q_\delta(\tilde{x})} w dx \right) \left(\int_{\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{ap'}{p}} dx \right)^p \left(\int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{ap'}{p}} dx \right)^{-1}$$

uniformemente para todo $S_k(\tilde{x}, r) \in \mathcal{S}$. Como $\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r) \subset S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{ap'}{p}} dx \right)^p &\leq \left(\frac{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))}{\mathcal{L}(\ell_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{ap'}{p}} dx \right)^p \\ &\leq 2^p \left(\int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{ap'}{p}} dx \right)^p, \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos (3.1) para estimar las medidas de $S_{k,\delta}$ y $\ell_{k,\delta}$.

Usando que $Q_\delta(\tilde{x})$ y $S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)$ están ambos contenidos en el n -cubo $S(\tilde{x}, 2r)$ con centro

\tilde{x} y lados de longitud $4r$, obtenemos

$$\begin{aligned}
A &\leq 2^p \left(\frac{1}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \int_{Q_\delta(\tilde{x})} w \, dx \right) \left(\int_{S_{k,\delta}(\tilde{x}, r)} w^{-\frac{ap'}{p}} \, dx \right)^{p-1} \\
&\leq 2^p \left(\frac{\mathcal{L}(S(\tilde{x}, 2r))}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \int_{S(\tilde{x}, 2r)} w \, dx \right) \left(\frac{\mathcal{L}(S(\tilde{x}, 2r))}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \int_{S(\tilde{x}, 2r)} w^{-\frac{ap'}{p}} \, dx \right)^{p-1} \\
&\leq 2^p \left(\frac{\mathcal{L}(S(\tilde{x}, 2r))}{\mathcal{L}(S_{k,\delta}(\tilde{x}, r))} \right)^p \left(\int_{S(\tilde{x}, 2r)} w \, dx \right) \left(\int_{S(\tilde{x}, 2r)} w^{-\frac{ap'}{p}} \, dx \right)^{p-1} \\
&\leq 2^p \left(\frac{(2r)^n}{2^n r^k \delta^{n-k}} \right)^p \left(\int_{S(\tilde{x}, 2r)} w \, dx \right) \left(\int_{S(\tilde{x}, 2r)} w^{-\frac{ap'}{p}} \, dx \right)^{p-1} \\
&\leq 2^p \left(\frac{2}{\delta} \right)^{(n-k)p} \left(\int_{S(\tilde{x}, 2r)} w \, dx \right) \left(\int_{S(\tilde{x}, 2r)} w^{-\frac{ap'}{p}} \, dx \right)^{p-1} \\
&\leq C_{p,n,k,\delta} \sup_Q \left(\int_Q w \, dx \right) \left(\int_Q w^{-\frac{ap'}{p}} \, dx \right)^{p-1},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad tomamos supremos sobre todos los n -cubos Q . Luego, como asumimos que $|x|^a \in A_p$, el supremo es finito y obtenemos lo que queríamos.

5.2. Condición suficiente

Para probar una condición suficiente necesitamos trabajar con la versión discretizada del operador M_δ^k que definimos en la [Sección 3.3](#).

La función maximal asociada a (ρ, k) dada en la [Definición 3.3.8](#) está definida sobre el conjunto $Q_0 = [0, 1]^n$ y vimos que los resultados obtenidos eran invariantes por traslaciones. Es decir, podemos reemplazar Q_0 por cualquier n -cubo Q_z de lado 1, como en [\(3.27\)](#).

En este caso, será necesario tener en cuenta el cubo Q_z sobre el que estamos trabajando. A diferencia de lo que sucede con la medida de Lebesgue, para la cual $\mathcal{L}(Q_z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{Z}^n$, la cantidad $w(Q_z)$ depende de z .

A continuación vamos a redefinir la función maximal $\tilde{M}_{\rho,\delta}^k$ sobre Q_z . Aunque es análogo a lo hecho para Q_0 , incluiremos la notación y las definiciones necesarias.

Definición 5.2.1. Sean $0 \leq k < n$ dos enteros dados y z un punto en \mathbb{Z}^n . Definimos:

1. Q_z como el n -cubo semi-abierto a la derecha de lado 1 y vértice inferior izquierdo z .
2. $Q_z^* = \{x_1, \dots, x_u\}$ como el conjunto de centros de los n -cubos semi-abiertos a la derecha de lado δ , $Q_z(1), \dots, Q_z(u)$, generados por la grilla $Q_z \cap \delta\mathbb{Z}^2$. En adelante, asumimos que $1/\delta$ es un número entero y entonces $u = \frac{1}{\delta^n}$.

3. $\rho : Q_z^* \rightarrow [1, 2] \cap \delta\mathbb{Z}$. Denotamos por Γ_z la familia de todas las funciones ρ .
4. $\{S_{k,i}\} = \{S_k(x_i, \rho(x_i))\}_{i=1}^u$, la familia de los k -esqueletos con centro x_i y lados de longitud $2\rho(x_i)$.
5. Φ_ρ como la función que elige (usando el Lema 3.3.5) una k -cara de cada uno de los k -esqueletos de la familia anterior,

$$\Phi_\rho(S_{k,i}) = \ell_{k,\rho,z}^i.$$

6. La familia de k -caras que definimos en el ítem anterior dependen de ρ, z y k . Para no sobrecargar la notación, no escribiremos la dependencia de k y la denotaremos por

$$\{\ell_{\rho,z}^1, \dots, \ell_{\rho,z}^u\}.$$

7. Para cada uno de los k -planos coordenados π_ω (ver Definición 3.4.1), $1 \leq \omega \leq \binom{n}{k}$, definimos los conjuntos

$$E_{\pi_\omega} = \{x_i \in Q_z^* : \ell_{\rho,z}^i \text{ es paralela a } \pi_\omega\}.$$

8. La función $\psi : Q_z \rightarrow Q_z^*$ asigna a cada punto $x \in Q_z$ el centro del n -cubo de la forma $Q_z(i)$ que lo contiene, para algún $i = 1, \dots, u$.

Definición 5.2.2. Sea Q_z un cubo fijo, $\rho \in \Gamma_z$ y $0 < \delta < 1$. Si $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la *función maximal asociada a* (ρ, k) de ancho δ como

$$\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f : Q_z \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f(x) = \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{x,\delta})} \int_{\ell_{x,\delta}} f(y) dy,$$

donde $\ell_{x,\delta}$ es el δ -entorno de $\ell_x := \Phi_\rho(S_k(x^*, \rho(x^*)))$.

Notemos que la definición es análoga a la Definición 3.3.8. La única diferencia es que en lugar de considerar Q_0 trabajamos en algún cubo Q_z , con $z \in \mathbb{Z}^n$.

El siguiente resultado es la versión pesada del Lema 3.3.10. No haremos la demostración, pues es esencialmente la misma que ya hicimos, utilizando la medida dada por el peso w en lugar de la medida de Lebesgue.

Lema 5.2.3. Si $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ y $z \in \mathbb{Z}^n$,

$$\|M_\delta^k f\|_{L^p(Q_z, w)} \leq 3^{n-k} \sup_{\rho \in \Gamma_z} \|\widetilde{M}_{\rho,3\delta}^k f\|_{L^p(Q_z, w)}. \quad (5.2)$$

Si obtenemos condiciones suficientes para que el operador maximal discreto $\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k$ esté acotado en $L^p(Q_z, w)$, obtendremos condiciones suficientes para que M_δ^k esté acotado en $L^p(w)$, al menos sobre cada Q_z .

Ahora daremos una versión pesada de la Proposición 3.4.3.

Proposición 5.2.4. Sea $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < \delta < 1$, $z \in \mathbb{Z}^n$ y sea $\rho \in \Gamma_z$ una función dada. Fijemos un k -plano coordenado π y sea $s = |E_\pi|$. Enumeremos $E_\pi = \{x_1, \dots, x_s\}$ y escribamos ℓ_δ^i para denotar el δ -entorno de $\ell_{\rho, z}^i$, $i = 1, \dots, s$.

Supongamos que existe una constante $0 < K < \infty$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_\delta^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_z, w^{1-p'})} \leq K,$$

donde w es un peso sobre Q_z . Entonces,

$$\left\| \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f \right\|_{L^p(\psi^{-1}(E_\pi), w)} \leq K \|f\|_{L^p(7Q_z, w)}.$$

Demostración. Consideremos los n -cubos $Q_z(i)$, $1 \leq i \leq s$, tal que $x_i \in E_\pi$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\psi^{-1}(E_\pi)} \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x)^p w(x) dx &= \sum_{i=1}^s \int_{Q_z(i)} \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x)^p w(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^s \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x_i)^p w(Q_z(i)). \end{aligned}$$

Por dualidad existen números no negativos b_i , $i = 1, \dots, s$, con $\sum_{i=1}^s b_i^{p'} = 1$, tales que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\psi^{-1}(E_\pi)} \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^s (\widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x_i) w(Q_z(i))^{1/p})^p \right)^{1/p} \\ &= \sum_i \widetilde{M}_{\rho, \delta}^k f(x_i) w(Q_z(i))^{1/p} b_i \\ &= \sum_{i=1}^s \frac{b_i}{\mathcal{L}(\ell_\delta^i)} \left(\int_{Q_z(i)} w dx \right)^{1/p} \left(\int_{\ell_\delta^i} f(x) dx \right) \\ &= \sum_{i=1}^s t_i \left(\int_{\ell_\delta^i} f(x) dx \right), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad tomamos $t_i = \frac{b_i}{\mathcal{L}(\ell_\delta^i)} \left(\int_{Q_z(i)} w dx \right)^{1/p}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_\pi),w)} &\leq \sum_{i=1}^s t_i \left(\int_{\ell_\delta^i} f(x) dx \right) \\
&\leq \int_{7Q_z} \left(\sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_\delta^i} \right) f w^{1/p} w^{-1/p} dx \\
&\leq \left(\int_{7Q_z} f^p w dx \right)^{1/p} \left(\int_{7Q_z} \left(\sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_\delta^i} \right)^{p'} w^{-p'/p} \right)^{1/p'} \\
&\leq \|f\|_{L^p(7Q_z,w)} \left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_\delta^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_z,w^{-p'/p})} \\
&\leq K \|f\|_{L^p(7Q_z,w)},
\end{aligned}$$

pues por hipótesis, la norma de la suma de las funciones indicadoras está acotada. \square

Definición 5.2.5. Sean w un peso en \mathbb{R}^n y $1 < p < \infty$. Para cada $z \in \mathbb{Z}^n$ y $\rho \in \Gamma_z$, definimos la cantidad $A_{p,\rho,z}^{S_k}$ asociada a los k -esqueletos y a $w \in \mathbb{R}^n$ como

$$[w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}} := \max_{i=1}^u \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w \right) \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{-\frac{p'}{p}} \right)^{p-1}, \quad (5.3)$$

donde $\ell_{\rho,z,\delta}^i$ denota el δ -entorno de $\ell_{\rho,z}^i$.

Como queremos tener control sobre todo z y toda función ρ , definimos

$$[w]_{A_p^{S_k}} := \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \sup_{\rho \in \Gamma_z} \max_{i=1}^u \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w \right) \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{-\frac{p'}{p}} \right)^{p-1}. \quad (5.4)$$

Diremos que $w \in A_p^{S_k}$ si $[w]_{A_p^{S_k}} < \infty$.

Notemos que la geometría del problema se ve reflejada en la asimetría de los promedios.

Para el caso $p = 1$ tenemos la siguiente definición.

Definición 5.2.6. Sean w un peso en \mathbb{R}^n , $z \in \mathbb{Z}^n$ y $\rho \in \Gamma_z$. Definimos la cantidad $A_{1,\rho,z}^{S_k}$ asociada a los k -esqueletos para un peso $w \in \mathbb{R}^n$ como

$$[w]_{A_{1,\rho,z}^{S_k}} := \max_{i=1}^u \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(\ell_{\rho,z,\delta}^i)}.$$

Para tener control sobre todo z y toda función ρ , definimos

$$[w]_{A_1^{S_k}} := \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \sup_{\rho \in \Gamma_z} \max_{i=1}^u \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(\ell_{\rho,z,\delta}^i)}.$$

Diremos que $w \in A_1^{S_k}$ si $[w]_{A_1^{S_k}} < \infty$.

Proposición 5.2.7. Sea $w \in A_p^{S_k}$ para algún $1 \leq p < \infty$.

1. Las clases $A_p^{S_k}$ son crecientes, es decir, si $1 \leq p < q < \infty$,

$$[w]_{A_q^{S_k}} \leq [w]_{A_p^{S_k}}.$$

2. $\lim_{p \rightarrow 1^+} [w]_{A_p^{S_k}} = [w]_{A_1^{S_k}}$.

Demostración. Sea $1 < p < q$, vamos a probar que $A_p^{S_k} \subseteq A_q^{S_k}$. Primero, observemos que si $p < q$, entonces $0 < q' - 1 < p' - 1 < \infty$ y si $1 < r = \frac{p'-1}{q'-1}$, entonces $r' = \frac{p'-1}{p'-q'}$. Usando esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-q'} \right)^{q-1} &= \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{q-1}} \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} (w^{-1})^{q'-1} \mathbf{1}_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} \right)^{\frac{1}{q'-1}} \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{q-1}} \left(\left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} (w^{-1})^{r(q'-1)} \right)^{1/r} \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} \mathbf{1}_{\ell_{\rho,z,\delta}^i}^{r'} \right)^{1/r'} \right)^{\frac{1}{q'-1}} \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{q-1}} \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} (w^{-1})^{p'-1} \right)^{\frac{1}{p'-1}} \mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{\frac{p'-q'}{p'-1} \frac{1}{q'-1}} \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{q-1}} \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} (w^{-1})^{p'-1} \right)^{\frac{1}{p'-1}} \mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{q-p} \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{p-1}} \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-p'} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

y por lo tanto, como $w \in A_p^{S_k}$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w dx \right) \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-q'} \right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w dx \right) \left(\int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty,$$

para todo $i = 1, \dots, u$, $\rho \in \Gamma_z$ y $z \in \mathbb{Z}^n$.

Tomando máximo sobre i y supremos sobre $\rho \in \Gamma_z$ y $z \in \mathbb{Z}^n$, obtenemos el resultado buscado.

Para el caso $p = 1$, usamos que

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-q'} \right)^{q-1} \leq \sup_{x \in \ell_{\rho,z,\delta}^i} w(x)^{-1} = \|w^{-1}\|_{L^\infty(\ell_{\rho,z,\delta}^i)}.$$

Ahora probaremos el segundo ítem. Por 1, tenemos que $[w]_{A_p^{S_k}} \leq [w]_{A_1^{S_k}}$ para todo $p > 1$.

Para completar la prueba, alcanza con probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$[w]_{A_p^S} \geq [w]_{A_1^S} - \varepsilon,$$

para todo $p < 1 + \delta$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-p'} dx \right)^{p-1} &= \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} (w^{-1})^{p'-1} dx \right)^{\frac{1}{p'-1}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{p-1}} \|w^{-1}\|_{L^{p'-1}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{\frac{1}{r}}} \|w^{-1}\|_{L^r(\ell_{\rho,z,\delta}^i)}, \end{aligned}$$

donde en la última línea escribimos $r = p' - 1$.

Es sabido que $\|f\|_{L^r} \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$ si $r \rightarrow \infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $r > N$,

$$\|w^{-1}\|_{L^\infty(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \leq \frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)^{1/r}} \|w^{-1}\|_{L^r(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} + \varepsilon/2.$$

O también, podemos decir que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|w^{-1}\|_{L^\infty(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \leq \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-p'} dx \right)^{p-1} + \varepsilon/2,$$

si $p < \delta + 1$.

Sea $\varepsilon > 0$ como arriba, existe $z \in \mathbb{Z}^n$, $\rho \in \Gamma_z$ e $1 \leq i \leq u$ tal que

$$\begin{aligned} [w]_{A_1^{S_k}} - \varepsilon/2 &\leq \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w dx \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \\ &\leq \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{Q_z(i)} w dx \right) \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\ell_{\rho,z,\delta}^i)} \int_{\ell_{\rho,z,\delta}^i} w^{1-p'} dx \right)^{p-1} + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Luego, como $w \in A_p^{S_k}$ obtenemos que

$$[w]_{A_1^{S_k}} - \varepsilon \leq [w]_{A_p^{S_k}}.$$

□

Teorema 5.2.8. *Sea w un peso en \mathbb{R}^n . Si $w \in A_p^{S_k}$ y $p' \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(Q_z,w)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)\frac{1}{p}} [w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(7Q_z,w)}, \quad (5.5)$$

para toda $f \in L^p(7Q_z, w)$.

Demostración. A lo largo de esta demostración $C_{k,n}$ es una constante que depende de n, k ; su valor puede ir cambiando de una línea a la otra.

Fijemos π un k -plano coordenado y sea $s = |E_\pi|$. Veamos que

$$\|\widetilde{M}_{\rho,\delta}^k f\|_{L^p(\psi^{-1}(E_\pi), w)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right) \frac{1}{p}} [w]_{A_{p,\rho,z}^k}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(7Q_z, w)}.$$

Por la Proposición 5.2.4, es suficiente probar que

$$\left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_\delta^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_z w^{1-p'})}^{p'} \leq C_{k,n}^{p'/p} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right) \frac{p'}{p}} [w]_{A_{p,\rho,z}^k}^{p'/p},$$

donde ℓ_δ^i es un δ -entorno de $\ell_{\rho,z}^i$ y los t_i 's están definidos por

$$t_i = \frac{b_i}{|\ell_\delta^i|} \left(\int_{Q_z(i)} w dx \right)^{1/p}, \quad \sum_{i=1}^s b_i^{p'} = 1. \quad (5.6)$$

Como p' es un entero positivo,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^s t_i \mathbf{1}_{\ell_\delta^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_z, w^{1-p'})}^{p'} &= \sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1} \dots t_{i_{p'}} w^{1-p'} (\ell_\delta^{i_1} \cap \dots \cap \ell_\delta^{i_{p'}}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s \prod_{j=1}^{p'} t_{i_j} \left(w^{1-p'} (\ell_\delta^{i_1} \cap \dots \cap \ell_\delta^{i_{p'}}) \right)^{1/p'} \\ &\leq \prod_{j=1}^{p'} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_j}^{p'} w^{1-p'} (\ell_\delta^{i_1} \cap \dots \cap \ell_\delta^{i_{p'}}) \right)^{1/p'}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

En el último paso usamos la desigualdad de Hölder generalizada. Cada uno de los p' factores obtenidos tienen la misma cota, con lo cual sólo analizaremos uno de ellos. Por ejemplo, tomemos el primero:

$$\sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1}^{p'} w^{1-p'} (\ell_\delta^{i_1} \cap \dots \cap \ell_\delta^{i_{p'}}) = \sum_{i_1=1}^s t_{i_1}^{p'} \sum_{i_2, \dots, i_{p'}=1}^s w^{1-p'} (\ell_\delta^{i_1} \cap \dots \cap \ell_\delta^{i_{p'}}).$$

Ahora bien, en la última suma, para cada i_1 fijo, sólo hay que considerar las tuplas $(i_2, \dots, i_{p'})$, $i_2, \dots, i_{p'} = 1, \dots, s$ para las cuales $\ell_{i_1} \cap \dots \cap \ell_{i_{p'}} \neq \emptyset$. Con un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición 3.4.5 y usando el Lema 3.3.5 obtenemos que

$$\sum_{i_2, \dots, i_{p'}=1}^s w^{1-p'} (\ell_\delta^{i_1} \cap \dots \cap \ell_\delta^{i_{p'}}) \leq C_{n,k}^{p'-1} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right) (p'-1)} w^{1-p'} (\ell_\delta^{i_1}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1=1}^s t_{i_1}^{p'} \sum_{i_2, \dots, i_{p'}} w^{1-p'} \left(\prod_{j=1}^{p'} \ell_{\delta}^{i_j} \right) &\leq C_{n,k}^{p'-1} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)(p'-1)} \sum_{i_1=1}^s t_{i_1}^{p'} w^{1-p'} (\ell_{\delta}^{i_1}) \\
&\leq C_{n,k}^{p'-1} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)(p'-1)} \sum_{i_1=1}^s w^{1-p'} (\ell_{i_1}) \left(\frac{w(Q_z(i_1))}{\mathcal{L}(\ell_{\delta}^{i_1})} \right)^{p'-1} \frac{b_{i_1}^{p'}}{\mathcal{L}(\ell_{\delta}^{i_1})} \\
&\leq C_{n,k}^{p'-1} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)(p'-1)} [w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}}^{\frac{1}{p-1}} \sum_{i_1=1}^s b_{i_1}^{p'}
\end{aligned}$$

y

$$\sum_{i_1, \dots, i_{p'}=1}^s t_{i_1}^{p'} w^{1-p'} (\ell_{\delta}^{i_1} \cap \dots \cap \ell_{\delta}^{i_{p'}}) \leq C_{n,k}^{p'-1} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)(p'-1)} [w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}}^{\frac{1}{p-1}}.$$

La misma estimación vale para los $p' - 1$ factores restantes que aparecen en (5.7) y que tienen que ver con $t_{i_2}, \dots, t_{i_{p'}}$. Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_i t_i \mathbf{1}_{\ell_{\delta}^i} \right\|_{L^{p'}(7Q_z, w^{1-p'})} &\leq C_{k,n}^{\frac{p'-1}{p'}} \delta^{\frac{p'-1}{p'} \left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)} [w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}}^{\frac{1}{(p-1)p'}} \\
&\leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{1}{p} \left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)} [w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}}^{1/p}
\end{aligned}$$

y obtenemos

$$\left\| \tilde{M}_{\rho,\delta}^k f \right\|_{L^p(\psi^{-1}(E_{\pi_1}), w)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{1}{p} \left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)} [w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}}^{1/p} \|f\|_{L^p(7Q_z, w)}.$$

Como este resultado es independiente del k -plano coordinado que elijamos, usando que los conjuntos $\{\psi^{-1}(E_{\pi_{\omega}})\}$, $\omega = 1, \dots, \binom{n}{k}$, forman una partición de Q_z obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{M}_{\rho,\delta}^k f \right\|_{L^p(Q_z, w)}^p &\leq \sum_{\omega=1}^{\binom{n}{k}} \left\| \tilde{M}_{\rho,\delta}^k f \right\|_{L^p(\psi^{-1}(E_{\pi_{\omega}}), w)}^p \\
&\leq C_{k,n} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)} [w]_{A_{p,\rho,z}^{S_k}} \|f\|_{L^p(7Q_z, w)},
\end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Corolario 5.2.9. *Sea w un peso en \mathbb{R}^n . Si $w \in A_1^{S_k}$, entonces*

$$\left\| \tilde{M}_{\rho,\delta}^k f \right\|_{L^1(Q_z, w)} \leq C_{k,n} \delta^{\left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n\right)} [w]_{A_{1,\rho,z}^{S_k}} \|f\|_{L^1(7Q_z, w)}, \quad (5.8)$$

para toda $f \in L^p(7Q_z, w)$.

Demostración. Sea $w \in A_1^{S_k}$. Por la Proposición 5.2.7 tenemos que $w \in A_p^{S_k}$ para todo $1 < p$ y además $[w]_{A_p^{S_k}}^{1/p} \rightarrow [w]_{A_1^{S_k}}$ si $p \rightarrow 1^+$. De manera similar a la demostración del Corolario 3.4.6, tomando límites en (5.5) obtenemos el resultado buscado. \square

En el siguiente teorema damos condiciones suficientes para que (5.1) se cumpla para una sucesión de valores de p de la forma $p = \frac{p'}{p'-1}$, con $2 \leq p' \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.2.10. *Sea $w \in A_p^{S_k}$ un peso en \mathbb{R}^n con $p \geq 1$ y $\delta > 0$. Si para $p > 1$, $p' \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\|M_\delta^k f\|_{L^p(w)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{1}{p} \left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n \right)} [w]_{A_p^{S_k}}^{1/p} \|f\|_{L^p(w)},$$

para toda $f \in L^p(w)$.

Demostración. A lo largo de esta demostración $C_{k,n}$ es una constante positiva que sólo depende de k y n y su valor puede ir cambiando de una línea a la otra.

Usando que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^n} Q_z$, calculamos la norma en $L^p(w)$ como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\delta^k f(x)|^p w(x) dx = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int \mathbf{1}_{Q_z} |M_\delta^k f(x)|^p w(x) dx \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|M_\delta^k f\|_{L^p(Q_z, w)}^p.$$

Ahora bien, usando (5.2) podemos controlar el operador maximal M_δ^k sobre Q_z con su versión discretizada $\tilde{M}_{\rho, \delta}^k$ de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|M_\delta^k f\|_{L^p(Q_z, w)}^p &\leq C_{k,n} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \sup_{\rho \in \Gamma} \|\tilde{M}_{\rho, 3\delta}^k f\|_{L^p(Q_z, w)}^p \\ &\leq C_{k,n} \delta^{\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n} [w]_{A_p^{S_k}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|f\|_{L^p(7Q_z, w)}^p \\ &\leq C_{k,n} \delta^{\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n} [w]_{A_p^{S_k}} \|f\|_{L^p(Q_z, w)}^p, \end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad usamos Hölder y que $\|\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}_{7Q_z}\|_\infty < \infty$. Concluimos que

$$\|M_\delta^k f\|_{L^p(w)} \leq C_{k,n}^{1/p} \delta^{\frac{1}{p} \left(\frac{(n-k)(2n-1)}{2n} - n \right)} [w]_{A_p^{S_k}}^{1/p} \|f\|_{L^p(w)}$$

y así completamos la prueba. \square

Nota 5.2.11. A diferencia de lo que sucede con los pesos A_p de Muckenhoupt y el operador maximal de Hardy-Littlewood, el Teorema 5.2.10 sólo considera aquellos valores de p para los cuales p' es entero. La razón es porque en su demostración aplicamos la Proposición 5.2.4 y expandimos la norma de una suma finita de funciones indicadoras, lo cual fue posible para dichos valores de p' . En el caso sin pesos, la estimación para los demás valores de p sale usando interpolación. En este caso tendríamos que usar un teorema de interpolación con cambio de medida, como por ejemplo [BS88, Teorema 4.3.6]. Esto es válido en el caso clásico de los pesos A_p y se puede ver en [Jon80]. Allí se usa la propiedad de factorización de los pesos A_p como pesos de A_1 y en este contexto de los k -esqueletos, no sabemos si esta factorización es válida o no.

El mejor resultado que podríamos obtener sería el siguiente: como M_δ^k está acotada en $L^{p_1}(w)$ para todo $w \in A_{p_1}^{S_k}$ y en $L^{p_2}(w)$ para todo $w \in A_{p_2}^{S_k}$, entonces M_δ^k está acotada en $L^p(u)$ con

$$u = w_1^{\frac{\theta}{p_1}} w_2^{\frac{1-\theta}{p_2}} \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}.$$

La pregunta es cómo probar que cualquier peso en $A_p^{S_k}$ se puede escribir de esta manera sin usar factorización.

Bibliografía

- [BS88] C. Bennett and R. Sharpley. *Interpolation of operators, Pure and Applied Mathematics*, vol. 129 (Academic Press Inc., Boston, MA, 1988). [17](#), [20](#), [90](#)
- [Bes19] A. S. Besicovitch. *Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions*. J. Soc. Phys.-Math. (Perm'), vol. 2 (1919), pp. 105–123. [xii](#)
- [BR68] A. S. Besicovitch and R. Rado. *A plane set of measure zero containing circumferences of every radius*. J. London Math. Soc., vol. 43 (1968), pp. 717–719. [xiii](#)
- [Bou86] J. Bourgain. *Averages in the plane over convex curves and maximal operators*. J. Analyse Math., vol. 47 (1986), pp. 69–85. [xiii](#), [23](#)
- [Bou91] J. Bourgain. *Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis*. Geom. Funct. Anal., vol. 1 (1991), no. 2, pp. 147–187. [xii](#)
- [Buc93] S. M. Buckley. *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 340 (1993), no. 1, pp. 253–272. [22](#)
- [Cor75] A. Córdoba. *A radial multiplier and a related Keakey maximal function*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 81 (1975), pp. 428–430. [xii](#)
- [Cor77] A. Cordoba. *The Keakey maximal function and the spherical summation multipliers*. Amer. J. Math., vol. 99 (1977), no. 1, pp. 1–22. [xii](#)
- [DS02] J. Duoandikoetxea and E. Seijo. *Weighted inequalities for some spherical maximal operators*. Illinois J. Math., vol. 46 (2002), no. 4, pp. 1299–1312. [xvii](#)
- [DV96] J. Duoandikoetxea and L. Vega. *Spherical means and weighted inequalities*. J. London Math. Soc. (2), vol. 53 (1996), no. 2, pp. 343–353. [xvii](#)
- [EG92] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics (CRC Press, Boca Raton, FL, 1992). [2](#)
- [Fal86] K. Falconer. *The geometry of fractal sets, Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 85 (Cambridge University Press, Cambridge, 1986). [6](#), [13](#)

- [Fal97] K. Falconer. *Techniques in fractal geometry* (John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997). 6, 13
- [Fal03] K. Falconer. *Fractal geometry* (John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003), 2nd ed. Mathematical foundations and applications. 6, 13
- [Fra84] P. Frankl. *A new short proof for the Kruskal-Katona theorem*. Discrete Math., vol. 48 (1984), no. 2-3, pp. 327–329. 28
- [GRF] L. Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis* (Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004). 16, 22
- [Jon80] P. W. Jones. *Factorization of A_p weights*. Ann. of Math. (2), vol. 111 (1980), no. 3, pp. 511–530. 90
- [Kat68] G. Katona. *A theorem of finite sets*. (1968), pp. 187–207. 28
- [KNS18] T. Keleti, D. T. Nagy and P. Shmerkin. *Squares and their centers*. J. Anal. Math., vol. 134 (2018), no. 2, pp. 643–669. xiv, xiv, xv, xvii, 23, 24, 32, 34, 39, 42
- [Kin68] J. R. Kinney. *A Thin Set of Circles*. Amer. Math. Monthly, vol. 75 (1968), no. 10, pp. 1077–1081. xiii
- [KW99] L. Kolasa and T. Wolff. *On some variants of the Kakeya problem*. Pacific J. Math., vol. 190 (1999), no. 1, pp. 111–154. xiii, 65, 67
- [Kru63] J. B. Kruskal. *The number of simplices in a complex*. In *Mathematical optimization techniques*, pp. 251–278 (Univ. of California Press, Berkeley, Calif., 1963). 28
- [LP11] I. Laba and M. Pramanik. *Maximal operators and differentiation theorems for sparse sets*. Duke Math. J., vol. 158 (2011), no. 3, pp. 347–411. xiii
- [Mar87] J. M. Marstrand. *Packing circles in the plane*. Proc. London Math. Soc. (3), vol. 55 (1987), no. 1, pp. 37–58. xiii, 23
- [Mat] A. Máthé. *Manuscript to be written*. xiii
- [Mat15] P. Mattila. *Fourier analysis and Hausdorff dimension, Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 150 (Cambridge University Press, Cambridge, 2015). 48
- [Mit99] T. Mitsis. *On a problem related to sphere and circle packing*. J. London Math. Soc. (2), vol. 60 (1999), no. 2, pp. 501–516. xiii
- [Muc72] B. Muckenhoupt. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 165 (1972), pp. 207–226. xvi, 21

- [M90] D. Müller. *On weighted estimates for the Kakeya maximal operator*. Colloq. Math., vol. 60/61 (1990), no. 2, pp. 457–475. [xvii](#)
- [MS95] D. Müller and F. Soria. *A double-weight L^2 -inequality for the Kakeya maximal function*. In *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, Special Issue (1995) pp. 467–478. [xvii](#)
- [Rog98] C. A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge Mathematical Library (Cambridge University Press, Cambridge, 1998). Reprint of the 1970 original, With a foreword by K. J. Falconer. [2](#)
- [Sch96] W. Schlag. *A generalization of Bourgain’s circular maximal theorem*. J. Amer. Math. Soc., vol. 10 (1997), no. 1, pp. 103–122. [xvi](#), [xviii](#), [65](#), [67](#)
- [Ste76] E. M. Stein. *Maximal functions. I. Spherical means*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 73 (1976), no. 7, pp. 2174–2175. [xiii](#)
- [SW71] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces* (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971). Princeton Mathematical Series, No. 32. [17](#)
- [Tal80] M. Talagrand. *Sur la mesure de la projection d’un compact et certaines familles de cercles*. Bull. Sci. Math. (2), vol. 104 (1980), no. 3, pp. 225–231. [xiii](#)
- [Tan01] H. Tanaka. *The Fefferman-Stein type inequality for the Kakeya maximal operator*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 129 (2001), no. 8, pp. 2373–2378. [xvii](#)
- [Tho17] R. Thornton. *Cubes and their centers*. Acta Math. Hungar., vol. 152 (2017), no. 2, pp. 291–313. [xiv](#), [xvii](#), [xviii](#), [24](#), [26](#), [29](#), [30](#), [32](#)
- [Var94] A. M. Vargas. *A weighted inequality for the Kakeya maximal operator*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 120 (1994), no. 4, pp. 1101–1105. [xvii](#)
- [Wol97] T. Wolff. *A Kakeya-type problem for circles*. Amer. J. Math., vol. 119 (1997), no. 5, pp. 985–1026. [xiii](#)
- [Wol00] T. Wolff. *Local smoothing type estimates on L^p for large p* . Geom. Funct. Anal., vol. 10 (2000), no. 5, pp. 1237–1288. [xiii](#)
- [Zig65] A. Zigmund. *Trigonometric series. Vol I, II* (Izdat. “Mir”, Moscow, 1965). [15](#)

