



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## CONSTRUCCIÓN Y SIMULACIÓN PERFECTA DE CAMPOS MARKOVIANOS CON SPINES ACOTADOS.

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el  
área Ciencias Matemáticas

**Sebastian Pablo Grynberg**

Director de tesis: Dr. Pablo A. Ferrari

Consejero de estudios: Dra. Graciela L. Boente Boente

Lugar de trabajo: Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, abril 2009

## Construcción y simulación perfecta de campos Markovianos con spines acotados.

### Resumen.

El objeto de este trabajo es la construcción y simulación perfecta de medidas de probabilidad sobre espacios compactos de la forma  $[a, b]^{\mathbb{L}}$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) y  $\mathbb{L}$  es un conjunto de índices que puede ser finito o infinito numerable.

En el caso finito  $\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, d\}$  y el objetivo del trabajo es la simulación perfecta de distribuciones absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue. En el caso infinito numerable  $\mathbb{L}$  es el reticulado  $d$ -dimensional  $\mathbb{Z}^d$  y el objetivo del trabajo es la simulación perfecta de las distribuciones finito dimensionales de medidas de Gibbs compatibles con especificaciones locales inducidas por un potencial de rango finito.

Ambos problemas se resuelven construyendo versiones estacionarias de procesos Markovianos, denominados *Gibbs sampler*, cuyas marginales temporales son las distribuciones objetivo. Los procesos pueden construirse usando la construcción gráfica de Harris [8] y una variante del algoritmo de Propp y Wilson denominado *Coupling from the past* [13].

Trabajando sobre ideas desarrolladas por Fernández, Ferrari y Garcia para estudiar medidas de equilibrio de sistemas con exclusiones en regímenes de alta temperatura, [3] y [4], mostramos que la construcción del proceso estacionario en volumen infinito puede relacionarse con la ausencia de percolación en un proceso de percolación orientada. Esta condición es suficiente para demostrar otras propiedades del proceso y de sus medidas invariantes: unicidad, límite termodinámico, decaimiento exponencial de las correlaciones espaciales. En particular, como un corolario de la construcción, se obtiene como resultado la existencia de una única medida de Gibbs compatible con las especificaciones locales inducidas por el potencial de rango finito.

En una segunda parte del trabajo probamos que procesos Gaussianos atractivos en  $[a, b]^{\mathbb{Z}^d}$  tienen una única medida invariante y como consecuencia hay una única medida de Gibbs asociada a las especificaciones locales correspondientes.

**Palabras clave:** Simulación perfecta, Gibbs sampler, spines acotados, potencial de rango finito, ausencia de transición de fase.

## Construction and perfect simulation of Markov fields with bounded spins.

### Abstract.

The subject of this work is the construction and perfect simulation of probability measures on compact spaces of the form  $[a, b]^{\mathbb{L}}$ , where  $a, b \in \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) and  $\mathbb{L}$  is a finite or countable index set.

In the finite case  $\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, d\}$  and the subject of this work is the perfect simulation of distributions absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. In the countable case  $\mathbb{L}$  is the  $d$ -dimensional lattice  $\mathbb{Z}^d$  and the subject of this work is the perfect simulation of finite dimensional distributions of Gibbs measures compatible with a given local specification induced by a finite range potential.

Both problems are solved by constructing stationarity versions of Markov processes, called Gibbs sampler, whose time-marginal distributions are the target distributions. The process can be constructed using the Harris graphical construction [8] together with a particular version of the coupling from the past algorithm of Propp and Wilson [13].

Working on ideas developed by Fernández, Ferrari, Garcia for the study of the equilibrium measure of systems with exclusions in the high-temperature regime, [3] y [4], we show that the construction of the stationary process in infinite volume can be related to the absence of percolation in a related oriented percolation process. This condition is sufficient for show other properties of the process and its invariant measure: uniqueness, termodinamic limit, exponential decay of the spatial correlations. In particular, we obtain as a corolary of the construction, the existence of a unique Gibbs measure compatible with the local specifications induced by a finite range potential.

The second part of this work considers attractive Gaussian processes on  $[a, b]^{\mathbb{Z}^d}$ . We show that those systems have a unique invariante mesasure. As a consequence, there exists a unique Gibbs measure associated to the corresponding specifications.

**Keywords:** Perfect simulation, Gibbs sampler, bounded spins, finite range potential, no phase transition.

## Agradecimientos.

*... la vida no es una propiedad privada,  
sino el producto del esfuerzo de muchos.*

(Francisco Urondo)

Sin la solidaridad y apoyo permanente de Pablo A. Ferrari esta tesis no llevaría mi firma. Entre el agradecimiento que merece y este que le ofrezco media un desproporción que no desconozco.

Esta tesis es el producto del esfuerzo de muchos. Esos muchos mencionados por Urondo son el pueblo argentino y el brasileño. Sin su anónimo esfuerzo este trabajo tampoco llevaría mi firma.

Este trabajo se escribió en São Paulo y Buenos Aires en el marco de los acuerdos CAPES-SECyT. Más precisamente, en el Instituto de Matemática e Estatística de la Universidade de São Paulo (IME-USP) y en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA). En ese marco, funcionarios de CAPES me concedieron becas de *Doutorado Sandwich* y las autoridades de FIUBA licencias con goce de haberes con las que pude iniciar y desarrollar la investigación que dio lugar a esta tesis que ahora presento.

En la génesis de este trabajo tuvo una enorme importancia Armando Pérez que, siendo Director del Departamento de Matemáticas de la FIUBA durante el período 2001-2003, me indicó la importancia de la teoría de probabilidades en la ingeniería y me presentó a Pablo a mediados de 2002. Mi primer contacto con la teoría fue el curso de Probabilidades y Estadística en la carrera de Ciencias Matemáticas de la FCEyN. El segundo, participando de un seminario de lectura y discusión del libro de Grimmett organizado por Jorge R. Busch en la FIUBA durante 1998. Jorge me propuso estudiar problemas de mecánica estadística comenzando por el libro de Khintchine. Esas lecturas iniciales y las posteriores discusiones que mantuvimos a lo largo del tiempo fueron abonando el terreno en el que se fue desarrollando mi interés y apertura hacia los problemas probabilísticos.

Graciela L. Boente Boente participó como Consejera de estudios y redactó una de las dos cartas de recomendación para que se me concediera una beca de *Doutorado Sandwich*. La otra carta la redactó Gustavo Corach. Estoy en deuda con ambos.

Entre agosto de 2002 y agosto de 2007, Pablo me invitó varias veces a São Paulo a trabajar con él. Mucho de lo que aprendí fue producto de esos viajes y de la intensa actividad que se desarrolla en el IME-USP. De los muchos que conocí en el IME-USP quiero agradecerles a los profesores Antonio Galves y Luiz Renato Fontes de quienes aprendí valiosas ideas sobre los métodos probabilísticos. Desearía agradecer también a las funcionarias Lourdes Netto y Rosária Borges que se ocuparon de los aspectos administrativos relativos a mis estadías en São Paulo. Tengo que dar también las gracias a muchos otros que con su amistad me han ayudado en diferentes formas y aspectos: Miguel Abadi y Jesús García; Nevena Maric, Fredy Caceres y Thomas Logan Ritchie; Natalia Sturniolo, Julieta Rodríguez y Florencia Leonardi. Quiero agradecer muy especialmente a Cristian Coletti y a Sandra Zapata por múltiples motivos que no hace falta detallar.

Mención aparte merece Pedro Fernández. Las respuestas a sus preguntas fueron el punto de partida de esta tesis y de un trabajo publicado en coautoría con Pablo y con él.

También merecen mis agradecimientos todos los compañeros y compañeras de la Facultad de Ingeniería que me apoyaron y estimularon a culminar esta tarea.

Entrando en un terreno más íntimo, quiero agradecer el apoyo incondicional de mi vieja y Mario Kestelboim. Finalmente, quiero dar las gracias a Isabel Virginia López con quien estoy relacionado por la afortunada circunstancia del matrimonio y con quien he compartido todos estos años de mi vida.

## **Dedicatorias.**

A las tres Isabeles de mi vida.

A Mariano.

A Enrique y Silvia.

Al Negro y Luisa.

A Norma y Julio.

A Mario.

Al gran pueblo argentino.

A la memoria de mi padre:

Enrique Grynberg.

Militante peronista de las Fuerzas Armadas Revolucionarias.

Asesinado el 26 de septiembre de 1973

por fuerzas irregulares del Estado Nacional.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1. Preliminares sobre acoplamiento . . . . .	16
1.2. Preliminares sobre procesos Markovianos . . . . .	20
<b>2. Simulación perfecta de distribuciones sobre <math>[a, b]^d</math></b>	<b>21</b>
2.1. Definiciones y resultados. . . . .	21
2.2. Construcción gráfica del Gibbs sampler . . . . .	22
2.3. Unicidad de la medida invariante . . . . .	27
<b>3. Aplicaciones</b>	<b>31</b>
3.1. Mínimos para algunas familias exponenciales a 1 parámetro . . . . .	32
3.2. Simulación perfecta de Gaussianas multivariadas truncadas . . . . .	35
3.2.1. La distribución Gaussiana truncada . . . . .	35
3.2.2. Acoplamiento maximal de Gaussianas truncadas . . . . .	35
3.2.3. La distribución Gaussiana multivariada truncada . . . . .	37
3.2.4. Simulación perfecta . . . . .	38
3.3. Simulación perfecta de Gammas truncadas . . . . .	39

<b>4. Simulación perfecta de campos Markovianos con spines acotados</b>	<b>41</b>
4.1. Definiciones y resultados . . . . .	41
4.1.1. Formalismo de Gibbs . . . . .	41
4.1.2. Gibbs sampler . . . . .	43
4.1.3. Resultados . . . . .	43
4.2. Construcción gráfica del Gibbs sampler . . . . .	45
4.3. Gibbs sampler en volúmenes finitos . . . . .	47
4.4. Construcción estacionaria del Gibbs Sampler . . . . .	48
4.4.1. Definición recursiva . . . . .	48
4.4.2. Percolación orientada para atrás en el tiempo . . . . .	49
4.5. Unicidad de la medida invariante y límite termodinámico . . . . .	52
4.5.1. Unicidad . . . . .	52
4.5.2. Límite termodinámico . . . . .	53
4.6. Comportamiento de las correlaciones espaciales . . . . .	54
4.6.1. Ancho espacial del clan de ancestros . . . . .	54
4.6.2. Decaimiento exponencial de las correlaciones espaciales . . . . .	57
<b>5. Campos Gaussianos con spines acotados</b>	<b>59</b>
5.1. Definiciones y resultados . . . . .	59
5.2. Simulación perfecta . . . . .	61
5.3. Gibbs sampler y dominación estocástica . . . . .	63
5.4. Ausencia de transición de fase . . . . .	64
5.5. Especificaciones Gaussianas truncadas . . . . .	66



# Introducción

El objeto de este trabajo es la construcción y la simulación perfecta de medidas de probabilidad sobre espacios compactos de la forma

$$[a, b]^{\mathbb{L}} := \{\eta : \mathbb{L} \rightarrow [a, b]\} = \{\eta = (\eta(i) : i \in \mathbb{L}) : \eta(i) \in [a, b]\}, \quad (1)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) y  $\mathbb{L}$  es un conjunto de índices que puede ser finito o infinito numerable.

En el caso finito  $\mathbb{L}$  será el intervalo  $\{1, 2, \dots, d\}$  y el objeto del trabajo es la simulación perfecta de distribuciones absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue. En el caso infinito numerable  $\mathbb{L}$  será el reticulado  $d$ -dimensional  $\mathbb{Z}^d$  y el objeto del trabajo es la simulación perfecta de las distribuciones finito dimensionales de medidas de Gibbs compatibles con especificaciones locales inducidas por un potencial de rango finito.

Ambos problemas serán resueltos construyendo procesos Markovianos estacionarios cuyas marginales temporales sean las distribuciones objetivo. Estos procesos se construirán como funciones determinísticas de procesos de Poisson marcados estacionarios (construcción gráfica de Harris [8]). A lo largo de todas las construcciones usaremos como herramienta principal el *acoplamiento maximal de variables aleatorias* (Ver Thorisson [14]).

Siguiendo las ideas desarrolladas por Fernández, Ferrari y Garcia para estudiar la medida de equilibrio para sistemas con exclusiones en el régimen de baja densidad o alta temperatura, [3] y [4], mostraremos que la construcción del proceso estacionario en volumen infinito está relacionada con la ausencia de percolación en un proceso de percolación orientada. Esta condición será suficiente para demostrar otras propiedades del proceso y de sus medidas invariantes: unicidad, límite termodinámico, decaimiento exponencial de las correlaciones. En particular resultará, como corolario de la construcción, la existencia de una única medida de Gibbs compatible con las especificaciones locales inducidas por el

potencial de rango finito.

Más concretamente las construcciones se realizarán bajo las siguientes condiciones:

1. *Caso finito.* La función densidad  $g : [a, b]^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  es tal que

$$\min_{i=1,2,\dots,d} \int_a^b \inf_{\eta \in [a,b]^d} g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) dx > 0, \quad (2)$$

donde  $\eta_{\{i\}^c} := (\eta(j) : j \neq i)$  es el vector  $d - 1$  dimensional que se obtiene eliminando la  $i$ -ésima coordenada del vector  $\eta \in [a, b]^d$  y  $g_i(\cdot|\eta_{\{i\}^c}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es la densidad condicional de la  $i$ -ésima componente dadas todas las demás.

2. *Caso infinito.* La especificación Gibbsiana,  $\Gamma = \{\mu_\Lambda(\cdot|\gamma_{\Lambda^c}) : \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty, \gamma \in [a, b]^{\mathbb{Z}^d}\}$ , asociada al potencial de rango finito  $r \in \mathbb{N}$ , es tal que

$$\inf_{i \in \mathbb{Z}^d} \int_a^b \inf_{\eta \in [a,b]^{\mathbb{Z}^d}} g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) dx > 1 - |\partial_r \{0\}|^{-1} \quad (3)$$

donde  $\eta_{\{i\}^c}$  es la proyección de la configuración  $\eta \in [a, b]^{\mathbb{Z}^d}$  sobre el espacio  $[a, b]^{\mathbb{Z}^d \setminus \{i\}}$ ,  $\eta_{\{i\}^c} := (\eta(j) : j \in \mathbb{Z}^d \setminus \{i\})$ ;  $g_i(\cdot|\eta_{\{i\}^c}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es la densidad de la distribución de Gibbs en  $\{i\}$  con condiciones de borde  $\eta_{\{i\}^c} : \mu_{\{i\}}(\cdot|\eta_{\{i\}^c})$  y  $\partial_r \{0\} = \{j \in \mathbb{Z}^d : 0 < \|j\| \leq r\}$ , siendo  $\|\cdot\|$  la norma Manhattan en  $\mathbb{Z}^d$ .

Los procesos Markovianos estacionarios que construiremos serán versiones a tiempo continuo del llamado *Gibbs sampler*, popularizado por Geman y Geman [5] para construir muestras asintóticamente perfectas de distribuciones finito dimensionales. Se trata de procesos Markovianos  $(\eta_t : t \geq 0)$  con generador infinitesimal  $L$  definido sobre funciones locales continuas  $f : [a, b]^{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$Lf(\eta) := \sum_{i \in \mathbb{L}} L_i f(\eta), \quad L_i f(\eta) = \int_a^b g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) dx [f(\eta + (x - \eta(i))\mathbf{e}_i) - f(\eta)], \quad (4)$$

donde  $\mathbf{e}_i \in \{0, 1\}^{\mathbb{L}}$  se define por  $\mathbf{e}_i(i) = 1$  y  $\mathbf{e}_i(j) = 0$  para  $j \neq i$ . En palabras, a tasa 1, en cada sitio  $i \in \mathbb{L}$  el spin  $\eta(i) \in [a, b]$  se substituye por una variable aleatoria  $X_{i,\eta}$  cuya ley tiene la densidad condicional  $g_i(x|\eta_{\{i\}^c})$  dados los spines en los otros sitios.

El espacio de probabilidad donde se realizan todas las construcciones es el espacio generado por una familia independiente de procesos de Poisson marcados de tasa 1 en  $\mathbb{R}$ :  $(\mathcal{T}, \mathcal{U}) = \{(\mathcal{T}(i), \mathcal{U}(i)) : i \in \mathbb{L}\}$ :

$$\mathcal{T}(i) = (T_n(i) : n \in \mathbb{Z}), \quad \mathcal{U}(i) = (U_n(i) : n \in \mathbb{Z}),$$

donde  $T_n(i)$  es la  $n$ -ésima época de un proceso de Poisson estacionario de tasa 1 en  $\mathbb{R}$  y  $U_n(i)$  son i. i. d. con ley uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . Todas las variables involucradas en la construcción son independientes.

A *grosso modo* la construcción de procesos  $(\eta_t : t \geq 0)$  con la dinámica del Gibbs sampler es la siguiente: a tiempo  $t \in \mathcal{T}(i)$  el spin en el sitio  $i$  se substituye por una variable aleatoria  $X_{i,\eta_{t-}}$  distribuida con ley  $g_i(x | (\eta_{t-})_{\{i\}^c}) dx$ . La variable  $X_{i,\eta_{t-}}$  se construye como una función determinística de la variable uniforme  $U_t(i) \in \mathcal{U}(i)$  asociada a la época de Poisson  $t$  utilizando un acoplamiento maximal  $(\hat{X}_{i,\eta} : \eta \in \Omega)$  para la familia de variables aleatorias  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  con densidades  $g_i(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$ .

El acoplamiento maximal  $(\hat{X}_{i,\eta} : \eta \in \Omega)$  consiste en construir simultáneamente copias de la variables  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  de modo tal que cuando ocurre el evento

$$C_t(i) := \left\{ U_t(i) \leq \int_a^b \inf_{\eta \in [a,b]^{\mathbb{L}}} g_i(x | \eta_{\{i\}^c}) dx \right\} \quad (5)$$

las variables  $\hat{X}_{i,\eta}$  son idénticas. En tal caso el valor del proceso a tiempo  $t$  en el sitio  $i$ ,  $\eta_t(i)$ , depende pura y exclusivamente del valor de la variable uniforme  $U_t(i)$ . Las condiciones (2) (y (3)) garantizan que el evento  $C_t(i)$  definido en (5) ocurre con probabilidad positiva.

Construidas las versiones del Gibbs sampler de condición inicial  $\xi \in [a, b]^{\mathbb{L}}$  a tiempo  $s \in \mathbb{R}$ :  $(\eta_{[s,t]}^\xi : t \geq s)$ , los procesos estacionarios se obtendrán de la manera siguiente.

1. *Caso finito.* Para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos tiempos de parada reversos  $\tau(t)$  tales que:
  - (a) los procesos iniciados en el instante  $\tau(t)$ , a tiempo  $t$  no dependen de la condición inicial y
  - (b) los procesos iniciados antes de  $\tau(t)$  son idénticos a tiempo  $t$  con los procesos iniciados en  $\tau(t)$ .

Fijado  $t \in \mathbb{R}$ , para definir el tiempo de parada reverso  $\tau(t)$  exploramos la construcción gráfica hacia atrás en el tiempo hasta encontrar el primer momento a partir del cual ocurren  $d$  épocas de Poisson consecutivas  $t_1 < t_2 < \dots < t_d$ , cada una asociada con un y solo un sitio  $i \in \mathbb{L}$ :  $i(t_1), i(t_2), \dots, i(t_d)$ , respectivamente, en las que ocurren los eventos  $C_{t_k}(i(t_k))$  definidos en (5).

La condición (2) garantiza que  $\tau(t)$  es finito con probabilidad igual a 1 y el proceso estacionario se define por  $\eta_t := \eta_{[\tau(t), t]}$ . La estacionariedad resulta de la construcción debido a que  $\eta_t$  es una función determinística de los procesos de Poisson marcados  $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$  que son invariantes por traslaciones temporales.

2. *Caso infinito.* Para determinar el valor del spin en el sitio  $i$  a tiempo  $t$  exploramos la construcción gráfica hacia atrás en el tiempo; llamando  $U$  a la variable aleatoria uniforme usada el último tiempo (digamos  $t'$ ) antes de  $t$  para actualizar el sitio  $i$  hay dos casos posibles  $U \leq \int_a^b \inf_{\eta \in [a,b]^{\mathbb{Z}^d}} g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) dx$  o  $U > \int_a^b \inf_{\eta \in [a,b]^{\mathbb{Z}^d}} g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) dx$ . En el primer caso no tenemos que seguir para atrás. En el segundo, necesitamos conocer los valores de los  $|\partial_r\{0\}|$  vecinos a tiempo  $t'$ . Repitiendo el argumento, construimos una estructura aleatoria denominada el *clan de ancestros del punto espacio-temporal*  $(i, t)$ .

El valor del spin en el sitio  $i$  a tiempo  $t$  resulta ser función determinística de la variable  $U$  y de las variables aleatorias uniformes correspondientes a los puntos espacio-temporales del clan de ancestros de  $(i, t)$ . Cuando el clan es finito el valor  $\eta_t(i)$  está bien definido.

La condición (3) garantiza que, con probabilidad igual a 1, todos los clanes de ancestros son finitos.

La construcción del Gibbs sampler estacionario  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  sobre  $[a, b]^{\mathbb{L}}$  permite demostrar que la distribución marginal temporal (que no depende de  $t$ ) es la única medida invariante para el proceso.

En el caso finito, es fácil ver que la medida de probabilidad con densidad  $g$  es reversible (y por lo tanto invariante) para el Gibbs sampler asociado. Por lo cual, en este caso, el problema de la simulación perfecta quedará resuelto construyendo la versión estacionaria del Gibbs sampler asociado.

Las construcciones y los resultados del caso finito se extienden inmediatamente a las distribuciones de Gibbs (inducidas por un potencial de rango finito)  $\mu_\Lambda(\cdot|\gamma_{\Lambda^c})$  en regiones finitas  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ , con condiciones de borde  $\gamma_{\Lambda^c}$ ,  $\gamma \in [a, b]^{\mathbb{Z}^d}$ .

En el caso infinito, las construcciones anteriores permiten demostrar que el Gibbs sampler asociado a la especificación  $\Gamma$  tiene una única medida invariante; que dicha medida es el límite termodinámico de las distribuciones de Gibbs en regiones finitas con condiciones de borde prefijadas y por lo tanto es una medida de Gibbs compatible con la especificación  $\Gamma$ . Por otra parte, es fácil ver que las medidas de Gibbs compatibles con la especificación  $\Gamma$  son invariantes para el Gibbs sampler asociado, lo que demuestra que la medida de Gibbs es única y se puede obtener como límite termodinámico. Por lo cual, en este caso, el problema

de la simulación perfecta de las distribuciones finito dimensionales de la medida de Gibbs compatible con la especificación  $\Gamma$  quedará resuelto construyendo la versión estacionaria del Gibbs sampler asociado.

De la construcción se obtiene el siguiente

**Corolario 1** *Sea  $\Gamma = \{\mu_\Lambda(\cdot|\gamma_{\Lambda^c}) : \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty, \gamma \in [a, b]^{\mathbb{Z}^d}\}$  una especificación local asociada a un potencial de rango finito  $r \in \mathbb{N}$ . Si  $\Gamma$  satisface la condición (3), entonces existe una única medida de Gibbs compatible con  $\Gamma$ . Esto es, existe una única medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $[a, b]^{\mathbb{Z}^d}$  que satisface las ecuaciones “DLR”:*

$$\int \mu(d\gamma) \int \mu_\Lambda(d\eta_\Lambda|\gamma) f(\eta_\Lambda \gamma_{\Lambda^c}) = \int \mu(d\eta) f(\eta). \quad (6)$$

para  $f : [a, b]^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

La condición (3) significa que el sistema de spines considerado se encuentra en un régimen de alta temperatura y el resultado de existencia y unicidad enunciado en el Corolario no es novedoso debido a que la condición (3) es más fuerte que la *condición de existencia y unicidad de Dobrushin* [1]:

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sup_{\zeta_{\{j\}^c} = \eta_{\{j\}^c}} \rho(\mu_{\{i\}}(\cdot|\zeta_{\{i\}^c}), \mu_{\{i\}}(\cdot|\eta_{\{i\}^c})) < 1, \quad (7)$$

donde  $\rho(\cdot, \cdot)$  es la *distancia en variación total* entre medidas.

La condición (3) es el precio que se paga para poder construir explícitamente la única medida de Gibbs compatible con  $\Gamma$  y muestrearla en cualquier región finita  $\Lambda$ . Este costo se compensa porque la construcción explícita de la medida permite estudiar sus propiedades. Utilizando la construcción podemos demostrar que las correlaciones espaciales decaen exponencialmente con la distancia.

El trabajo está organizado del siguiente modo:

En el Capítulo 1 introducimos las notaciones, nociones preliminares y resultados que usaremos durante toda la exposición. En la Sección 1.1 se introducen las nociones *acoplamiento de variables aleatorias*, *evento acoplante* y *acoplamiento maximal* y se muestra cómo puede construirse un *acoplamiento maximal*, (ver el Capítulo 1 de Thorisson [14]). En la Sección 1.2 introducimos las definiciones y propiedades básicas de *procesos Markovianos*, *medidas invariantes* y *medidas reversibles*, (ver Liggett [11]).

En el Capítulo 2 construimos el Gibbs sampler estacionario asociado a una densidad  $g : [a, b]^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  y demostramos que la medida de probabilidades inducida por  $g$  es la única medida invariante para esa dinámica. En la construcción usamos fuertemente acoplamiento maximal de familias de variables aleatorias. En la práctica, la implementación de la construcción depende de la capacidad que se tenga de caracterizar la función ínfimo de una familia de densidades parametrizadas mediante un conjunto de índices no numerable.

En el Capítulo 3 utilizamos la metodología desarrollada en el Capítulo 2 para resolver el problema de la simulación perfecta de distribuciones Gaussianas multivariadas truncadas a cajas de la forma  $\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$  (Sección 3.2). La metodología también puede usarse para simular distribuciones Gammas multivariadas truncadas a cajas de la forma  $[0, T]^d$  (Sección 3.3). En la Sección 3.1 caracterizamos el ínfimo de familias de funciones ordenadas por un parámetro real y mostramos que el resultado vale para una amplia variedad de familias exponenciales uniparamétricas.

En el Capítulo 4 repasamos las definiciones básicas del *formalismo de Gibbs: potenciales, especificaciones locales y medidas de Gibbs* ([6] y [7]). Construimos el Gibbs sampler asociado a una especificación Gibbsiana y demostramos que su distribución marginal temporal (que no depende del tiempo) es la única medida invariante para el proceso y es la única medida de Gibbs compatible con la especificación.

En el Capítulo 5 utilizamos los resultados obtenidos en el Capítulo 4 y en la Sección 3.2 para construir versiones estacionarias de campos Gaussianos con spines acotados. En la Sección 5.4 demostramos que, para estos campos, la ausencia de transición de fase es una propiedad general que no depende de la temperatura del sistema.

# Capítulo 1

## Preliminares

**Espacio de configuraciones.** Sean  $a$  y  $b$  dos números reales tales que  $a < b$  y sea  $\mathbb{L}$  un conjunto finito o infinito numerable.

Para cada  $i \in \mathbb{L}$ , tenemos una copia del espacio de medida  $([a, b], \mathcal{B}, \lambda)$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel del intervalo  $[a, b]$  y  $\lambda$  es la medida de Lebesgue.

El *espacio de configuraciones* será el espacio producto

$$\Omega := [a, b]^{\mathbb{L}} = \{\eta = (\eta(i) : i \in \mathbb{L}) : \eta(i) \in [a, b]\}, \quad (1.1)$$

munido de la topología producto y la  $\sigma$ -álgebra de Borel asociada:  $\mathcal{F} = \mathcal{B}^{\mathbb{L}}$ .

Cada configuración  $\eta \in \Omega$  es una colección de valores  $\eta(i) \in [a, b]$ ,  $i \in \mathbb{L}$ , cada uno de los cuales se denomina el valor del *spin en el sitio*  $i$ . Dependiendo del contexto usaremos la notación  $\eta_i$  en lugar de  $\eta(i)$  para designar al valor del spin en el sitio  $i$  correspondiente a la configuración  $\eta$ .

Para cada  $\Lambda \subset \mathbb{L}$ ,  $X_{\Lambda}$  será la proyección de  $\Omega$  sobre  $\Omega_{\Lambda} := [a, b]^{\Lambda}$ :

$$X_{\Lambda}(\eta) = \eta_{\Lambda} = (\eta(i) : i \in \Lambda) \quad \text{cuando } \eta = (\eta(i) : i \in \mathbb{L}). \quad (1.2)$$

Si  $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{L}$  usaremos el mismo símbolo  $X_{\Lambda}$  para la proyección de  $\Omega_{\Delta}$  sobre  $\Omega_{\Lambda}$ . Si  $\Lambda$  y  $\Delta$  son regiones disjuntas de  $\mathbb{L}$  y  $\eta \in \Omega_{\Lambda}$ ,  $\gamma \in \Omega_{\Delta}$ , notaremos por  $\eta\gamma$  la configuración sobre  $\Lambda \cup \Delta$  tal que  $(\eta\gamma)_{\Lambda} = \eta$  y  $(\eta\gamma)_{\Delta} = \gamma$ .

$\mathcal{S}$  será el conjunto de todas las regiones finitas no vacías de  $\mathbb{L}$

$$\mathcal{S} := \{\Lambda \subset \mathbb{L} : 0 < |\Lambda| < \infty\},$$

donde  $|\Lambda|$  es el cardinal del conjunto  $\Lambda$ .

Por definición,  $\mathcal{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$  generada por los *conjuntos cilíndricos* o *finito dimensionales*:

$$\{\eta \in \Omega : \eta_\Lambda \in B\} \quad (\Lambda \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{B}^\Lambda). \quad (1.3)$$

Para cada  $\Delta \subset \mathbb{L}$ ,  $\mathcal{F}_\Delta$  será la  $\sigma$ -álgebra de “todos los eventos que ocurren en  $\Delta$ ”, i.e., la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos (1.3) con  $\Lambda \subset \Delta$ .

**Función indicadora.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos tales que  $A \subset B$ . La función indicadora del conjunto  $A$  será denotada por  $\mathbf{1}\{x \in A\}$ :

$$\mathbf{1}\{x \in A\} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

**Inversas generalizadas.** Si  $G$  es una función de distribución  $\mathbb{R}$ , la *inversa generalizada* de  $G$ ,  $G^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  se define por

$$G^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} : G(x) \geq u\}.$$

Note que  $G(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq G^{-1}(y)$ . Observe que si  $G$  es continua y estrictamente creciente, entonces  $G^{-1}$  es la inversa usual de  $G$ .

En general, si  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función no decreciente acotada su *inversa generalizada*,  $G^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [a, b]$ , se define mediante

$$G^{-1}(y) := \inf\{x \in [a, b] : G(x) \geq y\} \mathbf{1}\{y \leq M\} + b \mathbf{1}\{y > M\},$$

donde  $M = \sup_{x \in [a, b]} G(x)$ . En el caso extremo en que  $G(x) = M$  para todo  $x \in [a, b]$ , se tiene que

$$G^{-1}(y) = a \mathbf{1}\{y \leq M\} + b \mathbf{1}\{y > M\}.$$

## 1.1. Preliminares sobre acoplamiento

**Acoplamiento.** *Acoplar* significa construir conjuntamente (prefijadas las marginales) dos o más variables aleatorias. Un acoplamiento se llama *maximal* si hace coincidir las variables con la máxima probabilidad posible.



Un *acoplamiento* de una familia de variables aleatorias  $X_\eta$ ,  $\eta \in \Omega$  donde  $\Omega$  es un conjunto de índices, es una familia de variables aleatorias  $(\hat{X}_\eta : \eta \in \Omega)$  tal que

$$\hat{X}_\eta \stackrel{D}{=} X_\eta, \quad \eta \in \Omega.$$

Esto es, para cada  $\eta \in \Omega$  las variables  $X_\eta$  y  $\hat{X}_\eta$  tienen la misma distribución.

La notación  $(\hat{X}_\eta : \eta \in \Omega)$  significa que las  $\hat{X}_\eta$  tienen distribución conjunta en el mismo espacio de probabilidades.

**Evento acoplante y acoplamiento maximal.** Un evento  $C$  se llama *evento acoplante*, si  $\hat{X}_\eta$  son idénticas en  $C$ . Esto es,

$$C \subseteq \{\hat{X}_\eta = \hat{X}_{\eta'} \text{ para todo } \eta, \eta' \in \Omega\}.$$

El siguiente resultado, denominado *desigualdad del evento acoplante*, está demostrado en Sec. 4, Cap. 1 de Thorisson [14].

**Teorema 2** Si  $C$  es un evento acoplante de un acoplamiento de variables aleatorias continuas con densidades  $g_1, g_2, \dots$ , entonces

$$\mathbb{P}(C) \leq \int \inf_i g_i(x) dx. \quad (1.4)$$

Sea  $X_\eta$ ,  $\eta \in \Omega$  una familia de variables aleatorias absolutamente continuas con densidades  $g_\eta(x) = g(x; \eta)$ ,  $\eta \in \Omega$ . Suponga que  $\Omega$  es un espacio métrico separable y que para cada  $x \in \mathbb{R}$  la función  $g_x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g_x(\eta) := g(x; \eta)$  es continua en  $\Omega$ . En tal caso, vale la desigualdad del evento acoplante

$$\mathbb{P}(C) \leq \int \inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(x) dx, \quad (1.5)$$

porque, debido a la continuidad de  $g_x$ ,  $\inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(x) = \inf_{\eta \in \Omega_0} g_\eta(x)$ , donde  $\Omega_0 \subset \Omega$  es un subconjunto denso numerable.

Definiendo el *coeficiente de ergodicidad* asociado a la familia  $X_\eta$ ,  $\eta \in \Omega$  por

$$\alpha = \alpha(X_\eta, \eta \in \Omega) := \int \inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(x) dx, \quad (1.6)$$

la desigualdad del evento acoplante se lee

$$\mathbb{P}(C) \leq \alpha. \quad (1.7)$$

El resultado siguiente provee una condición suficiente para la validez de (1.7) en el caso en que  $\Omega$  es un conjunto arbitrario.

**Lema 3** *Sea  $C$  un evento acoplante para un acoplamiento de variables aleatorias absolutamente continuas  $X_\eta$ ,  $\eta \in \Omega$  con densidades  $g_\eta(x)$ , respectivamente. Si existe un subconjunto contable de índices  $\Omega_0 \subset \Omega$  tal que*

$$\inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(x) = \sum_{\zeta \in \Omega_0} g_\zeta(x) \mathbf{1}\{x \in A_\zeta\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde  $(A_\zeta : \zeta \in \Omega_0)$  es una partición medible de  $\mathbb{R}$ , entonces para todo evento acoplante  $C$  vale la desigualdad (1.7).

### Demostración.

Sea  $C$  un evento acoplante y  $\eta \in \Omega$ , para todo  $\zeta \in \Omega_0$  vale que

$$\mathbb{P}(\hat{X}_\eta \in A_\zeta, C) = \mathbb{P}(\hat{X}_\zeta \in A_\zeta, C) \leq \int_{A_\zeta} g_\zeta(x) dx = \int_{A_\zeta} \inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(x) dx.$$

Sumando sobre todo  $\zeta \in \Omega_0$  se obtiene (1.7). □

Suponga que la familia de variables aleatorias  $X_\eta$ ,  $\eta \in \Omega$  satisface la desigualdad del evento acoplante. Cuando existe un evento acoplante  $C$  tal que vale la identidad en (1.7) el acoplamiento se llama *maximal*.

El resultado siguiente muestra que, cualquiera sea el caso, es posible construir un acoplamiento  $(\hat{X}_\eta : \eta \in \Omega)$  con evento acoplante  $C$  tal que vale la igualdad (1.7).

**Teorema 4 (Acoplamiento maximal)** *Toda familia  $X_\eta$ ,  $\eta \in \Omega$  de variables aleatorias absolutamente continuas con densidades  $g_\eta$  admite un acoplamiento  $(\hat{X}_\eta : \eta \in \Omega)$  con evento acoplante  $C$  tal que  $\mathbb{P}(C) = \alpha$ , donde  $\alpha$  es el coeficiente de ergodicidad definido por (1.6). En particular, si para todo evento acoplante vale la desigualdad (1.7), el acoplamiento  $(\hat{X}_\eta : \eta \in \Omega)$  es maximal.*

**Demostración.**

Para cada  $\eta \in \Omega$  sea  $G_\eta(x) = \int_{-\infty}^x g_\eta(y)dy$  la función distribución correspondiente a la variable  $X_\eta$ .

Si  $\alpha = 0$  para construir el acoplamiento deseado basta considerar

$$\hat{X}_\eta = \hat{X}_\eta(U_\eta) := G_\eta^{-1}(U_\eta), \quad \eta \in \Omega,$$

donde  $(U_\eta, \eta \in \Omega)$  es una familia de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en  $[0, 1]$ . En otras palabras, se toman las  $\hat{X}_\lambda$  independientes y  $C = \emptyset$ .

Si  $\alpha = 1$ , todas las variables tienen la misma distribución. Para construir el acoplamiento deseado basta fijar un  $\eta_0$  en  $\Omega$  y definir

$$\hat{X}_\eta = \hat{X}_{\eta_0}(U) := G_{\eta_0}^{-1}(U), \quad \eta \in \Omega,$$

donde  $U$  es una variable con distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . En otras palabras, se toman las  $\hat{X}_\eta$  idénticas y  $C = \{U \leq 1\}$ .

Si  $\alpha \in (0, 1)$ , el acoplamiento deseado se construye del siguiente modo: consideramos las funciones definidas por

$$\alpha(x) := \int_{-\infty}^x \inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(y)dy, \quad (1.8)$$

$$\hat{G}_\eta(x) := \alpha + G_\eta(x) - \alpha(x), \quad \eta \in \Omega, \quad (1.9)$$

y definimos

$$\hat{X}_\eta = \hat{X}_\eta(U) := \mathbf{1}\{U \leq \alpha\}\alpha^{-1}(U) + \mathbf{1}\{U > \alpha\}\hat{G}_\eta^{-1}(U), \quad \eta \in \Omega, \quad (1.10)$$

donde  $U$  es una variable con distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ .

En efecto, para todo  $x \in \mathbb{R}$  vale que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{X}_\eta \leq x) &= \mathbb{P}(\hat{X}_\eta \leq x, U \leq \alpha) + \mathbb{P}(\hat{X}_\eta \leq x, U > \alpha) \\ &= \mathbb{P}(\alpha^{-1}(U) \leq x, U \leq \alpha) + \mathbb{P}(\hat{G}_\eta^{-1}(U) \leq x, U > \alpha) \\ &= \mathbb{P}(U \leq \alpha(x), U \leq \alpha) + \mathbb{P}(U \leq \hat{G}_\eta(x), U > \alpha) \\ &= \alpha(x) + \hat{G}_\eta(x) - \alpha \\ &= G_\eta(x). \end{aligned}$$

$C = \{U \leq \alpha\}$  es un evento acoplante y  $\mathbb{P}(C) = \alpha$ . □

Otra demostración de este Teorema se encuentra en Thorisson[14].

## 1.2. Preliminares sobre procesos Markovianos

Sea  $\Omega$  un espacio métrico compacto con estructura medible dada por la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel. Sea  $(\eta_t : t \geq 0)$  un proceso de Markov sobre  $\Omega$ . Sea  $\{S(t) : t \geq 0\}$  el semigrupo asociado definido sobre funciones continuas  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$S(t)f(\eta) := \mathbb{E}[f(\eta_t)|\eta_0 = \eta] \quad (1.11)$$

y sea  $L$  el correspondiente generador infinitesimal

$$Lf(\eta) = \left. \frac{d}{dt} S(t)f(\eta) \right|_{t=0}. \quad (1.12)$$

El semigrupo actúa sobre medidas de probabilidad sobre  $\Omega$  mediante la fórmula  $(\mu S(t))f = \mu(S(t)f)$ ;  $\mu S(t)$  es la ley del proceso a tiempo  $t$  cuando la distribución inicial es  $\mu$ .<sup>1</sup>

**Definición 5 (Medidas invariantes)** *Una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\Omega$  se dice invariante para el proceso con semigrupo  $S(t)$  si  $\mu S(t) = \mu$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Definición 6 (Medidas reversibles)** *Una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\Omega$  se dice reversible para el proceso con semigrupo  $S(t)$  si  $\mu(fS(t)h) = \mu(hS(t)f)$  para toda  $f, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continuas.*

Los siguientes resultados que caracterizan a las medidas de probabilidad invariantes (reversibles) para un proceso de Markov en términos de su generador infinitesimal  $L$  son bien conocidos, (Cfr. Liggett [11]),

1. Una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\Omega$  es invariante si y sólo si  $\mu(Lf) = 0$  para toda función (cilíndrica)  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua.
2. Una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\Omega$  es reversible si y sólo si  $\mu(fLh) = \mu(hLf)$  para toda  $f, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continuas. En consecuencia, si  $\mu$  es reversible, entonces  $\mu$  es invariante.

---

<sup>1</sup>Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible, la notación  $\mu(f)$  designa su correspondiente esperanza:

$$\mu(f) = \int \mu(d\eta)f(\eta). \quad (1.13)$$

# Capítulo 2

## Simulación perfecta de distribuciones sobre $[a, b]^d$

En este Capítulo resolvemos el problema de la simulación perfecta de distribuciones  $d$ -dimensionales ( $d \in \mathbb{N}$ ), absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue, con soporte en la caja  $\Omega = [a, b]^d$ .

### 2.1. Definiciones y resultados.

Sea  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  una densidad de probabilidades.

**Gibbs sampler.** El *Gibbs sampler* asociado a  $g$  es un proceso Markoviano de saltos ( $\eta_t : t \geq 0$ ) sobre  $\Omega$  con generador infinitesimal  $L$  definido sobre funciones continuas  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$Lf(\eta) = \sum_{i=1}^d L_i f(\eta), \quad L_i f(\eta) = \int_a^b g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) dx [f(\eta + (x - \eta(i))\mathbf{e}_i) - f(\eta)], \quad (2.1)$$

En palabras, a tasa 1, en cada sitio  $i \in \{1, \dots, d\}$  la variable  $\eta(i) \in [a, b]$  se actualiza con la ley de probabilidades inducida por la densidad condicional  $g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  de la  $i$ -ésima coordenada dadas todas las demás

$$g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) := \frac{g(\eta + (x - \eta(i))\mathbf{e}_i)}{\int_a^b g(\eta + (y - \eta(i))\mathbf{e}_i) dy}. \quad (2.2)$$

Aquí  $\mathbf{e}_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ .

La existencia de un proceso  $\eta_t$  con generador  $L$  tal que  $\frac{d}{dt}\mathbb{E}[f(\eta_t)|\eta_0 = \eta]|_{t=0} = Lf(\eta)$  será demostrada, usando la construcción gráfica de Harris [8], en la Sección 2.2.

**Coefficientes de ergodicidad.** Para cada  $i = 1, \dots, d$ , sea  $\alpha_i(g)$  el coeficiente de ergodicidad asociado a la familia de variables aleatorias  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  con densidades condicionales  $g_i(\cdot|\eta_{\{i\}^c})$  definido en (1.6):

$$\alpha_i(g) := \int_a^b \inf_{\eta \in \Omega} g_i(x|\eta_{\{i\}^c}) dx. \quad (2.3)$$

El primer resultado es la condición suficiente para la existencia de un proceso estacionario con la dinámica del Gibbs sampler asociado a la densidad  $g$ .

**Teorema 7** *Si*

$$\alpha(g) := \min_{i=1,\dots,d} \alpha_i(g) > 0, \quad (2.4)$$

*entonces, existe un proceso de Markov estacionario  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  sobre  $\Omega$  con generador infinitesimal  $L$ .*

Este Teorema será demostrado en la Sección 2.2.

El segundo resultado afirma que el Gibbs sampler asociado a la densidad  $g$  admite una única medida invariante.

**Teorema 8** *La medida de probabilidades  $\mu$  (inducida por  $g$ ) sobre  $\Omega$  es la única medida invariante (y reversible) para el Gibbs sampler asociado a  $g$ .*

Este Teorema será demostrado en la Sección 2.3.

## 2.2. Construcción gráfica del Gibbs sampler

Bajo la hipótesis  $\alpha(g) > 0$ , construimos un proceso estacionario con la dinámica del Gibbs Sampler combinando el método gráfico de Harris y una variante del algoritmo de Propp y Wilson denominado *Coupling from the past* [13].

La idea es la siguiente. Cada coordenada  $i = 1, \dots, d$ , independientemente de las demás, tiene asociado un proceso de Poisson marcado de tasa 1,  $(\mathcal{T}(i), \mathcal{U}(i))$ :

$$\mathcal{T}(i) = (T_n(i) : n \in \mathbb{Z}), \quad \mathcal{U}(i) = (U_n(i) : n \in \mathbb{Z}),$$

donde  $T_n(i)$  es la  $n$ -ésima época de un proceso de Poisson estacionario de tasa 1 en  $\mathbb{R}$  (i.e.,  $T_0(i) < 0 \leq T_1(i)$ ,  $-T_0(i)$ ,  $T_1(i)$  y  $T_n(i) - T_{n-1}(i)$  para  $n \neq 1$  son i. i. d. exponenciales de media 1) y  $U_n(i)$  son i. i. d. con ley uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . Todas las variables involucradas en la construcción son independientes.

A tiempo  $t = T_n(i)$  el spin en el sitio del  $i$  cambia de valor de acuerdo con una variable aleatoria  $X_{i, \eta_{t-}}$  con densidad condicional  $g_i(\cdot | (\eta_{t-})_{\{i\}^c})$ . La variable  $X_{i, \eta_{t-}}$  se obtiene a partir de la variable uniforme  $U_n(i)$  construyendo un acoplamiento  $(\hat{X}_{i, \eta} : \eta \in \Omega)$  para la familia de variables aleatorias  $X_{i, \eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  con densidades  $g_i(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$  tal como fue definido en la demostración del Teorema 4.

**Observación 9** La hipótesis  $\alpha_i(g) > 0$  garantiza que el evento acoplante  $\{U_n(i) < \alpha_i(g)\}$  ocurre con probabilidad positiva. En tal caso, el valor  $\eta_t(i)$  sólo depende de  $U_n(i)$  y no de la configuración  $\eta_{t-}$ .

La construcción del Gibbs sampler estacionario  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  se realiza por etapas:

1. Para cada  $s \in \mathbb{R}$  y  $\xi \in \Omega$  construimos procesos  $(\eta_{[s, t]}^\xi : t \geq s)$  con la dinámica del Gibbs sampler iniciados a tiempo  $s$  en la configuración  $\xi$ . Estos procesos son funciones determinísticas de la configuración  $\xi$  y de las épocas de Poisson (y sus marcas uniformes asociadas) contenidas en el intervalo  $[s, t]$ .

A causa de la invariancia por traslaciones de los procesos de Poisson marcados, fijado  $\xi \in \Omega$ , la ley de  $\eta_{[s, t]}^\xi$  depende sólo de  $t - s$  y no de la ubicación temporal del intervalo  $[s, t]$ .

2. Definimos tiempos de parada reversos  $\tau(t) \in (-\infty, t]$  tales que  $\eta_{[s, t]}^\xi = \eta_{[\tau(t), t]}^\xi$  para todo  $s \leq \tau(t)$  y  $\eta_{[\tau(t), t]}^\xi$  no depende de  $\xi$ .

La condición  $\alpha(g) > 0$  garantiza que  $\mathbb{P}(\tau(t) > -\infty) = 1$ .

3. El Gibbs sampler estacionario asociado a  $g$ ,  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$ , se obtiene definiendo  $\eta_t := \eta_{[\tau(t), t]}^\xi$ .

**Construcción.**

El espacio de probabilidad donde se realizan todas las construcciones es el espacio generado por la familia independiente de procesos de Poisson marcados de tasa 1 en  $\mathbb{R}$ :  $(\mathcal{T}, \mathcal{U}) := \{(\mathcal{T}(i), \mathcal{U}(i)) : i = 1, \dots, d\}$ . Denotamos por  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{E}$  la probabilidad y la esperanza inducidas por esos procesos de Poisson marcados.

**1. Construcción de los procesos  $(\eta_{[s,t]}^\xi : t \geq s)$ .**

Ordenamos de menor a mayor todas las épocas de los procesos de Poisson contenidas en  $[s, \infty)$ :  $T_1 < T_2 < \dots < T_k < T_{k+1} < \dots$ .

El proceso inicia a tiempo  $T_0 := s$  en la configuración  $\xi$ :

$$\eta_{[s, T_0]}^\xi := \xi. \quad (2.5)$$

Entre época y época el proceso permanece constante:

$$\eta_{[s,t]}^\xi := \eta_{[s, T_k]}^\xi \quad \text{para todo } t \in [T_k, T_{k+1}), \quad k \geq 0, \quad (2.6)$$

donde para cada  $k \geq 1$ , el valor de  $\eta_{[s, T_k]}^\xi$  se define por

$$\eta_{[s, T_k]}^\xi := \sum_{i=1}^d \left( \eta_{[s, T_{k-1}]}^\xi + \left( \hat{X}_{i, \eta_{[s, T_{k-1}]}^\xi}(U_{T_k}(i)) - \eta_{[s, T_{k-1}]}^\xi(i) \right) \mathbf{e}_i \right) \mathbf{1}\{T_k \in \mathcal{T}(i)\}. \quad (2.7)$$

$U_{T_k}(i)$  es la variable aleatoria uniforme en el  $[0, 1]$  asociada a la época de Poisson  $T_k$  correspondiente al sitio  $i$ , y  $(\hat{X}_{i, \eta}(U_{T_k}(i)) : \eta \in \Omega)$  es un acoplamiento para la familia de variables aleatorias  $X_{i, \eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  con densidades  $g_i(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$  tal como fue definido en la demostración del Teorema 4.

**Proposición 10** *Para cada  $s \in \mathbb{R}$  y cada  $\xi \in \Omega$  el proceso  $(\eta_{[s,t]}^\xi : t \geq s)$  tiene la dinámica del Gibbs Sampler asociado a la densidad  $g$ . Esto es*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} \left[ f(\eta_{[s, t+h]}^\xi) - f(\eta_{[s, t]}^\xi) \mid \eta_{[s, t]}^\xi = \eta \right]}{h} = Lf(\eta)$$

donde  $L$  es el generador infinitesimal definido en (2.1).



**Demostración.** Por construcción resulta que

$$\begin{aligned}
f(\eta_{[s, t+h]}^\xi) &= \left( \prod_{i=1}^d \mathbf{1}\{|\mathcal{T}(i) \cap [t, t+h]| = 0\} \right) f(\eta_{[s, t]}^\xi) \\
&+ \sum_{i=1}^d \mathbf{1}\{|\mathcal{T}(i) \cap [t, t+h]| = 1\} \left( \prod_{j \neq i} \mathbf{1}\{|\mathcal{T}(j) \cap [t, t+h]| = 0\} \right) \\
&\times f \left( \eta_{[s, t]}^\xi + \left( \hat{X}_{i, \eta_{[s, t]}^\xi}(U(i)) - \eta_{[s, t]}^\xi(i) \right) \mathbf{e}_i \right) \\
&+ \text{otros términos.}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde  $U(i)$  es la marca asociada a la única época del proceso de Poisson  $\mathcal{T}(i)$  ocurrida durante el intervalo de tiempo  $[t, t+h]$  y “otros términos” están relacionados con la presencia de más de una época de Poisson en el intervalo  $[t, t+h]$  que tiene probabilidad del orden  $h^2$ .

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Las propiedades de independencia de los procesos de Poisson marcados junto a la identidad (2.8) implican que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ f(\eta_{[s, t+h]}^\xi) \middle| \eta_{[s, t]}^\xi = \eta \right] &= (e^{-h})^d f(\eta) + h \sum_{i=1}^d \int_a^b g_i(x | \eta_{\{i\}^c}) dx f(\eta + (x - \eta(i)) \mathbf{e}_i) \\
&+ o(h)
\end{aligned}$$

El resultado se obtiene observando que  $(e^{-h})^d = 1 - hd + o(h)$  y reordenando términos.  $\square$

## 2. Tiempos de parada reversos $\tau(t)$ .

Diremos que ocurre un *paraguas* en el intervalo  $[s, t]$  si existen  $d$  épocas de Poisson consecutivas  $t_1 < t_2 < \dots < t_d$  contenidas en el intervalo  $[s, t]$ , cada una asociada con un y sólo un sitio  $i \in \{1, \dots, d\}$ :

$$t_i \in \mathcal{T}(\sigma(i)), \quad i = 1, \dots, d$$

donde  $\sigma : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$  es una permutación de índices, en las que ocurren los eventos acoplantes  $\{U_{t_i}(\sigma(i)) \leq \alpha_{\sigma(i)}(g)\}$ , donde  $U_t(i)$  es la variable uniforme asociada a la época de Poisson  $t \in \mathcal{T}(i)$  y  $\alpha_i(g)$  es el coeficiente de ergodicidad definido en (2.3).

Por construcción, cuando ocurre un *paraguas* en el intervalo  $[s, t]$  el valor del proceso  $\eta_{[s, t]}^\xi$  no depende de  $\xi$ .

Fijado  $t \in \mathbb{R}$ , definimos el tiempo de parada reverso  $\tau(t)$  de la siguiente manera. Exploremos la construcción gráfica hacia atrás en el tiempo hasta encontrar el primer momento en que ocurre un paraguas:

$$\tau(t) := \text{máx}\{s < t : \text{ocurre un paraguas en } [s, t]\} \quad (2.9)$$

Por definición  $\tau(t)$  es una función determinística de los procesos de Poisson marcados y es un tiempo de parada reverso debido a que sólo depende de los eventos ocurridos después de él: para cada  $s \in (-\infty, t]$ ,  $\{\tau(t) \geq s\}$  pertenece a  $\sigma$ -álgebra de los eventos ocurridos después de  $s$ .

**Proposición 11** *Los tiempos de parada reversos  $\tau(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  son finitos con probabilidad igual a 1.*

**Demostración.** La probabilidad de encontrar exactamente una época de Poisson en cada sitio  $i \in \{1, \dots, d\}$  durante el intervalo de tiempo  $[0, 1)$  tiene probabilidad  $(e^{-1})^d$  y la probabilidad de que las variables aleatorias uniformes asociadas no superen a los correspondientes coeficientes de ergodicidad es  $\prod_{i=1}^d \alpha_i(g)$ . Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(\text{ocurre un paraguas en } [0, 1)) \geq e^{-d} \prod_{i=1}^d \alpha_i(g) > 0.$$

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  sea  $Z_n := \mathbf{1}\{\text{ocurre un paraguas en } [n, n + 1)\}$ . Las variables aleatorias  $Z_n$  son i.i.d. y  $\mathbb{E}[Z_0] > 0$ . Aplicando la Ley Fuerte de los Grandes Números se obtiene que  $\mathbb{P}(\text{ocurre un paraguas en } [n, n + 1) \text{ i. o.}) = 1$ .  $\square$

**3. Gibbs Sampler estacionario.** Definimos el Gibbs sampler estacionario  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  por

$$\eta_t := \eta_{[\tau(t), t]}^\xi, \quad \xi \in \Omega. \quad (2.10)$$

De la Proposición 11 se deduce que el proceso  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  está bien definido con probabilidad igual a 1: si  $\tau(t)$  es finito,  $\eta_{[\tau(t), t]}^\xi$  no depende de  $\xi$  y  $\eta_{[s, t]}^\xi = \eta_{[\tau(t), t]}^\xi$  para todo  $s \leq \tau(t)$ . La ley de  $\eta_t$  no depende de  $t$  porque  $\eta_t$  es una función determinística de los procesos de Poisson marcados  $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$  que son invariantes por traslaciones temporales. Por construcción  $\eta_t$  tiene la dinámica del Gibbs sampler asociado a  $g$ .  $\square$

### 2.3. Unicidad de la medida invariante

La unicidad de la medida invariante para el Gibbs sampler asociado a  $g$  es consecuencia de la construcción realizada en la Sección 2.2 y del siguiente resultado.

**Lema 12** Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y sea  $f$  una función medible y acotada. Entonces

$$|\mathbb{E}[f(X) - f(Y)]| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(X \neq Y).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X) - f(Y)]| &= \left| \int_{\Omega} \mathbb{P}(d\omega) [f(X(\omega)) - f(Y(\omega))] \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \mathbb{P}(d\omega) [f(X(\omega)) - f(Y(\omega))] \mathbf{1}_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}} \right| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)). \quad \square \end{aligned}$$

**Demostración del Teorema 8.**

**1. Unicidad.** Suponga que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son medidas invariantes para el Gibbs sampler asociado a  $g$ . Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Usando la construcción conjunta de los Gibbs sampler  $(\eta_{[s,t]}^\xi : t \geq s)$ ,  $\xi \in \Omega$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y los resultados obtenidos en la Sección 2.2 puede verse que para todo  $t \geq 0$  vale la desigualdad:

$$|\mu_1(f) - \mu_2(f)| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\tau(0) < -t). \quad (2.11)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |\mu_1(f) - \mu_2(f)| &= \left| \int \mu_1(d\xi) \mathbb{E}[f(\eta_{[0,t]}^\xi)] - \int \mu_2(d\zeta) \mathbb{E}[f(\eta_{[0,t]}^\zeta)] \right| \\ &= \left| \int \mu_1(d\xi) \mathbb{E}[f(\eta_{[-t,0]}^\xi)] - \int \mu_2(d\zeta) \mathbb{E}[f(\eta_{[-t,0]}^\zeta)] \right| \\ &\leq \int \int \mu_1(d\xi) \mu_2(d\zeta) \left| \mathbb{E}[f(\eta_{[-t,0]}^\xi) - f(\eta_{[-t,0]}^\zeta)] \right| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int \int \mu_1(d\xi) \mu_2(d\zeta) \mathbb{P}(\eta_{[-t,0]}^\xi \neq \eta_{[-t,0]}^\zeta) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\tau(0) < -t). \end{aligned}$$

En la primera igualdad se usó la definición de medida invariante; en la segunda usamos que la ley del proceso  $\eta_{[s,t]}^\xi$  es la misma que la del proceso  $\eta_{[s-t,0]}^\xi$ . En la primer desigualdad se usó que los procesos están construidos en el mismo espacio de probabilidades; en la segunda el Lema 12; en la tercera la definición de  $\tau(0)$ :  $\left\{ \eta_{[-t,0]}^\xi \neq \eta_{[-t,0]}^\zeta \right\} \subset \{ \tau(0) < -t \}$ .

La desigualdad (2.11) implica que  $|\mu_1(f) - \mu_2(f)| = 0$  porque  $\mathbb{P}(\tau(0) > -\infty) = 1$ . Como  $f$  es continua arbitraria,  $\mu_1 = \mu_2$ .

## 2. Reversibilidad.

La reversibilidad de la medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\Omega$  inducida por la densidad  $g$  es consecuencia de las identidades, válidas para cada par de funciones continuas  $h, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{[a,b]^d} \int_a^b \mu(d\eta) \mu_i(d\xi_i | \eta_{\{i\}^c}) h(\eta) f(\eta + (\xi_i - \eta_i) \mathbf{e}_i) \\ &= \int_{[a,b]^d} \int_a^b \mu(d\eta) \mu_i(d\xi_i | \eta_{\{i\}^c}) h(\eta + (\xi_i - \eta_i) \mathbf{e}_i) f(\eta), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\mu_i(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$  es la medida sobre  $[a, b]$  con densidad  $g_i(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$ .

Un poco de cálculo muestra que, para cada par de funciones continuas  $f, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , las identidades (2.12) implican las identidades

$$\mu(hL_i f) = \mu(fL_i h), \quad i = 1, \dots, d \quad (2.13)$$

resultando así la reversibilidad de  $\mu$ .

Las identidades (2.12) se obtienen factorizando la medida  $\mu$  en la forma

$$\mu(d\eta) = \mu_i(d\eta_i | \eta_{\{i\}^c}) \mu_{\{i\}^c}(d\eta_{\{i\}^c}), \quad (2.14)$$

donde  $\mu_{\{i\}^c}(\cdot)$  es la marginal de  $\mu$  correspondiente a las variables  $\eta_{\{i\}^c}$ .

**Las identidades (2.12), implican las identidades (2.13).** Usando la definición de  $L_i$  dada en (2.1) puede verse que

$$\begin{aligned}
\mu(hL_i f) &= \int_{[a,b]^d} \mu(\eta)h(\eta)L_i f(\eta) \\
&= \int_{[a,b]^d} \mu(\eta)h(\eta) \int_a^b \mu_i(d\xi_i|\eta_{\{i\}^c}) [f(\eta + (\xi_i - \eta_i)\mathbf{e}_i) - f(\eta)] \\
&= \int_{[a,b]^d} \int_a^b \mu(\eta)\mu_i(d\xi_i|\eta_{\{i\}^c}) f(\eta + (\xi_i - \eta_i)\mathbf{e}_i)h(\eta) - \mu(fh) \\
&= \int_{[a,b]^d} \int_a^b \mu(d\xi)\mu_i(d\eta_i|\xi_{\{i\}^c}) f(\xi)h(\xi + (\eta_i - \xi_i)\mathbf{e}_i) - \mu(fh) \\
&= \int_{[a,b]^d} \mu(d\xi)f(\xi) \int_a^b \mu_i(d\eta_i|\xi_{\{i\}^c}) [h(\xi + (\eta_i - \xi_i)\mathbf{e}_i) - h(\xi)] \\
&= \int_{[a,b]^d} \mu(d\xi)f(\xi)L_i h(\xi) \\
&= \mu(fL_i h).
\end{aligned}$$

En la cuarta igualdad usamos la identidad (2.12). □

**Las factorizaciones (2.14), implican las identidades (2.12).**

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]^d} \int_a^b \mu(d\eta)\mu_i(dy|\eta_{\{i\}^c})h(\eta)f(\eta + (y - \eta_i)\mathbf{e}_i) = \\
&\int_{[a,b]^d} \mu(d\eta)h(\eta) \left[ \int_a^b \mu_i(dy|\eta_{\{i\}^c})f(\eta + (y - \eta_i)\mathbf{e}_i) \right] = \\
&\int_{[a,b]^{\{i\}^c}} \mu_{\{i\}^c}(d\eta_{\{i\}^c}) \left[ \int_a^b \mu_i(dx|\eta_{\{i\}^c})h(\eta + (x - \eta_i)\mathbf{e}_i) \right] \left[ \int_a^b \mu_i(dy|\eta_{\{i\}^c})f(\eta + (y - \eta_i)\mathbf{e}_i) \right] = \\
&\int_{[a,b]^{\{i\}^c}} \mu_{\{i\}^c}(d\eta_{\{i\}^c}) \left[ \int_a^b \mu_i(dy|\eta_{\{i\}^c})f(\eta + (y - \eta_i)\mathbf{e}_i) \right] \left[ \int_a^b \mu_i(dx|\eta_{\{i\}^c})h(\eta + (x - \eta_i)\mathbf{e}_i) \right] = \\
&\int_{[a,b]^d} \mu(d\eta)f(\eta) \left[ \int_a^b \mu_i(dy|\eta_{\{i\}^c})h(\eta + (y - \eta_i)\mathbf{e}_i) \right] = \\
&\int_{[a,b]^d} \mu(d\eta) \int_a^b \mu_i(dy|\eta_{\{i\}^c})h(\eta + (y - \eta_i)\mathbf{e}_i)f(\eta). \quad \square
\end{aligned}$$



# Capítulo 3

## Aplicaciones

En la práctica, la construcción desarrollada el Capítulo 2 para simular una distribución sobre  $\Omega = [a, b]^d$  con densidad  $g$  presupone la capacidad de acoplar maximalmente cada una de las familias de distribuciones condicionales  $(\mu_i(\cdot | \eta_{\{i\}^c}), \eta \in \Omega), i = 1, \dots, d$ .

La construcción del acoplamiento maximal de una familia de variables aleatorias  $X_\eta, \eta \in \Omega$  con densidades  $g_\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , respectivamente, descrita en el Teorema 4 puede realizarse solamente cuando la función

$$\inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(x), \quad x \in [a, b] \tag{3.1}$$

puede caracterizarse explícitamente.

En este Capítulo mostramos que si la familia de densidades  $g_\eta, \eta \in \Omega$ , puede ordenarse por un parámetro real es posible caracterizar explícitamente la función ínfimo (3.1) y que se realiza como un mínimo. Usando ese resultado mostramos que para una amplia variedad de familias exponenciales uniparamétricas <sup>1</sup> puede realizarse el acoplamiento maximal descrito en el Teorema 4. Esto nos permite resolver, por ejemplo, el problema de la simulación perfecta de Gaussianas multivariadas truncadas a cajas de la forma  $\Omega = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ .

---

<sup>1</sup>Entre las que se encuentran las distribuciones Gaussiana con varianza fija y sus versiones truncadas, Gamma fijado el parámetro de forma o el parámetro de escala y sus versiones truncadas, Beta fijado alguno de los dos parámetros

### 3.1. Mínimos para algunas familias exponenciales a 1 parámetro

#### Familias $\theta$ -ordenadas.

Sea  $\Theta \subset \mathbb{R}$  un conjunto de índices. Diremos que la familia de funciones  $f_\theta : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \Theta$ , es  $\theta$ -ordenada (en sentido creciente) si

(O.1) Para toda pareja  $\theta_1 < \theta_2$ , existe un único  $x(\theta_1, \theta_2) \in D$  tal que  $f_{\theta_2}(x) \leq f_{\theta_1}(x)$  si y sólo si  $x \leq x(\theta_1, \theta_2)$ .

(O.2)  $x(\theta_1, \theta) < x(\theta, \theta_2)$  para toda terna  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ .

**Observación 13** Cuando una familia de densidades de probabilidad  $f_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ , es  $\theta$ -ordenada, la familia de variables aleatorias correspondiente,  $X_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ , es *estocásticamente creciente*: si  $\theta_1 < \theta_2$ , entonces  $\mathbb{P}(X_{\theta_1} \leq x) \geq \mathbb{P}(X_{\theta_2} \leq x)$ . En palabras, la variable correspondiente al parámetro mayor tiene la cola (derecha) más pesada que la correspondiente al parámetro menor.

**Lema 14** Sea  $f_\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  una familia de funciones  $\theta$ -ordenada. Entonces, para toda pareja  $\theta_1 < \theta_2$  vale que

$$\min_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} f_\theta(x) = f_{\theta_2}(x)\mathbf{1}\{x \leq x(\theta_1, \theta_2)\} + f_{\theta_1}(x)\mathbf{1}\{x(\theta_1, \theta_2) < x\}. \quad (3.2)$$

**Demostración.** De la propiedad (O.1) resulta que

$$\min(f_{\theta_1}(x), f_{\theta_2}(x)) = f_{\theta_2}(x)\mathbf{1}\{x \leq x(\theta_1, \theta_2)\} + f_{\theta_1}(x)\mathbf{1}\{x(\theta_1, \theta_2) < x\}.$$

Para completar la prueba basta ver que  $\min(f_{\theta_1}(x), f_{\theta_2}(x)) \leq f_\theta(x)$  para todo  $x \in D$  y para todo  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .

Sea  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$  y supongamos que para algún  $x \in D$  vale la desigualdad  $f_\theta(x) < \min(f(x; \theta_1), f(x; \theta_2))$ . Usando la propiedad (O.1) resulta que  $x < x(\theta_1, \theta)$  y  $x(\theta, \theta_2) < x$ . Lo que contradice la propiedad (O.2).  $\square$



**Familias exponenciales uniparamétricas.** Sea  $\Theta \subset \mathbb{R}$  un subconjunto de la recta real. Las familias de distribuciones  $\mu_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ , con densidades de probabilidad  $f_\theta(x)$  representables en la forma

$$f_\theta(x) = C(\theta)e^{\theta T(x)}h(x), \quad (3.3)$$

donde todas las funciones del lado derecho de la igualdad son medibles y  $h(x) > 0$ , se llaman *familias exponenciales uniparamétricas*.

El siguiente resultado es bien conocido (Ver [10] Capítulo 2, Sección 7).

**Lema 15** *Sea  $X$  una variable aleatoria cuya densidad pertenece a una familia exponencial uniparamétrica  $\mu_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $\Theta$  abierto. Sean  $\mathbb{E}_\theta$  y  $\text{Var}_\theta$  la esperanza y la varianza, respectivamente, correspondientes a la distribución  $\mu_\theta$ . Vale que*

$$\mathbb{E}_\theta[T(X)] = \frac{d}{d\theta} \log C(\theta), \quad (3.4)$$

$$\text{Var}_\theta[T(X)] = -\frac{d^2}{d\theta^2} \log C(\theta), \quad (3.5)$$

*En particular, la función  $-\log C(\theta)$  es convexa.*

El resultado siguiente caracteriza la función mínimo para familias exponenciales uniparamétricas cuando la función  $T(x)$  correspondiente a la representación (3.3) es estrictamente creciente.

**Teorema 16** *Sea  $\mu_\theta : \theta \in \mathbb{R}$ , una familia exponencial uniparamétrica con densidades  $f_\theta$  representables en la forma (3.3) con  $T(x)$  estrictamente creciente. Si  $\theta_m < \theta_M$ , entonces*

$$\min_{\theta \in [\theta_m, \theta_M]} f_\theta(x) = f_{\theta_M}(x)\mathbf{1}\{x \leq x(\theta_m, \theta_M)\} + f_{\theta_m}(x)\mathbf{1}\{x(\theta_m, \theta_M) < x\},$$

donde

$$x(\theta_m, \theta_M) = T^{-1} \left( \frac{-\log C(\theta_M) + \log C(\theta_m)}{\theta_M - \theta_m} \right). \quad (3.6)$$

**Demostración.** Basta ver que la familia de densidades  $f_\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , es  $\theta$ -ordenada y utilizar el resultado del Lema 14.

La propiedad (O.1) se obtiene a partir de la representación (3.3) para las densidades  $f_\theta$ . Usando que  $T(x)$  es estrictamente creciente un poco de cálculo muestra que para cada pareja  $\theta_1 < \theta_2$ , vale que

$$f_{\theta_2}(x) \leq f_{\theta_1}(x) \Leftrightarrow x \leq T^{-1} \left( \frac{-\log C(\theta_2) + \log C(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} \right) =: x(\theta_1, \theta_2).$$

La propiedad (O.2) se obtiene usando que la función  $T(x)$  es creciente y observando que  $T(x(\theta_1, \theta_2))$  es el cociente incremental de la función convexa  $-\log C(\theta)$  en el intervalo  $[\theta_1, \theta_2]$ . La convexidad de  $-\log C(\theta)$  implica que

$$T(x(\theta_1, \theta)) = \frac{-\log C(\theta) + \log C(\theta_1)}{\theta - \theta_1} < \frac{-\log C(\theta_2) + \log C(\theta)}{\theta_2 - \theta} = T(x(\theta, \theta_2))$$

cualquiera sea  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . □

Extendiendo la noción de familia  $\theta$ -ordenada <sup>2</sup> se puede demostrar un resultado análogo al obtenido en el Teorema 16 para familias exponenciales uniparamétricas cuando la función  $T(x)$  es decreciente:

$$\min_{\theta \in [\theta_m, \theta_M]} f_\theta(x) = f_{\theta_m}(x) \mathbf{1}\{x \leq x(\theta_m, \theta_M)\} + f_{\theta_M}(x) \mathbf{1}\{x(\theta_m, \theta_M) < x\}.$$

### Ejemplos.

1. *Gaussiana*: Fijada la varianza, las distribuciones Gaussianas, y sus versiones truncadas, están ordenadas (en sentido creciente) por la media.
2. *Gammas*: Fijado el parámetro de forma (escala) las distribuciones Gamma están ordenadas por el parámetro de escala (forma).
3. *Betas*: Fijado uno de los parámetros las distribuciones Beta están ordenadas por el otro parámetro.

---

<sup>2</sup>Reemplazando la desigualdad  $x \leq x(\theta_1, \theta_2)$  que aparece en la propiedad (O.1) por la desigualdad  $x(\theta_1, \theta_2) \leq x$  y reemplazando la desigualdad  $x(\theta_1, \theta) < x(\theta, \theta_2)$  que aparece en la propiedad (O.2) por la desigualdad  $x(\theta, \theta_2) < x(\theta_1, \theta)$  obtenemos la noción de familia  $\theta$ -ordenada (en sentido decreciente).

## 3.2. Simulación perfecta de Gaussianas multivariadas truncadas

### 3.2.1. La distribución Gaussiana truncada

Sean  $a$  y  $b$  dos números reales tales que  $a < b$ . Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución *Gaussiana truncada* al intervalo  $[a, b]$ , en símbolos  $X \sim \mathcal{N}_{a,b}(\mathbf{m}, \sigma^2)$ , si admite una función densidad de la forma

$$g_{a,b}(x; \mathbf{m}, \sigma^2) = \frac{1}{A_{a,b}(\mathbf{m}, \sigma)} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mathbf{m}}{\sigma}\right) \mathbf{1}\{a \leq x \leq b\}, \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ ;  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  es la campana de Gauss,  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy$  es la función de distribución correspondiente, y

$$A_{a,b}(\mathbf{m}, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{b - \mathbf{m}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mathbf{m}}{\sigma}\right) \quad (3.8)$$

es una constante de normalización. En otras palabras, la distribución Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a,b}(\mathbf{m}, \sigma^2)$  es la distribución Gaussiana de media  $\mathbf{m}$  y varianza  $\sigma^2$  condicionada al intervalo  $[a, b]$ .

### 3.2.2. Acoplamiento maximal de Gaussianas truncadas

Fijados  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$  y fijado  $\sigma > 0$ , las densidades Gaussianas truncadas  $g_{a,b}(x; \mathbf{m}, \sigma^2)$  definidas por (3.7) están unívocamente determinadas por el valor del parámetro  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ . En lo que sigue, mantendremos fijos los parámetros  $a, b$  y  $\sigma$  y escribiremos  $g_{\mathbf{m}}(x)$  para designar a la densidad de la Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a,b}(\mathbf{m}, \sigma^2)$ .

Sean  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  dos números reales tales que  $\mathbf{m}_1 < \mathbf{m}_2$ . Usando los Teoremas 16 y 4 construimos explícitamente un acoplamiento maximal para la familia de Gaussianas truncadas  $X_{\mathbf{m}} \sim \mathcal{N}_{a,b}(\mathbf{m}, \sigma^2)$ ,  $\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]$ .

La familia de densidades  $g_{\mathbf{m}}(x)$ ,  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$  es  $\mathbf{m}$ -ordenada en sentido creciente debido a que cada densidad puede representarse en la forma

$$g_{\mathbf{m}}(x) = C(\mathbf{m}) e^{\mathbf{m}T(x)} h(x),$$

donde  $T(x)$  es estrictamente creciente:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{m}) &= \frac{1}{A_{a,b}(\mathbf{m}, \sigma)\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\mathbf{m}^2}{2\sigma^2}\right), \\ T(x) &= \frac{x}{\sigma^2}, \\ h(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}\{a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 16 obtenemos

$$\min_{\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]} g_{\mathbf{m}}(x) = g_{\mathbf{m}_2}(x) \mathbf{1}\{x \leq \mathbf{x}_0\} + g_{\mathbf{m}_1}(x) \mathbf{1}\{\mathbf{x}_0 < x\} \quad (3.9)$$

donde

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2} - \frac{\sigma^2}{\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1} \log\left(\frac{A_{a,b}(\mathbf{m}_1, \sigma)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_2, \sigma)}\right) \in (a, b). \quad (3.10)$$

Como consecuencia de la identidad (3.9) vale la desigualdad del evento acoplante (1.7) y el coeficiente de ergodicidad asociado a la familia  $X_{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]$  definido en (1.6) (i.e., la probabilidad maximal de acoplamiento) se calcula como

$$\alpha = \alpha(X_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]) = \int_a^b \min_{\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]} g_{\mathbf{m}}(x) dx = \frac{A_{a, \mathbf{x}_0}(\mathbf{m}_2)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_2)} + \frac{A_{\mathbf{x}_0, b}(\mathbf{m}_1)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_1)}. \quad (3.11)$$

Observe que  $\alpha \in (0, 1)$ :  $\alpha > 0$  porque  $\min_{\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]} g_{\mathbf{m}}(x) > 0$ . Si  $\alpha = 1$ , todas las densidades coinciden, lo que esta descartado por la hipótesis  $\mathbf{m}_1 < \mathbf{m}_2$ .

La máxima componente común de las variables aleatorias  $X_{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]$  se construye utilizando la función integral:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \int_a^x \min_{\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]} g_{\mathbf{m}}(y) dy \\ &= \frac{A_{a,x}(\mathbf{m}_2)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_2)} \mathbf{1}\{x \leq \mathbf{x}_0\} + \left[ \frac{A_{a, \mathbf{x}_0}(\mathbf{m}_2)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_2)} + \frac{A_{\mathbf{x}_0, x}(\mathbf{m}_1)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_1)} \right] \mathbf{1}\{\mathbf{x}_0 < x\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Las componentes diferentes se construyen utilizando las diferencias entre la funciones distribución de probabilidades correspondientes a las variables  $X_{\mathbf{m}}$ ,  $G_{\mathbf{m}}(x) = \int_a^x g_{\mathbf{m}}(y) dy$ , y la parte común  $\alpha(x)$ :

$$\hat{G}_{\mathbf{m}}(x) = \alpha + G_{\mathbf{m}}(x) - \alpha(x).$$

Sea  $U$  una variable con ley uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . De acuerdo con la demostración del Teorema 4, si se define

$$\hat{X}_m = \hat{X}_m(U) := \mathbf{1}\{U \leq \alpha\}\alpha^{-1}(U) + \mathbf{1}\{\alpha < U\}\hat{G}_m^{-1}(U), \quad (3.13)$$

$(\hat{X}_m : \mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2])$  es un acoplamiento maximal para la familia de Gaussianas truncadas  $X_m$ ,  $\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]$ , con evento acoplante maximal  $\{U \leq \alpha\}$ .

Cuando ocurre el evento acoplante,  $\{U \leq \alpha\}$ , las variables  $\hat{X}_m(U)$  se calculan mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \hat{X}_m(U) = & \left( \mathbf{m}_2 + \sigma \Phi^{-1} \left( A_{a,b}(\mathbf{m}_2)U + \Phi \left( \frac{a - \mathbf{m}_2}{\sigma} \right) \right) \right) \mathbf{1} \left\{ U < \frac{A_{a,x_0}(\mathbf{m}_2)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_2)} \right\} \\ & + \left( \mathbf{m}_1 + \sigma \Phi^{-1} \left( A_{a,b}(\mathbf{m}_1)\varepsilon(U) + \Phi \left( \frac{x_0 - \mathbf{m}_1}{\sigma} \right) \right) \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{A_{a,x_0}(\mathbf{m}_2)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_2)} \leq U \leq \alpha \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon(U) = U - \frac{A_{a,x_0}(\mathbf{m}_2)}{A_{a,b}(\mathbf{m}_2)}$ .

### 3.2.3. La distribución Gaussiana multivariada truncada

Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  dos vectores en  $\mathbb{R}^d$ . Un vector aleatorio  $d$ -dimensional,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  tiene distribución *Gaussiana truncada* a la caja  $\{\eta \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} \leq \eta \leq \mathbf{b}\}$ , en símbolos  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{m}, \Sigma)$ , si admite una función densidad de la forma:

$$g_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\eta; \mathbf{m}, \Sigma) = \frac{1}{Z_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{m}, \Sigma)} \exp \left( -\frac{1}{2} Q_d(\eta; \mathbf{m}, \Sigma) \right) \mathbf{1}\{\mathbf{a} \leq \eta \leq \mathbf{b}\}, \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$  y  $\Sigma$  es una matriz definida positiva;

$$Q_d(\eta; \mathbf{m}, \Sigma) = (\eta - \mathbf{m})' \Sigma^{-1} (\eta - \mathbf{m}), \quad (3.15)$$

y  $Z_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{m}, \Sigma) = \int \exp \left( -\frac{1}{2} Q_d(\eta; \mathbf{m}, \Sigma) \right) \mathbf{1}\{\mathbf{a} \leq \eta \leq \mathbf{b}\} d\eta$  es una constante de normalización. En otras palabras, la distribución Gaussiana truncada  $d$ -dimensional  $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{m}, \Sigma)$  es la distribución Gaussiana  $d$ -dimensional de media  $\mathbf{m}$  y matriz de covarianzas  $\Sigma$  condicionada a la caja  $\{\mathbf{a} \leq \eta \leq \mathbf{b}\}$ .

**Distribuciones condicionales.** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  un vector  $d$ -dimensional distribuido con ley  $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{m}, \Sigma)$ . Suponga que  $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d)$  y que  $\Sigma^{-1} = (a_{ij} : 1 \leq$

$i, j \leq d$ ). Para cada  $\mathbf{a} \leq \eta \leq \mathbf{b}$  la distribución de  $X_k$  condicionada a  $\mathbf{X}_{\{k\}^c} = \eta_{\{k\}^c}$  es una Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a_k, b_k}(\bar{\eta}(k), \sigma_k^2)$ , donde

$$\bar{\eta}(k) = a_{kk}^{-1} \left( \sum_{i=1}^d a_{ki} \mathbf{m}_i - \sum_{i \neq k} a_{ki} \eta_i \right), \quad \sigma_k^2 = a_{kk}^{-1}. \quad (3.16)$$

El resultado se obtiene completando cuadrados respecto de  $\eta_k - \mathbf{m}_k$  en la forma cuadrática  $Q_d(\eta; \mathbf{m}, \Sigma)$ :

$$Q_d(\eta; \mathbf{m}, \Sigma) = a_{kk} \left( \eta_k - \mathbf{m}_k + a_{kk}^{-1} \sum_{i \neq k} a_{ki} (\eta_i - \mathbf{m}_i) \right)^2 + R_k(\eta_{\{k\}^c}), \quad (3.17)$$

donde  $R_k(\eta_{\{k\}^c})$  no depende de  $\eta_k$ .  $\square$

**Observación 17** Note que  $\bar{\eta}(k)$  es una función lineal de  $\eta_{\{k\}^c}$  y que  $\sigma_k^2$  no depende de  $\eta$ . Además  $\mathbf{m}_1 \leq \bar{\eta} \leq \mathbf{m}_2$ , donde

$$\mathbf{m}_1(k) = a_{kk}^{-1} \left( \sum_{i=1}^d a_{ki} \mathbf{m}_i - \sum_{i \neq k} \max(0, a_{ki}) b_i - \sum_{i \neq k} \min(0, a_{ki}) a_i \right), \quad (3.18)$$

$$\mathbf{m}_2(k) = a_{kk}^{-1} \left( \sum_{i=1}^d a_{ki} \mathbf{m}_i - \sum_{i \neq k} \max(0, a_{ki}) a_i - \sum_{i \neq k} \min(0, a_{ki}) b_i \right). \quad (3.19)$$

### 3.2.4. Simulación perfecta

De acuerdo con lo anterior, para cada  $k = 1, \dots, d$  y cada  $\eta \in \Omega$  la variable aleatoria  $X_{k, \eta} := X_k | \mathbf{X}_{\{k\}^c} = \eta_{\{k\}^c}$  tiene ley Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a_k, b_k}(\bar{\eta}(k), \sigma_k^2)$ , donde  $\bar{\eta}(k)$  y  $\sigma^2$  están definidos en (3.16). De la Observación 17 sabemos que  $\bar{\eta}(k) \in [\mathbf{m}_1(k), \mathbf{m}_2(k)]$ , donde  $\mathbf{m}_1(k)$  y  $\mathbf{m}_2(k)$  están definidos en (3.18) y (3.19), respectivamente. En consecuencia,

$$\inf_{\eta \in \Omega} g_k(x | \eta_{\{k\}^c}) = \min_{\mathbf{m} \in [\mathbf{m}_1(k), \mathbf{m}_2(k)]} g_{k, \mathbf{m}}(x), \quad (3.20)$$

donde  $g_{k, \mathbf{m}}$  es la densidad de la distribución Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a_k, b_k}(\mathbf{m}, \sigma_k^2)$ .

Debido a la identidad (3.20) el coeficiente de ergodicidad asociado a la familia de variables aleatorias  $X_{k, \eta}, \eta \in \Omega$  puede calcularse usando la identidad (3.11). Resultando que  $\alpha(g_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) > 0$ . Por lo tanto las distribuciones Gaussianas truncadas  $\mathcal{N}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{m}, \Sigma)$  satisfacen las hipótesis del Teorema 7. En consecuencia puede construirse una versión estacionaria del Gibbs sampler asociado.

Los acoplamientos maximales utilizados en la construcción del Gibbs sampler estacionario asociado a la distribución Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$  se obtienen utilizando los resultados de la Sección 3.2.2.

### 3.3. Simulación perfecta de Gammas truncadas

La metodología desarrollada en el Capítulo 2 también puede aplicarse para construir vectores aleatorios distribuidos con ley Gamma multivariada truncada.

**Caso unidimensional.** Sea  $T$  un número real positivo. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución *Gamma truncada* al intervalo  $(0, T)$ , en símbolos  $X \sim \Gamma_T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  si admite una función densidad de la forma:

$$g(x; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{Z_T(\mathbf{a}, \mathbf{b})} x^{\mathbf{a}-1} e^{-\mathbf{b}x} \mathbf{1}\{0 < x < T\}, \quad (3.21)$$

donde,  $\mathbf{a} > 0$   $\mathbf{b} > 0$  y  $Z_T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^T x^{\mathbf{a}-1} e^{-\mathbf{b}x} dx$  es una constante de normalización. En otras palabras, la distribución Gamma truncada  $\Gamma_T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es la distribución  $\Gamma$  con parámetro de forma  $\mathbf{a}$  y parámetro de escala  $\mathbf{b}$  condicionada al intervalo  $(0, T)$

**Caso multidimensional.** Un vector aleatorio  $d$ -dimensional,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  tiene distribución *Gamma truncada* a la caja  $[0, T]^d = \{\eta \in \mathbb{R}^d : 0 \leq \eta_i \leq T \text{ para todo } i = 1, \dots, d\}$  si admite una función densidad de la forma:

$$g(\eta) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_i \mathbf{b}_i \eta_i - \sum_{i < j} \mathbf{b}_{ij} \eta_i \eta_j\right) \prod_{i=1}^d \eta_i^{\mathbf{a}_i-1} \mathbf{1}\{\eta \in [0, T]^d\} \quad (3.22)$$

donde los parámetros  $\mathbf{a}_i > 0$ ,  $\mathbf{b}_i > 0$  y  $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{ji} \geq 0$  y  $Z$  es una constante de normalización.

**Distribuciones condicionales.** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  un vector  $d$ -dimensional distribuido con ley Gamma truncada dada por la densidad (3.22). Para cada  $\eta \in [0, T]^d$  la distribución de  $X_k$  condicionada a  $\mathbf{X}_{\{k\}^c} = \eta_{\{k\}^c}$  es una Gamma truncada  $\Gamma_T(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k(\eta))$ , donde

$$\mathbf{b}_k(\eta) = \mathbf{b}_k + \sum_{j \neq k} \mathbf{b}_{jk} \eta_j \quad (3.23)$$

El resultado se obtiene observando que

$$\sum_i \mathbf{b}_i \eta_i + \sum_{i < j} \mathbf{b}_{ij} \eta_i \eta_j = \left( \mathbf{b}_k + \sum_{j \neq k} \mathbf{b}_{jk} \eta_j \right) \eta_k + R_k(\eta_k), \quad (3.24)$$

donde  $R_k(\eta_{-k})$  no depende de  $\eta_k$ . □

Fijado el parámetro de forma,  $\mathbf{a}$ , la familia de densidades  $g_{\mathbf{b}}(x) = g(x; \mathbf{a}, \mathbf{b})$  pueden representarse en la forma

$$g_{\mathbf{b}}(x) = C(\mathbf{b}) e^{\mathbf{b}T(x)} h(x),$$

donde  $T(x)$  es estrictamente decreciente:

$$C(\mathbf{b}) = \frac{1}{Z_T(\mathbf{a}, \mathbf{b})}, \quad T(x) = -x, \quad h(x) = x^{\mathbf{a}-1} \mathbf{1}\{0 < x < T\}.$$

Lo demás es análogo al desarrollo de la Sección 3.2.



# Capítulo 4

## Simulación perfecta de campos Markovianos con spines acotados

### 4.1. Definiciones y resultados

En esta Sección repasamos las definiciones básicas del *formalismo de Gibbs: potenciales, especificaciones locales y medidas de Gibbs* ([6] y [7]). Introducimos el proceso Markoviano denominado *Gibbs sampler asociado a una especificación Gibbsiana* y damos una condición suficiente para la existencia del Gibbs sampler estacionario. Su distribución marginal temporal es la única medida invariante para el proceso y es la única medida de Gibbs compatible con la especificación.

#### 4.1.1. Formalismo de Gibbs

Consideramos el formalismo de Gibbs para sistemas de spines con espacio de fase un intervalo compacto de la forma  $[a, b]$ , ( $a < b$ ).

**Espacio de configuraciones.** Para cada  $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ , tenemos una copia del espacio de medida  $([a, b], \mathcal{B}, \lambda)$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel del intervalo  $[a, b]$  y  $\lambda$  es la medida de Lebesgue. El *espacio de configuraciones* será el espacio

producto

$$\Omega := [a, b]^{\mathbb{Z}^d} = \{\eta = (\eta(i) : i \in \mathbb{Z}^d) : \eta(i) \in [a, b]\}, \quad (4.1)$$

munido de la topología producto y la  $\sigma$ -álgebra de Borel asociada:  $\mathcal{F} = \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Potenciales.** Un *potencial  $\lambda$ -admisibles* es una familia  $\mathcal{J} = \{J_\Delta : \Delta \in \mathcal{S}\}$  de funciones  $J_\Delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades

- (i) Para cada  $\Delta \in \mathcal{S}$ ,  $J_\Delta$  es  $\mathcal{F}_\Delta$ -medible.
- (ii) Para cada  $\Lambda \in \mathcal{S}$  y  $\eta \in \Omega$ , la serie

$$H_\Lambda(\eta) = \sum_{\Delta \in \mathcal{S}: \Delta \not\subseteq \Lambda^c} J_\Delta(\eta) \quad \text{existe.} \quad (4.2)$$

$H_\Lambda(\eta)$  se llama la *energía de  $\eta$  en  $\Lambda$  asociada a  $\mathcal{J}$* , y  $H_\Lambda$  el *Hamiltoniano en  $\Lambda$  asociado a  $\mathcal{J}$* .

- (iii) Para cada  $\Lambda \in \mathcal{S}$  y  $\gamma \in \Omega$ , la integral (respecto de la medida de Lebesgue  $\lambda_\Lambda$  sobre  $\Omega_\Lambda$ )

$$Z_\Lambda(\gamma) = \int \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda) \exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \gamma_{\Lambda^c})) \quad \text{es finita.} \quad (4.3)$$

**Especificaciones locales.** Sea  $\mathcal{J}$  un potencial  $\lambda$ -admisibles y  $\gamma \in \Omega$ ,  $\Lambda \in \mathcal{S}$ . La medida de probabilidad sobre  $(\Omega_\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)$  definida por

$$\mu_\Lambda(d\eta_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c}) := \frac{1}{Z_\Lambda(\gamma)} \exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \gamma_{\Lambda^c})) \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda) \quad (4.4)$$

se llama *distribución de Gibbs en  $\Lambda$  con condiciones de borde  $\gamma_{\Lambda^c}$* , potencial  $\mathcal{J}$  y medida de spin  $\lambda$ . La familia de medidas  $\Gamma = \{\mu_\Lambda(d\eta_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c}) : \Lambda \in \mathcal{S}, \gamma \in \Omega\}$  se llama una *especificación Gibbsiana* asociada a  $\mathcal{J}$  y  $\lambda$ .

**Medidas de Gibbs.** Una *medida de Gibbs compatible* con  $\Gamma$  es una medida  $\mu$  sobre  $\Omega$  que satisface las ecuaciones “DLR” (Dobrushin, Lanford y Ruelle)

$$\int \mu(d\gamma) \int \mu_\Lambda(d\eta_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c}) f(\eta_\Lambda \gamma_{\Lambda^c}) = \int \mu(d\eta) f(\eta). \quad (4.5)$$

para  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Usando la notación  $\mu(f) = \int \mu(d\eta) f(\eta)$ , las ecuaciones DLR se leen

$$\mu(\mu_\Lambda(f|\cdot)) = \mu(f). \quad (4.6)$$

### 4.1.2. Gibbs sampler

Sea  $\Gamma = \{\mu_\Lambda(d\eta_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c}) : \Lambda \in \mathcal{S}, \gamma \in \Omega\}$  una especificación Gibbsiana. El *Gibbs sampler* asociado a  $\Gamma$  es un proceso de Markov a tiempo continuo  $(\eta_t : t \geq 0)$  sobre  $\Omega$  con generador infinitesimal  $L$  definido sobre funciones continuas cilíndricas  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$Lf(\eta) := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} L_i f(\eta), \quad L_i f(\eta) = \int_a^b \mu_{\{i\}}(dx | \eta_{\{i\}^c}) [f(\eta + (x - \eta(i))\mathbf{e}_i) - f(\eta)], \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{e}_i \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  se define por  $\mathbf{e}_i(j) = \mathbf{1}\{j = i\}$ . En palabras, a tasa 1, en cada sitio  $i \in \mathbb{Z}^d$  el spin  $\eta(i) \in [a, b]$  se substituye por una variable aleatoria  $X_{i,\eta}$  con ley  $\mu_{\{i\}}(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$ .

La existencia del Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$  será demostrada, usando la construcción gráfica de Harris y un argumento de percolación, en la Sección 4.2.

El resultado siguiente relaciona las medidas de Gibbs con las medidas invariantes del Gibbs sampler.

**Proposición 18** *Si una medida  $\mu$  es Gibbs para especificaciones  $\Gamma$ , entonces es invariante para el Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ .*

**Demostración.** Basta mostrar que  $\mu L_i f = 0$  para todo  $i \in \mathbb{Z}^d$  y funciones cilíndricas continuas  $f$ .

$$\begin{aligned} \mu L_i f &= \int \mu(d\eta) \int_a^b \mu_{\{i\}}(dx | \eta_{\{i\}^c}) [f(\eta + (x - \eta(i))\mathbf{e}_i) - f(\eta)] \\ &= \mu(\mu_{\{i\}}(f|\cdot)) - \mu f = 0, \end{aligned}$$

por DLR. □

### 4.1.3. Resultados

Sea  $\Gamma$  una especificación Gibbsiana asociada a un potencial  $\lambda$ -admisibles,  $\mathcal{J}$ , de rango finito  $r \in \mathbb{N}$  y espacialmente homogéneo:  $J_\Lambda = 0$  salvo que  $\Lambda \subset \{j \in \mathbb{Z}^d : \|j - i\| \leq r\}$  para todo  $i \in \Lambda$  (rango  $r$ );  $J_{\Lambda+i} \circ \theta_i = J_\Lambda$  para todo  $\Lambda \in \mathcal{S}$ ,  $i \in \mathbb{Z}^d$ , donde  $\theta_i : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$  es la traslación en  $i$  que actúa en  $\Omega$  de la siguiente manera:  $(\theta_i \eta)(j) = \eta(j - i)$  (homogeneidad espacial).

Sea  $\alpha(\Gamma)$  el *coeficiente de ergodicidad* asociado a  $\Gamma$  definido por

$$\alpha(\Gamma) := \int_a^b \inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(x) dx, \quad (4.8)$$

donde  $g_\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\eta \in \Omega$ , es la densidad de la distribución de Gibbs en  $\{0\}$  con condiciones de borde  $\eta_{\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}}$  definida en (4.4).

El primer resultado es la condición suficiente para la existencia de un proceso de Markov estacionario con la dinámica del Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ . El segundo, afirma que el Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$  tiene una única medida invariante y que puede obtenerse como límite termodinámico.

**Teorema 19** *Si*

$$|\partial_r \{0\}|(1 - \alpha(\Gamma)) < 1, \quad (4.9)$$

*entonces, existe un proceso de Markov estacionario  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  sobre  $\Omega$  con generador infinitesimal  $L$  definido por (4.7).*

Este Teorema será demostrado en la Sección 4.4.

**Teorema 20** *La distribución marginal temporal,  $\mu$ , del Gibbs sampler estacionario  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  asociado a  $\Gamma$  es la única medida invariante para el proceso. Más aún, para cada condición de borde  $\gamma \in \Omega$  y cada sucesión creciente  $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$  de regiones finitas vale que*

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda(\cdot | \gamma_{\Lambda^c}) = \mu. \quad (4.10)$$

*En particular,  $\mu$  es la única medida de Gibbs compatible con  $\Gamma$ .*

Este Teorema será demostrado en la Sección 4.5

La hipótesis de homogeneidad espacial impuesta sobre el potencial,  $\mathcal{J}$ , está puesta para simplificar la exposición y se puede remover: para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$ , sea  $\alpha_i(\Gamma)$  el coeficiente de ergodicidad asociado a la familia de variables aleatorias  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  con distribuciones  $\mu_{\{i\}}(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$  definido en 1.6,

$$\alpha_i(\Gamma) = \int_a^b \inf_{\eta \in \Omega} g_{i,\eta}(x) dx, \quad (4.11)$$

donde  $g_{i,\eta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\eta \in \Omega$ , es la densidad de la distribución  $\mu_{\{i\}}(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$ .

La condición (4.9) se reemplaza por  $\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} |\partial_r \{0\}|(1 - \alpha_i(\Gamma)) < 1$ . Cuando  $\mathcal{J}$  es homogéneo,  $\alpha_i(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}^d$ .

## 4.2. Construcción gráfica del Gibbs sampler

El espacio de probabilidad donde se realizan todas las construcciones es el espacio generado por una familia independiente de procesos de Poisson marcados de tasa 1 en  $\mathbb{R}$ :  $(\mathcal{T}, \mathcal{U}) = \{(\mathcal{T}(i), \mathcal{U}(i)) : i \in \mathbb{Z}^d\}$ . Denotamos por  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{E}$  la probabilidad y la esperanza inducidas por esos procesos de Poisson marcados.

Para cada  $s \in \mathbb{R}$  y  $\xi \in \Omega$  usamos la construcción gráfica de Harris para definir procesos Gibbs sampler asociados a la especificación  $\Gamma$ , de condición inicial  $\xi$  a tiempo  $s$ ,  $(\eta_{[s,t]}^\xi : t \geq s)$ , que son funciones determinísticas de la familia independiente de procesos de Poisson marcados  $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ .

Informalmente el proceso  $(\eta_{[s,t]}^\xi : t \geq s)$  se define del siguiente modo. Inicialmente  $\eta_{[s,s]}^\xi := \xi$ . A tiempo  $t \in \mathcal{T}(i) \cap (s, \infty)$  el spin en el sitio  $i$  se substituye por una variable aleatoria  $X_{i,\eta_{t-}}$  distribuida con ley  $\mu_{\{i\}}(\cdot | (\eta_{t-})_{\{i\}^c})$ :

$$\eta_{[s,t]}^\xi = \eta_{[s,t-]}^\xi + \left( X_{i,\eta_{[s,t-]}^\xi} - \eta_{[s,t-]}^\xi(i) \right) \mathbf{e}_i. \quad (4.12)$$

La variable  $X_{i,\eta_{t-}}$  se construye como una función determinística de la variable uniforme  $U_t \in \mathcal{U}(i)$  asociada a la época de Poisson  $t$  utilizando el acoplamiento maximal  $(\hat{X}_{i,\eta} : \eta \in \Omega)$  para la familia de variables aleatorias  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  con densidades  $g_{i,\eta}(\cdot)$  definido en la demostración del Teorema 4.

Debido a que hay infinitos procesos de Poisson, no hay primera época en  $[s, \infty)$ , y la dificultad principal de la construcción es establecer que lo que ocurre en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño en un sitio dado no está influenciado por una cadena de interacciones provenientes del infinito.

Utilizando un *resultado de percolación* se puede mostrar que durante un cierto intervalo de tiempo  $[s, s + t_0]$ , donde  $t_0$  es determinístico y suficientemente pequeño,  $\mathbb{Z}^d$  se parte en una colección numerable de regiones aleatorias finitas que no interactúan entre si:  $\mathbb{Z}^d = \cup_{\ell \in \mathbb{N}} \Lambda_\ell$ , donde para cada  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\Lambda_\ell = \Lambda_\ell(\mathcal{T} \cap [s, s + t_0]) \in \mathcal{S}$  y  $\Lambda_{\ell_1} \cap \Lambda_{\ell_2} = \emptyset$  para todo  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Durante el intervalo de tiempo  $[s, s + t_0]$  el proceso se construye en cada región  $\Lambda_\ell$  independientemente de lo que ocurra en las demás. Para cada región finita  $\Lambda_\ell$  las épocas de los procesos de Poisson asociados están bien ordenadas y podemos definir:

$$\left( \eta_{[s,t]}^\xi \right)_{\Lambda_\ell} := \eta_{\Lambda_\ell, [s,t]}^\xi, \quad t \in (s, s + t_0] \quad (4.13)$$

donde  $\eta_{\Lambda_\ell, [s, t]}^\xi \in \Omega_{\Lambda_\ell}$  se construye utilizando la regla de actualización (4.12) y es una función determinística de las épocas (y sus variables uniformes asociadas) de los procesos de Poisson marcados  $\{(\mathcal{T}(i), \mathcal{U}(i)) : i \in \Lambda_\ell\}$  contenidas en el intervalo  $[s, t]$ .

Como  $t_0$  es independiente de la configuración inicial, iterando el procedimiento se construye el proceso  $\eta_{[s, t]}^\xi$  para todo tiempo.

**Observación 21** A causa de la invariancia por traslaciones temporales de los procesos de Poisson marcados, fijado  $\xi \in \Omega$ , la ley de  $\eta_{[s, t]}^\xi$  depende de  $t - s$  pero no de la ubicación temporal del intervalo  $[s, t]$ .

**Proposición 22** Para cada  $s \in \mathbb{R}$  y cada  $\xi \in \Omega$  el proceso  $(\eta_{[s, t]}^\xi : t \geq s)$  tiene la dinámica del Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ .

La prueba es enteramente análoga a la de la Proposición 10 debido a que las funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  involucradas en la definición del generador  $L$  dependen solamente de lo que ocurre en regiones finitas.  $\square$

**Resultado de Percolación.** Una versión de este resultado puede verse en el trabajo de Durrett [2]. Incluimos una prueba levemente diferente con el objeto de mantener este trabajo lo más auto-contenido posible.

Sea  $t_0 > 0$ . Construimos un grafo aleatorio  $G(t_0) = (\mathbb{Z}^d, E(t_0))$  dibujando una arista no orientada entre los vértices  $i$  y  $j$  si  $j - i \in \partial_r\{0\}$  y  $(\mathcal{T}(i) \cup \mathcal{T}(j)) \cap [0, t_0] \neq \emptyset$ . En tal caso diremos que los vértices  $i$  y  $j$  son vecinos y escribiremos  $i \sim j$ .

Una *trayectoria* de longitud  $n$  es una sucesión de vértices  $j_0, j_1, \dots, j_n$  tales que  $j_{m-1} \sim j_m$  cuando  $0 < m \leq n$ . Una trayectoria se dice *auto-evitante* si  $j_m \neq j_{m'}$  para  $0 \leq m < m' \leq n$ . Diremos que los vértices  $i$  y  $j$  están *conectados* si existe una trayectoria auto-evitante que comienza en  $i$  y termina en  $j$ . En tal caso escribiremos  $i \leftrightarrow j$ . La relación de conexión  $\leftrightarrow$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z}^d$  e induce una partición en clases de equivalencia denominadas *componentes conexas*. Finalmente, definimos el *cluster* del vértice  $i$  a tiempo  $t_0$ ,  $C(i, t_0)$ , como el conjunto de todos los vértices que están conectados con  $i$ :

$$C(i, t_0) := \{j \in \mathbb{Z}^d : i \leftrightarrow j\}.$$

**Teorema 23** *Si  $t_0$  es suficientemente pequeño entonces, con probabilidad igual a 1, todas las componentes conexas del grafo aleatorio  $G(t_0)$  son finitas.*

**Demostración.** Basta mostrar que el cluster del origen a tiempo  $t_0$  es finito con probabilidad igual a 1.

Sea  $i \in \mathbb{Z}^d$  tal que  $\|i\| > M$ . Si  $i$  está conectado con 0, entonces existe una trayectoria auto-evitante  $j_0, j_1, \dots, j_n$  que comienza en 0 y termina en  $i$ . Puesto que cada arista mide como máximo  $r$ ,  $n \geq M/r$ .

La presencia de una arista entre dos sitios  $i$  y  $j$  es un evento determinado por los procesos de Poisson  $\mathcal{T}(i)$  y  $\mathcal{T}(j)$ . Por lo tanto, si  $i, j, i', j'$  son sitios distintos entre si, la presencia de aristas entre  $i$  y  $j$  y entre  $i'$  y  $j'$  son eventos independientes.

La probabilidad de una trayectoria auto-evitante de longitud  $2n - 1$  es a lo sumo  $|\partial_r\{0\}|^{2n-1}(1 - e^{-2t_0})^n$ :  $|\partial_r\{0\}|^{2n-1}$  es el número de trayectorias de longitud  $2n - 1$  y por lo tanto una cota superior para las auto-evitantes. La presencia de aristas  $j_0 \sim j_1, j_2 \sim j_3, \dots, j_{2n-2} \sim j_{2n-1}$  son eventos independientes, cada uno de probabilidad  $1 - e^{-2t_0}$  porque la probabilidad de ningún arribo a tiempo  $t_0$  en ninguno de los procesos de Poisson  $\mathcal{T}(j_{2m})$ ,  $\mathcal{T}(j_{2m+1})$  es  $e^{-2t_0}$ .

Elegimos  $t_0$  suficientemente chico para que  $|\partial_r\{0\}|^2(1 - e^{-2t_0}) < 1$ . Esta elección es determinística y  $t_0 > 0$ . Por lo tanto, la probabilidad de una trayectoria auto-evitante de longitud  $2n - 1$  tiende a cero exponencialmente rápido y por el Lema de Borel-Cantelli, con probabilidad 1 hay una cota superior finita para la longitud de la mayor trayectoria que comienza en 0. En consecuencia existe  $M > 0$  finito tal que 0 no está conectado con ningún sitio  $i$  tal que  $\|i\| > M$ .  $\square$

### 4.3. Gibbs sampler en volúmenes finitos

La construcción desarrollada en la Sección 2.2, y sus consecuencias enunciadas en la Sección 2.3, se extiende inmediatamente a las distribuciones de Gibbs  $\mu_\Lambda(\cdot|\gamma_{\Lambda^c})$  en regiones finitas  $\Lambda$ , con condiciones de borde  $\gamma_{\Lambda^c}$ ,  $\gamma \in \Omega$ . La construcción gráfica de los Gibbs sampler en regiones finitas  $\Lambda$  se realiza en el mismo espacio de probabilidades generado por los procesos de Poisson marcados  $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$  utilizando solamente los que corresponden a

los sitios de  $\Lambda$ . Se obtienen los resultados siguientes:

Sean  $\Lambda \in \mathcal{S}$  y  $\gamma \in \Omega$  fijos.

1. Para cada  $s \in \mathbb{R}$  y cada  $\xi \in \Omega$ , existe un proceso Markoviano  $(\eta_{\Lambda, [s, t]}^{\xi \Lambda \gamma_{\Lambda^c}} : t \geq s)$  con condición inicial  $\xi_{\Lambda}$ , condición de borde  $\gamma_{\Lambda^c}$  y generador infinitesimal  $L^{\Lambda, \gamma}$  definido sobre funciones continuas  $f$ , que sólo dependen de los sitios en  $\Lambda$ , por:

$$L^{\Lambda, \gamma} f(\eta) := \sum_{i \in \Lambda} \int_a^b \mu_{\{i\}}(dx | (\eta_{\Lambda} \gamma_{\Lambda^c})_{\{i\}^c}) [f(\eta_{\Lambda} \gamma_{\Lambda^c} + (x - \eta(i)) \mathbf{e}_i) - f(\eta_{\Lambda} \gamma_{\Lambda^c})].$$

Esto es, en los sitios exteriores a la región  $\Lambda$  los spines se mantienen fijos en la configuración  $\gamma$ ; a tasa 1, en cada sitio  $i \in \Lambda$  el spin  $\eta(i) \in [a, b]$  se substituye por una variable aleatoria  $X_{i, \eta_{\Lambda} \gamma_{\Lambda^c}}$  distribuida con la ley condicional  $\mu_{\{i\}}(\cdot | (\eta_{\Lambda} \gamma_{\Lambda^c})_{\{i\}^c})$ , dados los spines en los otros sitios.

2. Para cada  $t \in \mathbb{R}$  fijo, el límite

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta_{\Lambda, [s, t]}^{\xi \Lambda \gamma_{\Lambda^c}}(i) := \eta_{\Lambda, t}^{\gamma}(i), \quad (i \in \mathbb{Z}^d) \quad (4.14)$$

existe con probabilidad igual a 1 y no depende de  $\xi$ . El proceso  $(\eta_{\Lambda, t}^{\gamma} : t \in \mathbb{R})$  es estacionario con marginal temporal  $\mu_{\Lambda}(\cdot | \gamma_{\Lambda^c})$ , que es la única medida invariante (y reversible) para el proceso.

## 4.4. Construcción estacionaria del Gibbs Sampler

En esta Sección construimos un proceso de Markov estacionario  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  sobre  $\Omega$  con la dinámica del Gibbs Sampler asociado a la especificación  $\Gamma$ .

### 4.4.1. Definición recursiva

Sean  $i \in \mathbb{Z}^d$  y  $t \in \mathbb{R}$  fijos. El valor del proceso en el sitio  $i$  a tiempo  $t$  se obtiene explorando la construcción gráfica para atrás en el tiempo mediante la siguiente regla:

Retroceda en el tiempo hasta encontrar la primera época de Poisson correspondiente al sitio  $i$

$$T(i, t) := \text{máx}\{T \in \mathcal{T}(i) : T \leq t\}.$$



Sea  $U(i, t) \in \mathcal{U}(i)$  la variable con distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  asociada a la época  $T(i, t)$ . Hay dos casos posibles:  $U(i, t) \leq \alpha(\Gamma)$  o  $U(i, t) > \alpha(\Gamma)$ .

Si  $U(i, t) \leq \alpha(\Gamma)$ , defina

$$\eta_t(i) := \alpha^{-1}(U(i, t)), \quad (4.15)$$

donde  $\alpha(x)$  es la función integral

$$\alpha(x) = \int_a^x \inf_{\eta \in \Omega} g_\eta(y) dy$$

que describe la parte común de las variables aleatorias  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  distribuidas con ley  $\mu_{\{i\}}(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$ , respectivamente, en el acoplamiento maximal  $(\hat{X}_{i,\eta} : \eta \in \Omega)$  definido en la demostración del Teorema 4.

En este caso, el valor  $\eta_t(i)$  está bien definido y es una función determinística de  $U(i, t)$ .

Si  $U(i, t) > \alpha(\Gamma)$ , determine los valores del proceso en los sitios pertenecientes a la vecindad de interacción  $\partial_r\{i\}$  a tiempo  $T(i, t)$ :  $(\eta_{T(i,t)}(j) : j \in \partial_r\{i\})$  y defina

$$\eta_t(i) := \hat{G}_{i, (\eta_{T(i,t)})_{\partial_r\{i\}}}^{-1}(U(i, t)), \quad (4.16)$$

donde  $\hat{G}_{i, \eta_{\partial_r\{i\}}}(x)$  es la función que describe las diferencias entre las variables aleatorias  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  en el acoplamiento maximal  $(\hat{X}_{i,\eta} : \eta \in \Omega)$ :

$$\hat{G}_{i, \eta_{\partial_r\{i\}}}(x) = \alpha(\Gamma) + \int_a^x g_{i,\eta}(y) dy - \alpha(x).$$

En este caso el valor  $\eta_t(i)$  es una función determinística de  $U(i, t)$  y de los valores  $\eta_{T(i,t)}(j)$ ,  $j \in \partial_r\{i\}$ . El valor  $\eta_t(i)$  estará bien definido si los valores  $\eta_{T(i,t)}(j)$ ,  $j \in \partial_r\{i\}$  lo están.

#### 4.4.2. Percolación orientada para atrás en el tiempo

Sean  $i \in \mathbb{Z}^d$  y  $t \in \mathbb{R}$  fijos. El esquema recursivo para definir el valor  $\eta_t(i)$  origina un modelo de *percolación orientada para atrás en el tiempo* en el espacio de probabilidades  $\mathcal{X} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$  (con la sigma álgebra producto y la medida inducida por los procesos de Poisson marcados).

**El clan de ancestros.** Sea  $\mathbf{x} = (i, t) \in \mathcal{X}$  un punto espacio-temporal cualquiera. Definimos la *primera generación de ancestros* de  $\mathbf{x}$  mediante

$$\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}} := \begin{cases} \emptyset & \text{si } U(\mathbf{x}) \leq \alpha(\Gamma), \\ \{(j, T(\mathbf{x})) : j \in \partial_r\{i\}\} & \text{si } U(\mathbf{x}) > \alpha(\Gamma). \end{cases} \quad (4.17)$$

Inductivamente, definimos la *n-ésima generación de ancestros* de  $\mathbf{x}$ ,  $n \geq 2$ , mediante:

$$\mathbb{A}_n^{\mathbf{x}} := \bigcup_{\mathbf{x}' \in \mathbb{A}_{n-1}^{\mathbf{x}}} \mathbb{A}_1^{\mathbf{x}'}. \quad (4.18)$$

Finalmente, definimos el *clan de ancestros* de  $\mathbf{x}$  mediante

$$\mathbb{A}^{\mathbf{x}} := \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{A}_n^{\mathbf{x}}. \quad (4.19)$$

Diremos que hay *percolación orientada para atrás (en el tiempo)* si existe un  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  tal que  $\mathbb{A}_n^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Observación 24** Sea  $\mathbf{x} = (i, t) \in \mathcal{X}$ . Si  $\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}} = \emptyset$  el valor de  $\eta_t(i)$  es una función determinística de  $U(\mathbf{x})$  y está bien definido. En cambio, si  $\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}} \neq \emptyset$  y  $\mathbb{A}_2^{\mathbf{x}} = \emptyset$ , el valor de  $\eta_t(i)$  es una función determinística de  $U(\mathbf{x})$  y de  $U(\mathbf{x}') : \mathbf{x}' \in \mathbb{A}_1^{\mathbf{x}}$ . Así sucesivamente. En general,

$$\eta_t(i) = \Theta(U(\mathbf{x}); U(\mathbf{x}') : \mathbf{x}' \in \mathbb{A}^{\mathbf{x}}) \quad (4.20)$$

donde  $\Theta$  es la función determinística definida por el procedimiento recursivo descrito en la Sección anterior. *En definitiva, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_t = (\eta_t(i) : i \in \mathbb{Z}^d)$  estará bien definido si los clanes de ancestros  $\mathbb{A}^{(i,t)}$ ,  $i \in \mathbb{Z}^d$  son finitos. El proceso  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  estará bien definido si no hay percolación orientada para atrás en el tiempo.*

Adaptando las ideas desarrolladas en [3] y [4] se puede demostrar que

**Lema 25** *Para cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  existe un proceso de ramificación  $(\mathbb{B}_n^{\mathbf{x}} : n \in \mathbb{N})$ , tal que la ley de  $\mathbb{B}_1^{\mathbf{x}}$  es la misma que la ley de  $\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}}$  y  $\mathbb{A}_n^{\mathbf{x}} \subset \mathbb{B}_n^{\mathbf{x}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

El Lema anterior permite demostrar la siguiente

**Proposición 26** *Si  $|\partial_r\{0\}|(1 - \alpha(\Gamma)) < 1$ , entonces, con probabilidad igual a 1, no hay percolación orientada hacia atrás en el tiempo. Por lo tanto, el proceso  $(\eta_t : t \in \mathbb{R})$  está bien definido casi seguramente respecto de  $\mathbb{P}$ .*

**Demostración.**

Para cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  existe un proceso de ramificación  $(\mathbb{B}_n^{\mathbf{x}} : n \in \mathbb{N})$ , tal que la ley de  $\mathbb{B}_1^{\mathbf{x}}$  es la misma que la ley de  $\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}}$  y  $\mathbb{A}_n^{\mathbf{x}} \subset \mathbb{B}_n^{\mathbf{x}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De la definición (4.17) de la primera generación de ancestros de  $\mathbf{x}$  se obtiene  $\mathbb{E}[|\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}}|] = |\partial_r\{0\}|(1 - \alpha(\Gamma))$ . Por hipótesis  $|\partial_r\{0\}|(1 - \alpha(\Gamma)) < 1$  y como  $\mathbb{B}_1^{\mathbf{x}}$  tiene la misma ley que  $\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}}$ , el proceso de ramificación  $(\mathbb{B}_n^{\mathbf{x}} : n \in \mathbb{N})$  es subcrítico:

$$\mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathbb{B}_n^{\mathbf{x}} = \emptyset, \forall n \geq n_0) = 1. \quad (4.21)$$

Por lo tanto, para cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  se tiene que  $\mathbb{P}(|\mathbb{A}^{\mathbf{x}}| < \infty) = 1$ . En consecuencia,

$$\mathbb{P}(|\mathbb{A}^{\mathbf{x}}| < \infty \text{ para todo } \mathbf{x} = (i, t), t \in \mathcal{T}(i), i \in \mathbb{Z}^d) = 1. \quad (4.22)$$

La demostración se termina observando que si  $\mathbf{x} = (i, t) \in \mathcal{X}$ , entonces  $\mathbb{A}^{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{(i, T^*(\mathbf{x}))}$ , donde  $T^*(\mathbf{x}) := \min\{T \in \mathcal{T}(i) : t \leq T\}$  es la última época de  $\mathcal{T}(i)$  anterior a  $t$  cuando se explora la construcción gráfica para atrás en el tiempo.  $\square$

**Demostración del Lema 25.** Basta definir un orden total en  $\mathcal{X}$ ,  $\prec$ , y después seguir paso por paso la construcción desarrollada en las páginas 924-925 de la referencia [3]. La idea es la siguiente.

Usando el orden total en  $\mathcal{X}$ <sup>1</sup>, cualquier conjunto finito de puntos espacio-temporales  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  puede ordenarse de modo que  $\mathbf{x}_m \prec \mathbf{x}_{m+1}$ ,  $m = 1, \dots, k-1$ . La primera generación de ancestros de cada  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  se descompone dos partes disjuntas. La primera,  $\tilde{\mathbb{A}}_1^{\mathbf{x}}$  está compuesta por todos los primeros ancestros de  $\mathbf{x}$  que no son ancestros de los puntos anteriores; la segunda,  $\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}} \setminus \tilde{\mathbb{A}}_1^{\mathbf{x}}$  es la responsable de la dependencia entre las generaciones de ancestros. Se trata pues de eliminarla y reemplazarla por otra con la misma ley  $\tilde{\mathbb{B}}_1^{\mathbf{x}}(\mathcal{X}_{\mathbf{x}})$  construida en una copia independiente del espacio de probabilidad  $\mathcal{X}$ . Este procedimiento permite definir conjuntos independientes  $\mathbb{B}_1^{\mathbf{x}} := \tilde{\mathbb{A}}_1^{\mathbf{x}} \cup \tilde{\mathbb{B}}_1^{\mathbf{x}}(\mathcal{X}_{\mathbf{x}})$  con la misma ley de  $\mathbb{A}_1^{\mathbf{x}}$  y tales que  $\cup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbb{A}_1^{\mathbf{x}} \subset \cup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbb{B}_1^{\mathbf{x}}$ .

El procedimiento definido por  $\mathbb{B}_1^{\mathbf{x}}$  induce naturalmente un proceso de ramificación:  $\mathbb{B}_n^{\mathbf{x}} := \cup_{\mathbf{x}' \in \mathbb{B}_{n-1}^{\mathbf{x}}} \mathbb{B}_1^{\mathbf{x}'}$ . Inductivamente,  $\mathbb{A}_n^{\mathbf{x}} \subset \mathbb{B}_n^{\mathbf{x}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

<sup>1</sup>Por ejemplo:  $(i, t) \prec (i', t')$  si y sólo si  $t > t'$  (porque estamos explorando la construcción gráfica para atrás en el tiempo) o  $t = t'$  e  $i \prec^\ell i'$ , donde  $\prec^\ell$  es el orden lexicográfico en  $\mathbb{Z}^d$  inducido por el orden total de  $\mathbb{Z}$ :  $i \prec^\ell i'$  si existe  $m > 0$  tal que  $i_m < i'_m$  y  $i_n = i'_n$  para todo  $n < m$ .

**Tiempos de parada reversos.** Para cada  $t \in \mathbb{R}$  y cada  $i \in \mathbb{Z}^d$  fijos, sea  $\tau_i(t)$  el instante en que se extingue el clan de ancestros de  $(i, t)$ :

$$\tau_i(t) := \text{máx}\{s \leq t : \Pi_2(\mathbb{A}^{(i,t)}) \subset [s, \infty)\}, \quad (4.23)$$

donde  $\Pi_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección temporal de los puntos  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ :  $\Pi_2(\mathbf{x}) = t$  si y sólo si  $\mathbf{x} = (i, t)$  para algún  $i \in \mathbb{Z}^d$ .

Por definición, el instante  $\tau_i(t)$  es un tiempo de parada reverso que, como consecuencia de la Proposición 26, es finito con probabilidad igual a 1:  $\mathbb{P}(\tau_i(t) > -\infty) = 1$ . Debido a que  $\tau_i(t)$  es una función determinística de los procesos de Poisson marcados  $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$  su ley no depende ni del sitio  $i$ , ni del tiempo  $t$ .

Se obtiene el siguiente resultado

**Proposición 27** *Para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$  y para cada  $t \in \mathbb{R}$  existe un tiempo de parada reverso  $\tau_i(t)$  finito, con probabilidad igual a 1, tal que para todo  $s \leq \tau_i(t)$ , el valor de  $\eta_{[s,t]}^\xi(i)$  no depende de  $\xi$ . Más aún, para cada  $t \in \mathbb{R}$  fijo y para todo  $\xi \in \Omega$  vale que*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta_{[s,t]}^\xi = \eta_t\right) = 1. \quad (4.24)$$

## 4.5. Unicidad de la medida invariante y límite termodinámico

### 4.5.1. Unicidad

La prueba es similar a la del Teorema 8.

Suponga que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son medidas invariantes para el Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ . Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función local continua cuyos valores están determinados por lo que ocurre en una región finita  $\Lambda$ . Usando la construcción conjunta de los Gibbs sampler  $(\eta_{[s,t]}^\xi : t \geq s)$ ,  $\xi \in \Omega$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y los resultados obtenidos en las Secciones 4.2 y 4.4 puede verse que para todo  $t \geq 0$  vale la desigualdad:

$$|\mu_1(f) - \mu_2(f)| \leq 2\|f\|_\infty |\Lambda| \mathbb{P}(\tau_0(0) < -t). \quad (4.25)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
|\mu_1(f) - \mu_2(f)| &= \left| \int \mu_1(d\xi) \mathbb{E}[f(\eta_{[0,t]}^\xi)] - \int \mu_2(d\zeta) \mathbb{E}[f(\eta_{[0,t]}^\zeta)] \right| \\
&= \left| \int \mu_1(d\xi) \mathbb{E}[f(\eta_{[-t,0]}^\xi)] - \int \mu_2(d\zeta) \mathbb{E}[f(\eta_{[-t,0]}^\zeta)] \right| \\
&\leq \int \int \mu_1(d\xi) \mu_2(d\zeta) \left| \mathbb{E} \left[ f(\eta_{[-t,0]}^\xi) - f(\eta_{[-t,0]}^\zeta) \right] \right| \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int \int \mu_1(d\xi) \mu_2(d\zeta) \mathbb{P} \left( \left( \eta_{[-t,0]}^\xi \right)_\Lambda \neq \left( \eta_{[-t,0]}^\zeta \right)_\Lambda \right) \\
&\leq 2\|f\|_\infty |\Lambda| \mathbb{P}(\tau_0(0) < -t).
\end{aligned}$$

En la primera igualdad se usó la definición de medida invariante; en la segunda usamos que la ley del proceso  $\eta_{[s,t]}^\xi$  es la misma que la del proceso  $\eta_{[s-t,0]}^\xi$ . En la primera desigualdad se usó que los procesos están construidos en el mismo espacio de probabilidades; en la segunda el Lema 12 y que los valores de  $f$  están determinados por lo que ocurre en la región finita  $\Lambda$ . La tercera desigualdad se obtiene del siguiente modo: observamos que

$$\mathbb{P} \left( \left( \eta_{[-t,0]}^\xi \right)_\Lambda \neq \left( \eta_{[-t,0]}^\zeta \right)_\Lambda \right) \leq \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{P} \left( \eta_{[-t,0]}^\xi(i) \neq \eta_{[-t,0]}^\zeta(i) \right),$$

y usamos la definición y las propiedades de los tiempos de parada  $\tau_i(0)$ :

$$\left\{ \eta_{[-t,0]}^\xi(i) \neq \eta_{[-t,0]}^\zeta(i) \right\} \subset \{ \tau_i(0) < -t \}$$

para obtener la desigualdad

$$\mathbb{P} \left( \left( \eta_{[-t,0]}^\xi \right)_\Lambda \neq \left( \eta_{[-t,0]}^\zeta \right)_\Lambda \right) \leq \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{P}(\tau_i(0) < -t) = |\Lambda| \mathbb{P}(\tau_0(0) < -t).$$

La desigualdad (4.25) implica que  $|\mu_1(f) - \mu_2(f)| = 0$  porque  $\mathbb{P}(\tau_0(0) > -\infty) = 1$ . Como  $f$  es local continua arbitraria,  $\mu_1 = \mu_2$ .  $\square$

### 4.5.2. Límite termodinámico

Fijamos  $t \in \mathbb{R}$  y fijamos  $\gamma \in \Omega$ . Sea  $(\Lambda_n : n \in \mathbb{N})$  una sucesión cualquiera de regiones finitas tal que  $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ .

Para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$  sea  $\Lambda(i, t)$  la proyección del clan de ancestros  $\mathbb{A}^{(i,t)}$  sobre  $\mathbb{Z}^d$ . Si  $\Lambda(i, t)$  es finita, existe un  $n(i, t) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n(i, t)$  vale que  $\Lambda(i, t) \subset \Lambda_n$ . Por construcción, los valores de los procesos  $\eta_{\Lambda_n, t}^\gamma(i)$  y  $\eta_t(i)$  son iguales para todo  $n \geq n(i, t)$ .

Resumiendo: si la proyección del clan de ancestros del sitio  $i$  a tiempo  $t$  sobre  $\mathbb{Z}^d$  es finita, entonces

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \eta_{\Lambda,t}^\gamma(i) = \eta_t(i). \quad (4.26)$$

De acuerdo con la Proposición 26, para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\Lambda(i,t)$  es una región finita con probabilidad igual a 1. En consecuencia

$$\mathbb{P} \left( \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \eta_{\Lambda,t}^\gamma = \eta_t \right) = 1. \quad (4.27)$$

De los resultados obtenidos en la Sección 4.3 sabemos que los procesos  $\eta_{\Lambda,t}^\gamma$  tienen como única medida invariante la distribución de Gibbs  $\mu_\Lambda(\cdot | \gamma_{\Lambda^c})$ . Por lo tanto,

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda(\cdot | \gamma_{\Lambda^c}) = \mu, \quad (4.28)$$

donde  $\mu$  es la única medida invariante para el Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ .  $\square$

## 4.6. Comportamiento de las correlaciones espaciales

En esta Sección demostramos que las correlaciones espaciales decaen exponencialmente con la distancia.

**Teorema 28** *Existen constantes positivas  $M_1$  y  $M_2$  tales que*

$$|\mu(\eta(0)\eta(i)) - \mu(\eta(0))\mu(\eta(i))| \leq C(a,b)|i|M_1 \exp(-M_2|i|) \quad i \in \mathbb{Z}^d, \quad (4.29)$$

donde  $C(a,b) = \max\{|a|, |b|\}(b-a)$  y  $\eta(j)$  es una abreviatura para  $\eta_t(j)$  cualquiera sean  $j \in \mathbb{Z}^d$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

Este resultado es intuitivamente claro puesto que el ancho espacial del clan de ancestros de cada sitio debe decaer exponencialmente debido a que está dominado por un proceso de ramificación subcrítico.

### 4.6.1. Ancho espacial del clan de ancestros

**Lema 29** *Sea  $S$  la cantidad sitios de  $\mathbb{Z}^d$  ocupados por la proyección espacial del clan de ancestros  $\mathbb{A}^{(0,0)}$  del punto  $(0,0) \in \mathcal{X}$ . Existen constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  tales que*

$$\mathbb{P}(S > k) \leq C_1 \exp(-C_2 k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.30)$$

**Demostración.** El proceso de ramificación  $(\mathbb{B}_n^{(0,0)} : n \in \mathbb{N})$  que domina al clan de ancestros  $\mathbb{A}^{(0,0)}$  del punto  $(0, 0) \in \mathcal{X}$  definido en la demostración del Lema 25 induce un proceso de Galton-Watson  $(Z_n : n \geq 0)$  tal que

$$|\mathbb{A}^{(0,0)}| \leq Z \quad (4.31)$$

donde  $Z_0 := 1$ ,  $Z_n := |\mathbb{B}_n^{(0,0)}|$ ,  $n \geq 1$ , y  $Z := \sum_{n \geq 0} Z_n$ . Por construcción, el proceso de Galton-Watson  $(Z_n : n \geq 0)$  se describe mediante una familia  $Y_i^n$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  i.i.d. de variables aleatorias no negativas cada una con la misma distribución que  $Y = |\mathbb{B}_1^{(0,0)}|$ ,  $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_i^n$  (con la convención  $\sum_{i=1}^0 Y_i^n = 0$ ).

Debido a que  $S \leq |\mathbb{A}^{(0,0)}|$ , la prueba se reduce a mostrar que existen constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  tales que

$$\mathbb{P}(Z > k) \leq C_1 \exp(-C_2 k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.32)$$

Sea  $R := \sup\{s > 0 : \sum_i \mathbb{P}(Z = i) s^i < \infty\}$  el radio de convergencia de la función generadora de  $Z$ ,  $F(s) := \mathbb{E}[s^Z]$ . Observar que si  $R > 1$ , la desigualdad de Chebichev exponencial implica que

$$\mathbb{P}(Z > k) \leq \frac{\mathbb{E}[R^Z]}{R^k} = C_1 \exp(-C_2 k), \quad (4.33)$$

donde  $C_1 = \mathbb{E}[R^Z] > 0$  y  $C_2 = \log R > 0$ . La prueba se reduce a mostrar que  $R > 1$ .

Se sabe que (Th.3, Otter (1949))  $R = a/f(a)$ , donde  $a$  es la solución de la ecuación

$$\frac{f(a)}{a} = f'(a), \quad (4.34)$$

$f(s) = \mathbb{E}[s^Y]$  es la función generadora de  $Y$

$$\begin{aligned} f(s) &= \alpha(\Gamma) s^0 + (1 - \alpha(\Gamma)) s^N \\ &= \alpha(\Gamma) + (1 - \alpha(\Gamma)) s^N \end{aligned}$$

y  $N = |\partial_r\{0\}|$ .

Para resolver la ecuación (4.34) basta observar que

$$\begin{aligned}
f'(a) = \frac{f(a)}{a} &\iff af'(a) = f(a) \\
&\iff N(1 - \alpha(\Gamma))a^N = \alpha(\Gamma) + (1 - \alpha(\Gamma))a^N \\
&\iff (N - 1)(1 - \alpha(\Gamma))a^N = \alpha(\Gamma) \\
&\iff a^N = \frac{\alpha(\Gamma)}{(N - 1)(1 - \alpha(\Gamma))} \\
&\iff a = \left( \frac{\alpha(\Gamma)}{(N - 1)(1 - \alpha(\Gamma))} \right)^{1/N}.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
f(a) &= \alpha(\Gamma) + (1 - \alpha(\Gamma)) \left( \left( \frac{\alpha(\Gamma)}{(N - 1)(1 - \alpha(\Gamma))} \right)^{1/N} \right)^N \\
&= \alpha(\Gamma) + (1 - \alpha(\Gamma)) \left( \frac{\alpha(\Gamma)}{(N - 1)(1 - \alpha(\Gamma))} \right) \\
&= \alpha(\Gamma) + \frac{\alpha(\Gamma)}{(N - 1)} \\
&= \alpha(\Gamma) \left( \frac{N}{N - 1} \right).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\left( \frac{\alpha(\Gamma)}{(N - 1)(1 - \alpha(\Gamma))} \right)^{1/N}}{\alpha(\Gamma) \left( \frac{N}{N - 1} \right)} \\
&= \left( \frac{(N - 1)^{N - 1}}{N^N \alpha(\Gamma)^{N - 1} (1 - \alpha(\Gamma))} \right)^{1/N}
\end{aligned}$$

Observar que

$$\begin{aligned}
R > 1 &\iff \frac{(N - 1)^{N - 1}}{N^N \alpha(\Gamma)^{N - 1} (1 - \alpha(\Gamma))} > 1 \\
&\iff \frac{(N - 1)^{N - 1}}{N^N} > (1 - \alpha(\Gamma)) \alpha(\Gamma)^{N - 1}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Un poco de análisis muestra que el polinomio  $p(x) = (1 - x)x^{N - 1}$ , tiene un máximo absoluto (considerando como dominio  $x \geq 0$ ) en  $x = (N - 1)/N$ . Algunas cuentas más muestran que

$$p\left(\frac{N - 1}{N}\right) = \frac{(N - 1)^{N - 1}}{N^N}. \tag{4.36}$$



Finalmente, la validez de la desigualdad (4.35) se deduce de que por hipótesis,  $\alpha(\Gamma) > \frac{N-1}{N}$ .

.

□

**Corolario 30** Sea  $SW(A^{(i,t)}) := |\Pi_{\mathbb{Z}^d}(A^{(i,t)})|$  la cantidad de sitios ocupados por la proyección espacial del clan de ancestros  $A^{(i,t)}$  del punto  $(i,t) \in \mathcal{X}$ . Existen constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$ , que no dependen del punto  $(i,t) \in \mathcal{X}$ , tales que

$$\mathbb{P}(SW(A^{(i,t)}) > k) \leq C_1 \exp(-C_2 k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.37)$$

**Demostración.** Es consecuencia inmediata de la invariancia por traslaciones espacio temporales de nuestra construcción y del Lema 29. □

#### 4.6.2. Decaimiento exponencial de las correlaciones espaciales

**Demostración del Teorema 28.** Por construcción

$$\mu(\eta(0)) = \mathbb{E}[\Theta(A^0)] \quad \text{y} \quad \mu(\eta(i)) = \mathbb{E}[\Theta(A^i)], \quad (4.38)$$

donde  $A^j := A^{(j,t)}$  es el clan de ancestros del punto  $(j,t) \in \mathcal{X}$  y  $\Theta(A^j)$  es una abreviatura para  $\Theta(U(j,t); U(x) : x \in A^{(j,t)})$ .

Adaptando la técnica desarrollada en (Section 4.5) de Fernández, Ferrari and Garcia (2001) se puede construir un acoplamiento entre clanes  $(A^0, A^i, \hat{A}^0, \hat{A}^i)$  tal que

(a)  $(\hat{A}^0, \hat{A}^i)$  tiene la misma distribución que  $(A^0, A^i)$  pero las marginales son independientes;

(b)  $A^0 = \hat{A}^0$ ;

(c)  $\hat{A}^i \cap A^0 = \emptyset \Rightarrow A^i = \hat{A}^i$ .

Utilizando dicho acoplamiento entre clanes puede verse que

$$\begin{aligned} \mu(\eta(0)\eta(i)) - \mu(\eta(0))\mu(\eta(i)) &= \mathbb{E}[\Theta(A^0)\Theta(A^i)] - \mathbb{E}[\Theta(\hat{A}^0)] \mathbb{E}[\Theta(\hat{A}^i)] \\ &= \mathbb{E}[\Theta(A^0)\Theta(A^i)] - \mathbb{E}[\Theta(\hat{A}^0)\Theta(\hat{A}^i)] \\ &= \mathbb{E}[\Theta(A^0)\Theta(A^i) - \Theta(A^0)\Theta(\hat{A}^i)] \\ &= \mathbb{E}[\Theta(A^0)(\Theta(A^i) - \Theta(\hat{A}^i))\mathbf{1}\{\hat{A}^i \cap A^0 \neq \emptyset\}]. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|\mu(\eta(0)\eta(i)) - \mu(\eta(0))\mu(\eta(i))| \leq C(a, b)\mathbb{P}(\hat{\mathbb{A}}^i \cap \mathbb{A}^0 \neq \emptyset), \quad (4.39)$$

donde  $C(a, b) = \max\{|a|, |b|\}(b - a)$ .

Por otra parte, usando el decaimiento exponencial del ancho espacial de los clanes de ancestros (4.37), puede verse que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{A}^0 \cap \hat{\mathbb{A}}^i \neq \emptyset) &\leq \mathbb{P}(SW(\mathbb{A}^0) + SW(\hat{\mathbb{A}}^i) \geq |i|) \\ &\leq \sum_{k=1}^{|i|} \mathbb{P}(SW(\mathbb{A}^0) \geq k) \mathbb{P}(SW(\hat{\mathbb{A}}^i) \geq |i| - k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{|i|} C_1^2 \exp(-C_2|i|) \\ &= |i|C_1^2 \exp(-C_2|i|). \end{aligned} \quad (4.40)$$

La prueba se completa combinando las desigualdades (4.39) y (4.40). □

# Capítulo 5

## Campos Gaussianos con spines acotados

### 5.1. Definiciones y resultados

Sea  $\Omega = [a, b]^{\mathbb{Z}^d}$ . Sea  $J : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función simétrica, no negativa sumable:  $J(i) = J(-i) \geq 0$  para todo  $i \in \mathbb{Z}^d$  y  $0 < \|J\| := \sum_i J(i) < \infty$ ; también suponemos que  $J(0) = 0$ . Para cada  $\Lambda \in \mathcal{S}$ , consideramos el Hamiltoniano ferromagnético  $H_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dado por el potencial cuadrático inducido por  $J$

$$H_\Lambda(\eta) := \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \not\subset \Lambda^c} J(j-i)(\eta(i) - \eta(j))^2. \quad (5.1)$$

Sea  $\Gamma = \{\mu_\Lambda(\cdot | \gamma_{\Lambda^c}) : \Lambda \in \mathcal{S}, \gamma \in \Omega\}$  la familia de especificaciones locales inducida por  $H_\Lambda$  definida en (4.4):

$$\mu_\Lambda(d\eta_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c}) := \frac{1}{Z_\Lambda(\gamma)} \exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c})) \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda). \quad (5.2)$$

El primer resultado establece que las especificaciones locales (5.2) son Gaussianas multivariadas truncadas.

**Lema 31** *Para cada  $\Lambda \in \mathcal{S}$  y  $\gamma \in \Omega$ , la especificación local  $\mu_\Lambda(\cdot | \gamma_{\Lambda^c})$  es una Gaussiana multivariada  $\mathcal{N}_\Lambda(\mathbf{m}_\Lambda^\gamma, \Sigma_\Lambda)$  truncada a la caja  $[a, b]^\Lambda$ , donde*

$$\mathbf{m}_\Lambda^\gamma = A_\Lambda^{-1} B_{\Lambda, \Lambda^c} \gamma_{\Lambda^c} \quad y \quad \Sigma_\Lambda = A_\Lambda^{-1} \quad (5.3)$$

con

$$A_\Lambda(i, j) := \begin{cases} \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} J(j - i) + \|J\|, & \text{si } i = j \in \Lambda, \\ -J(j - i), & \text{si } i \in \Lambda \text{ y } j \in \Lambda \setminus \{i\} \end{cases} \quad (5.4)$$

y

$$B_{\Lambda, \Lambda^c}(i, j) := J(j - i), \text{ para } i \in \Lambda \text{ y } j \in \Lambda^c. \quad (5.5)$$

En particular, para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$ , la especificación local  $\mu_{\{i\}}(\cdot | \gamma_{\{i\}^c})$  es una Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a,b}(\bar{\gamma}(i), \|J\|^{-1})$ , donde

$$\bar{\gamma}(i) = \|J\|^{-1} \sum_{j \neq i} J(j - i) \gamma(j).$$

Este Lema se demuestra en la Sección 5.5.

El segundo resultado es la condición suficiente para la existencia de un proceso Markoviano estacionario con la dinámica del Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ .

**Teorema 32** Sea  $J : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  simétrica, no negativa y de rango finito  $r \in \mathbb{N}$ :  $\{i \in \mathbb{Z}^d : J(i) \neq 0\} = \partial_r \{0\}$ . Sea  $x_d(r) \in \mathbb{R}^+$  la única solución positiva de la ecuación

$$2 \frac{\Phi(x) - \Phi(x/2)}{\Phi(x) - \Phi(0)} = 1 - |\partial_r \{0\}|^{-1}. \quad (5.6)$$

Si  $b - a < x_d(r)$ , entonces existe un proceso Markoviano estacionario con la dinámica del Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ .

Este Teorema se demuestra al final de la Sección 5.2.

El tercer resultado establece que la ausencia de transición de fase no depende de la condiciones enunciadas en el Teorema 32 y que se trata de una propiedad general para este tipo de modelos.

**Teorema 33** Sea  $J : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  simétrica, no-negativa, sumable tal que  $0 < \|J\| < \infty$ . Entonces existe una única medida de Gibbs compatible con  $\Gamma$ .

Este Teorema se demuestra al final de la Sección 5.4.

Puesto que  $H_\Lambda(\eta) = \|J\| H_\Lambda(\eta/\sqrt{\|J\|})$  donde  $(\eta/c)(i) = \eta(i)/c$  para todo  $i$  y el intervalo  $[a, b]$  es arbitrario, sin perder generalidad, podemos asumir que  $\|J\| = 1$ .

De hecho, si elegimos  $\|J\| = 1$  e introducimos una temperatura inversa  $\beta > 0$  definiendo

$$\mu_\Lambda^\beta(d\eta_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c}) := \frac{1}{Z_\Lambda^\beta(\gamma)} \exp(-\beta H_\Lambda(\eta_\Lambda \gamma_{\Lambda^c})) \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda), \quad (5.7)$$

tenemos  $\beta H_\Lambda(\eta) = H_\Lambda(\sqrt{\beta}\eta)$ . Si  $\eta \in [a^*, b^*]^{\mathbb{Z}^d}$ , entonces  $\sqrt{\beta}\eta \in [\sqrt{\beta}a^*, \sqrt{\beta}b^*]^{\mathbb{Z}^d}$ . Debido a que el Teorema 33 es verdadero para cada intervalo, substituyendo  $[a, b]$  por  $[\sqrt{\beta}a, \sqrt{\beta}b]$  obtenemos que el modelo a temperatura inversa  $\beta$  y spines en  $[a, b]$  tiene una única medida de Gibbs. Es suficiente considerar el caso  $\beta = 1$  porque los otros casos se reducen a este.

**Caso anti ferromagnético en grafos bipartitos** El truco usual permite extender el Teorema 33 a  $J$  negativa en grafos bipartitos. Suponga que  $J$  satisface las condiciones del Teorema 33 y  $J(i - j) = 0$  si  $i, j \in \Upsilon_1$  o  $i, j \in \Upsilon_2$  para una partición  $\Upsilon_1, \Upsilon_2$  de  $\mathbb{Z}^d$ . Defina  $\tilde{J}(i) = -J(i)$  y  $\tilde{\Gamma}$  la especificación construida con  $\tilde{J}$ . Defina la transformación  $(R\eta)(i) = \eta(i)$  para  $i \in \Upsilon_1$  y  $(R\eta)(i) = a + b - \eta(i)$  para  $i \in \Upsilon_2$ . Para una medida  $\mu$  sobre  $\Omega$ , sea  $R\mu$  la medida inducida por esta transformación. Entonces  $\mu$  es Gibbs para  $\Gamma$  si y sólo si  $R\mu$  es Gibbs para  $\tilde{\Gamma}$ . Esto implica que el Teorema 33 vale también para las especificaciones  $\tilde{\Gamma}$ .

## 5.2. Simulación perfecta

La construcción estacionaria de un proceso Markoviano con la dinámica del Gibbs Sampler asociado a  $\Gamma$  y la simulación perfecta de la única medida de Gibbs asociada en toda región finita  $\Lambda$  dependen de dos hechos relacionados entre sí: (a) que  $\Gamma$  tenga la propiedad (4.9) enunciada en el Teorema 19 y (b) que para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$  se pueda construir un acoplamiento maximal de la familia de variables aleatorias  $X_{i,\eta}, \eta \in \Omega$  distribuidas con ley  $\mu_i(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$  con densidad  $g_{i,\eta}$ . Ambos hechos dependen del comportamiento de las funciones  $\inf_{\eta \in \Omega} g_{i,\eta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

En la práctica, el problema se reduce a caracterizar la familia de funciones  $\inf_{\eta \in \Omega} g_{i,\eta}(x)$ ,  $i \in \mathbb{Z}^d$ . De acuerdo con el Lema 31 las densidades  $g_{i,\eta}$  corresponden a Gaussianas truncadas  $\mathcal{N}_{a,b}(\bar{\eta}(i), 1)$ , donde  $\bar{\eta}(i) = \sum_{j \neq i} J(j - i)\eta(j)$ .

Como el potencial cuadrático inducido por la función  $J$  es invariante por traslaciones espaciales,

$$\inf_{\eta \in \Omega} g_{i,\eta}(x) = \inf_{\eta \in \Omega} g_{\eta}(x), \quad (i \in \mathbb{Z}^d) \quad (5.8)$$

donde, para cada  $\eta \in \Omega$ ,  $g_{\eta}(\cdot)$  es la densidad correspondiente a la Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a,b}(\bar{\eta}(0), 1)$ .

La función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(\eta) := \bar{\eta}(0)$  es una combinación convexa de los spines en  $\partial_r\{0\}$ . En consecuencia, para todo  $\eta \in \Omega$ ,  $\bar{\eta}(0) \in [a, b]$ . Por lo tanto,

$$\inf_{\eta \in \Omega} g_{\eta}(x) = \min_{m \in [a,b]} g_m(x), \quad (5.9)$$

donde  $g_m$  es la densidad de la Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a,b}(m, 1)$ .

Usando las identidades (5.8) y (5.9) y los resultados para familias de Gaussianas truncadas obtenidos en la Sección 3.2.2 podemos calcular el *coeficiente de ergodicidad asociado a  $\Gamma$* ; caracterizar la *máxima componente común* de la familia de Gaussianas truncadas  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  y construir un *acoplamiento maximal* siguiendo la demostración del Teorema 4. Con estas herramientas podemos construir una versión estacionaria del Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$ .

1. *Coeficiente de ergodicidad.* Usando (3.11) obtenemos el valor del coeficiente de ergodicidad asociado a  $\Gamma^1$ ,

$$\alpha(\Gamma) = 2 \frac{\Phi(b-a) - \Phi((b-a)/2)}{\Phi(b-a) - \Phi(0)}. \quad (5.10)$$

2. *Máxima componente común.* Para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$ , la máxima componente común de familia de Gaussianas truncadas  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$  se describe mediante la función

$$\alpha_i(x) = \int_a^x \inf_{\eta \in \Omega} g_{i,\eta}(y) dy \quad (x \in [a, b]).$$

Usando (5.8), (5.9) y (3.12) se obtiene  $\alpha_i(x) = \alpha(x)$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}^d$ , donde

$$\alpha(x) = \frac{A_{a,x}(b)\mathbf{1}\{x < \mathbf{x}_0\} + (A_{a,\mathbf{x}_0}(b) + A_{\mathbf{x}_0,x}(a))\mathbf{1}\{x \geq \mathbf{x}_0\}}{\Phi(b-a) - \Phi(0)}, \quad \mathbf{x}_0 = (a+b)/2.$$

---

<sup>1</sup>Puesto que  $\mathbf{m}_1 = a$  y  $\mathbf{m}_2 = b$ ,  $\mathbf{x}_0 = (a+b)/2$  ya que  $A_{a,b}(\mathbf{m}_1) = A_{a,b}(\mathbf{m}_2) = \Phi(b-a) - \Phi(0)$ . Para simplificar la expresión de  $\alpha(\Gamma)$  usamos la identidad  $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ .

3. *Acoplamiento maximal.* Para cada  $i \in \mathbb{Z}^d$ , el proceso  $(\hat{X}_{i,\eta} : \eta \in \Omega)$  definido por

$$\hat{X}_{i,\eta} = \hat{X}_{i,\eta}(U) := \mathbf{1}\{U \leq \alpha(\Gamma)\}\alpha^{-1}(U) + \mathbf{1}\{U > \alpha(\Gamma)\}\hat{G}_{i,\eta}^{-1}(U),$$

donde  $U$  es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  y  $\hat{G}_{i,\eta}(x) := \alpha(\Gamma) + \int_a^x g_{i,\eta}(y)dy - \alpha(x)$ , es un acoplamiento maximal para la familia  $X_{i,\eta}$ ,  $\eta \in \Omega$ .

### Demostración del Teorema 32.

La demostración se obtiene de la expresión (5.10) para el coeficiente de ergodicidad asociado a  $\Gamma$  observando que la condición (4.9) del Teorema 19 es equivalente a  $b-a < x_d(r)$  debido a que la función

$$C(x) := 2 \frac{\Phi(x) - \Phi(x/2)}{\Phi(x) - \Phi(0)}, \quad x > 0,$$

tiene las siguientes propiedades: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = 0$ , (c)  $C(x)$  es continua y estrictamente decreciente.  $\square$

## 5.3. Gibbs sampler y dominación estocástica

En esta Sección recolectamos algunos resultados conocidos sobre *dominación estocástica* y analizamos propiedades del conjunto de medidas invariantes para el Gibbs sampler relacionadas con la *atractividad* del proceso. Aquí, la forma particular de las especificaciones no es relevante. La mayoría de los resultados son extensiones fáciles para espacio continuo  $\Omega$  de resultados de los Capítulos 3 y 4 de Liggett [11] para el espacio  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Dominación estocástica en  $\Omega$ .** Para  $\eta, \xi \in \Omega$  se dice que  $\eta \leq \xi$  si y sólo si  $\eta(i) \leq \xi(i)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}^d$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es *creciente* si y sólo si  $f(\eta) \leq f(\xi)$  para  $\eta \leq \xi$ . Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  medidas de probabilidad sobre  $\Omega$ . Se dice que  $\mu_2$  *domina estocásticamente* a  $\mu_1$ , y se denota  $\mu_1 \preceq \mu_2$ , si  $\mu_1 f \leq \mu_2 f$  para cada función medible creciente  $f$ .  $\mu_1 \preceq \mu_2$  si existe un acoplamiento  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$  con marginales  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tal que  $\hat{\eta}_1 \leq \hat{\eta}_2$  casi seguramente [14, 11].

**Atractividad** Un proceso de Markov es *atractivo* si  $\mu_1 \preceq \mu_2$  implica  $\mu_1 S(t) \preceq \mu_2 S(t)$ . Una condición suficiente para la atractividad del Gibbs sampler es

$$\mu_{\{i\}}(\cdot | \eta_{\{i\}^c}) \preceq \mu_{\{i\}}(\cdot | \xi_{\{i\}^c}) \quad \text{si} \quad \eta \leq \xi \quad (5.11)$$

Sean  $\delta^a$  y  $\delta^b$  las medidas que concentran masa sobre las configuraciones “todo  $a$ ” y “todo  $b$ ”, respectivamente. Claramente,  $\delta^a \preceq \mu \preceq \delta^b$  para cualquier medida  $\mu$ . Si el proceso es atractivo,  $\delta^b S(t)$  es no creciente y  $\delta^a S(t)$  es no decreciente en  $t$ . Por ende ambas sucesiones tienen límite (débil) cuando  $t \rightarrow \infty$  que llamaremos  $\mu^b$  y  $\mu^a$ , respectivamente. Las medidas  $\mu^b$  y  $\mu^a$  son medidas invariantes llamadas la medida superior e inferior, respectivamente. Para cada medida  $\mu$  la atractividad implica  $\delta^a S(t) \preceq \mu S(t) \preceq \delta^b S(t)$  para todo  $t$ . Si  $\mu$  es invariante  $\mu S(t) = \mu$  para todo  $t$  y tomando límites cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\mu^a \preceq \mu \preceq \mu^b \quad (5.12)$$

**Proposición 34** *Suponga que el Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$  es atractivo y  $\mu^a = \mu^b$ . Entonces si  $\mu$  es una medida de Gibbs compatible con  $\Gamma$ ,  $\mu = \mu^a = \mu^b$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 18 las medidas de Gibbs son invariantes para el Gibbs sampler, por ende cada medida de Gibbs  $\mu$  debe satisfacer (5.12), lo que demuestra la unicidad.  $\square$

## 5.4. Ausencia de transición de fase

En esta Sección repasamos algunas propiedades básicas de las variables Gaussianas truncadas, mostramos que el Gibbs sampler inducido por el Hamiltoniano (5.1) es atractivo y que las medidas invariantes superior e inferior coinciden, demostrando el Teorema 33.

**Gaussianas truncadas.** Sea  $X_{\mathbf{m}}$  una variable aleatoria con distribución Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a,b}(\mathbf{m}, 1)$  donde  $a < b$ ,  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ . Los resultados de la Sección 3.2.2 muestran que

$$\text{si } \mathbf{m}_1 < \mathbf{m}_2, \text{ entonces } \mathcal{N}_{a,b}(\mathbf{m}_1, 1) \preceq \mathcal{N}_{a,b}(\mathbf{m}_2, 1). \quad (5.13)$$

También,

$$\mathbb{E}[X_{\mathbf{m}}] = \mathbf{m} - \varphi(\mathbf{m}), \quad (5.14)$$

$$\text{donde } \varphi(\mathbf{m}) := \frac{\phi(b - \mathbf{m}) - \phi(a - \mathbf{m})}{\Phi(b - \mathbf{m}) - \Phi(a - \mathbf{m})}. \quad (5.15)$$



(ver Sec.7, Cap. 13 de [9]). La función  $\varphi$  es impar con respecto a  $\mathbf{m}_0 = \frac{a+b}{2}$ :  $\varphi(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}) = -\varphi_{a,b}(\mathbf{m}_0 - \mathbf{m})$  para todo  $0 \leq \mathbf{m} \leq \frac{b-a}{2}$ . Más aún  $\varphi$  es creciente, continua e inversible en el intervalo  $a \leq \mathbf{m} \leq b$ .

**Gibbs sampler.** De acuerdo con el Lema 31, la especificación  $\mu_{\{i\}}(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$  es una Gaussiana truncada  $\mathcal{N}_{a,b}(\bar{\eta}(i), 1)$ , donde

$$\bar{\eta}(i) = \sum_{j \neq i} J(j-i)\eta(j).$$

La función  $h(\eta) = \bar{\eta}(i)$  es creciente en  $\eta$ . Por (5.13) las especificaciones  $\mu_{\{i\}}(\cdot | \eta_{\{i\}^c})$  satisfacen la condición suficiente (5.11) para la atractividad del Gibbs sampler. Más aún, usando (5.14) puede verse que para  $i \in \mathbb{Z}^d$  y  $f(\eta) = \eta(i)$ ,

$$Lf(\eta) = \int_a^b \mu_{\{i\}}(dx | \eta_{\{i\}^c})(x - \eta(i)) = \bar{\eta}(i) - \varphi(\bar{\eta}(i)) - \eta(i).$$

Abusaremos de la notación escribiendo  $\bar{\eta}(i)$  y  $\eta(i)$  en lugar de  $h$  y  $f$ , para  $h(\eta) = \bar{\eta}(i)$  y  $f(\eta) = \eta(i)$ .

**Lema 35** *Sea  $\mu$  una medida de probabilidad invariante para el Gibbs sampler. Si  $\mu$  es invariante por traslaciones,*

$$\mu\varphi(\bar{\eta}(i)) = 0. \quad (5.16)$$

**Demostración.** Puesto que  $\mu$  es invariante para el Gibbs sampler,

$$0 = \mu L(\eta(i)) = \mu(\bar{\eta}(i)) - \mu(\varphi(\bar{\eta}(i))) - \mu(\eta(i)). \quad (5.17)$$

La invariancia por traslaciones implica que  $\mu(\eta(i))$  no depende de  $i$ . Entonces,

$$\mu(\bar{\eta}(i)) = \mu(\eta(i)) \sum_{j: j \neq i} J(j-i) = \mu(\eta(i)). \quad (5.18)$$

(Recordar que  $\|J\| = \sum_{i \neq 0} J(i) = 1$ ). □

**Demostración del Teorema 33.** La existencia de una medida de Gibbs se prueba en el Capítulo 4 de [6]:  $[a, b]$  es un *espacio de Borel estandar* de medida finita y el potencial inducido por  $J$  es absolutamente sumable.

El Gibbs sampler asociado a  $\Gamma$  es atractivo de modo que las medidas invariantes superior e inferior  $\mu^b$  y  $\mu^a$  están bien definidas. Por la Proposición 34 es suficiente mostrar que  $\mu^a = \mu^b$ . Sea  $(\eta^a, \eta^b)$  un vector aleatorio con marginales  $\mu^a$  y  $\mu^b$  y tal que  $\eta^a \leq \eta^b$ . La función  $\bar{\eta}(i)$  es creciente en  $\eta$  y  $\varphi(\mathbf{m})$  es creciente en  $\mathbf{m}$ , entonces  $\varphi(\bar{\eta}^a(i)) \leq \varphi(\bar{\eta}^b(i))$ . El límite que define a  $\mu^a$  y  $\mu^b$  es invariante por traslaciones y en consecuencia también lo son  $\mu^a$  y  $\mu^b$ . Por (5.16),  $\varphi(\bar{\eta}^a(i))$  y  $\varphi(\bar{\eta}^b(i))$  tienen valor esperado 0. En consecuencia  $\varphi(\bar{\eta}^a(i)) = \varphi(\bar{\eta}^b(i))$  casi seguramente. Usando que  $\varphi$  es inversible,  $\bar{\eta}^a(i) = \bar{\eta}^b(i)$  casi seguramente, vale decir,

$$\sum_{j:j \neq i} J(j-i)(\eta^b(j) - \eta^a(j)) = 0 \quad (5.19)$$

Puesto que  $\eta^a \leq \eta^b$ , (5.19) implica  $\eta^b(j) = \eta^a(j)$  para todo  $j$  tal que  $J(j-i) > 0$ . Como  $i$  es arbitrario, esto implica que  $\eta^a(j) = \eta^b(j)$  casi seguramente para todo  $j$ .  $\square$

## 5.5. Especificaciones Gaussianas truncadas

### Demostración del Lema 31.

Cálculos sencillos muestran que para  $H_\Lambda$  definida por (5.1),

$$H_\Lambda(\eta) = \frac{1}{2}(\eta'_\Lambda A_\Lambda \eta_\Lambda - 2\eta'_\Lambda B_{\Lambda, \Lambda^c} \eta_{\Lambda^c} + \Psi(\eta_{\Lambda^c})). \quad (5.20)$$

donde la función  $\Psi(\eta_{\Lambda^c}) = \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda^c} J(j-i)\eta(j)^2$  no depende de  $\eta_\Lambda$ . Si  $A_\Lambda$  es definida positiva, esto prueba el Lema porque, usando (5.20),

$$\begin{aligned} H^\Lambda(\eta_\Lambda \gamma_{\Lambda^c}) &= \frac{1}{2}(\eta'_\Lambda A_\Lambda \eta_\Lambda - 2\eta'_\Lambda A_\Lambda (A_\Lambda^{-1} B_{\Lambda, \Lambda^c} \gamma_{\Lambda^c}) + \Psi(\gamma_{\Lambda^c})) \\ &= \frac{1}{2}(\eta_\Lambda - \mathbf{m}_\Lambda^\gamma)' A_\Lambda (\eta_\Lambda - \mathbf{m}_\Lambda^\gamma) + R(\gamma), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{m}_\Lambda^\gamma = A_\Lambda^{-1} B_{\Lambda, \Lambda^c} \gamma_{\Lambda^c}$  y  $R(\gamma)$  no depende de  $\eta_\Lambda$ .

Si  $J$  satisface las condiciones del Teorema 33, entonces  $A_\Lambda$  es definida positiva. En efecto,  $A_\Lambda$  es la suma de una matriz semi-definida positiva y una combinación lineal de coeficientes no negativos (y no todos nulos) de matrices definidas positivas:

$$A_\Lambda = \sum_{i \in \Lambda} \left( \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} J(j-i) \right) E_\Lambda^{ii} + \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_+} 2J(k) \right) I_\Lambda + \sum_{k \in \Delta_+} J(k) T_\Lambda^k, \quad (5.21)$$

donde,  $I_\Lambda$  es la matriz identidad; las matrices  $T_\Lambda^k$ ,  $k \in \{j - i : (i, j) \in \Lambda \times \Lambda\} \setminus \{0\}$  están definida por

$$T_\Lambda^k(i, j) = 2\mathbf{1}\{i = j\} - \mathbf{1}\{j - i \in \{-k, k\}\}. \quad (5.22)$$

$(\mathbb{Z}_+^d, \mathbb{Z}_-^d)$  es una partición de  $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  tal que  $i \in \mathbb{Z}_+^d \Leftrightarrow -i \in \mathbb{Z}_-^d$  y  $\Delta_+ = \Delta \cap \mathbb{Z}_+^d$ .

Para obtener (5.21) observe que

$$\left( \sum_{k \in \Delta_+} J(k) T_\Lambda^k \right) (i, j) = \begin{cases} \sum_{k \in \Delta_+} 2J(k) & \text{si } j - i = 0, \\ -J(k) & \text{si } j - i \in \{-k, k\} \text{ para algún } k \in \Delta_+ \end{cases}$$

y como  $J$  es simétrica,

$$\begin{aligned} A_\Lambda(i, i) &= \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} J(j - i) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_+} 2J(k) + \sum_{k \in \Delta_+} 2J(k) \\ A_\Lambda(i, j) &= -J(k) \quad \text{si } j - i \in \{-k, k\} \quad \text{para algún } k \in \Delta_+. \end{aligned}$$

Finalmente, demostramos que para cada  $k \in \Delta_+$ , la matriz  $T_\Lambda^k$  es definida positiva. Diremos que los sitios  $i, j \in \Lambda$  están  $k$ -conectados si existe una sucesión  $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$  en  $\Lambda$  tal que  $i_m - i_{m-1} \in \{-k, k\}$  para todo  $m = 1, \dots, n$ . Como  $k$ -conectados es una relación de equivalencia,  $\Lambda$  se descompone en las clases de equivalencia  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  dadas por  $\Lambda_\ell = \{i_\ell + mk : m = 0, \dots, m_\ell\}$  para algún  $m_\ell$  entero no negativo.

Sea  $\eta \in \mathbb{R}^\Lambda$  un vector no nulo, usando las notaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} \eta' T_\Lambda^k \eta &= \sum_{\ell: m_\ell \geq 1} \sum_{m=0}^{m_\ell-1} (\eta(i_\ell + mk) - \eta(i_\ell + (m+1)k))^2 \\ &+ 2 \sum_{\ell: m_\ell=0} \eta(i_\ell)^2 + \sum_{\ell: m_\ell \geq 1} (\eta(i_\ell)^2 + \eta(i_\ell + m_\ell k)^2) > 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Lo que prueba que  $T_\Lambda^k$  es definida positiva y completa la demostración del Lema.  $\square$



# Bibliografía

- [1] Dobrushin, R. L. (1968). *The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity*. Theor. Prob. Appl. **13**, 197-224.
- [2] Durrett, R. (1995). *Ten lectures on particle systems*, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXIII, volume 1608 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [3] Fernández, R., Ferrari, P. A. and Garcia, N. L. (2001). *Loss network representation of Peierls contours*, Ann. Probab. **29** (2), 902-937.
- [4] Ferrari, P. A., Fernández, R. and Garcia, N. L. (2002). *Perfect simulation for interacting point processes, loss networks and Ising models*, Stoch. Proc. and their Appl. **102**, 63-88.
- [5] Geman, S. and Geman, D. (1984). *Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **6**, 721-741.
- [6] Georgii, H. O. (1988). *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gruyter, Berlin - New York.
- [7] Georgii, H. O., Häggström, O. and Maes, C. (2001). The random geometry of equilibrium phases. *Phase transitions and critical phenomena*, **18**, 1-142, Academic Press, San Diego, CA.
- [8] Harris, T. E. (1972). *Nearest neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices*. Ad. in. Math. **9**, 66-89.

- [9] Johnson, N. L. and Kotz, S. (1970). *Continuous univariate distributions*, Volume 1, John Wiley and Sons, New York.
- [10] E. L. Lehmann, E. L. (1959). *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley and Sons, New-York.
- [11] Liggett, T. M. (1985). *Interacting Particle Systems*, Springer - Verlag, New York.
- [12] Otter, R. (1949) *The Multiplicative Process*. *Annals of Math. Stat.* **20**, no. 2, 206-224.
- [13] Propp, J. G. and Wilson, D. B. (1996) *Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics*. *Proceedings of the Seventh International Conference on Random Structures and Algorithms (Atlanta, GA, 1995)*. *Random Structures Algorithms* **9**, no. 1-2, 223-252.
- [14] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer - Verlag, New York.