UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Propiedades homotópicas de los complejos de p-subgrupos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Kevin Iván Piterman

Director de tesis: Elías Gabriel Minian
Consejero de estudios: Jonathan Ariel Barmak

Buenos Aires

Fecha de defensa: 4 de Diciembre de 2019

Propiedades homotópicas de los complejos de p-subgrupos

Resumen. En esta tesis se investigan las propiedades homotópicas de los posets de p-subgrupos de un grupo finito. Particularmente estudiamos los siguientes problemas: la *conjetura de Quillen* que relaciona la contractibilidad de estos posets con la existencia de p-subgrupos normales no triviales, la *conjetura de Webb* sobre los complejos (y posets) de órbitas, y el grupo fundamental de estos posets. Los métodos desarrollados en este trabajo combinan herramientas de la teoría de grupos finitos, la clasificación de grupos simples y sistemas de fusión, con herramientas topológicas y combinatorias.

A principios de los 70, D. Quillen relacionó la cohomología equivariante módulo p de los G-espacios con los p-subgrupos elementales abelianos de G. El poset $\mathcal{S}_p(G)$ de p-subgrupos no triviales de G fue introducido luego por K. Brown para estudiar la característica de Euler de grupos (no necesariamente finitos), que codifica la presencia de torsión. Unos años más tarde, Quillen introdujo el poset $\mathcal{A}_p(G)$ de p-subgrupos elementales abelianos no triviales de un grupo finito G y estudió las propiedades homotópicas de su complejo de orden asociado $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ en relación con las propiedades algebraicas p-locales de G. Así, Quillen probó que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ y $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ son homotópicamente equivalentes y que si G posee un p-subgrupo normal no trivial entonces estos complejos son contráctiles. La vuelta a esto último es la bien conocida conjetura de Quillen, que actualmente permanece abierta. El resultado más avanzado en esta dirección se debe a M. Aschbacher y S.D. Smith, quienes establecieron la conjetura si $p > 5$ y los grupos no poseen ciertas componentes unitarias.

En esta tesis adoptamos el punto de vista de R.E. Stong de tratar a los posets $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ como espacios topológicos finitos. Con esta topología intrínseca, estos posets no son homotópicamente equivalentes y la conjetura de Quillen se puede reformular diciendo que si $\mathcal{S}_p(G)$ es homotópicamente trivial como espacio finito entonces es contráctil. En general, hay espacios finitos homotópicamente triviales pero no contráctiles (el teorema de Whitehead no es válido en espacios finitos). Respondimos a una pregunta de Stong mostrando que $\mathcal{A}_p(G)$ puede ser homotópicamente trivial pero no contráctil y describimos la contractibilidad del espacio finito $\mathcal{A}_p(G)$ en términos puramente algebraicos.

En este contexto estudiamos la conjetura de P. Webb que afirma que, en término de espacios finitos, los posets $\mathcal{A}_p(G)'/G$ y $\mathcal{S}_p(G)'/G$ son homotópicamente triviales. La conjetura original de Webb fue probada primero por P. Symonds. En general $\mathcal{S}_p(G)'/G$ puede no ser contráctil como espacio finito, pero $\mathcal{A}_p(G)'/G$ resultó ser contráctil en todos los ejemplos que calculamos, y conjeturamos que esto debe valer siempre (llamamos a esto la versión fuerte de la conjetura de Webb). En la tesis mostramos la validez de la versión fuerte de la conjetura en diversos casos, utilizando para esto herramientas de sistemas de fusión.

El grupo fundamental de los posets de p-subgrupos fue estudiado por varios matemáticos en las últimas tres décadas. Hasta el momento los trabajos más relevantes son los de M.

Aschbacher, quien probó condiciones algebraicas necesarias y suficientes para que $\mathcal{A}_p(G)$ sea simplemente conexo, módulo una conjetura sobre la cual hay considerable evidencia, y los trabajos de Ksontini quien investigó el grupo fundamental de estos posets cuando el grupo G es un grupo simétrico. En todos los casos estudiados los grupos resultaban siempre libres. En esta tesis probamos que el grupo fundamental de estos complejos es libre en *casi* todos los casos. En particular vimos que es libre para ciertas extensiones de grupos simples y para todos los grupos resolubles. En general, asumiendo la conjetura de Aschbacher, mostramos que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(S_G)) * F$, donde F es un grupo libre, S_G es un cociente particular de G y $\pi_1(\mathcal{A}_p(S_G))$ es libre salvo quizás si S_G es casi simple. Además, vimos que $\pi_1(\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10}))$ no es libre (acá $\mathbb{A}_{10}$ es el grupo alterno en 10 letras), mostrando que la obstrucción a que los complejos de p-subgrupos sean homotópicos a bouquet de esferas puede aparecer también en el π_1. Este es el primer ejemplo en la literatura de un poset de p-subgrupos con grupo fundamental no libre.

Por último, nos centramos en el estudio de la conjetura de Quillen. Demostramos que ésta es cierta si $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ admite un subcomplejo invariante de dimensión 2 y homotópicamente equivalente a él, probando así nuevos casos de la conjetura que no eran sabidos hasta el momento. También mostramos que la conjetura se puede estudiar bajo la suposición $O_{p'}(G) = 1$ (el subgrupo normal de G más grande de orden coprimo con p), extendiendo varios de los resultados conocidos de Aschbacher y Smith a todo primo p. Esto nos permite concluir que la conjetura es cierta si $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ tiene dimensión 3.

Palabras clave: p-subgrupos, espacios finitos, clasificación de grupos simples, sistemas de fusión, conjetura de Quillen.

Homotopy properties of the p-subgroup complexes

Abstract. In this thesis we investigate the homotopy properties of the p-subgroup posets of a finite group. Particularly, we study the following problems: *Quillen's conjecture*, which relates the contractibility of these posets with the existence of nontrivial normal p-subgroups, *Webb's conjecture*, on the orbit complexes (and posets), and the fundamental group of these posets. The methods developed in this work combine tools of the theory of finite groups, the classification of finite simple groups and fusion systems, with topological and combinatorial techniques.

At the beginning of the seventies, D. Quillen related the equivariant cohomology modulo p of G-spaces with the elementary abelian p-subgroups of G. The poset $\mathcal{S}_p(G)$ of nontrivial p-subgroups of G was introduced by K. Brown to study the Euler characteristic of groups (not necessary finite), which encodes the presence of torsion. Some years later, Quillen introduced the poset $\mathcal{A}_p(G)$ of nontrivial elementary abelian p-subgroups of a finite group G and studied the homotopy properties of its order complex $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ in relation with the p-local algebraic properties of G. Quillen proved that $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ and $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ are homotopy equivalent and that if G has a nontrivial normal p-subgroup then these complexes are contractible. The reciprocal to this last statement is the well-known Quillen's conjecture, which remains open. The most advanced result on this direction is due to M. Aschbacher and S.D. Smith, who established the conjecture if $p > 5$ and the groups do not have certain unitary components.

In this dissertation we adopt the viewpoint of R.E. Stong of handling the posets $\mathcal{A}_p(G)$ and $\mathcal{S}_p(G)$ as finite topological spaces. With this intrinsic topology, these posets are not homotopy equivalent and Quillen's conjecture can be reformulated by saying that if $\mathcal{S}_p(G)$ is a homotopically trivial finite space then it is contractible. In general, there are homotopically trivial finite spaces which are not contractible (Whitehead's theorem is no longer true in this context). We answer a question raised by Stong by showing that $\mathcal{A}_p(G)$ may be homotopically trivial but non-contractible, and describe the contractibility of the finite space $\mathcal{A}_p(G)$ in purely algebraic terms.

In this context we study Webb's conjecture which states that, in terms of finite spaces, the posets $\mathcal{A}_p(G)'/G$ and $\mathcal{S}_p(G)'/G$ are homotopically trivial. The original Webb's conjecture was proved first by P. Symonds. In general $\mathcal{S}_p(G)'/G$ may be non-contractible as a finite space, but $\mathcal{A}_p(G)'/G$ turned out to be contractible in all the examples that we computed, and we conjecture that this should always hold (we call this the strong version of Webb's conjecture). We prove some cases of the strong version of the conjecture by using tools of fusion systems.

The fundamental group of the posets of p-subgroups was studied by several mathematicians in the last decades. So far, the most relevant works are those of M. Aschbacher, who proved necessary and sufficient algebraic conditions for $\mathcal{A}_p(G)$ to be simply connected, modulo a conjecture for which there is considerable evidence, and the works of Ksontini who investigated

the fundamental group of these posets when G is the symmetric group. In all the cases studied, the groups turned out to be free. In this thesis we show that the fundamental group of these complexes is free in *almost* all cases. In particular we prove that it is free for certain extensions of simple groups and for any solvable group. In general, assuming Aschbacher's conjecture, we show that $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(S_G)) * F$, where F is a free group, S_G is a particular quotient of G and $\pi_1(\mathcal{A}_p(S_G))$ is free except perhaps if S_G is almost simple. Moreover, we prove that $\pi_1(\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10}))$ is non-free (here, $\mathbb{A}_{10}$ is the alternating group in 10 letters), showing that the obstruction for the p-subgroup complexes to be homotopy equivalent to a bouquet of spheres can also rely on the π_1. This is the first example in the literature of a p-subgroup poset with non-free fundamental group.

Finally, we focus on the study of Quillen's conjecture. We prove that the conjecture holds if $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ admits an invariant 2-dimensional homotopy equivalent subcomplex, showing new cases of the conjecture. We also prove that the conjecture can be studied under the supposition $O_{p'}(G) = 1$ (the largest normal subgroup of G of order prime to p), extending some known results of Aschbacher and Smith to every prime p. This allows us to conclude that the conjecture holds if $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ has dimension 3.

Key words: p-subgroups, finite spaces, classification of finite simple groups, fusion systems, Quillen's conjecture.

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es estudiar las propiedades homotópicas de los posets de p-subgrupos tanto desde el punto de vista de espacios finitos como desde el punto de vista clásico por medio de la topología de sus complejos de órdenes. Dado un grupo finito G y un primo p que divide a su orden, consideramos el poset $\mathcal{S}_p(G)$ de p-subgrupos no triviales de G y el subposet $\mathcal{A}_p(G)$ de p-subgrupos elementales abelianos no triviales de G.

El estudio de estos posets comenzó en la década del 70, motivado por los artículos fundacionales de D. Quillen [Qui71], quien relacionó ciertas propiedades de la cohomología equivariante módulo p de los G-espacios con los p-subgrupos elementales abelianos de G. El grupo G actúa en estos posets vía conjugación en los p-subgrupos, y por lo tanto obtenemos G-espacios cuyas propiedades homotópicas están estrechamente ligadas con G. Por ejemplo, en [Web87] se relaciona la cohomología p-ádica de G con la de los grupos de isotropía de los símplices del complejo de orden $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, y el teorema de amplitud de Brown establece que la cohomología equivariante módulo p de $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$ es isomorfa a la cohomología equivariante módulo p de G (ver [Bro94, Smi11]). Recordar que si X es un poset finito, su complejo de orden $\mathcal{K}(X)$ consiste de las cadenas no vacías de elementos de X. Si Y es un G-espacio entonces $EG \times_G Y$ es su construcción de Borel, y la cohomología equivariante de Y es la cohomología de su construcción de Borel. También tenemos la fibración de Borel $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))| \to EG \times_G |\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))| \to BG$ que induce una sucesión exacta corta en los grupos fundamentales, mostrando que $\pi_1(EG \times_G |\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|)$ es en general un grupo infinito (ver Teorema 3.4.2).

Desde un punto de vista algebraico, la estructura como G-poset de $\mathcal{S}_p(G)$ guarda la información p-local de G, es decir, la estructura de los normalizadores de los p-subgrupos no triviales de G. Esto está fuertemente relacionado con la fusión del grupo. El estudio general de los sistemas de fusión y los grupos p-locales comenzó como generalización de esta idea para abstraerse de la estructura global del grupo y tratar de entender sus propiedades p-locales de una manera más sistemática: cómo son los morfismos de conjugación entre p-subgrupos de un p-subgrupo de Sylow fijo. Desde un punto de vista topológico, la estructura p-local del grupo codifica la misma información que la p-completación $BG_p^\wedge$ de su espacio clasificante BG. Más relaciones aparecen en la teoría de representación de grupos finitos. Ver

[AKO11, Gro16, Qui78, Smi11, Web87].

En [Bro75], K. Brown trabajó con la parte racional de la característica de Euler de un grupo (no necesariamente finito), la cual guarda relación con la presencia de torsión en el grupo. Introdujo el poset $\mathcal{S}_p(G)$ de p-subgrupos no triviales y mostró que, cuando G es finito, $\chi(\mathcal{S}_p(G))$ es 1 módulo $|G|_p$ (la potencia más grande de p que divide al orden de G). Esto es comúnmente denominado *Homological Sylow Theorem*.

Unos años más tarde, D. Quillen estudió más en profundidad las propiedades homotópicas de estos posets por medio de sus complejos de órdenes [Qui78]. Él introdujo el poset $\mathcal{A}_p(G)$ y mostró que la inclusión $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G)) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es una equivalencia homotópica. También relacionó algunas propiedades homotópicas de estos complejos con propiedades algebraicas de G. Por ejemplo, la desconexión de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ se traduce algebraicamente en la existencia de un subgrupo de G fuertemente p-embebido. En [Qui78] se muestra que si G posee un p-subgrupo normal no trivial entonces $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es contráctil. La vuelta a esta proposición es la bien-conocida *conjetura de Quillen* [Qui78, Conjecture 2.9]. Quillen estableció la conjetura para grupos resolubles, grupos de p-rango 2 (es decir, $\mathcal{A}_p(G)$ tiene altura 1) y grupos finitos de tipo Lie en característica p (porque en este caso $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es homotópico al Tits building del grupo). Actualmente la conjetura permanece abierta pero han habido importantes avances. El resultado más general se encuentra en el famoso artículo de M. Aschbacher y S.D. Smith [AS93]. Ellos utilizan fuertemente la clasificación de los grupos finitos simples para probar la conjetura si $p > 5$ y los grupos no poseen ciertas componentes unitarias. Ver también [AK90, HI88, PSV19, Rob88, Smi11].

En la década de los 80, R.E. Stong consideró los posets de p-subgrupos como espacios topológicos finitos por primera vez. Si X es un poset finito entonces posee una topología intrínseca cuyos abiertos son los downsets (o sea los conjuntos $U \subseteq X$ tales que si $x \in U$ e $y \leq x$ entonces $y \in U$). Esta construcción da lugar a un isomorfismo entre la categoría de posets finitos con funciones que preservan el orden y la categoría de espacios finitos T_0 con funciones continuas. Cuando X es un poset finito, también tenemos la topología de su complejo de orden $\mathcal{K}(X)$. La relación entre estas dos topologías está dada por el teorema de McCord que afirma que existe un equivalencia débil natural $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$, es decir, una función continua que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía y de homología (ver [McC66]). Con la topología intrínseca de espacios finitos, un poset finito X homotópicamente trivial (todos sus grupos de homotopía, y en particular de homología, son triviales) podría no ser contráctil y, más en general, hay equivalencias débiles entre espacios finitos que no son equivalencias homotópicas. Es decir, el teorema de Whitehead no es válido en el contexto de espacios topológicos finitos. Ver [Ale37, Bar11a, Sto66] para más detalles. En [Sto84] Stong consideró los posets $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ como espacios topológicos finitos y probó que, como espacios finitos, no tienen el mismo tipo homotópico (aunque la inclusión $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ es una equivalencia débil por el teorema de McCord y el resultado de Quillen). Más aún, mostró que $\mathcal{S}_p(G)$ es contráctil como espacio finito si y solo si G posee un p-subgrupo normal no trivial. De esta manera, la conjetura de Quillen se puede reformular diciendo que si $\mathcal{S}_p(G)$ es un espacio finito homotópicamente trivial entonces es contráctil (como espacio finito). Como $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico como espacios finitos en general, Stong preguntó si la misma reformulación de la conjetura de Quillen puede ser establecida en términos de $\mathcal{A}_p(G)$.

Nuestro estudio sobre los posets de p-subgrupos comenzó motivado por esta pregunta de Stong y los resultados obtenidos por J. Barmak relacionando los distintos tipos homotópicos de espacios finitos [Bar11a, Chapter 8]. En mi Tesis de Licenciatura [Pit16], respondí por la negativa a la pregunta de Stong exhibiendo un grupo G tal que para $p = 2$, el espacio finito $\mathcal{A}_p(G)$ es homotópicamente trivial pero no contráctil (ver Ejemplo 1.3.17). De esta manera, la conjetura de Quillen en términos de espacios finitos no significa lo mismo para $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$. Más aún, como para $\mathcal{S}_p(G)$ hay una descripción puramente algebraica de lo que significa ser contráctil como espacio finito, hicimos lo mismo para el poset $\mathcal{A}_p(G)$ usando la noción de *homotopía en pasos*. Básicamente una homotopía entre funciones continuas de espacios finitos puede describirse combinatoriamente y uno puede definir una longitud $n \geq 0$ de la homotopía. De esta manera, decimos que un poset finito es *contráctil en n pasos* si existe una homotopía de longitud n entre la función identidad del poset y una función constante. Para el caso del poset $\mathcal{A}_p(G)$, esta longitud define un invariante algebraico que se traduce en la existencia de cierto p-subgrupo elemental abeliano de G. Esto permite describir la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ en términos algebraicos (aunque para determinar estos subgrupos se necesita conocer parte de la combinatoria del poset $\mathcal{A}_p(G)$). Estos resultados pueden encontrarse en el artículo escrito en colaboración con E.G. Minian [MP18]. En el Capítulo 1 exhibimos algunos de estos resultados. También estudiamos estas preguntas en relación con otros posets de p-subgrupos que surgen en la literatura. Considere el poset $\mathcal{B}_p(G) = \{P \in \mathcal{S}_p(G) : P = O_p(N_G(P))\}$ de p-subgrupos radicales no triviales de G, introducido por Bouc y comúnmente llamado *poset de Bouc*. Aquí, $O_p(H)$ denota al p-subgrupo normal más grande de H, y $N_G(P)$ es el normalizador de P en G. Es sabido que $\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G)) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es una equivalencia homotópica (ver [Bou84, TW91]). En términos de espacios finitos, probamos que $\mathcal{B}_p(G)$ puede tener distinto tipo homotópico a $\mathcal{S}_p(G)$ y a $\mathcal{A}_p(G)$ (aunque tienen el mismo tipo homotópico débil por el teorema de McCord). Se puede ver que si $O_p(G) \neq 1$ entonces $O_p(G)$ es un mínimo de $\mathcal{B}_p(G)$ y por lo tanto, $\mathcal{B}_p(G)$ es contráctil como espacio finito si y solo si G posee un p-subgrupo normal no trivial. Así, la conjetura de Quillen (en términos de espacios finitos) se reformula de la misma manera para $\mathcal{B}_p(G)$ que para $\mathcal{S}_p(G)$. En términos de homotopía simple equivariante de espacios finitos, mostramos que $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{B}_p(G)$, $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G) \nearrow\!\!\!\searrow^G \mathcal{A}_p(G)$. También consideramos el complejo de Robinson $\mathcal{R}_p(G) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, introducido por R. Kńorr y G. Robinson [KR89], cuyos símplices son las cadenas de p-subgrupos $(P_0 < \ldots < P_n)$ de manera que P_i es normal en P_n para todo i. La inclusión $\mathcal{R}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es una equivalencia homotópica (ver [TW91]). A diferencia de los otros complejos de p-subgrupos, en general $\mathcal{R}_p(G)$ no proviene de un poset y por lo tanto consideramos su poset de caras de $\mathcal{R}_p(G)$ para estudiar sus propiedades homotópicas como espacio finito. Si K es un complejo simplicial finito, su poset de caras $\mathcal{X}(K)$ es el poset finito cuyos elementos son los símplices no vacíos de K ordenados por inlcusión. Si X es un poset finito, entonces $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)) = X'$ es la *primera subdivisión* de X. Notar que la primera subdivisión baricéntrica de K es $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$. En vista de estas observaciones, es más natural considerar las relaciones homotópicas entre el espacio finito $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ y los posets $\mathcal{S}_p(G)'$, $\mathcal{A}_p(G)'$ y $\mathcal{B}_p(G)'$. En general, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))'$ no es homotópicamente equivalente a ninguno de los otros posets y puede ser homotópicamente trivial pero no contráctil (ver Ejemplo 1.3.17), pero $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \nearrow\!\!\!\!\searrow^{G} \mathcal{S}_p(G)$.

En el Capítulo 2 estudiamos la conjetura de P. Webb en términos de espacios finitos. En [Web87] se conjeturó que el espacio de órbitas $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$ es contráctil. La conjetura de Webb fue probada primero por P. Symonds [Sym98] utilizando herramientas básicas de topología algebraica. Más tarde surgieron otras demostraciones y generalizaciones de este problema utilizando teoría de fusión de grupos y teoría de Morse de Bestvina-Brady (ver [Bux99, Gro16, Lib08, Lin09]). En general, la conjetura se prueba usando el complejo de Robinson. En [Pit16] probamos que, en términos de espacios finitos, la conjetura de Webb afirma que los posets de órbitas $\mathcal{S}_p(G)'/G$, $\mathcal{A}_p(G)'/G$, $\mathcal{B}_p(G)'/G$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ son homotópicamente triviales. La acción de G en estos posets es la inducida por conjugación en las cadenas de p-subgrupos. De esto nace naturalmente la pregunta de si en verdad son contráctiles como espacios finitos. En el artículo [Pit19] mostramos que $\mathcal{S}_p(G)'/G$ y $\mathcal{B}_p(G)'/G$ pueden no ser contráctiles. Sin embargo, no sabemos si $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es siempre contráctil o no. Hasta ahora las evidencias sugieren que siempre es contráctil y en [Pit19] conjeturamos que esta versión más fuerte de la conjetura de Webb debe valer. En [Pit19] se muestran varios casos para los que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil utilizando herramientas básicas de fusión de grupos finitos como el teorema de fusión de Alperin. En este capítulo recordamos los resultados de este artículo y probamos más casos de esta conjetura más fuerte. Los métodos que usamos dependen fuertemente de que estamos lidiando con cadenas de p-subgrupos abelianos y por lo tanto no pueden ser aplicados de la misma manera a los posets $\mathcal{S}_p(G)'/G$ y $\mathcal{B}_p(G)'/G$. En el siguiente teorema resumimos todos los casos en que probamos que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil como espacio finito. Notamos por $\mathrm{Syl}_p(G)$ al conjunto de p-subgrupos de Sylow de G, $|G|$ al orden de G, $\Omega_1(G) = \langle x \in G : x^p = 1\rangle$ y $Z(G)$ al centro de G. El p-rango de G es $m_p(G) = \max\{r : A \in \mathcal{A}_p(G), |A| = p^r\}$.

Teorema 2.5.12. *Sea G un grupo finito, p un primo que divide a su orden, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $\Omega = \Omega_1(Z(S))$. En los siguientes casos $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil:*

1. *$\Omega_1(S)$ es abeliano,*

2. *$\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil,*

3. *$|G| = p^\alpha q$, con q primo,*

4. *Los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente,*

5. *La fusión de los p-subgrupos elementales abelianos de S está controlada por* $N_G(O)$ *para algún* $1 \neq O \leq \Omega_1(Z(\Omega_1(S)))$,

6. $m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 1$,

7. $m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$ *y* $m_p(G) \geq \log_p(|G|_p) - 1$,

8. $|G|_p \leq p^4$,

9. $G = M_{11}$, M_{12}, M_{22}, J_1, J_2, HS, *o p es impar y G es un grupo de Mathieu, un grupo de Janko,* He, O'N, *o* Ru, *o* $p = 5$ *y* $G = Co_1$,

10. $\mathcal{A}_p(G)$ *es disconexo.*

La dificultad para probar que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil si G es p-resoluble recae en el hecho de que $\mathcal{A}_p(G)$ puede ser homotópicamente trivial pero no contráctil como espacio finito. Es decir, $O_p(G) \neq 1$ no garantiza que $\mathcal{A}_p(G)$ sea contráctil. Esto no sucede con $\mathcal{S}_p(G)'/G$.

En el siguiente teorema resumimos los casos en los que hemos probado que el espacio finito $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es contráctil. Recordar que $O_{p'}(G)$ es el subgrupo normal de G más grande de orden coprimo con p.

Teorema 2.5.11. *Sea G un grupo finito, p un primo que divide a* $|G|$ *y* $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. *En los siguientes casos* $\mathcal{S}_p(G)'/G$ *es un espacio finito contráctil:*

1. $O_p(G/O_{p'}(G)) \neq 1$*; en particular esto vale para grupos p-constrained (y por lo tanto para p-resolubles) o si* $O_p(G) \neq 1$,

2. $\Omega_1(S)$ *es abeliano,*

3. $|G| = p^\alpha q$, *con q primo,*

4. *Los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente,*

5. *Existe* $1 \neq O \leq Z(S)$ *tal que* $N_G(O)$ *controla la G-fusión en S.*

El teorema anterior nos permite deducir que el grupo más chico para el cual $\mathcal{S}_p(G)'/G$ no es contráctil es el grupo simple $\mathrm{PSL}_2(7)$ para $p = 2$, y, más en general, si $\mathcal{S}_p(G)'/G$ no es contráctil entonces $G/O_{p'}(G)$ es una extensión de un producto directo de grupos simples por automorfismos externos del producto (ver Observación 2.5.9 y Proposición 2.5.10).

También probamos que el poset de órbitas $\mathcal{A}_p(G)/G$ (sin subdividir) es siempre contráctil como espacio finito.

Teorema 2.4.1. *El espacio finito* $\mathcal{A}_p(G)/G$ *es contráctil.*

Para $\mathcal{B}_p(G)/G$ y $\mathcal{S}_p(G)/G$ esto es inmediato porque tienen un máximo: la clase de conjugación de un p-subgrupo de Sylow. Sin embargo, $\mathcal{A}_p(G)/G$ no tiene un máximo en general pues $\mathcal{A}_p(G)$ podría tener elementos maximales que no sean todos conjugados entre sí e incluso de distintos órdenes.

En el Capítulo 3 nos ocupamos de estudiar aspectos generales sobre el tipo homotópico de los complejos de p-subgrupos, enfocándonos principalmente en su grupo fundamental. Por mucho tiempo se pensó que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ tenía siempre el tipo homotópico de un bouquet de esferas (de dimensiones posiblemente distintas). De hecho, Quillen probó esto para ciertos grupos resolubles y grupos de tipo Lie [Qui78]. Más tarde, J. Pulkus y V. Welker dieron una descomposición wedge de $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ de donde se deduce que si G es resoluble entonces $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ es un bouquet de esferas si los intervalos superiores $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))_{>A})$ lo son ($A \in \mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))$). Ver [PW00]. Sin embargo, J. Shareshian mostró que en general los complejos de p-subgrupos no tienen el tipo homotópico de un bouquet de esferas pues hay torsión en el segundo grupo de homología de $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{13})$, donde $\mathbb{A}_{13}$ es el grupo alterno en 13 letras [Sha04]. No obstante, nada estaba dicho sobre el grupo fundamental, el cual debería ser libre si fueran homotópicos a bouquet de esferas. M. Aschbacher fue uno de los primeros matemáticos en investigar el grupo fundamental en búsqueda de condiciones puramente algebraicas necesarias y suficientes para que $\mathcal{A}_p(G)$ sea simplemente conexo [Asc93]. Así, Aschbacher probó que, módulo una conjetura sobre la cual hay considerable evidencia [Asc93, p.2], si $m_p(G) \geq 3$ entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo si y solo si los links $\mathcal{A}_p(G)_{>A}$ son conexos para todo $|A| = p$, salvo quizás si $G/O_{p'}(G)$ es un grupo casi simple u otros dos grupos excepcionales que surgen de los grupos simples. Recordemos que G es denominado *casi simple* si existe un grupo simple no abeliano L tal que $L \leq G \leq \operatorname{Aut}(L)$. Tanto las excepciones como el uso de la conjetura corresponde a la parte del "si" del teorema. Siguiendo esta línea, K. Das estableció la simple conexión de $\mathcal{A}_p(G)$ para algunos grupos G de tipo Lie [Das95, Das98, Das00]. Luego R. Ksontini trabajó con los grupos simétricos $\mathbb{S}_n$, describiendo los pares (p,n) para los que $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$ es simplemente conexo y mostrando que $\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n))$ es libre salvo quizás si $n = 3p$ o $3p+1$ (p impar) [Kso03, Kso04]. Poco más tarde, J. Shareshian probó que $\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n))$ es libre si $n = 3p$ [Sha04]. Hasta ese momento no se sabía qué sucedía con el caso $n = 3p+1$. Referimos a [Smi11, Section 9.3] para un resumen sobre las diferentes geometrías simplemente conexas para grupos simples, muy relacionadas con los complejos de p-subgrupos.

En esta tesis probamos que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre en *casi* todos los casos. De hecho probamos que es libre para varias familias de grupos casi simples y para todos los grupos resolubles. Sin embargo, encontramos que $\pi_1(\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10}))$ no es libre y que $\mathbb{A}_{10}$ (el grupo alterno en 10 letras) es el grupo más chico que da lugar a un poset de p-subgrupos con grupo fundamental no libre. Más aún, la homología de $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10})$ es libre abeliana. De esta manera, la obstrucción a que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ sea un bouquet de esferas también puede recaer en el grupo fundamental y podría no ser detectada con la homología. Usualmente, el estudio de los problemas asociados a los complejos de p-subgrupos es por medio de su homología, y nuestro ejemplo muestra que en general esto no va a ser suficiente para determinar su tipo homotópico. Observar que $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10}) = \mathcal{A}_3(\mathbb{S}_{10})$ es uno de los casos excluidos en los cálculos de Ksontini y Shareshian. Estos resultados pueden encontrarse en el artículo escrito en colaboración con E.G. Minian [MP19].

Sin embargo, nuestro ejemplo es bastante excepcional y hemos probado que en general el grupo fundamental sí es libre, y que las posibles excepciones surgen esencialmente de los grupos simples (como en el caso de $\mathbb{A}_{10}$). Para probar esto tuvimos que asumir la conjetura de Aschbacher [Asc93, p.2], sobre la cual, como mencionamos antes, hay considerable evidencia.

Teorema 3.4.2. *Sea G un grupo finito y p un primo que divide a $|G|$. Asuma la conjetura de Aschbacher. Entonces existe un isomorfismo $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(S_G)) * F$, donde F es un grupo libre y $S_G = \Omega_1(G)/O_{p'}(\Omega_1(G))$. Además, $\pi_1(\mathcal{A}_p(S_G))$ es un grupo libre (y por lo tanto $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre) excepto posiblemente si S_G es casi simple.*

Para la parte del "Además" no necesitamos asumir la conjetura. Para grupos p-resolubles $O_p(S_G) \neq 1$, o sea que $\mathcal{S}_p(S_G)$ es contráctil y así obtenemos grupo fundamental libre, módulo la conjetura de Aschbacher. Para grupos resolubles o para $p = 2$ la conjetura no es necesaria.

Corolario 3.0.1. *Asuma la conjetura de Aschbacher. Si $O_p(S_G) \neq 1$ entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre. En particular, esto vale para grupos p-resolubles y, más en general, para grupos p-constrained.*

Corolario 3.0.3. *Si G es resoluble entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre.*

Más aún, probamos que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre para algunas familias de grupos casi simples G.

Teorema 3.0.4. *Supongamos que $L \leq G \leq \mathrm{Aut}(L)$, donde L es un grupo simple no abeliano. Entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre en los siguientes casos:*

1. *$m_p(G) \leq 2$,*
2. *$\mathcal{A}_p(L)$ es disconexo,*
3. *$\mathcal{A}_p(L)$ es simplemente conexo,*
4. *L es simple de tipo Lie en característica p y $p \nmid (G:L)$ cuando L tiene rango Lie 2,*
5. *$p = 2$ y L tiene 2-subgrupos de Sylow abelianos,*
6. *$p = 2$ y $L = \mathbb{A}_n$ (el grupo alterno en n letras),*
7. *L es un grupo de Mathieu, J_1 o J_2,*

8. $p \geq 3$ *y* $L = J_3$*,* McL*,* O'N*.*

Por ejemplo, S.D. Smith comenta en [Smi11, p.290] que para muchos grupos simples L con $m_p(L) \geq 3$ es de esperarse que $\mathcal{A}_p(L)$ sea simplemente conexo.

Las técnicas utilizadas para probar estos resultados involucran herramientas básicas de topología algebraica combinadas con reducciones de espacios finitos y la clasificación de los grupos finitos simples. También usamos los resultados de Aschbacher [Asc93].

En el Capítulo 4 estudiamos en profundidad la conjetura de Quillen. Recordemos que la conjetura afirma que si $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ es contráctil entonces G posee un p-subgrupo normal no trivial, o sea $O_p(G) \neq 1$. En general se trabaja con una siguiente versión más fuerte de la conjetura.

Conjetura fuerte de Quillen. *Si* $O_p(G) = 1$ *entonces* $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) \neq 0$*.*

En las primeras secciones del Capítulo 4 recordamos los resultados conocidos sobre la conjetura (fuerte) junto con breves ideas de sus demostraciones, incluyendo el resultado de M. Aschbacher y S.D. Smith [AS93, Main Theorem].

Luego, utilizando las ideas de B. Oliver y Y. Segev [OS02], probamos el siguiente teorema sobre la conjetura de Quillen.

Teorema 4.3.1 (con I. Sadofschi Costa y A. Viruel)**.** *Si K es un subcomplejo de $\mathbb{Z}$-acíclico y* 2*-dimensional G-invariante de* $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$*, entonces* $O_p(G) \neq 1$*.*

Del cual deducimos inmediatamente:

Corolario 4.3.2. *Sea G un grupo finito. Supongamos que* $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ *admite un subcomplejo homotópicamente a éste,* 2*-dimensional y G-invariante. Si* $O_p(G) = 1$ *entonces* $\tilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Z}) = 0$*.*

Observar que el teorema no está enunciado para la versión fuerte de la conjetura.

Por ejemplo, el corolario anterior puede ser aplicado si $m_p(G) \leq 3$ o $\mathcal{B}_p(G)$ tiene altura 2.

Otro subposet que podemos considerar para aplicar el teorema anterior es el poset $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))$ de intersecciones no triviales de p-subgrupos elementales abelianos maximales. Este subposet es G-invariante y homotópicamente equivalente a $\mathcal{A}_p(G)$ (como espacio finito), por lo que $\mathcal{K}(\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G)))) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es una equivalencia homotópica. Ver también [Smi11] para una lista más extensa de complejos de p-subgrupos homotópicamente equivalentes a $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$.

En aplicación de nuestro teorema, damos algunos ejemplos de grupos G los cuales no entran en las hipótesis de los teoremas de [AS93] pero que aún así verifican la conjetura por el Corolario 4.3.2. Mostramos que es posible construirse un subcomplejo de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ homotópicamente equivalente, G-invariante y de dimensión 2. Estos resultados aparecen en el artículo escrito en colaboración con I. Sadofschi Costa y A. Viruel [PSV19].

Culminamos este capítulo mostrando que es posible estudiar la conjetura fuerte de Quillen bajo la suposición $O_{p'}(G) = 1$, y aplicamos esta reducción para obtener nuevos casos de la conjetura. En [AS93, Proposition 1.6], se muestra que esta suposición es posible provisto de que $p > 5$. Utilizando técnicas de espacios finitos y el caso p-resoluble de la conjetura de Quillen, probamos que esta reducción es posible para todo primo p. Precisamente, probamos el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1. *Sea G un grupo finito. Supongamos que los subgrupos propios de G satisfacen la conjectura fuerte de Quillen y que $O_{p'}(G) \neq 1$. Entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen. En particular, un contraejemplo minimal G a la conjetura fuerte de Quillen tiene $O_{p'}(G) = 1$.*

Este teorema no solo es interesante por la reducción que nos permite hacer, sino también por el método de su demostración. El uso de la clasificación de los grupos finitos simples en la demostración de este teorema es considerablemente menor que en la del resultado más débil [AS93, Proposition 1.6]. De hecho solo la usamos para invocar el caso p-resoluble de la conjetura, dentro del cual el uso de la Clasificación es solo para la estructura de los automorfismos externos de los grupos simples.

La demostración de nuestro teorema también provee una técnica para encontrar ciclos no triviales en la homología de $\mathcal{A}_p(G)$, generalizando la idea original de [AS93, Lemma 0.27] (see Lemma 4.5.10).

Aplicando los Teoremas 3.4.2 y 4.5.1, y Corolario 4.3.2, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 4.5.13. *Sea G un grupo finito. Supongamos que los subgrupos propios de G satisfacen la conjetura fuerte de Quillen y que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ posee un subcomplejo 2-dimensional, G-invariante y homotópicamente equivalente a éste. Entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen.*

Notar que este resultado es una ligera mejora a coeficientes racionales del Corolario 4.3.2, pero necesitamos la hipótesis inductiva.

Corolario 4.5.14. *La conjetura fuerte de Quillen vale para grupos de p-rango a lo sumo* 3.

También eliminamos la posibilidad de componentes de p-rango 1, que nos permite extender el resultado principal de [AS93] a $p = 5$.

Teorema 4.6.3. *Sea $L \leq G$ una componente tal que $L/Z(L)$ tiene p-rango* 1. *Si la conjetura fuerte de Quillen vale para los subgrupos propios de G, entonces vale para G.*

Corolario 4.6.5. *Las conclusiones del Main Theorem de [AS93] valen para $p = 5$.*

Finalmente, como aplicación de nuestros métodos y resultados, deducimos la conjetura fuerte para grupos de p-rango 4.

Teorema 4.6.8. *La conjetura fuerte de Quillen vale para grupos de p-rango a lo sumo* 4.

Estos resultados serán parte de un nuevo artículo más general sobre la conjetura de Quillen, que actualmente está en preparación.

Muchos de los ejemplos que presentamos en esta tesis fueron calculados en GAP [GAP18] con un paquete de posets finitos desarrollado en colaboración con X. Fernández e I. Sadofschi Costa [FPSC19]. En el Apéndice A.2 pueden encontrarse algunos de los códigos que hemos usado para computar los ejemplos que presentamos aquí.

Introduction

The main objective of this thesis is to study the homotopy properties of the posets of p-subgroups both from the point of view of finite topological spaces and from the classical viewpoint by means of the topology of their order complexes. Given a finite group G and a prime p dividing its order, we consider the poset $\mathcal{S}_p(G)$ of nontrivial p-subgroups of G and the poset $\mathcal{A}_p(G)$ of nontrivial elementary abelian p-subgroups of G.

The study of these posets began at the seventies, motivated by the foundational articles of D. Quillen [Qui71], who related certain properties of the modulo p equivariant cohomology of G-spaces with the elementary abelian p-subgroups of G. The group G acts on these posets via conjugation of the p-subgroups, and therefore we obtain G-spaces whose homotopy properties are closely related with G. For example, in [Web87] the p-adic cohomology of G is related with that of the isotropy groups of the simplices of the order complex $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, and Brown's ampleness theorem states that the modulo p equivariant cohomology of $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$ is isomorphic to the modulo p cohomology of G (see [Bro94, Smi11]). Recall that if X is a finite poset, its order complex $\mathcal{K}(X)$ consists of the nonempty chains of elements of X. If Y is a G-space then $EG\times_G Y$ is its Borel construction, and the equivariant cohomology of Y is the cohomology of the Borel construction. We also have the Borel fibration $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))| \to EG\times_G |\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))| \to BG$ which induces a short exact sequence between the fundamental groups, showing that $\pi_1(EG\times_G |\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|)$ is in general an infinite group (see Theorem 3.4.2).

From an algebraic point of view, the structure of $\mathcal{S}_p(G)$ as a G-poset keeps the p-local information of G, that is, the structure of the normalizers of the nontrivial p-subgroups of G. This is strongly related with the fusion of the group. The general study of the fusion systems and the p-local groups began as a generalization of this idea to get abstracted from the global structure of the group and try to understand the p-local properties in a more systematic way: how the conjugation morphisms between p-subgroups of a fixed Sylow p-subgroup are. From a topological point of view, the p-local structure of the group encodes the same information as the p-completion $BG^{\wedge}_p$ of its classifying space BG. More relations appears in representation theory of finite groups. See [AKO11, Gro16, Qui78, Smi11, Web87].

In [Bro75], K. Brown worked with the rational part of the Euler characteristic of a group (not necessarily finite), which keeps relation with the presence of torsion in the group. He introduced the poset $\mathcal{S}_p(G)$ of nontrivial p-subgroups and showed that, when G is finite, $\chi(\mathcal{S}_p(G))$ is 1 modulo $|G|_p$ (the greatest power of p dividing the order of G). This is usually called the *Homological Sylow Theorem*.

A few years later, D. Quillen studied in more depth the homotopy properties of these posets by means of their order complexes [Qui78]. He introduced the poset $\mathcal{A}_p(G)$ and showed that the inclusion $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G)) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ is a homotopy equivalence. He also related some homotopy properties of these complexes with algebraic properties of G. For example, the disconnectedness of $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ translates algebraically into the existence of a strongly p-embedded subgroup in G [Qui78, Proposition 5.2]. In [Qui78] it is shown that if G has a nontrivial normal p-subgroup then $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ is contractible. The converse of this proposition is the well-known *Quillen's conjecture* [Qui78, Conjecture 2.9]. Quillen established the conjecture for solvable groups, groups of p-rank 2 (i.e. $\mathcal{A}_p(G)$ has height 1) and finite groups of Lie type in characteristic p (because in this case $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ has the homotopy type of the Tits building of G). The conjecture remains open so far but there have been important advances. The most general result can be found in the famous article of M. Aschbacher and S.D. Smith [AS93]. They strongly use the classification of finite simple groups to establish the conjecture if $p > 5$ and the groups do not have certain unitary components. See also [AK90, HI88, PSV19, Rob88, Smi11].

In the eighties, R.E. Stong considered the posets of p-subgroups as finite topological spaces for the first time. If X is a finite poset, then it has an intrinsic topology whose open sets are the downsets (i.e. the subsets $U \subseteq X$ such that if $x \in U$ and $y \leq x$ then $y \in U$). This construction gives rise to an isomorphism between the category of finite posets with order preserving maps and the category of finite T_0-spaces with continuous maps. When X is a finite poset, we also have the topology of its order complex $\mathcal{K}(X)$. The relation between these two topologies is given by McCord's Theorem which states that there exists a natural weak equivalence $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$, i.e. a continuous map inducing isomorphisms in all homotopy groups (and homology groups) (see [McC66]). With the intrinsic topology of finite spaces, a homotopically trivial finite poset X (all its homotopy groups, and in particular homology groups, are trivial) could be non-contractible and, more generally, there are weak equivalences between finite spaces which are not homotopy equivalences. That is, Whitehead's theorem is no longer true in the context of finite spaces. See [Ale37, Bar11a, Sto66] for more details. In [Sto84] Stong considered the posets $\mathcal{A}_p(G)$ and $\mathcal{S}_p(G)$ as finite spaces and proved that, as finite spaces, they do not have the same homotopy type (but the inclusion $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ is a weak equivalence by McCord's theorem and Quillen's results). Moreover, Stong showed that $\mathcal{S}_p(G)$ is a contractible finite space if and only if G has a nontrivial normal p-subgroup. Hence, Quillen's conjecture can be restated by saying that if $\mathcal{S}_p(G)$ is a homotopically trivial finite space then it is contractible (as finite space). Since $\mathcal{A}_p(G)$ and $\mathcal{S}_p(G)$ do not have the same homotopy type in general, Stong asked whether the same reformulation of Quillen's conjecture can be stated in terms of

$\mathcal{A}_p(G)$.

We began the study of the posets of p-subgroups motivated by Stong's question and the results obtained by J. Barmak relating the different homotopy types of finite spaces [Bar11a, Chapter 8]. In my Undergraduate Thesis [Pit16], I answered Stong's question by the negative by exhibiting a finite group G such that for $p = 2$, the finite space $\mathcal{A}_p(G)$ is homotopically trivial but non-contractible (see Example 1.3.17). Therefore, Quillen's conjecture in terms of finite spaces does not mean the same for $\mathcal{A}_p(G)$ and $\mathcal{S}_p(G)$. Further, since the contractibility of $\mathcal{S}_p(G)$ is described in purely algebraic terms, we did the same for the poset $\mathcal{A}_p(G)$ by using the notion of *homotopy in steps*. Basically, a homotopy between continuous functions of finite spaces can be described in combinatorial terms and one can define the length $n \geq 0$ of the homotopy. In this way, we say that a finite poset is *contractible in n steps* if there exists a homotopy of length n between the identity map of the poset and a constant map. For the poset $\mathcal{A}_p(G)$, this length defines an algebraic invariant which translates into the existence of certain elementary abelian p-subgroup of G. This allows to describe the contractibility of $\mathcal{A}_p(G)$ in algebraic terms (but some of the combinatorial of the poset $\mathcal{A}_p(G)$ is needed to determine these subgroups). These results can be found in the paper written in collaboration with E.G. Minian [MP18]. In Chapter 1 we exhibit some of these results. We also study these questions in relation with other posets of p-subgroups that appear in the literature. Consider the poset $\mathcal{B}_p(G) = \{P \in \mathcal{S}_p(G) : P = O_p(N_G(P))\}$ of nontrivial radical p-subgroups of G, introduced by Bouc and commonly called *Bouc poset*. Here, $O_p(H)$ denotes the largest normal p-subgroup of H, and $N_G(P)$ is the normalizer of P in G. It is known that $\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G)) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ is a homotopy equivalence (see [Bou84, TW91]). In terms of finite spaces, we proved that $\mathcal{B}_p(G)$ may not be homotopy equivalent to $\mathcal{S}_p(G)$ and $\mathcal{A}_p(G)$ (although they have the same weak homotopy type by McCord's theorem). It can be shown that if $O_p(G) \neq 1$ then $O_p(G)$ is a minimum of $\mathcal{B}_p(G)$ and hence, $\mathcal{B}_p(G)$ is a contractible finite space if and only if G has a nontrivial normal p-subgroup. Therefore, Quillen's conjecture (in terms of finite spaces) reformulates in the same way for $\mathcal{B}_p(G)$ as for $\mathcal{S}_p(G)$. In terms of equivariant simple homotopy of finite space, we show that $\mathcal{S}_p(G) \searrow\!\!\searrow^G \mathcal{B}_p(G)$, $\mathcal{S}_p(G) \searrow\!\!\searrow^G \mathcal{A}_p(G)$ and $\mathcal{B}_p(G) \diagup\!\!\!\searrow\!\!\searrow^G \mathcal{A}_p(G)$. We also consider Robinson complex $\mathcal{R}_p(G) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, introduced by R. Knörr and G. Robinson [KR89], whose simplices are the chains of p-subgroups $(P_0 < \ldots < P_n)$ such that P_i is normal in P_n for all i. The inclusion $\mathcal{R}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ is a homotopy equivalence (see [TW91]). Unlike the other p-subgroup complexes, the complex $\mathcal{R}_p(G)$ does not come from a poset, and therefore we consider its face poset to study its homotopy properties as finite space. If K is a finite simplicial complex, its face poset $\mathcal{X}(K)$ is the finite poset whose elements are the nonempty simplices of K ordered by inclusion. If X is a finite poset, then $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)) = X'$ is the *first subdivision* of X. Note that the first barycentric subdivision of K is $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$. In light of these observations, it is more natural to consider the homotopy relations between the finite space $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ and the posets $\mathcal{S}_p(G)'$, $\mathcal{A}_p(G)'$ and $\mathcal{B}_p(G)'$. In general, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ is not homotopy equivalent to any of the previous posets and it can be homotopically trivial and non-contractible (see Example 1.3.17), but $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \nearrow\!\!\searrow^{G} \mathcal{S}_p(G)$.

In Chapter 2 we study P. Webb's conjecture in terms of finite spaces. In [Web87] it was conjectured that the orbit space $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$ is contractible. Webb's conjecture was proved first by P. Symonds [Sym98] by using basic tools of algebraic topology. Later, other proofs and generalizations of this problem arose by using fusion theory of groups and Bestvina-Brady approach to Morse theory (see [Bux99, Gro16, Lib08, Lin09]). In general, the conjecture is proved by using Robinson complex. In [Pit16] we proved that, in terms of finite spaces, Webb's conjecture asserts that the orbit posets $\mathcal{S}_p(G)'/G$, $\mathcal{A}_p(G)'/G$, $\mathcal{B}_p(G)'/G$ and $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ are homotopically trivial. The action of G on these posets is the induced by conjugation on the chains of p-subgroups. From this observation it is natural to ask if they are in fact contractible as finite spaces. In [Pit19] we showed that $\mathcal{S}_p(G)'/G$ and $\mathcal{B}_p(G)'/G$ may be non-contractible. However, we do not know if $\mathcal{A}_p(G)'/G$ is always contractible or not. So far, the evidences suggest that it is always contractible and in [Pit19] we conjecture that this stronger version of Webb's conjecture should hold. In [Pit19] several cases for which $\mathcal{A}_p(G)'/G$ is a contractible finite space are shown, by using basic tools of fusion in finite groups such as Alperin's fusion theorem. In this chapter we recall the results of this article and prove more cases of this stronger conjecture. The methods that we use deeply depend on the fact that we are dealing with chains of abelian p-subgroups and therefore, they cannot be carry out in the same way for the posets $\mathcal{S}_p(G)'/G$ and $\mathcal{B}_p(G)'/G$. In the following theorem we summarize all the cases that we have shown that $\mathcal{A}_p(G)'/G$ is a contractible finite space. Denote by $\mathrm{Syl}_p(G)$ the set of Sylow p-subgroups of G, $|G|$ the order of G, $\Omega_1(G) = \langle x \in G : x^p = 1 \rangle$ and $Z(G)$ the center of G. The p-rank of G is $m_p(G) = \mathrm{máx}\{r : A \in \mathcal{A}_p(G), |A| = p^r\}$.

Teorema 2.5.12. *Let G be a finite group, p a prime number dividing its order, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ and $\Omega = \Omega_1(Z(S))$. In the following cases $\mathcal{A}_p(G)'/G$ is a contractible finite space:*

1. *$\Omega_1(S)$ is abelian,*
2. *$\mathcal{A}_p(G)$ is contractible,*
3. *$|G| = p^\alpha q$, with q prime,*
4. *The Sylow p-subgroups of G intersect trivially,*
5. *The fusion of elementary abelian p-subgroups of S is controlled by $N_G(O)$ for some $1 \neq O \leq \Omega_1(Z(\Omega_1(S)))$,*
6. *$m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 1$,*
7. *$m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$ and $m_p(G) \geq r_p(G) - 1$,*

8. $r_p(G) \leq 4$,
9. $G = M_{11}$, M_{12}, M_{22}, J_1, J_2, HS, *or p is odd and G is any Mathieu group, Janko group,* He, O'N, *or* Ru, *or* $p = 5$ *and* $G = Co_1$,
10. $\mathcal{A}_p(G)$ *is disconnected.*

The difficulty for showing that $\mathcal{A}_p(G)'/G$ is contractible if G is a p-solvable group relies on the fact that $\mathcal{A}_p(G)$ may be a homotopically trivial but non-contractible finite space. That is, $O_p(G) \neq 1$ does not guarantee that $\mathcal{A}_p(G)$ is contractible. This does not happen with $\mathcal{S}_p(G)'/G$.

In the following theorem we summarize the cases for which we have proved that the finite space $\mathcal{S}_p(G)'/G$ is contractible. Recall that $O_{p'}(G)$ is the largest normal subgroup of G of order prime to p.

Teorema 2.5.11. *Let G be a finite group, p a prime number diving* $|G|$ *and* $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. *In the following cases* $\mathcal{S}_p(G)'/G$ *is a contractible finite space:*

1. $O_p(G/O_{p'}(G)) \neq 1$*; in particular it holds for p-constrained groups (and therefore for p-solvable groups) or if* $O_p(G) \neq 1$,
2. $\Omega_1(S)$ *is abelian,*
3. $|G| = p^\alpha q$, *with q prime,*
4. *The Sylow p-subgroups of G intersect trivially,*
5. *There exists* $1 \neq O \leq Z(S)$ *such that* $N_G(O)$ *controls the G-fusion in S.*

From the above theorem we deduce that the smallest group for which $\mathcal{S}_p(G)'/G$ is non-contractible is the simple group $\mathrm{PSL}_2(7)$ with $p = 2$, and, more generally, if $\mathcal{S}_p(G)'/G$ is non-contractible then $G/O_{p'}(G)$ is an extension of a direct product of simple groups by outer automorphisms of the product (see Remark 2.5.9 and Proposition 2.5.10).

We also prove that the orbit poset $\mathcal{A}_p(G)/G$ (without subdividing) is always contractible as finite space.

Teorema 2.4.1. *The finite space* $\mathcal{A}_p(G)/G$ *is contractible.*

For $\mathcal{B}_p(G)/G$ and $\mathcal{S}_p(G)/G$ this is immediate since they have a maximum: the conjugation class of a Sylow p-subgroup. However, $\mathcal{A}_p(G)/G$ may have no maximum in general since $\mathcal{A}_p(G)$ may have non-conjugate maximal elements and even of different orders.

In Chapter 3 we deal with general aspects of the homotopy type of the p-subgroup complexes, focusing primarily on their fundamental group. For a long time it was believed that $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ always had the homotopy type of a bouquet of spheres (of possibly different dimensions). In fact, Quillen proved this for some classes of solvable groups and groups of Lie type [Qui78]. Later, J. Pulkus and V. Welker gave a wedge decomposition of $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ from which it is deduced that if G is solvable then $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ is a bouquet of spheres if the upper intervals $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))_{>A})$ are ($A \in \mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))$). See [PW00]. However, J. Shareshian showed that in general the p-subgroup complexes do not have the homotopy type of a bouquet of spheres since there is torsion in the second homology group of $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{13})$, where $\mathbb{A}_{13}$ is the alternating group on 13 letters [Sha04]. Nevertheless, nothing was said about the fundamental group, which should be free if they were homotopic to a bouquet of spheres. M. Aschbacher was one of the first mathematicians who studied the fundamental group in the search of necessary and sufficient purely algebraic conditions for $\mathcal{A}_p(G)$ to be simply connected [Asc93]. Thus, Aschbacher proved that, modulo a conjecture for which there is a considerable evidence [Asc93, p.2], if $m_p(G) \geq 3$ then $\mathcal{A}_p(G)$ is simply connected if and only if the links $\mathcal{A}_p(G)_{>A}$ are connected for all $|A| = p$, except perhaps if $G/O_{p'}(G)$ is an almost simple group or another two exceptional groups arising from simple groups. Recall that G is termed *almost simple* if there exists a non-abelian simple group L such that $L \leq G \leq \mathrm{Aut}(L)$. Both the exceptions and the use of the conjecture correspond to the "if" part of the theorem. Following this line, K. Das established the simple connectivity of $\mathcal{A}_p(G)$ for some groups G of Lie type [Das95, Das98, Das00]. Later, R. Ksontini worked with the symmetric groups $\mathbb{S}_n$, describing the pairs (p,n) for which $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$ is simply connected and showing that $\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n))$ is a free group in the remaining cases except perhaps if $n = 3p$ or $n = 3p+1$ (p odd) [Kso03, Kso04]. Shortly after, J. Shareshian proved that $\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n))$ is a free group if $n = 3p$ [Sha04]. Until that moment it was not known the case $n = 3p+1$. We refer to [Smi11, Section 9.3] for a summary on different simply connected geometries for simple groups, closely related to the p-subgroup complexes.

In this thesis we prove that $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ is a free group in *almost* all cases. In fact, we show that it is a free group for various families of almost simple groups and for every solvable group. However, we found that $\pi_1(\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10}))$ is not free and that $\mathbb{A}_{10}$ (the alternating group in 10 letters) is the smallest group giving rise to a p-subgroup complex with non-free fundamental group. Moreover, the homology of $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10})$ is free abelian. In this way, the obstruction for $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ to be a bouquet of spheres can also rely on its fundamental group and may not be detected with the homology. Usually, the study of the problems associated to the p-subgroup complexes is by means of their homology, and our example shows that in general it will not be sufficient to determine their homotopy type. Note that $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10}) = \mathcal{A}_3(\mathbb{S}_{10})$ is one of the case excluded in the calculations of Ksontini and Shareshian. These results can be found in the article written in collaboration with E.G. Minian [MP19].

Nevertheless, our example is rather exceptional and we have proved that in general the fundamental group is free, and that the possible exceptions arise essentially from simple groups (like in the case of $\mathbb{A}_{10}$). In order to prove this, we had to assume Aschbacher's conjecture [Asc93, p.2], for which, as we mentioned before, there is considerable evidence.

Teorema 3.4.2. *Let G be a finite group and p a prime dividing $|G|$. Assume that Aschbacher's* *conjecture holds. Then there is an isomorphism $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(S_G)) * F$, where F is a free group. Moreover, $\pi_1(\mathcal{A}_p(S_G))$ is a free group (and therefore $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ is free) except possibly if S_G is almost simple.*

For the "Moreover" part we do not need to assume the conjecture. For p-solvable groups $O_p(S_G) \neq 1$, so $\mathcal{S}_p(S_G)$ is contractible and hence we obtain free fundamental group, modulo Aschbacher's conjecture. For solvable groups or $p = 2$ the conjecture is not needed.

Corolario 3.0.1. *Assume that Aschbacher's conjecture holds. If $O_p(S_G) \neq 1$, then $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ is free. In particular, this holds for p-solvable groups and, more generally, for p-constrained groups.*

Corolario 3.0.3. *If G is solvable then $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ is a free group.*

Moreover, we proved that $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ is free for some families of almost simple groups G.

Teorema 3.0.4. *Suppose that $L \leq G \leq \mathrm{Aut}(L)$, with L a simple group. Then $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ is a free group in the following cases:*

1. $m_p(G) \leq 2$,
2. $\mathcal{A}_p(L)$ *is disconnected,*
3. $\mathcal{A}_p(L)$ *is simply connected,*
4. *L is simple of Lie type in characteristic p and $p \nmid (G:L)$ when L has Lie rank 2,*
5. *$p = 2$ and L has abelian Sylow 2-subgroups,*
6. *$p = 2$ and $L = \mathbb{A}_n$ (the alternating group),*
7. *L is a Mathieu group, J_1 or J_2,*
8. *$p \geq 3$ and $L = J_3$,* McL, O'N.

For example, S.D. Smith mentions in [Smi11, p.290] that in general $\mathcal{A}_p(L)$ is expected to be simply connected for simple groups L with $m_p(L) \geq 3$.

The techniques used to prove these results involves basic tools of algebraic topology combined with reductions of finite spaces and the classification of the finite simple groups. We have also used Aschbacher's results [Asc93].

In Chapter 4 we focus on the study of Quillen's conjecture. Recall that the conjecture says that if $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ is contractible then G has a nontrivial normal p-subgroup, that is $O_p(G) \neq 1$. In general a stronger version of the conjecture is considered.

Conjetura fuerte de Quillen. *If $O_p(G) = 1$ then $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) \neq 0$.*

In the first sections of Chapter 4 we recall the known results on the (strong) conjecture together with brief ideas of their proofs, including the result of M. Aschbacher and S.D. Smith [AS93, Main Theorem].

Then, by using the ideas of B. Oliver and Y. Segev [OS02], we prove the following theorem on Quillen's conjecture.

Teorema 4.3.1 (with I. Sadofschi Costa and A. Viruel)**.** *If K is a $\mathbb{Z}$-acyclic and 2-dimensional G-invariant subcomplex of $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, then $O_p(G) \neq 1$.*

From which we immediately deduce:

Corolario 4.3.2. *Let G be a finite group. Suppose that $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ admits a 2-dimensional and G-invariant subcomplex homotopy equivalent to itself. If $O_p(G) = 1$ then $\tilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Z}) \neq 0$.*

Note that the theorem is not stated for the strong version of the conjecture.

For example, the above corollary can be applied if $m_p(G) \leq 3$ or $\mathcal{B}_p(G)$ has height 2.

Another useful subposet we can consider to apply the above theorem is the poset $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))$ of nontrivial intersections of maximal elementary abelian p-subgroups. This subposet is G-invariant and homotopy equivalent to $\mathcal{A}_p(G)$ (as finite space), so $\mathcal{K}(\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ is a homotopy equivalence. See also [Smi11] for a longer list of p-subgroup complexes homotopy equivalent to $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$.

In application of our theorem we give some examples of groups G which do not satisfy the hypotheses of the theorems of [AS93] but they do satisfy the conjecture by Corollary 4.3.2. We show that it is possible to construct a homotopy equivalent 2-dimensional and G-invariant subcomplex of $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$. These results appear in the article written in collaboration with I. Sadofschi Costa and A. Viruel [PSV19].

We culminate this chapter by showing that it is possible to study the strong conjecture under the assumption $O_{p'}(G) = 1$, and apply this reduction to yield new cases of the conjecture. In [AS93, Proposition 1.6] it is shown that this assumption is valid provided that $p > 5$. By using techniques of finite spaces and the p-solvable case of Quillen's conjecture, we prove that this reduction is possible for every prime p. Concretely, we prove the following theorem.

Teorema 4.5.1. *Let G be a finite group. Suppose that the proper subgroups of G satisfy the strong Quillen's conjecture and that $O_{p'}(G) \neq 1$. Then G satisfies the strong Quillen's conjecture. In particular, a minimal counterexample G to the strong Quillen's conjecture has $O_{p'}(G) = 1$.*

This theorem is interesting not only by the reduction which allows us to do, but also by the method of its proof. The use of the classification of the finite simple groups in the proof of this theorem is considerable minor than in the weaker result [AS93, Proposition 1.6]. In fact, we only use it to invoke the p-solvable case of the conjecture, in which the use of the Classification is just for the structure of the outer automorphism groups of simple groups.

The proof of our theorem also provides a technique to find nontrivial cycles in the homology of $\mathcal{A}_p(G)$, generalizing the original idea of [AS93, Lemma 0.27] (see Lemma 4.5.10).

Applying Theorems 3.4.2 and 4.5.1, and Corollary 4.3.2, we obtain the following corollaries.

Corolario 4.5.13. *Let G be a finite group. Suppose that the proper subgroups of G satisfy the strong Quillen's conjecture and that $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ admits a 2-dimensional and G-invariant subcomplex homotopy equivalent to itself. Then G satisfies the strong Quillen's conjecture.*

Note that this result is a slight improvement of Corollary 4.3.2 to rational coefficients, but we need the inductive hypothesis.

Corolario 4.5.14. *The strong Quillen's conjecture holds for groups of p-rank at most* 3.

We also eliminate the possibility of components of p-rank 1, which allows us to extend the main result of [AS93] to $p=5$.

Teorema 4.6.3. *Let $L \leq G$ be a component such that $L/Z(L)$ has p-rank* 1. *If the strong Quillen's conjecture holds for proper subgroups of G then it holds for G.*

Corolario 4.6.5. *The conclusions of the Main Theorem of [AS93] hold for $p=5$.*

Finally, as application of our methods and results, we deduce the strong conjecture for groups of p-rank 4.

Teorema 4.6.8. *The strong Quillen's conjecture holds for groups of p-rank at most* 4.

These results will be part of a new and more general article on Quillen's conjecture, which is now in preparation.

Most of the examples we present in this dissertation were computed with GAP [GAP18] with a package of finite posets developed in collaboration with X. Fernández and I. Sadofschi Costa [FPSC19]. In Appendix A.2 can be found some of the codes that we have used to compute the examples presented here.

Índice general

Capítulo 1

Espacios finitos y los posets de p-subgrupos

En este capítulo estudiamos los posets de p-subgrupos desde el punto de vista de espacios finitos. Recordemos que D. Quillen estudió las propiedades homotópicas de los complejos de órdenes $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ y $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$. Él mostró que la inclusión $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ induce una equivalencia homotópica al nivel de sus complejos de órdenes, y que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es contráctil cuando G posee un p-subgrupo normal no trivial. La vuelta a esto último es la conjetura de Quillen, la cual permanece abierta hasta el momento, y es estudiada en el Capítulo 4. La manera estándar de analizar a estos posets es por medio de la topología de sus complejos de órdenes asociados $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ y $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$.

A lo largo de esta tesis, vamos a considerar a los posets finitos como espacios finitos T_0, usando una topología intrínseca en la cual los abiertos son los *downsets*. La topología intrínseca y la topología de sus complejos de órdenes están relacionadas por el Teorema de McCord 1.2.2: para un poset finito X, existe una equivalencia homotópica débil $|\mathcal{K}(X)| \to X$. Sin embargo, las equivalencias débiles entre espacios finitos no son equivalencias homotópicas en general, y el teorema de Whitehead no es cierto en este contexto. Hay espacios finitos que son homotópicamente triviales y no contráctiles (ver por ejemplo [Bar11a, Example 4.2.1]). Recordar que un espacio topológico es homotópicamente trivial si todos sus grupos de homotopía son triviales.

R.E. Stong, que había trabajado con espacios finitos en [Sto66], estudió a los posets $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ con esta topología intrínseca en [Sto84]. Stong probó que la inclusión $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ no es una equivalencia homotópica de espacios finitos en general (pero sí es una equivalencia homotópica débil por el teorema de McCord). Además, él mostró que $\mathcal{S}_p(G)$ es un espacio finito contráctil si y solo si G posee un p-subgrupo normal no trivial, y que la conjetura de Quillen se puede reformular en términos de espacios finitos diciendo que si $\mathcal{S}_p(G)$ es homotópicamente trivial, entonces $\mathcal{S}_p(G)$ es contráctil. Stong también probó que la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ como espacio finito implica la de $\mathcal{S}_p(G)$ y dejó abierta la pregunta de si vale la vuelta. Esto equivale a preguntarse si la conjetura de Quillen se puede reformular diciendo que si $\mathcal{A}_p(G)$ es homotópicamente trivial entonces es un espacio finito contráctil.

Nosotros respondemos a la pregunta de Stong por la negativa en [Pit16] (ver también [MP18]). En el Ejemplo 1.3.17 mostramos que existe un grupo finito G tal que $\mathcal{A}_p(G)$ es homotópicamente trivial pero no contráctil para algún primo p, y que $\mathcal{S}_p(G)$ es contráctil. Nuestro ejemplo muestra que la contractibilidad del espacio finito $\mathcal{A}_p(G)$ no es igual a la de $\mathcal{S}_p(G)$. Dado que Stong describió la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$ en términos algebraicos, nosotros describimos la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ en términos algebraicos-combinatorios en el Teorema 1.3.32 usando la noción de *contractibilidad en pasos*.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En las primeras dos secciones recordamos algunas definiciones básicas, notaciones y resultados sobre grupos finitos y espacios topológicos finitos. También introducimos el poset de Bouc $\mathcal{B}_p(G)$ (que consiste de los p-subgrupos radicales no triviales de G) y el complejo de Robinson $\mathcal{R}_p(G)$ (ver Definición 1.1.10). En la Sección 1.3 comparamos el tipo homotópico equivariante de los diferentes posets de p-subgrupos considerados como espacios topológicos finitos. Recordemos que G actúa en sus posets de p-subgrupos vía conjugación. En la Subsección 1.3.1 damos algunas condiciones particulares bajo las cuales los posets de p-subgrupos de un grupo finito tienen el mismo tipo homotópico. En la Subsección 1.3.3 describimos la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{B}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ en términos algebraicos. Los resultados de este capítulo son extensiones de los resultados de [Pit16] y del artículo escrito en colaboración con E.G. Minian [MP18] a los posets $\mathcal{B}_p(G)$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ (el poset de caras del complejo de Robinson).

A lo largo de esta tesis hablaremos de las propiedades homotópicas de un poset finito siempre considerado como un espacio topológico finito. Por ejemplo, si X e Y son posets finitos, escribimos $X \simeq Y$ si X e Y son homotópicamente equivalentes como espacios finitos.

1.1. Grupos finitos

En esta sección recordamos algunos hechos básicos, definiciones y resultados sobre grupos finitos que serán útiles en los próximos capítulos. Al final de la sección exhibimos los diferentes posets de p-subgrupos que surgen de un grupo finito. Las referencias principales para los resultados clásicos sobre grupos finitos son los libros de M. Aschbacher [Asc00] y de I.M. Isaacs [Isa08].

Para un grupo G, escribimos $H \leq G$ si H es un subgrupo de G, $H < G$ si H es un subgrupo propio de G, y $1 \neq H$ si H es no trivial. Denotamos por $N \trianglelefteq G$ a un subgrupo normal N de G, y $N \triangleleft G$ si N es además propio. Un subgrupo N de G se dice característico en G si $\phi(N) = N$ para todo automorfismo ϕ de G. Escribimos $N \operatorname{char} G$ en este caso. Si $K, H \leq G$, entonces $C_K(H) = \{g \in K : gh = gh \text{ para todo } h \in H\}$ y $N_K(H) = \{g \in K : H^g = H\}$ son el centralizador y el normalizador, respectivamente, de H en K. Aquí, $H^g = g^{-1}Hg$. Escribimos

$[H,K]$ para denotar al subgrupo de G generado por los conmutadores $[h,k] = hkh^{-1}k^{-1}$ para $h \in H$ y $k \in K$.

Para un número primo p, $O_p(G)$ denota el p-subgrupo normal más grande de G. Este grupo se llama el *p-core* de G. Por los teoremas de Sylow, es igual a la intersección de todos los p-subgrupos de Sylow de G. Denotamos por $\mathrm{Syl}_p(G)$ al conjunto de p-subgrupos de Sylow de G. Por p'-grupo nos referimos a un grupo finito de orden coprimo con p. Sea $O_{p'}(G)$ el p'-subgrupo normal más grande de G. Este grupo se llama comúnmente el *p'-core* de G. Análogamente, $O^p(G)$ (resp. $O^{p'}(G)$) es el subgrupo normal más chico de G tal que el cociente $G/O^p(G)$ (resp. $G/O^{p'}(G)$) es un p-grupo (resp. p'-grupo).

Denotamos por $Z(G)$, $[G,G] = G'$, $\Phi(G)$, y $F(G)$ al centro, el derivado, el subgrupo de Frattini y el subgrupo de Fitting de G respectivamente. Recordar que $\Phi(G)$ es la intersección de todos los subgrupos maximales de G, o equivalentemente, el conjunto de no generadores de G. El subgrupo de Fitting $F(G)$ es el subgrupo normal nilpotente más grande de G. Equivalentemente, $F(G)$ es el producto de los subgrupos $O_p(G)$ para $p \mid |G|$. Notar que todos estos subgrupos son característicos en G.

Para un primo p fijo, denotamos por $\Omega_1(G)$ al subgrupo de G generador por los elementos de orden p. El *p-rango* de G es el entero no negativo $m_p(G) = \text{máx}\{r : A \leq G$ p-subgrupo elemental abeliano, $|A| = p^r\}$. Sea $r_p(G) = \log_p(|G|_p)$.

Sea S un p-grupo. Si $1 \neq N \trianglelefteq S$, entonces $N \cap Z(S) \neq 1$. Si $H < S$ es un subgrupo propio, entonces $H < N_S(H)$. El subgrupo de Frattini $\Phi(S)$ es el subgrupo normal más chico de S tal que $S/\Phi(S)$ es elemental abeliano. En particular, S es elemental abeliano si y solo si $\Phi(S) = 1$.

Denotamos por $\mathrm{Aut}(S)$ al grupo de automorfismos de un grupo finito G. Hay un mapa $G \to \mathrm{Aut}(G)$ definido por $g \mapsto c_{g^{-1}}$, donde $c_g(h) = h^g = g^{-1}hg$ es el morfismo de conjugación. El núcleo de este morfismo es el centro de G, y su imagen es $G/Z(G) = \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$, el grupo de automorfismos internos de G. El grupo de automorfismos externos de G es $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$.

Dada una sucesión exacta corta $1 \to N \to G \to H \to 1$ de grupos finitos, decimos que G es una extensión de N por H. Cuando la extensión se parte (extensión split), escribimos $G = N \rtimes H$ o $G = N : H$. Cuando la extensión no se parte, escribimos $G = N \cdot H$. El producto directo de N por H es denotado por $N \times H$.

Ahora recordamos algunos teoremas clásicos de la teoría de grupos finitos. Un p-subgrupo Q de G es *radical* si $Q = O_p(N_G(Q))$. Tenemos la siguiente propiedad sobre p-subgrupos radicales.

Proposición 1.1.1. *Sea G un grupo finito y p un primo que divide al orden de G. Sea $Q \leq G$ un p-subgrupo radical y sea $P \leq G$ un p-subgrupo tal que $N_G(Q) \leq N_G(P)$. Entonces $P \leq Q$. En particular, tomando $P = O_p(G)$ tenemos que $O_p(G) \leq Q$.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que $P \not\leq Q$. Dado que $Q \leq N_G(P)$,

PQ es un p-subgrupo y $Q < PQ$. Por lo tanto $Q < N_{PQ}(Q)$ Por otro lado, si $x \in N_G(Q)$ entonces $N_{PQ}(Q)^x = (PQ \cap N_G(Q))^x = (PQ)^x \cap N_G(Q)^x = PQ \cap N_G(Q) = N_{PQ}(Q)$. Esto es, $N_{PQ}(Q) \leq O_p(N_G(Q)) = Q$, una contradicción. □

Un grupo finito G es resoluble si tiene una serie de descomposición cuyos factores son abelianos simples. Recordemos algunos resultados clásicos que nos aseguran la resolubilidad de un grupo.

Teorema 1.1.2 (Burnside). *Si $|G| = p^\alpha q^\beta$ con p y q primos, entonces G es un grupo resoluble.*

El siguiente teorema es uno de los primeros grandes pasos en la clasificación de los grupos finitos simples (CGFS para abreviar).

Teorema 1.1.3 (Feit-Thompson). *Todo grupo finito de orden impar es resoluble. En particular, un grupo simple no abeliano tiene orden par.*

Teorema 1.1.4 (Schur-Zassenhaus). *Sea $1 \to N \to G \to H \to 1$ una extensión de grupos finitos donde $\gcd(|N|, |H|) = 1$. Entonces la extensión se parte, es decir, $G = N \rtimes H$ es un producto semidirecto. Más aún, el grupo H es un complemento de N en G, y es el único salvo conjugación.*

Definición 1.1.5. Un grupo G es *p-nilpotente* si $G = O_{p'}(G)S$ con S un p-subgrupo de Sylow de G. Equivalentemente, G es una extensión de un p'-grupo por un p-grupo (y se parte).

Los grupos p-nilpotentes están muy relacionados con el control de la fusión de los p-subgrupos de Sylow. Usaremos esta noción en nuestro tratado sobre la conjetura de Webb en el Capítulo 2.

Finalmente, enunciamos el bien conocido Lemma 1.2.3 de Hall-Higman.

Teorema 1.1.6 (Hall-Higman). *Sea G un grupo π-separable tal que $O_{\pi'}(G) = 1$. Entonces $C_G(O_\pi(G)) \leq O_\pi(G)$.*

Recordar que un grupo π-separable, para π un conjunto de números primos, es un grupo finito G tal que tiene una serie de descomposición cuyos factores son π-grupos o π'-grupos. Aquí, un π-grupo es un grupo finito tal que todo primo que divide a su orden está en el conjunto π. Un π'-grupo es un grupo finito cuyo orden no es divisible por ninguno de los primos de π.

El teorema anterior lo usaremos para grupos p-resolubles. Recordar que un grupo es p-resoluble si es π-separable para $\pi = \{p\}$. Todo grupo resoluble es p-resoluble. Usaremos la siguiente propiedad que es más débil que ser p-resoluble. Sea $O_{p',p}(G)$ el único subgrupo normal de G que contiene a $O_{p'}(G)$ tal que $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G) = O_p(G/O_{p'}(G))$. Notar que es un subgrupo característico de G.

Definición 1.1.7. Un grupo G es *p-constrained* si

$$C_G(S \cap O_{p',p}(G)) \leq O_{p',p}(G),$$

donde $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Si $O_{p'}(G) = 1$, esto dice que $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$.

Por el teorema de Hall-Higman 1.1.6, todo grupo p-resoluble es p-constrained.

A lo largo de la clasificación de grupos finitos simples, hay un subgrupo característico que juega un rol clave: el *subgrupo de Fitting generalizado*. Si G es un grupo finito, el *subgrupo de Fitting* $F(G)$ es el subgrupo normal nilpotente más grande de G. Cuando G es resoluble, este subgrupo es auto-centralizante, esto es, $C_G(F(G)) \leq F(G)$. Sin embargo, esta propiedad no vale para todos los grupos en general y esto llevó a la definición del subgrupo de Fitting generalizado $F^*(G)$. Este subgrupo característico es auto-centralizando y es igual a $F(G)$ cuando G es resoluble. Referimos a [Asc00, Section 31] para más detalles.

De ahora en adelante, por un grupo simple nos referimos a un grupo simple *no abeliano*. Un grupo finito K es *quasisimple* si es un grupo perfecto y $K/Z(K)$ es simple. Equivalentemente, es una extensión perfecta central de un grupo simple. Un subgrupo $L \leq G$ es *subnormal* si existen subgrupos $L_0, L_1, \ldots, L_n \leq G$ tales que $L_0 = L$, $L_n = G$ y $L_i \trianglelefteq L_{i+1}$ para todo i. Una *componente* de G es un subgrupo subnormal quasisimple. Denotamos por $\mathcal{C}(G)$ al conjunto de componentes de G. El *layer* de G es el subgrupo generado por las componentes de G y lo denotamos por $E(G)$. Es bien sabido que $E(G)$ es de hecho un producto central de las componentes de G. Esto significa que si $L,K \in \mathcal{C}(G)$ son componentes distintas, entonces $[L,K] = 1$. Notar que $Z(E(G))$ es el producto de los centros de las componentes de G. En particular es un subgrupo normal nilpotente de G y $Z(E(G)) \leq F(G)$. El *subgrupo de Fitting generalizado* de G es el producto $F^*(G) = F(G)E(G)$. Se puede ver que $[F(G),E(G)] = 1$ y $Z(E(G)) = F(G) \cap E(G) \leq Z(F(G))$. Los subgrupos $F(G)$, $E(G)$ y $F^*(G)$ son característicos en G. Más aún, $F^*(G)$ se auto-centraliza, es decir $C_G(F^*(G)) = Z(F^*(G))$. Notar que $Z(F^*(G)) = Z(F(G)) \geq Z(E(G))$. En consecuencia, uno puede estudiar la estructura de G vía la representación $G/Z(F(G)) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F^*(G))$.

Observación 1.1.8. Asuma que $F(G) = 1$. Entonces $Z(E(G)) \leq Z(F(G)) = 1$ y toda componentes de G es de hecho un grupo simple. De esta manera, tenemos que $F^*(G) = E(G)$ es el producto directo de grupos simples y por la condición de auto-centralización, $C_G(E(G)) = C_G(F^*(G)) = Z(F^*(G)) = Z(F(G)) = 1$. Luego tenemos una representación de G como subgrupo de $\mathrm{Aut}(E(G))$. Más aún, supongamos que escribimos $E(G) \cong \prod_{i=1}^n L_i^{n_i}$, donde los L_is son grupos simples no isomorfos dos a dos. De [GLS96, Section B] se puede ver que

$$\mathrm{Aut}\,(E(G)) \cong \mathrm{Aut}\left(\prod_{i=1}^{n} L_i^{n_i}\right) \cong \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{Aut}(L_i) \wr \mathbb{S}_{n_i})$$

donde el producto wreath $\mathrm{Aut}(L_i) \wr \mathbb{S}_{n_i}$ es tomado con respecto a la permutación natural de $\mathbb{S}_{n_i}$ sobre el conjunto de n_i elementos. Aquí $\mathbb{S}_n$ denota al grupo simétrico en n letras.

Dado que los automorfismos de los grupos simples están bien entendidos por la Clasificación, un grupo con $F(G) = 1$ puede ser estudiado mediante la representación como subgrupo de $\mathrm{Aut}(E(G))$.

Dado que $F(G) \leq O_p(G)O_{p'}(G)$, estas condiciones valen si $O_p(G) = 1 = O_{p'}(G)$.

Definición 1.1.9. Un grupo finito G es *casi simple* (o *almost simple*) si es una extensión de un grupo simple por automorfismos externos. Equivalentemente, $F^*(G)$ es un grupo simple y por lo tanto $F^*(G) \leq G \leq \mathrm{Aut}(F^*(G))$.

Los grupos casi simples son importantes en la clasificación de grupos simples dado que ellos son, a grandes rasgos, los primeros grupos que uno se construye a partir de los grupos simples. Recordemos que todo grupo finito posee una serie subnormal cuyos factores son grupos simples. En el caso de grupos casi simples, resulta que esta serie tiene un único grupo simple en la parte más baja de la serie (es decir, $F^*(G)$), y el resto de los grupos son cíclicos. Esto se sigue de la conjetura de Schreier (actualmente probada como consecuencia de la Clasificación), que establece que el grupo de automorfismos externos de un grupo simple es resoluble.

En los capítulos siguientes, usaremos la Clasificación para construir ejemplos. En los Capítulos 3 y 4, usaremos esto para estudiar el grupo fundamental de los complejos de p-subgrupos y la conjetura de Quillen.

Recordemos que la clasificación de los grupos finitos simples establece que todo grupo finito simple es o bien un grupo Alterno $\mathbb{A}_n$ con $n \geq 5$, un grupo finito simple de tipo Lie o uno de los 26 grupos Esporádicos. Referimos al Apéndice A.1 para más información sobre grupos finitos simples. Allí incluimos una descripción de las diferentes familias de grupos simples, sus órdenes, las estructuras de sus automorfismos exteriores y algunos teoremas de la Clasificación que nos serán útiles.

Concluimos esta sección introduciendo los diferentes posets y complejos de p-subgrupos que estudiaremos a lo largo de esta tesis.

Definición 1.1.10. Sea G un grupo finito y p un primo que divide a su orden. Consideremos los siguientes poset de subgrupos de G ordenados por inclusión.

$$\mathcal{S}_p(G) = \{P \leq G : P \ p\text{-subgrupo no trivial}\}$$

$$\mathcal{A}_p(G) = \{E \in \mathcal{S}_p(G) : E \text{ elemental abeliano}\}$$

$$\mathcal{B}_p(G) = \{P \in \mathcal{S}_p(G) : P = O_p(N_G(P))\}$$

$$X_p(G) = \{P \in \mathcal{S}_p(G) : P \trianglelefteq S \text{ si } S \in \mathrm{Syl}_p(G) \text{ y } P \leq S\}$$

También tenemos los siguientes complejos simpliciales. Denotemos por $K_p(G)$ al commuting complex de G en p, cuyos símplices son los conjuntos $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de subgrupos de orden p de G tales que $[E_i, E_j] = 1$ para todo i, j (es decir, generan un p-subgrupo elemental abeliano).

Denotemos por $\mathcal{R}_p(G)$ al subcomplejo de Robinson de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, cuyos símplices consisten de las cadenas $(P_0 < \ldots < P_n)$ con $P_i \trianglelefteq P_n$ para todo i.

Los posets $\mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G)$ fueron considerados primero por K. Brown en [Bro75], D. Quillen en [Qui78] y S. Bouc [Bou84], respectivamente. Por eso a sus complejos de órdenes se los denomina comúnmente el complejo de Brown, el complejo de Quillen y el complejo de Bouc, respectivamente. A estos posets también se los llaman poset de Brown, poset de Quillen y poset de Bouc, respectivamente.

El commuting complex $K_p(G)$ fue usado por M. Aschbacher para estudiar el grupo fundamental de los posets de p-subgrupos (ver [Asc93]).

El complejo de Robinson $\mathcal{R}_p(G)$ fue considerado primero por G.R. Robinson en su reformulación de la conjetura de Alperin [KR89] y fue usado en la demostración de la conjetura de Webb (ver Capítulo 2).

El poset $X_p(G)$ no parece haber sido considerado anteriormente. Nosotros usamos este poset en [Pit19] en el estudio de la conjetura de Webb en el Capítulo 2.

1.2. Espacios topológicos finitos

La teoría de espacios topológicos finitos comenzó con los trabajos de P.S. Alexandroff [Ale37], y fueron continuados luego por M. McCord [McC66] y R.E. Stong [Sto66]. Más recientemente, J. Barmak y E.G. Minian profundizaron más el estudio de los espacios finitos [Bar11a, Bar11b, BM08b, BM08a, BM12b]. Para todo complejo simplicial finito, su poset de caras es un espacio finito con los mismos grupos de homotopía y homología, y recíprocamente, todo espacio finito tiene un complejo simplicial asociado. Podemos eliminar ciertos tipos de puntos en espacios finitos (llamados *beat points* y *weak points*) preservando su tipo homotópico (débil). La clave aquí es que la eliminación de un *beat* o *weak* point en un espacio finito resulta en muchos colapsos simpliciales en el complejo asociado, los cuales no cambian el tipo homotópico. Esto permite manipular a estos objetos de manera algorítmica y combinatoria y encontrar espacios finitos débilmente equivalentes con menos puntos.

En esta sección recordamos los resultados básicos que necesitaremos sobre espacios topológicos finitos. Referimos al lector al libro de J. Barmak para más detalles [Bar11a].

De ahora en adelante, por un espacio topológico finito entendemos un espacio finito T_0. Ver [Bar11a, Proposition 1.3.1] para comprobar de que no hay pérdida de generalidad.

Dado un poset finito X, existe una topología intrínseca que lo hace un espacio topológico finito. Para cada elemento $x \in X$, considere el conjunto $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$. Entonces la colección $\{U_x : x \in X\}$ es una base para una topología en X. Notar que los abiertos son los downsets del poset y que el espacio topológico resultante es T_0.

Recíprocamente, si X es un espacio finito T_0, entonces para cada $x \in X$ podemos considerar el abierto minimal U_x que contiene a x. Como X es finito, U_x es la intersección de todos los abiertos que contienen a x. Ahora pongamos $x \leq y$ si $U_x \subseteq U_y$. Con este orden X es un poset finito. Es fácil chequear que estas construcciones son inversas una de otra. Además, una función $f : X \to Y$ entre posets finitos es continua si y solo si preserva el orden.

Proposición 1.2.1. *Sean X e Y dos espacios finitos. Una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si preserva el orden.*

Por lo tanto las categorías de posets finitos y espacios finitos T_0 son isomorfas.

En general, dado un poset finito X podemos considerar su *complejo de orden* asociado $\mathcal{K}(X)$. Este es el complejo simplicial cuyos vértices son los elementos de X y cuyos símplices son las cadenas no vacías de elementos de X. Todo morfismo de orden $f : X \to Y$ entre posets finitos induce un morfismo simplicial $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to K(Y)$ definido en un vértice $x \in X$ como $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$. De esta manera, tenemos dos topologías que surgen naturalmente de un poset finito X. A decir, la topología intrínseca de X como espacio topológico finito y la topología de su complejo de orden $\mathcal{K}(X)$. La relación entre estos dos espacios está dada por el teorema de McCord [McC66, Theorem 1]. Para un complejo simplicial K, denotamos por $|K|$ a su realización geométrica. Si $K = \mathcal{K}(X)$ para un poset finito X, también escribiremos $|X|$ para denotar a $|\mathcal{K}(X)|$. Si $\varphi : K \to L$ es un morfismo simplicial, denotamos por $|\varphi| : |K| \to |L|$ a la función continua inducida en las realizaciones geométricas.

Teorema 1.2.2 (McCord)**.** *Sea X un espacio finito. Existe un función continua natural $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$ definida por*

$$\mu_X\left(\sum_{i=0}^{r} t_i x_i\right) = \text{mín}\{x_i \,:\, i = 0, \dots, r\}$$

que es una equivalencia débil. Esta función se llama función de McCord.

Recordar que una *equivalencia homotópica débil* (o *equivalencia débil* para abreviar) entre dos espacios topológicos es una función continua que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía.

La naturalidad de la función de McCord en el Teorema 1.2.2 implica que, para una función continua $f : X \to Y$ entre espacios finitos, $|\mathcal{K}(f)| \circ \mu_X = \mu_Y \circ f$. En particular, $|\mathcal{K}(f)|$ es una equivalencia homotópica si y solo si f es una equivalencia débil.

Observación 1.2.3. De hecho, la función de McCord no es una equivalencia homotópica en general. Las equivalencias débiles entre espacios finitos podrían no ser equivalencias homotópicas, y espacios finitos homotópicamente triviales podrían no ser contráctiles (ver [Bar11a, Example 4.2.1] o Ejemplo 1.3.17). Esto es, el teorema de Whitehead no es verdadero en el contexto de espacios topológicos finitos. La falla de este importante teorema es uno de los puntos fundamentales que hace interesante el estudio de posets finitos con esta topología: al nivel de la topología intrínseca podría haber diferencias homotópicas que quizás no son percibidas con la topología de sus complejos de orden.

Para un complejo simplicial finito K, denotamos por $\mathcal{X}(K)$ a su *poset de caras* (o *face poset*), cuyos elementos son los símplices de K ordenados por inclusión. Un morfismo simplicial $\phi : K \to L$ entre complejos simpliciales finitos induce una función continua $\mathcal{X}(\phi) : \mathcal{X}(K) \to \mathcal{X}(L)$ entre sus posets de caras. Se puede ver que hay una función análoga a la de McCord $\mu_K : |K| \to \mathcal{X}(K)$ (ver [Bar11a, Theorem 1.4.12]).

Si X es un poset finito, denotamos por X' al poset de cadenas no vacías de X ordenado por inclusión. Notar que $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$. Decimos que X' es la (primera) subdivisión de X. Escribimos $X^{(n)}$ para la n-ésima subdivisión iterada de X, es decir, $X^{(n)} = (X^{(n-1)})'$. Si K es un complejo simplicial, entonces K' denota al complejo simplicial cuyos vértices son los símplices de K y cuyos símplices son las cadenas de símplices de K ordenadas por inclusión. Por lo tanto, $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$. Decimos que K' es la (primera) subdivisión baricéntrica de K. Recordar que $|K|$ y $|K'|$ son homeomorfos.

Para un poset finito X, su poset opuesto X^{op} tiene los mismos elementos de X pero con el orden opuesto. Notar que $(X^{\mathrm{op}})' = X'$ y $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{\mathrm{op}})$. Además, $f : X \to Y$ es un morfismo de orden (o sea una función continua) si y solo si $f^{\mathrm{op}} : X^{\mathrm{op}} \to Y^{\mathrm{op}}$ lo es. Por el Teorema de McCord, X y X^{op} tienen los mismos grupos de homotopía y homología. Sin embargo, podría no existir ninguna equivalencia débil entre ellos.

De ahora en adelante no haremos ninguna distinción entre la categoría de posets finitos y la categoría de espacios finitos. Trataremos a los posets finitos como espacios topológicos finitos por medio de su topología intrínseca, y viceversa.

El tipo homotópico de los espacios finitos

En lo que sigue recordamos los hechos básicos que necesitamos para calcular el tipo homotópico de espacios finitos. La teoría de homotopía de espacios finitos puede ser estudiada en términos combinatorios por medio de su orden intrínseco. Esta idea es debida a Stong [Sto66].

La proposición siguiente relaciona la conexión de un espacio finito con la conexión de su orden intrínseco, que es la conexión del diagrama de Hasse asociado.

Proposición 1.2.4. *Si X es un espacio finito, entonces X es localmente arcoconexo. Además, hay un camino entre dos elementos $x, y \in X$ si y solo si existen $x_0, \dots, x_n \in X$ tales que $x_0 = x$, $x_n = y$ y para todo $0 \leq i < n$, $x_i \leq x_{i+1}$ o $x_i \geq x_{i+1}$.*

Las homotopías entre funciones continuas de espacios topológicos finitos pueden ser descritas utilizando la combinatoria de su orden intrínseco. De cierta manera esto es una generalización de la proposición anterior.

Definición 1.2.5. Sean X e Y espacios finitos. Consideremos el conjunto Y^X de todas las funciones continuas de X en Y. Para $f, g \in Y^X$, definamos $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$.

Proposición 1.2.6. *Si X e Y son espacios finitos, entonces Y^X es un espacio finito (con el orden de la definición anterior).*

Proposición 1.2.7. *Sean $f,g : X \to Y$ dos funciones continuas entre espacios finitos X e Y. Entonces f y g son homotópicas en el sentido clásico, y escribimos $f \simeq g$, si y solo si $f,g \in Y^X$ están arcoconectadas. Esto es, $f \simeq g$ si y solo si existen funciones continuas $f_0,\dots,f_n : X \to Y$ tales que $f_0 = f$, $f_n = g$ y para todo $0 \leq i < n$, $f_i \leq f_{i+1}$ o $f_i \geq f_{i+1}$.*

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios finitos. Entonces f induce un morfismo simplicial $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$. Si $f \simeq g$ entonces $\mathcal{K}(f)$ y $\mathcal{K}(g)$ son contiguas en el sentido de complejos simpliciales (ver [Bar11a, Chapter 2, section 1]). En particular $|\mathcal{K}(f)|$ y $|\mathcal{K}(g)|$ son homotópicas en el sentido clásico. Sin embargo, aunque $|\mathcal{K}(f)|$ y $|\mathcal{K}(g)|$ sean homotópicas, f y g podrían no serlo (ver Observación 1.2.3).

Ahora describimos un método de R.E. Stong [Sto66] para calcular el tipo homotópico de un poset finito. Básicamente el tipo homotópico de los espacios finitos está determinado por los espacios finitos minimales (en el sentido que definiremos más abajo), que son únicos salvo homeomorfismo.

Sea X un espacio finito. Denotamos por $\mathrm{Max}(X)$ al conjunto de elementos maximales de X. Similarmente denotamos por $\mathrm{Min}(X)$ al conjunto de elementos minimales de X. Si $x \in X$, denotamos por $\mathrm{Max}(x)$ al conjunto de elementos maximales sobre x y por $\mathrm{Min}(x)$ al conjunto de elementos minimales debajo de x. Sean $F_x = \{y \in X \,:\, y \geq x\}$, $\hat{F}_x = \{y \in X \,:\, y > x\}$, $U_x = \{y \in X \,:\, y \leq x\}$ y $\hat{U}_x = \{y \in X \,:\, y < x\}$. Escribimos F_x^X para enfatizar que F_x está tomado en el poset X. También denotamos $X_{\leq x} = U_x^X$, $X_{<x} = \hat{U}_x^X$, $X_{\geq x} = F_x^X$ y $X_{>x} = \hat{F}_x^X$. Si $y \in X$, escribimos $x \prec y$ si $x < y$ y no existe un elemento $z \in X$ tal que $x < z < y$. Si $x \prec y$ entonces decimos que x está *cubierto* por y y que y *cubre* x.

Definición 1.2.8. Sea X un espacio finito y sea $x \in X$. Decimos que x es un *up beat point* si $\hat{F}_x$ tiene un mínimo, y que x es un *down beat point* si $\hat{U}_x$ tiene un máximo. Decimos que x es un *beat point* si es un up o un down beat point.

Observación 1.2.9. Notar que $x \in X$ es un up beat point si y solo si existe un único $y \in X$ tal que $x \prec y$. Análogamente, x es un down beat point si y solo si existe un único $y \in X$ tal que $y \prec x$.

Si X es un espacio finito y $x \in X$ es un beat point, entonces $X - x \subseteq X$ es un retracto por deformación fuerte. Por ejemplo, si x es un up beat point cubierto por $y \in X$, entonces podemos definir la retracción $r : X \to X - x$ por $r(x) = y$.

Supongamos que empezamos con un espacio finito y removemos los beat points uno por uno. En cierto punto, alcanzaremos un espacio sin beat points. Un espacio finito sin beat points es un *espacio finito minimal*. Resulta que, sin importar en qué orden hayamos extraído los beat points, los espacios finitos minimales que podemos alcanzar son todos homeomorfos. Por lo tanto, para cada espacio finito hay un retracto por deformación fuerte $X_0 \subseteq X$ que es un espacio finito minimal. Llamamos a X_0 el *core* de X y es único salvo homeomorfismo. Más aún, los posibles cores de los espacios finitos clasifican los tipos homotópicos de los espacios finitos. Esto es, dos espacios finitos X e Y tienen el mismo tipo homotópico si y solo si sus cores son homeomorfos. Debajo enunciamos este Teorema de Clasificación.

Teorema 1.2.10 ([Sto66, Section 4])**.** *Una equivalencia homotópica entre espacios finitos minimales es un homeomorfismo. En particular, el core de un espacio finito es único salvo homeomorfismo y dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y solo si tienen cores homeomorfos.*

Como corolario, el core de un espacio finito contráctil es el singleton.

Corolario 1.2.11. *Un espacio finito X es contráctil si y solo si su core es un punto.*

Removiendo beat points en un espacio finito X podemos alcanzar subespacios que son retractos por deformación fuerte de X. Resulta que este tipo de subespacios pueden ser siempre obtenidos de esta manera.

Proposición 1.2.12. *Sea X un espacio finito y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Entonces $Y \subseteq X$ es un retracto por deformación fuerte de X si y solo si Y se obtiene de X removiendo beat points.*

Escribimos $X \searrow\!\!\searrow Y$ cuando $Y \subseteq X$ es un retracto por deformación fuerte.

El siguiente teorema probado por Barmak y Minian en [BM12b] relaciona la contractibilidad de X con la de X'.

Teorema 1.2.13 (Barmak-Minian)**.** *Un espacio finito X es contráctil si y solo si su subdivisión X' lo es.*

Demostración. Ver [BM12b, Corollary 4.18]. □

Este teorema permite caracterizar la contractibilidad de un espacio finito en términos de sus subdivisiones iteradas.

La demostración consiste en mostrar que cuando el core de X es no trivial, el core de X' es más grande que el core de X. Por lo tanto, deducimos que X y X' tienen el mismo tipo homotópico solo cuando sus componentes conexas son contráctiles.

Teorema 1.2.14. *Sea X un espacio finito. Si X es homotópicamente equivalente a una subdivisión $X^{(n)}$ entonces X, y por lo tanto todas sus subdivisiones, tienen el tipo homotópico de un espacio discreto.*

Tipo homotópico simple de espacios finitos

La falla del teorema de Whitehead en los espacios finitos se codifica en el hecho de que remover o agregar beat points en un espacio finito es un movimiento bastante restrictivo.

En algunos casos, queremos encontrar una relación entre dos espacios finitos X e Y tal que nos garantice que $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ tienen el mismo tipo homotópico, pero menos restrictivo que la condición de beat points. De esta manera, Barmak y Minian [BM08b] tradujeron la noción de homotopía simple de complejos simpliciales al contexto de espacios finitos. En complejos simpliciales, el tipo homotópico simple es más fuerte que el tipo homotópico usual, pero para espacios finitos resulta ser más débil.

Definición 1.2.15. Sea X un espacio finito. Decimos que x es un *up weak point* si $\hat{F}_x$ es contráctil, y un *down weak point* si $\hat{U}_x$ es contráctil. Decimos que x es un *weak point* si es un up o un down weak point.

Observación 1.2.16. Si $x \in X$ es un weak point, la inclusión $X - x \subseteq X$ es una equivalencia débil (ver [Bar11a, Proposition 4.2.4]).

Sea X un espacio finito. Si $Y \subseteq X$, decimos que hay un *colapso elemental* de X a Y, y escribimos $X \searrow^{e} Y$, si $Y = X - x$ para algún weak point $x \in X$. También decimos que Y se *expande elementalmente* a X y escribimos $Y \,{}^{e}\!\nearrow X$. Escribimos $X \searrow Y$ (o $Y \nearrow X$) cuando Y se obtiene de X removiendo weak points. En este caso decimos que X *colapsa* a Y y que Y se *expande* a X. Decimos que X es *colapsable* si colapsa a un punto.

Si Z es otro espacio finito, decimos que X es *simple homotópicamente equivalente* a Z, o que X y Z *tienen el mismo tipo homotópico simple*, si existe una serie de espacios finitos $X_0, X_1, \dots, X_n$ tales que $X_0 = X$, $X_n = Z$ y para cada i, X_i colapsa o se expande a X_{i+1}. Lo denotamos $X \diagup\!\!\!\searrow Z$.

Esto define una noción de teoría de homotopía simple en espacios finitos. Se puede mostrar que espacios finitos homotópicamente equivalentes son simple homotópicamente equivalentes (ver [Bar11a, Lemma 4.2.8]). La vuelta no vale. Más aún, hay espacios finitos colapsables que no son contráctiles (ver [Bar11a, Example 4.3.3]).

Dos espacios finitos que son simple homotópicamente equivalentes tienen los mismos grupos de homotopía y homología. Además, esta noción de tipo homotópico simple se corresponde con la misma noción al nivel de los complejos simpliciales.

Teorema 1.2.17 (ver [Bar11a, Theorem 4.2.11]).

1. *Sean X e Y espacios finitos. Entonces X e Y son simple homotópicamente equivalentes si y solo si $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ son simple homotópicamente equivalentes. Además, si $X \searrow Y$ entonces $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(Y)$.*

2. *Sean K y L complejos simpliciales. Entonces K y L son simple homotópicamente equivalentes si y solo si $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(L)$ son simple homotópicamente equivalentes. Además, si $K \searrow L$ entonces $\mathcal{X}(K) \searrow \mathcal{X}(L)$.*

Notar que un espacio finito X es simple homotópicamente equivalente a un punto si y solo si $X \to \{*\}$ es una equivalencia débil, si y solo si X es homotópicamente trivial (o sea tiene grupos de homotopía triviales). Sin embargo, esta noción es estrictamente más débil que ser colapsable. Esto es, si X es colapsable entonces es simple homotópicamente equivalente a un punto pero la vuelta no vale. Por ejemplo, tomemos K cualquier triangulación del Dunce hat. Es sabido que K es contráctil y que por lo tanto tiene el tipo homotópico simple de un punto. En particular, $X = \mathcal{X}(K)$ es simple homotópicamente equivalente a un punto. Por otro lado, ninguna triangulación del Dunce hat es colapsable, por lo que $\mathcal{X}(K)$ no podría ser colapsable.

El join de espacios finitos

Si X e Y son espacios finitos, entonces definimos su join $X * Y$ que sea el poset finito cuyo conjunto subyacente es la unión disjunta de X e Y con el siguiente orden. Se mantiene el mismo orden en X y en Y, y ponemos $x \leq y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Si K y L son complejos simpliciales, entonces su join $K * L$ es el complejo simplicial cuyos vértices son la unión disjunta de los vértices de K y L. Los símplices de $K * L$ son los símplices de K, los símplices de L y las uniones $\sigma \cup \tau$ con $\sigma \in K$ y $\tau \in L$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(X * Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$ y $|K * L|$ es homeomorfo al join topológico clásico $|K| * |L|$.

La contractibilidad del join de posets está descrita en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.18 (ver [Bar11a, Proposition 2.7.3])**.** *Sean X e Y dos espacios finitos. Entonces $X * Y$ es contráctil si y solo si X o Y lo es.*

Notar que hay complejos simpliciales finitos K y L tales que su join $K * L$ es contráctil pero que K y L no son contráctiles (ver comentario debajo de [Bar11a, Proposition 6.2.12]). Por lo tanto, tomando $X = \mathcal{X}(K)$ e $Y = \mathcal{X}(L)$ podemos encontrar espacios finitos que no son homotópicamente triviales pero que su join sí lo es.

Tenemos un resultado análogo al de la proposición anterior para tipo homotópico simple.

Proposición 1.2.19 (ver [Bar11a, Proposition 4.3.4])**.** *Sean X y Y dos espacios finitos. Entonces $X * Y$ es colapsable si y solo si X o Y es colapsable.*

Tipo homotópico equivariante

Enunciaremos aquí las definiciones y resultados principales sobre la teoría de homotopía equivariante de espacios finitos. Seguimos las ideas de [Bre72], [Sto84] y, más recientemente, [Bar11a, Chapter 8].

Consideramos siempre acciones a derecha. Para un G-conjunto X, escribimos x^g para la acción de $g \in G$ sobre $x \in X$. Si $H \leq G$ es un subgrupo y $Y \subseteq X$, denotamos por $Y^H = \{y^h : y \in Y, h \in H\}$ y por $\mathrm{Fix}_H(Y) = \{y \in Y : y^h = y$ para todo $h \in H\}$ el conjunto de puntos fijos. El grupo G_x es el estabilizador (o grupo de isotropía) en G del elemento $x \in X$. La órbita de $x \in X$

por la acción de G es denotada por $\mathcal{O}_x$. Por G-espacio entendemos un espacio topológico con una acción de un grupo G por homeomorfismos.

Una función continua $f : X \to Y$ entre dos G-espacios se dice que es *G-equivariante* o que es un *G-mapa* si preserva la acción de G. Esto es, $f(x^g) = f(x)^g$ para todo $x \in X$ y $g \in G$. Una homotopía $X \times [0,1] \to Y$ entre G-espacios X e Y es *G-equivariante* si es un G-mapa cuando vemos a $[0,1]$ con la acción trivial de G. Dos G-mapas son *G-homotópicamente equivalentes* si existe una homotopía G-equivariante entre ellos. Escribimos $f \simeq_G g$ si f y g son G-mapas homotópicamente equivalentes. El G-mapa $f : X \to Y$ es una *G-equivalencia* o una *equivalencia homotópica G-equivariante* si existe un G-mapa $g : Y \to X$ tal que $f \circ g \simeq_G \mathsf{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq_G \mathsf{Id}_X$. Dos G-espacios X e Y son *G-homotópicamente equivalentes* o tiene *el mismo tipo homotópico G-equivariante* si existe una G-equivalencia $f : X \to Y$. Escribimos $X \simeq_G Y$ en tal caso. Un subespacio $Y \subseteq X$ de un G-espacio X se dice *invariante* si $Y^G = Y$. Decimos que $Y \subseteq X$ es un *retracto por deformación fuerte equivariante* si Y es un subespacio invariante de X y existe una retracción equivariante $r : X \to Y$ tal que $i \circ r \simeq_G \mathsf{Id}_X$ relativa a Y, donde $i : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Por un G-poset entendemos un poset con una acción del grupo G por isomorfismos de poset. Si tenemos un G-poset finito, entonces su topología intrínseca hereda la G-estructura y se convierte en un G-espacio finito en el sentido topológico. Recíprocamente, si empezamos con un G-espacio finito, entonces es un G-poset con su estructura de orden intrínseca. Además, G-mapas de espacios finitos se corresponden con funciones G-equivariantes que preservan el orden de G-posets finitos. Por lo tanto, las categorías de G-posets finitos y G-espacios finitos son isomorfas. En el contexto de espacios finitos, se puede ver que dos mapas equivariantes $f, g : X \to Y$ entre G-espacios son G-homotópicamente equivalentes si y solo si existe una sucesión de G-mapas $f_0, f_1, \ldots, f_n \in Y^X$ tales que $f_0 = f$, $f_n = g$ y $f_i \leq f_{i+1}$ o $f_i \geq f_{i+1}$ para cada i.

Si X es un G-espacio arbitrario, podemos preguntarnos si su tipo homotópico equivariante coincide con su tipo homotópico usual. Para espacios arbitrarios esto es falso. Por ejemplo, hay G-complejos contráctiles que no tiene un punto fijo por la acción de G. Esto implica que no son G-contráctiles.

Esta situación no aparece en el contexto de espacios finitos. Hemos visto que si X es un espacio finito entonces podemos remover beat points de X hasta alcanzar un espacio finito minimal (un espacio finito sin beat points), que es el core de X. El core determina unívocamente el tipo homotópico de X. Esto es, dos espacios finitos tienen el mismo tipo homotópico si y solo si tienen cores isomorfos. Resulta que entre todas las elecciones posibles de cores de X, existe al menos una que es G-invariante si X es un G-espacio.

Lema 1.2.20 ([Sto84, Lemma p.96])**.** *Sea X un G-espacio finito. Entonces existe un core de X que es G-invariante y un retracto por deformación fuerte equivariante de X.*

La idea de la demostración de este lema es que, en lugar de remover un único beat point en un espacio finito, podemos remover toda su órbita y obtener un retracto por deformación fuerte equivariante. Esto es, si X es un G-espacio finito y tiene un beat point $x \in X$, entonces $X - \mathcal{O}_x \hookrightarrow X$ es un retracto por deformación fuerte equivariante. Esto se sigue del hecho de que si x y x^g son comparables para algún $g \in G$ entonces $x = x^g$ (ver [Bar11a, Lemma 8.1.1]). En particular, un G-espacio finito contráctil tiene un punto fijo.

Corolario 1.2.21 (Cf. [Sto84])**.** *Si X es un G-espacio finito contráctil, entonces tiene un punto fijo.*

Más aún, este core invariante permite probar una versión más fuerte del bien conocido Teorema de Bredon para G-CW-complejos. Lo recordamos aquí abajo.

Teorema 1.2.22 (ver [Bre67, II] o [tD87, II.2.7])**.** *Sea $f : X \to Y$ un G-mapa entre G-CW-complejos. Entonces f es G-equivalencia homotópica si y solo si, para todo $H \leq G$ la función inducida $f_H : \mathrm{Fix}_H(X) \to \mathrm{Fix}_H(Y)$ es una equivalencia homotópica.*

Notar que, en particular, f es una equivalencia homotópica tomando $H = 1$.

Para espacios finitos, no necesitamos asumir la condición de ser una equivalencia homotópica en cada espacio de puntos fijos: solo requerimos que f sea una equivalencia homotópica.

Teorema 1.2.23 (Versión de espacios finitos [Sto84])**.** *Sea $f : X \to Y$ un G-mapa entre G-espacios finitos. Entonces f es una G-equivalencia homotópica si y solo si f es una equivalencia homotópica. En particular, dos cores G-invariantes de X son G-homeomorfos.*

Demostración. La demostración original de este teorema es de Stong [Sto84]. La reproducimos aquí. Tomemos $X_0 \subseteq X$ e $Y_0 \subseteq Y$ cores G-invariantes que son retractos por deformación fuerte G-equivariantes X e Y respectivamente. Sean $i_X : X_0 \hookrightarrow X$ e $i_Y : Y_0 \hookrightarrow Y_0$ las inclusiones, y sean $r_X : X \to X_0$ y $r_Y : Y \to Y_0$ las retracciones equivariantes tales que $r_X \circ i_X = \mathsf{Id}_{X_0}$, $i_X \circ r_X \simeq_G \mathsf{Id}_X$, $r_Y \circ i_Y = \mathsf{Id}_{Y_0}$ y $i_Y \circ r_Y \simeq_G \mathsf{Id}_Y$. Entonces $r_Y \circ f \circ i_X$ es un G-mapa. Si f es una equivalencia homotópica, entonces $r_Y \circ f \circ i_X$ lo es y por lo tanto un homeomorfismo G-equivariante. Luego f es una G-equivalencia dado que $f = i_Y \circ (r_Y \circ f \circ i_X) \circ r_X$ es una composición de G-equivalencias. □

Recordar que si X es un espacio finito, entonces todo retracto por deformación fuerte de X se puede obtener removiendo beat points (ver Proposición 1.2.12). En el contexto equivariante tenemos un resultado similar. En lugar de remover un único beat point, podemos remover toda su órbita y obtener un retracto por deformación fuerte equivariante. La siguiente proposición asegura que esta es la única forma de obtener subespacios G-invariantes de G-espacios finitos que también son retractos por deformación fuerte equivariante. Escribimos $X \searrow\!\!\searrow^G Y$ si X es un G-espacio finito e $Y \subseteq X$ es un subespacio invariante obtenido de X removiendo órbitas de beat points.

Proposición 1.2.24 ([Bar11a, Proposition 8.3.1]). *Sea X un G-espacio finito y sea $Y \subseteq X$ un subespacio invariante. Las siguientes son equivalentes:*

1. *$X \searrow\searrow^{G} Y$,*

2. *$Y \subseteq X$ es un retracto por deformación fuerte equivariante.*

3. *$Y \subseteq X$ es un retracto por deformación fuerte.*

Si X es un G-espacio, se define X/G como el *espacio de órbitas* con elementos las clases de elementos de X bajo la relación de equivalencia $x \sim x^g$ para $g \in G$ y $x \in X$. Denotamos por $\overline{x}$ a la clase del elemento $x \in X$ bajo esta relación. Entonces X/G es un espacio topológico con la topología cociente inducida por la función $x \in X \mapsto \overline{x} \in X/G$.

En el contexto de espacios finitos, X/G resulta ser un espacio finito. Recordemos que estamos asumiendo que nuestros espacios finitos son T_0. Se puede ver que si X es un G-espacio finito T_0 entonces X/G es también un espacio finito T_0. En particular, X/G es un poset con la relación de orden $\overline{x} \leq \overline{y}$ si $x^g \leq y$ para algún $g \in G$.

Para un G-espacio finito X, podemos relacionar la extracción de beat points de X con el subespacio de puntos fijos $\mathrm{Fix}_G(X)$ y el espacio de órbitas X/G.

Teorema 1.2.25 ([Bar11a, Proposition 8.3.14]). *Sea X un G-espacio finito Si $Y \subseteq X$ es un retracto por deformación fuerte equivariante, entonces $\mathrm{Fix}_G(X) \searrow\searrow \mathrm{Fix}_G(Y)$ y $X/G \searrow\searrow Y/G$. En particular, si X es contráctil entonces $\mathrm{Fix}_G(X)$ y X/G lo son, y por lo tanto, $\mathrm{Fix}_G(X) \neq \varnothing$, es decir hay un punto fijo.*

Como corolario, si dos G-espacios finitos son G-homotópicamente equivalentes, sus subespacios de puntos fijos y sus espacios de órbitas son homotópicamente equivalentes.

Esto vale en general para G-espacios: si $X \simeq_G Y$ entonces $\mathrm{Fix}_G(X) \simeq \mathrm{Fix}_G(Y)$ y $X/G \simeq Y/X$. Para espacios finitos esto nos dice que se lleva bien con la extracción de beat points.

Notar que en general, si un G-espacio X es contráctil entonces $\mathrm{Fix}_G(X)$ y X/G podrían no serlo. Por ejemplo, tomar $X = \mathbb{R}$ con la acción de $G = \mathbb{Z}$ por traslación. Entonces X es contráctil pero $\mathrm{Fix}_G(X) = \varnothing$ y $X/G = \mathbb{S}^1$ no lo son. Incluso si el G-espacio X es compacto y G es finito podría no haber puntos fijos. Por ejemplo, la conjetura de Casacuberta-Dicks asegura que si X es un G-CW-complejo 2-dimensional y contráctil entonces tiene un punto fijo por la acción de G (ver [CD92]). En el Capítulo 4, Sección 4.3 probamos esta conjetura cuando X es uno de los complejos de p-subgrupos de un grupo finito G.

También hay una versión equivariante de teoría de homotopía simple de espacios finitos, introducida por Barmak [Bar11a, Chapter 8 Section 3]. Barmak usa este versión equivariante de homotopía simple para dar enunciados equivalentes de la conjetura de Quillen [Bar11a, Theorem 8.4.3].

Sea X un G-espacio finito. Si $x \in X$ es un weak point, entonces también lo es x^g para todo $g \in G$. Se puede mostrar que $X - \mathcal{O}_x \hookrightarrow X$ es una equivalencia débil. En este caso decimos que hay un *G-colapso elemental* de X a $X - \mathcal{O}_x$ y lo denotamos por $X \searrow^{Ge} X - \mathcal{O}_x$. Notar que $X - \mathcal{O}_x$ es un subespacio invariante de X. Decimos que X *G-colapsa* a un subespacio invariante Y si Y se puede obtener de X removiendo órbitas de weak points. Esto es, hay una serie de G-colapsos elementales empezando en X y terminando en Y. Denotamos esto por $X \searrow^{G} Y$. Decimos que X es *G-colapsable* si $X \searrow^{G} *$. Análogamente definimos *G-expansiones elementales* y *G-expansiones*. Si Y es un G-espacio finito arbitrario, decimos que X e Y *tienen el mismo tipo homotópico simple equivariante*, y lo denotamos por $X \diagup\!\!\searrow^{G} Y$, si existe una serie de G-colapsos y G-expansiones empezando en X y terminando en Y.

Observación 1.2.26. Hemos visto que hay espacios finitos que son colapsables pero no contráctiles. Poniendo la acción trivial en tales espacios, obtenemos ejemplos de espacios finitos G-colapsables pero no contráctiles. Por otro lado, hemos visto que todo G-espacio finito contráctil es G-contráctil. Sin embargo, esto no vale para tipo homotópico simple. Esto es, un G-espacio finito podría ser colapsable pero no G-colapsable. Ver [Bar11a, Example 8.3.3].

Recordar que un G-complejo es un complejo simplicial K junto con una acción del grupo G en su conjunto de vértices por isomorfismos simpliciales.

Hay una versión análoga de teoría de homotopía simple equivariante para complejos simpliciales finitos (ver [Bar11a, Definition 8.3.5]). Notar que si X es un G-espacio finito, entonces $\mathcal{K}(X)$ es un G-complejo finito. Análogamente, si K es un G-complejo finito, entonces $\mathcal{X}(K)$ es naturalmente un G-espacio finito. La relación entre G-colapsos en G-espacios finitos y G-complejos está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.2.27 ([Bar11a, Theorem 8.3.11])**.**
1. *Sea X un G-espacio finito y sea $Y \subseteq X$ un subespacio invariante. Si $X \searrow^{G} Y$ entonces $\mathcal{K}(X) \searrow^{G} \mathcal{K}(Y)$.*
2. *Sea K un G-complejo finito y sea $L \subseteq K$ un subcomplejo invariante. Si $K \searrow^{G} L$ entonces $\mathcal{X}(K) \searrow^{G} \mathcal{X}(L)$.*

En particular, si X e Y son G-espacios finitos, entonces $X \diagup\!\!\searrow^{G} Y$ si y solo si $\mathcal{K}(X) \diagup\!\!\searrow^{G} \mathcal{K}(Y)$.

Tenemos resultados análogos a los del Teorema 1.2.25 para tipo homotópico simple equivariante, pero solo para el subespacio de puntos fijos.

Teorema 1.2.28 ([Bar11a, Proposition 8.3.15])**.** *Sea X un G-espacio finito e $Y \subseteq X$ un subespacio invariante tal que $X \searrow^{G} Y$. Entonces $\mathrm{Fix}_G(X) \searrow \mathrm{Fix}_G(Y)$. En particular, si X es G-colapsable entonces X^G lo es (y entonces es no vacío).*

Corolario 1.2.29 ([Bar11a, Corollary 8.3.17])**.** *Sean X e Y dos G-espacios finitos. Si $X \diagup\!\!\searrow^{G} Y$ entonces $\mathrm{Fix}_G(X) \diagup\!\!\searrow \mathrm{Fix}_G(Y)$.*

Para espacios de órbitas, no es verdad que si $X \searrow^G Y$ entonces $X/G \searrow Y/G$. Ver [Bar11a, Example 8.3.16]. En el ejemplo citado $X \searrow^G Y$ y no solo que X/G no colapsa a Y/G, sino que también tienen diferentes grupos de homotopía.

Concluimos esta sección observando que un G-colapso en G-complejos finitos induce un retracto por deformación fuerte equivariante. Esto es, si $K \searrow^G L$ entonces $|L| \subseteq |K|$ es un retracto por deformación fuerte equivariante. En particular, si $K \diagup\!\!\searrow^G L$ entonces $|K| \simeq_G |L|$. Referimos a [Pit16, Teorema 2.4.20] para una demostración de este hecho.

Teorema 1.2.30. *Sean K y L dos G-complejos finitos. Si $K \searrow^G L$ entonces $|L| \subseteq |K|$ es retracto por deformación fuerte equivariante. Además, si $K \diagup\!\!\searrow^G L$ entonces $|K|$ y $|L|$ tienen el mismo tipo homotópico equivariante. En particular, esto vale si X e Y son G-espacios finitos, $K = \mathcal{K}(X)$ y $L = \mathcal{K}(Y)$, y $X \searrow^G Y$ o $X \diagup\!\!\searrow^G Y$.*

1.3. Los posets de p-subgrupos como espacios finitos

En esta sección, estudiamos las relaciones entre los diferentes posets de p-subgrupos como espacios topológicos finitos. Es sabido que $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|$, $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$, $|\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))|$, $|\mathcal{R}_p(G)|$ y $|K_p(G)|$ tienen el mismo tipo homotópico equivariante (ver por ejemplo [Asc93, Qui78, Smi11, TW91]). Sin embargo, al nivel de espacios finitos Stong mostró que por ejemplo $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico [Sto84]. Nosotros proporcionamos demostraciones y ejemplos mostrando las diferentes relaciones entre estos espacios finitos en términos del tipo homotópico (fuerte) equivariante y el tipo homotópico simple equivariante. Mostramos que en general $\mathcal{A}_p(G)$, $\mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{B}_p(G)$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ pueden tener distinto tipo homotópico como espacios finitos. Aquí, para los complejos simpliciales $K_p(G)$ y $\mathcal{R}_p(G)$ consideramos sus posets de caras. En la Subsección 1.3.1 estudiamos condiciones suficientes sobre el grupo G que garanticen que dos de estos posets tengan el mismo tipo homotópico como espacios finitos. En la Subsección 1.3.2 analizamos la contractibilidad como espacios finitos de los diferentes posets de p-subgrupos. En el Ejemplo 1.3.17 mostramos que $\mathcal{A}_p(G)$ podría ser homotópicamente trivial y no contráctil, respondiendo negativamente a la pregunta de Stong al final de [Sto84]. El mismo ejemplo muestra también que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ podría ser homotópicamente trivial y no contráctil como espacio finito. Finalmente, en la Subsección 1.3.3 damos una descripción algebraico-combinatoria de lo que significa la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$.

Recordemos que tenemos las siguientes implicaciones sobre el tipo homotópico equivariante de espacios finitos:

$$
\begin{array}{ccc}
\searrow\!\!\searrow^G & \Longrightarrow & \simeq_G \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\searrow^G & \Longrightarrow & \diagup\!\!\searrow^G
\end{array}
$$

$X \setminus Y$	$\mathcal{S}_p(G)$	$\mathcal{A}_p(G)$	$\mathcal{B}_p(G)$	$\mathcal{X}(K_p(G))$
$\mathcal{S}_p(G)$	$=$	$\searrow^{G}$	$\searrow^{G}$	$\diagup\!\!\searrow^{G}$
$\mathcal{A}_p(G)$	${}^{G}\nearrow$	$=$	$\diagup\!\!\searrow^{G}$	${}^{G}\nearrow\!\!\nearrow$
$\mathcal{B}_p(G)$	${}^{G}\nearrow$	$\diagup\!\!\searrow^{G}$	$=$	$\diagup\!\!\searrow^{G}$
$\mathcal{X}(K_p(G))$	$\diagup\!\!\searrow^{G}$	$\searrow\!\!\searrow^{G}$	$\diagup\!\!\searrow^{G}$	$=$

Cuadro 1.1: Relaciones homotópicas como espacios finitos.

Con estas implicaciones en mente, damos las relaciones entre los diferentes posets de p-subgrupos en la Tabla 1.1. En cada celda ponemos la relación entre X e Y, donde X se corresponde con el poset de la primera columna e Y con el poset de la primera fila.

El poset $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ está más relacionado con los posets subdivididos $\mathcal{S}_p(G)'$ y $\mathcal{A}_p(G)'$. En general, tenemos que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \diagup\!\!\searrow^{G} \mathcal{S}_p(G)$.

Proposición 1.3.1 (Cf. [Bou84, Qui78, TW91]). *Valen las siguientes relaciones en términos de espacios finitos:*

1. $\mathcal{S}_p(G) \searrow^{G} \mathcal{A}_p(G)$,
2. $\mathcal{S}_p(G) \searrow^{G} \mathcal{B}_p(G)$,
3. $\mathcal{X}(K_p(G)) \searrow\!\!\searrow^{G} \mathcal{A}_p(G)$,
4. $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \diagup\!\!\searrow^{G} \mathcal{A}_p(G)$.

En particular, las inclusiones de $|\mathcal{A}_p(G)|$, $|\mathcal{B}_p(G)|$, $|\mathcal{R}_p(G)|$ en $|\mathcal{S}_p(G)|$ son G-equivalencias homotópicas.

Demostración. La última parte del enunciado se sigue del Teorema 1.2.30.

Probamos primero que $\mathcal{S}_p(G) \searrow^{G} \mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G) \searrow^{G} \mathcal{B}_p(G)$. La idea original de esta demostración de debida a Bouc [Bou84].

Mostramos que $\mathcal{A}_p(G)$ se obtiene de $\mathcal{S}_p(G)$ removiendo órbitas de weak points de arriba hacia abajo. Tomemos $P \in \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{A}_p(G)$. Entonces, $1 \neq \Phi(P)$ y $\Phi(P)Q < P$ para todo $Q < P$ dado que P no es elemental abeliano. Por lo tanto $\mathcal{S}_p(G)_{<P}$ es contráctil vía $Q \leq Q\Phi(Q) \geq \Phi(Q)$, P es un down weak point y $\mathcal{S}_p(G) \searrow^{G} \mathcal{S}_p(G) - \{P^g : g \in G\}$. Extrayendo desde arriba hacia abajo las órbitas de los elementos en $\mathcal{S}_p(G) - \mathcal{A}_p(G)$ obtenemos que $\mathcal{S}_p(G) \searrow^{G} \mathcal{A}_p(G)$.

Un razonamiento análogo es obtenido con $\mathcal{B}_p(G)$ en lugar de $\mathcal{A}_p(G)$, pero en este caso las extracciones son de abajo hacia arriba. Si $P \in \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{B}_p(G)$, entonces $P < O_p(N_G(P))$

y $Q \leq QO_p(N_G(P)) \geq O_p(N_G(P))$ es una homotopía bien definida para $Q \in \mathcal{S}_p(G)_{>P}$. Por lo tanto $\mathcal{S}_p(G)_{>P}$ es contráctil y P es un up weak point.

Ahora mostramos que $\mathcal{X}(K_p(G)) \searrow\!\!\searrow^G \mathcal{A}_p(G)$. Un elemento c de $\mathcal{X}(K_p(G))$ es un conjunto de subgrupos de G de orden p que conmutan dos a dos. Esto significa que generan un p-subgrupo elemental abeliano no trivial. Luego tenemos una función $r : \mathcal{X}(K_p(G)) \to \mathcal{A}_p(G)$ definida por $r(c) = \langle X : X \in c \rangle$. En la otra dirección tenemos la función $i : \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{X}(K_p(G))$ definida por $i(E) = \{X : X \leq E, |X| = p\}$. Claramente r e i preservan el orden, $ri = \mathsf{Id}_{\mathcal{A}_p(G)}$ e $ir \geq \mathsf{Id}_{\mathcal{X}(K_p(G))}$. En consecuencia, i es un embeding y $\mathcal{A}_p(G)$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{X}(K_p(G))$. Dado que $\mathcal{A}_p(G)$ es G-invariante, $\mathcal{X}(K_p(G)) \searrow\!\!\searrow^G \mathcal{A}_p(G)$ por la Proposición 1.2.24.

Finalmente probamos que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \nearrow\!\!\searrow^G \mathcal{A}_p(G)$. Esta demostración es debida a Thévenaz-Webb [TW91]. Consideremos la función $\phi : \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \to \mathcal{A}_p(G)^{\mathrm{op}}$ definida por $\phi(P_0 < \ldots < P_r) = \Omega_1(Z(P_r)) \cap P_0$. Se puede ver que $\Omega_1(Z(P_r)) \cap P_0 = \bigcap_i \Omega_1(Z(P_i))$. Por lo tanto ϕ es una función bien definida que preserva el orden. Además, $\phi(\mathcal{A}_p(G)^{\mathrm{op}}_{\leq A}) = \{(P_0 < \ldots < P_r) : \Omega_1(Z(P_r)) \cap P_0 \geq A\}$ es contráctil vía $(P_0 < \ldots < P_r) \leq (A \leq P_0 < \ldots < P_r) \geq (A)$. Luego, por [Bar11a, Proposition 8.3.21], $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \nearrow\!\!\searrow^G \mathcal{A}_p(G)$. □

Observación 1.3.2. Para completar la demostración de la Tabla 1.1, notar que $\nearrow\!\!\searrow^G$ es una relación transitiva. Por ejemplo, $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{B}_p(G)$ implica $\mathcal{A}_p(G) \nearrow\!\!\searrow^G \mathcal{B}_p(G)$.

Ahora damos algunos ejemplos mostrando que las relaciones de la Tabla 1.1 son estrictas.

Recordar que Stong mostró que $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico en general (ver [Sto84]). Concretamente, para $G = \mathbb{S}_5$ y $p = 2$ él mostró que $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no son homotópicamente equivalentes. En el siguiente ejemplo exhibimos el grupo más chico posible con esta propiedad.

Observación 1.3.3. En los ejemplos subsiguientes usamos el hecho de que $\mathcal{B}_p(G) \subseteq \mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$ (ver Lema 1.3.10). Aquí, $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$ es el subposet de intersecciones no triviales de p-subgrupos de Sylow de G, y es un retracto por deformación fuerte equivariante de $\mathcal{S}_p(G)$ (ver [Bar11a, Chapter 9] o Subsección 1.3.3 debajo).

Ejemplo 1.3.4. Sea $G = (\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3) \rtimes C_2$ donde C_2 actúa permutando las copias de $\mathbb{S}_3$. Este grupo tiene orden 72 y para $p = 2$, los posets $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico. Hemos verificado esto calculando sus cores, los cuales tienen 21 y 39 elementos respectivamente.

En la Proposición 1.3.14 mostramos que este es el grupo más chico para el cual $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico.

Por otro lado, $\mathcal{B}_p(G)$ no tiene beat points y $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G)) = \mathcal{B}_p(G)$. Por lo tanto $\mathcal{B}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico pero $\mathcal{B}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ es un retracto por deformación fuerte. También tenemos que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \simeq \mathcal{A}_p(G)'$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \not\simeq \mathcal{S}_p(G)'$ dado que sus cores tienen 93 y 57 puntos respectivamente.

Ejemplo 1.3.5. Sea $G = L_3(2) = \mathrm{PSL}_3(2)$ y $p = 2$. Entonces $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico dado que sus cores tienen 56 y 35 elementos respectivamente. Este es el grupo más chico para el cual el poset de Brown de p-subgrupos no es homotópicamente equivalente al poset de Bouc de p-subgrupos radicales.

El algoritmo aplicado para encontrar este ejemplo es el siguiente. Tenemos que $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G)$ tienen el mismo tipo homotópico cuando $O_p(G) \neq 1$, los p-subgrupos de Sylow son abelianos, $m_p(G) = 1$ o $|G| = p^\alpha q$ para q primo (ver Subsección 1.3.1). Entonces hay solo 4 grupos G que no satisfacen estas propiedades de orden a lo sumo 168. Estos son $G = (\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3) \rtimes C_2, \mathbb{S}_5, (C_3 \times C_3) \rtimes QD_{16}$ y $\mathrm{PSL}_3(2)$. En todos los casos $p = 2$, y $\mathcal{S}_p(G) \simeq \mathcal{B}_p(G)$ excepto en el último.

Para $G = \mathrm{PSL}_3(2)$ y $p = 2$, el core de $\mathcal{S}_p(G)$ tiene 56 puntos y tanto $\mathcal{B}_p(G)$ como $\mathcal{A}_p(G)$ son espacios finitos minimales con 35 puntos. Más aún, $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G)$ no son homotópicamente equivalentes pero $\mathcal{A}_p(G)^{\mathrm{op}}$ y $\mathcal{B}_p(G)$ son homeomorfos. En particular, $\mathcal{A}_p(G)'$ y $\mathcal{B}_p(G)'$ son homeomorfos. El core de $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ tiene 77 puntos y es homotópicamente equivalente a $\mathcal{A}_p(G)'$ pero no a $\mathcal{S}_p(G)'$, cuyo core tiene 287 puntos.

Ejemplo 1.3.6. Sea G el grupo isomorfo a

$$C_2^6 : (C_3^2 : C_3)$$

que tiene id [1728,47861] en la librería de Small Groups de GAP. Su orden es $1728 = 2^6 3^3$ y es el grupo más chico para el cual $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico para un primo $p \neq 2$ ($p = 3$ en este caso). Los cores de $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ tienen 256 y 512 puntos respectivamente. Más aún, $\mathrm{i}(\mathcal{S}_p(G)) = \mathcal{B}_p(G)$, por lo que $\mathcal{B}_p(G)$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{S}_p(G)$. El core de $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ tiene 1536 puntos y es homeomorfo al core de $\mathcal{A}_p(G)'$. Así, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \simeq \mathcal{A}_p(G)'$. Por otro lado, el core de $\mathcal{S}_p(G)'$ tiene 1024 elementos, por lo que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ y $\mathcal{S}_p(G)'$ no son homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 1.3.7. En todos los ejemplos anteriores, $\mathcal{A}_p(G)'$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ son homotópicamente equivalentes. Sin embargo esto no sucede en general. Sea $p = 2$ y G el grupo isomorfo a

$$H \times \mathbb{S}_3$$

donde $H \cong (\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3) \rtimes C_2$ es el grupo del Ejemplo 1.3.4. Los cores de $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ tienen 87 y 159 elementos respectivamente, por lo que no son homotópicamente equivalentes. Además, $\mathcal{B}_p(G) = \mathrm{i}(\mathcal{S}_p(G))$, que es un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{S}_p(G)$. Por otro lado, los cores de $\mathcal{S}_p(G)'$, $\mathcal{A}_p(G)'$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ tienen 789, 1257 y 1149 elementos respectivamente, por lo que dos a dos no son homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 1.3.8. El poset $X_p(G)$ es considerado en [Pit19] en el estudio de la conjetura de Webb desde el punto de vista de espacios finitos (ver también Capítulo 2 y Proposición 2.3.6). En general, el subposet $X_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ no es débilmente equivalente a $\mathcal{S}_p(G)$.

Sea $G = (\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3) \rtimes C_2$ el grupo del Ejemplo 1.3.4 con $p = 2$. El poset $X_p(G)$ tiene el tipo homotópico de un espacio discreto de 9 puntos, mientras que $\mathcal{S}_p(G)$ es conexo y tiene el tipo homotópico débil de un wedge de 16 1-esferas. En particular, $\mathcal{S}_p(G)$ podría ser conexo y $X_p(G)$ no.

Es fácil de ver que $X_p(G)$ es invariante bajo la acción de G, $\mathcal{S}_p(G)$ es conexo si $X_p(G)$ lo es, y $\mathcal{S}_p(G)$ es contráctil si y solo si $X_p(G)$ lo es.

No sabemos si existe una relación más fuerte o incluso una versión de la conjetura de Quillen para este poset (cf. Proposición 1.3.15).

1.3.1. Algunos casos con $\mathcal{A}_p(G) \simeq \mathcal{S}_p(G)$

En general, encontrar condiciones puramente algebraicas necesarias y suficientes en un grupo finito para que dos de sus posets de p-subgrupos sean homotópicamente equivalentes, podría ser bastante complejo dado que hay mucha combinatoria involucrada. La idea de esta subsección es establecer algunas condiciones algebraicas simples y suficientes para que dos posets de p-subgrupos de un grupo G sean homotópicamente equivalentes. No sabemos si algunas de ellas son también condiciones necesarias. Éstas nos serán útiles en los siguientes capítulos.

El siguiente teorema describe la condición algebraica para que $\mathcal{A}_p(G)$ sea un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{S}_p(G)$. Esto fue hecho parcialmente por Stong al final de [Sto84].

Teorema 1.3.9 (Cf. [MP18, Proposition 3.2])**.** *Sea G un grupo finito y p un primo que divide a su orden. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\Omega_1(S)$ *es abeliano para* $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$*,*
2. $\mathcal{A}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ *es un retracto por deformación fuerte equivariante,*
3. $\mathcal{A}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ *es un retracto.*

Además, si estas condiciones valen, entonces $\mathcal{A}_p(G)' \subseteq \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es un retracto por deformación fuerte equivariante.

Demostración. Si $\Omega_1(S)$ es abeliano para $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces $r : \mathcal{S}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G)$ definido por $r(Q) = \Omega_1(Q)$ es un retracto por deformación fuerte. Recíprocamente, si $r : \mathcal{S}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G)$ es una retracción, entonces para cada $Q \in \mathcal{S}_p(G)$ y cada subgrupo $X \leq Q$ de orden p tenemos que $X = r(X) \leq r(Q) \in \mathcal{A}_p(G)$. En particular, $\Omega_1(Q) \leq r(Q)$ es elemental abeliano.

Para la parte del "Además", considerar la función $r : \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \to \mathcal{A}_p(G)'$ definida por $r(P_0 < P_1 < \ldots < P_r) = (\Omega_1(P_0) \leq \Omega_1(P_1) \leq \ldots \leq \Omega_1(P_r))$. Notar $r_p(G) = \log_p(|G|_p)$. Para cada $0 \leq i \leq r_p(G)$, considerar las siguientes funciones $f_i, g_i : \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \to \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$.

$$f_i(P_0 < P_1 < \ldots < P_r) = \{\Omega_1(P_j) \,:\, |P_j| \leq p^i\} \cup \{P_j \,:\, |P_j| \geq p^i\}$$

$$g_i(P_0 < P_1 < \ldots < P_r) = \{\Omega_1(P_j) : |P_j| \leq p^i\} \cup \{P_j : |P_j| > p^i\}$$

Claramente, f_i y g_i son funciones bien definidas que preservan el orden y fijan $\mathcal{A}_p(G)'$. El hecho de que $f_i(c), g_i(c) \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ si $c \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ se sigue de que $P \trianglelefteq Q$ implica $\Omega_1(P) \trianglelefteq Q$ dado que $\Omega_1(P) \operatorname{char} P$.

Sea $i : \mathcal{A}_p(G)' \hookrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ la inclusión. Entonces $ri = \mathsf{Id}_{\mathcal{A}_p(G)'}$. Por otro lado, $ir = g_{r_p(G)}$, $\mathsf{Id}_{\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))} = f_0 = g_0$ y para todo $0 \leq i \leq r_p(G)$, $g_{i-1} \leq f_i \geq g_i$. Por lo tanto, $ir \simeq \mathsf{Id}_{\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))}$ y $\mathcal{A}_p(G)' \subseteq \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es un retracto por deformación fuerte equivariante (ver Teorema 1.2.24). □

Recordar que $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$ es el subposet de intersecciones no triviales de p-subgrupos de Sylow de G y es un retracto por deformación fuerte equivariante de $\mathcal{S}_p(G)$ (ver Subsección 1.3.3).

Lema 1.3.10. *Para un grupo finito G, $\mathcal{B}_p(G) \subseteq \mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$. Esto es, todo p-subgrupo radical es una intersección de p-subgrupos de Sylow de G.*

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{B}_p(G)$ y sea P la intersección de todos los p-subgrupos de Sylow de G que contienen a Q. Claramente, $Q \leq P$ y si $Q^g = Q$ entonces $P^g = P$. Por lo tanto $N_G(Q) \leq N_G(P)$. Por la Proposición 1.1.1, $P \leq Q$. En consecuencia, $Q = Q \in \mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$. □

Proposición 1.3.11. *Si S es abeliano para $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces $\mathcal{B}_p(G) = \mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$ y por lo tanto éste es un retracto por deformación fuerte equivariante de $\mathcal{S}_p(G)$.*

Demostración. Por el lema anterior resta demostrar que $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G)) \subseteq \mathcal{B}_p(G)$. Sea $Q \in \mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$. Entonces si $S_1, \ldots, S_n$ son los p-subgrupos de Sylow de G que contienen a Q, tenemos que $Q = \bigcap_{i=1}^n S_i$. Además, $S_i \leq N_G(Q)$ pues S_i es abeliano. Luego $\mathrm{Syl}_p(N_G(Q)) = \{S_1, \ldots, S_n\}$ y $O_p(N_G(Q)) = \bigcap_i S_i = Q$, o sea $Q \in \mathcal{B}_p(G)$. □

Proposición 1.3.12. *Supongamos que dos p-subgrupos de Sylow distintos de G se intersecan trivialmente. Entonces $\mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{B}_p(G)$, $\mathcal{A}_p(G)$, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$, $X_p(G)$ son G-homotópicamente equivalentes a $\mathrm{Max}(\mathcal{S}_p(G)) = \mathrm{Syl}_p(G)$. En particular esto vale si G tiene un único p-subgrupo de Sylow.*

Demostración. Sea n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Es fácil ver que cada espacio tiene $|\mathrm{Syl}_p(G)|$ componentes conexas.

Para $\mathcal{S}_p(G)$ y $X_p(G)$, las componentes conexas son $\mathcal{S}_p(S)$ y $X_p(S)$ respectivamente, para $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dado que tienen máximo, son contráctiles.

El poset $\mathcal{B}_p(G)$ es igual a $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$, el cual es igual a $\mathrm{Syl}_p(G)$ en este caso (ver Lema 1.3.10).

Las componentes conexas de $\mathcal{A}_p(G)$ son $\mathcal{A}_p(S)$ para $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Cada una de ellas es contráctil vía la homotopía $E \leq E\Omega_1(Z(S)) \geq \Omega_1(Z(S))$ para $E \in \mathcal{A}_p(S)$.

Finalmente, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ tiene n_p componentes conexas y cada una de ellas tiene la forma $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(S))$ para $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Queda probar que todas ellas son contráctiles. Podemos realizar una homotopía similar a la de $\mathcal{A}_p(S)$. Sea $Z = Z(S)$. Considerar las funciones $f, g, f_i, g_i : \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(S)) \to \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(S))$ definidas como sigue.

$$f(P_0 < \ldots < P_r) = (Z \leq P_0 Z \leq \ldots \leq P_r Z)$$

$$g(P_0 < \ldots < P_r) = (Z)$$

$$f_i(P_0 < \ldots < P_r) = \{P_j : |P_j| \leq p^i\} \cup \{P_j Z : |P_j| \geq p^i\}$$

$$g_i(P_0 < \ldots < P_r) = \{P_j : |P_j| < p^i\} \cup \{P_j Z : |P_j| \geq p^i\}$$

Todas estas funciones están bien definidas, son continuas y $g_{i+1} \leq f_i \geq g_i$, $g_1 \leq f \geq g$ y $g_{r_p(G)+1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(S))}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(S))$ es contráctil. □

La siguiente proposición describe el tipo homotópico de una familia particular de grupos resolubles. Es una proposición útil para buscar ejemplos.

Proposición 1.3.13. *Si $|G| = p^\alpha q$ para p, q primos, entonces los posets de p-subgrupos $\mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{B}_p(G)$, $\mathcal{A}_p(G)$, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ y $X_p(G)$ son G-homotópicamente equivalentes dos a dos. Más aún, todos ellos son contráctiles o bien son G-homotópicamente equivalentes a* $\mathrm{Max}(\mathcal{S}_p(G)) = \mathrm{Syl}_p(G)$.

Demostración. Se sigue de [MP18, Proposition 3.2] y su demostración, Proposición 1.3.12 y Proposición 1.3.15, que $\mathcal{S}_p(G)$ es G-homotópicamente equivalente a todos los otros posets excepto quizás a $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$. Probemos que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \simeq \mathcal{S}_p(G)$. Por la demostración de [MP18, Proposition 3.2] y la Proposición 1.3.12, podemos suponer que $1 \neq O_p(G) = S_1 \cap S_2$ para cualesquiera dos p-subgrupos de Sylow distintos $S_1, S_2 \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Por lo tanto necesitamos probar que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es contráctil. Vamos a probar que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G))) \subseteq \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es un retracto por deformación fuerte. El resultado se seguirá dado que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G)))$ es contráctil por la Proposición 1.3.12.

Para cualquier $Q \in \mathcal{S}_p(G)$, o bien $Q \leq O_p(G)$ o existe un único p-subgrupo de Sylow $S(Q)$ de G tal que $Q \leq S(Q)$. Ahora, para cualquier cadena $c \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ o bien $c \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G)))$ o existe $Q \in c$ con $Q \not\leq O_p(G)$. Si $P \geq Q$ y $P \in c$, entonces $P \not\leq O_p(G)$ y $S(P) = S(Q)$. Escribamos $c = c_1 \cup c_2$ donde $c_1 \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G)))$ y $c_2 \subseteq \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{S}_p(O_p(G))$. Notar que $P < Q$ si $P \in c_1$ y $Q \in c_2$. Sea $S(c_2) = S(Q)$ si $c_2 \neq \varnothing$ y $Q \in c_2$. Consideremos las siguientes funciones definidas en $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$.

$$f_i(c) = c_1 \cup \{QZ(S(c_2)) : Q \in c_2, |Q| \geq p^i\} \cup \{Q : Q \in c_2, |Q| \leq p^i\}$$

$$g_i(c) = c_1 \cup \{QZ(S(c_2)) : Q \in c_2, |Q| \geq p^i\} \cup \{Q : Q \in c_2, |Q| < p^i\}$$

$$h_i(c) = c_1 \cup \{(QZ(S(c_2))) \cap O_p(G) : Q \in c_2, |Q| \leq p^i\} \cup \{QZ(S(c_2)) : Q \in c_2, |Q| \geq p^i\}$$

$$e_i(c) = c_1 \cup \{(QZ(S(c_2))) \cap O_p(G) : Q \in c_2, |Q| \le p^i\} \cup \{QZ(S(c_2)) : Q \in c_2, |Q| > p^i\}$$

Todas estas funciones están bien definidas y preservan el orden. Para todo i tenemos que $g_i \le f_i \ge g_{i+1}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))} = f_{r_p(G)+1}$, $g_0 = e_0$, $e_i \le h_i \ge e_{i-1}$ y $\mathrm{Im}(h_{r_p(G)+1}) = \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G)))$. Más aún, estas funciones son la identidad cuando se restringen a $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G)))$. En consecuencia, hemos encontrado una homotopía entre la identidad de $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ y una retracción de $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ a $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G)))$. Esto es, $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(O_p(G))) \subseteq \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es un retracto por deformación fuerte. $\square$

Estos resultados permiten probar teóricamente que el orden minimal de un grupo G para el cual $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico es al menos 72. El grupo del Ejemplo 1.3.4 realiza esta cota.

Proposición 1.3.14. *Si $|G| < 72$ entonces $\mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{B}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ tienen el mismo tipo homotópico G-equivariante para cada primo p. También $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ y $\mathcal{A}_p(G)'$ tienen el mismo tipo homotópico G-equivariante.*

Demostración. Sea $1 \le n < 72$ y sea G un grupo de orden n. Si $p \nmid |G|$ todos los posets son vacío y no hay nada que decir. De otra manera, $n = p^\alpha m$ con $\alpha \ge 1$ y $(m : p) = 1$. Si $\alpha = 1$ o 2, los p-subgrupos de Sylow son abelianos y por el Teorema 1.3.9 y la Proposición 1.3.11, $\mathcal{A}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$, $\mathcal{A}_p(G)' \subseteq \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ y $\mathcal{B}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ son retractos por deformación fuerte. Si $\alpha \ge 3$ entonces $2^3 3^2 = 72 > n = p^\alpha m \ge 2^3 m$, y así $1 \le m < 9$. Para $m = 1$ o primo, el resultado se sigue de la Proposición 1.3.13. Luego queda probar que $m \ne 4$, 6 y 8. Si $m = 4$, 6 u 8, como $(p : m) = 1$, $p \ge 3$. Pero entonces $p^\alpha m \ge 3^3 4 = 108 > 72$. $\square$

1.3.2. Contractibilidad de los posets de p-subgrupos

En esta sección estudiamos la contractibilidad de los posets de p-subgrupos. El objetivo es encontrar las condiciones algebraicas necesarias y suficientes que la caractericen en cada poset de p-subgrupos.

Proposición 1.3.15 (Cf. [Sto84]). *Sea G un grupo finito y p un número primo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$O_p(G) \ne 1$,*

2. *$\mathcal{S}_p(G)$ es contráctil,*

3. *$\mathcal{B}_p(G)$ es contráctil,*

4. *$X_p(G)$ es contráctil.*

En particular, si $O_p(G) \ne 1$, $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ son homotópicamente triviales.

Demostración. La demostración es esencialmente la misma para cada poset. La idea original es debida a Stong [Sto84]. Si X es alguno de los posets del enunciado y es contráctil, entonces tiene un punto fijo (ver Teorema 1.2.25). Entonces $O_p(G) \neq 1$.

Recíprocamente, asuma que $O_p(G) \neq 1$. Entonces $\mathcal{S}_p(G)$ y $X_p(G)$ son contráctiles vía la misma homotopía $P \leq PO_p(G) \geq O_p(G)$ con $P \in \mathcal{S}_p(G)$ o $X_p(G)$ respectivamente. Por otro lado, $O_p(G)$ es el mínimo de $\mathcal{B}_p(G)$, por lo que éste es contráctil (ver Proposición 1.1.1). $\square$

Siguiendo a Stong [Sto84], la conjetura de Quillen puede ser reformulada en términos de la topología intrínseca de los posets de la siguiente manera.

Conjetura de Quillen: Si $\mathcal{S}_p(G)$ es homotópicamente trivial entonces es contráctil.

Lo mismo vale para $\mathcal{B}_p(G)$ en lugar de $\mathcal{S}_p(G)$.

Observación 1.3.16. Si X es uno de los posets de p-subgrupos de un grupo finito G y es contráctil, entonces G fija un punto de X y por lo tanto $O_p(G) \neq 1$ (ver Corolario 1.2.21). En particular, si $\mathcal{A}_p(G)$ o $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es contráctil entonces $\mathcal{S}_p(G)$ es contráctil.

La pregunta de que si $\mathcal{S}_p(G)$ contráctil implica que $\mathcal{A}_p(G)$ lo sea fue planteada por Stong al final de [Sto84]. Nosotros mostramos en [MP18] que la respuesta a la pregunta de Stong es por la negativa. Esto es, existen grupos finitos G para los cuales $\mathcal{A}_p(G)$ es homotópicamente trivial y no contráctil. Esto destaca el poder de los espacios finitos: con la topología intrínseca de los posets, hay diferencias homotópicas entre $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ de manera que la conjetura de Quillen no significa lo mismo en ambos posets.

Ejemplo 1.3.17. Sea G el grupo de orden $576 = 2^6 3^2$ e índice 5684 en la librería de Small Groups de GAP [GAP18]. Este grupo posee la siguiente estructura. Sean $H_1 = \langle a,b\rangle = C_2 \times C_2$, $H_2 = \langle c,d\rangle = C_3 \times C_3$ y $N = \langle e,f,g,h\rangle = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$. Entonces $G = (N : H_2) : H_1$ y las acciones están dadas como sigue:

$$c^a = c^2, d^a = d^2, e^a = f, f^a = e, g^a = h, h^a = g,$$
$$c^b = cb, d^b = d^2, e^b = g, f^b = h, g^b = e, h^b = f,$$
$$e^c = e, f^c = e, g^c = h, h^c = gh,$$
$$e^d = f, f^d = fe, g^d = gh, h^d = g.$$

En particular, $O_2(G) = N$ es un p-subgrupo normal no trivial. Luego $\mathcal{S}_2(G)$ es contráctil. Sin embargo, el poset $\mathcal{A}_2(G)$ no es contráctil pues su core tiene tamaño 100. Además, G es un grupo resoluble, $O_{2'}(G) = 1$ y $C_G(O_2(G)) \leq O_2(G)$ es auto-centralizante. Notar que $Z(G) = 1$.

Este es el ejemplo más chico de un grupo finito tal que $\mathcal{S}_2(G)$ es contráctil pero $\mathcal{A}_2(G)$ no lo es. El algoritmo para encontrar este ejemplo fue descrito en [Pit16, Ejemplo 3.7.4]. Ver también [MP18, Example 3.7].

También se puede ver usando el paquete [FPSC19] de GAP que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_2(G))$ es un espacio finito homotópicamente trivial y no contráctil (su core tiene 2065 puntos), y que es el ejemplo más chico con esta propiedad. Además, el core de $\mathcal{A}_2(G)'$ tiene 631 puntos y por lo tanto $\mathcal{X}(\mathcal{R}_2(G))$ y $\mathcal{A}_2(G)'$ no son homotópicamente equivalentes como espacios finitos (aunque ambos son homotópicamente triviales). Más aún, por el Teorema 1.2.13, $\mathcal{S}_2(G)'$ y $\mathcal{B}_2(G)'$ son contráctiles.

En particular, $O_p(G) \neq 1$ no implica que ni $\mathcal{A}_p(G)$ ni $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ sean contráctiles. Por lo tanto, es natural preguntarse qué significa la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ en términos puramente algebraicos. Nosotros hemos respondido este pregunta usando una descripción algebraica-combinatoria del poset $\mathcal{A}_p(G)$ (ver [MP18] y [Pit16]). No damos la descripción de la contractibilidad de $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ en términos algebraicos, pero sí damos algunas condiciones suficientes para que lo sea.

En la sección siguiente desarrollaremos los resultados que necesitamos para describir la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ en términos algebraicos-combinatorios.

La siguiente proposición provee algunos casos particulares en donde la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$ implica la de $\mathcal{A}_p(G)$.

Proposición 1.3.18. *Sea G un grupo finito y p un número primo. En cualquiera de los siguientes casos, la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$ implica la de $\mathcal{A}_p(G)$:*

1. *G actúa transitivamente sobre* $\operatorname{Max}(\mathcal{A}_p(G))$*,*
2. *$m_p(G) \leq 2$,*
3. *$r_p(G) \leq 3$.*

Demostración. Supongamos primero que todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales son conjugados. Afirmamos que la intersección de todos ellos es no trivial. En efecto, si $\Omega_1(Z(O_p(G))) \leq A$, donde A es un p-subgrupo elemental abeliano maximal, entonces $\Omega_1(Z(O_p(G))) = \Omega_1(Z(O_p(G)))^g \leq A^g$ para todo $g \in G$ y por lo tanto $\Omega_1(Z(O_p(G)))$ es un p-subgrupo elemental abeliano no trivial contenido en la intersección de todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales. Por la Proposición 1.3.25, $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil.

Si $m_p(G) \leq 2$, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ es un grafo. Esto implica que, en este caso, $\mathcal{A}_p(G)$ es homotópicamente trivial si y solo si es contráctil.

Si $r_p(G) \leq 3$, $m_p(G) = 1$, 2, o 3, y en el último caso $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{S}_p(G)$. □

Ejemplo 1.3.19. Sea $G = ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_8) : \mathbb{Z}_2$ el grupo con id [144,182] en la librería de Small Groups de GAP. Notar que $|G| = 2^4 3^2$. Si tomamos $p = 2$, los cores de los espacios finitos $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ tienen 21 y 39 elementos respectivamente. En particular, no son homotópicamente equivalentes. Se puede ver que todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales dentro de un mismo p-subgrupo de Sylow son conjugados en el Sylow, por lo que en particular todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales son conjugados en G. Este ejemplo muestra que la condición del ítem (1) en la Proposición 1.3.18 no es suficiente para que $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ sean homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 1.3.20. En el Ejemplo 1.3.4, para $G = (\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3) \rtimes C_2$ y $p = 2$, $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no tienen el mismo tipo homotópico como espacios finitos. Notar que $m_p(G) = 1$ y $r_p(G) = 3$. En consecuencia, las condiciones (2) y (3) de la Proposición 1.3.18 no son suficientes para que $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ sean homotópicamente equivalentes.

1.3.3. La contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$

Por la Observación 1.3.16 y el Ejemplo 1.3.17, la contractibilidad del espacio finito $\mathcal{A}_p(G)$ es estrictamente más fuerte que la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$. Por otro lado, la Proposición 1.3.15 describe la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$ en términos puramente algebraicos. Por lo tanto, es natural buscar condiciones puramente algebraicas que describan la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$. En esta sección damos una descripción de lo que esto significa, pero necesitamos saber algunos aspectos de la combinatoria del poset $\mathcal{A}_p(G)$. Para hacer esto, usamos la noción de contractibilidad en pasos. La mayoría del contenido de esta sección es parte del artículo [MP18] y [Pit16].

Definición 1.3.21. Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas de espacios finitos. Decimos que f y g son homotópicas en n pasos (con $n \geq 0$) si existen $f_0, \ldots, f_n : X \to Y$ tales que $f = f_0$, $f_n = g$ y f_i, f_{i+1} son comparables para todo $0 \leq i < n$. Lo denotamos por $f \sim_n g$.

Dos espacios finitos X e Y son homotópicamente equivalentes en n pasos (denotado por $X \sim_n Y$) si existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $fg \sim_n \mathrm{Id}_Y$ y $gf \sim_n \mathrm{Id}_X$. Decimos que X es contráctil en n pasos si $X \sim_n *$, o equivalentemente, existen $x_0 \in X$ y $f_0 = \mathrm{Id}_X, f_1, \ldots, f_n = c_{x_0} : X \to X$, donde c_{x_0} es la función constante x_0, tales que f_i y f_{i+1} son comparables para todo i.

Observación 1.3.22. Notar que $X \sim_0 Y$ si y solo si son homeomorfos, y que X es contráctil en 1 paso si y solo si tiene un máximo o un mínimo. Notar también que en este caso, X puede ser llevado a un punto removiendo solo up beat points (si tiene un máximo), o down beat points (si tiene un mínimo). Luego, la contractibilidad en 1 paso significa que solo un tipo de beat point es necesario remover. Observar también que si $X \sim_n Y$ e $Y \sim_m Z$, entonces $X \sim_{n+m} Z$.

Supongamos que X es un espacio finito contráctil. Por lo tanto existe un orden $x_1, \ldots, x_r$ de los elementos de X tales que x_i es un beat point de $X - \{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$ para $i = 1, \ldots, r-1$. En cada paso, x_i puede ser un up beat point o un down beat point. Decimos que los beat points se puede *remover en (a lo sumo) n cambios* si hay $1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq r-1$ tales que todos los beat points entre x_1 y x_{i_1-1}, x_{i_1} y x_{i_2-1}, $\ldots$, x_{i_n} y x_{r-1} son del mismo tipo. Por ejemplo, si el poset X tiene un máximo o un mínimo, uno puede alcanzar el singleton removiendo beat points sin cambios (todos up beat points, si tiene un máximo, y todos down beat points si tiene un mínimo).

La idea es que el número de pasos necesarios en una homotopía entre la identidad y una función constante se corresponde con el número de cambios de beat points necesarios para alcanzar el core del espacio finito. Esto es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 1.3.23. *El poset X es contráctil en n pasos si y solo si podemos remover los beat points con (a lo sumo) $n-1$ cambios.*

Demostración. Asuma primero que existe un ordenamiento $\{x_1,\dots,x_k\} = X$ tal que x_j es un beat point de $X_j = X - \{x_1,\dots,x_{j-1}\}$ y que hay a lo sumo $n-1$ cambios de tipo de beat points.

Si $n=1$, entonces son todos down beat point o todos up beat points. Supongamos el primer caso. Para cada J, sean $\hat{U}^{X_j}_{x_j} = \{x \in X_j,\, x < x_j\}$ e $y_j \in X_j$ tal que $y_j = \max \hat{U}^{X_j}_{x_j}$. Sea $r_j : X_j \to X_{j+1}$ la retracción que envía x_j a y_j y fija los demás puntos, y sea $i_j : X_{j+1} \to X_j$ la inclusión. Entonces $\alpha_1 := i_1 r_1 \leq \mathsf{Id}_{X_1} = \mathsf{Id}_X$. Sea $\alpha_j = i_1 i_2 \dots i_j r_j \dots r_2 r_1 : X \to X$. Como $i_j r_j \leq \mathsf{Id}_{X_j}$ para todo j, concluimos que $\alpha_j \leq \mathsf{Id}_X$ para todo j. En particular, para $j = k-1$, $\alpha_{k-1} \leq \mathsf{Id}_X$ y α_{k-1} es una función constante dado que $r_{k-1} : X_{k-1} \to X_k = \{x_k\}$. En consecuencia, $X \sim_1 *$.

Ahora asumamos que $n > 1$ y tomemos un ordenamiento $\{x_1,\dots,x_k\} = X$ de beat points con a lo sumo $n-1$ cambios. Tomemos el mínimo i tal que x_i y x_{i+1} son beat points de distinto tipo. Por el mismo argumento usado anteriormente, es fácil ver que $X \sim_1 X - \{x_1,\dots,x_i\} = X_{i-1}$ pues todos los beat points removidos son del mismo tipo. Por inducción, X_{i-1} puede ser llevado a un punto removiendo beat points con a lo sumo $n-2$ cambios, y entonces $X_{i-1} \sim_{n-1} *$. Por lo tanto, de la Observación 1.3.22 concluimos que $X \sim_n *$.

Supongamos ahora que X es contráctil en n pasos y procedamos por inducción en n. Si $n=1$, entonces X tiene un máximo o un mínimo. En tal caso podemos alcanzar el core de X removiendo solo up beat points en el primer caso, o solo down beat points en el segundo caso.

Sea $n=2$ y asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathsf{Id}_X \leq g \geq c_{x_0}$, donde c_{x_0} es la función constante x_0. Podemos suponer que X no tiene ni máximo ni mínimo, y esto implica que g no es la identidad. Sea $\mathrm{fix}(g)$ el subposet de X de los puntos fijos por g. Notar que $\mathrm{Max}(X) \subseteq \mathrm{fix}(g) \neq X$. Dado que $\mathsf{Id}_X \leq g$, para cualquier $x \in X$, tenemos que

$$x \leq g(x) \leq g^2(x) \leq g^3(x) \leq \dots$$

y por lo tanto existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $g^i(x) \in \mathrm{fix}(g)$.

Tomemos $x \in X - \mathrm{fix}(g)$ un elemento maximal. Si $x < z$, entonces $z \in \mathrm{fix}(g)$ por maximalidad. Ahora, dado que $g \geq \mathsf{Id}_X$, tenemos $x < g(x) \leq g(z) = z$. Por lo tanto, x es un up beat point.

Sea $\{x_1,\dots,x_k\}$ una extensión lineal de $(X - \mathrm{fix}(g))^{\mathrm{op}}$ y sea $X_j = X - \{x_1,\dots,x_{j-1}\}$. Afirmamos que x_j es un up beat point de X_j para cada $j \geq 1$. El caso $j=1$ es lo que hicimos antes. Supongamos que $j > 1$ y sea $y = g^m(x_j) \in \mathrm{fix}(g) \subseteq X_j$. Tomemos $z \in X_j$ tal que $z > x_j$. Entonces $z \in \mathrm{fix}(g)$ y $x_j < y = g^m(x_j) \leq g^m(z) = z$, que muestra que x_j es un up beat point de X_j. Así, $\mathrm{fix}(g)$ puede ser obtenido de X removiendo solo up beat points. Ahora mostramos que $\mathrm{fix}(g)$ tiene un mínimo, usando que $g \geq c_{x_0}$. Esto implica que $\mathrm{fix}(g)$ puede ser llevado a un punto removiendo solo down beat points, y así los beat points de X pueden ser removidos con 1 cambio (primero up beat points y luego down beat points). Para ver que $\mathrm{fix}(g)$ tiene un mínimo, tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m(x_0) \in \mathrm{fix}(g)$. Entonces, para cualquier $z \in \mathrm{fix}(g)$ tenemos que $z = g^{m+1}(z) \geq g^m(x_0)$.

Supongamos ahora que $n > 2$. Asuma que existe un fence $\mathsf{Id}_X \leq g_1 \geq g_2 \leq g_3 \geq \ldots$, con $g_n = c_{x_0}$. Sea $Y = \mathrm{fix}(g_1)$. También podemos suponer que $X \neq Y$. Por el mismo argumento usado en el caso $n = 2$, Y es obtenido de X removiendo solo up beat points. Sea $i : Y \hookrightarrow X$ la inclusión y $r : X \to Y$ la retracción dada por la extracción de up beat points. Entonces

$$\mathsf{Id}_Y \geq rg_2 i \leq rg_3 i \geq \ldots \overset{\leq}{\geq} rg_n i = c_{rg_n(x_0)}.$$

Así $Y \sim_{n-1} *$ y, por inducción, los beat points de Y se pueden remover con a lo sumo $n-2$ cambios. Esto concluye la demostración. □

La idea de contractibilidad en pasos es que para cada entero no negativo n, la condición combinatoria $\mathcal{A}_p(G) \sim_n *$ se traduce en una condición algebraica en el grupo G. Por lo tanto, si sabemos lo que significa esto para cualquier n, entonces podemos describir la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ en términos algebraicos.

Usando esta noción, la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ en pocos pasos puede ser descrita en términos puramente algebraicos. Primero necesitamos un lema.

Lema 1.3.24. *Si $f, g : \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G)$ son dos funciones continuas tales que $\mathsf{Id}_{\mathcal{A}_p(G)} \geq f \leq g$, entonces $\mathsf{Id}_{\mathcal{A}_p(G)} \leq g$.*

Demostración. Ver [MP18, Lemma 4.4]. □

Proposición 1.3.25. *Las siguientes afirmaciones valen:*

1. *$\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en 0 pasos si y solo si G tiene solo un subgrupo de orden p, es decir $\Omega_1(G) \cong C_p$,*

2. *$\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en 1 paso si y solo si $\mathcal{A}_p(G)$ tiene un máximo, si y solo si $\Omega_1(G)$ es abeliano,*

3. *$\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en 2 pasos si y solo si la intersección de todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales es no trivial, si y solo si $p \mid |C_G(\Omega_1(G))|$, si y solo si $p \mid |Z(\Omega_1(G))|$,*

4. *$\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en 3 pasos si y solo si existe un p-subgrupo elemental abeliano de G que interseca (de manera no trivial) toda intersección no trivial de p-subgrupos elementales abelianos maximales.*

Si $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en 2 pasos, entonces $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es contráctil.

Demostración. El ítem (1) es claro, y el ítem (2) se sigue del lema anterior. Probamos (3) y (4). Asuma que $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en 2 pasos. Por el lema previo, podemos suponer que existe una función $f : \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G)$ con $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_p(G)} \leq f \geq c_N$, donde c_N es la función constante con valor N, para algún $N \in \mathcal{A}_p(G)$. De esta manera, si $A \in \mathcal{A}_p(G)$ es un elemento maximal, entonces $A \leq f(A)$ implica $A = f(A)$ y así, $A \geq N$. Se sigue que $N \leq Z(\Omega_1(G))$, es decir $p \mid |C_G(\Omega_1(G))|$. Recíprocamente, si $p \mid |C_G(\Omega_1(G))|$ entonces existe $a \in Z(\Omega_1(G))$ de orden p. Sea $N = \langle a \rangle$. Luego, $N \in \mathcal{A}_p(G)$ y $A \leq AN \geq N$ es una homotopía en 2 pasos de $\mathcal{A}_p(G)$. Esto concluye la demostración de (3).

Si $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en 3 pasos, entonces por el lema previo podemos tomar una homotopía $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_p(G)} \leq f \geq g \leq c_N$, donde c_N es la función constantemente N. Además, $f(B) \leq r(B)$, y así $r(B) \geq g(B) \leq N$. Esto significa que $r(B) \cap N \geq g(B) > 1$, y por lo tanto

$$B \leq r(B) \geq r(B) \cap N \leq N$$

es una homotopía bien definida entre la identidad de $\mathcal{A}_p(G)$ y la función constante N. Pero entonces N interseca no trivialmente a toda intersección no trivial de elementos maximales de $\mathcal{A}_p(G)$. Notar que esto también prueba la vuelta.

Resta probar que si $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en dos pasos entonces $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es contráctil. Primero notar que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ es homotópicamente equivalente al subposet $X = \{c \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) : Q = \Omega_1(Q) \text{ para todo } Q \in c\}$. La retracción a este subposet está dada por tomar Ω_1 a los elementos de una cadena.

Segundo, sea $Z = \Omega_1(Z(\Omega_1(G)))$ (que es no trivial por hipótesis) y definamos las siguientes funciones en X.

$$f_i(c) = \{QZ : Q \in c, |Q| \geq p^i\} \cup \{Q : Q \in c, |Q| \leq p^i\},$$

$$g_i(c) = \{QZ : Q \in c, |Q| \geq p^i\} \cup \{Q : Q \in c, |Q| < p^i\},$$

$$g(c) = \{QZ : Q \in c\} \cup \{Z\},$$

$$h(c) = \{Z\}.$$

Claramente, $f_i, g_i, g, h : X \to X$ están bien definidas y preservan el orden, $f_i \geq g_i \leq f_{i-1}$ para todo i, $f_0 = g_0 \leq g \geq h$, y $f_{r_p(G)+1} = \mathrm{Id}_X$. □

El siguiente ejemplo muestra que, a diferencia de lo que sucede con $\mathcal{S}_p(G)$ (que siempre es contráctil en 2 pasos dado que es cónicamente contráctil [Qui78, Proposition 2.4]), el poset $\mathcal{A}_p(G)$ podría ser contráctil en más de 2 pasos.

Ejemplo 1.3.26. Sea $G = \mathbb{S}_4$. Entonces $|G| = 2^3 3$. Dado que $N = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$ es un 2-subgrupo normal no trivial de G, ambos posets $\mathcal{S}_2(G)$ y $\mathcal{A}_2(G)$ son contráctiles por el ítem (3) de la Proposición 1.3.18. De hecho, $\mathcal{A}_2(G)$ es contráctil en 3 pasos pero no es contráctil en 2 pasos pues $\Omega_1(G) = G$ tiene centro trivial. El poset $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))$ de intersecciones no triviales de elementos maximales (ver debajo para una definición formal) está dado por

$$\begin{tikzcd}
\langle (12),(34) \rangle \arrow[d, dash] & \langle (12)(34),(13)(24) \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & \langle (13),(24) \rangle \arrow[d, dash] & \langle (14),(23) \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle (12)(34) \rangle & & \langle (13)(24) \rangle & \langle (14)(23) \rangle
\end{tikzcd}$$

La intersección de todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales es trivial, pero el subgrupo N interseca no trivialmente a toda intersección no trivial de p-subgrupos elementales abelianos maximales.

Podemos encontrar grupos más grandes para los cuales $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en estrictamente más de 3 pasos. Sin embargo, no sabemos si más de 4 pasos son necesarios. Esto es, si $\mathcal{A}_p(G) \simeq *$ implica $\mathcal{A}_p(G) \sim_4 *$.

La contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)$ en más de 3 pasos puede ser descrita en términos algebraicos para con la ayuda de información combinatoria extra sobre el poset. Los métodos que usaremos son una generalización de los usados en la demostración del Lema 1.3.24 y la Proposición 1.3.25.

Para un lattice finito L, recordemos que $L^* = L - \{\hat{0}, \hat{1}\}$ es la *parte propia* de L. Decimos que un poset finito X es un *reduced lattice* si $X = L^*$ para algún lattice L. Equivalentemente, para todo par de elementos $\{x, y\}$ con una cota superior en X existe el supremo $x \vee y$. Esta condición a su vez es equivalente a decir que para cada par de elementos $\{x, y\}$ con una cota inferior en X existe el ínfimo $x \wedge y$ (ver [Bar11a, Chapter 9]). Un reduced lattice X es *atómico* si todo elemento es el supremo de los elementos minimales por debajo de éste, esto es, si $x = \bigvee_{y \in \mathrm{Min}(x)} y$ para cada $x \in X$. Análogamente, X es *coatómico* si X^{op} es atómico, es decir, si $x = \bigwedge_{y \in \mathrm{Max}(x)} y$ para cada $x \in X$.

El poset $\mathcal{A}_p(G)$ es un reduced lattice atómico: el ínfimo de dos p-subgrupos elementales abelianos con intersección no trivial es su intersección, y el supremo, cuando están acotados superiormente, es el subgrupo generado por ambos subgrupos.

Dadas dos funciones que preservan el orden $f, g : X \to Y$, donde Y es un reduced lattice, tal que $\{f(a), g(a)\}$ es acotado inferiormente (resp. acotado superiormente) para cada $a \in X$, podemos definir las funciones $f \wedge g, f \vee g : X \to Y$ por $(f \wedge g)(a) = f(a) \wedge g(a)$ y $(f \vee g)(a) = f(a) \vee g(a)$.

Proposición 1.3.27. *Sea X un reduced lattice atómico. Si $\mathsf{Id}_X \sim_n g$, entonces existen $f_0, \ldots, f_n : X \to X$ con*

$$\mathsf{Id}_X = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \ldots \overset{\geq}{\leq} f_n = g$$

y tales que $f_{2k} = f_{2k-1} \wedge f_{2k+1}$ *para cada* $1 \leq k < n/2$ *y* $f_{2k+1} = f_{2k} \vee f_{2k+2}$ *para cada* $0 \leq k < n/2$*.*

Demostración. Ver [MP18, Proposition 4.7] □

La siguiente construcción fue introducida por J. Barmak en [Bar11a, Chapter 9]. Dado un reduced lattice X, sea

$$\mathfrak{i}(X) = \left\{ \bigwedge_{x \in S} x \,:\, S \subseteq \mathrm{Max}(X),\, S \neq \varnothing \text{ y acotado inferiormente} \right\}$$

$$\mathfrak{s}(X) = \left\{ \bigvee_{x \in S} x \,:\, S \subseteq \mathrm{Min}(X),\, S \neq \varnothing \text{ y acotado superiormente} \right\}.$$

Con estas notaciones, X es atómico si y solo si $X = \mathfrak{s}(X)$, y es coatómico si y solo si $X = \mathfrak{i}(X)$. Ambos $\mathfrak{i}(X)$ y $\mathfrak{s}(X)$ son retractos por deformación fuerte de X (ver [Bar11a, Chapter 9]). Más aún, $\mathfrak{i}(X)$ puede obtenerse de X extrayendo solo up beat points, y $\mathfrak{s}(X)$ extrayendo solo down beat points. Como $\mathfrak{i}\mathfrak{i}(X) = \mathfrak{i}(X)$ y $\mathfrak{s}\mathfrak{s}(X) = \mathfrak{s}(X)$, podemos realizar estas dos operaciones hasta obtener un core de X. En particular, el core de X es un reduced lattice atómico y coatómico al mismo tiempo. Sea $n \geq 0$. Si X es atómico y $n \geq 0$, denotamos por X_n al $(n+1)$-ésimo término en la sucesión

$$X \supseteq \mathfrak{i}(X) \supseteq \mathfrak{s}\mathfrak{i}(X) \supseteq \mathfrak{i}\mathfrak{s}\mathfrak{i}(X) \supseteq \dots.$$

De la misma manera, cuando X es coatómico denotamos por X_n al $(n+1)$-ésimo término en la sucesión

$$X \supseteq \mathfrak{s}(X) \supseteq \mathfrak{i}\mathfrak{s}(X) \supseteq \mathfrak{s}\mathfrak{i}\mathfrak{s}(X) \supseteq \dots.$$

Observación 1.3.28. Si X es un G-poset, entonces $\mathfrak{i}(X)$ y $\mathfrak{s}(X)$ son retractos por deformación fuerte G-invariantes de X. En consecuencia, este método provee una herramienta sencilla para encontrar un core G-invariante de X.

Observación 1.3.29. Notar que si X es un reduced lattice e $\mathrm{Id}_X \leq f$, entonces $f(x) \leq \bigwedge_{y \in \mathrm{Max}(x)} y$ para cualquier $x \in X$.

Teorema 1.3.30. *Sea X un reduced lattice atómico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $X \sim_n *$,
2. $\mathfrak{i}(X) \sim_{n-1} *$,
3. $X_i \sim_{n-i} *$ *for all* $i \geq 0$,
4. $X_n = *$.

Con la convención que, para un número no negativo m, $X \sim_m *$ significa que $X \sim_0 *$. Equivalencias análogas valen cuando X es un reduced lattice coatómico, con $\mathfrak{s}(X)$ en lugar de $\mathfrak{i}(X)$.

Demostración. La demostración se sigue sencillamente del Teorema 1.3.23 y la Proposición 1.3.27. La idea es que la única manera de extraer beat points en un reduced lattice atómico X es extrayendo los puntos de $X - \mathfrak{i}(X)$, que son up beat points. Entonces podemos iterar el procedimiento. Ver la demostración de [MP18, Theorem 4.9] para más detalles. □

Observación 1.3.31. Si X es atómico, entonces X_n es coatómico para n impar y es atómico si n es par. En particular, si $X \sim_n *$, por el teorema previo, $X_n = *$, lo que significa que X_{n-1} tiene un máximo si n es impar, o tiene un mínimo si n es par. Luego si notamos $\mathcal{M}_n$ al conjunto $\mathrm{Min}(X_n)$ cuando n par, y $\mathrm{Max}(X_n)$ cuando n es impar, concluimos que $X \sim_n *$ si y solo si $|\mathcal{M}_n| = 1$.

Ahora podemos aplicar estos resultados para describir la contractibilidad en pasos del poset $\mathcal{A}_p(G)$ en términos algebraicos.

Para cada conjunto $\mathcal{M}_n$ tenemos un subgrupo de G que describe si éste es un punto o no. Este subgrupo es la intersección de los elementos de $\mathcal{M}_n$ o bien el subgrupo generado por $\mathcal{M}_n$. En cada caso, este subgrupo determinará si $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en $n+1$ pasos o no.

Teorema 1.3.32. *El poset $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil en n pasos si y solo si una de las siguientes condiciones vale:*

1. *$n = 0$ y $\mathcal{A}_p(G) = \{*\}$,*
2. *$n \geq 1$ es par y $\bigcap_{A \in \mathcal{M}_{n-1}} A > 1$,*
3. *$n \geq 1$ es impar y $\langle A : A \in \mathcal{M}_{n-1} \rangle$ es abeliano.*

Demostración. Por la observación anterior $\mathcal{A}_p(G) \sim_n *$ si y solo si $|\mathcal{M}_n| = 1$.

Si n es impar, $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ tiene un máximo y $\mathcal{M}_{n-1}$ es el conjunto de elementos minimales de $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$. Si $B \in \mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ es el máximo, entonces $B \geq A$ para cada $A \in \mathcal{M}_{n-1}$ y así, $\langle A : A \in \mathcal{M}_{n-1} \rangle$ es un subgrupo abeliano.

Si n es par, $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ tiene un mínimo y $\mathcal{M}_{n-1}$ es el conjunto de elementos maximales de $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$. Si $B \in \mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ es el mínimo, $B \leq A$ para cada $A \in \mathcal{M}_{n-1}$ y entonces $1 < B \leq \bigcap_{A \in \mathcal{M}_{n-1}} A$ es un subgrupo no trivial. Esto prueba la parte del "si".

Para la parte del "solo si", notar que $\mathcal{A}_p(G)_{n-1} \sim_1$. Ahora el resultado se sigue del Teorema 1.3.30. □

Sería interesante encontrar una mejor descripción para los subgrupos $\bigcap_{A \in \mathcal{M}_{n-1}} A$ (n par) y $\langle A : A \in \mathcal{M}_{n-1} \rangle$ (n impar). Notar que las condiciones del teorema anterior sobre estos grupos dicen que hay ciertas relaciones de conmutación entre los elementos de orden p. Por ejemplo, cuando $n = 2$ esto significa que hay un elemento de orden p conmutando con todos los elementos de orden p. Para $n = 3$, esto dice que hay un p-subgrupo elemental abeliano no trivial N tal que para cada $A \in \mathcal{A}_p(G)$ existe un elemento no trivial $x \in N$ que conmuta con todo elemento de orden p que conmuta con A.

Podríamos continuar con este razonamiento para pasos más grandes pero la descripción algebraica se vuelve más técnica.

Capítulo 2

La conjetura de Webb

En el artículo [Web87], P. Webb consideró los complejos de p-subgrupos con la acción por conjugación inducida por grupo subyacente. Él relacionó la cohomología p-ádica de un grupo finito G con la cohomología de ciertos estabilizadores de los símplices de los complejos de p-subgrupos (ver [Web87, Theorem 3.3]). Webb notó que los complejos de p-subgrupos de G son una geometría para el grupo que codifican su información p-local. De hecho, cuando G es un grupo de tipo Lie en característica p, su Tits building (que es una geometría en el sentido de Tits) es homotópicamente equivalente al complejo complejo de p-subgrupos $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$. Así, estos complejos pueden ser vistos como una generalización de los buildings para todo grupo finito en el primo p. Más aún, en [Web87, §5] Webb introdujo un módulo de Steinberg para G en el primo p usando los complejos de cadenas de los complejos de p-subgrupos de G. Este módulo de Steinberg (que es en realidad un módulo virtual) coincide con el módulo de Steinberg clásico para grupos de Chevalley.

Webb también mostró que $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$ es módulo p acíclico y conjeturó que de hecho es contráctil. Esta conjetura fue probada primero por P. Symonds en [Sym98]. La demostración de Symonds consiste en mostrar que $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$ es simplemente conexo y acíclico. Más tarde otros autores probaron la conjetura de Webb usando diferentes métodos. Por ejemplo, Assaf Libman [Lib08] y Markus Linckelmann [Lin09] probaron una generalización de la conjetura de Webb que surge de los sistemas de fusión. Esto es, si $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado sobre un p-grupo finito S y $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{F}$-colección no vacía y cerrada, entonces podemos formar el espacio de órbitas $|\mathcal{C}|/\mathcal{F}$ que coincide con $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$ cuando $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$ y $\mathcal{C} = \mathcal{S}_p(S)$. Ellos probaron que este espacio es contráctil. Una demostración más reciente de este resultado para sistemas de fusión fue obtenido por J. Grodal en [Gro16]. Otra demostración de la conjetura de Webb de debida a Kai-Uwe Bux [Bux99], usando la versión de teoría de Morse de Bestvina-Brady.

En este capítulo estudiamos la conjetura de Webb desde el punto de vista de espacios finitos. La forma usual de estudiar esta conjetura es por medio del espacio de órbita de la realización geométrica de un complejo de p-subgrupos. Dado que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$, $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, $\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))$ y $\mathcal{R}_p(G)$ son G-homotópicamente equivalentes (ver Proposición 1.3.1), los espacios de órbitas $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|/G$, $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$, $|\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))|/G$ y $|\mathcal{R}_p(G)|/G$ son homotópicamente equivalentes. Por el resultado de Symonds, todos ellos son contráctiles. Por otro lado, la estructura de los espacios de órbitas de sus posets de caras podrían ser diferentes. Si X es un G-espacio finito, podemos considerar los espacios de órbitas X/G (que es un poset) $|\mathcal{K}(X)/G|$, $|\mathcal{K}(X)|/G$ y X'/G. En general estos espacios no son homotópicamente equivalentes (ver Ejemplo 2.2.2). En el contexto de los posets de p-subgrupos, estudiaremos las relaciones entre estos espacios de órbitas y sus tipos homotópicos. En la Proposición 2.3.1 mostramos que si K es uno de los complejos de p-subgrupos anteriores, entonces la conjetura de Webb acierta que el espacio finito $\mathcal{X}(K)/G$ es homotópicamente trivial. Esta reformulación de la conjetura de Webb nos hace pensar de que quizás una reformulación más fuerte de la conjetura valga. Esto es, si el espacio finito $\mathcal{X}(K)/G$ es en realidad contráctil. Mostramos que $\mathcal{S}_p(G)'/G$ y $\mathcal{B}_p(G)'/G$ no son contráctiles en general (ver Ejemplos 2.3.2 y 2.3.3). Sin embargo, en todos los ejemplos que calculamos el poset $\mathcal{A}_p(G)'/G$ este resultó ser contráctil. Creemos que esta versión más fuerte de la conjetura de Webb debería valer:

Conjetura de Webb fuerte. *El espacio finito $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

Probaremos algunos casos particulares de esta conjetura más fuerte (ver Teorema 2.5.12). Notar que, dado que los espacios finitos $\mathcal{A}_p(G)$, $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G)$ no son homotópicamente equivalentes en general, los espacios de órbitas de sus posets subdivididos podrían tener diferente tipo homotópico (y de hecho lo tienen).

Por otro lado, la conjetura de Webb está relacionada con los posets subdivididos, pero podríamos preguntarnos qué sucede que el espacio de órbitas de los posets originales. Esto es, cuál es el tipo homotópico de X/G, donde $X = \mathcal{A}_p(G)$, $\mathcal{S}_p(G)$ o $\mathcal{B}_p(G)$. Observar que $\mathcal{S}_p(G)/G$ y $\mathcal{B}_p(G)/G$ tienen un máximo (la clase de un p-subgrupo de Sylow) y por lo tanto son contráctiles. Sin embargo $\mathcal{A}_p(G)/G$ podría no tener un máximo y no podemos deducir fácilmente su contractibilidad. No obstante, en el Teorema 2.4.1 mostramos que $\mathcal{A}_p(G)/G$ es siempre contráctil usando algunas nociones básicas de teoría de fusión.

La fusión en p de un grupo finito G es, a groso modo, la información sobre la conjugación de los p-subgrupos de G. Uno define la categoría de fusión de G sobre un p-subgrupo de Sylow S fijo, y esta categoría (llamada el sistema de fusión de G en S) codifica la estructura p-local de G. En algunos casos (como para grupos finitos simples), la estructura p-local determina la estructura global del grupo. Los teoristas de grupos y los topólogos algebraicos estudian sistemas de fusión generales sobre p-grupos para entender mejor (y simplificar) la clasificación de los grupos finitos simples, representación modular e incluso propiedades cohomológicas de los grupos finitos sobre cuerpos de característica p.

Algunos resultados de este capítulo aparecen en [Pit19].

2.1. Sistemas de fusión

El estudio de los espacios de órbitas de los posets de p-subgrupos está fuertemente relacionado con la fusión de los grupos en el primo p. El objetivo de esta sección es dar un breve repaso de algunos de los teoremas principales en sistemas de fusión.

Fijemos un p-subgrupos de Sylow $S \leq G$. El *sistema ía de fusión de G sobre S* es la categoría $\mathcal{F}_S(G)$ cuyos objetos son los subgrupos de S y, para $P, Q \leq S$, el conjunto de morfismos de P a Q es

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) = \{c_g|_P \,:\, g \in G, P^g \leq Q\}.$$

Esto es, los morfismos de P a Q son aquellos inducidos por conjugar por un elemento de G que envía P a un subgrupo de Q.

Un subgrupo $H \leq G$ que contiene a S se dice que *controla la fusión en S* si $\mathcal{F}_S(H) = \mathcal{F}_S(G)$. Esto significa que si $P^g, P \leq S$ para $g \in G$, entonces existe $h \in H$ tal que $c_g|_P = c_h|_P$.

Uno de los objetivos en el estudio de los sistemas de fusión es encontrar un subgrupo $H \leq G$ que controle la fusión en S y que permita describir mejor la categoría de fusión. De esta manera tenemos los siguientes teoremas bien conocidos.

Teorema 2.1.1 (Burnside's fusion theorem)**.** *Si S es abeliano entonces $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_S(N_G(S))$, y todo morfismo en $\mathcal{F}_S(G)$ se extiende a un automorfismo de S.*

Recordar que un grupo finito G es *p-nilpotente* si tiene un p-complemento normal, es decir $G = O_{p'}(G)S$ para $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Un *subgrupo p-local* de G es un subgrupo de la forma $N_G(P)$ para $P \leq G$ un p-subgrupo no trivial.

Teorema 2.1.2 (Frobenius)**.** *El grupo G es p-nilpotente si y solo si $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_S(S)$, si y solo si cada subgrupo p-local es p-nilpotente.*

Es sorprende que para primos impares, la condición del teorema anterior necesita ser chequeada solo en un subgrupo especial de G. Esto es, sea $J(S)$ el subgrupo de S generado por los p-subgrupos elementales abelianos de S de rango $m_p(S)$.

Teorema 2.1.3 (Glauberman-Thompson)**.** *Sea p un primo impar. Entonces $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_S(S)$ si y solo si $\mathcal{F}_S(N_G(Z(J(S)))) = \mathcal{F}_S(S)$.*

Este teorema dice que solo necesitamos chequear la condición del teorema de Frobenius en el subgrupo $N_G(Z(J(S)))$. En particular, si $\mathcal{F}_S(N_G(Z(J(S)))) = \mathcal{F}_S(S)$ entonces $N_G(Z(J(S)))$ controla la G-fusión en S. Esta última situación sucede más a menudo de lo esperado. La obstrucción para que esto suceda está dada por la presencia del grupo $Qd(p)$ en algún subcociente de G. Recordemos que $Qd(p)$ es el extensión split natural $C_p^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(p)$.

Proposición 2.1.4. *Si $G = Qd(p)$ y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ entonces $\mathcal{F}_S(G) \neq \mathcal{F}_S(N_G(Z(J(S))))$.*

Teorema 2.1.5 (Glauberman ZJ-theorem)**.** *Sea p un primo impar, y sea G un grupo finito que no tiene ningún subcociente isomorfo a $Qd(p)$. Sea S un p-subgrupo de Sylow de G. Entonces $\mathcal{F}_S(N_G(Z(J(S)))) = \mathcal{F}_S(G)$.*

La demostración del teorema anterior puede encontrarse en [Cra11].

A principios de los noventa, Puig axiomatizó las propiedades de la G-fusión en un p-subgrupo de Sylow S e introdujo las *categorías de Frobenius* sobre un p-grupo finito S. Él las usó como herramienta en teoría de representaciónes para estudiar p-blocks de grupos finitos, en un contexto más general, motivado por el artículo de Alperin-Broué's [AB79]. Puig no publicó sus ideas hasta 2006, en [Pui06]. Las categorías de Frobenius de Puig son llamadas, en nuestra terminología, *sistemas de fusión saturados*, y codifican la misma información que la categoría $\mathcal{F}_S(G)$.

Más relaciones de sistemas de fusión con teoría de homotopía aparecen en los trabajos de Broto-Levi-Oliver [BLO03]. La conexión con teoría de homotopía está parcialmente motivada por la conjetura de Martino-Priddy (cuya demostración fue completada primero por Oliver). Esta conjetura acierta que para dos grupos finitos G y H, las p-completaciones de sus espacios clasificantes $BG^\wedge_p$ y $BH^\wedge_p$ son homotópicamente equivalentes si y solo si G y H tienen la misma estructura p-local, es decir, tienen sistemas de fusión isomorfos en un p-subgrupo de Sylow (en particular tienen p-subgrupos de Sylow isomorfos). De esta manera, los sistemas de fusión son una estructura algebraica que codifican la información p-local de los espacio clasificantes de los grupos (que son su p-completación). Esta idea se traduce al contexto más general de sistemas de fusión, dando lugar a la noción de *grupos finitos p-locales*.

Ahora damos la definición general de un sistema de fusión sobre un p-grupo y las propiedades principales en las que estamos interesados. Seguimos las convenciones de [AKO11].

Definición 2.1.6. Un sistema de fusión sobre un p-grupo S es una categoría $\mathcal{F}$ cuyos objetos son los subgrupos de S y cuyos conjuntos de morfismos satisfacen las siguientes condiciones para todo $P, Q \leq S$:

1. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(S)}(P,Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q) \subseteq \mathrm{Inj}(P,Q)$,
2. Cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ puede ser escrito como un $\mathcal{F}$-isomorfismo seguido por una inclusión.

Aquí, $\mathrm{Inj}(P,Q)$ denota al conjunto de morfismos inyectivos de P a Q.

Cuando el sistema de fusión $\mathcal{F}$ es *realizable* por un grupo finito G, es decir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$, tenemos entonces algunas propiedades adicionales que surgen de los teoremas de Sylow. Algunas de estas propiedades las traducimos al contexto general y definimos *sistemas de fusión saturados*. Recordemos que si $K, H \leq G$ son grupos, entonces $\mathrm{Aut}_H(K) = N_H(K)/C_H(K)$.

Definición 2.1.7. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo S y sea $P \leq S$.

1. $Q \leq S$ es $\mathcal{F}$*-conjugado* a P si existe un $\mathcal{F}$-isomorfismo $\varphi : P \to Q$. Escribimos $P^{\mathcal{F}}$ para el conjunto de los $\mathcal{F}$-conjugados de P.

2. P es *fully normalized* en $\mathcal{F}$ si $|N_S(P)| \geq |N_S(Q)|$ para todo $Q \leq S$ $\mathcal{F}$-conjugado a P.

3. P es *fully automized* en $\mathcal{F}$ si $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P))$.

4. P es *receptive* en $\mathcal{F}$ si para cada $Q \leq S$ y cada $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(Q,P)$, existe un morfismo $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_\varphi, S)$ tal que $\overline{\varphi}|_Q = \varphi$, donde

$$N_\varphi = \{g \in N_S(Q) \, : \, \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(P)\}$$

Observación 2.1.8. Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$, por los teoremas de Sylow es fácil probar que $Q \leq S$ es fully normalized (resp. centralized) si y solo si $N_S(Q) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(Q))$ (resp. $C_S(Q) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(Q))$).

Definición 2.1.9. Un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo S es *saturado* si verifica las siguientes condiciones:

1. (Axioma de Sylow) Cada subgrupo $P \leq S$ que es fully normalized en $\mathcal{F}$ es también fully centralized y fully automized en $\mathcal{F}$.

2. (Axioma de Extensión) Cada subgrupo $P \leq S$ que es fully centralized en $\mathcal{F}$ es también receptive en $\mathcal{F}$.

Se puede mostrar que $\mathcal{F}_S(G)$ es un sistema de fusión saturado [AKO11, Theorem 2.3]. Aquellos sistemas de fusión saturados que no son realizables por un grupo finito se llaman *sistemas de fusión exóticos*.

2.2. G-posets y G-complejos

En esta sección estudiamos las relaciones entre los diferentes espacios de órbitas que surgen de los G-posets. Seguimos el libro de Bredon [Bre72] para las definiciones y propiedades principales de los G-complejos. También referimos a la Subsección 1.2 para las definiciones y resultados principales de G-espacios.

Recordar que un G-complejo es un complejo simplicial finito K con una acción de G por automorfismos simpliciales. Un G-poset es un poset finito X con una acción de un grupo G por automorfismos de posets.

Si K es un G-complejo, entonces K/G es el complejo simplicial cuyos vértices son las órbitas de vértices de K y $\{\overline{v_0}, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}\}$ es un símplex de K/G, con v_i vértices de K, si existen $w_i \in \overline{v_i}$ tales que $\{w_0, w_1, \dots, w_r\}$ es un símplex de K.

Recordar de la Subsección 1.2 que si X es un G-poset entonces X/G es un poset.

Si $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ es una cadena en el G-poset X y $g \in G$, sea $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)^g = (x_0^g < x_1^g < \ldots < x_n^g)$. Esto define una acción de G en $\mathcal{K}(X)$ por automorfismos simpliciales y sobre X' por automorfismos de posets. Análogamente, si K es un G-complejo, entonces $\mathcal{X}(K)$ es un G-poset de manera canónica.

Siguiente la terminología de [Bre72, p.115], un G-complejo K se dice que satisface la propiedad (B) en $H \leq G$ si cada vez que tenemos $\{v_0, \ldots, v_n\}$ y $\{v_0^{h_0}, \ldots, v_n^{h_n}\}$ símplices de K con $h_i \in H$, entonces existe $h \in H$ tal que $v_i^{h_i} = v_i^h$ para todo i. Decimos que K satisface (B) si lo hace sobre $H = G$, y que K es regular si satisface la propiedad (B) en cada subgrupo de G.

Es fácil ver que si K es un G-complejo, entonces K'' es un complejo regular (ver [Bre72, Ch. III, 1.1 Proposition]). Además, si $K = \mathcal{K}(X)$ para un G-poset X, entonces K' es regular.

Proposición 2.2.1. *Sea X un G-poset finito. Entonces $\mathcal{K}(X)' = \mathcal{K}(X')$ es un G-complejo regular.*

Demostración. Ver [Pit19, Proposition 2.3]. □

Decimos que un G-poset X satisface (B) sobre $H \leq G$ si $\mathcal{K}(X)$ lo hace como G-complejo, y que X es regular si $\mathcal{K}(X)$ lo es.

De ahora en adelante, haremos una distinción entre un complejo simplicial y su realización geométrica. Recordemos que $|K|$ es la realización geométrica de un complejo simplicial K.

Si K es un G-complejo, $|K|$ es un G-espacio y $|K|/G$ es su espacio de órbitas. Hay una estructura celular inducida en $|K|/G$ que lo hace un CW-complejo. Esta estructura podría no ser una triangulación para $|K|/G$ como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.2. Sea X el modelo finito minimal de $\mathbb{S}^1$ de 4 puntos. Ver Figura 2.1.

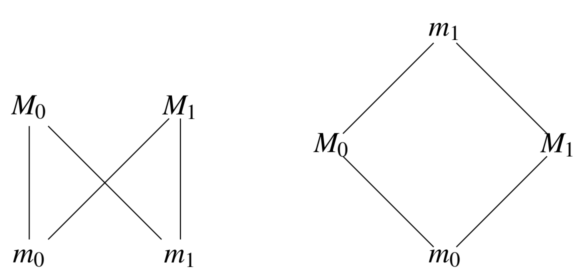

Figura 2.1: Poset X (izquierda) y complejo $\mathcal{K}(X)$ (derecha).

El grupo cíclico C_2 actúa en X intercambiando los elementos maximales y los elementos minimales. La acción inducida sobre $|\mathcal{K}(X)|$ es la acción antipodal en $\mathbb{S}^1$. La estructura celular inducida en $|\mathcal{K}(X)|/C_2$ tiene dos 0-celdas y dos 1-celdas, y no es una triangulación. Ver Figura 2.2.

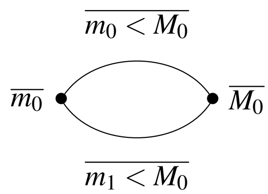

Figura 2.2: Estructura celular heredada en $|\mathcal{K}(X)|/C_2$.

Si K es un G-complejo, hay un morfismo simplicial $K \to K/G$ que lleva un vértice $v \in K$ a su órbita $\overline{v} \in K/G$. La siguiente proposición dice que para un G-complejo regular K, K/G da una triangulación para $|K|/G$ (ver [Bre72, p.117]).

Proposición 2.2.3. *Si K es un G-complejo regular, entonces hay un homeomorfismo $\varphi_K : |K|/G \to |K/G|$ inducido por el cociente $|K| \to |K|/G$.*

En general, hay una función inducida $\varphi_K : |K|/G \to |K/G|$ definida por

$$\varphi_K\left(\overline{\sum_i t_i v_i}\right) = \sum_i t_i \overline{v_i}.$$

Esta función es continua y sobreyectiva pero podría no ser inyectiva.

Sea X un G-poset finito. Estamos interesados en estudiar las relaciones entre los diferentes espacios de órbitas $\mathcal{K}(X/G)$, $\mathcal{K}(X)/G$ y $|\mathcal{K}(X)|/G$.

Ejemplo 2.2.4. Sea X el poset del Ejemplo 2.2.2 con $G = C_2$. Entonces $X/G = \{\overline{m_0}, \overline{M_0}\}$ y $\overline{m_0} < \overline{M_0}$. En particular es un espacio finito contráctil. El complejo $\mathcal{K}(X)/G$ tiene dos vértices $\overline{m_0}$, $\overline{M_0}$ y un único 1-símplex $\{\overline{m_0}, \overline{M_0}\}$. Por lo tanto $\mathcal{K}(X)/G$ es contráctil. Dado que $|\mathcal{K}(X)|/G \equiv \mathbb{S}^1$ no es contráctil, en general $|K|/G$ y $|K/G|$ no tienen el mismo tipo homotópico.

Es inmediato de la definición que $\mathcal{K}(X/G) = \mathcal{K}(X)/G$ cuando X es un G-poset finito.

Proposición 2.2.5. *Sea X un G-poset. Entonces $\mathcal{K}(X)/G$ es exactamente el complejo simplicial $\mathcal{K}(X/G)$.*

Es fácil ver que la función de McCord (ver Teorema 1.2.2) es equivariante e induce una función continua en los espacios de órbita $\hat{\mu}_X : |\mathcal{K}(X)|/G \to X/G$. Podemos deducir la siguiente proposición.

Proposición 2.2.6. *Si X es un G-poset, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
|\mathcal{K}(X)|/G \arrow[r, "\hat{\mu}_X"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{K}(X)}"] & X/G \\
|\mathcal{K}(X)/G| \arrow[r, equal] & |\mathcal{K}(X/G)| \arrow[u, "\approx"', "\mu_{X/G}"]
\end{tikzcd}$$

donde $\approx$ significa equivalencia débil. En particular, si $\varphi_{\mathcal{K}(X)}$ es un homeomorfismo, $\hat{\mu}_X$ es una equivalencia débil.

Para un complejo simplicial K, sea $h : |K'| \to |K|$ el homeomorfismo definido por mandar un símplex a su baricentro. Si K es un G-complejo, entonces K' lo es y h es una función equivariante. En particular $\hat{h} : |K'|/G \to |K|/G$ es un homeomorfismo.

Sea X un G-poset y sea $K = \mathcal{K}(X)$. El siguiente diagrama conmutativo muestra la relación entre las diferentes funciones involucradas.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d] & {|K'|} \arrow[l, "\mu_{X'}", "\approx"'] \arrow[r, "h", "\equiv"'] \arrow[d] & {|K|} \arrow[r, "\mu_X", "\approx"'] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
X'/G \arrow[ddd, bend right, "\alpha"'] & {|K'|/G} \arrow[l, "\hat{\mu}_{X'}", "\approx"'] \arrow[r, "\hat{h}", "\equiv"'] \arrow[d, "\varphi_{K'}", "\equiv"'] & {|K|/G} \arrow[r, "\hat{\mu}_X"] \arrow[d, "\varphi_K"] & X/G \\
{|\mathcal{K}(X'/G)|} \arrow[u, "\mu_{X'/G}"', "\approx"] \arrow[r, equal] & {|K'/G|} & {|K/G|} \arrow[r, equal] & {|\mathcal{K}(X/G)|} \arrow[u, "\mu_{X/G}"', "\approx"] \\
(X/G)' & & {|\mathcal{K}((X/G)')|} \arrow[ll, "\mu_{(X/G)'}", "\approx"'] \arrow[r, equal] & {|\mathcal{K}(X/G)'|} \arrow[u, "h"', "\equiv"]
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Usamos el símbolo $\equiv$ para denotar un homeomorfismo.

Por la Proposición 2.2.1, K' es regular y $\varphi_{K'} : |K'|/G \to |K'/G|$ es un homeomorfismo. En particular, $\hat{h} \circ \varphi_{K'}^{-1} : |K'/G| \to |K|/G$ da una triangulación canónica para $|K|/G$.

En el diagrama hemos incluido la función $\alpha : X'/G \to (X/G)'$ definida por

$$\alpha(\overline{(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)}) = (\overline{x_0} < \overline{x_1} < \ldots < \overline{x_n}).$$

La siguiente proposición muestra que, de cierta manera, α es la versión de espacios finitos de la función $\varphi_K : |K|/G \to |K/G|$.

Proposición 2.2.7. *El morfismo α es inyectivo si y solo si X satisface la propiedad (B) en G. Además, si α es inyectivo entonces es un isomorfismo de posets.*

Demostración. Ver [Pit19, Proposition 2.9]. □

Deducimos los siguientes corolarios.

Corolario 2.2.8. *Si X es un G-poset, para todo $n \neq 1$ hay un isomorfismo de posets $X^{(n)}/G \equiv (X'/G)^{(n-1)}$. Si X es regular, $X^{(n)}/G \equiv (X/G)^{(n)}$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{K}(X)' = \mathcal{K}(X')$ es un G-complejo regular por la Proposición 2.2.1, se sigue por definición que $X^{(n)}$ es regular para todo $n \geq 1$. Asumamos que $n \geq 2$. Por la proposición previa, $X^{(n)}/G \equiv (X^{(n-1)}/G)'$, y por inducción, $X^{(n-1)}/G \equiv (X'/G)^{(n-2)}$. Luego, $X^{(n)}/G \equiv ((X'/G)^{(n-2)})' \equiv (X'/G)^{(n-1)}$.

Si X es regular, entonces $X'/G \equiv (X/G)'$ y $X^{(n)}/G \equiv (X'/G)^{(n-1)} \equiv (X/G)^{(n)}$ para $n \geq 0$. □

Corolario 2.2.9. *Para un G-poset X y $n \geq 1$, $X^{(n)}/G$ es contráctil si y solo si X'/G es contráctil. Si X es regular, $X^{(n)}/G$ es contráctil si y solo si X/G es contráctil.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior y del Teorema 1.2.13. □

Consideremos la acción de G por conjugación a derecha en los posets de p-subgrupos. Esto es, $A^g = g^{-1}Ag$ para $A \leq G$ y $g \in G$. El siguiente ejemplo tomado de [Smi11, Example 3.2.9] muestra que $\mathcal{S}_p(G)$ podría no ser regular.

Ejemplo 2.2.10. Sea $G = \mathbb{S}_4$, el grupo simétrico en cuatro letras, y sea $X = \mathcal{S}_2(G)$. Un 2-subgrupo de Sylow de G es $S = \langle (1\,3), (1\,2\,3\,4) \rangle \cong D_8$. Los elementos $(1\,3)(2\,4)$ y $(1\,2)(3\,4)$ pertenecen a S y son conjugados vía $(2\,3) \in G$. De esta manera, tenemos dos subgrupos diferentes $Q_1 = \langle (1\,3)(2\,4) \rangle$ y $Q_2 = \langle (1\,2)(3\,4) \rangle$ que determinan el mismo punto en X/G.

Tomemos las cadenas $(Q_1 < S)$ y $(Q_2 < S)$. Afirmamos que tienen diferentes órbitas. Dado que $Z(S) = Q_1$, si $(Q_1 < S)^g = (Q_2 < S)$, entonces $g \in N_G(S) \leq N_G(Z(S)) = N_G(Q_1)$ y $Q_2 = Q_1^g = Q_1$, una contradicción.

2.3. Reformulación de la conjetura de Webb y una conjetura más fuerte

En [Web87] P. Webb conjeturó que $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$ es contráctil. Desde la primera demostración de la conjetura dada por P. Symonds (ver [Sym98]), han habido varias demostraciones y generalizaciones de esta conjetura involucrando sistemas de fusión y teoría de Morse (ver [Bux99, Gro16, Lib08, Lin09]). En todos estos artículos, los autores trabajan con el tipo homotópico del espacio de órbitas $|K|/G$, donde K es un complejo simplicial G-homotópicamente equivalente a $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$. Por ejemplo, Symonds y Bux probaron que $|\mathcal{R}_p(G)|/G$ es contráctil.

Usando los resultados de la sección anterior, podemos reformular la conjetura de Webb en términos de espacios finitos.

Proposición 2.3.1 (Webb's conjecture)**.** *Si $K \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es un subcomplejo G-invariante que es G-homotópicamente equivalente a $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, el espacio finito $\mathcal{X}(K)/G$ es homotópicamente trivial. En particular, esto vale para $K \in \{\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G)), \mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G)), \mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G)), \mathcal{R}_p(G)\}$.*

Demostración. Se sigue del teorema de Symonds [Sym98] y el Diagrama 2.1. Ver también [Pit19, Proposition 3.1]. □

En el contexto de espacios finitos, ser contráctil es estríctamente más fuerte que ser homotópicamente trivial. Así, podríamos preguntarnos si $\mathcal{X}(K)/G$ es de hecho contráctil cuando K

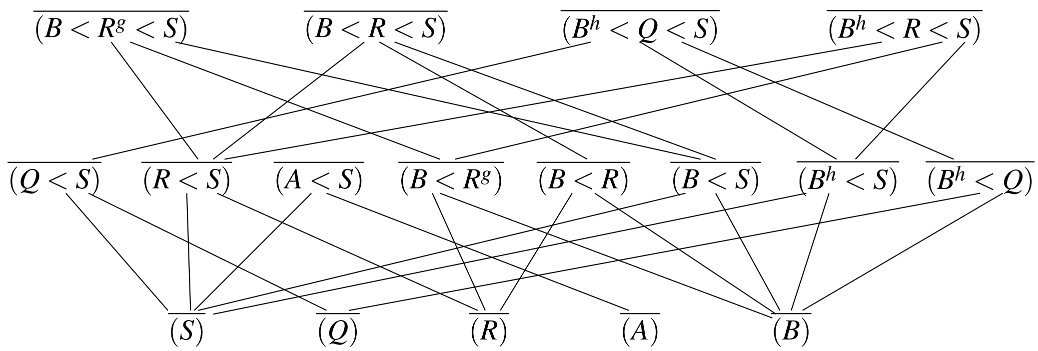

Figura 2.3: Espacio finito $\mathcal{B}_p(G)'/G$.

es uno de los complejos simpliciales $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$, $\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))$ o $\mathcal{R}_p(G)$. El siguiente ejemplo muestra que esto falla para $K=\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ y $K=\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))$.

Ejemplo 2.3.2. Si $G=\mathbb{A}_6$ o $\mathrm{PSL}_2(7)$ y $p=2$, entonces $\mathcal{S}_p(G)'/G$ no es un espacio finito contráctil. Estos ejemplos fueron testeados con GAP. En la Proposición 2.5.10 mostramos que $G=\mathrm{PSL}_2(7)$ con $p=2$ es la configuración más chica para la cual $\mathcal{S}_p(G)'/G$ no es contráctil.

En general, el poset $\mathcal{B}_p(G)'/G$ no es contráctil pero el ejemplo es mucho más grande que el de $\mathcal{S}_p(G)$.

Ejemplo 2.3.3. Sea G el grupo transitivo de grado 26 y número 92 en la librería de grupos transitivos de GAP. Este grupo puede describirse como un producto semidirecto de una extensión no-split de $\mathrm{PSL}_2(5^2)$ por C_2, por C_2, es decir $G\simeq(\mathrm{PSL}_2(5^2)\cdot C_2):C_2$. Aquí el punto denota extensión no-split. Su orden es $|G|=2^5{,}3{,}5^2{,}13=31200$.

Hemos computado el poset $\mathcal{B}_p(G)'/G$ usando el paquete [FPSC19] en GAP. Fijemos $S\in\mathrm{Syl}_p(G)$. Entonces $\mathcal{B}_p(G)/G=\{\overline{S},\overline{Q},\overline{R},\overline{A},\overline{B}\}$ con $A,B,R,Q\leq S$ p-subgrupos radicales de G dentro de S. Para ciertos $g,h\in G$, tenemos que $R\neq R^g$, $B\neq B^h$ y $R^g,B^h\leq S$. Ver Figura 2.3 para el diagrama de Hasse del poset.

El espacio finito $\mathcal{B}_p(G)'/G$ no es contráctil dado que su core tiene más de un elemento. Por ejemplo, podemos realizar las siguientes extracciones de beat points $\overline{(Q<S)}$, $\overline{(B<R)}$, $\overline{(B^h<Q)}$, $\overline{(A)}$, $\overline{(Q)}$, $\overline{(A<S)}$, $\overline{(B^h<Q<S)}$, $\overline{(B^h<S)}$. Esto lleva al core de $\mathcal{B}_p(G)'/G$ (ver Figura 2.4), el cual tiene más de un punto.

Hasta ahora no hemos encontrado ningún ejemplo donde el poset $\mathcal{A}_p(G)'/G$ no sea contráctil. Recordemos que la conjetura de Webb acierta que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es un espacio finito homotópicamente trivial (ver Proposición 2.3.1). En la Sección 2.5 probamos algunos casos particulares para los cuales $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil usando herramientas de fusión y de espacios finitos. Creemos que esta propiedad más fuerte vale en general.

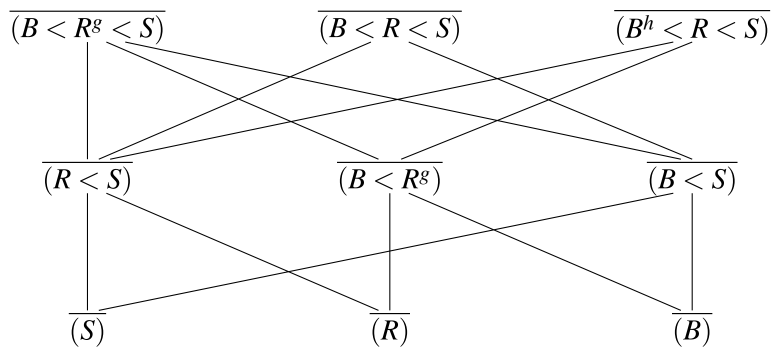

Figura 2.4: Core del espacio finito $\mathcal{B}_p(G)'/G$.

Conjetura 2.3.4. *El poset $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil.*

Observación 2.3.5. Por el Corolario 2.2.8, para un poset de p-subgrupos X, el tipo homotópico (como espacio finito) de $X^{(n)}/G$ está determinado por X'/G. Más aún, por el Corolario 2.2.9, X'/G es contráctil si y solo si $X^{(n)}/G$ es contráctil para algún $n \geq 1$.

Cuando tratamos de probar que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil, surge el problema de cómo controlar la fusión de las cadenas de p-subgrupos elementales abelianos. Esto nos motivó a trabajar con el poset $X_p(G)$ en el cual es fácil controlar la fusión de sus cadenas. Recordemos que $X_p(G)$ consiste de los p-subgrupos no triviales $Q \leq G$ que son normalizados por los p-subgrupos de Sylow que lo contienen. Esto es,

$$X_p(G) = \{Q \in \mathcal{S}_p(G) \,:\, Q \trianglelefteq S \text{ para todo } S \in \mathrm{Syl}_p(G) \text{ tal que } Q \leq S\}.$$

En general, el subposet $X_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ no es débilmente equivalente a $\mathcal{S}_p(G)$ (ver Ejemplo 1.3.8).

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de los teoremas de Sylow.

Proposición 2.3.6. *El poset $X_p(G)'/G$ es cónicamente contráctil.*

Demostración. Fijemos $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Si $c \in X_p(G)'$ es una cadena cuyos elementos son subgrupos de S, entonces $c \cup (S) \in X_p(G)'$. Tenemos las desigualdades:

$$\overline{c} \leq \overline{c \cup (S)} \geq \overline{(S)}$$

que serán una homotopía de espacios finitos luego de probar que la función $\overline{c} \mapsto \overline{c \cup (S)}$ no depende del representante elegido $c \in \mathcal{S}_p(S)' \cap X_p(G)'$.

Asumamos que $c, c^g \in \mathcal{S}_p(S)' \cap X_p(G)'$ y $c = (Q_0 < Q_1 < \ldots < Q_r)$. Entonces $S, S^g \leq N_G(Q_i^g)$ para todo i y S, S^g son p-subgrupos de Sylow de $\bigcap_i N_G(Q_i^g)$. Tomemos $h \in \bigcap_i N_G(Q_i^g)$ tal que $S = S^{gh}$. Luego $(c \cup (S))^{gh} = (c^{gh} \cup (S^{gh})) = (c^g \cup (S))$. $\square$

Ejemplo 2.3.7. Una ligera modificación de las ideas previas muestran que $\mathcal{N}/G$ es cónicamente contráctil, donde $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}_p(G)'$ es el subposet de cadenas $c \in \mathcal{S}_p(G)'$ tales que existe un p-subgrupo de Sylow S con $Q \trianglelefteq S$ para todo $Q \in c$. Podemos construir la homotopía de la misma manera que hicimos en la Proposición 2.3.6. Primero, fijemos un p-subgrupo de Sylow S. Para $c \in \mathcal{N}$, tomemos $g \in G$ con $Q^g \trianglelefteq S$ para todo $Q \in c$. Tenemos una homotopía bien definida $\overline{c} \leq \overline{c^g \cup (S)} \geq \overline{(S)}$ en $\mathcal{N}/G$ (cf. [Lib08, Theorem 3.2]).

2.4. Contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)/G$

Dado que G actúa transitivamente en los elementos maximales de $\mathcal{S}_p(G)$, el espacio de órbitas $\mathcal{S}_p(G)/G$ es contráctil porque tiene un máximo (la órbita de los p-subgrupos de Sylow). Además, la misma demostración muestra que el espacio de órbitas de cualquier subposet G-invariante de $\mathcal{S}_p(G)$ que contiene a los p-subgrupos de Sylow de G es contráctil. Por ejemplo, esto vale para los subposets $\mathcal{B}_p(G)$ y $X_p(G)$.

Por otro lado, G no actúa transitivamente en los elementos maximales de $\mathcal{A}_p(G)$ en general. De hecho, los elementos maximales de $\mathcal{A}_p(G)$ podrían tener diferentes órdenes. Luego no se puede deducir el tipo homotópico de $\mathcal{A}_p(G)/G$ de manera fácil como lo hacemos para $\mathcal{S}_p(G)/G$. Aún así, mostramos que $\mathcal{A}_p(G)/G$ es contráctil.

Teorema 2.4.1. *El poset $\mathcal{A}_p(G)/G$ es cónicamente contráctil.*

Demostración. Fijemos un p-subgrupo de Sylow $S \leq G$. Dado que toda órbita de $\mathcal{A}_p(G)/G$ puede ser representada por un elemento fully centralized dentro de S, podemos definir la siguiente homotopía: para $x \in \mathcal{A}_p(G)/G$, tomemos $A \in x$ tal que $A \leq S$ es fully centralized, y pongamos

$$x = \overline{A} \leq \overline{\Omega_1(Z(C_S(A)))} \geq \overline{\Omega_1(Z(S))}.$$

Vamos a probar que la función $x = \overline{A} \mapsto \overline{\Omega_1(Z(C_S(A)))}$ está bien definida, o sea no depende de la elección de A, y que preserva el orden. Luego de probar esto, dado que $\Omega_1(Z(S))$ siempre está contenido en los subgrupos de la forma $\Omega_1(Z(C_S(A)))$, el resultado se seguirá.

Buena definición: tomemos $A, B \in x$ ambos fully centralized contenidos en S. Tenemos que ver que existe $k \in G$ tal que $\Omega_1(Z(C_S(A)))^k = \Omega_1(Z(C_S(B)))$.

Como $\overline{A} = \overline{B}$, $B = A^g$ para algún $g \in G$. Observemos que $C_S(A) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(A))$ implica que $C_{S^g}(A^g) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(A^g))$. Dado que $C_S(A^g) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(A^g))$, existe $h \in C_G(A^g)$ tal que $C_S(A^g) = C_{S^g}(A^g)^h = C_S(A)^{gh}$. Luego, conjugar por gh induce un isomorfismo entre $C_S(A)$ y $C_S(A^g)$. Por otro lado, todo isomorfismo de grupos $H_1 \to H_2$ se restringe a un isomorfismo entre $\Omega_1(Z(H_1))$ y $\Omega_1(Z(H_2))$. En conclusión, debe ser que $\Omega_1(Z(C_S(A)))^{gh} = \Omega_1(Z(C_S(A^g)))$.

Preserva el orden: supongamos que $\overline{A} < \overline{B}$ con ambos $A, B \leq S$ fully centralized. Debemos ver que

$$\overline{\Omega_1(Z(C_S(A)))} \leq \overline{\Omega_1(Z(C_S(B)))}.$$

Como $\overline{A} < \overline{B}$, existe $g \in G$ tal que $A < B^g$. Sin embargo podría suceder que $B^g \not\leq S$. Vamos a solucionar este problema usando un truco que será usado repetidamente a lo largo de este capítulo. Dado que $C_S(A)$ es un p-subgrupo de Sylow de $C_G(A)$ y $B^g \leq C_G(A)$, existe $h \in C_G(A)$ tal que $B^{gh} \leq C_S(A)$. Más aún, podemos escoger h de manera que $B^{gh} \leq C_S(A)$ sea fully centralized en $C_G(A)$ con el p-subgrupo de Sylow $C_S(A)$. Esto significa que $C_{C_S(A)}(B^{gh})$ es un p-subgrupo de Sylow de $C_{C_G(A)}(B^{gh})$. Para $C_{C_S(A)}(B^{gh}) = C_S(B^{gh})$ y $C_{C_G(A)}(B^{gh}) = C_G(B^{gh})$. Por lo tanto $A \leq B^{gh}$ y $B^{gh} \leq S$ es fully centralized en G.

Ahora probamos que $\Omega_1(Z(C_S(A))) \leq \Omega_1(Z(C_S(B^{gh})))$. Si $x \in Z(C_S(A))$ tiene orden p y $C_S(B^{gh}) \leq C_S(A)$, entonces $[x, C_S(B^{gh})] \leq [x, C_S(A)] = 1$. Dado que $B^{gh} \leq C_S(B^{gh})$, concluimos que $x \in Z(C_S(B^{gh}))$. En consecuencia, por la buena definición obtenemos que

$$\Omega_1(Z(C_S(A))) \leq \Omega_1(Z(C_S(B^{gh}))) = \Omega_1(Z(C_S(B)))^k$$

para algún $k \in G$. □

Observación 2.4.2. La demostración del teorema anterior fue extraída de [Pit19, Theorem 4.3]. Allí, usamos el subgrupo $\Omega_1(Z(\Omega_1(C_S(A))))$ en lugar de $\Omega_1(Z(C_S(A)))$. La demostración es esencialmente la misma.

Observación 2.4.3. En la demostración previa usamos el hecho de que si $A \leq B$ son p-subgrupos elementales abelianos de G con $A \leq S$ fully centralized, entonces existe $h \in C_G(A)$ tal que $B^h \leq S$ es también fully centralized. Esto funciones porque tomar centralizadores invierte las inclusiones entre subgrupos.

El otro truco que usamos en la demostración es que siempre tomamos representantes de elementos de una órbita dentro de un p-subgrupo de Sylow fijo. Esto también será usado repetidamente.

Observación 2.4.4. Para $A \in \mathcal{A}_p(G)$, el subgrupo $\Omega_1(Z(\Omega_1(C_G(A))))$ es la intersección de todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales de G que contienen a A.

Sean $M_1, \ldots, M_r$ los p-subgrupos elementales abelianos maximales de G que contienen a A. Entonces $M_i \leq C_G(A)$ para todo i, y en particular $M_i \leq \Omega_1(C_G(A))$. Si $x \in \bigcap_i M_i$ y $z \in \Omega_1(C_G(A))$ tiene orden p, entonces el subgrupo $\langle A, z\rangle$ es elemental abeliano y por lo tanto está contenido en algún M_i. En particular, x y z conmutan. Esto prueba que $\bigcap_i M_i$ es un subgrupo de $\Omega_1(Z(\Omega_1(C_G(A))))$. Recíprocamente, si $y \in \Omega_1(Z(\Omega_1(C_G(A))))$, entonces y conmuta con M_i, y la maximalidad implica que $y \in M_i$ para todo i. Esto muestra que $\Omega_1(Z(\Omega_1(C_G(A)))) \leq \bigcap_i M_i$.

Observación 2.4.5. Tomemos $X \in \{\mathcal{A}_p(G), \mathcal{S}_p(G), \mathcal{B}_p(G)\}$. Si supiéramos que X es regular, entonces $X'/G \equiv (X/G)'$ sería contráctil por el Corolario 2.2.9. Sin embargo, esto podría no suceder como muestra el Ejemplo 2.2.10.

2.5. Contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)'/G$

Los Ejemplos 2.3.3 y 2.3.2 muestran que $\mathcal{B}_p(G)'/G$ y $\mathcal{S}_p(G)'/G$ podrían no ser contráctiles en general. Sin embargo, hemos conjeturado que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es siempre contráctil (ver Conjetura 2.3.4). En esta sección probamos algunos casos particulares de esta conjetura más fuerte. También mostramos varios casos para los cuales $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es contráctil y vemos que la falla a su contractibilidad surge de los grupos simples.

En la sección previa probamos que $\mathcal{A}_p(G)/G$ es contráctil usando un truco con los centralizadores. Este truco no se puede llevar a cabo en $\mathcal{S}_p(G)$ o $\mathcal{B}_p(G)$ porque no todo subgrupo en estos posets es abeliano. La siguiente proposición sugiere que esta propiedad de ser abelianos hace que las cosas funcionen (cf. Teorema 2.1.1).

Recordar del Teorema 1.3.9 que $\mathcal{A}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ es un retracto por deformación fuerte si y solo si $\Omega_1(S)$ es abeliano, para $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

Proposición 2.5.1. *Si $\mathcal{A}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ es un retracto por deformación fuerte, $\mathcal{A}_p(G)'/G$, $\mathcal{S}_p(G)'/G$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ son espacios finitos contráctiles. En particular, esto vale cuando los p-subgrupos de Sylow son abelianos.*

Demostración. La hipótesis implica que $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ es un retracto por deformación fuerte equivariante. Esto induce un retracto por deformación fuerte equivariante $\mathcal{A}_p(G)' \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)'$ y por lo tanto, $\mathcal{A}_p(G)'/G$ y $\mathcal{S}_p(G)'/G$ tienen el mismo tipo homotópico como espacios finitos. Por el Teorema 1.3.9, $\mathcal{A}_p(G)'/G \hookrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ es también una equivalencia homotópica. Por lo tanto, resta probar que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.

Fijemos $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Si $A \in \mathcal{A}_p(S)$ y $g \in G$ es tal que $A^g \leq S$, entonces $(A \cap \Omega_1(S))^g \leq A^g \leq \Omega_1(S)$. Luego, $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_S(N_G(\Omega_1(S)))$ por [AKO11, Corollary 4.7] (o sea $\Omega_1(S)$ es strongly closed, ver Observación 2.5.15). En particular $N_G(\Omega_1(S))$ controla la fusión en $\mathcal{A}_p(S)'$. El resultado se sigue del Teorema 2.5.13 con $O = \Omega_1(S)$. □

Proposición 2.5.2. *Si los p-subgrupos de Sylow de G son abelianos entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$, $\mathcal{S}_p(G)'/G$, $\mathcal{B}_p(G)'/G$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ son espacios finitos contráctiles.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.11, $\mathcal{B}_p(G)$ es un retracto por deformación fuerte equivariante de $\mathcal{S}_p(G)$. Luego $\mathcal{B}_p(G)'/G \subseteq \mathcal{S}_p(G)'/G$ es un retracto por deformación fuerte. El resultado se sigue de la Proposición 2.5.1. □

Observación 2.5.3. Si X es un G-poset contráctil, X' es contráctil por el Teorema 1.2.13 y así, su espacio de órbitas X'/G es contráctil por el Teorema 1.2.25. En particular tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.5.4. *Si $O_p(G) \neq 1$ los espacios finitos $\mathcal{S}_p(G)'/G$ y $\mathcal{B}_p(G)'/G$ son contráctiles.*

Demostración. Se sigue de la observación anterior y la Proposición 1.3.15. □

Observación 2.5.5. Por la Proposición 1.3.15, $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G)$ son contráctiles si y solo si $O_p(G) \neq 1$. Sin embargo, por el Ejemplo 1.3.17, podría ser que $O_p(G) \neq 1$ y que $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)'$ no sean contráctiles. Luego, a priori, no podemos deducir la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)'/G$ de la proposición anterior. Aún así, si $\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ lo es (ver Observación 2.5.3).

Similarmente a las Proposiciones 1.3.12 y 1.3.13, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 2.5.6 (cf. [Thé92]). *Si los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente o $|G| = p^\alpha q$ para q primo, entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$, $\mathcal{S}_p(G)'/G$, $\mathcal{B}_p(G)'/G$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ son espacios finitos contráctiles.*

Demostración. Por las Proposiciones 1.3.12 y 1.3.13, estos posets tiene el tipo homotópico equivariante de un espacio discreto en el que G actúa transitivamente. Luego sus espacios de órbitas son contráctiles. □

Observación 2.5.7. Se puede mostrar que el subgrupo $O_{p'}(G)$ no afecta la fusión de los p-subgrupos de G. Sea $\overline{G} = G/O_{p'}(G)$. En términos de sistemas de fusión, esto significa que la categoría $\mathcal{F}_S(G)$ es isomorfa a $\mathcal{F}_S(\overline{G})$ (ver [AKO11, Exercise 2.1]). En términos de espacios finitos, esto significa que, por ejemplo, $\mathcal{S}_p(G)'/G \equiv \mathcal{S}_p(\overline{G})/\overline{G}$ y $\mathcal{A}_p(G)'/G \equiv \mathcal{A}_p(\overline{G})'/\overline{G}$. Aquí, $\equiv$ denota isomorfismo de posets u homeomorfismo de espacios topológicos.

También tenemos que $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G \equiv \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(\overline{G}))/\overline{G}$, pero esto podría parecer menos claro. Fijemos un p-subgrupo de Sylow $S \leq G$. Podemos ver a $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ como el conjunto de clases de equivalencias de cadenas $(P_0 < \ldots < P_r) \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(S))$ con $(P_0 < \ldots < P_r) \sim (P_0 < \ldots < P_r)^g$ si $P_r^g \leq S$. Si $(P_0 < \ldots < P_r) \sim (P_0 < \ldots < P_r)^h$ y $h \in \overline{G}$, entonces para algún $g \in G$, $c_g|_{P_r} = c_h|_{P_r}$ (aquí, c_g es el morfismo de grupo inducido por conjugación por g a derecha). Luego $(P_0 < \ldots < P_r) \sim (P_0 < \ldots < P_r)^h = (P_0 < \ldots < P_r)^g$, y $(P_0 < \ldots < P_r)^h, (P_0 < \ldots < P_r) \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(S))$.

Esto homeomorfismo podría no valer para el poset de p-subgrupos radicales dado que el cociente $G \to \overline{G}$ podría enviar un p-subgrupo radical a un p-subgrupo no radical. Por ejemplo, sea G la extensión de un p-grupo elemental abeliano S de p-rango al menos 2 que actúa fielmente en un p'-grupo resoluble L. Entonces $\overline{G} \cong S$ es un p-grupo y $\mathcal{B}_p(\overline{G}) = \{S\}$. En consecuencia, $\mathcal{B}_p(\overline{G})'/\overline{G}$ consiste de un solo punto. Por otro lado, el poset $\mathcal{B}_p(G)$ tiene el tipo homotópico débil de un bouquet de esferas de dimensión $m_p(S) - 1 \geq 1$ por el Teorema 3.1.4. Dado que la acción de S en L es fiel, $\mathcal{B}_p(G)$ no es contráctil y tiene altura $m_p(S) - 1$. Así, $\mathcal{B}_p(G)'/G$ y $\mathcal{B}_p(\overline{G})'/\overline{G}$ no son homeomorfos pues tienen diferentes alturas.

Esta observación da lugar a la siguiente proposición. Recordemos que un grupo G es *p-constrained* si $C_G(S \cap O_{p',p}(G)) \leq O_{p',p}(G)$, con $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (ver Definición 1.1.7).

Proposición 2.5.8 (cf. [Thé92]). *Si $O_{p'}(G) < O_{p',p}(G)$ entonces $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es contráctil. En particular esto vale para grupos p-resolubles y, más en general para grupos p-constrained.*

Demostración. Todo grupo p-resoluble es p-constrained, y la condición $O_{p'}(G) < O_{p',p}(G)$ vale para grupos p-constrained.

Por la Observación 2.5.7, si $\overline{G} = G/O_{p'}(G)$, entonces $\mathcal{S}_p(G)'/G \equiv \mathcal{S}_p(\overline{G})'/\overline{G}$. Por la Proposición 2.5.4 $\mathcal{S}_p(\overline{G})'/\overline{G}$ es contráctil dado que $O_p(\overline{G}) = O_{p',p}(G)/O_{p'}(G) \neq 1$. □

Observación 2.5.9. La demostración anterior sugiere que la falla a la contractibilidad del poset $\mathcal{S}_p(G)'/G$ surge de las extensiones de grupos simples en el siguiente sentido.

Si $O_p(G) \neq 1$ o $O_{p'}(G) < O_{p',p}(G)$, entonces $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es contráctil. Por lo tanto, supongamos que $O_p(G) = 1 = O_{p'}(G)$ (ver Observación 2.5.7). Por la Observación 1.1.8, $F^*(G) = E(G) = L_1 \times \ldots \times L_n$ es el producto directo de grupos simples de orden divisible por p y $F^*(G) \leq G \leq \mathrm{Aut}(F^*(G))$. Luego G es una extensión de $L_1 \times \ldots \times L_n$ por algunos automorfismos externos de este producto directo de grupos simples.

La siguiente proposición muestra que de hecho, el ejemplo minimal para el que $\mathcal{S}_p(G)'/G$ no es contráctil es un grupo simple (ver Ejemplo 2.3.2).

Proposición 2.5.10. *Si (G,p), con p un primo que divide a $|G|$, es una configuración minimal para la que $\mathcal{S}_p(G)'/G$ no es contráctil, entonces $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ y $p = 2$.*

Demostración. Tomemos (G,p) una configuración minimal para la cual $\mathcal{S}_p(G)'/G$ no es contráctil. Por la observación anterior, $F^*(G) \leq G \leq \mathrm{Aut}(F^*(G))$ y $F^*(G)$ es un producto directo de grupos simples de orden divisible por p. Las configuraciones más chicas para $F^*(G)$ son $\mathbb{A}_5$, $\mathrm{PSL}_2(7)$ y $\mathbb{A}_6$, y $p = 2$. Por lo tanto, la primeras posibilidades son $(G,p) = (\mathbb{A}_5, 2)$, $(\mathbb{S}_5, 2)$ o $(\mathrm{PSL}_2(7), 2)$. Si $(G,p) = (\mathbb{A}_5, 2)$, entonces los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente y así $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es contráctil por la Proposición 2.5.6. Si $(G,p) = (\mathbb{S}_5, 2)$, analizando los p-subgrupos radicales de G se puede mostrar que $\mathrm{i}(\mathcal{S}_p(G)) = \mathcal{B}_p(G)$ y que este poset tiene altura 1. Por la Proposición 2.3.1 $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es homotópicamente trivial, y por la Observación 1.3.28 es homotópicamente equivalente a un poset de altura 1. Luego $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es contráctil. Por el Ejemplo 2.3.2, concluimos que $(G,p) = (\mathrm{PSL}_2(7), 2)$ es la configuración minimal. □

En el siguiente teorema resumimos los casos para los que $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil.

Teorema 2.5.11. *Sea G un grupo finito, p un primo que divide a $|G|$ y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. En los siguientes casos $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil:*

1. *$O_p(G/O_{p'}(G)) \neq 1$; en particular esto vale para grupos p-constrained (y por lo tanto para grupos p-resolubles) o si $O_p(G) \neq 1$ (Proposición 2.5.8),*

2. *$\Omega_1(S)$ es abeliano (Proposición 2.5.1),*

3. *$|G| = p^\alpha q$, con q primo (Proposición 2.5.6),*

4. *Los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente (Proposición 2.5.6),*

5. *Existe $1 \neq O \leq Z(S)$ tal que $N_G(O)$ controla la G-fusión en S (Observación 2.5.15).*

Ahora probamos algunos casos particulares de la Conjetura 2.3.4, que acierta que el espacio finito $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil. Recordemos que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es homotópicamente trivial por la Proposición 2.3.1. Algunas de las técnicas que usamos aquí para probar la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)'/G$ usan fuertemente el hecho de que estamos trabajando con cadenas de p-subgrupos elementales abelianos.

En el siguiente teorema recolectamos los resultados principales de este sección sobre la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)'/G$. Recordemos que $r_p(G) = \log_p(|G|_p)$.

Teorema 2.5.12. *Sea G un grupo finito, p un primo que divide a su orden, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $\Omega = \Omega_1(Z(S))$. En los siguientes casos $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil:*

1. *$\Omega_1(S)$ es abeliano (Proposición 2.5.1),*

2. *$\mathcal{A}_p(G)$ es contráctil (Observación 2.5.5),*

3. *$|G| = p^\alpha q$, con q primo (Proposición 2.5.6),*

4. *Los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente (Proposición 2.5.6),*

5. *La fusión de los p-subgrupos elementales abelianos de S está controlada por $N_G(O)$ para algún $1 \neq O \leq \Omega_1(Z(\Omega_1(S)))$ (Teorema 2.5.13),*

6. *$m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 1$ (Teorema 2.5.19),*

7. *$m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$ y $m_p(G) \geq r_p(G) - 1$ (Teorema 2.5.27),*

8. *$r_p(G) \leq 4$ (Corolario 2.5.28),*

9. *$G = M_{11}$, M_{12}, M_{22}, J_1, J_2, HS, o p es impar y G es cualquier grupo de Mathieu, grupo de Janko, He, O'N, o Ru, o $p = 5$ y $G = Co_1$ (ver Corolarios 2.5.30 y 2.5.31 y la discusión debajo de éstos),*

10. *$\mathcal{A}_p(G)$ es disconexo (Teorema 2.5.29).*

De ahora en adelante, fijemos un p-subgrupo de Sylow $S \leq G$ y sea $\Omega = \Omega_1(Z(S))$ el subgrupo generado por los elementos centrales en S de orden p. Usaremos este subgrupo para construir homotopías y extraer beat points. Notar que $m_p(G) = m_p(S)$, y si $H \leq G$ entonces $m_p(H) \leq m_p(G)$.

Vamos a trabajar con órbitas de cadenas $\overline{c} \in \mathcal{A}_p(G)'/G$ y siempre asumiremos que c es un representante de su órbita elegido dentro de $\mathcal{A}_p(S)'$.

El siguiente teorema muestra que si requerimos que el normalizador de un subgrupo no trivial $O \leq \Omega_1(Z(\Omega_1(S)))$ controle la fusión en los p-subgrupos elementales abelianos de S, entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil. Dado que $N_G(S) \leq N_G(\Omega)$, esta condición se satisface si $N_G(S)$ controla fusión en los p-subgrupos de S. En tal caso G se dice que es *p-Goldschmidt*.

Teorema 2.5.13. *Asuma que $N_G(O)$ controla la fusión de los subgrupos en $\mathcal{A}_p(S)$, donde $O \in \mathcal{A}_p(S)$ conmuta con todo p-subgrupo elemental abeliano de S (es decir $O \leq Z(\Omega_1(S))$). Entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

En particular, si $O = \Omega$, y dado que $S \leq N_G(S) \leq N_G(\Omega)$, la hipótesis vale si $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_S(S)$ (es decir G es p-nilpotente), $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_S(N_G(S))$ (es decir G es p-Goldschmidt) o $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_S(N_G(\Omega))$.

Demostración. Construimos una homotopía en $\mathcal{A}_p(G)'/G$ entre la identidad y una función constante.

Para cada $i \in \{1, \ldots, r_p(G)\}$, sean $f, f_i, g_i : \mathcal{A}_p(G)'/G \to \mathcal{A}_p(G)'/G$ las funciones definidas como sigue:

$$f_i(\overline{(A_0 < \ldots < A_n)}) = \overline{\{A_j \,:\, |A_j| \leq p^i\} \cup \{A_jO \,:\, |A_j| \geq p^i\}}$$

$$g_i(\overline{(A_0 < \ldots < A_n)}) = \overline{\{A_j \,:\, |A_j| < p^i\} \cup \{A_jO \,:\, |A_j| \geq p^i\}}$$

$$f(\overline{(A_0 < \ldots < A_n)}) = \overline{(O \leq OA_0 < \ldots < OA_n)}$$

donde los representantes están escogidos dentro de $\mathcal{A}_p(S)'$.

Debemos chequear que están bien definidas. Supongamos que $(A_0 < \ldots < A_n)$, $(A_0 < \ldots < A_n)^g \in \mathcal{A}_p(S)'$. Por hipótesis, existe $h \in N_G(O)$ tal que $c_h|_{A_n} = c_g|_{A_n}$. Por lo tanto, $(A_0 < \ldots < A_n)^g = (A_0 < \ldots < A_n)^h$ y $(A_0O \leq \ldots \leq A_nO)^h = (A_0^gO \leq \ldots \leq A_n^gO)$. Esto muestra que f_i, g_i y f están bien definidas. Claramente todas ellas preservan el orden. Finalmente, $f_i \geq g_i \leq f_{i-1}$ para todo i, $f_{m_p(G)+1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_p(G)'/G}$, y $g_1(x) \leq f(x) \geq \overline{(O)}$ para todo $x \in \mathcal{A}_p(G)'/G$. □

Observación 2.5.14. En las hipótesis del Teorema 2.5.13, si $O^g \leq S$, entonces existe $h \in N_G(O)$ tal que $c_h|_O = c_g|_O : O \to O^g$. Por lo tanto, $O = O^g$ y O es el único conjugado a él mismo que está dentro de S. En este caso O es denominado *weakly closed* en $\mathcal{F}_S(G)$.

Observación 2.5.15. El Teorema 2.5.13 se puede generalizar para probar la contractibilidad de los otros posets $\mathcal{S}_p(G)'/G$, $\mathcal{B}_p(G)'/G$ y $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ cuando existe un subgrupo análogo a O cuyo normalizador controla la fusión en los elementos del poset de p-subgrupos correspondiente. Por ejemplo, si para algún $1 \neq O \leq Z(S)$, $N_G(O)$ controla la fusión en S, entonces $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$ y $\mathcal{S}_p(G)'/G$ son contráctiles. La demostración funciona de la misma manera que para $\mathcal{A}_p(G)'/G$ pero tomando las cadenas en los posets correspondientes. Más aún, la hipótesis significa que cada morfismo de conjugación $\varphi : R \to P$ entre subgrupos $P, R \leq S$ se extiende a un morfismo $\Phi : RO \to PO$ con $\Phi(O) = O$ y $\Phi|_R = \varphi$.

Esta condición puede ser traducida a un sistema de fusión general. Ésta es equivalente a pedir que $\mathcal{F} = N_{\mathcal{F}}(O)$, donde $N_{\mathcal{F}}(O)$ es la categoría normalizadora para O. Para $Q \leq S$, el normalizador de Q en $\mathcal{F}$ es la categoría $N_{\mathcal{F}}(Q)$ con elementos los subgrupos de $N_S(Q)$ y morfismos $\varphi : R \to P$ en $\mathcal{F}$, con $R, P \leq N_S(Q)$, tales que existe $\Phi : RQ \to PQ$ en $\mathcal{F}$ con $\Phi(Q) = Q$ y $\Phi|_R = \varphi$. Cuando Q es fully $\mathcal{F}$-normalized, $N_{\mathcal{F}}(Q)$ es un sistema de fusión sobre $N_S(Q)$, y si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$, entonces $N_{\mathcal{F}}(Q) = \mathcal{F}_{N_S(Q)}(N_G(Q))$.

Dado que O es un subgrupo normal abeliano de S, $\mathcal{F} = N_{\mathcal{F}}(O)$ si y solo si para cualquier subgrupo $R \leq S$ y morfismo $\varphi : R \to S$ tenemos que $\varphi(R \cap O) \subseteq O$ (ver [AKO11, Corollary 4.7]). En este caso O se denomina *strongly closed en $\mathcal{F}$*.

Observación 2.5.16. La Proposición 2.5.8 muestra que $\mathcal{S}_p(G)'/G$ es contráctil cuando G es p-resoluble. La conclusión análoga para $\mathcal{A}_p(G)'/G$ no es inmediata dado que $O_p(G) \neq 1$ no implica que $\mathcal{A}_p(G)$ sea contráctil.

Los siguientes teoremas se centran en el estudio de la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)'/G$ cuando la diferencia entre el p-rango de G y el p-rango de $Z(S)$ es pequeño. Podemos interpretar la diferencia $m_p(G) - m_p(\Omega)$, que depende solo del p-subgrupo de Sylow S y su centro, como una medida de cuántos elementos no centrales de orden p en S hay. Por ejemplo, si $m_p(G) - m_p(\Omega) = 0$ entonces $\Omega_1(S) = \Omega_1(Z(S))$, es decir, todos los elementos de orden p en S son centrales en S.

Probaremos primero el caso $m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 1$. Luego, probaremos algunos casos particulares de la conjetura fuerte cuando $m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 2$. En particular deduciremos la contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)'/G$ cuando $|S| \leq p^4$ y para algunos grupos espóradicos.

Las demostraciones de estos teoremas fueron extraídas de [Pit19].

Primero, necesitamos una herramienta básica de la teoría de fusión de grupos: el Teorema de Fusión de Alperin. Solo necesitamos una versión más débil del teorema, la cual dice que podemos controlar la fusión dentro de un p-subgrupo de Sylow fijo vía los normalizadores de sus subgrupos no triviales.

Teorema 2.5.17. *Sea $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y supongamos que $A, A^g \leq G$. Entonces existen subgrupos $Q_1, \ldots, Q_n \leq S$ y elementos $g_i \in N_G(Q_i)$ tales que:*

1. $A^{g_1 \cdots g_{i-1}} \leq Q_i$ *para* $1 \leq i \leq n$,
2. $c_g|_A = c_{g_1 \ldots g_n}|_A$.

En particular, $A^g = A^{g_1 \cdots g_n}$.

Una versión más general de este teorema acierta que podemos suponer que los Q_is son subgrupos *esenciales* de S o incluso S. Para más detalles ver [AKO11, Part I, Theorem 3.5].

Observación 2.5.18. Si $A \in \mathcal{A}_p(S)$ es un p-subgrupo elemental abeliano maximal de S, entonces $\Omega \leq A$. Luego Ω está contenido en la intersección de todos los p-subgrupos elementales abelianos maximales de S.

Teorema 2.5.19. *Si $m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 1$, el espacio finito $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

Demostración. El caso $m_p(G) = m_p(\Omega)$ vale por la Proposición 2.5.1 dado que $\Omega_1(S)$ es abeliano. Luego podemos asumir que $m_p(G) - m_p(\Omega) = 1$. Así, si $A \in \mathcal{A}_p(S)$, entonces $A\Omega \in \mathcal{A}_p(S)$ es maximal cuando $\Omega \not\leq A$ y $A \not\leq \Omega$.

Considerar el conjunto $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A}_p(S) : A \text{ es fc}, \Omega \not\leq A \text{ y } \overline{A} \not\leq \overline{\Omega}\}$. La condición $\overline{A} \leq \overline{\Omega}$ es equivalente a $A \leq \Omega$ para $A \in \mathcal{A}_p(S)$ fc. Si $A \in \mathcal{A}_p(S)$ es fully centralized y $\overline{A} \leq \overline{\Omega}$, entonces $A^g \leq \Omega$ para algún $g \in G$. Por lo tanto, $|C_S(A)| \geq |C_S(A^g)| = |S|$ y así, $C_S(A) = S$, es decir $A \leq \Omega$. En consecuencia, $\mathcal{A}$ no contiene elementos maximales de $\mathcal{A}_p(S)$, ni subgrupos centrales de S, y $A\Omega$ es maximal si $A \in \mathcal{A}$. Más aún, si un elemento maximal $B \in \mathcal{A}_p(S)$ que contiene a A también contiene a Ω, entonces $B = A\Omega$.

Tomemos representantes de las clases de conjugación $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ tales que si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\overline{A} = \overline{A_i}$ para algún i, y $\overline{A_i} < \overline{A_j}$ implica $j < i$. Probaremos primero que el subposet de órbitas de cadenas $\overline{c}$ tales que $\overline{(A_i)} \not\leq \overline{c}$ para todo i es un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{A}_p(G)'/G$. Para hacer esto, asumiendo que hemos extraído todas las órbitas de cadenas que contienen $\overline{(A_j)}$ para $j < i$, extraemos primero todas las órbitas que contienen a $\overline{(A_i)}$ pero no a $\overline{(A_i\Omega)}$. Luego extraeremos aquellas órbitas que contienen a $\overline{(A_i)}$ y $\overline{(A_i\Omega)}$ simultáneamente.

Para cada $1 \leq i \leq k$, sea $\mathcal{P}_i = \{\overline{c} \in \mathcal{A}_p(G)'/G : \overline{(A_j)} \not\leq \overline{c} \text{ para } j \leq i\}$. Asumamos que hemos mostrado que $\mathcal{P}_{i-1} \subseteq \mathcal{A}_p(G)'/G$ es un retracto por deformación fuerte. Probaremos que $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{i-1}$ es un retracto por deformación fuerte. Sea $A = A_i$. Supongamos que hemos extraído todas las posibles órbitas $\overline{c}$ tales que $\overline{(A)} \leq \overline{c}$ pero $\overline{(A\Omega)} \not\leq \overline{c}$ como up beat points. Si una de ellas todavía queda, tomemos una maximal, digamos $\overline{c}$.

Notar que $\overline{c \cup (A\Omega)}$ no fue extraída porque $\overline{A\Omega} \neq \overline{A_j}$ para todo j. Afirmamos que $\overline{c}$ es un up beat point cubierto por $\overline{c \cup (A\Omega)}$. Sea $c = (B_1 < \ldots < B_s < A)$, donde s podría ser 0. La cadena c tiene a A como el elemento más grande dado que todo elemento maximal que contiene a A tiene la forma $A\Omega$. Más aún, si $B \in c$ es fully centralized con $A < B \leq A\Omega$, entonces $\Omega \leq B$ o $B \leq \Omega$, pues $\overline{B} \neq \overline{A_j}$ para todo j. Como $A \not\leq \Omega$, $\Omega \leq B$ y en consecuencia $B = A\Omega$. Sea $d = c \cup (A\Omega) = (B_1 < \ldots < B_s < A < A\Omega)$. Si $\overline{c} \prec \overline{d'}$, el representante d' puede elegirse para que tenga la forma $d' = (B_1 < \ldots < B_s < A < (A\Omega)^g)$ por maximalidad de $\overline{c}$. También podemos asumir que $(A\Omega)^g \leq S$ pues A es fully centralized (ver Observación 2.4.3). Dado que $(A\Omega)^g \in \mathcal{A}_p(S)$ es maximal y contiene tanto a A como a Ω, tenemos que $A\Omega = (A\Omega)^g$. Por lo tanto $\overline{d} = \overline{d'}$ y $\overline{c}$ es un up beat point cubierto por $\overline{d}$.

Hemos probado que el subposet $\mathcal{P}_i \cup \mathcal{D}_i$, donde $\mathcal{D}_i = \{\overline{c} \in \mathcal{P}_{i-1} : \overline{(A)}, \overline{(A\Omega)} \leq \overline{c}\}$, es un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{P}_{i-1}$. Notar que $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{D}_i = \varnothing$.

Definamos una función $r : \mathcal{P}_i \cup \mathcal{D}_i \to \mathcal{P}_i$ de la siguiente manera. Sea $r(\overline{c}) = \overline{c - \{(A)\}}$ si $\overline{c} \in \mathcal{D}_i$ y escojamos $c \in \mathcal{A}_p(S)'$ tal que $(A) \leq c$. Notar que si $(A) \leq c$ entonces $(A\Omega) \leq c$. Defina r que sea la identidad en $\mathcal{P}_i$. Es fácil ver que r está bien definida, preserva el orden y que $r(x) \leq x$ para todo $x \in \mathcal{P}_i \cup \mathcal{D}_i$.

Hemos mostrado que $\mathcal{P}_i$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{A}_p(G)'/G$, para todo

$1 \leq i \leq k$.

Los elementos de $\mathcal{P}_k$ tiene las siguientes posibles representaciones:

$$\overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega < B)} \tag{2.2}$$

$$\overline{(C_1 < \ldots < C_s < B)} \tag{2.3}$$

$$\overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega)} \tag{2.4}$$

$$\overline{(C_1 < \ldots < C_s)} \tag{2.5}$$

con $s \geq 0$ y $C_s < \Omega < B \leq S$. Para ver que este lista está completa, tomar $\overline{c} \in \mathcal{P}_k$ con $c \in \mathcal{A}_p(S)'$ y tal que todo $A \in c$ es fully centralized en S (ver Observación 2.4.3). Si $B \in c$ entonces $\Omega \leq B$ o $B \leq \Omega$, pues $\overline{(A_i)} \not\leq \overline{c}$ para todo i.

El objetivo es probar que la función que incluye a Ω entre los C_s's y los B's está bien definida y preserva el orden. Esto es, cada vez que $\overline{(C_1 < \ldots < C_s)} = \overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g)}$ se tiene $\overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega)} = \overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g < \Omega)}$, y análogamente con los elementos de la forma $\overline{(C_1 < \ldots < C_s < B)}$.

Como Ω es central en S, si $\Omega^g \leq S$es fully centralized entonces $\Omega^g = \Omega$. Luego, si C_s, $C_s^g \leq \Omega$ y $\overline{(C_1 < \ldots < C_s)} = \overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g)}$, los subgrupos C_s, C_s^g son fully centralized y

$$\begin{aligned}\overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega)} &= \overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g < \Omega^g)}\\ &= \overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g < \Omega^{gh})}\\ &= \overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g < \Omega)}.\end{aligned}$$

Dado que Ω^g podría no estar incluido en S, tomamos $h \in C_G(C_s^g)$ tal que $\Omega^{gh} \leq C_S(C_s^g) = S$ es fully centralized (ver demostración del Teorema 2.4.1 y Observación 2.4.3).

Para el otro caso, como antes, asumimos que

$$\overline{(C_1 < \ldots < C_s < B)} = \overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g < B^g)}$$

con $C_s < \Omega < B \leq S$ y $C_s^g < \Omega < B^g \leq S$. Conjugando por g^{-1} obtenemos

$$\overline{(C_1^g < \ldots < C_s^g < \Omega < B^g)} = \overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega^{g^{-1}} < B)}.$$

Tomemos $h \in C_G(C_s)$ tal que $\Omega^{g^{-1}h} \leq C_S(C_s) = S$ es fully centralized. Por lo tanto, $\Omega^{g^{-1}h} = \Omega$. Como B^h podría no ser un subgrupo de S, tomamos un $h' \in C_G(\Omega)$ tal que $B^{hh'} \leq S$. En particular, $h, h' \in C_G(C_s)$ y tenemos que probar que

$$\overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega < B)} = \overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega < B^{hh'})}$$

con $hh' \in C_G(C_s)$. Usamos el Teorema de Fusión de Alperin 2.5.17 dentro del grupo $C_G(C_s)$ con $B, B^{hh'} \leq S \in \mathrm{Syl}_p(C_G(C_s))$. Así, resta ver el caso $hh' \in N_{C_G(C_s)}(Q)$ donde $Q \leq S$ y $B, B^{hh'} \leq Q$.

Sea $k = hh'$. Si $k \in N_G(\Omega)$ ya estamos, por lo que suponemos que $\Omega \neq \Omega^k$. Observar que $\Omega, \Omega^k \leq B^k$. Como $\Omega \leq Z(Q)$, $\Omega^k \leq Z(Q^k) = Z(Q)$ y Ω^k conmuta con todo elemento de orden p en Q. En particular conmuta con B, y por la maximalidad de éste, $\Omega^k \leq B$. La condición $\Omega \neq \Omega^k$ implica $B = \Omega\Omega^k = B^k$ por un argumento de orden. En cualquier caso, hemos probado que

$$\overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega < B)} = \overline{(C_1 < \ldots < C_s < \Omega < B^k)}$$

como deseábamos.

Para completar la demostración, notemos que la función que incluye a Ω dentro de las órbita de cadenas $\overline{c}$ representadas como (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) preserva el orden y satisface

$$\overline{c} \leq \overline{c \cup (\Omega)} \geq \overline{(\Omega)}.$$

En consecuencia, $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil porque tiene un retracto por deformación fuerte que lo es. $\square$

Obtenemos los siguientes corolarios inmediatos (sin asumir la Proposición 2.3.1).

Corolario 2.5.20. *Si $\mathcal{A}_p(G)'/G$ tiene altura 1 (o sea $m_p(G) \leq 2$) entonces es un espacio finito contráctil.*

Corolario 2.5.21 (cf. [Thé92])**.** *Si los p-subgrupos de Sylow de G son cuaterniones generalizados o diedrales, entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

Demostración. En cualquier caso, $m_p(G) \leq 2$, y el resultado se sigue del Teorema 2.5.19. $\square$

Siguiendo las ideas del teorema anterior, nos enfocamos ahora en el caso $m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$. No probaremos este caso en general. Aún así, las técnicas que usamos aquí nos permiten probar que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil si $|G|_p \leq p^4$ o $r_p(G) \leq m_p(G) + 1$. Más aún, encontramos un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{A}_p(G)'/G$ que puede ser usado para probar su contractibilidad. Usamos nuevamente el Teorema de Fusión de Alperin 2.5.17.

Comenzamos con unos lemas preliminares.

Lema 2.5.22. *Sean G, p y S como antes. Si $C \leq S$ es fully centralized, $C\Omega \leq S$ es fully centralized y $C_S(C\Omega) = C_S(C)$.*

Demostración. Si $A, B \subseteq G$, entonces vale que $C_G(AB) = C_G(A) \cap C_G(B)$. De esta manera, $C_S(C\Omega) = C_S(C) \cap C_S(\Omega) = C_S(C)$ pues $\Omega \leq Z(S)$. Sea $g \in G$ tal que $(C\Omega)^g \leq S$. Entonces

$$|C_S((C\Omega)^g)| = |C_S(C^g) \cap C_S(\Omega^g)| \leq |C_S(C^g)| \leq |C_S(C)| = |C_S(C\Omega)|.$$

$\square$

Observación 2.5.23. Si $m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$, todo elemento maximal de $\mathcal{A}_p(S)$ tiene p-rango $m_p(G)$ o $m_p(G) - 1$.

Lema 2.5.24. *Sean G, p y S como antes. Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}_p(G)'/G$ el siguiente subposet.*

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{A}_p(G)'/G : \text{si } x = \overline{c}, \text{ con } c \in \mathcal{A}_p(S)', \text{ y } A \in c \text{ es fc, entonces } A \leq \Omega \text{ o } \Omega \leq A\}.$$

Si $m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 2$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}_p(G)'/G$ es un retracto por deformación fuerte.

Demostración. Si $m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 1$, entonces la demostración es similar a la del Teorema 2.5.19, por lo que podemos asumir que $m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$. Sea $r = m_p(G)$ y sea

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A}_p(S) : A \text{ es fc}, \Omega \nleq A \text{ y } \overline{A} \nleq \overline{\Omega}\}.$$

Claramente, $\mathcal{A} \cap \mathrm{Max}(\mathcal{A}_p(S)) = \varnothing$ y $\Omega^g \notin \mathcal{A}$ para cualquier $g \in G$.

Notar que $\mathcal{P}$ es el subposet de órbitas de cadenas que contienen a $\overline{(A)}$ para $A \in \mathcal{A}$. Queremos extraer los elementos que contienen $\overline{(A)}$ con $A \in \mathcal{A}$, como beat points.

Sea $\mathcal{P}_{r'} = \{\overline{c} \in \mathcal{A}_p(G)'/G : \overline{(A)} \nleq \overline{c}$ para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $m_p(A) \geq r' + 1\}$. Observar que $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_{r-1} = \mathcal{A}_p(G)'/G$. Inductivamente supongamos que hemos probados que $\mathcal{P}_{r'} \subseteq \mathcal{P}_{r'+1}$ es un retracto por deformación fuerte con $1 \leq r' \leq r - 1$. Mostraremos que $\mathcal{P}_{r'-1} \subseteq \mathcal{P}_{r'}$ es un retracto por deformación fuerte. Tomemos $A \in \mathcal{A}$ de p-rango r'. Entonces o bien $(A\Omega)^g \in \mathcal{A}$ para algún $g \in G$, o bien $(A\Omega)^g \notin \mathcal{A}$ para todo $g \in G$.

Caso 1: existe $g \in G$ con $(A\Omega)^g \in \mathcal{A}$. Luego, $(A\Omega)^g$ es fully centralized y no contiene a Ω. Como $m_p(\Omega) = r - 2$,

$$\begin{aligned}
m_p((A\Omega)^g\Omega) &= m_p((A\Omega)^g) + m_p(\Omega) - m_p((A\Omega)^g \cap \Omega) \\
&\geq m_p((A\Omega)^g) + m_p(\Omega) - (m_p(\Omega) - 1) \\
&= m_p(A\Omega) + 1 \\
&= m_p(A) + m_p(\Omega) - m_p(A \cap \Omega) + 1 \\
&\geq m_p(A) + (r - 2) - (m_p(A) - 1) + 1 \\
&= r
\end{aligned}$$

Esto es, $(A\Omega)^g\Omega \in \mathcal{A}_p(S)$ es maximal de p-rango r. Dado que $((A\Omega)^g\Omega)^{g^{-1}} \geq A$, existe $x \in C_G(A)$ tal que $((A\Omega)^g\Omega)^{g^{-1}x} \leq S$ es fully centralized. Por lo tanto tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
|C_S((A\Omega)^g\Omega)| = |C_S((A\Omega)^g)| = |C_S(A\Omega)| &= |C_S(A)| \\
&\geq |C_S(((A\Omega)^g\Omega)^{g^{-1}x})| \\
&\geq |C_S((A\Omega)^g\Omega)|
\end{aligned}$$

que son igualdades de hecho. Más aún, deducimos que $C_S(A) = C_S(((A\Omega)^g\Omega)^{g^{-1}x})$. Sea $D = ((A\Omega)^g\Omega)^{g^{-1}x}$. Notar que $D \in \mathcal{A}_p(S)$ es maximal debido a su rango. Así, $D = \Omega_1(C_S(D)) = \Omega_1(C_S(A))$ y hay un único elemento maximal sobre A.

Ahora tomemos cualquier órbita $\overline{c} \in \mathcal{P}_{r'}$ conteniendo $\overline{(A)}$. Si $\overline{(A < E)} \leq \overline{c}$, para algún $E \leq S$ con $m_p(A) < m_p(E) \leq r-1$, cambiando E por un conjugado, podemos asumir que $E \leq S$ es fully centralized. Luego $\overline{E} \notin \overline{\mathcal{A}}$ y esto implica $\Omega \leq E$, por lo que $E \geq A\Omega$. Como $m_p(A\Omega) \geq r-1$, tenemos la igualdad $E = A\Omega$, y esto es una contradicción. Por lo tanto ninguna órbita de cadena sobre $\overline{(A)}$ puede contener un elemento de rango entre $m_p(A)+1$ y $r-1$. En consecuencia, éstas cadenas tienen la forma $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A)}$ o $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < E)}$ con $E \in \mathcal{A}_p(S)$ maximal de rango r. Por el razonamiento anterior, $E = D$ y $\overline{c}$ es un up beat cubierto por $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < D)}$. Podemos remover todas las órbitas conteniendo $\overline{(A)}$ pero no $\overline{(D)}$ de arriba hacia abajo pues son beat points al momento de su extracción.

Luego de extraer todos estos elementos, los elementos que contienen a $\overline{(A)}$ que quedan tienen la forma $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < D)}$. Cada uno de ellos es un down beat point cubierto únicamente por el elemento $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < D)}$, si los extraemos de abajo hacia arriba.

Caso 2: $(A\Omega)^g \notin \mathcal{A}$ para todo $g \in G$. Es fácil ver que $m_p(A\Omega) = r$ o $r-1$. En el primer caso, podemos extraer todos los elementos que contienen a $\overline{(A)}$ usando el mismo razonamiento del Caso 1. En el segundo caso, queremos hacer algo similar, pero podría pasar que A tenga más de un elemento maximal de $\mathcal{A}_p(S)$ sobre él. Si tiene solo uno, es similar a la demostración del Caso 1. Asumamos entonces que hay más de un elemento maximal sobre A. Notar que estos maximales tienen p-rango r porque $m_p(A\Omega) = r-1$.

Como antes, extraemos primero de arriba hacia abajo todas las órbitas de cadenas que contienen a $\overline{(A)}$ pero no a $\overline{(A\Omega)}$. Estos elementos tienen las formas $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A)}$ y $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < B)}$ con $B \in \mathcal{A}_p(S)$ maximal. Como $\Omega \leq B$,

$$\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < B)} < \overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega < B)}.$$

Si $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < B)} \prec \overline{d}$ al momento de su extracción, entonces, luego de conjugar, d puede ser tomado de manera que tenga la forma $d = (A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega < B^g)$ para algún $g \in C_G(A)$. Ahora aplicamos el Teorema de Fusión de Alperin sobre $C_G(A)$ para probar que

$$\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega < B)} = \overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega < B^g)}$$

con el morfismo $c_g : C_G(A) \to C_G(A)$. Existen subgrupos $Q_1, \ldots, Q_r \leq C_S(A)$ y $g_i \in N_{C_G(A)}(Q_i)$ tales que $B^{g_1 \cdots g_{i-1}} \leq Q_i$ y $c_g|_B = c_{g_r} \circ \ldots \circ c_1|_B$. Sean $B_i = B^{g_1 \cdots g_i}$ y $B_0 = B$. Como son todos maximales y $A \leq B_i$, tenemos que $A\Omega \leq B_i$ para todo i. Por lo tanto es suficiente con mostrar que

$$\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega < B_i)} = \overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega < B_{i-1})}$$

para todo $i \geq 1$. Si $(A\Omega)^{g_i} = A\Omega$ ya estamos. De otra manera, notar que $A\Omega \leq \Omega_1(Z(Q_i))$ y así $(A\Omega)^{g_i} \leq \Omega_1(Z(Q_i^{g_i})) = \Omega_1(Z(Q_i))$. Esto implica que $C = (A\Omega)(A\Omega)^{g_i} = \Omega_1(Z(Q_i))$ y en particular $\mathcal{A}_p(Q_i)$ tiene un único elemento maximal que es C. Dado que $B_i, B_{i-1} \in \mathcal{A}_p(Q_i)$ son elementos maximales, deducimos que $B_i = C = B_{i-1}$.

Esto ha mostrado que $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < B)}$ es un up beat point cubierto, al momento de su extracción, por $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega < B)}$. Luego de extraerlo, $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A)}$ se convierte en un up beat point cubierto por $\overline{(A_0 < \ldots < A_s < A < A\Omega)}$ y lo podemos extraer.

Los elementos restantes conteniendo a $\overline{(A)}$ pueden ser extraídos de la misma manera que hicimos en el Caso 1.

Hemos mostrado que $\mathcal{P}_{r'-1} \subseteq \mathcal{P}_{r'}$ es un retracto por deformación fuerte para cualquier $1 \leq r' \leq r-1$. En particular, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_{r-1} = \mathcal{A}_p(G)'/G$ es un retracto por deformación fuerte. $\square$

Observación 2.5.25. Si $m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$, los elementos $A \in \mathcal{A}_p(S)$ no centrales y fully centralized que podrían aparecer como elementos de una cadena $c \in \mathcal{A}_p(S)'$ con $\overline{c} \in \mathcal{P}$ tienen p-rango $m_p(G)$ o $m_p(G) - 1$.

Lema 2.5.26. *Con las notaciones del lema anterior, asumir que $m_p(\Omega) = m_p(G) - 2$. Si $A \in \mathcal{A}_p(S)$ tiene rango $m_p(G) - 1$ y está cubierto por un único elemento maximal en $\mathcal{A}_p(S)$, entonces $\mathcal{P}$ se retrae por deformación fuerte al subposet de los elementos que no contienen a $\overline{(A)}$.*

Demostración. Claramente el resultado vale si tales elementos ya fueron extraídos. Por lo tanto, podemos asumir que cada $A^g \leq S$ fully centralized contiene Ω. También podemos suponer que A es fully centralized. Si $B = \Omega_1(C_S(A))$, $B \in \mathcal{A}_p(S)$ es el único elemento maximal que contiene estrictamente a A. Extraemos primero los elementos $x = \overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < A)}$, con $s \geq -1$, de arriba hacia abajo como up beat points. Si $x \prec \overline{d}$, $\overline{d} = \overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < A < D)}$ para algún $D \in \mathcal{A}_p(S)$, y debe ser $D = B$ por unicidad. Luego x es un up beat point. Más aún, cualquier elemento de la forma $\overline{(C_0^g < \ldots < C_s^g < \Omega^g < A)}$ es igual a $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < A^h)}$ con $A^h \leq S$ fully centralized. Es fácil ver que A^h también está cubierto por un único elemento maximal, por lo que $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < A^h)}$ también es un up beat point. Luego de extraer todas estas órbitas, los únicos elementos que contienen a $\overline{(A)}$ son los de la forma $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < A < B)}$ y $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < A)}$, para $s \geq -1$ y $C_s \leq \Omega$. Podemos extraer $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < A)}$ desde arriba hacia abajo dado que al momento de su extracción son up beat points cubiertos por $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < A < B)}$. Ahora los elementos que quedan conteniendo a $\overline{(A)}$ son de la forma $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < A < B)}$ y $\overline{(C_0^g < \ldots < C_s^g < \Omega^g < A < B)}$. A todos estos los podemos extraer de abajo hacia arriba porque son down beat points cubriendo a $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < B)}$ y $\overline{(C_0^g < \ldots < C_s^g < \Omega^g < B)}$ respectivamente. $\square$

Ahora probamos un resultado que básicamente dice que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil cuando el p-rango de G y el rango de Ω son bastante cercanos a $r_p(G)$. Como corolario, mostramos que $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil si S tiene orden a lo sumo p^4.

Teorema 2.5.27. *Si $m_p(G) - m_p(\Omega) \leq 2$ y $m_p(G) \geq r_p(G) - 1$, entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es un espacio finito contráctil.*

Demostración. Por la Proposición 2.5.1 y el Teorema 2.5.19, podemos asumir que $m_p(G) = r_p(G) - 1$ y $m_p(G) - m_p(\Omega) = 2$. Por el Lema 2.5.24, solo necesitamos mostrar que $\mathcal{P}$ es contráctil.

La idea es extraer beat points para alcanzar un subposet con mínimo $\overline{(\Omega)}$.

Sea $A \in \mathcal{A}_p(S)$ un elemento no maximal de rango $m_p(G) - 1$. Existe $B \in \mathcal{A}_p(S)$ de rango $m_p(G)$ tal que $A < B$. Esto implica que $B \leq C_S(A)$. Por otro lado, $A \not\leq Z(S)$ pues $m_p(A) > m_p(\Omega) = m_p(Z(S))$, por lo que $C_S(A) < S$. Por orden, $C_S(A) = B$ y A está cubierto por un único elemento maximal de $\mathcal{A}_p(S)$. En particular A es fully centralized. Por el Lema 2.5.26, $\mathcal{P}$ se retrae por deformación fuerte al subposet de elementos que no contienen a $\overline{(A)}$. Luego conseguimos un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{P}$ cuyos elementos son $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega)}$, $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < B)}$ y $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < B)}$, para $B \in \mathcal{A}_p(S)$ maximal de rango r o $r-1$ y $s \geq -1$, y $\overline{(C_0 < \ldots < C_s)}$ para $s \geq 0$, con $C_s \leq \Omega$ en todos los casos.

Supongamos que $B \in \mathcal{A}_p(S)$ es maximal de rango $m_p(G) - 1$. Los elementos que contienen a $\overline{(B)}$ tienen la forma $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < B)}$ para $s \geq -1$ y $C_s \leq \Omega$. Repitiendo la demostración del Teorema 2.5.19, podemos extraerlos de arriba hacia abajo como up beat points cubiertos por $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < B)}$ al momento de su extracción. Así, cualquier elemento que contiene a $\overline{(B)}$ también contendrá a $\overline{(\Omega)}$.

Ahora extraemos los elementos conteniendo a $\overline{(B)}$ pero no a $\overline{(\Omega)}$ para $B \in \mathcal{A}_p(S)$ maximal de rango $m_p(G)$. Estos elementos tienen la forma $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < B)}$ para $s \geq -1$ y $C_s < \Omega$, y están cubiertos por $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < B)}$ y $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega < B^g)}$ al momento de su extracción, para algún $g \in C_G(C_s)$. Necesitamos probar que son iguales. Usando el Teorema de Fusión de Alperin, podemos asumir que $g \in N_{C_G(C_s)}(Q)$ para un subgrupo $Q \leq S$ con $B, B^g \leq Q$. Si $\Omega^g = \Omega$, listo. De otra manera, $g \notin N_G(\Omega)$ y así $Q = B$ pues debe ser $Q < S$ por orden. Esto nos dice que $B = B^g$.

Hemos alcanzado un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{P}$ cuyos únicos elementos que no contienen a $\overline{(\Omega)}$ son $\overline{(C_0 < \ldots < C_s)}$ con $C_s \leq \Omega$. De nuevo, repitiendo la última parte de la demostración del Teorema 2.5.19, podemos extraerlos de arriba hacia abajo como up beat points cubiertos por $\overline{(C_0 < \ldots < C_s < \Omega)}$ al momento de su extracción.

Finalmente, $\mathcal{P}$ se retrae fuertemente a un subposet con mínimo $\overline{(\Omega)}$, y en consecuencia es contráctil. □

Obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.5.28. *Si $r_p(G) \leq 4$, el espacio finito $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.5.1 y los Teoremas 2.5.19 y 2.5.27. □

Por la Proposición 3.1.1, el poset $\mathcal{A}_p(G)$ es disconexo si y solo si G tiene un subgrupo fuertemente p-embebido. La demostración del siguiente teorema depende de la clasificación de grupos con un subgrupo fuertemente p-embebido (ver Teorema A.1.1) y de los resultados obtenidos arriba.

Corolario 2.5.29. *Si $\mathcal{A}_p(G)$ es disconexo entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

Demostración. Podemos asumir que $O_{p'}(G) = 1$ por la Observación 2.5.7 y que $O_p(G) = 1$. Luego $\Omega_1(G)$ es uno de los grupos en la lista del Teorema A.1.1. Notar que $m_p(G) = m_p(\Omega_1(G))$.

Los casos $m_p(\Omega_1(G)) \leq 2$ valen por el Teorema 2.5.19.

Si $\Omega_1(G)$ es simple de tipo Lie y de Lie rango 1 en característica p, entonces los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente por el Teorema A.1.3. Luego $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil por la Proposición 2.5.6.

Los grupos restantes de la lista tienen p-rango 2 por la Tabla A.4. □

Obtenemos contractibilidad de $\mathcal{A}_p(G)'/G$ para algunos grupos esporádicos simples como aplicación de nuestros resultados. Requerimos p impar.

Corolario 2.5.30. *Si G es un grupo de Janko, un grupo de Mathieu,* He*,* HS*,* O'N *o* Ru*, y p es impar, entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

Demostración. Por la Tabla A.6 y el Corolario 2.5.20, solo resta ver el caso $G = J_3$ y $G = \mathrm{O'N}$, ambos con $p = 3$.

Se puede ver que el centro de un 3-subgrupo de Sylow de J_3 tiene 3-rango 2. Como $m_3(J_3) = 3$, el resultado se sigue del Teorema 2.5.19.

Los 3-subgrupos de Sylow de O'N son elementales abelianos de rango 4. Luego el resultado se sigue de la Proposición 2.5.2. □

Corolario 2.5.31. *Sea G el grupo esporádico simple Co_1 y $p = 5$. Entonces $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil.*

Demostración. Sea S un 5-subgrupo de Sylow de $G = Co_1$. Entonces $r_5(G) = 4$, $m_5(G) = 3$ y $m_5(Z(S)) = 1$. Por el Teorema 2.5.19, $\mathcal{A}_5(G)'/G$ es contráctil. □

Para G un grupo esporádico y $p = 2$, la diferencia $m_p(G) - m_p(\Omega)$ es más grande que 2 en general, y nuestros teoremas no aplican. Aún así, para los grupos esporádicos más chicos podemos usar GAP junto con el paquete [FPSC19] para llevar a cabo el cálculo del core de $\mathcal{A}_p(G)'/G$. De esta manera, para $p = 2$ y $G = M_{11}$, M_{12}, M_{22}, M_{23}, J_1, J_2 o HS, $\mathcal{A}_p(G)'/G$ es contráctil. Notar que J_1 tiene 2-subgrupos de Sylow abelianos y podemos aplicar la Proposición 2.5.2 (de hecho, es el único grupo esporádico con un 2-subgrupo de Sylow abeliano por el Teorema de clasificación de Walter 3.5.4).

Observación 2.5.32. Casi todas las demostraciones que hemos hecho pueden ser llevadas a cabo en un sistema de fusión saturado general sobre un p-grupo fijo S. Si $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado sobre S, podemos formar el espacio de órbitas $\mathcal{A}_p(S)/\mathcal{F}$ de la siguiente manera: si $A,B \in \mathcal{A}_p(S)$ definimos la relación $A \sim B$ si $\varphi(A) = B$ para algún morfismo φ en la categoría $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{A}_p(S)/\mathcal{F} := \mathcal{A}_p(S)/\sim$ es contráctil con la misma homotopía que hemos definido en el Teorema 2.4.1.

Análogamente, podemos definir la relación $\sim$ en $\mathcal{A}_p(S)'$ poniendo $(P_0 < \ldots < P_r) \sim (Q_0 < \ldots < Q_r)$ si existe un morfismo φ en $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(P_i) = Q_i$ para todo i, y poner $\mathcal{A}_p(S)'/\mathcal{F} := \mathcal{A}_p(S)'/\sim$.

Cuando $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$, $\mathcal{A}_p(S)/\mathcal{F} = \mathcal{A}_p(G)/G$ y $\mathcal{A}_p(S)'/\mathcal{F} = \mathcal{A}_p(G)'/G$.

Capítulo 3

El grupo fundamental de los posets de p-subgrupos

En el Capítulo 1 hemos estudiado a los posets de p-subgrupos como espacios topológicos finitos. Hemos visto que su tipo homotópico está determinado por el core del poset (salvo homeomorfismo) y que en general, los posets de p-subgrupos no tienen el mismo tipo homotópico como espacios finitos. Más aún, los cores de $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ pueden ser calculados algorítmicamente tomando alternadamente los subposets $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{s}$ (ver Observación 1.3.28). Sin embargo, cuando trabajamos con la topología de sus complejos de órdenes, sabemos que son G-homotópicamente equivalentes y que no hay ningún algoritmo para calcular su tipo homotópico. En general, no se conoce el tipo homotópico de los complejos de p-subgrupos.

En su artículo fundacional [Qui78], Quillen calculó el tipo homotópico de ciertas familias de complejos de p-subgrupos. Por ejemplo, él mostró que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(\mathrm{GL}_n(q)))$ (con $q \equiv 1 \mod p$) y $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(LA))$ (con L p'-grupo resoluble y A p-grupo elemental abeliano actuando en L) son complejos Cohen-Macaulay (ver Definición 3.1.3 y Teorema 3.1.4). Más aún, cuando G es de tipo Lie en característica p, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ tiene el tipo homotópico del Tits building de G. En cualquiera de estos casos, los complejos de p-subgrupos tienen el tipo homotópico de un wedge de esferas.

A lo largo de las siguientes décadas, se probó que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ tenía el tipo homotópico de un bouquet de esferas (de dimensiones posiblemente distintas). En [PW00] Pulkus y Welker obtuvieron una descomposición wedge para $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ cuando G es un grupo resoluble, reduciendo el estudio del tipo homotópico de $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ para grupos resolubles al estudio del tipo homotópico de los intervalos superiores $\mathcal{A}_p(G)_{>A}$, $A \in \mathcal{A}_p(G)$ (ver Teorema 3.1.7). De hecho hay una pregunta en [PW00], atribuida a Thévenaz, de si los complejos de p-subgrupos tienen siempre el tipo homotópico de un bouquet de esferas (de dimensiones posiblemente distintas). En 2005 Shareshian dio el primer ejemplo de un grupo cuyo complejo de p-subgrupos que no es homotópicamente equivalente a bouquet de esferas. Concretamente, él mostró que hay torsión en el segundo grupo de homología de $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{13})$ (ver [Sha04]). Notar que el ejemplo que muestra la falla de ser homotópico a un bouquet de esferas surge de un grupo simple.

En este capítulo nos enfocamos en el estudio del grupo fundamental de los complejos de p-subgrupos. Éste fue investigado primero por M. Aschbacher, quien dio condiciones algebraicas para que $\mathcal{A}_p(G)$ sea simplemente conexo, módulo una conocida conjetura sobre la cual hay considerable evidencia (ver [Asc93, Theorem 1 & 2]). Luego, K. Das estudió la simple conexión de los complejos de p-subgrupos de algunas familias grupos finitos de tipo Lie (ver [Das95, Das98, Das00]). En [Kso03, Kso04], Ksontini investigó el grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$. Él estableció condiciones necesarias y suficientes en términos de n y p para que $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$ sea simplemente conexo. En los casos restantes probó que su grupo fundamental es libre excepto posiblemente para $n = 3p$ o $n = 3p+1$ (p impar). En [Sha04], Shareshian extendió los resultados de Ksontini y mostró que el grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$ es también libre para $n = 3p$.

Todos estos resultados podrían sugerir que el grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(G)$ es siempre libre. Mostraremos que esto vale para grupos resolubles (ver Corolario 3.0.3 debajo) y, módulo la conjetura de Aschbacher, para grupos p-resolubles (ver Corolario 3.0.1 debajo). De hecho, hay pocos ejemplos de complejos de p-subgrupos que no son homotópicamente equivalentes a bouquet de esferas, y el contraejemplo de Shareshian $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{13})$ falla en el segundo grupo de homología pero tiene grupo fundamental libre. Sorprendentemente encontramos que el grupo fundamental de $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10})$ no es libre. Éste es isomorfo a un producto libre de un grupo libre con 25200 generadores y un grupo no libre cuya abelianización es $\mathbb{Z}^{42}$. Este es el grupo G más chico con $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ no libre para algún primo p. Notar que la homología entera de $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10})$ ($= \mathcal{A}_3(\mathbb{S}_{10})$) es abeliana libre (cf. [Sha04, p.306]), por lo que en este caso la obstrucción a ser un bouquet de esferas yace en el grupo fundamental y no en la homología.

Mostraremos que los complejos de p-subgrupos con grupo fundamental no libre son bastante excepcionales. El primero de nuestros resultados acierta que, módulo la conjetura de Aschbacher, el estudio de la libertad de $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ se reduce al caso casi simple. Sea $S_G = \Omega_1(G)/O_{p'}(\Omega_1(G))$.

Teorema 3.4.2. *Sea G un grupo finito y p un primo que divide a $|G|$. Asuma la conjetura de Aschbacher. Entonces existe un isomorfismo $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(S_G)) * F$, donde F es un grupo libre. Además, $\pi_1(\mathcal{A}_p(S_G))$ es un grupo libre (y por lo tanto $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre) excepto posiblemente si S_G es casi simple.*

Siempre podemos asumir que $\mathcal{A}_p(G)$ es conexo (ver Observación 3.1.2). Notar que, en este caso, $\mathcal{A}_p(S_G)$ es conexo también pues la función inducida $\mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{A}_p(S_G)$ es sobreyectiva.

De hecho, en el Teorema 3.4.2 solo necesitamos asumir la conjetura de Aschbacher para los p'-grupos simples L involucrados en $O_{p'}(\Omega_1(G))$ y para p-rango 3 (ver Proposición 3.3.9 debajo). Tampoco es necesaria para la parte del "Además" del teorema.

Recordemos la conjetura de Aschbacher [Asc93].

Conjetura de Aschbacher 3.3.8. *Sea G un grupo finito tal que $G = F^*(G)A$, donde A es un p-subgrupo elemental abeliano de rango $r \geq 3$ y $F^*(G)$ es el producto directo de los A-conjugados de una componente simple L de G de orden coprimo con p. Entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo.*

Aschbacher probó la conjetura para todos los grupos simples L excepto para los tipo Lie con Lie rango 1 y los grupos esporádicos que no son grupos de Mathieu (ver [Asc93, Theorem 3]).

Debajo listamos algunas consecuencias inmediatas del Teorema 3.4.2.

Si G es p-resoluble, $O_p(S_G) \neq 1$, y S_G no es casi simple. De hecho, $\mathcal{A}_p(S_G)$ es homotópicamente trivial por la Proposición 1.3.15. Recordar que $O_{p',p}(G)$ es el único subgrupo normal de G que contiene a $O_{p'}(G)$ tal que $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G) = O_p(G/O_{p'}(G))$.

Corolario 3.0.1. *Asuma la conjetura de Aschbacher. Si $O_p(S_G) \neq 1$, entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre. En particular, esto vale para grupos p-resolubles y, más en general, para grupos p-constrained.*

Si tomamos un grupo simple abeliano L en las hipótesis de la conjetura de Aschbacher, entonces la conjetura vale para L por el Teorema 3.1.4. Dado que no hay grupos simples no abelianos involucrados en un grupo resoluble, la conjetura de Aschbacher no es necesaria asumirla en grupos resolubles.

Por el teorema de Feit-Thompson 1.1.3, si $p = 2$ no hay p'-grupos simples no abelianos. En consecuencia, la conjetura de Aschbacher no necesita ser asumida y obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.0.2. *Hay un isomorfismo $\pi_1(\mathcal{A}_2(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_2(S_G)) * F$, donde F es un grupo libre. Además, $\pi_1(\mathcal{A}_2(S_G))$ es un grupo libre (y por lo tanto $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es libre) excepto posiblemente si S_G es casi simple.*

Corolario 3.0.3. *Si G es resoluble entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre.*

En la Sección 3.3, usamos una variante de la descomposición wedge de Pulkus-Welker Teorema 3.1.7 para restringir la conjetura de Aschbacher al caso de p-rango 3.

Proposición 3.3.9. *Si la conjetura de Aschbacher vale para p-rango 3, entonces vale para todo p-rango $r \geq 3$. Más aún, si la conjetura vale en p-rango 3 para un p'-grupo simple L entonces vale para todo p-rango $r \geq 3$ para L.*

En la Sección 3.5 estudiamos la libertad de algunas clases de grupos casi simples. No necesitamos asumir la conjetura de Aschbacher para estos casos. En el siguiente teorema resumimos los resultados de la Sección 3.5. Recordemos que por un grupo simple nos referimos a un grupo simple no abeliano.

Teorema 3.0.4. *Supongamos que $L \leq G \leq \mathrm{Aut}(L)$ donde L es un grupo simple. Entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre en los siguientes casos:*

1. $m_p(G) \leq 2$,
2. $\mathcal{A}_p(L)$ *es disconexo,*
3. $\mathcal{A}_p(L)$ *es simplemente conexo,*
4. L *es simple de tipo Lie en característica p y $p \nmid (G : L)$ cuando L tiene Lie rango* 2,
5. $p = 2$ *y L tiene* 2*-subgrupos de Sylow abelianos,*
6. $p = 2$ *y* $L = \mathbb{A}_n$ *(el grupo alterno),*
7. L *es un grupo de Mathieu,* J_1 *o* J_2*,*
8. $p \geq 3$ *y* $L = J_3$*,* McL*,* O'N.

De nuestro ejemplo base $\mathbb{A}_{10}$ (con $p = 3$) y del Teorema 3.4.2, uno puede fácilmente construir una cantidad infinita de ejemplos de grupos finitos G con $\pi_1(\mathcal{A}_3(G))$ no libre, tomando extensiones de $3'$-grupos H cuyos $3'$-grupos simples involucrados satisfagan la conjetura de Aschbacher, por $\mathbb{A}_{10}$. Sin embargo, $\mathbb{A}_{10}$ es el único ejemplo conocido hasta el momento de un grupo simple con grupo fundamental no libre. No sabemos si $\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{A}_{3p+1}))$ es libre o no para $p \geq 5$. Sería interesante encontrar nuevos ejemplos de grupos simples G (otros aparte de los grupos alternos) con $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ no libre. Además de los trabajos mencionados de Aschbacher, Das, Ksontini y Shareshian, referimos al lector al libro de S.D. Smith [Smi11, Section 9.3] para más detalles sobre el grupo fundamental del complejo de Quillen y aplicaciones a teoría de grupos, tales como pruebas de unicidad. Un trabajo reciente de J. Grodal [Gro16] relaciona el grupo fundamental de estos complejos con teoría de representación modular de grupos finitos vía la sucesión exacta

$$1 \to \pi_1(\mathcal{S}_p(G)) \to \pi_1(\mathscr{T}_p(G)) \to G \to 1$$

(cuando $\mathcal{S}_p(G)$ es conexo). Aquí $\mathscr{T}_p(G)$ denota la transport category, cuyos objetos son los p-subgrupos no triviales de G, y con $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_p(G)}(P,Q) = \{g \in G : P^g \leq Q\}$. Es bien sabido que la realización geométrica de $\mathscr{T}_(G)$ es homotópicamente equivalente a la construcción de Borel $EG \times_G |\mathcal{S}_p(G)|$ (ver por ejemplo [Gro16, Remark 2.2]), y la sucesión exacta se sigue de la fibración $|\mathcal{S}_p(G)| \to EG \times_G |\mathcal{S}_p(G)| \to BG$. Recordemos que por el teorema de Amplitud de Brown, la cohomología módulo p de $EG \times_G |\mathcal{S}_p(G)|$ es isomorfa a la cohomología módulo p de G (ver [Bro94, Smi11]).

A lo largo de este capítulo, cuando hablemos del tipo homotópico de un poset nos referimos al tipo homotópico de su topología intrínseca como espacio finito. Aún así, los resultados de este capítulo se centran en el tipo homotópico débil de los posets de p-subgrupos, que es el tipo homotópico de sus complejos de órdenes. Muchos de los resultados de este capítulo aparecen en el artículo escrito en colaboración con E.G. Minian [MP19].

3.1. Propiedades homotópicas de los complejos de p-subgrupos

En esta sección exhibimos algunos resultados sobre el tipo homotópico general de los complejos de p-subgrupos. También proveemos de las herramientas necesarias para estudiar el grupo fundamental en las secciones siguientes. Referimos al lector a la Sección 1.1 del Capítulo 1 para las notaciones y definiciones sobre teoría de grupos finitos.

El primer paso para estudiar el tipo homotópico de los complejos de p-subgrupos podría ser determinar las condiciones púramente algebraicas que caractericen su conexión como espacios topológicos. Esto fue hecho por Quillen [Qui78]. Recordemos que *un subgrupo fuertemente p-embebido* de G es un subgrupo propio $M < G$ tal que $|M|_p = |G|_p$ y $M \cap M^g$ es un p'-grupo para todo $g \in G - M$.

Proposición 3.1.1 ([Qui78, Proposition 5.2])**.** *El poset $\mathcal{A}_p(G)$ es disconexo si y solo si G tiene un subgrupo fuertemente p-embebido.*

Observación 3.1.2. Supongamos que $\mathcal{A}_p(G)$ es disconexo y sea C una componente conexa. Sea $M \leq G$ el estabilizador de C bajo la acción de conjugación de G en las componentes conexas de $\mathcal{A}_p(G)$. Se puede ver que $C = \mathcal{A}_p(M)$ y que M es un subgrupo fuertemente p-embebido de G (ver por ejemplo [Asc00, Section 46] o [Qui78, Section 5]). Más aún, dado que G permuta transitivamente las componentes conexas de $\mathcal{A}_p(G)$, éstas son todas homeomorfas y en particular homotópicamente equivalentes (incluso como espacios finitos). Luego $\pi_n(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_n(C) = \pi_n(\mathcal{A}_p(M))$, $n \geq 1$, para cualquier componente conexa C. Aquí, π_n denota el n-ésimo grupo de homotopía. Tenemos conexiones similares para los grupos de homología. Recordar que $\tilde{H}_*(X, A)$ es la homología reducida de X con coeficientes en el grupo abeliano A. Por lo tanto el estudio del tipo homotópico (y en particular los grupos de homotopía y homología) de los complejos de p-subgrupos puede ser restringido al caso conexo.

Los grupos que poseen un subgrupo fuertemente p-embebido están clasificados (ver Teorema A.1.1) y es uno de los ingredientes de la CGFS. Nosotros usamos frecuentemente esta clasificación.

Ahora mostramos cómo la propiedad de ser Cohen-Macaulay surge en el contexto de los complejos de p-subgrupos. Esto fue notado primero por D. Quillen [Qui78].

Definición 3.1.3. Sea X un poset finito. Decimos que X es *esférico* si es $(h(X)-1)$-conexo (es decir, $\mathcal{K}(X)$ tiene el tipo homotópico de un wedge de esferas de dimensión $h(X)$). Decimos que X es *Cohen-Macaulay* (o que $\mathcal{K}(X)$ lo es) si es esférico, y para cada $x < y \in X$, $X_{<x}$ es esférico

de altura $h(x)-1$, $X_{>x}$ es esférico de altura $h(X)-h(x)-1$ y $X_{>x}\cap X_{<y}$ es esférico de altura $h(y)-h(x)-2$. Notar que un complejo simplicial K es esférico o Cohen-Macaulay si $\mathcal{X}(K)$ lo es.

La propiedad de ser Cohen-Macaulay (CM para abreviar) depende de argumentos inductivos pues involucra la esfericidad de los links de elementos.

El siguiente teorema muestra que $\mathcal{A}_p(G)$ es Cohen-Macaulay para ciertas configuraciones de grupos resolubles. Este teorema es parte de la demostración de la conjetura de Quillen para grupos resolubles (ver Sección 4.1).

Teorema 3.1.4 ([Qui78, Theorem 11.2]). *Sea $G=LA$, donde L es un p'-grupo resoluble y A es un p-grupo elemental abeliano que actúa en L. Entonces $\mathcal{A}_p(LA)$ es Cohen-Macaulay.*

Demostración. (Esquema) Sea $G=LA$, donde L es un p'-grupo resoluble sobre el cual el p-grupo elemental abeliano A actúa. Procedemos por inducción en el orden de LA. Supongamos que L admite un subgrupo propio no trivial H que es LA-invariante. Entonces $\mathcal{A}_p(HA)$ y $\mathcal{A}_p((L/H)A)$ son Cohen-Macaulay. Consideremos la función $q:\mathcal{A}_p(LA)\to\mathcal{A}_p((L/H)A)$ inducida por el cociente $L\to L/H$. Aplicamos [Qui78, Propositions 9.7 y 10.1], que establece que $\mathcal{A}_p(LA)$ es Cohen-Macaulay si $\mathcal{A}_p((L/H)A)$ y $q^{-1}(\mathcal{A}_p((L/H)A)_{\leq B})$ lo son (el último con altura $m_p(B)-1$), para cada $B\in\mathcal{A}_p(A)$. Notar que si $B\in\mathcal{A}_p(A)$, entonces $q^{-1}(\mathcal{A}_p((L/H)A)_{\leq B})=q^{-1}(\mathcal{A}_p(HB/H))=\mathcal{A}_p(HB)$, el cual es Cohen-Macaulay de altura $m_p(B)-1$ por inducción. Por lo tanto $\mathcal{A}_p(LA)$ es Cohen-Macaulay.

Ahora supongamos que L no admite un subgrupo propio no trivial y LA-invariante. Entonces L es característicamente simple y resoluble, y esto implica que L es un q-grupo elemental abeliano, con q primo. Veamos a L como espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_q$, y A actúa en L por automorfismos lineales. La minimalidad de L implica que o bien $C_A(L)=A$, o L es irreducible con la acción de $A/C_A(L)$ y $A/C_A(L)$ es cíclico de orden p. En el primer caso, $\mathcal{A}_p(LA)=\mathcal{A}_p(A)$ es Cohen-Macaulay. En el segundo caso $LA=LA_0\times C_A(L)$ para algún complemento $A_0\leq A$ de $C_A(L)$. Los posets $\mathcal{A}_p(LA_0)$ y $\mathcal{A}_p(C_A(L))$ son Cohen-Macaulay y por lo tanto $\mathcal{A}_p(LA)$ lo es por [Qui78, Proposition 10.3] y Proposición 3.1.16. □

El resultado anterior no es verdad si $G=LP$ con P solo un p-grupo que actúa en el p'-grupo resoluble L (ver [Smi11, Example 9.3.2]). Aún así, si $\Omega_1(P)$ es abeliano, entonces $\mathcal{A}_p(LP)=\mathcal{A}_p(L\Omega_1(P))$ es Cohen-Macaulay.

De hecho, Quillen dejó abierto el problema de si el resultado anterior puede ser extendido al caso no resoluble, es decir, cuando L es solo un p'-grupo [Qui78, Problem 12.3]. Ver también [Smi11, p.299]. Este problema permanece abierto y la conjetura de Aschbacher 3.3.8 puede ser visto como un caso particular.

Observación 3.1.5. Considerar las configuraciones $G=LA$, donde L es un p'-grupo sobre el cual el p-grupo elemental abeliano A actúa. Tenemos que, para estas configuraciones, los posets $\mathcal{A}_p(LA)$ son Cohen-Macaulay si y solo si son esféricos.

Asumamos que son esféricos. Fijemos una configuración LA y sea $B \leq A$. Entonces el poset $\mathcal{A}_p(LA)_{<B} = \mathcal{A}_p(B) - \{B\}$ es Cohen-Macaulay de altura $m_p(B) - 2$. Por otro lado, $N_{LA}(B) = N_L(B)A$ y $N_L(B) = O_{p'}(N_{LA}(B))$. Luego por el Lema 3.1.8,

$$\mathcal{A}_p(LA)_{>B} \simeq \mathcal{A}_p(N_{LA}(B)/B) = \mathcal{A}_p(N_L(B)(A/B))$$

es esférico de altura $(m_p(A) - m_p(B) - 1) = ((m_p(A) - 1) - (m_p(B) - 1) - 1)$. Para $B < C \leq A$, los intervalos $\mathcal{A}_p(LA)_{>B} \cap \mathcal{A}_p(LA)_{<C} = \mathcal{A}_p(C/B) - \{C/B\}$ son esféricos de altura $((m_p(C) - 1) - (m_p(B) - 1) - 2)$. Por lo tanto si todos los posets $\mathcal{A}_p(LA)$ son esféricos, entonces todos ellos son Cohen-Macaulay. La recíproca es inmediata de las definiciones.

Más aún, la demostración del teorema anterior funciona de la misma manera para un grupo no resoluble L hasta el punto en que asumimos que L no tiene un subgrupo propio no trivial LA-invariante. Esto implica que L es el producto directo de p'-grupos simples, permutados transitivamente por A. Por lo tanto, para mostrar que $\mathcal{A}_p(LA)$ es siempre Cohen-Macaulay, necesitamos mostrar que es esférico cuando L es el producto directo de p'-grupos simples permutados transitivamente por A.

Problema de Quillen: ¿Es $\mathcal{A}_p(LA)$ $(m_p(A) - 2)$-conexo cuando L es el producto directo de p'-grupos simples permutados transitivamente por A, un p-grupo elemental abeliano?

Observación 3.1.6. La conjetura de Aschbacher 3.3.8 dice que $\mathcal{A}_p(LA)$ es 1-conexo cuando $m_p(A) \geq 3$.

Recordemos la decomposición wedge de Pulkus-Welker.

Teorema 3.1.7 ([PW00, Theorem 1.1])**.** *Sea G un grupo finito con un p'-subgrupo resoluble N. Para $A \in \mathcal{A}_p(G)$, sea $\overline{A} = NA/N$. Entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es débilmente equivalente al wedge*

$$\mathcal{A}_p(\overline{G}) \bigvee_{\overline{A} \in \mathcal{A}_p(\overline{G})} \mathcal{A}_p(NA) * \mathcal{A}_p(\overline{G})_{>\overline{A}}$$

donde para cada $\overline{A} \in \mathcal{A}_p(\overline{G})$ un punto arbitrario $c_{\overline{A}} \in \mathcal{A}_p(NA)$ es identificado con $\overline{A} \in \mathcal{A}_p(\overline{G})$.

Los intervalos superiores se entienden mejor en el poset $\mathcal{S}_p(G)$. Ver [Qui78, Proposition 6.1].

Lema 3.1.8 (Intervalos superiores)**.** *Tenemos una equivalencia homotópica como espacios finitos $\mathcal{S}_p(G)_{>P} \simeq \mathcal{S}_p(N_G(P)/P)$. En particular, si G tiene p-subgrupos de Sylow elementales abelianos entonces $\mathcal{A}_p(G)_{>A} = \mathcal{S}_p(G)_{>A} \simeq \mathcal{S}_p(N_G(A)/A) = \mathcal{A}_p(N_G(A)/A)$.*

Demostración. (Esquema) Notar que $\mathcal{S}_p(N_G(P)/P) = \mathcal{S}_p(N_G(P))_{>P}$, y las funciones $f : Q \in \mathcal{S}_p(G)_{>P} \mapsto N_Q(P)/P\mathcal{S}_p(N_G(P)/P)$ y $g : Q \in \mathcal{S}_p(N_G(P))_{>P} = \mathcal{S}_p(N_G(P)/P) \mapsto Q \in \mathcal{S}_p(G)_{>P}$ están bien definidas, preservan el orden, $fg(Q) = Q$ y $gf(Q) = N_Q(P) \leq Q$. □

Las siguientes proposiciones muestran que los posets de p-subgrupos se comportan como los posets de caras de los complejos simpliciales, en el sentido que la inclusión del subposet de elementos de altura a lo sumo n (el "n-esqueleto") induce una n-equivalencia. Primero recordemos una generalización del Teorema A de Quillen para posets (ver también [Qui78, Proposition 1.6]).

Proposición 3.1.9 ([Bjo03, Theorem 2], ver también [Bar11b]). *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de posets. Asuma que $f^{-1}(Y_{\leq a})$ es n-conexo para todo $a \in Y$. Entonces f es una $(n+1)$-equivalencia.*

Sea X^n el subposet de X de elementos de altura a lo sumo n. Notar que $\mathcal{S}_p(G)^n = \{P \in \mathcal{S}_p(G) : |P| \leq p^{n+1}\}$ y $\mathcal{A}_p(G)^n = \mathcal{A}_p(G) \cap \mathcal{S}_p(G)^n = \{A \in \mathcal{A}_p(G) : m_p(A) \leq n+1\}$. Recordar que $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ es una equivalencia débil por la Proposición 1.3.1.

Proposición 3.1.10. *Las inclusiones $\mathcal{A}_p(G)^n \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)^{n+1}$ y $\mathcal{S}_p(G)^n \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)^{n+1}$ son n-equivalencias. En particular, las inclusiones $\mathcal{A}_p(G)^2 \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)^2 \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ inducen isomorfismos entre los grupos fundamentales.*

Demostración. Mostramos que la inclusión $i : \mathcal{S}_p(G)^n \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)^{n+1}$ es una n-equivalencia usando la proposición anterior. Sea $P \in \mathcal{S}_p(G)^{n+1}$. Notar que $i^{-1}(\mathcal{S}_p(G)^{n+1}_{\leq P}) \subseteq \mathcal{S}_p(P)$. Si $|P| \leq p^{n+1}$, entonces $P \in \mathcal{S}_p(G)^n$ y $i^{-1}(\mathcal{S}_p(G)^{n+1}_{\leq P}) = \mathcal{S}_p(P)$ es contráctil (ver Proposición 1.3.15). En particular es $(n-1)$-conexo. Supongamos que $|P| = p^{n+2}$. Si P es elemental abeliano, entonces $i^{-1}(\mathcal{S}_p(G)^{n+1}_{\leq P}) = \mathcal{A}_p(P) - P$ es el poset de subespacios propios de P, que es un wedge de esferas de dimensión $(n-1)$ por el resultado clásico de Solomon-Tits. Si P no es elemental abeliano, $i^{-1}(\mathcal{S}_p(G)^{n+1}_{\leq P}) = \mathcal{S}_p(P) - P$, y $1 \neq \Phi(P) < P$, donde $\Phi(P)$ es el subgrupo de Frattini de P. Luego $Q \leq Q\Phi(P) \geq \Phi(P)$ induce una homotopía entre la identidad y la función constante dentro de $\mathcal{S}_p(P) - P$, y por lo tanto $\mathcal{S}_p(P) - P$ es contráctil. Esto muestra que $i : \mathcal{S}_p(G)^n \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)^{n+1}$ es una n-equivalencia. Una demostración similar funciona para $\mathcal{A}_p(G)$. $\square$

Observación 3.1.11. Por la Proposición 3.1.10, para estudiar el grupo fundamental del complejo de Quillen, solo necesitamos estudiar el subposet $\mathcal{A}_p(G)^2$. Notar que podríamos haber deducido el isomorfismo $i_* : \pi_1(\mathcal{A}_p(G)^2) \to \pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ sin necesidad de las Proposiciones 3.1.9 y 3.1.10: se sigue del teorema de van Kampen y el hecho de que para cualquier $P \in \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{A}_p(G)^2$, $\mathcal{A}_p(G)_{<P}$ es un wedge de esferas de dimensión al menos 2.

Observación 3.1.12. Para un subgrupo $H \leq P$, considerar el subposet $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_p(G) : E \cap H \neq 1\} \subseteq \mathcal{A}_p(G)$. Notar que la inclusión $\mathcal{A}_p(H) \subseteq \mathcal{N}$ es un retracto por deformación fuerte vía $E \in \mathcal{N} \mapsto E \cap H \in \mathcal{A}_p(H)$.

Lema 3.1.13. *Sean $H \leq G$ y $E \in \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{A}_p(H)$. Entonces $i : \mathcal{A}_p(C_H(E)) \to \mathcal{N} \cap \mathcal{A}_p(G)_{>E}$ definida por $i(A) = AE$ es un retracto por deformación fuerte.*

Demostración. El resultado es claro si $\mathcal{A}_p(C_H(E))$ es vacío. Si es no vacío, consideremos la función $r : \mathcal{N} \cap \mathcal{A}_p(G)_{>E} \to \mathcal{A}_p(C_H(E))$ definida por $r(A) = A \cap H$. Entonces $ri(A) = A$ por ley modular, y $ir(A) \leq A$. $\square$

Usaremos el siguiente lema de [Asc93].

Lema 3.1.14 ([Asc93, (6.9)]). *Sea $N \trianglelefteq G$ y supongamos que $\mathcal{A}_p(N)$ es simplemente conexo. Si $\mathcal{A}_p(C_N(E))$ es conexo para cada subgrupo $E \leq G$ de orden p, entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo.*

La siguiente proposición describe el grupo fundamental de un join de dos posets finitos.

Proposición 3.1.15 ([Bar11a, Lemma 6.2.4]). *Si X e Y son dos posets finitos no vacíos, entonces $\pi_1(X * Y)$ es el grupo libre de rango $(|\pi_0(X)| - 1).(|\pi_0(Y)| - 1)$.*

Cuando $G = G_1 \times G_2$ es el producto directo de dos grupos, Quillen mostró que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ es homotópicamente equivalente a $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G_1)) * \mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G_2))$, donde $*$ denota el join de complejos simpliciales (ver [Qui78, Proposition 2.6]). En la siguiente proposición mostramos que hay una relación más fuerte al nivel de espacios finitos que implica el resultado de Quillen.

Proposición 3.1.16. *Si $G = G_1 \times G_2$ entonces $\mathcal{A}_p(G)$ tiene el mismo tipo homotópico simple G-equivariante que $\mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$, donde la acción de G en el último poset es la dada por conjugación en cada factor del join. En particular, por el Teorema 1.2.30, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ y $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G_1)) * \mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G_2)) = \mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2))$ son G-homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Si X es un poset finito, sea $C^+X = X \cup \{1\}$, resp. $C^-X = X \cup \{0\}$, el poset obtenido de X agregando un máximo, resp. un mínimo. Sea $X_1 = C^-\mathcal{A}_p(G_1) \times C^-\mathcal{A}_p(G_2) - \{(0,0)\}$. Notar que X_1 tiene una acción inducida por G y por lo tanto es un G-poset. Sean $p_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ y $p_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$ las proyecciones. Tenemos una función bien definida que preserva el orden $f : \mathcal{A}_p(G_1 \times G_2) \to X_1$, $f(H) = (p_1(H), p_2(H))$. La función $g : X_1 \to \mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ definida por $g(H_1, H_2) = H_1 \times H_2$ satisface $gf(H) \geq H$ y $fg(H_1 \times H_2) = H_1 \times H_2$. Notar que ambas funciones f y g son equivariantes. Luego $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2) \simeq_G X_1$.

De una manera similar, es fácil chequear que $X_2 = C^+\mathcal{A}_p(G_1) \times C^-\mathcal{A}_p(G_2) - \{(1,0)\} \simeq_G \mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$ (ver [Pit16, Proposición 2.2.1]).

Vamos a probar que $X_1 \nearrow\!\!\!\searrow^{G} X_2$. Sean $X = \mathcal{A}_p(G_1)$ y $Y = \mathcal{A}_p(G_2)$. Consideremos el poset $X_3 = (C^+C^-X) \times (C^-Y) - \{(0,0), (1,0)\}$. Notar que X_1 y X_2 son subposets de X_3 y que X_3 es un G-poset. Mostraremos que $X_1 \ {}^{G}\!\!\nearrow X_3$.

Sea $\{y_1, \ldots, y_r\}$ un conjunto de representantes de las órbitas de la acción de G sobre Y tales que $y_i \leq y_j^g$ para algún $g \in G$ implica $i \leq j$. Sea $Z_i = X_3 - \{(1, y_j)^g : 1 \leq j \leq i, g \in G\}$. Notar que cada Z_i es G-invariante, $X_1 = X_3 - \{(1, y) : y \in Y\} = Z_r$, $X_3 = Z_0$ y $Z_{i-1} = Z_i \cup \{(1, y_i)^g : g \in G\}$. Tenemos

$$\hat{U}^{Z_{i-1}}_{(1,y_i)^g} = C^-X \times C^-U^Y_{y_i^g} - \{(0,0)\} = C^-\mathcal{A}_p(G_1) \times C^-\mathcal{A}_p(y_i^g) - \{(0,0)\} \simeq \mathcal{A}_p(G_1 \times y_i^g) \simeq *.$$

El poset $\mathcal{A}_p(G_1 \times y_i^g)$ es contráctil vía la homotopía $A \leq Ay_i^g \geq y_i^g$. Luego, extrayendo toda la órbita de $(1, y_i)$, obtenemos un colapso simple equivariante $Z_{i-1} \searrow^G Z_i$. Inductivamente, $X_3 = Z_0 \searrow^G Z_1 \searrow^G \dots \searrow^G Z_r = X_1$.

Una demostración análoga muestra que $X_3 \searrow^G X_2$. En consecuencia $X_1 \nearrow\searrow^G X_2$. $\square$

Por las Proposiciones 3.1.15 y 3.1.16 obtenemos grupo fundamental libre para producto directo de grupos.

Corolario 3.1.17. *Si $G = G_1 \times G_2$ y $p \mid \gcd(|G_1|, |G_2|)$ entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es conexo y $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre. Más aún, $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo si y solo si $\mathcal{A}_p(G_i)$ es conexo para algún $i = 1, 2$.*

El siguiente resultado se sigue inmediatamente de [BM12a, Corollary 4.10]. Incluimos una demostración alternativa aquí.

Proposición 3.1.18. *Sea X un poset finito conexo y sea $Y \subseteq X$ un subposet tal que $X - Y$ es una anti-cadena (o sea, elementos distintos de $X - Y$ no son comparables). Si Y es es simplemente conexo entonces $\pi_1(X)$ es libre.*

Demostración. Como la inclusión $|\mathcal{K}(Y)| \subseteq |\mathcal{K}(X)|$ es una cofibración y $|\mathcal{K}(Y)|$ es simplemente conexo, por el teorema de van Kampen la función cociente induce un isomorfismo $\pi_1(|\mathcal{K}(X)|) \cong \pi_1(|\mathcal{K}(X)|/|\mathcal{K}(Y)|)$. Además, como $X - Y$ es una anti-cadena, el espacio cociente $|\mathcal{K}(X)|/|\mathcal{K}(Y)|$ tiene el tipo homotópico de un wedge de suspensiones. Luego, $\pi_1(X) \cong \pi_1(|\mathcal{K}(X)|/|\mathcal{K}(Y)|)$ es un grupo libre. $\square$

3.2. Un grupo fundamental no libre

El grupo fundamental del complejo de Quillen fue investigado primero por Aschbacher, quien analizó la simple conexión [Asc93]. K. Das estudió la simple conexión de los complejos de p-subgrupos para grupos de tipo Lie (ver [Das95, Das98, Das00]). En [Kso03, Kso04], Ksontini investigó el grupo fundamental del complejo de Quillen de grupos simétricos. Debajo recordamos los resultados de Ksontini. Estos resultados serán usados en la Proposición 3.5.11.

Teorema 3.2.1 ([Kso03, Kso04])**.** *Sea $G = \mathbb{S}_n$ y sea p un primo.*

1. *Si p es impar, entonces $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n) = \mathcal{A}_p(\mathbb{A}_n)$. En este caso, $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$ es simplemente conexo si y solo si $3p + 2 \leq n < p^2$ o $n \geq p^2 + p$. Si $p^2 \leq n < p^2 + p$, entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n))$ es libre salvo si $p = 3$ y $n = 10$. Si $n < 3p$ entonces $m_p(\mathbb{S}_n) \leq 2$ y $\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n))$ es libre.*

2. *Si $p = 2$, entonces $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n)$ es simplemente conexo si y solo si $n = 4$ o $n \geq 7$. En los otros casos, $\pi_1(\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n))$ es un grupo libre por cálculo directo.*

En [Sha04] Shareshian extendió los resultados de Ksontini y mostró que el grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$ también es libre para $n = 3p$.

Teorema 3.2.2 ([Sha04])**.** *$\pi_1(\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n))$ es libre cuando $n = 3p$.*

En [Sha04] Shareshian dio el primer ejemplo de un grupo cuyo complejo de p-subgrupos no es homotópicamente equivalente a un bouquet de esferas: él mostró que hay torsión en el segundo grupo de homología de $\mathcal{A}_3(\mathbb{S}_{13}) = \mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{13})$. Sin embargo, su grupo fundamental es libre. Sorprendentemente encontramos que el grupo fundamental de $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10})$ no es libre. Este el primer ejemplo concreto conocido de un complejo de Quillen con un grupo fundamental no libre. De hecho, $\mathbb{A}_{10}$ es, hasta ahora, el único ejemplo conocido de un grupo simple cuyo complejo de Quillen tiene grupo fundamental no libre.

Para calcular $\pi_1(\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10}))$ usamos el poset de Bouc $\mathcal{B}_p(G)$ de los p-subgrupos radicales. Recordemos que $\mathcal{B}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ es una equivalencia débil. En particular, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) = \pi_1(\mathcal{S}_p(G)) = \pi_1(\mathcal{B}_p(G))$.

Calculamos $\pi_1(\mathcal{B}_3(\mathbb{A}_{10}))$ usando GAP [GAP18] con el paquete [FPSC19].

Encontramos que $\pi_1(\mathcal{B}_3(\mathbb{A}_{10}))$ es un producto libre de un grupo libre en 25200 generadores y un grupo no libre en 42 generadores y 861 relaciones cuya abelianización es $\mathbb{Z}^{42}$. No tiene elementos de torsión pero sí tiene relaciones de conmutatividad. Notar que la homología entera de $\mathcal{A}_3(\mathbb{A}_{10})$ es abeliana libre (cf. [Sha04, p.306]). Como consecuencia del Teorema 3.4.2, uno puede construirse una cantidad infinita de ejemplos de grupos finitos G con $\pi_1(\mathcal{A}_3(G))$ no libre, tomándose extensiones de $3'$-grupos cuyos $3'$-grupos simples involucrados satisfagan la conjetura de Aschbacher, por $\mathbb{A}_{10}$. Sería interesante encontrar otros ejemplos de grupos simples con grupo fundamental no libre.

También pudimos verificar que $\mathbb{A}_{10}$ es el grupo más chico con un complejo de p-subgrupos con π_1 no libre. Notar que, por el Teorema 3.4.2, solo necesitamos verificar si un π_1 es libre en los grupos casi simples (notar también que la conjetura de Aschbacher es válida para grupos de orden menor al de $\mathbb{A}_{10}$). Por otro lado, el Teorema 3.0.4 nos permite descartar muchos potenciales contraejemplos. Los restantes grupos casi simples que son más chicos que $\mathbb{A}_{10}$ fueron chequeados por cálculos en GAP [GAP18, FPSC19].

3.3. La reducción $O_{p'}(G) = 1$

En esta sección, reducimos el estudio del grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(G)$ al caso $O_{p'}(G) = 1$ usando la conjetura de Aschbacher. Asumos que $\mathcal{A}_p(G)$ es conexo y que $G = \Omega_1(G)$ dado que $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(\Omega_1(G))$.

La reducción $O_{p'}(G) = 1$ depende del wedge lemma de colímite homotópicos. Usaremos el resultado de Pulkus-Welker [PW00, Theorem 1.1] (enunciado como Teorema 3.1.7 arriba) pero para el poset $\mathcal{A}_p(G)^2$ en lugar de $\mathcal{A}_p(G)$. Recordar que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) = \pi_1(\mathcal{A}_p(G)^2)$ por la Proposición 3.1.10.

Notar que $m_p(G) = m_p(G/O_{p'}(G))$ y que $\mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))$ es conexo cuando $\mathcal{A}_p(G)$ es conexo pues la función inducida $\mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))$ es sobreyectiva. El siguiente lema es una variación del resultado de Pulkus-Welker Teorema 3.1.7. Hemos reemplazado la hipótesis de resolubilidad del p'-subgrupo normal $N \leq G$ por la simple conexión de $\mathcal{A}_p(NA)$ para $A \in \mathcal{A}_p(G)$ de p-rango 3.

Lema 3.3.1. *Sea N un p'-subgrupo normal de G tal que $\mathcal{A}_p(NA)$ es simplemente conexo para cada $A \in \mathcal{A}_p(G)$ de p-rango 3. Entonces $\mathcal{A}_p(G)^2$ es débil homotópicamente equivalente al wedge*

$$\mathcal{A}_p(G/N)^2 \bigvee_{\overline{B} \in \mathcal{A}_p(G/N)^2} \mathcal{A}_p(NB) * \mathcal{A}_p(G/N)^2_{>\overline{B}}.$$

En particular, para cierto punto base,

$$\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(G/N)) *_{\overline{B} \in \mathcal{A}_p(G/N)^2} \pi_1(\mathcal{A}_p(NB) * \mathcal{A}_p(G/N)^2_{>\overline{B}}).$$

Demostración. Seguimos esencialmente la demostración de Pulkus-Welker [PW00, Theorem 1.1]. Sea $N \leq G$ un p'-subgrupo normal de G. Escribamos $\overline{G} = G/N$ y sea $f : \mathcal{A}_p(G)^2 \to \mathcal{A}_p(\overline{G})^2$ la función inducida por tomar cocientes. Notar que está bien definida y es sobreyectiva. Usaremos [PW00, Corollary 2.4]. Para esto tenemos que verifiar que las inclusiones $f^{-1}(\mathcal{A}_p(\overline{G})^2_{<\overline{B}}) \hookrightarrow f^{-1}(\mathcal{A}_p(\overline{G})^2_{\leq\overline{B}})$ son homotópicas a funciones constantes. Notar que $f^{-1}(\mathcal{A}_p(\overline{G})^2_{<\overline{B}}) = \mathcal{A}_p(NB) - \mathrm{Max}(\mathcal{A}_p(NB))$ y $f^{-1}(\mathcal{A}_p(\overline{G})^2_{\leq\overline{B}}) = \mathcal{A}_p(NB)$.

Por hipótesis y por la Observación 3.3.2 debajo deducimos que $\mathcal{A}_p(NB) - \mathrm{Max}(\mathcal{A}_p(NB))$ y $\mathcal{A}_p(NB)$ son esféricos de la dimensión correcta para cada $B \leq G$ de p-rango a lo sumo 3. Por ejemplo, si B tiene p-rango 3, entonces $\mathcal{A}_p(NB) - \mathrm{Max}(\mathcal{A}_p(NB))$ es 0-esférico y $\mathcal{A}_p(NB)$ es 1-esférico.

El resultado se sigue del hecho de que la inclusión de una esfera de dimensión n en una esfera de dimensión $m > n$ es null homotópica, y $\mathcal{A}_p(NB) - \mathrm{Max}(\mathcal{A}_p(NB))$ y $\mathcal{A}_p(NB)$ son esféricos. □

Observación 3.3.2. Sea A un p-grupo elemental abeliano de p-rango al menos 2 actuando en un p'-grupo N. Afirmamos que $\mathcal{A}_p(NA)$ es conexo. De otra manera, tomemos un contraejemplo minimal NA. Luego $1 = O_p(NA)$ y $NA = \Omega_1(NA)$ por minimalidad. Por lo tanto $N = O_{p'}(NA) = O_{p'}(\Omega_1(NA))$ y $A \cong NA/N = \Omega_1(NA)/O_{p'}(\Omega_1(NA))$ es uno de los grupos en la lista del Teorema A.1.1. Pero ninguno de los grupos en la lista es elemental abeliano de p-rango al menos 2. En consecuencia $\mathcal{A}_p(NA)$ es conexo.

Lema 3.3.3. *Sea N un p'-subgrupo normal de G y sea $A \in \mathcal{A}_p(G)$ de p-rango a lo sumo 3. Asuma la conjetura de Aschbacher para p-rango 3. Entonces el grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(NA) * \mathcal{A}_p(G/N)^2_{>\overline{A}}$ es libre si $|A| = p$ o p^2 y trivial si $|A| = p^3$.*

Demostración. Podemos suponer que $N \neq 1$. Examinemos los posibles rangos de A. Si $|A| = p$, $\mathcal{A}_p(NA)$ es una unión disjunta de puntos mientras que $\mathcal{A}_p(G/N)^2_{>A}$ es un grafo no vacío. Luego su join es homotópico a un wedge de 2-esferas y 1-esferas.

Si $|A| = p^2$, $\mathcal{A}_p(NA)$ es un grafo conexo no vacío por la Observación anterior. Notar que $\mathcal{A}_p(G/N)^2_{>A}$ podría ser o bien vacií si A es maximal, o discreto. Luego, su join es homotópico a un wedge de 2-esferas o 1-esferas.

Falta probar el caso $|A| = p^3$. Aquí, $\mathcal{A}_p(G/N)^2_{>A}$ es vacío. Tenemos que ver que $\mathcal{A}_p(NA)$ es simplemente conexo. Como asumimos la conjetura de Aschbacher, $\mathcal{A}_p(NA)$ es simplemente conexo si N es producto directo de simples permutados transitivamente por A. En el caso general, $\mathcal{A}_p(NA)$ es simplemente conexo por las Observaciones 3.1.5 y 3.1.6. $\square$

Observación 3.3.4. Notar que en la demostración del Lema 3.3.3, la conjetura de Aschbacher solo necesita ser asumida en los p'-grupos simples involucrados en N.

Observación 3.3.5. Asumir las hipótesis del Lema 3.3.3. Si además tenemos que $\mathcal{A}_p(G/N)^2_{>\overline{A}}$ es conexo para $|A| = p$ (resp. no hay elementos maximales en $\mathcal{A}_p(G)$ de orden p^2), entonces el poset $\mathcal{A}_p(NA) * \mathcal{A}_p(G/N)^2_{>\overline{A}}$ es simplemente conexo para $|A| = p$ (resp. $|A| = p^2$). Estas condiciones se cumple por ejemplo cuando G/N es un p-grupo elemental abeliano.

Ahora aplicamos estos resultados para reducir el estudio del grupo fundamental de los posets de p-subgrupos a los grupos con p'-core trivial.

Asumamos que $G = \Omega_1(G)$ y que la conjetura de Aschbacher vale para grupos de p-rango 3.

Entonces por los Lemas 3.3.1 y 3.3.3 y la Observación 3.3.2,

$$\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))) *_{\overline{B}\in\mathcal{A}_p(G/N)^2} \pi_1\left(\mathcal{A}_p(NB) * \mathcal{A}_p(G/N)^2_{>\overline{B}}\right).$$

Los grupos $\pi_1\left(\mathcal{A}_p(NB) * \mathcal{A}_p(G/N)^2_{>\overline{B}}\right)$ son libres por el Lema 3.3.3. En particular, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre cuando $\pi_1(\mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G)))$ lo es.

Deducimos el siguiente corolario, que se corresponde a la primera parte del Teorema 3.4.2. Sea $S_G = \Omega_1(G)/O_{p'}(\Omega_1(G))$.

Corolario 3.3.6. *Asuma la conjetura de Aschbacher para p-rango 3. Existe un isomorfismo $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(S_G)) * F$, donde F es un grupo libre. En particular, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre si $\pi_1(\mathcal{A}_p(S_G))$ es libre.*

Observación 3.3.7. En el Corolario 3.3.6, solo necesitamos asumir la conjetura de Aschbacher en los p'-grupos simples involucrados en $O_{p'}(\Omega_1(G))$.

Culminamos esta sección con algunas observaciones sobre la conjetura de Aschbacher. Recordemos el enunciado de la conjetura.

Conjetura 3.3.8 (Aschbacher)**.** *Sea G un grupo finito tal que $G = F^*(G)A$, donde A es un p-subgrupo elemental abeliano de rango $r \geq 3$ y $F^*(G)$ es el producto directo de los A-conjugados de una componente simple L de G de orden coprimo a p. Entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo.*

Aschbacher mostró que su conjetura vale para una amplia clase de grupos simples L. A decir, los grupos alternos, los grupos de tipo Lie y rango de Lie al menos 2, los grupos esporádicos de Mathieu y los grupos $L_2(q)$, con q par (ver [Asc93, Theorem 3]). El caso del grupo esporádico de Lyons se deduce de [AS92]. Más tarde, Segev trató muchos de los restantes grupos de tipo Lie y rango Lie 1 en [Seg94].

En la siguiente proposición reducimos el estudio de la conjetura de Aschbacher al caso de p-rango 3.

Proposición 3.3.9. *Si la conjetura de Aschbacher vale para p-rango 3, entonces vale para cualquier p-rango $r \geq 3$. Más aún, si la conjetura vale en p-rango 3 para un p'-grupo simple L entonces vale para cualquier p-rango $r \geq 3$ para L.*

Demostración. Asuma que la conjetura vale para p-rango 3 y tomemos $G = F^*(G)A$ como en la conjetura, con $m_p(A) \geq 4$. Dado que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(G)^2)$, alcanza con mostrar que $\mathcal{A}_p(G)^2$ es simplemente conexo. Sea $N = F^*(G)$ y notar que $G/N \cong A$. Estamos en las hipótesis del Lema 3.3.1 y por lo tanto $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo siempre que $\mathcal{A}_p(A)$ y los joins de los posets $\mathcal{A}_p(NB) * \mathcal{A}_p(A)^2_{>B}$, con $B \in \mathcal{A}_p(A)^2$, lo sean. Notar que hemos hecho la identificación $G/N = A$. Como $\mathcal{A}_p(A)$ es esférico de dimensión $m_p(A) - 1 \geq 2$, es simplemente conexo. Además, para $B \in \mathcal{A}_p(A)^2$, $\mathcal{A}_p(NB) * \mathcal{A}_p(A)^2_{>B}$ es simplemente conexo por la Observación 3.3.5. □

3.4. Reducción al caso casi simple

En esta sección, reducimos el estudio de la libertad del grupo fundamental al caso casi simple. Probamos el siguiente resultado, para el cual no es necesario asumir la conjetura de Aschbacher.

Teorema 3.4.1. *Sea G un grupo finito y p un primo que divide a su orden. Supongamos que $O_{p'}(G) = 1$. Entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre excepto posiblemente si G es casi simple.*

Esto nos permite completar la demostración del teorema principal de este capítulo Teorema 3.4.2.

Teorema 3.4.2. *Sea G un grupo finito y p un primo que divide a su orden. Asuma la conjetura de Aschbacher. Entonces existe un isomorfismo $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{A}_p(S_G)) * F$, donde F es un grupo libre. Más aún, $\pi_1(\mathcal{A}_p(S_G))$ es un grupo libre (y por lo tanto $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre) excepto posiblemente si S_G es casi simple.*

Demostración. Por el Corolario 3.3.6, solo necesitamos probar la parte del “Más aún”. En tal caso podemos asumir que $G = S_G$. Luego estamos en las hipótesis del Teorema 3.4.1 y el resultado se sigue. $\square$

Ahora nos enfocamos en la demostración del Teorema 3.4.1. Supongamos que el teorema no es válido y tomemos un contraejemplo minimal G. Entonces G satisface las siguientes condiciones:

(C1) $G = \Omega_1(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ es conexo,

(C2) $O_p(G) = 1$ (si no $\mathcal{A}_p(G)$ es homotópicamente trivial por la Proposición 1.3.15),

(C3) $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ no es un grupo libre. En particular, $\mathcal{A}_p(G)$ no es simplemente conexo y G tiene p-rango al menos 3,

(C4) $O_{p'}(G) = 1$,

(C5) $G \not\cong G_1 \times G_2$ (por Proposición 3.1.17).

Observación 3.4.3. De las condiciones (C2) y (C4) deducimos que $Z(G) = 1$, $Z(E(G)) = 1$, $F(G) = 1$ y $F^*(G) = L_1 \times \ldots \times L_r$ es el producto directo de componentes simples de G, cada una de orden divisible por p. En particular $C_G(F^*(G)) = Z(E(G)) = 1$, por lo que $F^*(G) \leq G \leq \mathrm{Aut}(F^*(G))$.

Observación 3.4.4. Si G satisface las condiciones anterior, por la Observación 3.4.3, $F^*(G) = L_1 \times \ldots \times L_r$. Por lo tanto $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ tiene grupo fundamental libre si $r = 2$, y es simplemente conexo para $r > 2$ (ver Proposición 3.1.17). Si $r = 1$, G es casi simple. Tratamos los casos $r = 2$ y $r > 2$ de manera separada (ver Teoremas 3.4.8 y 3.4.9 debajo).

En lo que sigue no necesitamos asumir la conjetura de Aschbacher. En [Asc93, Sections 7 & 8], Aschbacher caracterizó los grupos G para los cuales algún link $\mathcal{A}_p(G)_{>E}$, con $E \leq G$ de orden p, es disconexo. La siguiente proposición lidia con el caso de links conexos. Concretamente, [Asc93, Theorem 1] acierta que si $O_{p'}(G) = 1$ y los links $\mathcal{A}_p(G)_{>E}$ son conexos para todo $E \leq G$ de orden p, entonces o bien $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo, G es casi simple y $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ no son simplemente conexos, o bien G tiene cierta estructura particular. Probamos que en el último caso, el grupo fundamental es libre.

Proposición 3.4.5. *Supongamos que G satisface las condiciones (C1)...(C5). Si los links de la forma $\mathcal{A}_p(G)_{>E}$ son conexos para todo $E \leq G$ de orden p, entonces G es casi simple y $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ no es simplemente conexo.*

Demostración. Usamos [Asc93, Theorem 1]. Por las condiciones (C1)...(C5), G se corresponde al caso (3) o (4) de [Asc93, Theorem 1]. El caso (4) implica que G es casi simple y

$\mathcal{A}_p(F^*(G))$ no es simplemente conexo. Si G está en el caso (3) de [Asc93, Theorem 1], entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre (que contradice (C3)). Esto se deduce de la demostración de [Asc93, (10.3)], dado que bajo estas hipótesis $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ son homotópicamente equivalentes, y $\pi_1(\mathcal{A}_p(F^*(G)))$ es libre por la Proposición 3.1.17. □

Observación 3.4.6. En [Asc93, Theorem 1], se requiere la conjetura de Aschbacher. Sin embargo, dado que $O_{p'}(G) = 1$, no necesitamos asumirla en la proposición anterior.

Para el resto de la sección asumiremos que G no es casi simple, por lo que $F^*(G) = L_1 \times \ldots \times L_r$ con $r > 1$. Tratamos los casos $r = 2$ y $r > 2$ de forma separada.

Observación 3.4.7. Sea L un grupo simple con un subgrupo fuertemente p-embebido, es decir tal que $\mathcal{A}_p(L)$ es disconexo. Entonces L es uno de los grupos simples en la lista del Teorema A.1.1. Por el Teorema A.1.3, los p-subgrupos de Sylow de L tienen la propiedad de intersección trivial (o sea dos p-subgrupos de Sylow distintos se intersecan trivialmente). Por lo tanto las componentes conexas de $\mathcal{A}_p(L)$ tienen la forma $\mathcal{A}_p(S)$ para $S \in \mathrm{Syl}_p(L)$, hay $|\mathrm{Syl}_p(L)|$ componentes y todas ellas son contráctiles por la Proposición 1.3.15.

Teorema 3.4.8. *Bajo las condiciones (C1)...(C5), si $F^*(G) = L_1 \times L_2$ es un producto directo de dos grupos simples, entonces $p = 2$, $G \cong L \wr C_2$ (el producto wreath estándar), con L un grupo simple de tipo Lie y Lie rango 1 en característica 2 y $L_1 \cong L_2 \cong L$. En este caso, $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es un grupo libre con $(|\mathrm{Syl}_2(L)| - 1)(|\mathrm{Syl}_2(L)| - 1 + |L|)$ generadores.*

Demostración. Notar que $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ es homotópicamente equivalente a $\mathcal{A}_p(L_1) * \mathcal{A}_p(L_2)$, el cual es simplemente conexo si y solo si $\mathcal{A}_p(L_1)$ o $\mathcal{A}_p(L_2)$ es conexo (ver Proposición 3.1.17).

Asumamos que $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ es simplemente conexo. Dado que $\mathcal{A}_p(G)$ no es simplemente conexo, por el Lema 3.1.14 existe algún subgrupo $E \leq G$ de orden p tal que $\mathcal{A}_p(C_{F^*(G)}(E))$ es disconexo. Como $F^*(G) = L_1 \times L_2$, $m_p(F^*(G)) > 2$ por ser simple conexión. Por [Asc93, (10.5)], E actúa regularmente en el conjunto de componentes de G y cada L_i posee un subgrupo fuertemente p-embebido, por lo que $\mathcal{A}_p(L_i)$ es disconexo para $i = 1, 2$. En particular $p = 2$ y $L_1 \cong L_2$. Dado que $\mathcal{A}_p(F^*(G)) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(L_1) * \mathcal{A}_p(L_2)$ es simplemente conexo, $\mathcal{A}_p(L_i)$ es conexo para algún i, una contradicción.

Ahora supongamos que $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ no es simplemente conexo. Entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(F^*(G)))$ es un grupo libre por la Proposición 3.1.17, y tanto L_1 como L_2 son grupos simples con un subgrupo fuertemente p-embebido. Usamos [Asc93, (10.3)]. Por las hipótesis, G se corresponde a uno de los casos (2) o (3) de [Asc93, (10.3)]. En el caso (3), como mencionamos en la demostración de la Proposición 3.4.5, $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(F^*(G))$ son homotópicamente equivalentes (que contradice las condiciones sobre G). Por lo tanto G está en el caso (2) de [Asc93, (10.3)], $p = 2$ y $G = L_1 \wr E$ para algún $E \leq G$ de orden 2. Entonces, $E = \langle e \rangle$ para una involución $e \in G$, y L_1 es un grupo de tipo Lie y rango de Lie 1 en característica 2 por la Observación 3.4.7.

Probemos ahora que $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es libre. Sea $N = F^*(G) = L_1 \times L_2$ y $L = L_1$. Sea $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A}_2(G) : A \cap N \neq 1\}$ y sea $\mathcal{S} = \mathcal{A}_2(G) - \mathcal{N}$ el complemento de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{A}_2(G)$. Si $A \in \mathcal{S}$

entonces $A \cong NA/N \leq NE/N = E$, por lo que $|A| = 2$. Luego $\mathcal{S} = \{A \leq G : |A| = 2, A \nleq N\}$ consiste de algunos elementos minimales del poset y tenemos que

$$\mathcal{A}_2(G) = \mathcal{N} \bigcup_{A \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_2(G)_{\geq A}.$$

Para cada $A \in \mathcal{S}$, $\mathcal{N} \cap \mathcal{A}_2(G)_{\geq A} = \{W \in \mathcal{A}_2(G) : W \cap N \neq 1, W \geq A\} \simeq \mathcal{A}_2(C_N(A))$ por el Lema 3.1.13. Notar que $C_N(A) \cong L$ pues $G = NA$. Por la Observación 3.4.7, $\mathcal{A}_2(L)$ tiene $|\operatorname{Syl}_2(L)|$ componentes conexas y cada una es simplemente conexa. Como $\mathcal{A}_2(G)_{\geq A}$ es contráctil, por la versión disconexa del teorema de van Kampen (ver [Bro06, Section 9.1]), $\pi_1(\mathcal{N} \cup \mathcal{A}_2(G)_{\geq A}) = \pi_1(\mathcal{N}) * F_A$, donde F_A es un grupo libre de rango $|\operatorname{Syl}_2(L)| - 1$. Además, $\mathcal{A}_2(G)_{\geq A} \cap \mathcal{A}_2(G)_{\geq B} \subseteq \mathcal{N}$ para cada $A \neq B \in \mathcal{S}$, y recursivamente tenemos que $\pi_1(\mathcal{A}_2(G)) \cong \pi_1(\mathcal{N}) * F$, donde F es un grupo libre de rango $(|\operatorname{Syl}_2(L)| - 1)|\mathcal{S}|$.

Por la Observación 3.1.12, $\mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_2(N) = \mathcal{A}_2(L_1 \times L_2)$. De la Observación 3.1.15 deducimos que $\pi_1(\mathcal{N})$ es un grupo libre de rango

$$(|\operatorname{Syl}_2(L)| - 1)^2 = (|\pi_0(\mathcal{A}_2(L_1))| - 1)(|\pi_0(\mathcal{A}_2(L_2))| - 1).$$

Finalmente calculemos $|\mathcal{S}|$. Sea $\mathcal{I}(G)$ el número de involuciones distintas que hay en G. Luego $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(N) + s$, donde s es el número de involuciones no contenidas en N. Notar que $s = |\mathcal{S}|$. Si $g \in G - N$ es una involución, entonces $g = xye$ con $x \in L_1$ e $y \in L_2$. La condición $g^2 = 1$ implica $1 = xyexye = xyx^e y^e = (xy^e)(yx^e)$ con $y^e \in L_1$ y $x^e \in L_2$. Dado que $L_1 \cap L_2 = 1$, $xy^e = 1$ y $yx^e = 1$, o sea $y = (x^{-1})^e$. En consecuencia, $g = x(x^{-1})^e e = xex^{-1}$ y $s = |\{x(x^{-1})^e e : x \in L_1\}| = |L_1| = |L|$.

Concluimos que $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es un grupo libre con $(|\operatorname{Syl}_2(L)| - 1)^2 + |L|(|\operatorname{Syl}_2(L)| - 1)$ generadores. $\square$

Ahora lidiamos con el caso $r > 2$.

Teorema 3.4.9. *Bajo las condiciones (C1)...(C5), si $F^*(G) = L_1 \times \ldots \times L_r$ es un producto directo de grupos simples con $r > 2$, entonces p es impar, $r = p$, cada L_i posee un subgrupo fuertemente p-embebido, $\{L_1, \ldots, L_r\}$ es permutado regularmente por algún subgrupo de orden p de G, y $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre.*

Demostración. Las hipótesis implican que $\mathcal{A}_p(F^*(G)) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(L_1) * \ldots * \mathcal{A}_p(L_r)$ es simplemente conexo por la Proposición 3.1.17. Entonces existe algún subgrupo $E \leq G$ de orden p tal que $\mathcal{A}_p(C_{F^*(G)}(E))$ es disconexo por el Lema 3.1.14. Por lo tanto estamos en el caso (5) de [Asc93, (10.5)], E permuta regularmente las componentes $\{L_1, \ldots, L_r\}$ y cada L_i posee un subgrupo fuertemente p-embebido. En particular, $r = p$ es impar y $L_i \cong L_j$ para todo i, j.

Sean $N = F^*(G)$ y $H = \bigcap_i N_G(L_i)$. Entonces $N \trianglelefteq H$. Si $A \in \mathcal{A}_p(H)$, entonces $A \leq \bigcap_i N_G(L_i)$, por lo que $C_N(A) \cong \prod_i C_{L_i}(A)$. En particular,

$$\mathcal{A}_p(C_N(A)) = \mathcal{A}_p\left(\prod_i C_{L_i}(A)\right) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(C_{L_1}(A)) * \mathcal{A}_p(C_{L_2}(A)) * \ldots * \mathcal{A}_p(C_{L_p}(A))$$

es simplemente conexo. Luego por el Lema 3.1.14, $\mathcal{A}_p(H)$ es simplemente conexo, y así $\mathcal{N} = \{X \in \mathcal{A}_p(G) : X \cap H \neq 1\}$ también es simplemente conexo por la Observación 3.1.12. Consideremos el complemento $\mathcal{S} = \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{N}$. Si $X \in \mathcal{S}$ entonces $X \cap H = 1$. Así, $X = X_1X_2$ donde X_2 permuta regularmente las componentes $\{L_1, \dots, L_p\}$ y $X_1 \leq \bigcap_i N_G(L_i) = H$. Dado que $X \cap H = 1$, concluimos que $X_1 = 1$ y $|X_2| = p$, es decir $|X| = p$. Por lo tanto $\mathcal{S}$ es una anti-cadena y por la Proposición 3.1.18, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre. □

Demostración del Teorema 3.4.1. Si G es un contraejemplo minimal a este teorema, entonces G satisface las condiciones (C1)...(C5) y G no es casi simple. Por la Observación 3.4.4 y los Teoremas 3.4.8 y 3.4.9, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre, una contradicción. □

3.5. Grupo fundamental libre en algunos grupos casi simples

En esta sección probamos que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre cuando G es un grupo casi simple con alguna hipótesis extra. Usaremos la estructura de los automorfismos externos de los grupos simples. Referimos al lector a las secciones 7 y 8 de [GL83] y los capítulos 2 a 5 de [GLS98]. Notar que [GLS98] usa una definición diferente de automorfismos de cuerpo y de grafos (ver [GLS98, Warning 2.5.2]). Nosotros seguimos las definiciones dadas en [GL83]. Para el p-rango de los grupos simples usaremos los resultados de la sección 10 de [GL83] y en particular [GL83, (10-6)]. Ver también Apéndice A.1.

Considerar un grupo finito G tal que $L \leq G \leq \mathrm{Aut}(L)$, donde L es un grupo simple de orden divisible por p. Podemos suponer que $G = \Omega_1(G)$, $m_p(G) \geq 3$ y $\mathcal{A}_p(G)$ es conexo.

En el siguiente teorema usaremos [Qui78, Theorem 3.1]. Recordar que este teorema muestra que si H es un grupo de tipo Lie y rango de Lie n en característica p, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(H))$ tiene el tipo homotópico del Tits building de H, que es homotópicamente equivalente a un bouquet de esferas de dimensión $n-1$. Este wedge es no trivial si $O_p(H) = 1$.

Teorema 3.5.1. *Sean G y L como arriba. Entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre si $\mathcal{A}_p(L)$ es disconexo o simplemente conexo.*

Demostración. Probamos primero que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre cuando $\mathcal{A}_p(L)$ es disconexo. En este caso, L tiene un subgrupo fuertemente p-embebido. Tratamos cada caso de la lista del Teorema A.1.1. Ver también Tabla A.4.

- Si $m_p(L) = 1$, entonces p e impar y $m_p(G) \leq 2$ por [GL83, (7-13)].
- Si L es simple de tipo Lie y rango de Lie 1 en característica p, entonces sus p-subgrupos de Sylow se intersecan trivialmente, es decir $P \cap P^g = 1$ si $P \in \mathrm{Syl}_p(L)$ y $g \in L - N_L(P)$ (ver Teorema A.1.3). La demostración es similar a las demostraciones de los Teoremas 3.4.8 y 3.4.9. Sea $\mathcal{N} = \{X \in \mathcal{A}_p(G) : X \cap L \neq 1\}$ y sea $\mathcal{S} = \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{N}$.

Como $m_p(\mathrm{Out}(L)) \leq 1$, $\mathcal{S}$ consiste de subgrupos de orden p. Por las Observaciones 3.1.12 y 3.4.7, $\mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_p(L)$ tiene componentes simplemente conexas. Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{A}_p(G)_{\geq A} \cap \mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_p(C_L(A))$ por Lema 3.1.13, y los p-subgrupos de Sylow de $C_L(A)$ se intersecan trivialmente, por lo que $\mathcal{A}_p(G)_{\geq A} \cap \mathcal{N}$ tiene componentes simplemente conexas. Entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre por el teorema de van Kampen.

- $L \not\cong {}^2G_2(3) = \mathrm{Ree}(3)$ o $\mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(2^5))$ pues estos grupos no son simples.
- En los casos restantes, $m_p(G) = 2$ por la Tabla A.4, [GL83, (10-6)] o cálculo directo.

Ahora probamos que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre cuando $\mathcal{A}_p(L)$ es simplemente conexo. Notar que $m_p(L) \geq 3$ pues de otra manera $O_p(L) \neq 1$, contradiciendo que L es simple. Por Lema 3.1.14, podemos asumir que $\mathcal{A}_p(C_L(E))$ es disconexo para algún $E \leq G$ de orden p. Por lo tanto estamos en uno de los casos (1), (2), (3) o (4) de [Asc93, (10.5)]. Tratamos cada uno de ellos por separado.

1. Si L es simple de tipo Lie y rango de Lie 1 en característica p, entonces $\mathcal{A}_p(L)$ es disconexo, contradiciendo nuestra hipótesis.
2. Si $p = 2$, q es par y $L \cong L_3(q)$, $U_3(q)$ o $Sp_4(q)$, entonces L es simple de tipo Lie y rango de Lie a lo sumo 2. En cualquier caso, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(L))$ no es simplemente conexo pues tiene el tipo homotópico de un bouquet no trivial de esferas de dimensión igual a su rango de Lie menos 1. Si $L \cong G_2(3)$, entonces $\mathrm{Out}(L) \cong \mathrm{Out}(G_2(3)) \cong C_2$. Luego, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre por la Proposición 3.1.18 aplicada a $Y = \{X \in \mathcal{A}_p(G) : X \cap L \neq 1\} \subseteq \mathcal{A}_p(G)$. Notar que Y es simplemente conexo pues $Y \simeq \mathcal{A}_p(L)$ por la Observación 3.1.12.
3. Si $p = 2$ y $L \cong L_3(q^2)$ con q par, entonces L tiene rango de Lie 2 y así, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(L))$ un bouquet no trivial de esferas de dimensión 1, contradiciendo la hipótesis.
4. Si $p > 3$, $q \equiv \varepsilon \mod p$ y $L \cong L_p^{\varepsilon}(q)$, entonces $m_p(\mathrm{Out}(L)) = 1$ por [GL83, (9-3)]. Por lo tanto $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre por la Proposición 3.1.18 aplicada a $Y = \{X \in \mathcal{A}_p(G) : X \cap L \neq 1\} \subseteq \mathcal{A}_p(G)$.

□

Corolario 3.5.2. *Si L es un grupo de tipo Lie en característica p y $p \nmid (G : L)$ cuando L tiene Lie rango 2, entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre.*

Demostración. Recordar que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(L))$ es homotópicamente equivalente a un wedge no trivial de esferas de dimensión $n-1$, donde n es el rango de Lie de L. Si $n \neq 2$, entonces L está en las hipótesis del Teorema 3.5.1. Si $n = 2$, $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(L)$ pues $p \nmid (G : L)$. En cualquier caso, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre. □

Observación 3.5.3. El Corolario 3.5.2 no da información en el caso de que L tiene rango de Lie 2 y $p \mid (G:L)$. Sabemos que $\pi_1(\mathcal{A}_p(L))$ es un grupo libre pero si $p \mid (G:L)$ podría ser que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \ncong \pi_1(\mathcal{A}_p(L))$. Por ejemplo, tomemos $L = L_3(2^2)$ y $p = 2$. Notar que $\mathrm{Out}(L) = D_{12}$. Hemos computado $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ para todas las posibilidades de G tal que $L \leq G \leq \mathrm{Aut}(L)$, y todos resultaron libres. Si $G = \mathrm{Aut}(L)$, $\mathcal{A}_p(G)$ es simplemente conexo, mientras que $\pi_1(\mathcal{A}_p(L))$ es un grupo libre no trivial.

La simple conexión de los complejos de p-subgrupos fue ampliamente estudiada. Ver por ejemplo [Asc93, Das95, Das98, Das00, Kso03, Kso04, Qui78, Sha04, Smi11]. En general, cuando el grupo tiene p-rango al menos 3, se espera que su complejo de p-subgrupos sea simplemente conexo, e incluso a menudo Cohen-Macaulay (ver [Smi11, p.290]). Por lo tanto, el teorema anterior realmente cubre una clase bastante grande de grupos casi simples.

Recordemos la clasificación de J. Walter de grupos simples con 2-subgrupos de Sylow abelianos [Wal69].

Teorema 3.5.4 (Walter's Classification)**.** *Sea L un grupo simple con un 2-subgrupos de Sylow abeliano S. Entonces L es isomorfo a uno de los siguientes grupos:*

1. $L_2(q)$, $q \equiv 3,5 \mod 8$ *(y S es elemental abeliano de orden 2^2),*
2. $L_2(2^n)$, $n \geq 2$ *(y S es elemental abeliano de orden 2^n),*
3. ${}^2G_2(3^n)$, *n impar (y S es elemental abeliano de orden 2^3),*
4. J_1 *(y S es elemental abeliano de orden 2^3).*

En la demostración del siguiente resultado, trabajamos con el poset de Bouc $\mathcal{B}_p(G)$ de los p-subgrupos radicales no triviales, en lugar de $\mathcal{A}_p(G)$. Recordemos que $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{B}_p(G)$ tienen el mismo tipo homotópico débil, y en particular $\pi_1(\mathcal{A}_p(G)) \cong \pi_1(\mathcal{B}_p(G))$.

Teorema 3.5.5. *Supongamos que G es casi simple, $p = 2$ y $F^*(G)$ tiene 2-subgrupos de Sylow abelianos. Entonces $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es libre.*

Demostración. Sea $L = F^*(G)$. Por el Teorema de Walter 3.5.4, L es uno de los grupos (1)...(4).

El caso (2) se sigue del caso disconexo del Teorema 3.5.1.

En el caso (4), $G = J_1$ y $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es libre en 4808 generadores por cálculos en computadora con GAP [GAP18] y el paquete [FPSC19].

En el caso (3), $L = {}^2G_2(3^n) = \mathrm{Ree}(3^n)$, con n impar. Entonces $\mathrm{Out}(L) \cong C_n$ tiene orden impar y $\mathcal{A}_2(G) = \mathcal{A}_2(L)$. Alcanza con probar que $\mathcal{B}_2(L)$ tiene altura 1. Notar que $\mathcal{S}_2(L) = \mathcal{A}_2(L)$. Sea $q = 3^n$. Por [GLS98, Theorem 6.5.5], los normalizadores de los 2-subgrupos no triviales de L tienen las siguientes formas: $C_2 \times L_2(q)$ para involuciones y $(C_2^2 \times D_{(q+1)/2}) \rtimes C_3$ para 4-subgrupos. Si $t \in L$ es una involución, $O_2(N_L(t)) = \langle t \rangle$. Si X es un subgrupo de orden 4 de L entonces $X < O_2(N_L(X)) \cong C_2^3$ pues $q \equiv 3 \mod 4$. Para un 2-subgrupo de Sylow S de L

se tiene que $S = O_2(N_L(S))$. Por lo tanto, el poset $\mathcal{B}_2(L)$ consiste solamente de los 2-subgrupos de Sylow y los subgrupos de orden 2. En consecuencia, $\mathcal{B}_2(L)$ tiene altura 1 y por lo tanto tiene grupo fundamental libre.

En el caso (1), $L = L_2(q)$, $q \equiv 3,5 \mod 8$, por lo que q es impar y no es un cuadrado. Luego $\mathrm{Out}(L)/\mathrm{Outdiag}(L)$ tiene orden impar y podemos asumir que $L \leq G \leq \mathrm{Inndiag}(L)$. En cualquier caso, $m_2(G) = 2$ por [GLS98, Theorem 4.10.5(b)]. □

Ahora calculamos el grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(G)$ para algunos grupos esporádicos particulares L. Notar que $m_p(L) \leq 2$ si $p > 7$. Ver Tabla A.6 para el p-rango de los grupos simples Esporádicos y Tabla A.5 para sus grupos de automorfismos externos.

Ejemplo 3.5.6. Por cálculos en computadora, $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es libre para $L = J_1$ o J_2. Notar que $\mathrm{Out}(J_1) = 1$ y $\mathrm{Out}(J_2) = C_2$. Si p es impar, $m_p(G) \leq 2$ para $L = J_1$ o J_2.

Ejemplo 3.5.7. Si $G = J_3$ o O'N y $p = 3$, entonces $\pi_1(\mathcal{A}_3(G))$ es libre. Por [Kot97, Proposition 3.1.4] y [UY02, Section 6.1], solo hay dos clases de conjugación de 3-subgrupos radicales no triviales de G. Por lo tanto, $\mathcal{K}(\mathcal{B}_3(G))$ tiene dimension 1. Para $p > 3$, $m_p(G) \leq 2$, por lo que $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre.

Ejemplo 3.5.8. Si $G = \mathrm{McL}$ y $p = 3$, entonces $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre. Por cálculos en computadora, si S es un 3-subgrupo de Sylow de G, entonces existen tres subgrupos de S (salvo conjugación) que son 3-subgrupos radicales no triviales de G, digamos A, B y S. Sus órdenes son $|A| = 81$, $|B| = 243$, $|S| = 729$. Además, $A, B \trianglelefteq S$ y $A \not\leq B$. Entonces $A^g \not\leq B$ para todo $g \in G$ tal que $A^g \leq S$, y por lo tanto $\mathcal{K}(\mathcal{B}_3(G))$ es 1-dimensional. Para $p > 3$, $m_p(G) \leq 2$, y $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es libre.

Proposición 3.5.9. *Supongamos que L es un grupo esporádico de Mathieu. Si p es impar entonces $m_p(G) \leq 3$ y $\mathcal{A}_p(G)$ tiene grupo fundamental libre. Si $p = 2$, $\mathcal{A}_2(G)$ es simplemente conexo excepto para $L = M_{11}$, que en tal caso $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es un grupo libre no trivial.*

Demostración. Sea L uno de los grupos esporádicos de Mathieu M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23} o M_{24}. En todos los casos, $m_p(L) \leq 2$ si p es impar (ver Tabla A.6). Asumamos que $p = 2$. Recordar que $\mathrm{Aut}(L) = L$ para $L = M_{11}$, M_{23} y M_{24}, y $\mathrm{Out}(L) = C_2$ para $L = M_{12}$ y M_{22}.

Notar que $m_2(M_{11}) = 2$. Para $L = M_{12}$ o M_{22} chequeamos con GAP que $\mathcal{A}_2(L)$ es simplemente conexo.

Si $G = \mathrm{Aut}(M_{22})$, entonces $\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{A}_p(G) : X \cap M_{22} = 1\} \subseteq \mathrm{Min}(\mathcal{A}_p(G))$. Sea $\mathcal{N} = \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{S}$. Recordar que $\mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_2(M_{22})$ por la Observación 3.1.12 y por lo tanto es simplemente conexo. Cualquier $A \in \mathcal{S}$ está generado por una involución que actúa como automorfismo externo en M_{22}. Por [GLS98, Table 5.3c], su centralizador en M_{22} tiene un 2-subgrupo normal no trivial. Esto es, $\mathcal{A}_2(C_{M_{22}}(A))$ es homotópicamente trivial por la Proposición 1.3.15. Entonces para cualquier $A \in \mathcal{S}$, $\mathcal{N} \cup \mathcal{A}_2(G)_{\geq A}$ es simplemente conexo por el teorema de van Kampen y, recursivamente, $\mathcal{A}_2(G)$ es simplemente conexo. Un razonamiento similar muestra que $\mathcal{A}_2(G)$ es simplemente conexo para $G = \mathrm{Aut}(M_{12})$ (ver [GLS98, Table 5.3b]).

Por [Smi11, p.295], $\mathcal{K}(\mathcal{A}_2(M_{24}))$ es homotópicamente equivalente a su geometría 2-local, que es simplemente conexa.

Queda por determinar el grupo fundamental de $\mathcal{A}_2(M_{23})$. Para esto usamos la clasificación de subgrupos maximales de M_{23} y M_{22}. Primero notar que M_{22} es un subgrupo maximal de M_{23} de índice impar 23. En particular, todo 2-subgrupo elemental abeliano de M_{23} está contenido en algún conjugado de M_{22}. Luego $\mathcal{U} = \{\mathcal{A}_2(M_{22}) \cup \mathcal{A}_2(M_{22}^g) \,:\, g \in M_{23}\}$ es un cubrimiento de $\mathcal{A}_2(M_{23})$ por subposets. Hemos calculado la intersección de los diferentes conjugados de M_{22} con GAP. Todas las intersecciones $M_{22} \cap M_{22}^g$, con $g \in M_{23} - M_{22}$, forman un subgrupo de M_{22} de orden 20160. Todos los subgrupos maximales de M_{22} tienen orden menor a 20160 excepto por el subgrupo maximal isomorfo a $L_3(2^2)$ (y todos sus conjugados) que tiene orden exactamente 20160. Por lo tanto, $M_{22} \cap M_{22}^g \cong L_3(2^2)$ y, por el teorema de van Kampen, cada elemento de $\mathcal{U}$ es simplemente conexo. Las intersecciones triples de diferentes conjugados de M_{22} son todas isomorfas a $C_2^2 \rtimes \mathbb{A}_8$, y las intersecciones cuádruples de diferentes conjugados de M_{22} son todas isomorfas a $C_2^4 \rtimes C_3$. Esto muestra que las intersecciones dobles y triples de elementos de $\mathcal{U}$ son conexas. En consecuencia, por el teorema de van Kampen, $\mathcal{A}_2(M_{23})$ es simplemente conexo. □

Ahora investigamos el grupo fundamental del complejo de Quillen para los grupos alternos en $p = 2$. Usamos los resultados de Ksontini sobre $\pi_1(\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n))$ (ver Sección 3.2).

Observación 3.5.10. Por la lista del Teorema 3.5.1, el poset $\mathcal{A}_2(\mathbb{A}_n)$ es disconexo si y solo si $n = 5$, pues, para $p = 2$, el único isomorfismo de un grupo alterno con un grupo de esa lista es $\mathbb{A}_5 \cong L_2(2^2)$ (ver Teorema A.1.4).

Proposición 3.5.11. *Sea $n \geq 4$. El grupo fundamental de $\mathcal{A}_2(\mathbb{A}_n)$ es simplemente conexo para $n = 4$ y $n \geq 8$. Para $n = 5$, cada componente de $\mathcal{A}_2(\mathbb{A}_5)$ es simplemente conexa, para $n = 6$ es libre de rango de* 16*, y para $n = 7$ es libre de rango* 176.

Demostración. Si $n = 4$, entonces $O_2(\mathbb{A}_4) \neq 1$ y $\mathcal{A}_2(\mathbb{A}_4)$ es contráctil. Si $n = 5$, $\mathbb{A}_5 = L_2(2^2)$, cuyos 2-subgrupos de Sylow se intersecan trivialmente por el Teorema A.1.3. Por lo tanto, sus componentes conexas son contráctiles (y en particular simplemente conexas). Los casos $n = 6, 7, 8$ se pueden obtener por cálculos directos por computadora.

Probemos el caso $n \geq 9$. Vamos a proceder similarmente a los teoremas anteriores. Tomemos $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n) \,:\, A \cap \mathbb{A}_n \neq 1\}$. Por la Observación 3.1.12, $\mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_2(\mathbb{A}_n)$, y sea $\mathcal{S} = \mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n) - \mathcal{N}$ su complemento en $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n)$. Notar que $\mathcal{S}$ consiste de los subgrupos de orden 2 de $\mathbb{S}_n$ generados por involuciones que se pueden escribir con un número impar de transposiciones disjuntas. Observar también que para cualquier $A \neq B \in \mathcal{S}$, $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n)_{\geq A} \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n)_{\geq B} \subseteq \mathcal{N}$. Por el Teorema de Ksontini 3.2.1, $\pi_1(\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n)) = 1$. Luego por el teorema de van Kampen theorem, para probar que $\pi_1(\mathcal{A}_2(\mathbb{A}_n)) = \pi_1(\mathcal{N})$ es trivial, solo necesitamos mostrar que las intersecciones $\mathcal{N} \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{S}_n)_{\geq A} \simeq \mathcal{A}_2(C_{\mathbb{A}_n}(A))$ son simplemente conexas para todo $A \in \mathcal{S}$.

Apelamos ahora a la caracterización de los centralizadores de involuciones en $\mathbb{A}_n$ para mostrar que $\mathcal{A}_2(C_{\mathbb{A}_n}(x))$ es simplemente conexo si $\langle x \rangle \in \mathcal{S}$. Sea $x \in \mathbb{S}_n - \mathbb{A}_n$ una involución actuando como producto de r transposiciones disjuntas y con s puntos fijos. Por [GLS98, Proposition 5.2.8], $C_{\mathbb{A}_n}(x) \cong (H_1 \times H_2)\langle t \rangle$, donde $H_1 \leq \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{S}_r$ tiene índice 2, y $H_2 \cong \mathbb{A}_s$. Aquí, el producto wreath es tomado con respecto a la permutación natural de $\mathbb{S}_r$ en el conjunto $\{1, \ldots, r\}$. Además, $H_1 \cong E \rtimes \mathbb{S}_r$ donde $E \leq \mathbb{Z}_2^r$ es el subgrupo $\{(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}_2^r : \sum_i a_i = 0\}$. Si $s \leq 1$ entonces $t = 1$. Si $s \geq 2$, entonces $t \neq 1$, $H_1\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{S}_r$ y $H_2\langle t \rangle \cong \mathbb{S}_s$. En cualquier caso, $E \trianglelefteq (H_1 \times H_2)\langle t \rangle$ pues $[H_1, H_2] = 1$ y $E \trianglelefteq H_1\langle t \rangle$. Por lo tanto, si $r > 1$, $O_2(C_{\mathbb{A}_n}(x)) \neq 1$ y $\mathcal{A}_2(C_{\mathbb{A}_n}(x))$ es contráctil. En particular es simplemente conexo. Si $r = 1$, $C_{\mathbb{A}_n}(x) \cong H_2\langle t \rangle \cong \mathbb{S}_s$, y por lo tanto $\mathcal{A}_2(C_{\mathbb{A}_n}(x)) \simeq \mathcal{A}_2(\mathbb{S}_s)$ es simplemente conexo por el Teorema 3.2.1 (notar que $s \geq 7$ pues $2r + s = n \geq 9$). □

Combinando la Proposición 3.5.11 con el Teorema 3.2.1 deducimos el siguiente corolario.

Corolario 3.5.12. *Si $\mathbb{A}_n \leq G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_n)$, entonces $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es un grupo libre.*

Demostración. Si $n \neq 6$, entonces $G = \mathbb{A}_n$ o $\mathbb{S}_n$. En cualquier caso, $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es libre por la Proposición 3.5.11 y el Teorema 3.2.1. Para $n = 6$, $\mathrm{Out}(\mathbb{A}_6) = C_2 \times C_2$ y $\mathbb{A}_6 < \mathbb{S}_6 < \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_6)$. Si $F^*(G) = \mathbb{A}_6$, entonces $G \cong \mathbb{S}_6$, $\mathbb{A}_6$ o $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_6)$. En cualquier caso, $\pi_1(\mathcal{A}_2(G))$ es libre por los resultados anteriores o por cálculos en la computadora. □

Capítulo 4

La conjetura de Quillen

En [Qui78], D. Quillen conjeturó que G posee un p-subgrupo normal no trivial (es decir $O_p(G) \neq 1$) si y solo si $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es contráctil. Si $O_p(G) \neq 1$ entonces $\mathcal{S}_p(G)$ es cónicamente contráctil via la homotopía $P \leq PO_p(G) \geq O_p(G)$, y por lo tanto $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ es contráctil. La conjetura de Quillen está enfocada en la recíproca: si $O_p(G) = 1$ entonces $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ no es contráctil. Quillen mostró que su conjetura vale para grupos de p-rango a lo sumo 2 [Qui78, Proposition 2.10], grupos resolubles [Qui78, Corollary 12.2] y para grupos de tipo Lie en característica p [Qui78, Theorem 3.1]. Un gran avance sobre esta conjetura fue hecho por M. Aschbacher y S.D. Smith en [AS93], basado en la clasificación de grupos finitos simples. Ellos probaron que la conjetura vale si $p > 5$ y G no contiene ciertas componentes unitarias (ver Teorema 4.1.2 debajo).

En general, se cree que una versión más fuerte de la conjetura de Quillen vale. Esto es, si $O_p(G) = 1$ entonces $\tilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Q}) \neq 0$. Tanto en [Qui78] como en [AS93] se muestra esta versión fuerte de la conjetura. La mayoría de las demostraciones de Quillen consisten en mostrar que el grupo de homología de dimensión superior $\tilde{H}_{m_p(G)-1}(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Z})$ es no nulo cuando $O_p(G) = 1$. Notar que este grupo es abeliano libre. Aschbacher y Smith llaman a esta propiedad la *Quillen dimension property en p*, $(QD)_p$ para abreviar, y es una herramienta central en la demostración de su teorema principal sobre la conjetura de Quillen. Aún así, hay grupos que no satisfacen $(QD)_p$. Por ejemplo, cuando G es finito de tipo Lie en característica p, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ tiene el tipo homotópico del Tits building de G, que en general tiene menor dimensión que el complejo de Quillen. En [AS93, Theorem 3.1] hay una lista de los grupos simples para los cuales sus p-extensiones podrían no satisfacer $(QD)_p$.

En este capítulo repasamos los resultados sobre la conjetura de Quillen. Explicamos brevemente las ideas detrás de las demostraciones de algunos casos de la conjetura en la Sección 4.1. Esbozamos la demostración del resultado de Aschbacher-Smith [AS93, Main Theorem] en la Sección 4.2.

En la Sección 4.3, probamos nuevos casos de la conjetura de Quillen, que no eran sabidos hasta el momento.

Teorema 4.3.1. *Si K es un subcomplejo de $\mathbb{Z}$-acíclico y 2-dimensional G-invariante de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, entonces $O_p(G) \neq 1$.*

El resultado previo nos provee de una herramienta útil para probar que un grupo verifica la conjetura de Quillen.

Corolario 4.3.2. *Sea G un grupo finito. Supongamos que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ admite un subcomplejo homotópicamente a éste, 2-dimensional y G-invariante. Si $O_p(G) = 1$ entonces $\tilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Z}) = 0$.*

En particular, esto muestra que la conjetura vale para grupos de p-rango 3 (extiendo el caso de p-rango 2). Ver Corolario 4.3.3. Nuestra demostración del caso 2-dimensional está basado en la Clasificación pues usamos la teoría desarrollada por Oliver y Segev en [OS02]. En la Sección 4.4 damos ejemplos de grupos que satisfacen la conjetura que no están incluidos en los teoremas de [AS93].

Los resultados de las Secciones 4.3 y 4.4 aparecen en un artículo escrito en colaboración con I. Sadofschi Costa y A. Viruel [PSV19].

En la Sección 4.5 trabajamos con la versión fuerte de la conjetura de Quillen.

Conjetura fuerte de Quillen. *Si $O_p(G) = 1$ entonces $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) \neq 0$.*

Probamos que esta versión fuerte puede ser estudiada bajo la suposición $O_{p'}(G) = 1$.

Teorema 4.5.1. *Sea G un grupo finito. Supongamos que los subgrupos propios de G satisfacen la conjectura fuerte de Quillen y que $O_{p'}(G) \neq 1$. Entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen. En particular, un contraejemplo minimal G a la conjetura fuerte de Quillen tiene $O_{p'}(G) = 1$.*

Este teorema generaliza el resultado de Aschbacher-Smith [AS93, Proposition 1.6], en el cual prueban un resultado análogo pero para $p > 5$. Ellos usan fuertemente la Clasificación en varias partes de la demostración de su proposición. Nosotros solo la usamos para invocar el caso p-resoluble Teorema 4.1.3.

En combinación con el Corolario 4.3.2 (que está enunciado en términos de homología integral y no en homología racional) y el Teorema 3.4.2, obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 4.5.13. *Sea G un grupo finito. Supongamos que los subgrupos propios de G satisfacen la conjetura fuerte de Quillen y que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ posee un subcomplejo 2-dimensional, G-invariante y homotópicamente equivalente a éste. Entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen.*

Corolario 4.5.14. *La conjetura fuerte de Quillen vale para grupos de p-rango a lo sumo 3.*

Finalmente, con un exhaustivo uso de nuestros resultados y las técnicas desarrolladas a lo largo de estos capítulos, culminamos con la demostración de la conjetura fuerte de Quillen para grupos de p-rango 4 y reducimos el estudio de la conjetura a grupos con componentes de p-rango al menos 2.

Teorema 4.6.8. *La conjetura fuerte de Quillen vale para grupos de p-rango a lo sumo* 4.

Teorema 4.6.3. *Sea $L \leq G$ una componente tal que $L/Z(L)$ tiene p-rango* 1*. Si la conjetura fuerte de Quillen vale para los subgrupos propios de G, entonces vale para G.*

En particular, esto trata con algunos de los casos excluídos en [AS93] y nos permite extender el teorema principal de Aschbacher-Smith a $p = 5$.

Corolario 4.6.5. *Las conclusiones del Main Theorem de [AS93] valen para $p = 5$.*

4.1. Antecedentes sobre la conjetura de Quillen

En esta sección resumimos los casos en los que se sabe que la conjetura es válida, e ilustramos las ideas detrás de sus demostraciones. Trabajamos con la siguiente versión fuerte de la conjetura:

Conjetura fuerte de Quillen. *Si $O_p(G) = 1$ entonces $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) \neq 0$.*

Teorema 4.1.1. *La conjetura fuerte de Quillen vale en los siguientes casos:*

1. *$m_p(G) \leq 2$ ([Qui78, Proposition 2.10]),*
2. *G es de tipo Lie en característica p ([Qui78, Theorem 3.1]),*
3. *G es resoluble ([Qui78, Corollary 12.2]),*
4. *$G = \mathrm{GL}_n(q)$ con $q \equiv 1 \mod p$ ([Qui78, Theorem 12.4]),*
5. *G es p-resoluble (varios autores),*
6. *G es casi simple ([AK90, Theorem 3]).*

El resultado de Aschbacher-Smith [AS93, Main Theorem] tiene un enunciado más técnico.

Teorema 4.1.2 (Aschbacher-Smith)**.** *Asumir que $p > 5$ y que, cuando G tiene una componente unitaria $U_n(q)$ con $q \equiv -1 \mod p$ y q impar, $(QD)_p$ vale para todas las p-extensiones de $U_m(q^{p^e})$ con $m \leq n$ y $e \in \mathbb{Z}$. Entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen.*

Aquí, una p-extensión de un grupo simple L es un producto semidirecto LA de L por un p-grupo elemental abeliano A induciendo automorfismos externos en L. Recordemos que G se dice que tiene (o satisface) *la Quillen dimension property en* p, $(QD)_p$ para abreviar, si $\tilde{H}_{m_p(G)-q}(\mathcal{A}_p(G),\mathbb{Z}) \neq 0$. Como el último grupo de homología es abeliano libre, esto equivale a que $\tilde{H}_{m_p(G)-1}(\mathcal{A}_p(G),\mathbb{Q}) \neq 0$.

De hecho, se cree que las p-extensiones de grupos unitarios como en el enunciado del teorema de Aschbacher-Smith satisfacen $(QD)_p$ si $p > 3$, por lo que esta hipótesis no debería ser necesaria. Ver [AS93, Conjecture 4.1] y [AS93, Proposition 4.8].

Por otro lado, el problema de extender el Teorema 4.1.2 al primo $p = 5$ recae en la presencia de ciertos grupos de Suzuki como componentes de G (ver Teoremas 4.2.6 y 4.2.7). Para $p = 2$ y $p = 3$, más obstrucciones aparecen y la extensión a estos casos es incluso más delicada y requeriría un análisis más profundo. En aplicación de nuestro resultado sobre la conjetura de Quillen Corolario 4.3.2, presentamos en la Sección 4.4 algunos ejemplos de grupos que satisfacen la conjetura para $p = 2$ y 5 que no están incluidos en las hipótesis de los teoremas de [AS93].

A lo largo de esta sección trabajamos con homología racional, y por "acíclico" queremos decir $\mathbb{Q}$-acíclico.

Casos probados por Quillen

En [Qui78], Quillen mostró algunas casos de su conjetura, que están listados en el Teorema 4.1.1.

El caso de p-rango 2 es una consecuencia del siguiente resultado de Serre: un grupo finito actuando en un árbol tiene un punto fijo. Si $m_p(G) = 2$ y $\mathcal{A}_p(G)$ es acíclico, entonces es un árbol y tiene un punto fijo por la acción de conjugación de G en $\mathcal{A}_p(G)$. Esto implica que G tiene un p-subgrupo normal no trivial.

Cuando G es un grupo de tipo Lie en característica p, Quillen notó que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ es homotópicamente equivalente al Tits building de G [Qui78, Theorem 3.1]. Por el resultado clásico de Solomon-Tits, el building de G tiene el tipo homotópico de un bouquet de esferas de dimensión $n-1$, donde n es el rango del grupo de tipo Lie. Esto resultado puede ser interpretado también considerando el poset de Bouc $\mathcal{B}_p(G)$. En este caso, $\mathcal{B}_p(G)$ es el poset de radicales unipotentes de los subgrupos parabólicos de G, y es isomorfo al poset opuesto de los subgrupos parabólicos de G, cuyo order complex da el building de G.

La demostración del caso resoluble es reducida a un caso base. Esto es, Quillen primero probó que los grupos de la forma LA tienen $(QD)_p$, donde L es un p'-grupo resoluble sobre el cual el p-grupo elemental abeliano A actúa fielmente. Si G es resoluble y $O_p(G) = 1$, por el Teorema de Hall-Higman 1.1.6, $L := O_{p'}(G) \neq 1$ y $C_G(L) \leq L$. Así, cada $A \in \mathcal{A}_p(G)$ actúa fielmente en L (pues $O_p(LA) = C_A(L) = 1$). Si A tiene p-rango $m_p(G)$, por el caso LA, $0 \neq H_{m_p(G)-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \subseteq H_{m_p(G)-1}(\mathcal{A}_p(G))$. Esta inclusión vale pues A es un elemento maximal de $\mathcal{A}_p(G)$ (ver [Qui78, Theorem 12.1]).

Ahora mostramos el caso LA. La demostración de este caso está incluida en las conclusiones de [Qui78, Theorem 11.2]. Por el Teorema 3.1.4, sabemos que $\mathcal{A}_p(LA)$ es Cohen-Macaulay (con $C_A(L)$ no necesariamente trivial). Si además $C_A(L) = 1$, mostramos que LA tiene $(QD)_p$. Procedemos por inducción como en la demostración del Teorema 3.1.4.

Sea $G = LA$, donde L es un p'-grupo resoluble sobre el cual el p-grupo elemental abeliano actúa fielmente (es decir $C_A(L) = 1$). Asumamos que L tiene un subgrupo propio no trivial H que es LA-invariante. Entonces, si A actúa fielmente en H (resp. L/H), HA tiene $(QD)_p$ (resp. $(L/H)A$ tiene $(QD)_p$). Considerar la función $q : \mathcal{A}_p(LA) \to \mathcal{A}_p((L/H)A)$ inducida por el cociente $L \to L/H$. Sea $B = C_A(L/H)$. Tenemos un isomorfismo del grupo de homología $\tilde{H}_{m_p(A)-1}(\mathcal{A}_p(LA))$ con el grupo

$$\tilde{H}_{m_p(A)-1}(\mathcal{A}_p((L/H)A)) \bigoplus_{C\in\mathcal{A}_p((L/H)A)} \tilde{H}_{m_p(C)-1}(\mathcal{A}_p(HC)) \otimes \tilde{H}_{m_p(A)-m_p(C)-1}(\mathcal{A}_p((L/H)A)_{>C}).$$

Ver [Qui78, Theorem 9.1] o [Pit16, Teorema 2.1.28]. Si $B = 1$, entonces $(L/H)A$ tiene $(QD)_p$ por inducción y por lo tanto LA lo tiene por la descomposición homológica anterior. Supongamos que $B \neq 1$. Notar que $\mathcal{A}_p((L/H)A)_{>B} = \mathcal{A}_p((L/H)(A/B))$ es Cohen-Macaulay y A/B actúa fielmente en L/H. Así, $\tilde{H}_{m_p(A)-m_p(B)-1}(\mathcal{A}_p((L/H)A)_{>B}) \neq 0$. Para ver que LA tiene $(QD)_p$, por inducción y la descomposición homológica anterior, alcanza con probar que $C := C_B(H) = O_p(HB) = 1$. Observar que $[L,C] \leq [L,B] \leq H$. Sean $l \in L$ y $c \in C$. Entonces $lcl^{-1} = [l,c]c \in HC \cong H \times C$. Dado que lcl^{-1} es un p-elemento, $[l,c] = 1$. En consecuencia, $[L,C] = 1$ y esto implica que $C \leq C_A(L) = 1$.

Si L no tiene subgrupos propios no triviales y LA-invariantes, entonces L es característicamente simple. Como L es resoluble, L es un q-grupo elemental abeliano y $A/C_A(L)$ actúa irreduciblemente en L por automorfismos lineales. Como la acción de A en L es fiel, esto implica que A es cíclico, $\mathcal{A}_p(LA)$ es disconexo de altura 0 y $(QD)_p$ vale para LA.

Otras demostraciones del caso resoluble pueden encontrarse en [Smi11] y [PW00].

La demostración de Quillen del caso $G = \mathrm{GL}_n(q)$ con $q \equiv 1 \mod p$ consiste en mostrar que $\mathcal{A}_p(G)$ es Cohen-Macaulay de dimensión $n-1$.

El caso p-resoluble

Esbozamos una ligera variación de la demostración del caso p-resoluble de la conjetura sugerido por Alperin en unas notas no publicadas durante los ochenta. La demostración original está explicada en el libro de Smith [Smi11, Theorem 8.2.12]. Nosotros la simplificamos combinándola con la demostración del caso resoluble presentada anteriormente. Otra demostración de este caso es debida a A. Díaz Ramos [DR16].

Si G es p-resoluble con $O_p(G) = 1$, mostramos que G tiene $(QD)_p$. Similar al caso resoluble, por el Teorema de Hall-Higman 1.1.6, alcanza con probar el caso $G = LA$, donde L es un p'-grupo admitiendo una acción fiel de un p-grupo elemental abeliano A. Probamos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3. *Sea $G = LA$, donde L es un p'-grupo sobre el cual el p-grupo elemental abeliano A actúa fielmente. Entonces G tiene $(QD)_p$.*

Demostración. (Idea) Tomemos una configuración minimal LA que falle de satisfacer $(QD)_p$. La idea es construirse un subgrupo resoluble $K \leq L$ que admita una acción fiel de A. Por minimalidad, será que $K = L$ y por lo tanto, por el caso resoluble, LA tiene $(QD)_p$.

Notar que la reducción de la configuración resoluble LA al caso L característicamente simple funciona de la misma manera sin asumir resolubilidad. Luego por minimalidad, L es un grupo característicamente simple que es el producto directo de los A-conjugados de una componente simple L_0 de L. Vamos a encontrar un subgrupo de Sylow S_0 de L_0 para el cual $N_A(L_0)/C_A(L_0)$ actúa fielmente en S_0, es decir $N_A(L_0) \leq N_A(S_0)$ y $C_{N_A(L_0)}(S_0) \leq C_A(L_0)$. Una vez que escogimos a S_0, tomamos K que sea el producto de los A-conjugados de S_0. Notar que K es resoluble. De $C_{N_A(L_0)}(S_0) \leq C_A(L_0)$, se sigue que $C_A(K) = 1$, y la minimalidad implica que $L = K$.

Ahora escogemos el subgrupo de Sylow $S_0 \leq L_0$. El caso de interés es $N_A(L_0) > C_A(L_0)$ (si no cualquier Sylow funciona). Por acción coprima [Asc00, (18.7)], $N_A(L_0)$ fija algún q-subgrupo de Sylow de L_0 para cada primo q que divide a $|L_0|$. Como la acción de $N_A(L_0)$ en L_0 es no trivial, y L_0 está generado por estos subgrupos de Sylow, $N_A(L_0)$ debe actuar no trivialmente en al menos uno de estos subgrupos de Sylow, digamos S_0. Usando la clasificación de los grupos finitos simples para describir sus grupos de automorfismos externos, se puede ver que $N_A(L_0)/C_A(L_0) \leq \mathrm{Out}(L_0)$ es cíclico de orden p. Esto nos da el requerimiento $C_{N_A(L_0)}(S_0) \leq C_A(L_0)$. □

Un resultado bien conocido de Hawkes-Isaacs sobre la conjetura de Quillen acierta que, para grupos p-resolubles G con un p-subgrupo de Sylow abeliano, $O_p(G) \neq 1$ si y solo si $\chi(\mathcal{A}_p(G)) = 1$ (ver [HI88]). Sin embargo, ellos no explicitan qué grado de la homología es no trivial cuando $O_p(G) = 1$.

Omitimos la demostración del caso casi simple de la conjetura pues requiere un lenguaje más técnico. Ver [AK90].

4.2. Boceto de los métodos y demostración de Aschbacher-Smith

En esta sección damos una visión en conjunto de las técnicas y la demostración del teorema principal de [AS93] (ver Teorema 4.1.2 arriba). Excluimos las componentes unitarias $U_n(q)$ con $q \equiv -1 \mod p$ del análisis para simplificar los aspectos técnicos de la demostración. Aquí también trabajamos con homología racional y por "acíclico" queremos decir $\mathbb{Q}$-acíclico.

De manera similar a los casos resolubles y p-resolubles de la conjetura, la idea es construirse esferas en la homología. En el contexto general, podría pasar que los grupos fallen de tener $(QD)_p$, por lo que es posible que tengamos que construir esferas en otros grupos de homología en lugar del grupo de dimensión mayor. De esta manera, las herramientas principales son el variante del método de Robinson el Lema 4.2.1 y el Homology Propagation Lemma 4.2.5.

Antes de citar las herramientas principales de [AS93], damos una muy breve explicación de la demostración del Teorema 4.1.2. Queremos probar que si $O_p(G) = 1$ entonces $\mathcal{A}_p(G)$ no es acíclico, cuando $p > 5$ y G no tiene componentes unitarias $U_n(q)$ con $q \equiv -1 \mod p$. Tomemos un contraejemplo minimal G sujeto a nuestras condiciones. La primera reducción importante usando el Homology Propagation Lemma 4.2.5 es que $O_{p'}(G) = 1$. Esta reducción depende profundamente del hecho de que $p > 5$ y no puede ser llevado a cabo de la misma manera sin asumir esta hipótesis.

Una vez que podemos suponer que $O_{p'}(G) = 1$, la segunda reducción consiste en asumir que cada componente de G tiene alguna p-extensión dentro de G que no satisface $(QD)_p$. Por contradicción, suponemos que hay una componente L cuyas p-extensiones satisfacen $(QD)_p$. Entonces, existe un producto semidirecto "maximal" $LB \leq G$, con B p-subgrupo elemental abeliano induciendo automorfismos externos en L, con LB satisfaciendo $(QD)_p$. Bajo una adecuada elección de B, el Homology Propagation Lemma 4.2.5 con $H = LB$, $K = C_G(H)$ nos da homología no trivial en $\mathcal{A}_p(G)$. Una vez más, las hipótesis del Lema 4.2.5 están garantizadas pues $p > 5$.

En el paso final, tenemos que $O_{p'}(G) = 1$ y ninguna componente de G satisface $(QD)_p$ para todas sus p-extensiones. Como mencionamos antes, Aschbacher y Smith dieron una lista con los grupos simples para los cuales algunas de sus p-extensiones podrían no satisfacer $(QD)_p$ (ver [AS93, Theorem 3.1]). Este resultado depende fuertemente de la clasificación de los grupos finitos simples. La contradicción final viene de encontrar un p'-grupo 2-hiperelemental $H \leq G$ tal que la característica de Euler de los puntos fijos $\mathcal{S}_p(G)^H$, con la ayuda de la variante del método de Robinson Lema 4.2.1, tiene dos valores diferentes cuando la calculamos de dos formas distintas.

En lo que sigue, citamos los resultados principales que necesitamos para dar un boceto más detallado de la demostración del resultado de Aschbacher-Smith.

Recordemos que un grupo q-hiperelemental H es una extensión split de un grupo cíclico normal por un q-grupo. El siguiente lema es una variación de [Rob88, Proposition 2.3]. La proposición original de Robinson acierta que si G contiene un p'-subgrupo q-hiperelemental H tal que $\mathcal{S}_p(G)^H = \varnothing$, entonces $\tilde{L}(\mathcal{S}_p(G)) \neq 0$ y en particular, $\mathcal{S}_p(G)$ no es acíclico. Aquí, $\tilde{L}(K)$ denota el *módulo de Lefschetz (virtual)* de un G-complejo K de dimensión d. Está definido como la suma alternada de los grupos del complejo de cadenas sobre $\mathbb{Z}$: $\tilde{L}(K) = \bigoplus_{i=-1}^{d}(-1)^i C_i(K)$. Si $\tilde{L}(L) = 0$ entonces $\tilde{\chi}(K) = 0$.

Lema 4.2.1 ([AS93, Lemma 0.14]). *Supongamos que un grupo q-hiperelemental H actúa en un poset acíclico X. Entonces $\tilde{\chi}(X^H) \equiv 0 \mod q$.*

El uso de la Clasificación junto con el resultado de Robinson permiten probar la conjetura de Quillen para muchos grupos simples e incluso mostrar que algunas p-extensiones de grupos simples satisfacen $(QD)_p$. De esta manera, Aschbacher y Kleidman mostraron que si G es casi simple entonces tiene un p'-subgrupo q-hiperelemental H que no fija ningún p-subgrupo excepto si $p=2$ y $F^*(G)=L_3(2^2)$. Luego, por el resultado de Robinson, tales grupos satisfacen la conjetura de Quillen. Más aún, esto prueba la conjetura de Quillen para grupos casi simples (esto es, si $O_p(G)=1$ entonces $\mathcal{A}_p(G)$ no es acíclico).

Los siguientes lemas son útiles para hacer reducciones en los grupos que queremos probar la conjetura de Quillen.

Lema 4.2.2 ([AS93, Lemma 0.11])**.** *Si $N \leq Z(G)$ es un p'-grupo entonces el cociente $G \to G/N$ induce un isomorfismo de posets $\mathcal{A}_p(G) \equiv \mathcal{A}_p(G/N)$.*

Lema 4.2.3 ([AS93, Lemma 0.12])**.** *Si $N \leq G$ es un p'-subgrupo normal entonces hay una inclusión $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G/N)) \subseteq \tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G))$.*

Lema 4.2.4 ([AS93, Lemma 0.13])**.** *Si $N=Z(G)$ o $Z(E(G))$ entonces $O_p(G/N)=O_p(G)N/N$.*

Lema 4.2.5 (Homology Propagation Lemma, [AS93, Lemma 0.27])**.** *Supongamos que $H,K \leq G$ con $K \leq C_G(H)$, $H \cap K$ un p'-grupo y que las siguientes condiciones valen:*

1. *para algún A exhibiendo $(QD)_p$ para H, $\mathcal{A}_p(G)_{\geq A} \subseteq A \times K$,*
2. *$\mathcal{A}_p(K)$ no es acíclico.*

Entonces $\mathcal{A}_p(G)$ no es acíclico.

Aquí, por *A exhibiendo $(QD)_p$ para H* queremos decir que H satisface $(QD)_p$, $m_p(A)=m_p(H)$ y que hay un ciclo no trivial α en el grupo de homología superior de $\mathcal{A}_p(H)$ que contiene una cadena cuyo elemento más grande es A.

Las demostraciones de los siguientes dos teoremas dependen fuertemente de la CGFS. Ellos son una herramienta crucial en la demostración del Teorema 4.1.2 pues permiten obtener las hipótesis del Lema 4.2.5. Notar que ambos teoremas funcionan sin condiciones adicionales para $p>5$.

Teorema 4.2.6 (Existencia de complemento no cónico [AS93, Theorem 2.3])**.** *Asumir que p es impar y que B es un p-grupo elemental abeliano induciendo automorfismos externos en un grupo simple L. Excluir los casos $L=L_2(2^3)$, $U_3(2^3)$ y $\mathrm{Sz}(2^5)$ con $p=3,3,5$ respectivamente. Entonces existe un complemento no cónico B' a L en LB. Esto es, $O_p(C_L(B'))=1$ y ningún miembro de $\mathcal{A}_p(\mathrm{Aut}(L))_{>B'}$ centraliza $C_L(B')$.*

Teorema 4.2.7 (Complementos no cónicos [AS93, Theorem 2.4])**.** *Asumir que IB es un producto semidirecto de un grupo I por un p-grupo elemental abeliano B tal que $F(I)=Z(I)$ es un p'-grupo y que las p-extensiones de las componentes L de I tienen complementos no cónicos como en el Teorema 4.2.6. Entonces algún complemento B' a I en IB satisface $O_p(C_I(B'))=1$.*

Con estos resultados, ahora podemos dar un boceto más detallado de la demostración del resultado principal de Aschbacher-Smith Teorema 4.1.2. Por simplicidad, asumimos que $p > 5$ y que las componentes unitarias que no se sabe que satisfacen $(QD)_p$ no están involucradas en G.

Tomemos G un contraejemplo minimal a la conjetura fuerte de Quillen, es decir sujeto a las condiciones $O_p(G) = 1$ y $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G)) = 0$. La idea es hacer una serie de reducciones sobre el grupo G para llegar a una configuración minimal con algunas propiedades adicionales sobre el cual podemos derivar una contradicción final. Asumimos que $Z(G) = Z(E(G)) = 1$ por el Lema 4.2.4. Notar que $F(G) \leq O_{p'}(G)$.

Primer paso: probamos que un contraejemplo minimal G tiene $O_{p'}(G) = 1$.

Proposición 4.2.8 ([AS93, Proposition 1.6])**.** *Podemos suponer que $O_{p'}(G) = 1$ si $p > 5$.*

En particular esto da que $F(G) = 1$ y por lo tanto, $F^*(G) = E(G)$ es el producto directo de grupos simples, cada uno de orden divisible por p.

Sea $L = O_{p'}(G)$ y supongamos que $L \neq 1$. Si todo p-subgrupo elemental abeliano de G centraliza a L, entonces $[L, \Omega_1(G)] = 1$ y por minimalidad $L \leq G = \Omega_1(G)$. Luego $L \leq Z(G)$, una contradicción. Por lo tanto existe $A \in \mathcal{A}_p(G)$ que actúa fielmente en L, y lo escogemos de rango maximal.

Sean $H = LA$ y $K = C_G(H)$. La idea es usar el Lema 4.2.5, por lo que primero necesitamos $O_p(K) = 1$.

Sea $I = C_G(L)$ y notar que A actúa fielmente en I. Se puede chequear que $F(I) = Z(I) = Z(L)$, que es un p'-grupo. Ahora, la hipótesis $p > 5$ nos garantiza la existencia de un complemento no cónico A' a I en IA por los Teoremas 4.2.6 y 4.2.7. Es decir, A' es un p-subgrupo elemental abeliano de IA con $O_p(C_I(A')) = 1$ y A' tiene el mismo orden que A. Como A' también actúa fielmente en L, podemos asumir que $A = A'$. Notar que $C_I(A) = C_G(LA) = K$ y $O_p(K) = O_p(C_I(A)) = 1$.

Verifiquemos las hipótesis del Lema 4.2.5. Notar que $H \cap K = Z(H) = Z(LA) \leq Z(L)$ es un p'-grupo pues la acción de A en L es fiel. Más aún, por acción coprima y el caso p-resoluble, A exhibe $(QD)_p$ para $H = LA$. Se puede ver que $\mathcal{A}_p(G)_{>A} \subseteq A \times K$ ya que A es de rango maximal sujeto a actuar fielmente en L. Por otro lado, K es un subgrupo propio de G y entonces satisface la conjetura de Quillen, es decir $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(K)) \neq 0$. En conclusión, estamos en las hipótesis del Lema 4.2.5 y así $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$.

Segundo paso: probamos que ninguna componente de G puede satisfacer $(QD)_p$ para todas sus p-extensiones (ver [AS93, Proposition 1.7]).

Supongamos que L es una componente de G que satisface $(QD)_p$ para todas sus p-extensiones. Notar que L es un grupo simple de orden divisible por p. Similarmente al paso previo, podemos tomar $A \in \mathcal{A}_p(N_G(L))$ maximal sujeto a actuar fielmente en L. Más aún, $A \cap L \neq 1$ y podemos elegir A que maximice esta intersección. La idea es aplicar el Lema 4.2.5 con $H = LA$

y $K = C_G(H)$. Descomponer $A = (A \cap L) \times B$, y notar que $m_p(A) = m_p(LB)$, y $LA = LB \leq \mathrm{Aut}(L)$. Por hipótesis, LB satisface $(QD)_p$, y como A es de rango maximal, podemos asumir que A exhibe $(QD)_p$ para LB.

Finalmente, chequeamos que A puede ser escogido tal que $O_p(K) = 1$. Sea $I = C_G(L)$ y notar que IB es un producto semidirecto pues A es fiel en L. Como $F(C_G(L))$ es resoluble y es normalizado por $E(G)$, se puede probar que $[E(G), F(C_G(L))] = 1$. La condición $C_G(E(G)) = Z(E(G)) = 1$ implica que $Z(I) \leq F(I) = F(C_G(L)) = 1$, que es un p'-grupo. De nuevo, la hipótesis $p > 5$ garantiza la hipótesis del Teorema 4.2.7 y podemos encontrar un complemento no cónico B' a I en IB con $O_p(C_I(B')) = 1$. Tomando $A' = (A \cap L)B'$ y chequeando que A' podría ser nuestro A, podemos tomar A' y B' que sean A y B. Por lo tanto, $O_p(K) = O_p(C_G(LB)) = O_p(C_I(B)) = 1$.

Análogamente al primer paso, podemos chequear las hipótesis del Lema 4.2.5 y concluir que $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$.

Tercer paso: derivamos una contradicción final calculando la característica de Euler de dos formas distinas.

Por el Segundo paso, las componentes de $F^*(G)$ están en la lista de [AS93, Theorem 3.1] pues podrían tener alguna p-extensión que no satisface $(QD)_p$. Recordar que estamos asumiendo que G no contiene grupos unitarios $U_n(q)$ con $q \equiv -1 \mod p$ como componentes. Sean $L_1, \ldots, L_n$ las componentes de G. Como $p > 3$, podemos invocar [AS93, Theorem 5.3] y encontrar en cada L_i un p'-subgrupo Brauer 2-elemental H_i (un producto directo de un grupo cíclico $\langle x_i \rangle$ por un 2-grupo Q_i) tal que $\tilde{\chi}(\mathcal{S}_p(L_i)^{H_i}) = \pm 1$. Sea $H = (\langle x_1 x_2 \ldots x_n \rangle) \times (Q_1 \ldots Q_n)$ y notar que H es un p'-subgrupo Brauer 2-elemental (y en particular 2-hiperelemental). Usando acciones coprimas y [AS93, Theorem 5.3], se puede mostrar que $\mathcal{S}_p(G)^H = \mathcal{S}_p(L_1 \times \ldots \times L_n)^H$. Por la Proposición 3.1.16 aplicada a $\mathcal{S}_p(G)$, como $\mathcal{S}_p(L_1 \times \ldots \times L_n) \nearrow\!\!\!\searrow^{H} \mathcal{S}_p(L_1) * \ldots * \mathcal{S}_p(L_n)$, también tenemos

$$\mathcal{S}_p(L_1 \times \ldots \times L_n)^H \nearrow\!\!\!\searrow (\mathcal{S}_p(L_1) * \ldots * \mathcal{S}_p(L_n))^H = \mathcal{S}_p(L_1)^{H_1} * \ldots * \mathcal{S}_p(L_n)^{H_n}.$$

Ahora calculamos la característica de Euler de $\mathcal{S}_p(G)^H$. Si $\mathcal{S}_p(G)$ es acíclico, por el Lema 4.2.1 $\tilde{\chi}(\mathcal{S}_p(G)^H) = 0 \mod 2$. Por otro lado, por la descomposición join,

$$\tilde{\chi}(\mathcal{S}_p(G)^H) = \pm \prod_{i=1}^{n} \tilde{\chi}(\mathcal{S}_p(L_i)^{H_i}) = \pm 1$$

pues $\tilde{\chi}(\mathcal{S}_p(L_i)^{X_i}) = 1$ para cada i por [AS93, Theorem 5.3], que es $1 \mod 2$.

4.3. 2-complejos $\mathbb{Z}$-acíclicos y la conjetura de Quillen

En las secciones previas hemos resumido los resultados conocidos sobre la conjetura de Quillen, junto con la demostración de Aschbacher-Smith.

En esta sección trabajamos con la siguiente versión de la conjetura: si $O_p(G) = 1$ entonces $\tilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Z}) \neq 0$. En particular, tomamos homología con coeficientes enteros y por "acíclico" queremos decir $\mathbb{Z}$-acíclico.

Proveemos nuevos casos de esta versión de la conjetura cuando se relaciona con el estudio de grupos actuando en 2-complejos acíclicos. Nuestros resultados depende de la clasificación de Oliver y Segev [OS02] sobre acciones de grupos finitos en 2-complejos acíclicos sin puntos fijos, que depende de la clasificación de grupos simples.

Los resultados de esta sección se corresponden a un trabajo en colaboración con Iván Sadofschi Costa y Antonio Viruel y se encuentran en el artículo [PSV19].

Probamos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. *Si K es un subcomplejo de $\mathbb{Z}$-acíclico y 2-dimensional G-invariante de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, entonces $O_p(G) \neq 1$.*

Del Teorema 4.3.1 deducimos inmediatamente:

Corolario 4.3.2. *Sea G un grupo finito. Supongamos que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ admite un subcomplejo homotópicamente a éste, 2-dimensional y G-invariante. Si $O_p(G) = 1$ entonces $\tilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Z}) = 0$.*

Si G tiene p-rango 3 entonces $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ es un subcomplejo homotópico a $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$, G-invariante y 2-dimensional. Luego la conjetura de Quillen vale para grupos de p-rango 3.

Corolario 4.3.3. *La conjetura de Quillen vale para grupos de p-rango a lo sumo* 3.

Por el Corolario 4.3.2, la conjetura de Quillen también vale cuando $\mathcal{B}_p(G)$, $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$ o $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))$ tienen altura 2.

Corolario 4.3.4. *Sea G un grupo finito tal que $\mathcal{B}_p(G)$ tiene altura 2. Si $\widetilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Z}) = 0$ entonces $O_p(G) \neq 1$.*

Corolario 4.3.5. *Sea G un grupo finito tal que uno de los posets $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$ o $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))$ tiene altura 2. Si $\widetilde{H}_*(\mathcal{S}_p(G), \mathbb{Z}) = 0$ entonces $O_p(G) \neq 1$.*

En la sección siguiente damos una serie de ejemplos que satisfacen las hipótesis del Corolario 4.3.2 pero que no están contenidos en los teoremas de [AS93] ni en el Teorema 4.1.1.

Para probar el Teorema 4.3.1, necesitamos ver primero alguno de los resultados de [OS02]. Por G-complejo queremos decir G-CW complejo.

Definición 4.3.6 ([OS02])**.** Un G-complejo X es *esencial* si no hay un subgrupo normal $1 \neq N \triangleleft G$ tal que para cada $H \subseteq G$, la inclusión $X^{HN} \to X^H$ induce un isomorfismo en la homología entera.

Los teoremas principales de [OS02] son los siguientes.

Teorema 4.3.7 ([OS02, Theorem A]). *Para cualquier grupo finito G, hay una G-complejo (finito) 2-dimensional esencial sin puntos fijos si y solo si G es isomorfo a uno de los siguientes grupos simples*

1. $L_2(2^k)$ *para* $k \geq 2$,
2. $L_2(q)$ *para* $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ *y* $q \geq 5$, *o*
3. $\mathrm{Sz}(2^k)$ *para* $k \geq 3$ *impar.*

Más aún, los subgrupos de isotropía de cualquier tal G-complejo son resolubles.

Teorema 4.3.8 ([OS02, Theorem B]). *Sea G un grupo finito, y sea X un G-complejo 2-dimensional acíclico. Sea N el subgrupo generado por los subgrupos normales $N' \lhd G$ tales que $X^{N'} \neq \varnothing$. Entonces X^N es acíclico; X es esencial si y solo si $N = 1$; y la acción de G/N en X^N es esencial.*

Denotemos por $\mathcal{S}(G)$ al conjunto de subgrupos de G.

Definición 4.3.9 ([OS02]). Una *familia* de subgrupos de G es cualquier subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}(G)$ cerrado bajo conjugación. Una familia no vacía se dice que es *separating* si tiene las siguientes tres propiedades: (a) $G \notin \mathcal{F}$; (b) si $H' \subseteq H$ y $H \in \mathcal{F}$ entonces $H' \in \mathcal{F}$; (c) para cualquier $H \lhd K \subseteq G$ con K/H resoluble, $K \in \mathcal{F}$ si $H \in \mathcal{F}$.

Para una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G, un $(G,\mathcal{F})$-*complejo* es un G-complejo cuyos grupos de isotropía están en $\mathcal{F}$. Un $(G,\mathcal{F})$-complejo es H-*universal* si el conjunto el conjunto de puntos fijos de cada $H \in \mathcal{F}$ es acíclico.

Lema 4.3.10 ([OS02, Lemma 1.2]). *Sea X cualquier G-complejo acíclico de dimensión 2 sin puntos fijos. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de subgrupos $H \leq G$ tales que $X^H \neq \varnothing$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia separating de subgrupos de G, y X es un $(G,\mathcal{F})$-complejo H-universal.*

Si G no es resoluble, la familia separating de subgrupos resolubles de G es denotada por $\mathcal{SLV}$.

Proposición 4.3.11 ([OS02, Proposition 6.4]). *Asuma que L es uno de los grupos simples $L_2(q)$ o $\mathrm{Sz}(q)$, donde $q = p^k$ y p es primo ($p = 2$ en el segundo caso). Sea $G \leq \mathrm{Aut}(L)$ cualquier subgrupo conteniendo a L, y sea $\mathcal{F}$ una familia separating para G. Entonces hay un $(G,\mathcal{F})$-complejo 2-dimensional acíclico si y solo si $G = L$, $\mathcal{F} = \mathcal{SLV}$, y q es una potencia de 2 o $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.*

Definición 4.3.12 ([OS02, Definition 2.1]). Para cualquier familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G definir

$$i_{\mathcal{F}}(H) = \frac{1}{[N_G(H) : H]}(1 - \chi(\mathcal{K}(\mathcal{F}_{>H}))).$$

Lema 4.3.13 ([OS02, Lemma 2.3])**.** *Fijar una familia separating $\mathcal{F}$, un $(G,\mathcal{F})$-complejo finito H-universal X, y un subgrupo $H \leq G$. Para cada n, sea $c_n(H)$ el número de órbitas de n-celdas de tipo G/H en X. Entonces $i_{\mathcal{F}}(H) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n c_n(H)$.*

Proposición 4.3.14 ([OS02, Tables 2,3,4])**.** *Sea G uno de los grupos simples $L_2(2^k)$ para $k \geq 2$, $L_2(q)$ para $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ y $q \geq 5$, o $\mathrm{Sz}(2^k)$ para $k \geq 3$ impar. Entonces $i_{\mathcal{SLV}}(1) = 1$.*

Usando estos resultados probamos lo siguiente.

Teorema 4.3.15. *Todo G-complejo acíclico de dimensión 2 tiene una órbita con estabilizador normal.*

Demostración. Si $X^G \neq \varnothing$ listo. De otra manera, G actúa sin puntos fijos en X. Considerar el subgrupo N generador por los subgrupos $N' \triangleleft G$ tales que $X^{N'} \neq \varnothing$. Claramente N es normal en G. Por el Teorema 4.3.8 $Y = X^N$ es acíclico (y en particular no vacío) y la acción de G/N en Y es esencial y sin puntos fijos. Por el Lema 4.3.10 $\mathcal{F} = \{H \leq G/N : Y^H \neq \varnothing\}$ es una familia separating e Y es un $(G/N,\mathcal{F})$-complejo H-universal. Luego, el Teorema 4.3.7 acierta que G/N debe ser uno de los grupos $\mathrm{PSL}_2(2^k)$ para $k \geq 2$, $\mathrm{PSL}_2(q)$ para $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ y $q \geq 5$, o $\mathrm{Sz}(2^k)$ para $k \geq 3$ impar. En cualquier caso, por la Proposición 4.3.11 debe ser $\mathcal{F} = \mathcal{SLV}$. Por la Proposición 4.3.14, $i_{\mathcal{SLV}}(1) = 1$. Finalmente por el Lema 4.3.13, Y debe tener al menos una G/N-órbita libre. Luego X tiene una G-órbita de tipo G/N y listo. $\square$

Ahora podemos probar el Teorema 4.3.1.

Demostración del Teorema 4.3.1. Por el Teorema 4.3.15 hay un símplex $\sigma = (A_0 < \ldots < A_j)$ de X con estabilizador $N \triangleleft G$. Como $A_0 \triangleleft N$, vemos que $O_p(N)$ es no trivial. Por otro lado, $N \triangleleft G$ y $O_p(N) \operatorname{char} N$ implica que $O_p(N) \triangleleft G$. Por lo tanto $O_p(N) \leq O_p(G)$ y $O_p(G)$ es no trivial. $\square$

Observación 4.3.16. Un posible enfoque al estudio de la conjetura de Quillen es encontrar un subcomplejo acíclico 2-dimensional y G-invariante de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$. Si la conjetura fuese cierta, entonces esto sería posible. Luego por el Teorema 4.3.1, la conjetura de Quillen puede reformularse de la siguiente manera: si $\mathcal{A}_p(G)$ es acíclico, entonces existe un subcomplejo acíclico G-invariante y 2-dimensional de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$.

4.4. Ejemplos del caso 2-dimensional

En esta sección aplicamos el Teorema 4.3.1 y el Corolario 4.3.2 para establecer la conjetura de Quillen para algunos grupos no incluidos en las hipótesis de los teoremas de [AS93].

La presencia de componentes simples de G isomorfas a $L_2(2^3)$ o $U_3(2^3)$ (en el caso $p = 3$) y $\mathrm{Sz}(2^5)$ (en el caso $p = 5$) es una obstrucción para extender [AS93, Main Theorem] (ver también Teorema 4.1.2) a los primos $p = 3$ y $p = 5$. El caso $p = 2$ no es considerado en [AS93] y requeriría de un análisis mucho más detallado. Como hemos visto en la Sección 4.2, el primer paso en la demostración del Teorema 4.1.2 es la reducción al caso $O_{p'}(G) = 1$ por medio de [AS93, Proposition 1.6] (ver Proposición 4.2.8). Para hacer esto, [AS93, Theorems 2.3, 2.4] (ver Teoremas 4.2.6 y 4.2.7) son necesarios y estos hacen un fuerte uso de la hipótesis $p > 5$. Concretamente, no es posible aplicar [AS93, Theorem 2.3] si una componente de $C_G(O_{p'}(G))$ es isomorfa a $L_2(2^3)$, $U_3(2^3)$ (si $p = 3$) o $\mathrm{Sz}(2^5)$ (si $p = 5$).

Antes de presentar los ejemplos para $p = 3$ y $p = 5$, damos un poco de motivación. La mayoría de los grupos G en estos ejemplos satisfacen las siguientes condiciones. Primero, $O_{p'}(G) \neq 1$ y $C_G(O_{p'}(G))$ contiene una componente isomorfa a $U_3(2^3)$ si $p = 3$ y a $\mathrm{Sz}(2^5)$ si $p = 5$. De esta manera, no podemos hallar homología no trivial para $\mathcal{A}_p(G)$ de la misma manera que es hecho en la demostración de [AS93, Proposition 1.6] pues no podemos invocar [AS93, Theorems 2.3, 2.4] (ver la demostración en la Sección 4.2).

En segundo lugar, por [AS93, Lemma 0.12] (ver también Lema 4.2.3) hay una inclusión

$$\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G)); \mathbb{Q}) \subseteq \tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G); \mathbb{Q}).$$

Pedimos que $O_p(G/O_{p'}(G)) \neq 1$, de manera que $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G/O_{p'}(G))) = 0$. Finalmente requerimos $O_p(G) = 1$.

Los grupos presentados en los Ejemplos 4.4.5 y 4.4.7 tienen p-rango 4 y están construidos de la siguiente manera. Tomamos un producto directo de un grupo N, que consiste de una o más copias de un p'-grupo simple particular, por un grupo K que consiste de una o más copias de $L = U_3(2^3)$ si $p = 3$ o $L = \mathrm{Sz}(2^5)$ si $p = 5$. Luego tomamos dos p-grupos cíclicos A y B y los hacemos actuar en el producto directo $N \times K$ como sigue. Tomamos una acción fiel de $A \times B$ en N, y escogemos una representación $A \times B \to \mathrm{Aut}(K)$ tal que $O_p(K \rtimes (A \times B)) \cong O_p(C_A(K)) \neq 1$. El grupo $G = (N \times K) \rtimes (A \times B)$ satisface las condiciones $O_p(G) = 1$, $O_{p'}(G) = N \neq 1$, $C_G(N) = K$ y $O_p(G/N) = O_p(K \rtimes (A \times B)) \neq 1$. Además, como el p-rango de L es a lo sumo 2, podemos construir G para que tenga p-rango 4 ajustando el número de copias de L en K.

Para estos grupos mostramos que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ admite un subcomplejo 2-dimensional, G-invariante y homotópicamente equivalente a éste, y por lo tanto se aplica el Corolario 4.3.2.

En el Ejemplo 4.4.6 consideramos $p = 5$ y construimos un grupo de 5-rango 3 en una forma similar a la del Ejemplo 4.4.7.

Por otro lado, en el Ejemplo 4.4.4 tomamos $p = 3$ y consideramos un grupo G de 3-rango 3 en las hipótesis del tercer paso de la demostración de [AS93, Main Theorem] para el cual [AS93, Theorem 5.3] no se aplica (ver también el tercer paso de la demostración del Teorema 4.1.2 en la Sección 4.2).

En los Ejemplos 4.4.9 y 4.4.10 describimos dos grupos de 2-rango 4 tales que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_2(G))$ admite un subcomplejo 2-dimensional, G-invariante y homotópicamente equivalente a éste.

Para las afirmaciones sobre la estructura de los grupos de automorfismos de los grupos finitos de tipo Lie referimos a [GL83] (ver también Apéndice A.1).

El siguiente lema nos provee una manera fácil de calcular el p-rango de un producto semidirecto.

Lema 4.4.1. *Sea $1 \to N \to G \to K \to 1$ una extensión de grupos finitos. Entonces*

$$m_p(G) = \max_{A \in \mathcal{S}} m_p(C_N(A)) + m_p(A),$$

donde $\mathcal{S}$ es el conjunto de p-subgrupos elementales abelianos $1 \leq A \leq G$ tales que $A \cap N = 1$. En particular tenemos que $m_p(G) \leq m_p(N) + m_p(K)$.

Demostración. Si $A \in \mathcal{S}$ tenemos que $C_N(A) \times A \cong C_N(A)A$ y así

$$m_p(C_N(A)) + m_p(A) = m_p(C_N(A)A) \leq m_p(G).$$

Tomando máximo sobre $A \in \mathcal{S}$ obtenemos la cota inferior para $m_p(G)$. Ahora probamos la otra desigualdad. Sea E un p-subgrupo elemental abeliano de G y escribamos $E = (E \cap N)A$, para algún complemento A de $E \cap N$ en E. Entonces $m_p(E \cap N) \leq m_p(C_N(A))$ y $A \in \mathcal{S}$. Ahora, $m_p(E) = m_p(E \cap N) + m_p(A) \leq m_p(C_N(A)) + m_p(A)$, lo cual nos da la cota superior para $m_p(G)$. Para la última afirmación notar que $C_N(A) \leq N$ y que $m_p(A) \leq m_p(K)$ por los teoremas de isomorfismos. □

El siguiente lema nos permite obtener subcomplejos propios de $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ preservando el mismo tipo homotópico.

Lema 4.4.2. *Sea G un grupo finito y sea $H \leq G$. Además, supongamos que $O_p(C_H(E)) \neq 1$ para cada $E \in \mathcal{A}_p(G)$ con $E \cap H = 1$. Entonces $\mathcal{A}_p(G) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(H)$.*

Demostración. Considerar el subposet $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_p(G) : E \cap H \neq 1\}$. Por la Observación 3.1.12, $\mathcal{A}_p(H) \simeq \mathcal{N}$.

Sea $\mathcal{S} = \{E \in \mathcal{A}_p(G) : E \cap H = 1\}$ el complemento de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{A}_p(G)$. Tomemos una extensión lineal $\{E_1, \ldots, E_r\}$ de $\mathcal{S}$ tal que $E_i \leq E_j$ implica $i \leq j$. Fijemos $E \in \mathcal{S}$ y considerar $\mathcal{A}_p(G)_{>E} \cap \mathcal{N} = \{A \in \mathcal{N} : A > E\}$. Por el Lema 3.1.13, $\mathcal{A}_p(G)_{>E} \cap \mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_p(C_H(E))$, que es un espacio finito homotópicamente trivial.

Sea $X^i = \mathcal{A}_p(G) - \{E_{i+1}, \ldots, E_r\}$. Mostramos que $X^i \hookrightarrow X^{i+1}$ es una equivalencia débil para cada $0 \leq i \leq r-1$.

Notar que $X^{i+1} = X^i \cup \{E_i\}$. Más aún, $X^{i+1}_{>E_i} = \mathcal{A}_p(G)_{>E_i} \cap \mathcal{N}$, que es homotópicamente trivial. Luego $X^i = X^{i+1} - \{E_i\} \hookrightarrow X^{i+1}$ es una equivalencia homotópica débil (ver por ejemplo [Bar11a, Proposition 6.2.2]). En consecuencia,

$$\mathcal{A}_p(G) = X^r \underset{w}{\approx} X^0 = \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{S} = \mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_p(H).$$

□

Observación 4.4.3. En las hipótesis del lema anterior, se puede mostrar que si además $H \triangleleft G$ entonces $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G)) \simeq_G \mathcal{K}(\mathcal{A}_p(H))$.

Ejemplo 4.4.4. Sea $p = 3$ y sea $L = L_2(2^3) \times L_2(2^3) \times L_2(2^3)$. Sea A un grupo cíclico de orden 3 actuando en L permutando las copias de $L_2(2^3)$. Tomemos $G = LA$. Como $m_3(L_2(2^3)) = 1$ y $C_L(A) \cong L_2(2^3)$, vemos que $m_3(G) = 3$. Por el Corolario 4.3.3, G satisface la conjetura de Quillen.

Ejemplo 4.4.5. Sean $p = 3$, $N = \mathrm{Sz}(2^3) \times \mathrm{Sz}(2^3) \times \mathrm{Sz}(2^3)$ y $U = U_3(2^3)$. Sean $A = \langle a \rangle$ y $B = \langle b \rangle$ grupos cíclicos de orden 3. Vamos a construir un producto semidirecto $G = (N \times U) \rtimes (A \times B)$. Para hacer esto necesitamos definir un morfismo $A \times B \to \mathrm{Aut}(N \times U) = \mathrm{Aut}(N) \times \mathrm{Aut}(U)$.

Elijamos un automorfismo de cuerpo $\phi \in \mathrm{Aut}(U_3(2^3))$ de orden 3. Por las propiedades de las acciones de los p-grupos, existe un automorfismo interno $x \in \mathrm{Inn}(U_3(2^3))$ de orden 3 que conmuta con ϕ. Entonces $A \times B \to \mathrm{Aut}(U_3(2^3))$ está dado por $a \mapsto x$ y $b \mapsto \phi$. Elegir un automorfismo de cuerpo $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(2^3))$ de orden 3. Hagamos actuar a A en cada coordenada de N como ψ y que B actúe en N permutando las coordenadas. Esto nos da un morfismo bien definido $A \times B \to \mathrm{Aut}(N)$.

El 3-rango de G es $m_3(G) = m_3(U_3(2^3)AB)$. Podemos tomar un subgrupo elemental abeliano $E \leq C_U(\phi)$ de orden 9 que contenga a x pues $C_U(\phi) \cong \mathrm{PGU}_3(2) \cong ((C_3 \times C_3) \rtimes Q_8) \rtimes C_3$ por [GL83, (9-1), (9-3)] (cf. [GLS99, Chapter 4, Lemma 3.10]) y $\mathcal{A}_3(\mathrm{PGU}_3(2))$ es conexo de altura 1. Entonces EAB es un subgrupo elemental abeliano de orden 3^4. Así, $m_3(UAB) \geq 4$. Como $m_3(U_3(2^3)) = 2$ y $m_3(AB) = 2$, por Lema 4.4.1 tenemos $m_3(G) = 4$.

Por el Corolario 4.3.2, para mostrar que la conjetura de Quillen vale para G y $p = 3$ alcanza con encontrar un subcomplejo 2-dimensional y G-invariante de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_3(G))$ homotópicamente a este último.

Sea $H = (N \times U)A$. Notar que $H \triangleleft G$ y $m_3(H) = 3$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_3(H))$ es subcomplejo G-invariante y 2-dimensional de $\mathcal{K}(\mathcal{A}_3(G))$. Ahora el plan es aplicar el Lema 4.4.2 para mostrar que $\mathcal{A}_3(H) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_3(G)$. Sea $E \in \mathcal{A}_3(G)$ tal que $E \cap H = 1$. Entonces $E \cong EH/H \leq B \cong C_3$ y así, E es cíclico generado por algún elemento $e \in E$. Escribamos $e = nua^ib^j$ con $n \in N$, $u \in U$ y $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Notar que $j \neq 0$ pues $E \cap H = 1$. Si $v \in U$, entonces

$$v^e = v^{nua^ib^j} = (v^{ua^i})^{b^j}.$$

Como $j \neq 0$ y e induce un automorfismo de U de orden 3 en $\mathrm{Inn}(U)\phi^j$, por [GL83, (7-2)] y la definición de automorfismo de cuerpo, e es $\mathrm{Inndiag}(U)$-conjugado a ϕ^j y actúa como automorfismo de cuerpo en U. En particular, $C_U(E) = C_U(e) \cong C_U(\phi^j) = C_U(\phi)$. Observar también que $O_3(C_U(E)) \cong O_3(C_U(\phi)) \cong C_3 \times C_3 \neq 1$. Dado que $C_U(E) \triangleleft C_H(E)$ y $O_3(C_U(E)) \neq 1$, concluimos que $O_3(C_H(E)) \neq 1$. Por el Lema 4.4.2, $\mathcal{A}_3(G) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_3(H)$, que es 2-dimensional y G-invariante. En conclusión, el subcomplejo $\mathcal{K}(\mathcal{A}_3(H))$ satisface la hipótesis del Corolario 4.3.2 y por lo tanto la conjetura de Quillen vale para G.

Finalmente notar que $O_3(G) = 1$, $O_{3'}(G) = N$, $C_G(O_{3'}(G)) = U_3(2^3)$ y $O_3(G/O_{3'}(G)) = O_3(U_3(2^3)AB) = \langle ax^{-1}\rangle \cong C_3$.

Ejemplo 4.4.6. Sea $p = 5$. Sea r un número primo tal que $r \equiv 2$ o $3 \mod 5$ y sea $q = r^{5^n}$ con $n \geq 2$. Sea N uno de los grupos simples $L_2(q)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q^3)$ o ${}^2G_2(3^{5^n})$ y sea $A = \langle a\rangle$ un grupo cíclico de orden 5^n. Observar que $5 \nmid |N|$. Hagamos actuar a en N como un automorfismo de cuerpo de orden 5^n. Elijamos un automorfismo de cuerpo $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(2^5))$ de orden 5 y hagamos actuar A en $\mathrm{Sz}(2^5) \times \mathrm{Sz}(2^5)$ como $\phi \times \phi$. Ahora consideremos el producto semidirecto $G = (N \times \mathrm{Sz}(2^5) \times \mathrm{Sz}(2^5)) \rtimes A$ definido por esta acción.

Como los 5-subgrupos de Sylow de $\mathrm{Sz}(2^5)$ son cíclicos de orden 25, por el Lema 4.4.1 tenemos que $m_5(G) = 3$. Por el Corolario 4.3.3, la conjetura de Quillen vale para G.

Finalmente, nuestro grupo satisface las siguientes propiedades: $O_5(G) = 1$, $O_{5'}(G) = N$, $C_G(O_{5'}(G)) = \mathrm{Sz}(2^5)^2$ y $O_5(G/O_{5'}(G)) = C_A(\mathrm{Sz}(2^5)^2) = \langle a^5\rangle \neq 1$.

Ejemplo 4.4.7. Sea $p = 5$ y sea $N = L^5$, donde L es uno de los $5'$-grupos simples del ejemplo previo. Sean $A = \langle a\rangle \cong C_{5^n}$ y $B = \langle b\rangle \cong C_5$. Sea $G = (N \times \mathrm{Sz}(2^5)^2) \rtimes (A \times B)$, donde a actúa en cada copia de L como un automorfismo de cuerpo de orden 5^n y trivialmente en $\mathrm{Sz}(2^5)^2$, y b permuta las copias de L y actúa como un automorfismo de cuerpo de orden 5 en cada copia de $\mathrm{Sz}(2^5)$.

Para calcular el 5-rango de G usamos el Lema 4.4.1:

$$\begin{aligned} m_5(G) &= m_5(\mathrm{Sz}(2^5)^2 \rtimes (A \times B)) \\ &= m_5(A \times (\mathrm{Sz}(2^5)^2 B)) \\ &= m_5(A) + m_5(\mathrm{Sz}(2^5)^2 B) \\ &= 1 + 3 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Ahora el objetivo es aplicar el Corolario 4.3.2 en G para encontrar un subcomplejo 2-dimensional, G-invariante y homotópicamente equivalente a $\mathcal{K}(\mathcal{S}_5(G))$ para proceder como en el Ejemplo 4.4.5.

Sea $H = (N \times \mathrm{Sz}(2^5)^2)A \cong NA \times \mathrm{Sz}(2^5)^2$. Notar que $H \trianglelefteq G$, $m_5(H) = 3$ y que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_5(H))$ es un subcomplejo 2-dimensional y G-invariante de $\mathcal{K}(\mathcal{A}_5(G))$. Mostraremos que $\mathcal{A}_5(H) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_5(G)$ aplicando el Lema 4.4.2.

Sea $E \in \mathcal{A}_5(G)$ tal que $E \cap H = 1$. Entonces E es cíclico generado por un elemento e de orden 5 y $e = lsa^ib^j$ con $l \in N$, $s \in \mathrm{Sz}(2^5)^2$, $0 \leq i \leq 5^n - 1$ y $j \in \{1,2,3,4\}$. Luego E actúa por automorfismos de cuerpo en cada copia del grupo Suzuki y e es $\mathrm{Inndiag}(\mathrm{Sz}(2^5))$-conjugado al automorfismo de cuerpo inducido por b en $\mathrm{Sz}(2^5)$ (ver [GL83, (7-2)] y Ejemplo 4.4.5). Así, $C_H(E) \cong C_{NA}(E) \times C_{\mathrm{Sz}(2^5)^2}(E)$. Notar que $C_{\mathrm{Sz}(2^5)^2}(E) \trianglelefteq C_H(E)$ y $C_{\mathrm{Sz}(2^5)^2}(E) \cong C_{\mathrm{Sz}(2^5)}(E)^2 \cong (C_5 \rtimes C_4)^2$ tiene un 5-subgrupo normal no trivial. Por lo tanto $\mathcal{A}_5(G) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_5(H)$ por el Lema

4.4.2 y la conjetura de Quillen vale para G por el Corolario 4.3.2 aplicado al subcomplejo $\mathcal{K}(\mathcal{A}_5(H))$.

Observar que $O_{5'}(G) = N$, $C_G(O_{5'}(G)) = \mathrm{Sz}(2^5)^2$, $O_5(G) = 1$ y $O_5(G/O_{5'}(G)) \cong A \neq 1$.

Concluimos con dos ejemplos de grupos que satisfacen la conjetura de Quillen para $p = 2$.

Proposición 4.4.8. *Sean L_1 y L_2 dos grupos finitos en los que sus p-subgrupos de Sylow distintos se intersecan trivialmente. Sea $L = L_1 \times L_2$ y tomemos G una extensión de L tal que $|G : L| = p$. Entonces $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$ y $\mathcal{B}_p(G)$ tienen altura a lo sumo 2. Si además los p-subgrupos de Sylow de L_1 y L_2 tienen Ω_1 abeliano, entonces $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))$ tiene altura a lo sumo 2.*

Demostración. Los elementos de $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(L))$ tienen la forma $S_1 \times S_2$, $1 \times S_2$ o $S_1 \times 1$, donde $S_i \leq L_i$ son p-subgrupos de Sylow. Luego $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(L))$ tiene altura 1.

Ahora supongamos que $Q_0 < Q_1 < \ldots < Q_n$ es una cadena en $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$. Entonces

$$Q_0 \cap L \leq Q_1 \cap L \leq \ldots \leq Q_n \cap L$$

es una cadena en $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(L))$. Afirmamos que existe a lo sumo un índice i tal que $Q_i \cap L = Q_{i+1} \cap L$. Para ver esto notar que

$$|Q_j : Q_j \cap L| = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_j \subseteq L \\ p & \text{si } Q_j \not\subseteq L \end{cases}.$$

Tenemos que $|Q_{i+1} : Q_i| \cdot |Q_i : Q_i \cap L| = |Q_{i+1} : Q_{i+1} \cap L| \cdot |Q_{i+1} \cap L : Q_i \cap L|$. Entonces si $Q_i \cap L = Q_{i+1} \cap L$, como $|Q_{i+1} : Q_i| \geq p$ debemos tener que $|Q_i : Q_i \cap L| = 1$ y $|Q_{i+1} : Q_{i+1} \cap L| = p$. Luego $i = \max\{j : Q_j \subseteq L\}$.

De esto concluimos que $h(\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))) \leq 1 + h(\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(L)) = 2$. Por el Lema 1.3.10 $\mathcal{B}_p(G)$ es un subposet de $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_p(G))$. Luego $\mathcal{B}_p(G)$ es a lo sumo de altura 2. La misma demostración puede ser adaptada fácilmente para probar que, si los p-subgrupos de Sylow de L_1 y L_2 tiene Ω_1 abeliano, entonces $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_p(G))$ tiene altura a lo sumo 2. ☐

En los siguiente ejemplos usamos el hecho de que dos 2-subgrupos de Sylow distintos de $\mathbb{A}_5$ y de $U_3(2^2)$ se intersecan trivialmente, y que $\Omega_1(S)$ es abeliano si S es un 2-subgrupo de Sylow de $\mathbb{A}_5$ o $U_3(2^2)$.

Ejemplo 4.4.9. Sea G la extensión split $(\mathbb{A}_5 \times \mathbb{A}_5) \rtimes C_2$ donde el generador de C_2 actúa en cada coordenada como conjugar por la transposición $(1\,2)$. Por el Lema 4.4.1, G tiene 2-rango 4. Por la Proposición 4.4.8, $\mathfrak{i}(\mathcal{A}_2(G))$, $\mathfrak{i}(\mathcal{S}_2(G))$ y $\mathcal{B}_2(G)$ son de altura a lo sumo 2 y entonces la conjetura de Quillen vale para G pues los Corolarios 4.3.4 y 4.3.5 se aplican.

Ejemplo 4.4.10. Sea $G = (U_3(2^2) \times \mathbb{A}_5) \rtimes C_2$ el producto semidirecto construido de la siguiente manera. Sea $L = U_3(2^2) \times \mathbb{A}_5$. Entonces

$$\mathrm{Out}(L) \cong \mathrm{Aut}(U_3(2^2))/\mathrm{Inn}(U_3(2^2)) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_5)/\mathrm{Inn}(\mathbb{A}_5) \cong C_4 \times C_2.$$

Tomemos $t \in \mathrm{Out}(L)$ que sea la única involución que actúa no trivialmente en ambos factores. Luego $G = L\langle t\rangle$. Por Lema 4.4.1, G tiene 2-rango 4 y como antes, la conjetura de Quillen vale para G.

4.5. La reducción $O_{p'}(G) = 1$ para la conjetura de Quillen

En la sección previa estudiamos algunos ejemplos de grupos finitos G que no satisfacían las hipótesis de los teoremas de [AS93] pues $p \leq 5$ y $O_{p'}(G) \neq 1$. Estos ejemplos fueron construidos evadiendo los métodos de reducción de [AS93] (ver también Sección 4.2). Sin embargo, en cada caso encontramos que el poset de Quillen podía ser reducido (preservando su tipo homotópico débil) a un subposet invariante de altura 2 y por lo tanto satisfacen la conjetura de Quillen por el Corolario 4.3.2.

En esta sección mostramos que los métodos usados para reducir los posets de los ejemplos previos pueden ser generalizados. Concretamente, mostramos que podemos reducir el estudio de la conjetura de Quillen a grupos finitos G con $O_{p'}(G) = 1$. Ahora trabajamos con homología racional y por lo tanto con la conjetura fuerte de Quillen.

Teorema 4.5.1. *Sea G un grupo finito. Supongamos que los subgrupos propios de G satisfacen la conjectura fuerte de Quillen y que $O_{p'}(G) \neq 1$. Entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen. En particular, un contraejemplo minimal G a la conjetura fuerte de Quillen tiene $O_{p'}(G) = 1$.*

La demostración sigue las ideas de propagación de homología del Lema 4.2.5 del artículo de Aschbacher-Smith [AS93]. Nosotros probamos una generalización de este lema en el Lema 4.5.10. Debajo citamos las definiciones y resultados de [AS93] que necesitaremos.

Si X es un poset finito, denotemos por $\tilde{Z}_n(X)$ al conjunto de n-ciclos del complejo de cadenas reducido $\tilde{C}_*(X)$ con coeficientes racionales (que es el complejo de cadenas de $\mathcal{K}(X)$). Escribimos $\tilde{H}_*(X)$ para la homología de X con coeficientes racionales.

Definición 4.5.2. Sea X un poset finito. Una cadena $a \in X'$ es *full* si para todo $x \in X$ tal que $\{x\} \cup a$ es una cadena tenemos que $x \in a$ o bien $x \geq \max a$. Una cadena que contiene a a se llama *cadena a-inicial* si tiene la forma $(x_0 < x_1 < \ldots < x_m < y_0 < \ldots < y_s)$, donde $(x_0 < x_1 < \ldots < x_m) = a$.

Definición 4.5.3. Sea G un grupo finito con $(QD)_p$ y sea $m = m_p(G) - 1$. Tomemos un ciclo no trivial $\alpha \in \tilde{H}_m(\mathcal{A}_p(G)) = \tilde{Z}_m(\mathcal{A}_p(G))$. Si la cadena $a = (A_0 < A_1 < \ldots < A_m)$ es un sumando del ciclo α, escribimos $a \in \alpha$ y decimos que A_m *exhibe* $(QD)_p$ para G. Notar que a es una cadena full.

Para las siguientes definiciones y proposiciones, fijamos un grupo finito G y subgrupos $H \leq G$ y $K \leq C_G(H)$ tales que $H \cap K$ es un p'-subgrupo. Notar que $[H,K]=1$, $H \cap K \leq Z(H) \cap Z(K)$ y $\mathcal{A}_p(HK) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(H/H\cap K) * \mathcal{A}_p(K/H\cap K)$ (ver Lema 4.2.2).

Definición 4.5.4. Sea $a=(A_0 < \ldots < A_m)$ una cadena de $\mathcal{A}_p(H)$ y $b=(B_0<\ldots<B_n)$ una cadena de $\mathcal{A}_p(K)$. Entonces

$$a * b := (A_0 < \ldots < A_m < B_0A_m < \ldots < B_nA_m)$$

es una cadena en $\mathcal{A}_p(HK)$.

Supongamos que $c=(0,1,2\ldots,m+n+1)$. Una permutación σ del conjunto de índices $\{0,1,2,\ldots,m+n+1\}$ tal que $\sigma(i)<\sigma(j)$ si $i<j\leq m$ o $m+1\leq i<j$ es llamada un *shuffle*. Sea $\sigma(c) := (\sigma(0),\sigma(1),\ldots,\sigma(m+n+1))$.

Con las notaciones anteriores, sea $C_j = A_j$ si $j\leq m$ o $B_{j-(m+1)}$ si $j\geq m+1$. Definamos $(a\times b)_\sigma$ que sea la cadena cuyo i-ésimo elemento es $C_{\sigma(0)}C_{\sigma(1)}\ldots C_{\sigma(i)}$.

Definición 4.5.5 ([AS93, Definition 0.21])**.** Con la notación anterior, el producto shuffle de a y b es

$$a \times b = \sum_{\sigma \text{ shuffle}} (-1)^\sigma (a\times b)_\sigma \in \tilde{C}_{m+n+1}(\mathcal{A}_p(HK)).$$

Extendemos este producto por linealidad a todas las cadenas de $\tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(H))$ y $\tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(K))$.

Proposición 4.5.6 ([AS93, Corollary 0.23])**.** *Si $\alpha \in \tilde{Z}_m(\mathcal{A}_p(H))$ y $\beta \in \tilde{Z}_n(\mathcal{A}_p(K))$ entonces $\alpha\times\beta \in \tilde{Z}_{m+n+1}(\mathcal{A}_p(HK))$.*

Observación 4.5.7. Sea X un poset finito y $a\in X'$. Denotar por $\tilde{C}_*(X)_a$ al subgrupo de cadenas a-iniciales de $\tilde{C}_*(X)$, y por $\tilde{C}_*(X)_{\neg a}$ al subgrupo de cadenas que no son a-iniciales. Claramente tenemos una descomposición

$$\tilde{C}_*(X) = \tilde{C}_*(X)_a \bigoplus \tilde{C}_*(X)_{\neg a}.$$

Más aún, si ∂ denota el morfismo de borde del complejo de cadenas,

$$\partial(\tilde{C}_*(X)_{\neg a}) \subseteq \tilde{C}_*(X)_{\neg a}.$$

Si $\gamma\in\tilde{C}_*(X)$ entonces $\gamma=\gamma_a+\gamma_{\neg a}$, donde γ_a corresponde a la parte a-inicial de γ, y

$$\partial\gamma = \partial(\gamma_a)+\partial(\gamma_{\neg a}) = (\partial(\gamma_a))_a + (\partial(\gamma_a))_{\neg a} + \partial(\gamma_{\neg a}).$$

Lema 4.5.8 (cf. [AS93, Lemma 0.24])**.** *Si a es una cadena full entonces $(\partial\gamma)_a = (\partial\gamma_a)_a$.*

Lema 4.5.9 (cf. [AS93, Lemma 0.25])**.** *Sea $X\subseteq \mathcal{A}_p(G)$ tal que si $B\cap K\neq 1$ y $B\in\mathcal{A}_p(G)$ entonces $B\in X$. Sea a una cadena full de $X\cap\mathcal{A}_p(H)$ y b una cadena de $\mathcal{A}_p(K)$. Valen las siguientes:*

1. $(a \times b)_a = (a \times b)_{\sigma = \mathsf{id}} = a * b$,

2. $(\partial(a \times b))_a = (-1)^{m+1}(a * \partial b)$, *donde m es el largo de la cadena a.*

Ahora probamos una variación del Lema 4.2.5 (ver también [AS93, Lemma 0.27]) que nos permitirá extender algunos de los resultados de [AS93].

Lema 4.5.10 (Homology Propagation)**.** *Sea G un grupo finito. Sean $H \leq G$, $K \leq C_G(H)$ y $X \subseteq \mathcal{A}_p(G)$ tales que:*

(I) *Si $B \in \mathcal{A}_p(G)$ y $B \cap K \neq 1$, entonces $B \in X$;*

(II) *$H \cap K$ es un p'-grupo;*

(III) *Existe $a \in \mathcal{A}_p(H)' \cap X'$ tal que $a \in \alpha \in \tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(H)) \cap \tilde{C}_*(X)$ y α es un ciclo pero no un borde en $\tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(H))$;*

(IV) *Además, para tal a, si $B \cup a \in X'$ entonces $B \in a$, o bien $B = (\max a)C_B(H)$ y $1 \neq C_B(H) \leq K$;*

(V) *$\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(K)) \neq 0$.*

Entonces $\tilde{H}_*(X) \neq 0$.

Demostración. Seguiremos esencialmente la demostración del Lema 4.2.5 (ver [AS93, Lemma 0.27]), adaptado a estas hipótesis.

Por (v), existe un ciclo $\beta \in \tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(K))$ que no es un borde en $\tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(K))$. Tomemos una cadena a y un ciclo α como en la hipótesis (iii). Entonces $\alpha \times \beta$ es un ciclo por la Proposición 4.5.6 y pertence a $\tilde{C}_*(X)$ por las hipótesis (i) y (iii). Supongamos que $\alpha \times \beta = \partial\gamma$ con $\gamma \in \tilde{C}_*(X)$. Escribamos $\beta = \sum_i q_i(B_0^i < \ldots < B_t^i)$ y $\gamma = \sum_{j \in J} p_j(C_0^j < \ldots < C_{t+s+2}^j)$, donde $s + 1 = |a|$. Entonces podemos tomar pÃ rte a-inicial a ambos lados de la igualdad $\alpha \times \beta = \partial\gamma$. Notar que no se puede agregar ningún grupo intermedio a a por la hipótesis (iv). Sea $A = \max a$. Por las hipótesis (i) y (ii), y Lema 4.5.9,

$$(\alpha \times \beta)_a = q \sum_i q_i \, a \cup (AB_0^j < \ldots < AB_t^j)$$

(donde $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ es el coeficiente de a en α), y es igual a

$$\begin{aligned}
(\partial\gamma)_a &= \sum_{j \in J'} p_j \sum_{k=s+1}^{t+s+2} (-1)^k \, a \cup (C_{s+1}^j < \ldots < \hat{C}_k^j < \ldots < C_{t+s+2}) \\
&= \sum_{j \in J'} p_j (-1)^{s+1} \sum_{k=0}^{t+1} a \cup (C_{s+1}^j < \ldots < \hat{C}_{k+s+1}^j < \ldots < C_{t+s+2}).
\end{aligned}$$

Aquí, $J' = \{j \in J : a \subseteq (C_0^j < \ldots < C_{t+s+2}^j)\}$. Por la hipótesis (iv), $D_k^j := C_{k+s+1}^j = AE_k^j$, donde $E_k^j = C_{C_{k+s+1}^j}(H) \neq 1$. Sean $\tilde{\beta} = \sum_i q_i(AB_0^i < \ldots < AB_t^i)$ y $\tilde{\gamma} = \sum_{j\in J'} p_j(-1)^{s+1}(D_0^j < \ldots < D_{t+1}^j)$. Notar que $q\tilde{\beta} = \partial\tilde{\gamma}$. Sea $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_p(G) : E \cap K \neq 1\}$ y considerar la retracción $r : \mathcal{N} \to \mathcal{A}_p(K)$ dada por $r(E) = E \cap K$. Notar que r es una equivalencia homotópica y que $\mathcal{N} \subseteq X$ por hipótesis (i). Por lo tanto,

$$q\beta = r_*(q\tilde{\beta}) = r_*(\partial(\tilde{\gamma})) = \partial(r_*(\tilde{\gamma}))$$

y $r_*(\tilde{\gamma}) \in \tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(K))$. Como q es inversible, tenemos una contradicción. □

Observación 4.5.11. La demostración funcionaría con coeficientes enteros si pudiéramos escoger la cadena a y el ciclo $\alpha \in \tilde{Z}_*(\mathcal{A}_p(H))$ de manera que a tiene coeficiente 1 en α.

Si tomamos coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces, en la demostración del Lema 4.5.10, $q \in \mathbb{Z}$ implica que $q\beta = 0$ en la homología de $\mathcal{A}_p(K)$. Esto es, β es un elemento de torsión de $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(K),\mathbb{Z})$. La demostración también funcionaría con coeficientes enteros si pudiéramos suponer que β no es un elemento de torsión de $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(K))$, o que su orden es coprimo con el coeficiente de a en α.

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 4.5.1.

Demostración del Teorema 4.5.1. Sea G como en las hipótesis del teorema. Entonces $G = \Omega_1(G)$ y $O_p(G) = 1$. Por Lema 4.2.2, podemos asumir que $Z(G) = 1$. Sea $L = O_{p'}(G)$ y supongamos que $L \neq 1$. Si todo $A \in \mathcal{A}_p(G)$ actúa no fielmente en L, entonces, considerando los subgrupos de orden p, $L \leq C_G(\Omega_1(G)) = Z(G) = 1$, una contradicción. Por lo tanto, algún $A \in \mathcal{A}_p(G)$ actúa fielmente en L.

Sea $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{A}_p(G) : A \text{ actúa fielmente en } L\}$. Entonces $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Sea $\mathcal{P} = \{A_1,\ldots,A_r\}$ una extensión lineal de $\mathcal{P}$ tal que $A_i < A_j$ implica $i < j$. Sea $i = \text{máx}\{k : O_p(C_G(LA_k)) = 1\}$, con $i = 0$ si este conjunto es vacío, y sea $X_k = \mathcal{A}_p(G) - \{A_k,\ldots,A_r\}$.

Probaremos que $X_{i+1} \subseteq \mathcal{A}_p(G)$ es una equivalencia débil mostrando que $X_j \subseteq X_{j+1}$ es una equivalencia débil para cada $j > i$. Pongamos $X := X_{j+1} = X_j \cup \{A\}$ con $A := A_j$. Si $B \in X_{>A}$ entonces $A < B$ y B no actúa fielmente en L. Luego $C_B(L) \neq 1$. Sea $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_p(G) : C_E(L) \neq 1\}$. Por la Observación 3.1.12, $\mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_p(C_G(L))$. Entonces $X_{>A} = \mathcal{A}_p(G)_{>A} \cap \mathcal{N}$. Por el Lema 3.1.13 es homotópicamente equivalente a $\mathcal{A}_p(C_{C_G(L)}(A)) = \mathcal{A}_p(C_G(LA)) \underset{w}{\approx} *$, pues $O_p(C_G(LA)) \neq 1$. Por lo tanto $X - \{A\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia débil.

Por inducción concluimos que $X_{i+1} \subseteq \mathcal{A}_p(G)$ es una equivalencia débil. Sea $X = X_{i+1}$. Notar que $\mathcal{A}_p(LC_G(L)) \subseteq X$. Si $i = 0$, entonces $\mathcal{A}_p(G) \underset{w}{\approx} X = \mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_p(C_G(L))$ Pero $C_G(L) \trianglelefteq G$ implica $O_p(C_G(L)) = 1$, y como L no es central en G, $C_G(L) < G$. Por la hipótesis inductiva, $0 \neq \tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(C_G(L)),\mathbb{Q}) = \tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G),\mathbb{Q})$, una contradicción. Por lo tanto, $i > 0$ y tenemos que $A = A_i$.

Ahora chequeamos las hipótesis del Lema 4.5.10 con $H = LA$ y $K = C_G(LA)$.

(I) Los elementos de $\mathcal{A}_p(G) - X$ actúan fielmente en L, por lo que intersecan trivialmente a K;

(II) $H \cap K \leq Z(L)$ es un p'-grupo;

(III) Sea $a \in \mathcal{A}_p(LA)'$ una cadena que exhibe $(QD)_p$ en algún ciclo $\alpha \in \tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(LA))$. Entonces $\alpha \in \tilde{C}_*(X)$ pues $\mathcal{A}_p(LA) \subseteq X$.

(IV) Es claro pues a es una cadena full.

(V) Vale pues $O_p(K) = 1$ y $K < G$.

Por lo tanto, $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G)) \cong \tilde{H}_*(X) \neq 0$. □

Observación 4.5.12. Como notamos en la Observación 4.5.11, la reducción anterior puede ser llevada a cabo con coeficientes enteros si pudiéramos elegir al ciclo $\alpha \in \tilde{Z}_{m_p(A)-1}(\mathcal{A}_p(LA))$ con al menos uno de sus términos con coeficiente igual a 1.

Esto también funcionaría con coeficientes enteros si el ciclo no trivial β que escogimos en la homología de $\mathcal{A}_p(K)$ tiene orden coprimo con el coeficiente de alguna cadena $a \in \alpha$.

Relacionamos este resultado con el Corolario 4.3.2, que está enunciado en términos de homología con coeficientes enteros.

Corolario 4.5.13. *Sea G un grupo finito. Supongamos que los subgrupos propios de G satisfacen la conjetura fuerte de Quillen y que $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ posee un subcomplejo 2-dimensional, G-invariante y homotópicamente equivalente a éste. Entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen.*

Demostración. Tomando un contraejemplo, $O_p(G) = 1$ y $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) = 0$. Por el Teorema 4.5.1, podemos suponer que $O_{p'}(G) = 1$. Como la conjetura fuerte de Quillen vale para grupos casi simples, G no es casi simple.

Sea K tal subcomplejo. Si K tiene homología entera libre abeliana, entonces K es $\mathbb{Z}$-acíclico y por el Teorema 4.3.1, $O_p(G) \neq 1$, una contradicción. Veamos ahora que $H_*(K, \mathbb{Z})$ es abeliano libre.

Por un argumento de dimensión, $H_2(K, \mathbb{Z})$ y $H_0(K, \mathbb{Z})$ son grupos abelianos libres. Resta probar que $H_1(K, \mathbb{Z})$ es libre. Por el Teorema 3.4.1, como $O_{p'}(G) = 1$ y G no es casi simple, $\pi_1(\mathcal{A}_p(G))$ es un grupo libre. Por lo tanto, $H_1(K, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre. □

Podemos extender el Corolario 4.3.3 del caso de p-rango 3 al caso de la versión fuerte de la conjetura.

Corolario 4.5.14. *La conjetura fuerte de Quillen vale para grupos de p-rango a lo sumo* 3.

4.6. El caso p-rango 4 de la conjetura fuerte

En esta sección reducimos el estudio de la conjetura fuerte de Quillen a grupos con componentes de p-rango al menos 2, y probamos que ésta vale para grupos de p-rango a lo sumo 4. Las ideas detrás de estas demostraciones siguen básicamente las del Lema 4.4.2 y del Teorema 4.5.1, con el uso del Lema 4.5.10. Comenzamos con algunas observaciones generales.

Observación 4.6.1. Sea $L \leq G$ y sea $E \in \mathcal{A}_p(N_G(L))$. Entonces $E \cap (LC_G(L)) = 1$ si y solo si E actúa por automorfismos externos en L.

Supongamso que $E \cap (LC_G(L)) = 1$ y que $x \in E$ actúa como automorfismo interno en L. Entonces existe $y \in L$ tal que $z = y^{-1}x$ acts trivially on L. Por lo tanto $z \in C_G(L)$ y $x = yz \in LC_G(L)$. Como $E \cap (LC_G(L)) = 1$, concluimos que $x = 1$.

La recíproca es inmediata.

Observación 4.6.2. Sea G un grupo finito con $C_G(F^*(G)) = 1$ y $F^*(G) = E(G)$. Notar que $Z(E(G)) = 1$. Sea L una componente de G.

Si $B \leq G$ es tal que $B \cap L \neq 1$, entonces $B \leq N_G(L)$. Esto vale porque si $b \in B$ entonces $L^b \cap L \geq B \cap L$ es no trivial, y esto fuerza a $L^b = L$.

Por otro lado, si $N = O_p(C_G(L))$ y $K \in \mathcal{C}(G)$ es una componente de G, entonces o bien $K \in \mathcal{C}(C_G(L))$, o $K = L$. En ambos casos, $[N,K] = 1$, por lo que $1 = [N,E(G)] = [N,F^*(G)]$ pues $E(G) = F^*(G)$. Por lo tanto $N \leq C_G(E(G)) = C_G(F^*(G)) = 1$. En conclusión, $O_p(C_G(L)) = 1$.

El siguiente teorema trata con grupos con alguna componente de p-rango 1. En particular, trata con los casos excluidos $L_2(2^3)$ con $p = 3$ y $\mathrm{Sz}(2^5)$ con $p = 5$ en [AS93]. Luego, este teorema realmente representa uan extensión de los trabajos de Aschbacher-Smith.

Teorema 4.6.3. *Sea $L \leq G$ una componente tal que $L/Z(L)$ tiene p-rango 1. Si la conjetura fuerte de Quillen vale para los subgrupos propios de G, entonces vale para G.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Por el Teorema 4.5.1, $O_p(G) = 1 = O_{p'}(G)$ y L es un grupo simple de p-rango 1. Por la Observación 4.6.2, $O_p(C_G(L)) = 1$. Sea $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) : E \cap (LC_G(L)) \neq 1\}$. Dividimos la demostración en dos casos.

Caso 1: $\mathcal{A}_p(N_G(L)) = \mathcal{N}$. En este caso, no hay automorfismos externos de L de orden p dentro de G, y $\Omega_1(N_G(L)) \cong L \times \Omega_1(C_G(L))$. Sea $A \in \mathcal{A}_p(L)$. Si $B \in \mathcal{A}_p(G)_{>A}$ entonces $B = AC_B(L)$, por lo que $\mathcal{A}_p(G)_{>A} \subseteq A \times C_G(L)$. Además, como L tiene p-rango 1, A es una componente conexa de $\mathcal{A}_p(L)$ y exhibe $(QD)_p$ para L. Luego se verifican las hipótesis del Lema 4.2.5 con $H = L$ y $K = C_G(L)$.

Caso 2: $\mathcal{A}_p(N_G(L)) \neq \mathcal{N}$. En este caso, todo $E \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) - \mathcal{N}$ actúa por automorfismos externos en L por la Observación 4.6.1, y tiene orden p porque $m_p(L) = 1$ (ver Tabla A.4). Por el Lema 4.6.4, podemos supoenr que L no es isomorfo a $L_2(2^3)$ ($p = 3$) ni a $\mathrm{Sz}(2^5)$ ($p = 5$). Luego $m_p(LE) = 2$ y LE tiene $(QD)_p$ (o sea it is connected, see Table A.4). Además, todo $A \in$

$\mathcal{A}_p(LE)$ de orden p^2 es igual a $\Omega_1(S)$ para algún $S \in \mathrm{Syl}_p(LE)$ por [GLS99, Chapter 4, Lemma 5.1(b)]. Así, todo $A \in \mathcal{A}_p(LE)$ de orden p^2 exhibe $(QD)_p$ para LE, y dos de ellos son LE-conjugados. Tomemos un tal subgrupo A y notar que $LA = LE$, por lo que $C_G(LA) = C_G(LE)$. Sea $K := C_G(LE)$. Si $B \in \mathcal{A}_p(G)_{>A}$ entonces $B \cap L \neq 1$ y $B = AC_B(L) \leq AC_G(LA) = AK$, con $C_B(L) \neq 1$. Esto muestra que $B \in \mathcal{A}_p(G)_{>A} \mapsto r(B) = C_B(L) \in \mathcal{A}_p(K)$ es una retracción con inversa $C \mapsto AC$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_p(G)_{>A} \simeq \mathcal{A}_p(K)$. Si $O_p(K) = 1$ entonces ya estamos por el Lema 4.2.5 con $H = LA$.

Si $O_p(K) \neq 1$, entonces podemos extraer todos estos A y obtener una equivalencia homotópica débil $\mathcal{A}_p(G) - \{A \in \mathcal{A}_p(LE) : |A| = p^2\} \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)$. Supongamos que la misma conclusión vale para cualquier elección de $E \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) - \mathcal{N}$, esto es, $O_p(C_G(LE)) \neq 1$. Sea $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) : |A| = p^2$ actúa fielmente en $L\}$. Entonces $X := \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)$ es una equivalencia homotópica débil. Sea $A \in \mathcal{A}_p(L)$. Si $B \in X_{>A}$ entonces $B \cap L \geq A \neq 1$ implica que $B \in \mathcal{A}_p(N_G(L))$, y como B no puede actuar fielmente en L, tenemos que $B = AC_B(L) \leq AC_G(L)$. Como antes, $X_{>A} \simeq \mathcal{A}_p(C_G(L))$ vía la retracción $B \mapsto C_B(L)$. Sea $\alpha = (A) \in C_0(\mathcal{A}_p(L))$. Como $X_{>A} \subseteq A \times C_G(L)$, las hipótesis del Lema 4.5.10 son verificadas con $H = L$, $K = C_G(L)$ y $a = (A) = \alpha$, por lo que $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G)) \cong \tilde{H}_*(X)$ es no trivial. $\square$

El siguiente lema trata con algunos casos excluidos en [AS93].

Lema 4.6.4. *Sea G un grupo finito tal que sus subgrupos propios safisfacen la conjetura fuerte de Quillen. Si L es una componente de G tal que $L/Z(L)$ es isomorfo a $L_2(2^3)$ (y $p = 3$) o $\mathrm{Sz}(2^5)$ (y $p = 5$), entonces G satisface la conjetura fuerte de Quillen.*

Demostración. Supongamos lo contrarior. Luego $O_p(G) = 1 = O_{p'}(G)$. Sea L tal componente. Entonces L es un grupo simple y $L \cong L_2(2^3)$ o $\mathrm{Sz}(2^5)$, con $p = 3$ o $p = 5$ respectivamente. Notar que $\mathrm{Aut}(L) \cong L \rtimes C_p$ donde C_p actúa en L por automorfismos de cuerpo. Si $x \in \mathrm{Aut}(L)$ es un automorfismo no interno de orden p de L, entonces x actúa en L por automorfismos de cuerpo y $C_L(x) \cong \mathbb{S}_3 \cong C_3 \rtimes C_2$ si $p = 3$ y $L \cong L_2(2^3)$, o $C_L(x) \cong C_5 \rtimes C_4$ si $p = 5$ t $L \cong \mathrm{Sz}(2^5)$. Esto es, $\Omega_1(C_L(x)) \cong C_p$.

Procedemos de manera similar al teorema anterior. Sea

$$\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) : E \cap (LC_G(L)) \neq 1\}.$$

Caso 1: $\mathcal{A}_p(N_G(L)) = \mathcal{N}$. Este caso se sigue exactamente igual al anterior.

Caso 2: $\mathcal{A}_p(N_G(L)) \neq \mathcal{N}$, por lo que todo $E \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) - \mathcal{N}$ actúa por automorfismos externos de cuerpo en L, $|E| = p$, $LE \cong \mathrm{Aut}(L)$ y $N_G(L) = LEC_G(L)$.

Fijemos $E \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) - \mathcal{N}$. Probemos que $\mathcal{A}_p(G)_{>E}$ es contráctil. Sea $C = \Omega_1(C_L(E)) \in \mathcal{A}_p(L)$ y fijemos un generador $c \in C$. Supongamos que $b, b' \in C_G(E)$ son tales que c^b y $c^{b'}$ pertenecen a la misma componente $L_1 \in \mathcal{C}(G)$. Entonces $1 \neq c^b \in L_1 \cap L^b$, por lo que $L_1 = L^b$. Similarmente, $L_1 = L^{b'}$. Luego,

$$b'b^{-1} \in N_G(L) \cap C_G(E) = C_{N_G(L)}(E) = C_L(E)EC_G(LE).$$

Por otro lado, $[C, C_L(E)EC_G(LE)] = 1$, por lo que $[C, b'b^{-1}] = 1$ y por lo tanto $c^b = c^{b'}$.

Considerar el conjunto $\mathcal{I} = \{c^b : b \in C_G(E)\}$. No es difícil mostrar que los elementos de $\mathcal{I}$ conmutan dos a dos. Sea $\hat{c} = \prod_{c' \in \mathcal{I}} c'$. Entonces $\hat{c} \in E(G)$ y éste es un elemento no trivial de orden p (la proyección a L es c). Sea $\hat{C} = \langle \hat{c} \rangle$ $(\neq 1)$. Notar que $[\hat{C}, E] = 1$ y $\hat{C} \in \mathcal{A}_p(LC_G(L))$. Si $B \in \mathcal{A}_p(G)_{>E}$ y $b \in B$, entonces b permuta los elementos de $\mathcal{I}$. En particular, $\hat{c}^b = \hat{c}$ y así $[\hat{C}, B] = 1$. Por lo tanto $\mathcal{A}_p(G)_{>E}$ es cónicamente contráctil vía la homotopía $B \leq \hat{C}B \geq \hat{C}E$, y entonces E es un up weak point de $\mathcal{A}_p(G)$.

La estructura de $\mathcal{A}_p(\mathrm{Aut}(L))$ puede ser descrita fácilmente: sus componentes conexas tienen la forma $\mathcal{A}_p(E)$, donde E es elemental abeliano de orden p^2 generador por un elemento de orden p de L y algún automorfismo externo de cuerpo de L. Esto es porque $\mathrm{Aut}(L) \cong \mathrm{Ree}(3)$ o $\mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(2^5))$ y los p-subgrupos de Sylow de estos grupos se intersecan trivialmente por el Teorema A.1.3. En particular, para todo $C \in \mathcal{A}_p(L)$ existe un único $E_C \in \mathcal{A}_p(\mathrm{Aut}(L))$ de orden p^2 tal que $C \leq E_C$, y $C = \Omega_1(C_L(x))$ para todo $x \in E_C - C$.

Sif $C \in \mathcal{A}_p(L)$, entonces $|C| = p$ y $\mathcal{A}_p(G)_{>C} \simeq \mathcal{A}_p(E_C C_G(L))$, que es contráctil pues $1 \neq E_C \leq Z(E_C C_G(LC))$. En conclusión, los subgrupos del conjunto $\mathcal{S} := \mathcal{A}_p(L) \cup \{E \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) :$ E actúa por automorfismos de cuerpo en $L\}$ tienen orden p y son up weak points. Luego, $X := \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)$ es una equivalencia homotópica débil.

Ahora, notemos que $X \cap \mathcal{A}_p(N_G(L)) = \mathcal{A}_p(N_G(L)) - \mathcal{S}$ y que ésta contiene a $\mathcal{A}_p(C_G(L))$. Sea $\mathcal{S}' = \{F \in \mathcal{A}_p(N_G(L)) : |F| = p^2$ y actúa fielmente en $L\}$. Observar tambiíen que $\mathcal{S}' \subseteq X$. Claramente $X_{>F} = \mathcal{A}_p(G)_{>F} \simeq \mathcal{A}_p(C_G(LF))$ y la retracción $r : X_{>F} \to \mathcal{A}_p(C_G(LF))$ definida por $r(B) = C_B(L)$ es una equivalencia homotópica.

Si $O_p(C_G(LF)) \neq 1$ para todo $F \in \mathcal{S}'$, considerar $\mathcal{S}'' = \{E \in \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{A}_p(L) : E$ actúa fielmente en $L\}$, y sea $Y = \mathcal{A}_p(G) - \mathcal{S}''$. Entonces $Y \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)$ es una equivalencia homotópica débil (podemos extraer primero los puntos de $\mathcal{S}''$ de orden p como up weak points, y luego los de orden p^2). Notar que $\mathcal{A}_p(L) \subseteq Y$ y tomemos $C \in \mathcal{A}_p(L)$. Si $B \in Y_{>C}$, entonces $B \cap L \geq C \neq 1$ implica que $B \leq N_G(L)$ y $B \not\leq L$, y como hemos extraído aquellos que actúan fielmente en L, $B = CC_B(L)$. Así, $Y_{>C} \subseteq C \times C_G(L)$ y por el Lema 4.5.10 aplicado al subposet Y, $H = \mathcal{A}_p(L)$, $K = C_G(L)$ y $a = (C) = \alpha$, $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G)) \cong \tilde{H}_*(Y)$ es no trivial.

Ahora supongamos que para algún $F \in \mathcal{A}_p(N_G(L))$ de orden p^2 y que actúa fielmente en L tenemos que $O_p(C_G(LF)) = 1$. Sea $\alpha = (F) \in C_0(\mathcal{A}_p(LF))$. Entonces α no es un borde en $\tilde{C}_*(\mathcal{A}_p(LF))$ y $F \in X$. Como $O_p(C_G(LF)) = 1$, por inducción podemos tomar un ciclo no trivial $0 \neq \beta \in \tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(C_G(LF)))$. Las hipótesis del Lema 4.5.10 se satisfacen claramente con $H = LF$, $K = C_G(LF)$ y $\alpha = a = (F)$, y por lo tanto $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G)) \cong \tilde{H}_*(X) \neq 0$. □

Como corolario, uno puede mostrar que [AS93, Main Theorem] se extiende a $p = 5$. La obstrucción para extender este teorema a $p = 3$ recae en [AS93, Theorem 5.3], el cual se demuestra para $p > 3$ y es fuertemente usado en el tercer paso de la demostración de [AS93, Main Theorem] (ver también la discusión en la Sección 4.2).

Corolario 4.6.5. *Las conclusiones del Main Theorem de [AS93] valen para* $p = 5$.

Ahora continuamos con algunas observaciones preliminares antes de probar el caso de p-rango 4 de la conjetura fuerte.

Observación 4.6.6. Supongamos que $H \leq G$ y $m_p(H) = m_p(G) =: r$. Entonces tenemos una inclusión en el grupo de homología superior $\tilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(H)) \subseteq \tilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G))$. En particular, si H tiene $(QD)_p$ entonces lo tiene G.

Si $L = L_1 \times \ldots \times L_n$ es un producto directo y cada L_i tiene $(QD)_p$, entonces L tiene $(QD)_p$. Esto se sigue de la equivalencia débil $\mathcal{A}_p(L) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(L_1) * \ldots * \mathcal{A}_p(L_n)$ y la descomposión homológica del join.

Observación 4.6.7. Sea G tal que $O_p(G) = 1 = O_{p'}(G)$ y $G = \Omega_1(G)$. Supongamos que L es una componente normal de G. Sea $H = L \times C_G(L)$ y sea $x \in G$ de orden p. Si x actúa por un automorfismo interno en L, entonces $x = yz$ donde $y \in L$ y $z \in C_G(L)$ (ver Observación 4.6.1). Por lo tanto, si todo elemento de orden p de G actúa por automorfismos internos en L, entonces $G = \Omega_1(G) = L \times C_G(L)$. En particular, $\mathcal{A}_p(G) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(L) * \mathcal{A}_p(C_G(L))$ por la Proposición 3.1.16. Finalmente, si $\mathcal{A}_p(C_G(L))$ no es $\mathbb{Q}$-acíclico entonces tampoco es $\mathcal{A}_p(G)$ pues $\mathcal{A}_p(L)$ no es $\mathbb{Q}$-acíclico (por el caso casi simple de la conjetura).

Teorema 4.6.8. *La conjetura fuerte de Quillen vale para grupos de p-rango a lo sumo* 4.

Demostración. Sea G un contraejemplo minimal al enunciado del teorema. Entonces $G = \Omega_1(G)$, $m_p(G) = 4$, $O_p(G) = 1 = O_{p'}(G)$ y $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) = 0$ por el Teorema 4.5.1 y el Corolario 4.5.14. Estas hipótesis implican que $F^*(G) = L_1 \times \ldots \times L_n$ es el producto directo de grupos simples de orden divisible por p. Por el caso casi simple de la conjetura, $n \geq 2$, y por el Lema 4.4.1 $n \leq 4$. Por el Teorema 4.6.3, podemos suponer que G no tiene componentes de p-rango 1, por lo que $m_p(L_i) \geq 2$ para todo i, y esto fuerza a $n = 2$, con $m_p(L_1) = 2 = m_p(L_2)$.

Por la Observación 4.6.7, si G tiene una componente normal L_i entonces algún elemento de orden p de G actúa por automorfismos externos en L_i y en particular $p \mid |\mathrm{Out}(L_i)|$.

Si tanto $\mathcal{A}_p(L_1)$ como $\mathcal{A}_p(L_2)$ son conexos, entonces L_1 y L_2 tienen $(QD)_p$, y así $F^*(G)$ tiene $(QD)_p$, llevando a una contradicción por la Observación 4.6.6. En consecuencia, podemos asumir que $\mathcal{A}_p(L_1)$ es disconexo, es decir L_1 tiene un subgrupo fuertemente p-embebido. Por la Tabla A.4, L_1 es isomorfo a uno de los siguientes grupos:

1. $L_2(2^2) = \mathbb{A}_5$ o $U_3(2^2)$ con $p = 2$, o

2. $L_3(2^2)$ con $p = 3$.

Estamos usando el hecho de que si p es impar entonces L_1 es normal en G y $p \mid |\mathrm{Out}(L_1)|$. Lidiamos con cada caso por separado.

1. $p = 2$ y $L_1 \cong \mathbb{A}_5$ o $U_3(2^2)$. Supongamos que alguna involución $x \in G$ permuta L_1 con L_2 (o sea no son normales en G). Sea $X = \langle x \rangle$. Notar que $F^*(G) \leq N_G(L_1)$ y $G = N_G(L_1)X$. Como $\pi_1(\mathcal{A}_2(F^*(G)X))$ es un grupo libre no trivial por el Teorema 3.4.8, $F^*(G) < N_G(L_1)$ (que es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(L_1) \times \mathrm{Aut}(L_2)$). Podemos suponer que $N_G(L_1) = \Omega_1(N_G(L_1))$ y entonces, $N_G(L_1)/F^*(G)$ es un subgrupo no trivial de $C_2 \times C_2$.

   Como $m_2(\mathrm{Aut}(U_3(2^2))) = 3$ y $\mathbb{S}_5 \times \mathbb{S}_5$ tiene $(QD)_2$ y 2-rango 4, $N_G(L_1) = F^*(G)\langle \phi \rangle$ donde ϕ es una involución actuando por un automorfismo externo en L_1 y L_2. Si $L_1 \cong U_3(2^2)$, entonces $m_2(C_{L_1}(\phi)) = 2$ y $m_2(L_1\langle \phi \rangle) = 3 = m_2(L_2\langle \phi \rangle)$. Esto lleva a que $m_2(N_G(L_1)) = 5$, una contradicción. En consecuencia, $G \cong ((\mathbb{A}_5 \times \mathbb{A}_5) \rtimes \langle \phi \rangle) \rtimes X$, donde ϕ actúa en cada copia de $\mathbb{A}_5$ como una involución externa y X permuta las copias de $\mathbb{A}_5$.

   Una demostración similar a la de los Ejemplos 4.4.9 y 4.4.10 muestra que $\mathrm{i}(\mathcal{A}_p(G))$ tiene altura 2, llevando a una contradicción cuando es combinada con el Corolario 4.5.13 en este contexto. También puede ser testeada con GAP [GAP18, FPSC19].

   Por lo tanto, podemos suponer que $L_1 \trianglelefteq G$.

   Considerar $H = L_1 \times C_G(L_1)$, y $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_2(G) : E \cap H \neq 1\}$. El complemento $\mathcal{S} := \mathcal{A}_2(G) - \mathcal{N}$ consiste de subgrupos de orden 2 pues de otra manera $\Omega_1(\mathrm{Aut}(L_1)) \leq G$ (ver Observación 4.6.7) y así $G = \Omega_1(\mathrm{Aut}(L_1)) \times G_2$ para algún $G_2 \leq \mathrm{Aut}(L_2)$. Sus links son $\mathcal{A}_2(G)_{>E} \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_2(C_{L_1}(E)) * \mathcal{A}_2(C_G(L_1E))$, para $E \in \mathcal{S}$. Si todos estos links son homotópicamente triviales entonces ya estamos. Supongamos que no todos lo son, por lo que en particular para algún $E \in \mathcal{S}$ tenemos que $O_p(C_G(L_1E)) = 1$.

   Los centralizadores de las involuciones externas de $L_1 \cong \mathbb{A}_5$ y $U_3(2^2)$ son $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{A}_5$ respectivamente, los cuales tienen poset de 2-subgrupos disconexo. Notar que $m_2(\mathbb{S}_3) = 1$.

   Como $\mathbb{S}_5$ tiene $(QD)_2$, $2 = m_2(\mathbb{A}_5) = m_2(\mathbb{S}_5)$ y $\mathbb{A}_5$ no tiene $(QD)_2$, para todo involución $x \in \mathbb{S}_5 - \mathbb{A}_5$ existe una involución $y \in \mathbb{A}_5$ tal que $\langle x, y \rangle$ exhibe $(QD)_2$ en $\mathbb{S}_5$.

   Si $L_1 \cong \mathbb{A}_5$ entonces todo $E \in \mathcal{A}_2(G) - \mathcal{N}$ actúa por automorfismos externos en L_1 y por lo tanto, para algún $A \in \mathcal{A}_2(L_1)$, AE exhibe $(QD)_2$ para $L_1E \cong \mathbb{S}_5$. Fijemos $E \in \mathcal{S}$ con $O_p(C_G(L_1E)) = 1$ y tomemos $A \in \mathcal{A}_2(L_1)$ con $|A| = p$ y AE exhibiendo $(QD)_2$ para L_1E. Entonces $L_1E = L_1AE$ tiene $(QD)_2$ exhibido por AE y $O_p(C_G(L_1AE)) = O_p(C_G(L_1E)) = 1$. Las hipótesis del Lema 4.2.5 pueden ser chequeadas y por lo tanto $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_2(G), \mathbb{Q}) \neq 0$.

   En consecuencia, $L_1 \cong U_3(2^2)$ y $L_2 \ncong \mathbb{A}_5$. Además, existe alguna involución $x \in G$ que actúa por automorfismos externos tanto en L_1 como en L_2 por la Observación 4.6.7. Como $C_{L_1}(x) \cong C_{U_3(2^2)}(x) \cong \mathbb{A}_5$ tiene 2-rango 2, debe ser que $C_{L_2}(x)$ tiene 2-rango 1 y esto fuerza a que $L_2 \cong L_2(q)$ con q impar y x induciendo automorfismos diagonales en L_2 (ver [GLS98, Theorem 4.10.5]).

   Supongamos que existe una involución $\phi \in C_G(L_1)$ actuando por automorfismos de cuerpo externos en $L_2 = L_2(r^a)$, con r un primo impar. Entonces $C_{L_2}(\phi) \cong L_2(r^{a/2})$ tiene

2-rango 2, y así $L_1 \times (L_2\langle\phi\rangle) \leq H$ tiene 2-rango al menos 5, una contradicción. En consecuencia $C_G(L_1)$ no contiene ninguna involución que actúe como automorfismos de cuerpo en L_2. Por el razonamiento anterior, una involución externa tanto de L_1 como de L_2 debe actuar por automorfismos diagonales en L_2. Esto muestra que G no contiene automorfismos de cuerpo de L_2 y en particular, $G \leq \mathrm{Aut}(L_1) \times \mathrm{Inndiag}(L_2)$.

Tomemos $A \in \mathcal{A}_2(L_2)$ exhibiendo $(QD)_2$ para L_2. Como $L_2 \trianglelefteq G$, deducimos que $O_p(C_G(L_2A)) = O_p(C_G(L_2)) = 1$, y si $B \in \mathcal{A}_p(G)_{>A}$, entonces $B/C_B(L_2) \leq \mathrm{Inndiag}(L_2)$, que tiene 2-rango 2. Luego $C_B(L_2) \neq 1$ y $B = AC_B(L_2)$. Por el Lema 4.2.5 aplicado a $H = L_2$ y $K = C_G(L_2)$, $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_2(G), \mathbb{Q}) \neq 0$.

2. Supongamso que $p = 3$ y $L_1 \cong L_3(2^2)$.

   Notar que $m_3(L_2) = 2$, $\mathrm{Out}(L_3(2^2)) \cong D_{12} = C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$ y $\mathrm{Inndiag}(L_3(2^2)) \cong L_3(2^2) \rtimes C_3$, por lo que sin pérdida de generalidad $G \leq \mathrm{Inndiag}(L_3(2^2)) \times \mathrm{Aut}(L_2)$. También podemos asumir que G no es el producto directo de grupos casi simples y que algún elemento $x \in G - L_1$ de orden 3 actúa por automorfismos diagonales en $L_1 \cong L_3(2^2)$ y por automorfismos externos en L_2. Sea $C = \langle x \rangle$. Observar que $(L_1 \times L_2)C$ contiene todo automorfismo diagonal no interno de L_1, y todo tal automorfismo actúa no trivialmente en L_2.

   Como $\mathcal{A}_3(L_3(2^2))$ es disconexo pero $\mathcal{A}_3(L_3(2^2)C)$ es un poset conexo (no simplemente conexo) de altura 1, cambiando C por otro automorfismo diagonal no interno de $L_1 \cong L_3(2^2)$ (que está en $(L_1 \times L_2)C$), para algún $A \in \mathcal{A}_3(C_{L_1}(C))$, AC exhibe $(QD)_3$ para L_1C (esto vale pues $C_{L_3(2^2)}(C) \cong \mathbb{A}_5$ o $C_7 \rtimes C_3$ por cálculo directo). Sean $H = L_1 \times C_G(L_1)$ y $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A}_3(G) : E \cap H \neq 1\}$. Entonces $\mathcal{S} := \mathcal{A}_3(G) - \mathcal{N}$ consiste de elementos minimales actuando por automorfismos diagonales no internos en $L_1 \cong L_3(2^2)$.

   Recordar que $\mathcal{A}_3(G)_{>E} \simeq \mathcal{A}_3(C_{L_1}(E) \times C_G(L_1E)) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_3(C_{L_3(2^2)}(E)) * \mathcal{A}_3(C_G(L_1E))$ y $C_G(L_1E) = C_G(L_1C)$, para $E \in \mathcal{S}$. Si $O_p(C_G(L_1C)) \neq 1$ entonces $\mathcal{A}_3(G) \underset{w}{\approx} \mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_3(H)$ y ya estamos. De otra manera, $C \in \mathcal{S}$, $O_p(C_G(L_1C)) = 1$ y para algún $A \in \mathcal{A}_3(C_{L_1}(C))$, AC exhibe $(QD)_3$ para L_1C. Por el Lema 4.2.5 con $H = L_1(AC)$ y $K = C_G(L_1(AC)) = C_G(L_1C)$, $\tilde{H}_*(\mathcal{A}_3(G), \mathbb{Q}) \neq 0$.

Esto concluye la demostración del caso de p-rango 4. □

Apéndice

A.1. Grupos finitos simples

Por la clasificación de grupos finitos simples (CGFS), todo grupo simple pertenece a una de las siguientes familias:

1. Grupos cíclicos C_p de orden p primo (los grupos simples abelianos),
2. Grupos Alternos $\mathbb{A}_n$ con $n \geq 5$,
3. Grupos simples finitos de tipo Lie,
4. Los 26 grupos Esporádicos.

Recordar que un grupo finito G tiene un subgrupo fuertemente p-embebido si existe $M < G$ tal que $|M|_p = |G|_p$ y $M \cap M^g$ es un p'-grupo para todo $g \in G - M$. Por los resultados de Quillen (ver Proposición 3.1.1), G posee un subgrupo fuertemente p-embebido si y solo si $\mathcal{A}_p(G)$ es disconexo. El siguiente teorema clasifica los grupos con esta propiedad.

Teorema A.1.1 ([Asc93, (6.1)]). *El grupo finito G tiene un subgrupo fuertemente p-embebido (es decir $\mathcal{A}_p(G)$ es disconexo) si y solo si o bien $O_p(G) = 1$ y $m_p(G) = 1$, o $\Omega_1(G)/O_{p'}(\Omega_1(G))$ es uno de los siguientes grupos:*

1. *Simple de tipo Lie y rango de Lie 1 en característica p,*
2. *$\mathbb{A}_{2p}$ con $p \geq 5$,*
3. *$\mathrm{Ree}(3)$, $L_3(2^2)$ o M_{11} con $p = 3$,*
4. *$\mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(2^5))$, ${}^2F_4(2)'$, McL, o Fi_{22} con $p = 5$,*
5. *J_4 con $p = 11$.*

Observación A.1.2. Los grupos simples de tipo Lie y Lie rango 1 son los grupos $L_2(q)$, $U_3(q)$, $\mathrm{Sz}(q)$ y ${}^2G_2(q)$. En característica 2, estos son $L_2(2^n)$, $U_3(2^n)$ y $\mathrm{Sz}(2^n)$ y son los únicos grupos simples con un subgrupo fuertemente 2-embebido. No hay grupos simples de 2-rango 1 (ver [GLS98, Theorem 4.10.5(a)]).

De esta lista podemos concluir que si L es un grupo simple con un subgrupo fuertemente p-embebido entonces sus p-subgrupos de Sylow se intersecan trivialmente. Esto se deduce de [GLS98, Theorem 7.6.2]. Ver también [Sei82, Theorem 7].

Teorema A.1.3 ([GLS98, Theorem 7.6.2])**.** *Si G tiene p-rango 1 o es uno de los grupos casi simples del Teorema A.1.1, entonces los p-subgrupos de Sylow de G se intersecan trivialmente.*

A.1.1. Grupos simples finitos de tipo Lie

La familia de grupos simples de tipo Lie es la familia más grande de grupos simples, y frecuentemente se la subdivide en las siguientes subfamilias:

Clásicos: $L_n(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$, $D_n(q)$,$U_n(q)$, ${}^2D_n(q)$;
Excepcionales: $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, $G_2(q)$;
(No clásicos) Twisteados: $\mathrm{Sz}(2^m)$, $\mathrm{Ree}(3^m)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2F_4(2^m)$, ${}^2E_6(q)$.

Aquí, $q = p^f$, donde p es un número primo, y, por ejemplo $L_n(q)$ es el grupo especial lineal proyectivo definido sobre el cuerpo finito de q elementos $\mathbb{F}_q$.

Llamamos a los grupos $L_n(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$, $D_n(q)$ los *grupos clásicos no twisteados* o *grupos de Chevalley no twisteados*. Los grupos $U_n(q)$, ${}^2D_n(q)$, ${}^2E_6(q)$, ${}^3D_4(q)$ son *variaciones de Steinberg* (que son twisteados). Los *grupos excepcionales* son $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, $G_2(q)$ (y no son twisteados). Los *grupos de Suzuki-Ree* son los grupos $\mathrm{Sz}(q)$, ${}^2F_4(q)$ y $\mathrm{Ree}(q)$ (son twisteados).

En la Tabla A.1 damos los nombres y órdenes de los diferentes grupos finitos simples de tipo Lie. Denotamos por (a,b) al máximo común divisor entre los enteros a y b.

Los siguientes grupos que aparecen en la Tabla A.1 no son simples. Ver [GL83, (3-1)].

- $L_2(2)$ y $L_2(3)$ son resolubles.
- $U_3(2)$ es resoluble.
- $\mathrm{Sz}(2)$ es resoluble.
- $B_2(2)$ no es simple, pero $B_2(2)'$ sí.
- $G_2(2)$ no es simple, pero $G_2(2)'$ sí.
- ${}^2F_4(2)$ no es simple, pero ${}^2F_4(2)'$ sí y es llamado *el grupo de Tits*. Su grupo de automorfismos externos es C_2.
- $\mathrm{Ree}(3)$ no es simple, pero $\mathrm{Ree}(3)'$ sí.

Grupo	Orden	Otros nombres
Grupos clásicos no twisteados de tipo Lie		
$L_n(q), n \geq 2$	$\dfrac{q^{\frac{(n-1)n}{2}}}{(n,q-1)} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{i+1}-1)$	$\mathrm{PSL}_n(q)$, $A_{n-1}(q)$
$B_n(q), n \geq 2$	$\dfrac{q^{n^2}}{(2,q-1)} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1)$	$O_{2n+1}(q)$ $\Omega_{2n+1}(q)$(q impar)
$C_n(q), n \geq 3$	$\dfrac{q^{n^2}}{(2,q-1)} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1)$	$\mathrm{PSp}_{2n}(q)$
$D_n(q), n \geq 4$	$\dfrac{q^{n(n-1)}(q^n-1)}{(4,q^n-1)} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$O_{2n}^+(q)$, $\mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$
Variaciones de Steinberg		
$U_n(q), n \geq 3$	$\dfrac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n,q+1)} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{i+1}-(-1)^{i+1})$	$\mathrm{PSU}_n(q)$ ${}^2A_{n-1}(q^2)$
${}^2D_n(q), n \geq 4$	$\dfrac{q^{n(n-1)(q^n+1)}}{(4,q^n+1)} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	${}^2D_n(q^2)$ $O_{2n}^-(q)$ $\mathrm{P}\Omega_{2n}^-(q)$
${}^2E_6(q)$	$\frac{q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)}{(3,q+1)}$	${}^2E_6(q^2)$
${}^3D_4(q)$	$q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$	${}^3D_4(q^3)$
Grupos de tipo Lie excepcionales		
$E_6(q)$	$\frac{q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)}{(3,q-1)}$	
$E_7(q)$	$\frac{q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{(2,q-1)}$	
$E_8(q)$	$q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)$ $(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$	
$F_4(q)$	$q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$	
$G_2(q)$	$q^6(q^6-1)(q^2-1)$	
Grupos de Suzuki-Ree		
$\mathrm{Sz}(2^{2n+1}), n \geq 1$	$q^2(q^2+1)(q-1), q = 2^{2n+1}$	${}^2B_2(2^{2n+1})$
${}^2F_4(2^{2n+1}), n \geq 0$	$q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1), q = 2^{2n+1}$	
$\mathrm{Ree}(3^{2n+1}), n \geq 0$	$q^3(q^3+1)(q-1), q = 3^{2n+1}$	${}^2G_2(3^{2n+1})$

Cuadro A.1: El orden de los grupos finitos de tipo Lie y sus nombres.

Existen algunos isomorfismos entre los grupos simples de las diferentes familias, y están dados en el siguiente teorema. Ver [GL83, (3-2) & (3-3)].

Teorema A.1.4. *Tenemos los siguientes isomorfismos entre las diferentes familias:*

$$L_2(2) \cong \mathbb{S}_3; \quad L_2(3) \cong \mathbb{A}_4; \quad L_2(2^2) \cong L_2(5) \cong \mathbb{A}_5$$

$$L_2(3^2) \cong B_2(2)' \cong \mathbb{A}_6; \quad B_2(2) \cong \mathbb{S}_6; \quad L_4(2) \cong \mathbb{A}_8;$$

$$L_2(7) \cong L_3(2); \quad L_2(2^3) \cong \mathrm{Ree}(3)'; \quad B_n(2^m) \cong C_n(2^m)$$

$$B_2(3) \cong U_4(2); \quad U_3(3) \cong G_2(2)'$$

$$B_2(q^n) \cong C_2(q^n); \quad D_3(q^n) \cong L_4(q^n); \quad {}^2D_3(q^n) \cong U_4(q^n); \quad {}^2D_2(q^n) \cong L_2(q^{2n})$$

En la Tabla A.3, describimos brevemente los grupos de automorfismos externos de los grupos finitos simples de tipo Lie. Adoptamos la convención de [GL83, Section 7] para los nombres de los diferentes automorfismos de un grupo de tipo Lie, que de hecho sigue [Ste68]. Referimos a [GL83] para más detalles sobre los automorfismos de los grupos de tipo Lie.

Sea L un grupo finito simple de tipo Lie definido sobre el cuerpo de q elementos $\mathbb{F}_q$. Un automorfismo de L es *interno* (o *inner*) si está en $\mathrm{Inn}(L) \cong L/Z(L)$. Un *automorfismo interno-diagonal* (o *inner-diagonal*) de L es un automorfismo de L que es un producto de un automorfismo interno con uno diagonal (en el sentido de [Ste68]). El grupo de automorfismos interno-diagonales de L es denotado por $\mathrm{Inndiag}(L)$. Tenemos que $\mathrm{Inndiag}(L) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(L)$ y $\mathrm{Outdiag}(L) = \mathrm{Inndiag}(L)/\mathrm{Inn}(L)$. Los elementos de $\mathrm{Inndiag}(L) - \mathrm{Inn}(L)$ se llaman *automorfismos diagonales*. Hay un subgrupo $\Phi_L \leq \mathrm{Aut}(L)$ que esencialmente es el grupo de automorfismos del cuerpo de definición. Esto es, $\Phi_L \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ excepto si L es una variación de Steinberg, que en tal caso $\Phi_L \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^2})$ si $L = U_n(q)$, ${}^2D_n(q)$ o ${}^2E_6(q)$, y $\Phi_L \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^3})$ si $L = {}^3D_4(q)$. Notar que Φ_L es siempre un grupo cíclico. Hay un subgrupo $\Gamma_L \leq \mathrm{Aut}(L)$ que consiste de los automorfismos de grafo, isomorfo al grupo de simetrías del diagrama de Dynkin de L. Podría haber muchas elecciones para Φ_L y Γ_L. Fijamos una de ellas. Entonces $[\Phi_L, \Gamma_L] = 1$ y $\Phi_L\Gamma_L$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(L)$. Los elementos de Φ_L y sus conjugados son llamados *automorfismos de cuerpo* (o *field automorphisms*). Los elementos de $\Phi_L\Gamma_L - \Phi_L$ que generan un grupo (cíclico) disjunto de Γ_L, junto con sus conjugados en $\mathrm{Aut}(L)$, se llama automorfismos de grafo-cuerpo (o *graph-field automorphisms*). Los elementos de $\Gamma_L\,\mathrm{Inndiag}(L) - \mathrm{Inndiag}(L)$ son *automorfismos de grafo* (o *graph automorphisms*), excepto si $L = B_2(q)$, $F_4(q)$ o $G_2(q)$ y $\Gamma_L \neq 1$, que en tal caso los elementos de $\Phi_L\Gamma_L - \Phi_L$ son llamados automorfismos de grafo-cuerpo. Si L es una variación de Steinberg $U_n(q)$, ${}^2D_n(q)$, ${}^2E_6(q)$ o ${}^3D_4(q)$, entonces Φ_L es cíclico de orden $2f$, $2f$, $2f$ y $3f$ respectivamente y los elementos de orden no divisible por 2, 2, 2 y 3 resp. (y sus conjugados) son llamados automorfismos de cuerpo. El resto de los elementos de Φ_L son llamados automorfismos de grafo.

El grupo $\mathrm{Aut}(L)$ es una extension split $\mathrm{Inndiag}(L) : (\Phi_L \times \Gamma_L)$ y su grupo de automorfismos exteriores es $\mathrm{Outdiag}(L) : (\Phi_L \times \Gamma_L)$. Estos tres grupos son cíclicos excepto para $D_n(q)$ con q impar, donde $\mathrm{Outdiag}(D_n(q)) = C_2 \times C_2$ y si $n = 4$ entonces $\Gamma_L = \mathbb{S}_3$.

Todo automorfismo de L se puede escribir como $i.d.f.g$, donde i es un automorfismo interior, d es diagonal, f es de cuerpo y g es un automorfismo de grafo.

Ponga $q = p^f$, con p primo. Adoptamos la convención de que n denota al grupo cíclico de orden n, y n^m es el producto directo C_n^m.

Grupo	Estructura del Out
Grupos clásicos no twisteados de tipo Lie	
$L_n(q), n \geq 2$	$\begin{cases} (2,q-1):(f,1) & n=2 \\ (n,q-1):(f\times 2) & n>2 \end{cases}$
$B_n(q), n \geq 2$	$\begin{cases} (2,q-1):(f,1) & q \text{ impar o } n>2 \\ (2,q-1):(f\times 2) & q \text{ par}, n=2 \end{cases}$
$C_n(q), n \geq 3$	$(2,q-1):(f,1)$
$D_n(q), n \geq 4$	$\begin{cases} (2,q-1)^2:(f\times \mathbb{S}_3) & n=4 \\ (2,q-1)^2:(f\times 2) & n>4 \text{ par} \\ (4,q^n-1):(f\times 2) & n \text{ impar} \end{cases}$
Variaciones de Steinberg	
$U_n(q), n \geq 3$	$(n,q+1):(2f,1)$
${}^2D_n(q), n \geq 4$	$(4,q^n+1):(2f,1)$
${}^2E_6(q)$	$(3,q+1):(2f,1)$
${}^3D_4(q)$	$1,3f,1$
Grupos excepcionales de tipo Lie	
$E_6(q)$	$(3,q-1):(f\times 2)$
$E_7(q)$	$(2,q-1):(f,1)$
$E_8(q)$	$1.f,1$
$F_4(q)$	$\begin{cases} 1.f,1 & q \text{ impar} \\ 1.(f\times 2) & q \text{ par} \end{cases}$
$G_2(q)$	$\begin{cases} 1.f,1 & p\neq 3 \\ 1.(f\times 2) & p=3 \end{cases}$
Grupos de Suzuki-Ree	
$\mathrm{Sz}(2^{2n+1}), n \geq 1$	$1.(2n+1),1$
${}^2F_4(2^{2n+1}), n \geq 0$	$\begin{cases} 1.(2n+1),1 & n\neq 0 \\ 1,2,1 & n=0 \end{cases}$
$\mathrm{Ree}(3^{2n+1}), n \geq 0$	$1.(2n+1),1$

Cuadro A.3: Estructura de los automorfismos externos de los grupos simples de tipo Lie.

La siguiente tabla resume los p-rangos y la estructura de los automorfismos externos para los grupos de la lista del Teorema A.1.1. En cada caso, $q = p^a$ es el orden del cuerpo de definición.

Grupo G	Orden	$\mathrm{Out}(G)$	$m_p(G)$	$m_p(\mathrm{Out}(G))$
Grupos de p-rango 1				
G		p-Sylow cíclico	1	≤ 1
Lie rango 1 en característica p				
$L_2(p^a)$	$\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}$	$(2,q-1) \rtimes C_a$	a	$= m_p(C_a) \leq 1$
$U_3(p^a)$	$\frac{q^3(q^2-1)(q^3+1)}{(3,q+1)}$	$(3,q+1) \rtimes C_{2a}$	$\begin{cases} a & p=2 \\ 2a & p \neq 2 \end{cases}$	$= m_p(C_{2a}) \leq 1$
$\mathrm{Sz}(2^a)$, a impar	$q^2(q^2+1)(q-1)$	C_a	a	0
$\mathrm{Ree}(3^a)$, a impar	$q^3(q^3+1)(q-1)$	C_a	$2a$	$= m_p(C_a) \leq 1$
Grupos alternos, $p \geq 5$				
$\mathbb{A}_{2p}$	$\frac{(2p)!}{2}$	C_2	2	0
Excepciones con $p=3$				
$\mathrm{Ree}(3)$	$2^3,3^3,7$	1	2	0
$L_3(4)$	$2^6,3^2,5,7$	D_{12}	2	1
M_{11}	$2^4,3^2,5,11$	1	2	0
Excepciones con $p=5$				
$\mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(32))$	$2^{10},5^3,31,41$	1	2	0
${}^2F_4(2)'$	$2^{11},3^3,5^2,13$	C_2	2	0
McL	$2^7,3^6,5^3,7,11$	C_2	2	0
Fi_{22}	$2^{17},3^9,5^2,7,11,13$	C_2	2	0
Excepciones con $p=7$				
J_4	...	1	1	0

Cuadro A.4: Estructura de grupos con un subgrupo fuertemente p-embebido y sin p'-core.

A.1.2. Grupos Esporádicos

En la siguiente tabla listamos los órdenes de los grupos esporádicos. El grupo de automorfismos externos de un grupo esporádico es o bien el grupo trivial o el grupo cíclico C_2. Muchos de ellos llevan los nombres de los matemáticos que los descubrieron.

Grupo	Orden	Out	Otros nombres
Grupos de Mathieu			
M_{11}	$2^4,3^2,5,11$	1	
M_{12}	$2^6,3^3,5,11$	2	
M_{22}	$2^7,3^2,5,7,11$	2	
M_{23}	$2^7,3^2,5,7,11,23$	1	
M_{24}	$2^{10},3^3,5,7,11$	1	
Grupos de Janko			
J_1	$2^3,3,5,7,11,19$	1	
J_2	$2^7,3^3,5^2,7$	2	
J_3	$2^7,3^5,5,17,19$	2	
J_4	$2^{21},3^3,5,7,11^3,23,29,31,37,43$	1	
Grupos de Conway			
Co_1	$2^{21},3^9,5^4,7^2,11,13,23$	1	,1
Co_2	$2^{18},3^6,5^3,7,11,23$	1	,2
Co_3	$2^{10},3^7,5^3,7,11,23$	1	,3
Grupos de Fischer			
Fi_{22}	$2^{17},3^9,5^2,7,11,13$	2	$M(22)$
Fi_{23}	$2^{18},3^{13},5^2,7,11,13,17,23$	1	$M(23)$
Fi'_{24}	$2^{21},3^{16},5^2,7^3,11,13,17,23,29$	2	$M(24)'$
HS	$2^9,3^2,5^3,7,11$	2	
McL	$2^7,3^6,5^3,7,11$	2	Mc
He	$2^{10},3^3,5^2,7^3,17$	2	F_7
Ru	$2^{14},3^3,5^3,7,13,29$	1	
Suz	$2^{13},3^7,5^2,11,13$	2	
O'N	$2^9,3^4,5,7^3,11,19,31$	2	ON
HN	$2^{14},3^6,5^6,7,11,19$	2	F_5
Ly	$2^8,3^7,5^6,7,11,31,37,67$	2	
Th	$2^{15},3^{10},5^3,7^2,13,19,31$	1	F_3
B	$2^{41},3^{13},5^6,7^2,11,13,17,19,23,31,47$	1	F_2
M	$2^{46},3^{20},5^9,7^6,11^2,13^3,17,19,23,29,31,41,47,59,71$	1	F_1

Cuadro A.5: Orden y estructura del Out de los grupos Esporádicos.

En la Tabla A.6 listamos los p-rangos de los grupos Esporádicos. Las celdas vacías significan que el p-rango es a lo sumo 1.

L	$m_2(L)$	$m_3(L)$	$m_5(L)$	$m_7(L)$	$m_{11}(L)$	$m_{13}(L)$
M_{11}	2	2				
M_{12}	3	2				
M_{22}	4	2				
M_{23}	4	2				
M_{24}	6	2				
J_1	3					
J_2	4	2	2			
J_3	4	3				
J_4	11	2			2	
Co_1	11	6	3	2		
Co_2	10	4	2			
Co_3	4	5	2			
Fi_{22}	10	5	2			
Fi_{23}	11	6	2			
Fi'_{24}	11	7	2	2		
HS	4	2	2			
McL	4	4	2			
He	6	2	2	2		
Ru	6	2	2			
Suz	6	5	2			
O'N	3	4		2		
HN	6	4	3			
Ly	4	5	3			
Th	5	5	2	2		
B	12 to 18	6	3	2		
M	13 to 22	8	4	3	2	2

Cuadro A.6: El p-rango de los grupos Esporádicos.

A.2. Códigos en GAP

En esta sección presentamos algunos códigos de programación en **GAP** que hemos usado para calcular los ejemplos. Usamos el paquete [FPSC19], cuyo código puede encontrarse en el repositorio de **github**.

A.2.1. Calculando el core de un poset

Usando el paquete [FPSC19], podemos calcular su core en **GAP** de la siguiente manera.

```
gap> LoadPackage("posets");;
gap> G:=AlternatingGroup(5);;
gap> p:=2;;
gap> P:=QuillenPoset(G,p);
<finite poset of size 20>
gap> Core(P);
<finite poset of size 5>
```

Si $G = \mathbb{S}_3 \wr C_2$ con $p = 2$, por el Ejemplo 1.3.4, $\mathcal{A}_p(G)$ y $\mathcal{S}_p(G)$ no son homotópicamente equivalentes. Hemos calculado sus cores con el siguiente programa en **GAP**. Este grupo G tiene id $(72,40)$ en la librería SMALLGROUPS de **GAP**.

```
gap> G:=SmallGroup(72,40);
<pc group of size 72 with 5 generators>
gap> p:=2;
2
gap> StructureDescription(G);
"(S3 x S3) : C2"
gap> ApG:=QuillenPoset(G,2);
<finite poset of size 39>
gap> SpG:=BrownPoset(G,2);
<finite poset of size 57>
gap> Core(ApG);
<finite poset of size 39>
gap> Core(SpG);
<finite poset of size 21>
```

El siguiente código computa el core de los posets de p-subgrupos del grupo del Ejemplo 1.3.17, que corresponde al contraejemplo a la pregunta de Stong. Éste tiene id $(576,8654)$ en la librería SMALLGROUPS de **GAP**.

```
gap> G:=SmallGroup(576,8654);
<pc group of size 576 with 8 generators>
gap> ApG:=QuillenPoset(G,2);
<finite poset of size 321>
gap> Core(ApG);
<finite poset of size 100>
gap> RpG:=RobinsonPoset(G,2);
<finite poset of size 48431>
gap> Core(RpG);
<finite poset of size 2065>
```

```
gap> SdApG:=FacePoset(OrderComplex(ApG));
<finite poset of size 3287>
gap> Core(SdApG);
<finite poset of size 631>
```

También podemos computar el poset de órbitas de las subdivisiones de los posets de p-subgrupos. En el siguiente ejemplo calculamos el core de $\mathcal{A}_p(G)'/G$ cuando G es el grupo del Ejemplo 1.3.17 con $p = 2$.

```
gap> G:=SmallGroup(576,8654);
<pc group of size 576 with 8 generators>
gap> OrbitSdApG:=OrbitSubdivisionPosetOfElementaryAbelianpSubgroups(G,2);
<finite poset of size 9>
gap> Core(OrbitSdApG);
<finite poset of size 1>
```

En el siguiente ejemplo computamos el core de $\mathcal{S}_p(G)'/G$ cuando $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ y $p = 2$.

```
gap> G:=PSL(2,7);
Group([ (3,7,5)(4,8,6), (1,2,6)(3,4,8) ])
gap> OrbitSdSpG:=OrbitSubdivisionPosetOfpSubgroups(G,2);
<finite poset of size 19>
gap> Core(OrbitSdSpG);
<finite poset of size 13>
gap> OrbitSdApG:=OrbitSubdivisionPosetOfElementaryAbelianpSubgroups(G,2);
<finite poset of size 5>
gap> Core(OrbitSdApG);
<finite poset of size 1>
```

A.2.2. Calculando el grupo fundamental

El siguiente programa computa el grupo fundamental de un poset de p-subgrupos.

```
gap> G:=AlternatingGroup(9);
Alt( [ 1 .. 9 ] )
gap> BpG:=BoucPoset(G,3);
<finite poset of size 2324>
gap> pi1:=FundamentalGroup(BpG);
<fp group of size infinity with 2997 generators>
gap> NonFreePart(pi1);
Free group of rank 2997.
<pc group of size 1 with 0 generators>
```

Aquí, la función `NonFreePart` toma un grupo finitamente presentado $Q = \langle X|R\rangle$ y devuelve el grupo finitamente presentado $\langle X'|R\rangle$ donde X' consiste de aquellos elementos de X que aparecen en alguna relación de R. Cuando el conjunto de relaciones es vacío, devuelve el grupo trivial e informa que el grupo es libre de rango $|X|$. En caso contrario, imprime el rango de la parte libre, o sea $|X|-|X'|$, y devuelve el grupo finitamente presentado $\langle X'|R\rangle$.

```
NonFreePart := function (Q)
    local a, r, v, F, code, involved_generators, rels,
    rels1, rels_coded, relators_coded;

    rels:=RelatorsOfFpGroup(Q);;
    rels1:=List(rels,LetterRepAssocWord);;
    involved_generators:=Set(List(Set(Concatenation(rels1)),AbsInt));;
    code:=function(x)
        if x > 0 then
            return PositionSorted(involved_generators,x);
        else
            return - PositionSorted(involved_generators,-x);
        fi;
    end;;

    if Size(involved_generators) > 0 then
        Print("The free part has rank ",
        Size(GeneratorsOfGroup(Q)) - Size(involved_generators), ".\n");
        F:=FreeGroup(Size(involved_generators));
        a:=GeneratorsOfGroup(F)[1];
        relators_coded:=List(rels1, r-> List(r,code));
        rels_coded:=List(relators_coded,
        v-> AssocWordByLetterRep(FamilyObj(a),v));
        return F/rels_coded;
    else
        Print("Free group of rank ",Size(GeneratorsOfGroup(Q)), ".\n");
        return TrivialGroup();
    fi;
end;;
```

Con este programa podemos calcular el grupo fundamental de $\mathcal{A}_p(G)$ con $G=\mathbb{A}_{10}$ y $p=3$.

```
gap> G:=AlternatingGroup(10);
Alt( [ 1 .. 9 ] )
gap> BpG:=BoucPoset(G,3);
<finite poset of size 24620>
gap> pi1:=FundamentalGroup(BpG);
<fp group of size infinity with 25242 generators>
gap> Q:=NonFreePart(pi1);
The free part has rank 25200.
<fp group of size infinity with 42 generators>
```

El grupo Q es no libre pues tiene relaciones de conmutación no triviales y su abelianización es abeliana libre de rango 42.

```
gap> A:=AbelianInvariants(Q);;
gap> Size(A);
42
gap> Unique(A);
[ 0 ]
gap> Size(RelatorsOfFpGroup(Q));
861
gap> RelatorsOfFpGroup(Q){[1..2]};
[ f41^-1*f36^-1*f41*f36, f38^-1*f34^-1*f38*f34 ]
```

El código muestra que el único invariante abeliano de Q es 0, esto es, el grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$, y que hay 42 copias de éste. Esto significa que la abelianización de Q es $\mathbb{Z}^{42}$.

Lista de Símbolos

Grupos y acciones

Sean G, H y N grupos y sea X un G-conjunto.

$\mathbb{A}_n$	el grupo alterno en n letras
C_n	el grupo cíclico de orden n con notación multiplicativa
D_n	el grupo diedral de orden n
F_n	el grupo libre de rango n
$L_n(q)$	es $\mathrm{PSL}_n(q)$
$\mathrm{PSL}_n(q)$	el grupo especial lineal proyectivo sobre el cuerpo $\mathbb{F}_q$
$\mathrm{PSU}_n(q)$	el grupo especial lineal unitario sobre el cuerpo $\mathbb{F}_q$
$\mathbb{S}_n$	el grupo simétrico en n letras
$\mathrm{Sz}(q)$	para $q = 2^{2n+1}$ denota el grupo de Suzuki sobre el cuerpo $\mathbb{F}_q$
$U_n(q)$	es $\mathrm{PSU}_n(q)$
$\mathbb{F}_q$	cuerpo finito de orden q
$\mathbb{Z}_n$	el grupo cíclico de orden n con notación aditiva
$\lvert G\rvert$	el orden de G
$\lvert g\rvert$	el orden de $g \in G$
$\lvert G\rvert_\pi$	la π-parte del orden de G, con π conjunto de primos
$\mathrm{Aut}(G)$	grupo de automorfismos de G
$\mathrm{Inn}(G)$	grupo de automorfismos internos de G
$\mathrm{Out}(G)$	grupo de automorfismos externos de G
$\mathrm{Inndiag}(G)$	el grupo de automorfismos externos diagonales de un grupo finito de tipo Lie G
$\mathrm{Outdiag}(G)$	el grupo de automorfismos interno-diagonales de un grupo finito de tipo Lie G
$H \leq G$	un subgrupo de G
$H < G$	un subgrupo propio de G
$N \trianglelefteq G$	un subgrupo normal de G
$N \triangleleft G$	un subgrupo propio normal de G

$N \operatorname{char} G$	un subgrupo característico de G
$N_G(H)$	el normalizador de H en G
$C_G(H)$	el centralizador de H en G
$[G,H]$	el conmutador de G y H
$[G:H]$	índice de H en G
$N \times H$	producto directo de N por H
$N \rtimes H$	extensión split de N por H
$N:H$	extensión split de N por H
NH	extensión split interna de N por H
$N.H$	extensión no-split de N por H
G/H	conjunto de coclases a derecha o grupo cociente si $H \trianglelefteq G$
$\langle S \rangle$	subgrupo generador por $S \subset G$
$\mathrm{Cl}(g)$	clase de conjugación de g
h^g	$= g^{-1}hg$ para $g,h \in G$
H^g	$= g^{-1}Hg$ para $H \leq G$
$[g,h]$	el conmutador $ghg^{-1}h^{-1}$
G'	subgrupo derivado de G
$F(G)$	subgrupo de Fitting de G
$F^*(G)$	subgrupo de Fitting generalizado de G
$E(G)$	el layer de G
$\Phi(G)$	el subgrupo de Frattini de G
$Z(G)$	el centro de G
$O_p(G)$	el p-subgrupo normal más grande de G
$O_{p'}(G)$	el p'-subgrupo normal más grande de G
$O^p(G)$	el subgrupo normal más chico de G con $G/O^p(G)$ un p-grupo
$O^{p'}(G)$	el subgrupo normal más chico de G con $G/O^{p'}(G)$ un p'-grupo
$\Omega_1(G)$	para un primo fijo p, el subgrupo de G generado por los elementos de orden p
$\mathrm{Syl}_p(G)$	el conjunto de p-subgrupos de Sylow de G
n_p	es $\lvert \mathrm{Syl}_p(G) \rvert$
$m_p(G)$	el p-rango de G
$r_p(G)$	es $\log_p(\lvert G \rvert_p)$
$A * B$	el producto libre de A y B
$G \curvearrowright X$	una acción de grupo de G sobre X (a derecha)
x^g	el elemento $g \in G$ actuando en $x \in X$
$\mathcal{O}_x$	la órbita de $x \in X$
G_x	el estabilizador (o grupo de isotropía) de $x \in X$
$\mathrm{Fix}_H(Y)$	el conjunto de puntos fijos de $H \subseteq G$ sobre $Y \subseteq X$

Y^G	el conjunto $\{y^g : y \in Y, g \in G\}$ si $Y \subseteq X$
CGFS	Clasificación de los grupos finitos simples

Espacios topológicos

Sean X e Y dos espacios topológicos.

$\mathbb{D}^n$	el disco unitario en $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{S}^n$	la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$
$X \simeq Y$	significa que X e Y son homotópicamente equivalentes
$X \underset{w}{\approx} Y$	significa que hay un espacio Z junto con equivalencias débiles $Z \to X$ y $Z \to Y$
$X \underset{\approx}{\to} Y$	equivalencia débil de X a Y
X^n	el n-esqueleto del CW-complejo X

Posets y complejos simpliciales

Sean X, Y dos G-posets y K, L dos G-complejos simpliciales.

$\lvert K \rvert$	la realización geométrica de K
$\mathcal{K}(X)$	el complejo de orden de X
$\mathcal{X}(K)$	el poset de caras de K
$X^{(n)}$	la n-ésima subdivisión o poset derivado de X
$K^{(n)}$	la n-ésima subdvidisión de K
$\mathrm{Lk}(v, K)$	el link del vértice v en K
$\mathrm{St}(v, K)$	el star abierto del vértice v en K
$X_{>x}$	$= \{y \in X : y > x\}$
$X_{\geq x}$	$= \{y \in X : y \geq x\}$
F_x^Y	es $X_{\geq x} \cap Y$ si $Y \subseteq X$
$\hat{F}_x^Y$	es $X_{>x} \cap Y$ si $Y \subseteq X$
$X_{<x}$	$= \{y \in X : y < x\}$
$X_{\leq x}$	$= \{y \in X : y \leq x\}$
U_x^Y	es $X_{\leq x} \cap Y$ si $Y \subseteq X$
$\hat{U}_x^Y$	es $X_{<x} \cap Y$ si $Y \subseteq X$
f/y	$= \{x \in X : f(x) \leq y\}$ es la fibra del morifsmo $f : X \to Y$ bajo y
f/y	$= \{x \in X : f(x) \geq y\}$ es la fibra opuesta del morfismo $f : X \to Y$ bajo y
μ_X	el mapa de McCord's de $\lvert\mathcal{K}(X)\rvert$ a X
X^{op}	el poset X con el orden opuesto
$x \prec y$	el elemento $x \in X$ está cubierto por $y \in X$
$h(x)$	la altura de $x \in X$

$h(X)$	la altura de X
$\mathrm{Max}(X)$	los elementos maximales de X
$\mathrm{Min}(X)$	los elementos minimales de X
$X \searrow\!\!\searrow Y$	colapso fuerte de X a $Y \subseteq X$
$Y \nearrow\!\!\nearrow X$	expansión fuerte de $Y \subseteq X$ a X
$X \searrow\!\!\searrow^{G} Y$	colapso fuerte G-equivariante de X a $Y \subseteq X$
$X \searrow^{e} Y$	colapso elemental simple de X a $Y \subseteq X$
$Y \,{}^{e}\!\!\nearrow X$	expansión elemental simple de $Y \subseteq X$ a X
$X \searrow Y$	colapso simple de X a $Y \subseteq X$
$Y \nearrow X$	expansión simple de $Y \subseteq X$ a X
$X \diagup\!\!\!\searrow Y$	X e Y tienen el mismo tipo homotópico simple
$X \searrow^{Ge} Y$	colapso elemental simple G-equivariante de X a $Y \subseteq X$
$X \searrow^{G} Y$	colapso simple G-equivariante de X a $Y \subseteq X$
$X \diagup\!\!\!\searrow^{G} Y$	X e Y tienen el mismo tipo homotópico simple G-equivariante

Familias de posets y complejos simpliciales

$\mathcal{A}_p(G)$	el poset de Quillen de p-subgrupos elementales abelianos no triviales de G
$\mathcal{B}_p(G)$	el poset de Bouc de p-subgrupos radicales de G
$K_p(G)$	el commuting complex de G en p
$\mathcal{S}_p(G)$	el poset de Brown de p-subgrupos no triviales de G
$\mathcal{R}_p(G)$	el subcomplejo de Robinson de $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ con cadenas $(P_0 < \ldots < P_n)$ tales que $P_i \trianglelefteq P_n$ para todo i
$X_p(G)$	el poset de elementos $P \in \mathcal{S}_p(G)$ tales que $P \trianglelefteq S$ si $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $P \leq S$

Bibliografía

[Ale37] Pavel Sergeevich Alexandroff, *Diskrete räume*, Mat. Sb. (N.S.) **2** (1937), 501–518.

[AB79] J. Alperin and Michel Broué, *Local methods in block theory*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 1, 143–157.

[Asc00] M. Aschbacher, *Finite group theory*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Asc93] Michael Aschbacher, *Simple connectivity of p-group complexes*, Israel J. Math. **82** (1993), no. 1-3, 1–43.

[AKO11] Michael Aschbacher, Radha Kessar, and Bob Oliver, *Fusion systems in algebra and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 391, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[AK90] Michael Aschbacher and Peter B. Kleidman, *On a conjecture of Quillen and a lemma of Robinson*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), no. 3, 209–217.

[AS92] Michael Aschbacher and Yoav Segev, *The uniqueness of groups of Lyons type*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 1, 75–98.

[AS93] Michael Aschbacher and Stephen D. Smith, *On Quillen's conjecture for the p-groups complex*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 3, 473–529.

[Bar11a] Jonathan A. Barmak, *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2032, Springer, Heidelberg, 2011.

[Bar11b] Jonathan Ariel Barmak, *On Quillen's Theorem A for posets*, J. Combin. Theory Ser. A **118** (2011), no. 8, 2445–2453.

[BM08a] Jonathan Ariel Barmak and Elías Gabriel Minian, *One-point reductions of finite spaces, h-regular CW-complexes and collapsibility*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 3, 1763–1780.

[BM08b] Jonathan Ariel Barmak and Elías Gabriel Minian, *Simple homotopy types and finite spaces*, Adv. Math. **218** (2008), no. 1, 87–104.

[BM12a] Jonathan Ariel Barmak and Elías Gabriel Minian, *G-colorings of posets, coverings and presentations of the fundamental group*, arXiv e-prints (2012), arXiv:1212.6442.

[BM12b] Jonathan Ariel Barmak and Elías Gabriel Minian, *Strong homotopy types, nerves and collapses*, Discrete Comput. Geom. **47** (2012), no. 2, 301–328.

[Bjo03] Anders Bjorner, *Nerves, fibers and homotopy groups*, J. Combin. Theory Ser. A **102** (2003), no. 1, 88–93.

[Bou84] Serge Bouc, *Homologie de certains ensembles ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984), no. 2, 49–52.

[Bre67] Glen E. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[Bre72] Glen E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York-London, 1972, Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.

[BLO03] Carles Broto, Ran Levi, and Bob Oliver, *The homotopy theory of fusion systems*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 779–856.

[Bro75] Kenneth S. Brown, *Euler characteristics of groups: the p-fractional part*, Invent. Math. **29** (1975), no. 1, 1–5.

[Bro94] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1982 original.

[Bro06] Ronald Brown, *Topology and groupoids*, BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006, Third edition of ıt Elements of modern topology[McGraw-Hill, New York, 1968; MR0227979],With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

[Bux99] Kai-Uwe Bux, *Orbit spaces of subgroup complexes, Morse theory, and a new proof of a conjecture of Webb*, Topology Proc. **24** (1999), no. Spring, 39–51.

[CD92] Carles Casacuberta and Warren Dicks, *On finite groups acting on acyclic complexes of dimension two*, Publicacions Matemàtiques (1992), 463–466.

[Cra11] David A. Craven, *The theory of fusion systems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 131, Cambridge University Press, Cambridge, 2011, An algebraic approach.

[Das95] Kaustuv Mukul Das, *Simple connectivity of the Quillen complex of* $\mathrm{GL}_n(q)$, J. Algebra **178** (1995), no. 1, 239–263.

[Das98] Kaustuv Mukul Das, *Some results about the Quillen complex of* $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, J. Algebra **209** (1998), no. 2, 427–445.

[Das00] Kaustuv Mukul Das, *The Quillen complex of groups of symplectic type: the characteristic* 2 *case*, J. Algebra **223** (2000), no. 2, 556–561.

[DR16] Antonio Díaz Ramos, *On quillen's conjecture for p-solvable groups*, Journal of Algebra **513** (2016), 246–264.

[FPSC19] Ximena L. Fernández, Kevin Iván Piterman, and Iván Sadofschi Costa, Posets - *Posets and Finite Spaces, Version 1.0.0*, GAP package, https://github.com/isadofschi/posets, 2019.

[GAP18] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.3*, 2018.

[GL83] Daniel Gorenstein and Richard Lyons, *The local structure of finite groups of characteristic* 2 *type*, Mem. Amer. Math. Soc. **42** (1983), no. 276, vii+731.

[GLS96] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups. Number 2. Part I. Chapter G*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, General group theory.

[GLS98] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups. Number 3. Part I. Chapter A: Almost simple* $\mathcal{K}$*-groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[GLS99] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups, Number 4. Part II, Chapters 1-4: Uniqueness theorems*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, General group theory.

[Gro16] Jesper Grodal, *Endotrivial modules for finite groups via homotopy theory*, arXiv e-prints (2016), arXiv:1608.00499.

[HI88] Trevor Hawkes and I. M. Isaacs, *On the poset of p-subgroups of a p-solvable group*, J. London Math. Soc. (2) **38** (1988), no. 1, 77–86.

[Isa08] I. Martin Isaacs, *Finite group theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[KR89] Reinhard Knörr and Geoffrey R. Robinson, *Some remarks on a conjecture of Alperin*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 1, 48–60.

[Kot97] Sonja Kotlica, *Verification of Dade's conjecture for Janko group J_3*, J. Algebra **187** (1997), no. 2, 579–619.

[Kso03] Rached Ksontini, *Simple connectivity of the Quillen complex of the symmetric group*, J. Combin. Theory Ser. A **103** (2003), no. 2, 257–279.

[Kso04] Rached Ksontini, *The fundamental group of the Quillen complex of the symmetric group*, J. Algebra **282** (2004), no. 1, 33–57.

[Lib08] Assaf Libman, *Webb's conjecture for fusion systems*, Israel J. Math. **167** (2008), 141–154.

[Lin09] Markus Linckelmann, *The orbit space of a fusion system is contractible*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **98** (2009), no. 1, 191–216.

[McC66] Michael C. McCord, *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Math. J. **33** (1966), 465–474.

[MP18] Elías Gabriel Minian and Kevin Iván Piterman, *The homotopy types of the posets of p-subgroups of a finite group*, Adv. Math. **328** (2018), 1217–1233.

[MP19] Elías Gabriel Minian and Kevin Iván Piterman, *The fundamental group of the p-subgroup complex*, arXiv e-prints (2019), arXiv:1903.03549.

[OS02] Bob Oliver and Yoav Segev, *Fixed point free actions on $\mathbf{Z}$-acyclic 2-complexes*, Acta Math. **189** (2002), no. 2, 203–285.

[Pit16] Kevin Iván Piterman, *El tipo homotópico de los posets de p-subgrupos*, Tesis de Licenciatura, Departamento de Matemática, FCEyN, UBA. Available at http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2016/Kevin_Piterman.pdf, 2016.

[Pit19] Kevin Iván Piterman, *A stronger reformulation of Webb's conjecture in terms of finite topological spaces*, J. Algebra **527** (2019), 280–305.

[PSV19] Kevin Iván Piterman, Iván Sadofschi Costa, and Antonio Viruel, *Acyclic 2-dimensional complexes and Quillen's conjecture*, Accepted pending revisions in Publicacions Matemàtiques (2019).

[Pui06] Lluis Puig, *Frobenius categories*, J. Algebra **303** (2006), no. 1, 309–357.

[PW00] Jürgen Pulkus and Volkmar Welker, *On the homotopy type of the p-subgroup complex for finite solvable groups*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **69** (2000), no. 2, 212–228.

[Qui71] Daniel Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 549–572; ibid. (2) 94 (1971), 573–602.

[Qui78] Daniel Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Adv. in Math. **28** (1978), no. 2, 101–128.

[Rob88] Geoffrey R. Robinson, *Some remarks on permutation modules*, J. Algebra **118** (1988), no. 1, 46–62.

[Seg94] Yoav Segev, *Simply connected coset complexes for rank* 1 *groups of Lie type*, Math. Z. **217** (1994), no. 2, 199–214.

[Sei82] Gary M. Seitz, *Generation of finite groups of Lie type*, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), no. 2, 351–407.

[Sha04] John Shareshian, *Hypergraph matching complexes and Quillen complexes of symmetric groups*, J. Combin. Theory Ser. A **106** (2004), no. 2, 299–314.

[Smi11] Stephen D. Smith, *Subgroup complexes*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 179, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[Ste68] Robert Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, New Haven, Conn., 1968, Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson.

[Sto66] R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), 325–340.

[Sto84] R. E. Stong, *Group actions on finite spaces*, Discrete Math. **49** (1984), no. 1, 95–100.

[Sym98] Peter Symonds, *The orbit space of the p-subgroup complex is contractible*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), no. 3, 400–405.

[TW91] J. Thévenaz and P. J. Webb, *Homotopy equivalence of posets with a group action*, J. Combin. Theory Ser. A **56** (1991), no. 2, 173–181.

[Thé92] Jacques Thévenaz, *On a conjecture of Webb*, Arch. Math. (Basel) **58** (1992), no. 2, 105–109.

[tD87] Tammo tom Dieck, *Transformation groups*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 8, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987.

[UY02] Katsuhiro Uno and Satoshi Yoshiara, *Dade's conjecture for the simple O'Nan group*, J. Algebra **249** (2002), no. 1, 147–185.

[Wal69] John H. Walter, *The characterization of finite groups with abelian Sylow* 2*-subgroups*, Ann. of Math. (2) **89** (1969), 405–514.

[Web87] P. J. Webb, *Subgroup complexes*, The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 349–365.