UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Interpolación en espacios de Jacobi-Sobolev con pesos y su aplicación a estimaciones de error a posteriori para la versión p del método de elementos finitos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Verónica Moreno

Director de tesis y Consejero de estudios: Dra. María Gabriela Armentano

Lugar de trabajo: IMAS-Conicet, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales -UBA.

Buenos Aires, 26 de Junio de 2015.

Interpolación en espacios de Jacobi-Sobolev con pesos y su aplicación a estimaciones de error a posteriori para la versión p del método de elementos finitos

Resumen

En esta tesis analizamos estimaciones de error a posteriori para la versión p del método de elementos finitos (FEM). En primer lugar, mostramos las diferencias que surgen entre el caso unidimensional y bidimensional, al considerar indicadores de error de tipo residual para el problema de Poisson con datos de borde de tipo Dirichlet homogéneos. Mientras que en el caso unidimensional, usando indicadores de error con pesos, se obtienen estimaciones a posteriori para la versión hp de FEM con constantes de equivalencia con la norma energía del error independientes de h y de p [DH], aún no se tienen resultados análogos en más dimensiones. En efecto, las técnicas utilizadas en [DH] no pueden simplemente generalizarse al caso bidimensional y, hasta el momento, para estimadores de tipo residual no se ha podido demostrar que los estimadores propuestos sean equivalentes a la norma energía del error con constantes de equivalencia independientes de p, i.e., del grado del polinomio involucrado. Sin embargo, en esta tesis mostramos que estimaciones de error a posteriori casi-óptimas se pueden obtener si trabajamos en espacios de Jacobi-Sobolev con pesos.

Usualmente para hacer un análisis a posteriori del método de elementos finitos se necesitan estimaciones de interpolación para funciones en espacios de Sobolev, así como estimaciones inversas para funciones polinomiales. Por lo tanto, para construir un interpolador en espacios de Jacobi-Sobolev con pesos, introducimos primeramente los polinomios de Jacobi y mostramos sus propiedades para luego llevar a cabo un análisis pormenorizado de la dependencia, tanto del grado del polinomio como del peso, de las constantes involucradas en nuestras estimaciones. Presentamos también un análisis de las estimaciones inversas presentes en la bibliografía, con especial cuidado en estudiar como dependen las constantes del peso que se este considerando.

Posteriormente, para el problema modelo de Poisson en dos dimensiones, proponemos un estimador con pesos para la versión p de FEM, y utilizando nuestros resultados de interpolación y las estimaciones inversas, mostramos que estos estimadores son equivalentes al error en alguna norma adecuada, con constantes óptimas en p. Finalmente, mostramos como nuestros resultados se pueden generalizar a la versión hp de FEM.

Palabras clave: *Espacios de Jacobi-Sobolev con pesos; métodos p y hp de elementos finitos; estimaciones de error a posteriori.*

Interpolation in Jacobi-weighted Sobolev spaces and its application to a posteriori error estimations of the p version of the finite element method

Abstract

In this thesis we analyse a posteriori error estimations for the p version of the finite element methods (FEM). First, we show the differences that arise between the onedimensional and bidimensional cases when we consider error indicators of the residual type for the Poisson problem with Dirichlet homogeneous boundary data. While in the onedimensional case, using weighted error indicators, we can obtain a posteriori estimations for the hp version of FEM with equivalence constant with the energy norm independents of h and p [DH], no analogous results have been obtained hitherto in more dimensions. In effect, the techniques used in [DH] can not simply be generalized to the bidimensional case, and for the error estimators of the residual type it can not be demonstrated as yet that the proposed estimators are equivalent to the energy norm of the error with equivalence constants independents of p, i.e., of the polynomial degree involved. However, in this thesis we show that quasi optimal a posteriori error estimations can be obtained if we work in Jacobi-weighted Sobolev spaces.

Usually, for an a posteriori error analysis of the finite element methods we need interpolation estimates for functions in Sobolev spaces, and inverse estimates for polynomial functions. Therefore, in order to construct an interpolator in Jacobi-weighted Sobolev spaces, first we introduce the Jacobi polynomials and show their properties so as to carry out a detailed analysis of the dependence, of the polynomial degree and the weight, in the constants that are involved in our estimates. We also present an analysis of the inverse estimates that are present in the bibliography, studying with special care how the constants depend on the weight that we are considering.

Later, for the two dimensional Poisson model problem, we propose a weighted estimator for the p version of FEM, and using our interpolation results and inverse estimates we show that these estimators are equivalents to the error in some appropriate norm, with optimal constants in p. Finally, we show how that our results can be generalized to the hp version of FEM.

Key words: *Jacobi-weighted Sobolev spaces; p and hp finite element methods ; a posteriori error estimates .*

A Fausto

Agradecimientos

Por suerte son muchas las personas que me ayudaron para que esta tesis sea posible. Sin la colaboración de las personas que voy a nombrar esta tesis no sería la misma, y muchos de ellos han sido imprescindibles para que haya sido posible llegar en tiempo y forma a presentarla.

A mi directora María Gabriela Armentano, gracias por todo el conocimiento aportado para que esto sea posible. Cuando pensé en elegirte como directora no pensé solo en una madre académica, sino también en una persona comprensiva desde el punto de vista mas humano, y sin duda no me equivoqué. Gracias por acompañarme, comprenderme y aconsejarme en cada una de las diferentes y variadas situaciones que se fueron presentando a lo largo de estos mas de cinco años.

Para poder tener el tiempo necesario para realizar esta tesis, me fue fundamental contar con personas que cuidaran de mi hijo Fausto. En particular, le quiero agradecer a mi suegra Delfina por sus infinitas horas dedicadas a Fausto. También a mi mamá Franca por romper su promesa de nunca cuidar nietos, a mi suegro Luis, a mi papá Marcos, a mi hermana Franquita.

A Fer, que en este preciso momento que estoy escribiendo los agradecimientos lo escucho reírse con Fausti. Gracias por ser el mejor padre y marido del mundo.

A mi familia, Franca, Marcos, Lu, Caro, Pili, Franquita y Marquitos.

A mis compañeros de oficina, por hacer de todos los almuerzos un momento de diversión. A Mer, Javi, Nico, Mari, Juan Pablo, Fer, Fran, Pablo y Juanjo. Quiero agradecer especialmente a Fran por su colaboración con el latex y otras cuestiones afines. No me puedo olvidar de Ani, aunque no compartimos tanto tiempo la oficina, te quiero agradecer por ser un amor de persona.

Le agradezco a Francisco García Gibson por su tiempo dedicado a las perfectas correcciones del inglés, desde cualquier lado del mundo donde estabas.

A Mario Scheble por las enriquecedoras charlas dedicadas a la futura implementación numérica de los resultados obtenidos en esta tesis.

A mi amiga Yanu, por las charlas compartidas. A mis amigas del colegio Guada, Jose, Bel, Flo, Lu, Luli y Dani.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Al aproximar numéricamente la solución de una ecuación diferencial mediante el método de elementos finitos (FEM) en su forma más habitual, llamada "versión h", se considera una partición inicial (malla) del dominio donde está planteada la ecuación y se aproxima la solución de la ecuación, dada en su forma débil, por una función que restringida a cada elemento de la partición es un polinomio de grado fijo, con el propósito de ir mejorando la aproximación a medida que la partición se hace mas fina, i.e, el tamaño de la malla tiende a cero (ver, por ejemplo, [BS94b, Cia78]). Desde hace unos años otras variantes del método de elementos finitos, llamadas "versión p" y "versión hp", cobraron interés. En la "versión p" la malla se mantiene fija mientras se busca mejorar la aproximación aumentando el grado del polinomio en cada triángulo o cuadrilátero (ver [BS94a]). En la llamada "versión hp" se admiten ambas opciones, es decir, refinar la malla y/o ir aumentando el grado del polinomio (ver, por ejemplo, [BS87, BS94a]) contemplando entonces esta versión a las otras dos. Uno de los aspectos más interesantes de la versión *hp* reside en que, una combinación apropiada de refinamiento de la malla e incrementación del grado polinomial nos permite obtener convergencia exponencial para problemas elípticos con soluciones analíticas a trozos [BG88], mientras que las versiones *h* o *p* de FEM convergen algebraicamente.

Es sabido que, para hacer un análisis de estos métodos, es fundamental obtener estimaciones de error las cuales se dividen básicamente en dos tipos: las "a priori" y las "a posteriori". Las primeras tienen como objetivo demostrar la convergencia de los métodos, obtener el orden del error y determinar de que depende el error. En cambio, las estimaciones "a posteriori" tienen como objetivo dar información cuantitativa del error y son la base de los métodos adaptativos o de refinamiento automático de mallas.

La mayoría de los resultados presentes en la bibliografía sobre estimaciones de error para la versión *h* de FEM, tanto para las estimaciones a priori como a posteriori, se suelen obtener trabajando en primera instancia con un dominio de referencia y luego pasando a un dominio general (mediante cambios de variable) demostrando como las contantes dependen de las propiedades del dominio (ver, por ejemplo, [BS94b, Cia78] para las estimaciones a priori y [Ver96] para las a posteriori). Estas técnicas no se pueden utilizar para las versiones *p* y *hp* y se debe recurrir a otro tipo de argumentos (ver [BS94a, Sch98] y sus referencias).

Las técnicas mas usuales de obtener estimaciones de error a posteriori son dos, una se basa en las soluciones de problemas locales auxiliares (ver [AO00] para la versión h y [AS97] para la versión p y hp), la otra se deriva acotando residuos locales (ver [Ver96] para la versión h y [MW01, APRS11, APRS12] para la versión p y hp). En general, al construir estimadores de error a posteriori, se busca que estos resulten confiables, i.e., que sean realmente una cota superior del error; y por otra parte que sean eficientes, i.e., que no sobreestimen demasiado el error local de forma tal que un estimador local grande implique que el error local también lo es. En consecuencia, para demostrar la convergencia de los algoritmos adaptativos basados en estimadores de error a posteriori es fundamental demostrar que el estimador propuesto es confiable y eficiente, i.e., es equivalente al error en alguna norma adecuada con constantes independientes de h para la versión h, independientes de p para la versión p e independientes de h y de p para la versión hp. La convergencia de algoritmos adaptivos para la versión h, para el problemas de Poisson, fueron demostrados en [Dör96, MNS00] (cabe señalar que en este caso la dependencia de las constantes respecto del grado del polinomio aproximante es ignorada). Para la versión p y hp, la convergencia de un algoritmo adaptivo ha sido demostrada en el caso unidimensional y se encuentra en [DH07], donde proponen un estimador de error a posteriori de tipo residual con pesos y demuestran que es equivalente al error, en alguna norma adecuada, con constantes independientes de h y de p. Es importante notar que las técnicas usadas en el caso unidimensional no se pueden generalizar a mas dimensiones. En el caso bidimensional, aún en los problemas mas sencillos, para los estimadores de tipo residual propuestos hasta el momento no se pudo demostrar la equivalencia con el error pues las constantes de equivalencia involucradas dependen de p (ver los trabajos de Melenk y Wohlmuth [MW01]). Como es habitual, los autores hacen uso de estimaciones inversas (que son óptimas) para acotar el estimador propuesto por una constante, que depende de p, por el error mas un término de mayor orden. Por otro lado, en [BPS09, DM13] se obtuvieron estimadores de error de tipo "equilibrated residual" que resultan ser p-robustos para el problema de Poisson y el problema de Elasticidad respectivamente.

En las últimas décadas, los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos han recibido cada vez más atención para la versión p (y hp) de elementos finitos. Estos espacios parecen ser un espacio de funciones adecuados para el análisis de estimaciones de error a priori y juegan un rol crucial en el análisis de estimaciones de error a posteriori (ver [AP02, BG00, BG02a, BG02b], y las referencias que se encuentran allí). En efecto, el análisis de error a posteriori y la convergencia óptima para la versión p de FEM en este contexto ha sido estudiado por varios autores (ver, por ejemplo, [BG02a, BG02b, GS07]) y en los últimos años se ha desarrollado una atención creciente de esta técnica por considerarla muy apropiada para llevar a cabo un análisis de error a posteriori [BG10, Guo05]. Basándonos además en el hecho que para el caso unidimensional se lograron obtener estimadores de error con pesos de tipo residual equivalentes al error en alguna norma apropiada con constantes de equivalencia independientes de p, en esta tesis introducimos un interpolador con pesos para el caso de dos dimensiones, proponemos un estimador del error para la versión p de elementos finitos para el problema de Poisson en dos dimensiones y (utilizando los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos, los polinomios de Jacobi y sus propiedades) demostramos que el estimador es óptimo. Cabe señalar que, los resultados originales presentes en esta tesis han dado lugar a un artículo que ha sido recientemente remitido para su publicación [AM15]. Finalmente, usando como es habitual argumentos de re-escale, generalizamos nuestros resultados para la versión *hp* de FEM y concluimos esta tesis señalando distintas líneas de investigación a futuro.

Capítulo 2

La Versión *hp* del Método de Elementos Finitos

En este capítulo vamos a presentar la versión *hp* del método de elementos finitos aplicada a la resolución de un problema modelo, como es el Problema de Poisson, con el objetivo central de mostrar las estimaciones de error a posteriori existentes en una y dos dimensiones (con y sin pesos en el estimador del error) y motivar la importancia de trabajar en espacios de Sobolev con pesos.

2.1. Problema modelo unidimensional

A continuación definimos el problema modelo a estudiar y mostramos la versión *hp* de elementos finitos que utilizamos en la aproximación numérica de la solución.

Problema modelo. Consideramos Ω un intervalo en $\mathbb{R}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\Omega = (0, 1)$. Para una función dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ el problema que vamos a considerar es: Hallar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Formulación débil. Supongamos $f \in L^2(\Omega)$, el problema variacional asociado a (2.1.1) es: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \quad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1.2}$$

Donde $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ son los espacios de Sobolev habituales. Haciendo uso del Teorema de Lax-Milgram se puede ver que este problema tiene única solución (ver, por ejemplo, [BS94b]).

El método de Galerkin. La idea de este método consiste en dado el espacio de dimensión infinita $V := H_0^1(\Omega)$ aproximarlo por un espacio de dimensión finita $V_N \subset V$ (con $dim(V_N) = N \in \mathbb{N}$) apropiado. Entonces, el problema discreto es: Hallar $u_N \in V_N$ tal que

$$\int_0^1 u_N' v_N' = \int_0^1 f v_N \quad \text{para toda } v_N \in V_N.$$

Es bien sabido que, como consecuencia directa del Teorema de Lax-Milgram, este problema tiene única solución cualquiera sea el subespacio $V_N \subset V$. En el Método de Elementos Finitos los subespacios V_N de dimensión finita que aproximan al espacio V, se construyen tomando funciones que son polinomios en cada elemento de una partición de Ω.

La versión hp del método de elementos finitos. Definimos una grilla

$$\overline{\mathcal{G}}_n := \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1\},$$

donde los puntos interiores de la grilla son

$$\mathcal{G}_n := \overline{\mathcal{G}}_n \cap \Omega.$$

Luego, una partición (o una malla) de Ω es un conjunto de intervalos

$$\mathcal{K}_n := \{K = [x_{k-1}, x_k] : k \in \{1, \cdots, n+1\}\}.$$

Para $K \in \mathcal{K}_n$ sea $h_K := |K|$, y consideramos p_K un grado polinomial, notamos $\mathbf{p} = (p_K)$ al vector de grados polinomiales. Notamos $\mathcal{P}_{p_K}(K)$ al conjunto de polinomios de grado menor o igual a p_K en K. Definimos

$$S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{K}_n) = \{u \in C_0^0(\bar{\Omega}) \mid u|_K \in \mathcal{P}_{p_K}(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}_n\}.$$

La versión hp del método de elementos finitos consiste en elegir $V_N = S_0^p(\mathcal{K}_n)$. Así, el problema discreto a considerar es el siguiente: Hallar $u_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{K}_n)$ tal que

$$\int_0^1 u_N' v_N' = \int_0^1 f v_N \quad \text{para toda } v_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{K}_n). \tag{2.1.3}$$

Estimaciones de error a priori.

Definición 2.1.1. *Una familia de mallas $\{\mathcal{K}_n\}$ en Ω es **quasiuniforme**, si existen constantes positivas c_1 y c_2 independientes de n tal que*

$$c_1 \leq \frac{\text{máx}\{h_K | K \in \mathcal{K}_n\}}{\text{mín}\{h_K | K \in \mathcal{K}_n\}} \leq c_2$$

En particular, notemos que si consideramos nodos equidistantes $x_j = -1 + 2j/M$ obtenemos mallas uniformes con constantes $c_1 = c_2 = 1$.

Teorema 2.1.1. *Sea $\mathcal{K}_n$ una malla quasiuniforme. Sean $u \in H^{k+1}(\Omega)$ la solución de (2.1.1) y $u_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{K}_n)$ la solución de (2.1.3). Sean $h = \max\{h_K\}$ y $p = \min\{p_K\}$ luego existe una constante C tal que*

$$\|u' - u_N'\|_{L^2(\Omega)} \leq C\frac{h^{min(p,k)}}{p^k}\|u'\|_{H^k(\Omega)}$$
$$\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \leq C\frac{h^{min(p,k)+1}}{p^{k+1}}\|u'\|_{H^k(\Omega)}$$

La constante C no depende de u ni de h ni de p, pero depende de k.

Una demostración rigurosa de estas estimaciones puede verse en [Sch98] .

En la versión h de FEM se considera un grado fijo p y la convergencia se tiene reduciendo el tamaño de la malla, (i.e., h tiende a 0), mientras que en la versión p se considera una malla fija y la convergencia se sigue aumentando el grado polinomial p (i.e., p tiende a ∞). La convergencia del método en su versión hp se obtiene achicando el tamaño de la malla y/o agrandando el grado polinomial.

Observación 2.1.1. *En [GB86a] y [GB86b] Babuska y Guo muestran que si consideramos una elección apropiada de la malla y de* $\mathbf{p}$*, se tiene*

$$\|u' - u_N'\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-\alpha\sqrt{N}}.$$

Donde N es el número de grados de libertad en la aproximación de elementos finitos, $C > 0$ y $\alpha > 0$ son independientes de N.

Estimaciones de error a posteriori. Vamos a buscar estimadores de error de tipo residual.

Sean $v \in H_0^1(\Omega)$ y $v_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{K}_n)$ luego, usando que $\int_\Omega (u - u_N)' v_N' = 0$, (2.1.2) e integrando por partes en cada elemento se obtiene la siguiente ecuación del error

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u-u_N)'v' &= \int_\Omega (u-u_N)'v_N' + \int_\Omega (u-u_N)'(v-v_N)' = \int_\Omega u'(v-v_N)' - \int_\Omega u_N'(v-v_N)' \\ &= \sum_{K\in\mathcal{K}_n}\int_K (f+u_N'')(v-v_N) + \sum_{z\in\mathcal{G}}(u_N'(z+)-u_N'(z-))(v(z)-v_N(z)) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\int_K (f_{p_K}+u_N'')(v-v_N) + \int_K (f-f_{p_K})(v-v_N)\Big) \\ &\quad + \sum_{z\in\mathcal{G}}(u_N'(z+)-u_N'(z-))(v(z)-v_N(z)).\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Donde f_{p_K} es la proyección $L^2(K)$ de $f|_K$ en $\mathcal{P}_{p_K}(K)$, i.e.,

$$\int_K f_{p_K} v = \int_K f v \qquad \forall v \in \mathcal{P}_{p_K}(K).$$

Notemos que, si consideramos $v_N = Iv$ un interpolador de v que coincida con v en los bordes de cada elemento K la parte de los saltos de las derivadas se elimina en la ecuación del error y obtenemos

$$\int_\Omega (u-u_N)'v' = \sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\int_K (f_{p_K}+u_N'')(v-Iv) + \int_K (f-f_{p_K})(v-Iv)\Big), \tag{2.1.5}$$

usando Hölder

$$\int_\Omega (u-u_N)'v' \leq \sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\|f_{p_K}+u_N''\|_{L^2(K)}\|v-Iv\|_{L^2(K)} + \|f-f_{p_K}\|_{L^2(K)}\|v-Iv\|_{L^2(K)}\Big). \tag{2.1.6}$$

Un estimador con tales características puede construirse como se muestra en el siguiente lema, el cual contempla resultados clásicos de interpolación (sin pesos) para el caso unidimensional.

Lema 2.1.1. *Sea p un grado polinomial y $K \in \mathcal{K}_n$. Luego, existe un operador lineal de interpolación $\Pi_K^p : H^1(K) \to \mathcal{P}_p(K)$ tal que*

$$\Pi_K^p v = v \quad \text{para todo } v \in \mathcal{P}_p(K),$$
$$\Pi_K^p v(z) = v(z) \quad \text{para todo } v \in H^1(K) \text{ y todo } z \in \partial K,$$
$$\left\|(\Pi_K^p v)'\right\|_{L^2(K)} \leq \|v'\|_{L^2(K)} \quad \text{para todo } v \in H^1(K),$$

y para todo $v \in H^1(K)$

$$\left\|v-\Pi_K^p v\right\|_{L^2(K)} \leq \frac{h_K}{\sqrt{p(p+1)}}\left\|(v-\Pi_K^p v)'\right\|_{L^2(K)}.$$

Luego, un interpolador global $\Pi_{\mathcal{K}_n}^{\mathbf{p}} : H_0^1(\Omega) \to S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{K}_n)$ está definido por $\Pi_{\mathcal{K}_n}^{\mathbf{p}} v|_K := \Pi_K^{p_K} v$.

Demostración. Capítulos 3.3.1 y 3.3.2 de [Sch98]. □

Ahora, considerando en la ecuación del error $v = e = u-u_N$ y $v_N = \Pi e$ el interpolador del lema anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (e')^2 &\leq \sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\frac{h_K}{\sqrt{p_K(p_K+1)}}\|f_{p_K}+u_N''\|_{L^2(K)} + \frac{h_K}{\sqrt{p_K(p_K+1)}}\|f-f_{p_K}\|_{L^2(K)}\Big)\|e'\|_{L^2(K)}\\ &\leq C\Big(\sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\frac{h_K^2}{p_K^2}\|f_{p_K}+u_N''\|^2_{L^2(K)} + \frac{h_K^2}{p_K^2}\|f-f_{p_K}\|^2_{L^2(K)}\Big)\Big)^{1/2}\|e'\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

y por ende

$$\|e'\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\frac{h_K^2}{p_K^2}\|f_{p_K}+u_N''\|^2_{L^2(K)} + \frac{h_K^2}{p_K^2}\|f-f_{p_K}\|^2_{L^2(K)}\Big).$$

Definimos un indicador local del error como

$$\eta_K^2 := \frac{h_K^2}{p_K^2}\|f_{p_K} + u_N''\|^2_{L^2(K)},$$

y

$$\delta_K^2 := \frac{h_K^2}{p_K^2}\|f - f_{p_K}\|^2_{L^2(K)}.$$

Luego podemos concluir que

$$\|e'\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{K\in\mathcal{K}_n} \left(\eta_K^2 + \delta_K^2\right), \tag{2.1.7}$$

lo que demuestra la confiabilidad del indicador de error propuesto.

Nuestro objetivo ahora es acotar η_K^2 en términos del error local para poder concluir entonces la eficiencia del indicador. Como es habitual, para llevar a cabo estas estimaciones debemos recurrir a estimaciones inversas para polinomios. Sea

$$\chi_K(x) := (x_k - x)(x - x_{k-1}) \quad \text{para todo } x \in K = [x_{k-1}, x_k].$$

Lema 2.1.2. *Sea p un grado polinomial y $K \in \mathcal{K}_n$. Luego, para todo $v \in \mathcal{P}_p(K)$ se tiene que*

$$\|\sqrt{\chi_K}v'\|_{L^2(K)} \leq \sqrt{p(p+1)}\|v\|_{L^2(K)}, \tag{2.1.8}$$

$$\|\chi_K v'\|_{L^2(K)} \leq \sqrt{p(p+1)}\|\sqrt{\chi_K}v\|_{L^2(K)}, \tag{2.1.9}$$

$$h_K\|v\|_{L^2(K)} \leq (p+2)\|\sqrt{\chi_K}v\|_{L^2(K)}, \tag{2.1.10}$$

$$\|(\chi_K v)'\|_{L^2(K)} \leq 4(p+1)\|\sqrt{\chi_K}v\|_{L^2(K)}. \tag{2.1.11}$$

Demostración. (2.1.8): Teorema 3.95 de [Sch98].
(2.1.9): Se demuestra igual que (2.1.8) pero usando $\{L_l'\}$, donde L_l es el polinomio de Legendre de grado l.
(2.1.10): Corolario 3.5 de [Ver96].
(2.1.11): Se sigue de (2.1.9) y (2.1.10).

□

Observación 2.1.2. *Observando las demostraciones, se ve claramente que estas estimaciones son óptimas.*

De (2.1.10) :

$$\eta_K = \frac{h_K}{p_K}\|f_{p_K} + u_N''\|_{L^2(K)} \leq C\|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)}$$

y

$$\|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|^2_{L^2(K)} = \int_K \chi_K(f_{p_K} + u_N'')^2 = \int_K (f_{p_K} + u_N'')v,$$

donde

$$v := \begin{cases} \chi_K(f_{p_K} + u_N''|_K) & \text{en } K \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus K, \end{cases}$$

la cual es fácil ver que está en $H_0^1(\Omega)$ y entonces podemos usar la ecuación del error (2.1.4).

Luego,

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)}^2 &= \int_K (f_{p_K} + u_N'')v \\ &= \int_K (f + u_N'')v + \int_K (f_{p_K} - f)v \end{aligned}$$

Observación 2.1.3. *Observemos que si extendemos* $(f_{p_K} + u_N''|_K)$ *por* 0 *entonces no queda en* $H^1(\Omega)$*, pues en particular no tiene representante continuo. Con esto se ve la importancia de usar la estimación inversa (2.1.10) y hacer aparecer el peso en la integral para luego poder usar la ecuación del error (lo que es necesario si buscamos acotar el indicador por el error).*

Luego,

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)}^2 &= \int_K (f + u_N'')v + \int_K (f_{p_K} - f)v \\ &= \int_K e'v' + \int_K (f_{p_K} - f)v, \end{aligned}$$

ahora, en la integral del lado derecho multiplicamos y dividimos por el peso $\sqrt{\chi_K}$ y usando Hölder tenemos que

$$\|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)}^2 \leq \|e'\|_{L^2(K)}\|v'\|_{L^2(K)} + \|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} - f)\|_{L^2(K)}\|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)},$$

usando la estimación inversa (2.1.11)

$$\|v'\|_{L^2(K)} \leq 4(p_K + 1)\|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)}.$$

Luego,

$$\|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)} \leq 4(p_K + 1)\|e'\|_{L^2(K)} + \|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} - f)\|_{L^2(K)}, \tag{2.1.12}$$

y entonces tenemos la cota del estimador por el error

$$\eta_K^2 \leq C\Big(p_K^2\|e'\|_{L^2(K)}^2 + \|\sqrt{\chi_K}(f_{p_K} - f)\|_{L^2(K)}^2\Big).$$

Definimos el estimador del error global η del siguiente modo

$$\eta^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_n} \eta_K^2.$$

Se tiene la siguiente cota global del estimador por el error

$$\eta^2 \leq C\Big(p_{\text{máx}}^2 \|e'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K\in\mathcal{K}_n} \| \sqrt{\chi_K}(f_{p_K} - f)\|_{L^2(K)}^2\Big),$$

donde $p_{\text{máx}} = \text{máx}\{p_K : K \in \mathcal{K}_n\}$. Observemos que no pudimos acotar el indicador por el error con constantes independientes de $\mathbf{p}$ y concluir que el estimador propuesto es realmente eficiente. Pero de (2.1.12) notamos que si consideramos el estimador con pesos

$$\tilde{\eta}_K := \frac{1}{p_K}\| \sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N''))\|_{L^2(K)}, \tag{2.1.13}$$

luego, el estimador con pesos resulta eficiente ya que

$$\tilde{\eta}_K^2 \leq C\Big(\|e'\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{p_K^2}\| \sqrt{\chi_K}(f_{p_K} - f)\|_{L^2(K)}^2\Big),$$

y si definimos

$$\tilde{\eta}^2 := \sum_{K\in\mathcal{K}_n} \tilde{\eta}_K^2, \tag{2.1.14}$$

se tiene la siguiente cota global del estimador por el error

$$\tilde{\eta}^2 \leq C\Big(\|e'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K\in\mathcal{K}} \frac{1}{p_K^2}\| \sqrt{\chi_K}(f_{p_K} - f)\|_{L^2(K)}^2\Big)$$

con constantes que no dependen de $\mathbf{p}$ ni de h.

Pero ahora tenemos pendiente ver que $\tilde{\eta}$ es realmente confiable, i.e, debemos acotar el error por este nuevo estimador con pesos. Mirando la ecuación del error (2.1.4) vemos que lo que necesitamos es construir un interpolador con pesos.

Vamos a enunciar ahora un resultado de interpolación con pesos.

Lema 2.1.3. *Sea p un grado polinomial y $K \in \mathcal{K}_n$. Luego, existe un operador lineal de interpolación $\Pi_K^p : H^1(K) \to \mathcal{P}_p(K)$ tal que*

$$\begin{aligned} \Pi_K^p v = v \quad &\textit{para todo } v \in \mathcal{P}_p(K), \\ \Pi_K^p v(z) = v(z) \quad &\textit{para todo } v \in H^1(K) \textit{ y todo } z \in \partial K, \\ \Big\|(\Pi_K^p v)'\Big\|_{L^2(K)} \leq \|v'\|_{L^2(K)} \quad &\textit{para todo } v \in H^1(K), \end{aligned}$$

y para todo $v \in H^1(K)$

$$\Big\|\frac{v - \Pi_K^p v}{\sqrt{\chi_K}}\Big\|_{L^2(K)} \leq \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\Big\|(v - \Pi_K^p v)'\Big\|_{L^2(K)}.$$

Luego, un interpolador global $\Pi_{\mathcal{K}_n}^{\mathbf{p}} : H_0^1(\Omega) \to S_0^p(\mathcal{K}_n)$ está definido por $\Pi_{\mathcal{K}_n}^{\mathbf{p}} v|_K := \Pi_K^{p_K} v$.

Demostración. Capítulos 3.3.1 y 3.3.2 de [Sch98]. □

Observación 2.1.4. *Observemos que el resultado de interpolación clásico del Lema 2.1.1 resulta ahora ser un corolario de la existencia del interpolador con pesos del Lema 2.1.3*

Consideramos en la ecuación del error $v = e = u - u_N$ y $v_N = \Pi e$ el interpolador del lema anterior. Luego,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (e')^2 &\leq \sum_{K\in\mathcal{K}_n} \Big(\frac{1}{\sqrt{p_K(p_K+1)}}\| \sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|_{L^2(K)} + \frac{1}{\sqrt{p_K(p_K+1)}}\| \sqrt{\chi_K}(f - f_{p_K})\|_{L^2(K)}\Big)\|e'\|_{L^2(K)} \\ &\leq C\Big(\sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\frac{1}{p_K^2}\| \sqrt{\chi_K}(f_{p_K} + u_N'')\|^2_{L^2(K)} + \frac{1}{p_K^2}\| \sqrt{\chi_K}(f - f_{p_K})\|^2_{L^2(K)}\Big)\Big)^{1/2}\|e'\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

luego

$$\|e'\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\sum_{K\in\mathcal{K}_n}\Big(\tilde{\eta}_K^2 + \frac{1}{p_K^2}\| \sqrt{\chi_K}(f - f_{p_K})\|^2_{L^2(K)}\Big).$$

En consecuencia, por todo lo demostrado hasta el momento, podemos arribar al siguiente teorema.

Teorema 2.1.2. *Sean u la solución de (2.1.2), u_N la solución de (2.1.3), $\tilde{\eta}_K$ como en (2.1.13), $\tilde{\eta}$ como en (2.1.14) y*

$$\tilde{\delta}_K^2 := \frac{1}{p_K^2}\|f - f_{p_K}\|^2_{L^2(K)}.$$

Luego,

$$\Big\|(u - u_N)'\Big\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{K\in\mathcal{K}_n}\{\tilde{\eta}_K^2 + \tilde{\delta_K}^2\},$$

$$\tilde{\eta}_K^2 \leq C\Big(\Big\|(u-u_N)'\Big\|^2_{L^2(K)} + \tilde{\delta}_K^2\Big)$$

y

$$\tilde{\eta}^2 \leq C\Big(\Big\|(u-u_N)'\Big\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{K\in\mathcal{K}_n}\tilde{\delta}_K^2\Big),$$

donde la constante C es independiente de h y $\mathbf{p}$.

En [DH07] proponen un algoritmo adaptativo basado en este estimador de error y, usando la equivalencia con el error, demuestran que bajo ciertas hipótesis la norma energía del error decrece de manera monótona y uniforme. Por completitud, vamos a enunciar el teorema demostrado en [DH07].

Teorema 2.1.3. *Sea u la solución de (2.1.2). Sean $\mathcal{K}$ una malla de Ω, $\mathbf{p}$ un vector de grados polinomiales y $u_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{K})$ la solución de (2.1.3) Sean $\tilde{\mathcal{K}}$ y $\tilde{\mathbf{p}}$ el refinamiento basado en los estimadores $\tilde{\eta}_K$ propuesto por Dörfler y Heuveline en la sección 3.5. de [DH07] con parámetro $\theta \in (0,1)$. Supongamos que se tiene la siguiente hipótesis*

$$\sum_{K\in\mathcal{K}} \frac{1}{4}\frac{h_K^2}{p_K^2}\|f - f_{p_K}\|^2_{L^2(K)} \leq \mu^2 \sum_{K\in\mathcal{K}} \tilde{\eta}_K^2 \tag{2.1.15}$$

para algún $0 < \mu \leq 4\theta$ (independiente de h y de $\mathbf{p}$). Sea $\tilde{u}_N \in S_0^{\tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{\mathcal{K}})$ la solución de (2.1.3), tenemos

$$\|(u - \tilde{u}_N)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}\theta^2}\|(u - u_N)'\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.2. El problema de Poisson en dos dimensiones: diferencias y similitudes con el caso unidimensional

En esta sección vamos a analizar el problema de Poisson en dos dimensiones, mostrando las diferencias y similitudes con el caso unidimensional. En particular, vamos a hacer hincapié en los resultados de interpolación unidimensionales que no pueden ser fácilmente generalizados a más dimensiones.

Problema modelo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto y poligonal, $\Gamma = \partial\Omega$ y $f \in L^2(\Omega)$. Consideramos el problema modelo de Poisson clásico que consiste en encontrar una función u tal que:

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases} \tag{2.2.16}$$

Formulación débil. El Problema Variacional asociado a (2.2.16) es:
Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.2.17}$$

donde $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ y $L(v) = \int_\Omega fv$.

Usando el Teorema de Lax-Milgram se sigue fácilmente que este problema tiene única solución en $H_0^1(\Omega)$ y además que $u \in H^{1+r}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $r = 1$ cuando Ω es un polígono sin ángulos entrantes o $r < \frac{2\pi}{\theta}$ con θ el mayor ángulo interior de Ω [Gri85].

La versión hp del método de elementos finitos. Vamos a considerar como el cuadrado de referencia a:

$$S = (-1,1)^2$$

y el triángulo de referencia a:

$$T = \{(x,y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}.$$

Sea $\mathcal{T}$ una partición admisible de Ω en paralelogramos o triángulos, para $K \in \mathcal{T}$ notamos $h_K := diamK$ y $h := max\{h_K | K \in \mathcal{T}\}$, vamos a asumir que existe una constante γ tal que la triangulación es "γ-shape" regular, i.e.,

$$h_K^{-1}\|F'_K\| + h_K\|(F'_K)^{-1}\| \leq \gamma \tag{2.2.18}$$

donde $F_K : \hat{K} \to K$ una transformación afín con $\hat{K} = S$ si K es un paralelogramo o $\hat{K} = T$ si K es un triángulo.

Esta condición de regularidad de la malla implica además que el tamaño de los elementos vecinos es comparable, o sea que existe una constante (que por simplicidad llamamos nuevamente γ) tal que

$$h_K \leq \gamma h_{K'} \quad \forall K, K' \in \mathcal{T} \text{ con } K \cap K' \neq \emptyset. \tag{2.2.19}$$

Sea $p \geq 0$, notamos $\mathcal{Q}_p(S)$ al conjunto de polinomios de grado menor o igual a p en cada variable en S, notamos $\mathcal{P}_p(T)$ al conjunto de polinomios de grado menor o igual a p en T. Sea K un paralelogramo y $F_K : S \to K$ una transformación afín, vamos a notar

$$\mathcal{Q}_p(K) = \{u | u \circ F_K \in \mathcal{Q}_p(S)\}.$$

Sea K un triángulo y $F_K : T \to K$ una transformación afín, vamos a notar

$$\mathcal{P}_p(K) = \{u | u \circ F_K \in \mathcal{P}_p(T)\}.$$

Para $p \geq 0$ definimos

$$\begin{aligned} S^p(\mathcal{T}) &= \{u \in C^0(\bar{\Omega}) \mid u|_K \in \mathfrak{R}_p(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}\} \\ S_0^p(\mathcal{T}) &= \{u \in C_0^0(\bar{\Omega}) \mid u|_K \in \mathfrak{R}_p(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}\}, \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

donde $\mathfrak{R}_p(K) = \mathcal{Q}_p(K)$ si K es un paralelogramo y $\mathfrak{R}_p(K) = \mathcal{P}_p(K)$ si K es un triángulo.

Para cada $K \in \mathcal{T}$ elegimos un grado polinomial (máximo) y notamos $\mathbf{p} = (p_K)$ al vector de grados polinomiales. Vamos a asumir que los grados polinomiales de elementos vecinos son comparables, es decir, existe una constante positiva C tal que

$$p_K \leq C p_{K'} \quad K, K' \in \mathcal{T} \text{ con } K \cap K' \neq \emptyset. \tag{2.2.21}$$

Vamos a introducir la siguiente notación

$$\begin{aligned} S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}) &= \{u \in C^0(\bar{\Omega}) \mid u|_K \in \mathfrak{R}_{p_K}(K)\} \\ S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}) &= \{u \in C_0^0(\bar{\Omega}) \mid u|_K \in \mathfrak{R}_{p_K}(K)\}. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Observemos que la definición de $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ nos permite tener grados máximos distintos en cada lado de cualquier elemento. Luego, el espacio $\{v|_K | v \in S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})\}$ no necesariamente coincide con $\mathfrak{R}_{p_K}(K)$. Sin embargo, existe $p'_K \leq p_K$ tal que

$$\mathfrak{R}_{p'_K}(K) \subset \{v|_K : v \in S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})\} \subset \mathfrak{R}_{p_K}(K)$$

y por la hipótesis (2.2.21) se tiene $\frac{p_K}{p'_K} \leq C$.

La versión *hp* del Método de Elementos Finitos (FEM) consiste en elegir $V_N = S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ en el método de Galerkin. Así, el Problema Variacional Discreto se define de la siguiente manera:

Hallar $u_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ tal que:

$$a(u_N, v_N) = L(v_N) \quad \forall\, v_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}). \tag{2.2.23}$$

Es claro que, usando el Teorema de Lax-Milgram, se concluye inmediatamente que este problema tiene solución única.

Para poder enunciar las estimaciones de error necesitamos de algunas definiciones previas.

Definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \{ \text{ todos los lados } e \text{ en } \mathcal{T}\},\\
\mathcal{E}^\circ &= \mathcal{E} \cap \Omega^\circ,\\
\mathcal{N} &= \{ \text{ todos los vértices } V \text{ en } \mathcal{T}\}.
\end{aligned}$$

Dado $V \in \mathcal{N}$ notamos

$$\begin{aligned}
\omega_V^0 &= \{V\},\\
\omega_V^j &= \bigcup \{\bar{K} | K \in \mathcal{T} \text{ y } \bar{K} \cap \omega_V^{j-1} \neq \emptyset\}. \quad j \geq 1,\\
\mathcal{T}_V &= \mathcal{T}|_{\omega_V}\\
p_V &= \text{mín}\{p_K | V \in \bar{K}\},\\
\mathcal{E}_V &= \{ \text{ todos los lados } e \text{ de } \mathcal{E} \text{ tal que } V \text{ es un punto final de } e\}.
\end{aligned}$$

Para $K \in \mathcal{T}$ y $e \in \mathcal{E}$ notamos

$$\begin{aligned}
\omega_K &= \bigcup \{K' | K' \in \mathcal{T} \text{ y } K' \cap K \neq \emptyset\},\\
p_e &= \text{mín}\{p_K | e \text{ lado de } K\}.
\end{aligned}$$

Definimos

$$\phi_{\hat{K}}(\mathbf{x}) := dist(\mathbf{x}, \partial\hat{K}),$$

donde $\hat{K}$ es el cuadrado o el triángulo de referencia según corresponda. Para $K \in \mathcal{T}$ consideramos $F_K : \hat{K} \to K$ una transformación afín y $\Phi_K = \Phi_{\hat{K}} \circ F_K^{-1}$.

Por otra parte, para $\hat{e} = (-1, 1)$ definimos

$$\phi_{\hat{e}}(x) := (1 - x)(x + 1),$$

y para cada $e \in \mathcal{E}$ tomamos $F_e : \hat{e} \to e$ una transformación afín y definimos $\Phi_e = \Phi_{\hat{e}} \circ F_e^{-1}$.

Estimaciones a priori del error El siguiente teorema, que establece las estimaciones a priori del error, lo podemos encontrar en, por ejemplo, [BS87].

Teorema 2.2.1. *Sea* $u \in H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*,* $k > 1$ *la solución de (2.2.17), y sea* u_N *la solución de (2.2.23). Sea* $p = \text{mín}\,\mathbf{p}$*, existe una constante positiva* C *tal que*

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{k-1}} \|u\|_{H^k(\Omega)},$$

donde $\mu = \text{mín}(p+1, k)$ *y la constante* C *es independiente de* u*,* p *y* h*.*

Al igual que en el caso unidimensional, la convergencia del método se obtiene ya sea reduciendo el tamaño de la malla (h tiende a 0) y/o agrandando el grado polinomial (p tiende a ∞). Además, un resultado análogo al de la Observación 2.1.1 se tiene también en el caso bidimensional, esto es, para una elección adecuada del tamaño de la malla y de $\mathbf{p}$ se obtiene convergencia exponencial en el número de grados de libertad de la norma H^1 del error.

Estimaciones de error a posteriori. Al igual que en el caso unidimensional, vamos a buscar estimadores de error de tipo residual.

Sean $v \in H_0^1(\Omega)$ y $v_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$, luego tenemos la siguiente ecuación del error

$$\int_\Omega \nabla(u - u_N) \cdot \nabla v = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (f + \triangle u_N)(v - v_N) + \sum_{e \in \mathcal{E}^\circ} \int_e \Big[\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big]_e (v - v_N), \tag{2.2.24}$$

donde $[\frac{\partial u_N}{\partial n}]_e$ representa el salto de la derivada normal de u_N en el lado e que se define de la siguiente manera:

Para todo lado $e \in \mathcal{E}^\circ$ elegimos un vector normal unitario n_e y notamos a los elementos que componen este lado K_{in} y K_{out}, con n_e apuntando hacia afuera de K_{in}. Definimos

$$\left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_e = \nabla(u_N|_{K_{out}}) \cdot n_e - \nabla(u_N|_{K_{in}}) \cdot n_e$$

el cual corresponde al salto de la derivada normal de u_N a lo largo del lado e. Observemos que este valor es independiente de la elección de K_{in} y K_{out}.

Al igual que en el caso unidimensional, la idea es elegir $v_N = Iv$ un interpolador de v, y luego tomar $v = e := u - u_N$ en la ecuación de error (2.2.24). Observemos que a diferencia del caso unidimensional no se puede tener un interpolador que cumpla $Iv|_e = v|_e$ para $e \in \mathcal{E}^\circ$ y por lo tanto el salto de la derivada normal seguirá apareciendo y no lo podremos eliminar de la ecuación del error.

A continuación vamos a enunciar un resultado de interpolación clásico (sin pesos) cuya demostración la podemos encontrar en [MW01].

Lema 2.2.1. *Existe un operador lineal* $I : H_0^1(\Omega) \to S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ *y una contante* C *independiente de* h *y* $\mathbf{p}$ *tal que para cualquier vértice* V *y cualquier lado* $e \in \mathcal{E}_V$

$$\|u - Iu\|_{L^2(\omega_V^1)} + \frac{h_V}{p_V} \|\nabla Iu\|_{L^2(\omega_V^1)} + \sqrt{\frac{h_V}{p_V}} \|u - Iu\|_{L^2(e)} \leq C \frac{h_V}{p_V} \|\nabla u\|_{L^2(\omega_V^4)}.$$

Observación 2.2.1. *Un interpolador con pesos análogo al que teníamos en el Lema 2.1.3 para el caso unidimensional no puede existir en más dimensiones.*

Consideramos entonces el interpolador del Lema 2.2.1 , usando Hölder e intercalando f_{p_K} la proyección $L^2(K)$ de $f|_K$ en $\mathcal{P}_{p_K}(K)$ obtenemos

$$\|u - u_N\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}} \{\eta_K^2 + \delta_K^2\},$$

donde

$$\eta_K^2 := \eta_{B_K}^2 + \eta_{E_K}^2$$

con

$$\eta_{B_K}^2 := \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} + \triangle u_N\|^2_{L^2(K)}, \quad \eta_{E_K}^2 := \sum_{e \subset \partial K \cap \Omega} \frac{h_e}{2p_e} \Big\| \Big[\frac{\partial u_N}{\partial n} \Big]_e \Big\|^2_{L^2(e)},$$

$$\delta_K^2 := \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} - f\|^2_{L^2(K)},$$

la constante C_1 es independiente de h y $\mathbf{p}$.

Si queremos que aparezca una función de peso en el estimador tenemos que usar estimaciones inversas para polinomios en dos dimensiones [BM97a, BFO01] y tendríamos constantes que dependen de $\mathbf{p}$.

En [MW01] los autores proponen estimadores con pesos η_α, $\alpha \in [0, 1]$ definidos de la siguiente manera:

$$\eta_{\alpha,K}^2 := \eta_{\alpha,B_K}^2 + \eta_{\alpha,E_K}^2,$$

con

$$\eta_{\alpha,B_K}^2 := \frac{h_K^2}{p_K^2} \|\phi_K^{\alpha/2}(f_{p_K} + \triangle u_N)\|^2_{L^2(K)}, \quad \eta_{\alpha,E_K}^2 := \sum_{e \subset \partial K \cap \Omega} \frac{h_e}{2p_e} \Big\| \phi_e^{\alpha/2} \Big[\frac{\partial u_N}{\partial n} \Big]_e \Big\|^2_{L^2(e)},$$

y, como es habitual, los estimadores globales definidos como la suma de las contribuciones locales:

$$\eta_\alpha^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_{\alpha,K}^2.$$

Melenk y Wolmuth demuestran en [MW01] el siguiente teorema sobre la equivalencia del indicador con el error y proponen un algoritmo adaptivo. Más aún, para algunos ejemplos numéricos muestran que los resultados obtenidos son óptimos (i.e., el error decrece de manera exponencial en el número de grados de libertad).

Teorema 2.2.2. *Sean u la solución de (2.2.17), $\mathbf{p}$ un vector de grados polinomiales que cumple la condición (2.2.21) y $u_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ la solución de (2.2.23). Sean $\alpha \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$.*

Luego existen una constante C_1 y $C_2(\epsilon)$ independiente de h (el tamaño de la malla $\mathcal{T}$) y de $\mathbf{p}$ *tal que*

$$\|u - u_N\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \sum_{K\in\mathcal{T}} \{p_K^{2\alpha}\eta^2_{\alpha,K} + \delta_K^2\},$$

donde

$$\delta_K^2 := \frac{h_K^2}{p_K^2}\|f_{p_K} - f\|^2_{L^2(K)},$$

para $f_{p_K} \in \mathcal{P}_{p_K}(K)$ un polinomio que aproxima a $f|_K$. Además, tenemos la cota por debajo

$$\eta^2_{\alpha,K} \leq C_2(\epsilon)p_K^{max\{1-2\alpha+2\epsilon,0\}}\Big(p_K\Big\|u - u_N\Big\|^2_{H^1(\omega_K)} + p_K^{2\epsilon}\delta_K^2\Big).$$

Por otra parte, en [BD11] Bürg y Dörfler proponen un algoritmo de refinamiento adaptivo basándose en el estimador de error propuesto por Melenk y Wohlmuth para el caso $\alpha = 0$. Demuestran, bajo ciertas hipótesis, que la norma energía del error decrece uniformemente en cada iteración. El siguiente Teorema muestra el resultado obtenido en [BD11] por Bürg y Dörfler.

Teorema 2.2.3. *Sean u la solución de (2.2.17),* $\mathbf{p}$ *un vector de grados polinomiales que cumple la condición (2.2.21) con constante γ y $u_N \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ la solución de (2.2.23). Sean $0 < \theta < min\{1, 2\sqrt{C_1}\}$ y $\epsilon > 0$ tal que*

$$\theta^2 \geq \frac{8C_1C_{cov}C^2}{max\{p_K^{2\epsilon+1/2}|K \in \mathcal{T}\}},$$

con C_1 del Teorema 2.2.2, $C > 0$ depende solo de γ y

$$C_{cov} = \max_{K\in\mathcal{T}} cardinal\{L \in \mathcal{T}|L \subset \omega_K\}.$$

Si asumimos que el error del dato está controlado por el estimador del error, o sea, existe

$$0 < \mu < min\Big\{1, \frac{1}{\sqrt{2c_2(\epsilon)C_{cov}}max\{p_K^{2\epsilon+1/2}|K \in \mathcal{T}\}}\Big\} \tag{2.2.25}$$

independiente de h_K y p_K, donde $C_2(\epsilon)$ del Teorema 2.2.2 tal que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{h_K^2}{p_K^2}\|f - f_{p_K}\|^2_{L^2K} \leq \mu^2 \sum_{K\in\mathcal{T}} \eta^2_{0,K}. \tag{2.2.26}$$

Sean $\tilde{\mathcal{T}}$ y $\tilde{\mathbf{p}}$ el refinamiento propuesto por Bürg y Dörfler en la sección 3.2.3. de [BD11]. Sea $\tilde{u_N} \in S_0^{\tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{\mathcal{T}})$ la solución de (2.2.23) luego, existe una constante $\kappa \in (0, 1)$ tal que

$$\|\nabla(u - \tilde{u_N})\|_{L^2(\Omega)} \leq \kappa\|\nabla(u - u_N)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Observemos que **la convergencia del algoritmo es bajo la hipótesis (2.2.25) que se convierte más restrictiva cuando se incrementan los grados polinomiales** p_K, la cual no se pide en el caso unidimensional, pues en este caso se tienen indicadores de error equivalentes al error con constantes independientes de $\mathbf{p}$.

Basándonos en el hecho de que para el caso unidimensional con resultados de interpolación en una norma con pesos obtenemos la equivalencia del error y el estimador (salvo términos de mayor orden), nos proponemos usar un razonamiento análogo para el caso bidimensional. Es importante notar que resultados de interpolación unidimensionales como los presentes en el Lema 2.1.3, en el cual se obtiene acotaciones con la norma de Sobolev usual $H^1(\Omega)$, no se pueden obtener en más dimensiones. En consecuencia, para obtener estimaciones de interpolación con pesos en dos dimensiones necesitamos introducir los polinomios de Jacobi y los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos, los cuales analizaremos en el próximo capítulo.

Capítulo 3

Espacios de Jacobi-Sobolev con pesos

Para enunciar las propiedades de aproximación que tienen los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos, es fundamental el estudio de los polinomios de Jacobi. En la primer sección vamos a definir los polinomios de Jacobi y establecer algunas de sus principales propiedades. Luego, en la sección siguiente, introduciremos los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos y mostraremos las propiedades que poseen estos espacios, las cuales nos permitirán desarrollar la teoría de interpolación que resulta ser fundamental para llevar a cabo nuestras estimaciones.

3.1. Polinomios de Jacobi

En esta sección vamos a definir los polinomios de Jacobi y vamos a mostrar algunas propiedades que tienen estos polinomios. Consideraremos en primer lugar los polinomios de Jacobi en una dimensión.

3.1.1. Polinomios de Jacobi en $\mathbb{R}$ y propiedades

Consideramos el dominio de referencia $I = (-1, 1)$ en $\mathbb{R}$.

Sean $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ con $\beta_i > -1$ y $\alpha \geq 0$ entero, definimos la función de peso para $x \in I$ del siguiente modo

$$W_{\beta,\alpha}(x) = (1 - x)^{\beta_1+\alpha}(1 + x)^{\beta_2+\alpha}. \tag{3.1.1}$$

Si $\alpha = 0$ vamos a notar $W_\beta = W_{\beta,0}$.

Sean $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ con $\beta_i > -1$ y p un grado polinomial. Los polinomios de Jacobi de grado p, $J_p^\beta(x)$, $x \in I$ se pueden definir mediante la fórmula de Rodriguez

$$J_p^\beta(x) = \frac{(-1)^p(1 - x)^{-\beta_1}(1 + x)^{-\beta_2}}{2^p p!} \frac{d^p((1 - x)^{\beta_1+p}(1 + x)^{\beta_2+p})}{dx^p}. \tag{3.1.2}$$

Además, estos polinomios cumplen la llamada "ecuación diferencial de Jacobi"

$$(1 - x^2)J_p^\beta(x)''(\beta_2 - \beta_1 - (\beta_2 + \beta_1 + 2)x)J_p^\beta(x)' + p(p + \beta_1 + \beta_2 + 1)J_p^\beta(x) = 0.$$

En el caso $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ vamos a notar $J_p^{\beta}(x) = J_p^{(\beta_1,\beta_2)}(x)$.

Para establecer algunas de las propiedades que satisfacen los polinomios de Jacobi necesitamos introducir a la función Gamma y enunciar algunas de sus propiedades (las cuales se pueden encontrar en cualquier libro de Análisis Complejo, por ejemplo, en [Ahl78], [Lan99], [Con78]). Notamos Γ a la función Gamma definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Observación 3.1.1. $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es una función continua, positiva y acotada inferiormente por una constante positiva.*

Una propiedad inmediata de la función Γ es que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{3.1.3}$$

y por lo tanto

$$\binom{z_1}{z_2} = \frac{\Gamma(z_1+1)}{\Gamma(z_2+1)\Gamma(z_1-z_2+1)}.$$

El siguiente lema lo podemos encontrar, por ejemplo, en la página 427 de [Lan99].

Lema 3.1.1. *Para un número real x con $x \to +\infty$ vale lo siguiente*

$$\Gamma(x) \sim x^{x-1/2} e^{-x} \sqrt{2\pi},$$

donde $\sim$ significa que el cociente del lado izquierdo por el lado derecho tiende a 1.

Luego, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.1. *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\Gamma(n+\alpha) \sim (n+\alpha)^{n+\alpha-1/2} e^{-(n+\alpha)} \sqrt{2\pi}, \quad \text{para } n \to +\infty.$$

Sea $\alpha_0 > -1$, entonces la convergencia es uniforme en $\alpha \in (-1, \alpha_0]$.

Podemos entonces enunciar el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}} = 1.$$

Sea $-1 < \alpha_0 < 0$, existen constantes positivas $A = A(\alpha_0)$ y $B = B(\alpha_0)$ tales que

$$A \leq \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}} \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in (-1, \alpha_o].$$

Demostración. Por el Corolario 3.1.1

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}} \sim \frac{(n+\alpha)^{n+\alpha-1/2}e^{-(n+\alpha)}\sqrt{2\pi}}{(n)^{n-1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}n^{\alpha}}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\frac{(n+\alpha)^{n+\alpha-1/2}e^{-(n+\alpha)}\sqrt{2\pi}}{(n)^{n-1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}n^{\alpha}} &= (\frac{n+\alpha}{n})^{n+\alpha-1/2}e^{-\alpha}\\ &= \left[(1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha\frac{n+\alpha-1/2}{n}}e^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Usando que

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}} = e \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+\alpha-1/2}{n} = 1,$$

ambas convergencias son uniformes en α si $-1 < \alpha \leq \alpha_0$ (observemos que es importante pedir que $\alpha_0 < 0$), luego obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha\frac{n+\alpha-1/2}{n}}e^{-\alpha} = 1,$$

y existen constantes positivas $c_1 = c_1(\alpha_0)$ y $c_2 = c_2(\alpha_0)$, que no dependen de α, tales que para $n \geq n_0$ y para todo $-1 < \alpha \leq \alpha_0$

$$c_1 \leq \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}} \leq c_2.$$

Consideramos $1 \leq n < n_0$ fijo, por la Observación 3.1.1, existen constantes $c_1(n)$ y $c_2(n)$ tales que

$$c_1(n) \leq \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}} \leq c_2(n), \forall\alpha \in (-1,\alpha_0].$$

Sean

$$A = \min\{c_1, c_1(n), \ldots, c_1(n_0-1)\} \quad \text{y} \quad B = \max\{c_1, c_1(n), \ldots, c_1(n_0-1)\},$$

luego

$$A \leq \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}} \leq B.$$

□

Ahora estamos en condiciones de enunciar algunas propiedades que poseen los polinomios de Jacobi (ver [Guo09],[GR65],[AS64], [BM97b], [DX01]).

- El polinomio de Jacobi puede escribirse de la siguiente manera:

$$J_p^{\beta}(x) = \frac{1}{2^p}\sum_{m=0}^{p}\binom{p+\beta_1}{m}\binom{p+\beta_2}{p-m}(x-1)^{p-m}(1+x)^m,$$

- $J_p^{\beta}(1) = \frac{\Gamma(p+\beta_1+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(\beta_1+1)}$ y $J_p^{\beta}(-1) = \frac{(-1)^p\Gamma(p+\beta_2+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(\beta_2+1)}$,
- $J_p^{\beta}(-x) = (-1)^p J_p^{\beta'}(x)$ con $\beta' = (\beta_2, \beta_1)$,
- Para $0 \le m < p$ un número entero vale

$$\int_I x^m J_p^{\beta}(x)(1-x)^{\beta_1}(1+x)^{\beta_2} = 0, \tag{3.1.4}$$

- $\frac{d}{dx}J_p^{\beta}(x) = \frac{1}{2}(p+\beta_1+\beta_2+1)J_{p-1}^{\beta+\mathbf{1}}(x)$, donde $\beta + \mathbf{1} = (\beta_1+1, \beta_2+1)$,
- $J_{p,k}^{\beta}(x) := \frac{d^k}{dx^k}J_p^{\beta}(x) = \frac{1}{2^k}\frac{\Gamma(p+\beta_1+\beta_2+1+k)}{\Gamma(p+\beta_1+\beta_2+1)}J_{p-k}^{\beta+\mathbf{k}}(x)$, donde $\beta + \mathbf{k} = (\beta_1+k, \beta_2+k)$.

Una propiedad fundamental de los polinomios $J_p^{\beta}(x)$ es que son ortogonales con respecto al peso $W_{\beta}(x)$

$$\int_I J_p^{\beta}(x)J_m^{\beta}(x)W_{\beta}(x) = \begin{cases} \gamma_p^{\beta}, & p = m \\ 0, & p \neq m \end{cases} \tag{3.1.5}$$

donde

$$\gamma_p^{\beta} = \frac{2^{\beta_1+\beta_2+1}\Gamma(p+\beta_1+1)\Gamma(p+\beta_2+1)}{(2p+\beta_1+\beta_2+1)\Gamma(p+1)\Gamma(p+\beta_1+\beta_2+1)}. \tag{3.1.6}$$

Análogamente, los polinomios $J_{p,k}^{\beta}(x)$ son ortogonales con el peso $W_{\beta+\mathbf{k}}(x)$

$$\int_I J_{p,k}^{\beta}(x)J_{m,k}^{\beta}(x)W_{\beta+\mathbf{k}}(x) = \begin{cases} \gamma_{p,k}^{\beta}, & p = m \ge k \\ 0, & p \neq m \end{cases}$$

donde

$$\gamma_{p,k}^{\beta} = \frac{2^{\beta_1+\beta_2+1}\Gamma(p+\beta_1+1)\Gamma(p+\beta_2+1)\Gamma(p+\beta_1+\beta_2+1+k)}{(2p+\beta_1+\beta_2+1)\Gamma(p+1-k)\Gamma^2(p+\beta_1+\beta_2+1)}.$$

Por otra parte, una ecuación que nos va a ser de mucha utilidad más adelante es la siguiente (ver Teorema 19.3 de [BM97b]):

$$(2p+2\beta+1)J_p^{\beta} = \frac{n+2\beta+1}{b+\beta+1}(J_{p+1}^{\beta})' - \frac{n+\beta}{n+2\beta}(J_{p-1}^{\beta})'. \tag{3.1.7}$$

Lema 3.1.3. *Sean, $-1 < \beta_0 < 0$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ con $-1 < \beta_i \leq \beta_0$ y $p \geq 0$ un grado polinomial, luego existen constantes positivas $c_1 = c_1(\beta_0)$ y $c_2 = c_2(\beta_0)$ independientes de p y de β_i talques que*

$$c_1 \frac{(p+1)^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)} \leq |J_p^{\beta}(-1)| \leq c_2 \frac{(p+1)^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)} \quad y \quad c_1 \frac{(p+1)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \leq |J_p^{\beta}(1)| \leq c_2 \frac{(p+1)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)}.$$

Demostración. Por la ecuación (3.1.1) tenemos

$$|J_p^{\beta}(-1)| = \frac{\Gamma(p+\beta_2+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(\beta_2+1)}, \quad \text{y} \quad |J_p^{\beta}(1)| = \frac{\Gamma(p+\beta_1+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(\beta_1+1)}.$$

Luego, podemos escribir

$$|J_p^{\beta}(-1)| = \frac{\Gamma(p+\beta_2+1)}{\Gamma(p+1)(p+1)^{\beta_2}} \frac{(p+1)^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)}, \quad |J_p^{\beta}(1)| = \frac{\Gamma(p+\beta_1+1)}{\Gamma(p+1)(p+1)^{\beta_2}} \frac{(p+1)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)},$$

y por el Lema 3.1.2 tenemos que existen constantes positivas c_1 y c_2 independiente de p y de β_i (pero podrían depender de β_0) tales que

$$c_1 \leq \frac{\Gamma(p+\beta_1+1)}{\Gamma(p+1)(p+1)^{\beta_1}} \leq c_2, \quad c_1 \leq \frac{\Gamma(p+\beta_2+1)}{\Gamma(p+1)(p+1)^{\beta_2}} \leq c_2.$$

□

Vamos demostrar dos propiedades muy importantes que nos proveen una estimación de las constantes $\gamma_{p,k}^{\beta}$ y γ_p^{β}. En los capítulos siguientes vamos a considerar sólo el caso $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, por este motivo y por simplicidad, vamos a demostrar los resultados solo para este caso (para el caso general $\beta_1 \neq \beta_2$ se procede de manera análoga).

Para $\beta > -1$ un número real notamos $\gamma_p^{\beta} = \gamma_p^{(\beta,\beta)}$ y $\gamma_{p,k}^{\beta} = \gamma_{p,k}^{(\beta,\beta)}$.

Lema 3.1.4. *Sean $-1 < \beta_0 < 0$, $k \geq 0$ entero y p un grado polinomial. Existen constantes positivas $A = A(\beta_0)$ y $B = B(\beta_0)$ independientes de p y de β tal que*

$$A\gamma_p^{\beta} p^{2k} \leq \gamma_{p,k}^{\beta} \leq B p^{2k} \gamma_p^{\beta} \quad \forall p \geq k, \forall \beta \in (-1, \beta_0].$$

Demostración. Si $k = 0$ tomamos $A = B = 1$. Supongamos entonces que $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{p,k}^{\beta}}{\gamma_p^{\beta} p^{2k}} &= \frac{2^{2\beta+1}\Gamma(p+2\beta+k+1)\Gamma^2(p+\beta+1)}{(2p+2\beta+1)\Gamma(p+1-k)\Gamma^2(p+2\beta+1)} \frac{(2p+2\beta+1)\Gamma(p+1)\Gamma(p+2\beta+1)}{2^{2\beta+1}\Gamma^2(p+\beta+1)} \frac{1}{p^{2k}} \\
&= \frac{\Gamma(p+2\beta+k+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-k)\Gamma(p+2\beta+1)p^{2k}} \\
&= \frac{\Gamma((p+1-k)+(2\beta+2k))}{\Gamma(p+1-k)(p+1-k)^{2\beta+2k}} \frac{\Gamma(p)p^{2\beta+1}}{\Gamma(p+2\beta+1)} \Big(\frac{p+1-k}{p}\Big)^{2\beta+2k},
\end{aligned}$$

por el Lema 3.1.2 sabemos que existen constantes positivas c_1 y c_2 independientes de p y de β tales que

$$c_1 \leq \frac{\Gamma((p+1-k)+(2\beta+2k))}{\Gamma(p+1-k)(p+1-k)^{2\beta+2k}} \leq c_2, \quad \forall p \geq k, \forall \; -1 < \beta \leq \beta_0.$$

Análogamente, por el mismo Lema sabemos que existen constantes positivas c_3 y c_4, independientes de p y de β, tales que

$$c_3 \leq \frac{\Gamma(p)p^{2\beta+1}}{\Gamma(p+2\beta+1)} \leq c_4, \quad \forall p \geq k, \forall -1 < \beta \leq \beta_0.$$

Ahora, usando que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p+1-k}{p} = 1,$$

y que son todos términos positivos, podemos afirmar que existen constantes positivas c_5 y c_6 independientes de p tales que

$$c_5 \leq \frac{p+1-k}{p} \leq c_6, \quad \forall p \geq k,$$

$$c_5^{2\beta+2k} \leq \left(\frac{p+1-k}{p}\right)^{2\beta+2k} \leq c_6^{2\beta+2k}, \quad \forall p \geq k,$$

como β está acotado, podemos concluir que existen A y B positivos independientes de p y β, tales que

$$A \leq \frac{\gamma_{p,k}^{\beta}}{\gamma_p^{\beta} p^{2k}} \leq B, \quad \forall p \geq k, \forall -1 < \beta \leq \beta_0,$$

y la demostración concluye. □

Lema 3.1.5. *Sean $-1 < \beta_0 < 0$ luego, existen constantes positivas $A = A(\beta_0)$ y $B = B(\beta_0)$*

$$Ap^{-1} \leq \gamma_p^{\beta} \leq Bp^{-1} \quad \forall p \geq 1, \forall \beta \in (-1, \beta_0].$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\gamma_p^{\beta} &= \frac{2^{2\beta+1}\Gamma(p+\beta+1)^2}{(2p+2\beta+1)\Gamma(p+1)\Gamma(p+2\beta+1)} \\ &= \frac{2^{2\beta+1}}{(2p+2\beta+1)}\left(\frac{\Gamma(p+\beta+1)}{\Gamma(p)p^{\beta+1}}\right)^2 \frac{p^{2\beta+1}\Gamma(p)}{\Gamma(p+2\beta+1)}.\end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.2 existen constantes positivas c_1 y c_2 independientes de p y de β tales que

$$c_1 \leq \left(\frac{\Gamma(p+\beta+1)}{\Gamma(p)p^{\beta+1}}\right)^2 \frac{p^{2\beta+1}\Gamma(p)}{\Gamma(p+2\beta+1)} \leq c_2, \forall p \geq 1, \forall -1 < \beta < \beta_0.$$

Finalizamos la demostración usando que para $p \geq 1$ y $-1 < \beta < 0$ tenemos $p < 2p+2\beta+1 < 3p$. □

Ahora estamos en condiciones de definir los polinomios de Jacobi en más dimensiones.

3.1.2. Polinomios de Jacobi en un cubo n-dimensional

Consideramos el dominio de referencia $Q = (-1,1)^n$ en $\mathbb{R}^n$. Sean $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{2n})$ con $\beta_i > -1$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \geq 0$ entero. Definimos la función de peso para $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in Q$ del siguiente modo

$$W_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)^{\beta_i + \alpha_i} (1 + x_i)^{\beta_{i+n} + \alpha_i}. \tag{3.1.8}$$

Si $\alpha = \mathbf{0}$ vamos a notar $W_\beta = W_{\beta,\mathbf{0}}$.

Sean $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{2n})$ con $\beta_i > -1$, $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ con $i_j \geq 0$ entero. Para $\mathbf{x} \in Q$ definimos los polinomios de Jacobi J_σ^β de grado p, con $p = |\sigma| = i_1 + \ldots + i_n$, como:

$$J_\sigma^\beta(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} J_{i_j}^{(\beta_j, \beta_{j+n})}(x_j).$$

3.2. Espacios de Jacobi-Sobolev con pesos

En esta sección vamos a definir los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos, los cuales serán fundamentales para obtener nuestras estimaciones a posteriori para la versión p del método de elementos finitos.

A diferencia de los clásicos espacios de Sobolev con pesos, donde se considera un mismo peso para todas las derivadas, estos espacios tienen la particularidad de que el peso va cambiando con el orden de derivación que estemos considerando (particularidad que resulta fundamental para la aplicación de las propiedades de estos espacios a la versión p de elementos finitos).

3.2.1. Espacios de Jacobi-Sobolev con pesos en $Q = (-1,1)^n$: definición e interpolador

Sean $Q = (-1,1)^n$ en $\mathbb{R}^n$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{2n})$ con $\beta_i > -1$. Para una función $u \in C^\infty(\bar{Q})$ y $k \geq 0$ entero, definimos las siguientes normas para u

$$||u||^2_{H^{k,\beta}(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |\partial^\alpha u|^2 W_{\beta,\alpha}.$$

Donde $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $W_{\beta,\alpha}$ es la función de peso definida en (3.1.8).
En el caso particular en que $\beta_i = \beta$ para $i = 1, \ldots, 2n$ vamos a usar la notación

$$||u||_{H^{k,\beta}(Q)} = ||u||_{H^{k,(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})}(Q)}.$$

El espacio de Jacobi-Sobolev con peso $H^{k,\beta}(Q)$ se define como la clausura de las funciones $C^\infty(\bar{Q})$ con esta norma, o sea

$$H^{k,\beta}(Q) = \overline{C^\infty(\bar{Q})}^{H^{k,\beta}(Q)}.$$

Notamos con $|u|_{H^{k,\beta}(Q)}$ a las seminormas

$$|u|_{H^{k,\beta}(Q)} = \sum_{|\alpha|=k} \int_Q |\partial^\alpha u|^2 W_{\beta,\alpha}$$

y vamos a notar $L^2_\beta(Q) = H^{0,\beta}(Q)$.

$H^{k,\beta}(Q)$ es un espacio con producto interno

$$(u,v)_{H^{k,\beta}(Q)} = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \int_Q \partial^\alpha u \partial^\alpha v W_{\beta,\alpha}.$$

Para una función $u \in L^2_\beta(Q)$ tenemos la expansión de Jacobi-Fourier (ver [GB10])

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i_1,\cdots,i_n=0}^{\infty} c_{i_1,\ldots,i_n} \prod_{l=1}^{n} J_{i_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}(x_l) \tag{3.2.9}$$

con

$$c_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{1}{\prod_{l=1}^n \gamma_{i_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}} \int_Q u(\mathbf{x}) \prod_{l=1}^{n} J_{i_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}(x_l) W_\beta(\mathbf{x}),$$

con $\gamma_{i_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}$ definidos en (3.1.6).
Usando la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi (3.1.5) tenemos que

$$\int_Q |\partial^\alpha u|^2 W_{\beta,\alpha} = \sum_{i_1\ge\alpha_1,\cdots,i_n\ge\alpha_n}^{\infty} |c_{i_1,\ldots,i_l}|^2 \prod_{l=1}^{n} \gamma_{i_l,\alpha_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}, \tag{3.2.10}$$

$$\|u\|^2_{L^2_\beta(Q)} = \sum_{i_1\ge 0,\cdots,i_n\ge 0}^{\infty} |c_{i_1,\ldots,i_n}|^2 \prod_{l=1}^{n} \gamma_{i_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}, \tag{3.2.11}$$

$$|u|^2_{H^{k,\beta}(Q)} = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i_1\ge\alpha_1,\cdots,i_n\ge\alpha_n}^{\infty} |c_{i_1,\ldots,i_n}|^2 \prod_{l=1}^{n} \gamma_{i_l,\alpha_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}. \tag{3.2.12}$$

Sean $-1 < \beta_0 < 0$ y $-1 < \beta \le \beta_0$, si $\beta_i = \beta$ para todo $i = 1, \ldots, 2n$ usando el Lema 3.1.4 tenemos que existen constantes A y B independientes de β y de u (pero podrían depender de β_0) tales que

$$A \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i_1\ge\alpha_1,\cdots,i_n\ge\alpha_n}^{\infty} |c_{i_1,\ldots,i_n}|^2 \prod_{l=1}^{n} \gamma_{i_l}^{\beta} i_l^{2\alpha_l} \le |u|^2_{H^{k,\beta}(Q)} \le B \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i_1\ge\alpha_1,\cdots,i_n\ge\alpha_n}^{\infty} |c_{i_1,\ldots,i_n}|^2 \prod_{l=1}^{n} \gamma_{i_l}^{\beta} i_l^{2\alpha_l}.$$

Para $p \geq 0$ notamos $\mathcal{Q}_p(Q)$ al conjunto de polinomios de grado menor o igual a p en cada variable en Q. La proyección de Jacobi de u en $\mathcal{Q}_p(Q)$ es

$$\Pi_p^{\beta} u(\mathbf{x}) = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{N}^p} c_{i_1,\ldots,i_n} \prod_{l=1}^{n} J_{i_l}^{\beta_l,\beta_{l+n}}(x_l), \tag{3.2.13}$$

donde

$$\mathcal{N}^p := \{(i_1,\ldots,i_n)|0 \leq i_m \leq p, 1 \leq m \leq n\}.$$

En el siguiente teorema vamos a resumir algunas de las propiedades que satisface la proyección de Jacobi (ver [GB10] para la demostración). En lo que sigue vamos a denotar C_β una constante genérica que depende de β.

Teorema 3.2.1. *Sean $Q = (-1,1)^n$ en $\mathbb{R}^n$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_{2n})$ con $\beta_i > -1$, $u \in H^{k,\beta}(Q)$ con $k \geq 0$, p un grado polinomial y $\Pi_p^\beta u$ la proyección de Jacobi de u en $\mathcal{Q}_p(Q)$ como en (3.2.13). Luego, para $0 \leq m \leq k$ existe una contante C_β que no depende de u ni de p tal que*

$$\|u - \Pi_p^\beta u\|_{H^{m,\beta}(Q)} \leq C_\beta (p+1)^{-(k-m)} \|u\|_{H^{k,\beta}(Q)}. \tag{3.2.14}$$

Si además $k > \bar{m} := n/2 + \sum_{1\leq l\leq n} \bar{\beta}_{l,l+n}$ con $\bar{\beta}_{l,l+n} = max\{\beta_l, \beta_{l+n}, 0\}$, entonces

$$\|u - \Pi_p^\beta u\|_{C^0(Q)} \leq C_\beta (p+1)^{-(k-\bar{m})} \|u\|_{H^{k,\beta}(Q)},$$

y para los vértices V de Q

$$|(u - \Pi_p^\beta u)(V)| \leq C_\beta (p+1)^{-(k-n-\sum_t \beta_t)} \|u\|_{H^{k,\beta}(Q)}.$$

Si $p > k-1$ las estimaciones valen en términos de seminormas, es decir

$$\|u - \Pi_p^\beta u\|_{H^{m,\beta}(Q)} \leq C_\beta (p+1)^{-(k-m)} |u|_{H^{k,\beta}(Q)}. \tag{3.2.15}$$

Si, además, $k > \bar{m} := n/2 + \sum_{1\leq l\leq n} \bar{\beta}_{l,l+n}$, entonces

$$\|u - \Pi_p^\beta u\|_{C^0(Q)} \leq C_\beta (p+1)^{-(k-\bar{m})} |u|_{H^{k,\beta}(Q)},$$

y para los vértices V de Q

$$|(u - \Pi_p^\beta u)(V)| \leq C_\beta (p+1)^{-(k-n-\sum_t \beta_t)} |u|_{H^{k,\beta}(Q)}.$$

3.2.2. Espacios de Jacobi-Sobolev con pesos en $Q = (-1,1)^2$

Sean $n = 2$, $Q = (-1,1)^2, \beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ con $\beta_i > -1$ y $u \in L^2_\beta(Q)$ entonces tenemos la expansión de Jacobi-Fourier (3.2.9) y en este caso vamos a usar, por simplicidad, la siguiente notación

$$u(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{i,j} J_i^{\beta_1,\beta_3}(x) J_j^{\beta_2,\beta_4}(y). \tag{3.2.16}$$

Y las seminormas cumplen

$$|u|^2_{L^2_\beta(Q)} = \sum_{i,j=0}^{\infty} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^{\beta_1,\beta_3} \gamma_j^{\beta_2,\beta_4}, \quad |u|^2_{H^{k,\beta}(Q)} = \sum_{|\alpha|=1} \sum_{i\geq\alpha_1, j\geq\alpha_2}^{\infty} |c_{i,j}|^2 \gamma_{i,\alpha_1}^{\beta_1,\beta_3} \gamma_{j,\alpha_2}^{\beta_3,\beta_4}. \tag{3.2.17}$$

Sean $-1 < \beta_0 < 0$ y $-1 < \beta \leq \beta_0$ si $\beta_i = \beta$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$, usando el Lema 3.1.4, existen constantes positivas A y B independientes de β y de u (pero podrían depender de β_0) tales que

$$A \sum_{|\alpha|=1} \sum_{i\geq\alpha_1, j\geq\alpha_2}^{\infty} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^{\beta} i^{2\alpha_1} \gamma_j^{\beta} j^{2\alpha_2} \leq |u|^2_{H^{1,\beta}(Q)} \leq B \sum_{|\alpha|=1} \sum_{i\geq\alpha_1, j\geq\alpha_2}^{\infty} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^{\beta} i^{2\alpha_1} \gamma_j^{\beta} j^{2\alpha_2}.$$

Notamos a la proyección de Jacobi-Fourier de u en $\mathcal{Q}_p(Q)$

$$\Pi_p^\beta u(x,y) = \sum_{i,j=0}^{p} c_{i,j} J_i^{\beta_1,\beta_3}(x) J_j^{\beta_4,\beta_4}(y). \tag{3.2.18}$$

Usando el desarrollo de Jacobi-Fourier vamos a demostrar un teorema de trazas para el caso $n = 2$ con $\beta_i = \beta$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Necesitamos usar el siguiente resultado clásico de Análisis en una variable.

Lema 3.2.1. *Si $f : [p, +\infty] \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, decreciente e integrable entonces*

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^{\infty} f(x)dx.$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar un teorema de trazas para el caso $n = 2$.

Teorema 3.2.2. *Sean $Q = (-1, 1)^2$, γ un lado de Q, $-1 < \beta_0 < 0$ y $-1 < \beta < \beta_0$. Existe una función $T : H^{1,\beta}(Q) \to L^2_\beta(\gamma)$ única, lineal, continua, tal que si $u \in C^\infty(\bar{Q})$ vale $T(u) = u$ y*

$$\|T(u)\|_{L^2_\beta(\gamma)} \leq C_\beta^{1/2} \|u\|_{H^{1,\beta}(Q)},$$

con $C_\beta = C \max\{(\gamma_0^\beta)^{-1}, \frac{1}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2}\}$ con C independiente de u, p y de β (pero pordría depender de β_0).

Demostración. Vamos a demostrar el caso $\gamma = (-1, 1) \times \{-1\}$, para el resto de los lados se procede de manera análoga. Sean $u \in C^\infty(\bar{Q})$ y $c_{i,j}$ los coeficientes de la expansión de Jacobi-Fourier (3.2.16) para u entonces

$$u(x,y) = \sum_{i\geq0, j\geq0} c_{i,j} J_j^\beta(x) J_i^\beta(y).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
u(x,-1) &= \sum_{i\geq 0, j\geq 0} c_{i,j} J_i^\beta(x) J_j^\beta(-1) \\
&= \sum_{i\geq 0} c_{i,0} J_0^\beta(-1) J_i^\beta(x) + \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 1} c_{i,j} J_j^\beta(-1) J_i^\beta(x) \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Usando (3.1.1) tenemos que $J_0^\beta(-1) = 1$ y entonces por (3.2.10)

$$\begin{aligned}
\|I\|^2_{L^2_\beta(I)} &= \sum_{i\geq 0} |c_{i,0}|^2 \gamma_i^\beta \leq (\gamma_0^\beta)^{-1} \sum_{i\geq 0, j\geq 0} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta \gamma_i^\beta \\
&\leq (\gamma_0^\beta)^{-1} |u|^2_{L^2_\beta(Q)}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|II\|^2_{L^2_\beta(I)} &= \sum_{i\geq 0}\Big(\sum_{j\geq 1} c_{i,j} J_j^\beta(-1)\Big)^2 \gamma_i^\beta \leq \sum_{i\geq 0}\Big(\sum_{j\geq 1} |c_{i,j}||J_j^\beta(-1)|\Big)^2 \gamma_i^\beta \\
&\leq \sum_{i\geq 0}\Big(\sum_{j\geq 1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2\Big)\Big(\sum_{j\geq 1} |J_j^\beta(-1)|^2 (\gamma_j^\beta)^{-1} j^{-2}\Big)\gamma_i^\beta,
\end{aligned}$$

usando el Lema 3.1.5 y (3.1.1) sabemos que existe una constante positiva c que no depende de β tal que

$$\|II\|^2_{L^2_\beta(I)} \leq \frac{c}{\Gamma(\beta+1)^2} \sum_{i\geq 0}\Big(\sum_{j\geq 1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2\Big)\Big(\sum_{j\geq 1} (j+1)^{2\beta} j^{-1}\Big)\gamma_i^\beta,$$

ahora, en virtud del Lema 3.2.1

$$\begin{aligned}
\|II\|^2_{L^2_\beta(I)} &\leq \frac{c}{\Gamma(\beta+1)^2} \sum_{i\geq 0}\Big(\sum_{j\geq 1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2\Big)\Big(\int_1^\infty x^{2\beta-1} dx\Big)\gamma_i^\beta \\
&\leq \frac{c}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2} \sum_{i\geq 0}\Big(\sum_{j\geq 1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2\Big)\Big(x^{2\beta}\big|_1^\infty\Big)\gamma_i^\beta \\
&\leq \frac{c}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2} \sum_{i\geq 0, j\geq 1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2 \gamma_i^\beta \\
&\leq \frac{c}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2} |u|^2_{H^{1,\beta}(Q)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, juntando las cotas de I y II tenemos

$$\|u(x,-1)\|_{L^2_\beta(I)} \leq C_\beta^{1/2} \|u\|_{H^{1,\beta}(Q)},$$

donde $C_\beta = C \max\{(\gamma_0^\beta)^{-1}, \frac{1}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2}\}$, con C independiente de p y de β. Como $C^\infty(\bar{Q})$ es denso en $H^{1,\beta}(\bar{Q})$ existe una única extensión continua. $\square$

Para $u \in H^{1,\beta}(Q)$ y γ un lado de Q vamos a notar $\|u\|_{L^2_\beta(\gamma)} = \|T(u)\|_{L^2_\beta(\gamma)}$.

Vamos a demostrar una caracterización de los espacios $H_0^{1,\beta}(Q)$ análoga a la que se tiene para los espacios de Sobolev clásicos.

Lema 3.2.2. *Sean $Q = (-1,1)^2$, $-1 < \beta < 0$ y $u \in H^{1,\beta}(Q) \cap C^0(\bar{Q})$. Son equivalentes*

i) $u \in H_0^{1,\beta}(Q)$,

ii) $u|_{\partial Q} = 0$.

Demostración. Primero vamos a demostrar la implicación *ii*) $\Rightarrow$ *i*). La demostración es análoga a la demostración del teorema en espacios de Sobolev clásicos, para completitud del trabajo, vamos a demostrarlo. Consideramos $u \in H^{1,\beta}(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ y supongamos que $u|_{\partial Q} = 0$.

Sea $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| \leq 1 \\ t & \text{si} \quad |t| \geq 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |G(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consideramos $u_n = \frac{1}{n} G(nu)$. Luego

$$\operatorname{supp} u_n \subset \{x \in Q \,|\, |u(x)| \geq 1/n\}.$$

Por lo tanto, supp u_n es un compacto incluido en Q (usar que $u|_{\partial Q} = 0$). Entonces $u_n \in C_0^\infty(\bar{Q})$. Por último se comprueba fácilmente, con ayuda del Teorema de Convergencia Dominada, que $u_n \to u$ en $H^{1,\beta}(Q)$.

Vamos a demostrar ahora que *i*) $\Rightarrow$ *ii*). En efecto, sea $u \in H_0^{1,\beta}(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ luego existen $\phi_n \in C_0^\infty(\bar{Q})$ tal que $\phi_n \to u$ en $H^{1,\beta}(Q)$. Siguiendo la demostración del Teorema 3.2.2 se tiene

$$\|\phi_n - u\|_{L^2_\beta(\gamma)} \leq C_\beta^{1/2} \|\phi_n - u\|_{H^{1,\beta}(Q)} \to 0, n \to \infty$$

para todo γ lado de Q. Como $\phi_n|_\gamma = 0$ luego $\|u\|_{L^2_\beta(\gamma)} = 0$ y entonces $u = 0$ en casi todo punto de γ y para todo γ lado de Q y como $u \in C^0(\bar{Q})$ entonces $u|_{\partial Q} = 0$.

□

3.2.3. Definición de los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos para una malla $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^2$

Vamos a definir los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos para una malla $\mathcal{T}$ de paralelogramos en un dominio Ω de $\mathbb{R}^2$. Es importante señalar que el espacio va a depender de la malla que estemos considerando.

Primero, para un paralelogramo K de $\mathbb{R}^2$, sea $F : Q \to K$ una transformación afín y $u \in C^\infty(\bar{K})$, luego $\hat{u} = u \circ F \in C^\infty(\bar{Q})$. Para $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ con $\beta_i > -1$ para $i = 1, 2, 3, 4$ definimos

$$\|u\|_{H^{k,\beta}(K)} = \|\hat{u}\|_{H^{k,\beta}(Q)}.$$

El espacio de Jacobi-Sobolev con peso $H^{k,\beta}(K)$ se define como la clausura de las funciones $C^\infty(\bar{K})$ con esta norma, o sea

$$H^{k,\beta}(K) = \overline{C^\infty(K)}^{H^{k,\beta}(K)}.$$

Si $\beta_i = \beta$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ vamos a notar $H^{k,\beta}(K) = H^{k,(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}(K)$.

Vamos a enunciar el siguiente corolario del Teorema de Trazas 3.2.2

Corolario 3.2.1. *Sean K un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, γ un lado de K, $-1 < \beta_0 < 0$ y $-1 < \beta < \beta_0$. Existe una función $T : H^{1,\beta}(K) \to L^2_\beta(\gamma)$ única, lineal, continua, tal que si $u \in C^\infty(\bar{K})$ vale $T(u) = u$ y*

$$\|T(u)\|_{L^2_\beta(\gamma)} \leq C C_\beta^{1/2} \|u\|_{H^{1,\beta}(K)},$$

donde $C_\beta = C \operatorname{máx}\{(\gamma_0^\beta)^{-1}, \frac{1}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2}\}$, la constante C no depende de u, ni de β, pero podría depender de β_0.

Demostración. Dada una función $u \in C^\infty(\bar{K})$, en vista de las definiciones de las normas en los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos, tenemos que

$$\|u\|_{L^2_\beta(\gamma)} = \|\hat{u}\|_{L^2_\beta(\hat{\gamma})} \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^{1,\beta}(K)} = \|\hat{u}\|_{H^{1,\beta}(Q)}$$

donde $\hat{u} = u \circ F_K, \hat{\gamma} = F_K(\gamma)$, con $F_K : Q \to K$ una transformación afín. La demostración concluye entonces usando el Teorema de Trazas 3.2.2 en el elemento de referencia Q. □

Para $u \in H^{1,\beta}(K)$ y γ un lado de K vamos a notar $\|u\|_{L^2_\beta(\gamma)} = \|T(u)\|_{L^2_\beta(\gamma)}$.

Tenemos, análogamente, la caracterización de los espacios $H_0^{1,\beta}(K)$.

Corolario 3.2.2. *Sean K un paralelogramos de $\mathbb{R}^2$, $-1 < \beta < 0$ y $u \in H^{1,\beta}(K) \cap C^0(\bar{K})$. Son equivalentes*

i) $u \in H_0^{1,\beta}(K)$,

ii) $u|_{\partial K} = 0$.

Ahora estamos en condiciones de definir los espacios de Jacobi-Sobolev con pesos para mallas de paralelogramos. En efecto, sea Ω un dominio abierto y poligonal en $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ una malla de paralelogramos de Ω y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ con $\beta_i > -1$, para $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ definimos la norma

$$\|u\|^2_{H^{k,\beta}(\mathcal{T})} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \|u\|^2_{H^{k,\beta}(K)}. \tag{3.2.19}$$

Observemos que la norma depende de la malla $\mathcal{T}$ que estemos considerando. Luego, el espacio de Jacobi-Sobolev con pesos para $\mathcal{T}$ se define de la siguiente manera

$$H^{k,\beta}(\mathcal{T}) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^{k,\beta}(\mathcal{T})}}$$
$$H_0^{k,\beta}(\mathcal{T}) = \overline{C_0^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^{k,\beta}(\mathcal{T})}}.$$

Si $\beta_i = \beta$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ vamos a notar $H^{k,\beta}(\mathcal{T}) = H^{k,(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}(\mathcal{T})$ y $H_0^{k,\beta}(\mathcal{T}) = H_0^{k,(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}(\mathcal{T})$.

Se tiene la siguiente caracterización de $H_0^{1,\beta}(\mathcal{T})$:

Lema 3.2.3. *Sean Ω un dominio abierto y poligonal en $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ una malla de paralelogramos de Ω, $-1 < \beta < 0$ y $u \in H^{1,\beta}(\mathcal{T}) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Son equivalentes*

i) $u \in H_0^{1,\beta}(\mathcal{T})$,

ii) $u|_{\partial\Omega} = 0$.

La demostración es análoga al Lema 3.2.2

Capítulo 4

p-Interpolación en Espacios de Jacobi-Sobolev con pesos

Dado Ω un dominio abierto y poligonal en $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ una malla de Ω de paralelogramos y $\mathbf{p}$ un vector de grados polinomial, nuestro objetivo central es construir un interpolador global $Iu \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ para funciones suaves que estén en el espacio de Jacobi-Sobolev con pesos $H_0^{1,\beta}(\mathcal{T})$. Para ello, primeramente definimos interpoladores locales en cada elemento K de la malla $\mathcal{T}$ (valiendonos del interpolador en el elemento de referencia $Q = (-1,1)^2$ definido en (3.2.18)), para luego proceder a pegarlos con continuidad y así finalmente obtener un interpolador global haciendo uso de una partición de la unidad. Para llevar a cabo esta construcción necesitamos algunas propiedades similares a las del Teorema 3.2.1 pero para funciones en $H^{k,\beta}(\mathcal{T})$ para $k = 1$ (funciones para las cuales los resultados del Teorema 3.2.1 no pueden aplicarse directamente). De ahora en adelante, por simplicidad, vamos a considerar solo el caso $\beta_i = \beta$ para todo i.

4.1. p-Interpolador local

4.1.1. p-Interpolador en el dominio de referencia Q en R^2

Teorema 4.1.1. *Sean $I = (-1,1)$, $Q = (-1,1)^2$, $-1 < \beta_0 < 0$, $-1 < \beta \leq \beta_0$ y $u \in H^{1,\beta}(Q)$. Sean $p \geq 1$ un grado polinomial y $\Pi_p^{\beta}u \in \mathcal{Q}_p(Q)$ como en (3.2.18), luego existe una constante positiva $C = C(\beta_0)$ independiente de u, de β y de p tal que*

$$\|u - \Pi_p^{\beta}u\|_{L^2_{\beta}(Q)} \leq C(p+1)^{-1}|u|_{H^{1,\beta}(Q)}. \tag{4.1.1}$$

Si, además, pedimos que $u \in C^0(\bar{Q})$ y $\beta \leq -1/2$ luego

$$\begin{aligned} \|(u - \Pi_p^\beta u)(\pm 1, y)\|_{L^2_\beta(I)} &\leq C \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (p+1)^{-1/2} |u|_{H^{1,\beta}(Q)}, \\ \|(u - \Pi_p^\beta u)(x, \pm 1)\|_{L^2_\beta(I)} &\leq C \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (p+1)^{-1/2} |u|_{H^{1,\beta}(Q)}, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Si, además, pedimos que $\beta < -1/2$ entonces

$$|(u - \Pi_p^\beta u)(V)| \leq C \frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2} (p+1)^{\beta+1/2} |u|_{H^{1,\beta}(Q)}, \ \forall\ V \text{ vértice de } Q. \tag{4.1.3}$$

Demostración. Para demostrar (4.1.1) notemos que en (3.2.14) del Teorema 3.2.1 tenemos esta estimación pero con una constante que en principio podría depender de β. Nuestro propósito ahora es seguir esa demostración mostrando que la constante puede elegirse de forma tal que no dependa de β. En efecto,

$$(u - \Pi_p^\beta u)(x, y) = \Big(\sum_{i \geq p+1, j \geq 0} + \sum_{i < p+1, j \geq p+1} \Big) c_{i,j} J_i^\beta(x) J_j^\beta(y) = I + II.$$

Por las estimaciones de las seminormas (3.2.17) tenemos

$$\begin{aligned} \|I\|^2_{L^2_\beta(Q)} &= \sum_{i \geq p+1, j \geq 0} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta = \sum_{i \geq p+1, j \geq 0} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta i^2 i^{-2} \\ &\leq (p+1)^{-1} \sum_{i \geq p+1, j \geq 0} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta i^2 \leq (p+1)^{-1} \sum_{i \geq 1, j \geq 0} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta i^2 \\ &\leq (p+1)^{-1} |u|^2_{H^{1,\beta}(Q)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|II\|^2_{L^2_\beta(Q)} &= \sum_{i < p+1, j \geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta = \sum_{i < p+1, j \geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta j^2 j^{-2} \\ &\leq (p+1)^{-1} \sum_{i < p+1, j \geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta j^2 \leq (p+1)^{-1} \sum_{i \geq 0, j \geq 1} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta j^2 \\ &\leq (p+1)^{-1} |u|^2_{H^{1,\beta}(Q)}, \end{aligned}$$

por ende para estos términos podemos directamente tomar $C = 1$.

Ahora vamos a probar (4.1.2), la cota en los lados de Q para funciones suaves . Vamos a acotar sólo $\|(u - \Pi_p^\beta u)(x, -1)\|_{L^2_\beta(I)}$, para el resto de los casos se procede de manera análoga. Como $u \in C^0(\bar{Q})$ podemos escribir

$$\begin{aligned} (u - \Pi_p^\beta u)(x, -1) &= \Big(\sum_{i \geq p+1, j \geq p+1} + \sum_{i \geq p+1, j < p+1} + \sum_{i < p+1, j \geq p+1} \Big) c_{i,j} J_i^\beta(x) J_j^\beta(-1) \\ &= \sum_{i \geq p+1} b_i^{[1]} J_i^\beta(x) + \sum_{i \geq p+1} b_i^{[2]} J_i^\beta(x) + \sum_{i < p+1} b_i^{[3]} J_i^\beta(x) \end{aligned}$$

donde

$$b_i^{[1]} = \sum_{j\geq p+1} c_{i,j} J_j^\beta(-1), \quad i \geq p+1$$
$$b_i^{[2]} = \sum_{j< p+1} c_{i,j} J_j^\beta(-1), \quad i \geq p+1$$
$$b_i^{[3]} = \sum_{j\geq p+1} c_{i,j} J_j^\beta(-1), \quad i < p+1.$$

Para acotar $|J_j^\beta(-1)|$ usamos el Lema 3.1.3, luego existe C independiente de β tal que

$$\begin{aligned}|b_i^{[1]}|^2 &\leq (\sum_{j\geq p+1} |c_{i,j}||J_j^\beta(-1)|)^2 \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{j\geq p+1} |c_{i,j}|(j+1)^\beta(\gamma_j^\beta)^{1/2}(\gamma_j^\beta)^{-1/2} j j^{-1})^2,\end{aligned}$$

usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|b_i^{[1]}|^2 \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2)(\sum_{j\geq p+1}(j+1)^{2\beta}(\gamma_j^\beta)^{-1} j^{-2}).$$

Ahora, por el Lema 3.1.5, tenemos que $(\gamma_j^\beta)^{-1} \leq Cj$ con C independiente de j y β y por lo tanto

$$|b_i^{[1]}|^2 \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2)(\sum_{j\geq p+1} j^{-1+2\beta}),$$

y en virtud del Lema 3.2.1 resulta

$$\begin{aligned}|b_i^{[1]}|^2 &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2)(\int_p^\infty x^{-1+2\beta} dx) \\ &\leq \frac{C}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2} p^{2\beta} \sum_{j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2.\end{aligned}$$

Como $\beta \leq -1/2$ podemos afirmar que existe una constante positiva C, independiente de p y de β, tal que

$$|b_i^{[1]}|^2 \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2} p^{2\beta} \sum_{j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2.$$

Usando las estimaciones para las seminormas (3.2.17) obtenemos

$$\begin{aligned}\|\sum_{i\geq p+1} b_i^{[1]} J_i^\beta(x)\|^2_{L^2_\beta(I)} &= \sum_{i\geq p+1} |b_i^{[1]}|^2 \gamma_i^\beta \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2} p^{2\beta} \sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2 \gamma_i^\beta \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2} p^{2\beta} \sum_{i\geq 0, j\geq 1} |c_{i,j}|^2 \gamma_j^\beta j^2 \gamma_i^\beta \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2} p^{2\beta} |u|^2_{H^{1,\beta}(Q)}.\end{aligned}$$

Análogamente, por el Lema 3.1.3 sabemos que existe C, independiente de β, tal que

$$|b_i^{[2]}|^2 \leq (\sum_{j<p+1} |c_{i,j}||J_j^{\beta}(-1)|)^2$$
$$\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{j<p+1} |c_{i,j}|(j+1)^{\beta}(\gamma_j^{\beta})^{1/2}(\gamma_j^{\beta})^{-1/2} i i^{-1})^2$$

como $i \geq p+1$ entonces $i^{-1} \leq (p+1)^{-1}$ y luego

$$|b_i^{[2]}|^2 \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{-2}(\sum_{j<p+1} |c_{i,j}|(j+1)^{\beta}(\gamma_j^{\beta})^{1/2}(\gamma_j^{\beta})^{-1/2} i)^2.$$

Por otra parte, usando la desigualdad de Hölder y el Lema 3.1.5 obtenemos que

$$|b_i^{[2]}|^2 \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{-2}(\sum_{j<p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_j^{\beta} i^2)(\sum_{j<p+1}(j+1)^{2\beta}(\gamma_j^{\beta})^{-1})$$
$$\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{-2}(\sum_{j<p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_j^{\beta} i^2)(\sum_{j<p+1}(j+1)^{2\beta+1}),$$

como estamos considerando el caso $\beta \leq -1/2$ resulta $2\beta+1 \leq 0$ y tenemos que

$$(j+1)^{2\beta+1} \leq 1 \quad \forall \quad j+1>0,$$

y por lo tanto

$$|b_i^{[2]}|^2 \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{-2}(\sum_{j<p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_j^{\beta} i^2)(p+1).$$

Usando las estimaciones (3.2.17) concluimos que

$$\|\sum_{i\geq p+1} b_i^{[2]} J_i^{\beta}(x)\|^2_{L^2_{\beta}(I)} = \sum_{i\geq p+1} |b_i^{[2]}|^2\gamma_i^{\beta} \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{-1}\sum_{i\geq p+1, j<p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_j^{\beta} i^2\gamma_i^{\beta}$$
$$\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{-1}\sum_{i\geq 1, j\geq 0} |c_{i,j}|^2\gamma_j^{\beta} i^2\gamma_i^{\beta} \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{-1}|u|^2_{H^{1,\beta}(Q)}.$$

Por último, observemos que $b_i^{[1]} = b_i^{[3]}$ y que cuando acotamos $|b_i^{[1]}|^2$ no usamos el rango de i, en consecuencia, por (3.2.17) afirmamos que existe una constante positiva C, que no depende de p ni de β, tal que

$$\|\sum_{i<p+1} b_i^{[3]} J_i^{\beta_1}(x)\|^2_{L^2_{\beta}(I)} = \sum_{i<p+1} |b_i^{[3]}|^2\gamma_i^{\beta} \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}p^{2\beta}\sum_{i<p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_j^{\beta} j^2\gamma_i^{\beta}$$
$$\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}p^{2\beta}\sum_{i\geq 0, j\geq 1} |c_{i,j}|^2\gamma_j^{\beta} j^2\gamma_i^{\beta} \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}p^{2\beta}|u|^2_{H^{1,\beta}(Q)}.$$

Luego, existe una constante positiva C, independiente de p, β y u, tal que

$$\|(u - \Pi_p^\beta u)\|_{L^2_\beta(I)} \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(Q)}$$

y (4.1.2) queda demostrada.

Por último, vamos a probar (4.1.3) para $V = (-1,-1)$ (para el resto de los vértices de Q se procede de manera análoga).

$$\begin{aligned}|(u - \Pi_p^\beta u)(-1,-1)| &= |(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} + \sum_{i\geq p+1, j<p+1} + \sum_{i<p+1, j\geq p+1})c_{i,j}J_i^\beta(-1)J_j^\beta(-1)| \\ &\leq (\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} + \sum_{i\geq p+1, j<p+1} + \sum_{i<p+1, j\geq p+1})|c_{i,j}||J_i^\beta(-1)||J_j^\beta(-1)|.\end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.3 sabemos que existe una constante C, independiente de β, tal que

$$\begin{aligned}|(u - \Pi_p^\beta u)(-1,-1)| &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} + \sum_{i\geq p+1, j<p+1} + \sum_{i<p+1, j\geq p+1})|c_{i,j}|(i+1)^\beta(j+1)^\beta \\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

Primero vamos a estimar II y III.

$$\begin{aligned}II &= \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}\sum_{i\geq p+1, j<p+1}|c_{i,j}|(i+1)^\beta(j+1)^\beta(\gamma_i^\beta)^{-1/2}(\gamma_i^\beta)^{1/2}(\gamma_j^\beta)^{-1/2}(\gamma_j^\beta)^{1/2}ii^{-1} \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}|c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2)^{1/2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}(i+1)^{2\beta}(j+1)^{2\beta}(\gamma_i^\beta)^{-1}(\gamma_j^\beta)^{-1}i^{-2})^{1/2},\end{aligned}$$

a partir del Lema 3.1.5 conseguimos

$$\begin{aligned}II &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}|c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2)^{1/2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}(i+1)^{2\beta}(j+1)^{2\beta}(i+1)(j+1)i^{-2})^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}|c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2)^{1/2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}(i+1)^{2\beta+1}(j+1)^{2\beta+1}i^{-2})^{1/2}.\end{aligned}$$

Ahora, como estamos considerando $\beta \leq -1/2$, tenemos que $2\beta + 1 \leq 0$ y por ende

$$(j+1)^{2\beta+1} \leq 1 \quad \forall\, j+1 > 0$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}II &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}|c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2)^{1/2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}(i+1)^{2\beta+1}i^{-2})^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}(\sum_{i\geq p+1, j<p+1}|c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2)^{1/2}((p+1)\sum_{i\geq p+1}i^{2\beta-1})^{1/2},\end{aligned}$$

del Lema 3.2.1 y (3.2.17) tenemos

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j<p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2\Big)^{1/2}\Big((p+1)\int_p^\infty x^{-1+2\beta}dx\Big)^{1/2}\\
&\leq \frac{C}{(-\beta)^{1/2}\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j<p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2\Big)^{1/2}\big((p+1)p^{2\beta}\big)^{1/2}\\
&\leq \frac{C}{(-\beta)^{1/2}\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j<p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta i^2\Big)^{1/2}\big(p^{2\beta+1}\big)^{1/2}\\
&\leq \frac{C}{(-\beta)^{1/2}\Gamma(\beta+1)^2}p^{\beta+1/2}|u|_{H^{1,\beta}(Q)}.
\end{aligned}$$

Usando que $\beta < -1/2$ concluimos que existe una constante positiva C, independiente de p y de β, tal que

$$II \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}p^{\beta+1/2}|u|_{H^{1,\beta}(Q)}.$$

Para estimar III se procede de manera análoga pero cambiando los roles de i y j. En efecto,

$$III \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}p^{\beta+1/2}|u|_{H^{1,\beta}(Q)},$$

con C una constante positiva independiente de p y de β. Para finalizar la demostración solo falta entonces acotar I,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|(i+1)^\beta(j+1)^\beta\\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta ij\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1}(i+1)^{2\beta}(j+1)^{2\beta}(\gamma_i^\beta)^{-1}(\gamma_j^\beta)^{-1}i^{-1}j^{-1}\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

usando el Lema 3.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta ij\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1}(i+1)^{2\beta}(j+1)^{2\beta}iji^{-1}j^{-1}\Big)^{1/2}\\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta ij\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i\geq p+1} i^{2\beta}\sum_{j\geq p+1}(j+1)^{2\beta}\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

y por el Lema 3.2.1

$$I \leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2\gamma_i^\beta\gamma_j^\beta ij\Big)^{1/2}\Big(\int_p^\infty x^{2\beta}dx\int_p^\infty y^{2\beta}dy\Big)^{1/2}.$$

Ahora, como $\beta < -1/2$ ambas integrales convergen y podemos escribir

$$
\begin{aligned}
I &\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2}\Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta i j\Big)^{1/2} (p^{2\beta+1} p^{2\beta+1})^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2} p^{2\beta+1} \Big(\sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta i^2 + \sum_{i\geq p+1, j\geq p+1} |c_{i,j}|^2 \gamma_i^\beta \gamma_j^\beta j^2\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

por (3.2.17) tenemos entonces que

$$
I \leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2} p^{2\beta+1} |u|_{H^{1,\beta}(Q)}.
$$

Como $-1 < \beta$ entonces $1 < \frac{1}{-1-2\beta}$. Por lo tanto, existe una constante positiva C, independiente de p, de β y de u, tal que

$$
|(u - \Pi_p^\beta u)(-1,-1)| \leq C \frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2} p^{\beta+1/2} |u|_{H^{1,\beta}(Q)}.
$$

y la demostración concluye. □

4.1.2. Interpolador local en un paralelogramo K

Sea K un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ y $F_K : Q \to K$ una transformación afín. Para $p \geq 0$ definimos

$$
\mathcal{Q}_p(K) = \{u | u \circ F_K \in \mathcal{Q}_p(Q)\}
$$

Vamos a enunciar un resultado análogo al Teorema 4.1.1 para un paralelogramo cualquiera.

Corolario 4.1.1. *Sea K un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, $-1 < \beta_0 < 0$, $-1 < \beta \leq \beta_0$, y $u \in H^{1,\beta}(K)$. Sea $p \geq 1$ un grado polinomial. Existe $\Pi_{p,K}^\beta u \in \mathcal{Q}_p(K)$ y una constante positiva $C = C(\beta_0)$ independiente de p, de β y de u tal que*

$$
\|u - \Pi_{p,K}^\beta u\|_{L^2_\beta(K)} \leq C(p+1)^{-1} |u|_{H^{1,\beta}(K)}. \tag{4.1.4}
$$

Si, además, $u \in C^0(\bar{K})$ y $\beta \leq -1/2$ entonces

$$
\|u - \Pi_{p,K}^\beta u\|_{L^2_\beta(\gamma)} \leq C \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (p+1)^{-1/2} |u|_{H^{1,\beta}(K)} \quad \forall\, \gamma \text{ lado de } K. \tag{4.1.5}
$$

Si, además, $\beta < -1/2$ entonces

$$
|(u - \Pi_{p,K}^\beta u)(V)| \leq C \frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2} (p+1)^{1/2+\beta} |u|_{H^{1,\beta}(K)}, \ \forall\, V \text{ vértice de } K. \tag{4.1.6}
$$

Demostración. Si bien la demostración esta basada en un simple argumento de re-escale la incluimos por completitud. En efecto, sea $F_K : Q \to K$ una transformación afín, $\hat{u} = u \circ F_K$ y $\Pi_p^\beta \hat{u}$ como en el Teorema 4.1.1, definimos entonces $\Pi_{p,K}^\beta u$ tal que

$$\widehat{\Pi_{p,K}^\beta u} = \Pi_p^\beta \hat{u}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|u - \Pi_{p,K}^\beta u\|_{L^2_\beta(K)} &= \|\hat{u} - \Pi_p^\beta \hat{u}\|_{L^2_\beta(Q)} \\
&\leq C(p+1)^{-1} |\hat{u}|_{H^{1,\beta}(Q)} \\
&= C(p+1)^{-1} |u|_{H^{1,\beta}(K)}.
\end{aligned}$$

Sea γ un lado de K, notamos $\hat{\gamma} = F_K^{-1}(\gamma)$ luego, si $u \in C^0(\bar{K})$ y $\beta \leq -1/2$,

$$\begin{aligned}
\|u - \Pi_{p,K}^\beta u\|_{L^2_\beta(\gamma)} &= \|\hat{u} - \Pi_p^\beta \hat{u}\|_{L^2_\beta(\hat{\gamma})} \\
&\leq C \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (p+1)^{-1/2} |\hat{u}|_{H^{1,\beta}(Q)} \\
&= C \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (p+1)^{-1/2} |u|_{H^{1,\beta}(K)}.
\end{aligned}$$

Sea V un vértice de K, notamos $\hat{V} = F_K^{-1}(V)$ luego, si $u \in C^0(\bar{K})$ y $\beta < -1/2$,

$$\begin{aligned}
|(u - \Pi_{p,K}^\beta u)(V)| &= |(\hat{u} - \Pi_p^\beta \hat{u})(\hat{V})| \\
&\leq C \frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2} (p+1)^{1/2+\beta} |\hat{u}|_{H^{1,\beta}(Q)} \\
&= C \frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2} (p+1)^{1/2+\beta} |u|_{H^{1,\beta}(K)},
\end{aligned}$$

C es independiente de p, de β y de u; también se ve claramente que C no depende de K. □

4.2. p-Interpolador global

El objetivo de esta sección es definir primeramente un interpolador local para funciones continuas en $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T}|_V)$, y luego utilizar este interpolador para obtener un interpolador global haciendo uso de una partición de la unidad [AM15]. Con el objetivo de poder construir el interpolador, necesitamos de algunos resultados previos.

4.2.1. Resultados técnicos

Notamos $\hat{e} = I \times \{-1\}$. Sean $K \in \mathcal{T}$ y $F_K : Q \to K$ una transformación afín, para una función u en K notamos $\hat{u} = u \circ F_K$ y para una función g en Q notamos $\breve{g} = g \circ F_K^{-1}$.

Sean $e \in \mathcal{E}$ y $F_e : \hat{e} \to e$ una transformación afín, para una función u en e notamos $\hat{u} = u \circ F_e$ y para un función g en $\hat{e}$ notamos $\check{g} = g \circ F_e^{-1}$.

Lema 4.2.1. *Sean $I = (-1, 1)$, $-1 < \beta_0 < 0$, $-1 < \beta < \beta_0$ y $p \geq 1$ un grado polinomial, existe $g \in \mathcal{P}_p(I)$ tal que $g(1) = 0$, $g(-1) = 1$ y*

$$\|g\|_{L^2_\beta(I)} \leq C\Gamma(\beta + 1)p^{-(1+\beta)}.$$

La constante $C = C(\beta_0)$ es independiente de p y de β.

Demostración. Sea $J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}$ el polinomio de Jacobi de grado $p - 1$, el cual es ortogonal con el peso $(1 - x)^{\beta+2}(1 + x)^\beta$, definimos

$$g(x) = \frac{(1 - x)J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(x)}{2J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(-1)},$$

entonces $g \in \mathcal{P}_p(I)$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 0$ y además

$$\begin{aligned}
\|g\|^2_{L^2_\beta(I)} &= \frac{1}{4\big(J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(-1)\big)^2}\int_I (1 - x)^2\big(J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(x)\big)^2(1 - x)^\beta(1 + x)^\beta \\
&= \frac{1}{4\big(J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(-1)\big)^2}\int_I \big(J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(x)\big)^2(1 - x)^{2+\beta}(1 + x)^\beta \\
&= \frac{1}{4\big(J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(-1)\big)^2}\gamma^{\beta+2,\beta}_{p-1}.
\end{aligned}$$

En virtud al Lema 3.1.3 sabemos que existe una constante C, independiente de p y de β pero que podría depender de β_0, tal que

$$|J^{(\beta+2,\beta)}_{p-1}(-1)| \geq C\frac{p^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}.$$

Por lo tanto existe una constante $C = C(\beta_0)$, independiente de p y de β, tal que

$$\|g\|^2_{L^2_\beta(I)} \leq C\Gamma(\beta + 1)^2 p^{-2\beta}\gamma^{\beta+2,\beta}_{p-1}.$$

Vamos a acotar $\gamma^{\beta+2,\beta}_{p-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\gamma^{\beta+2,\beta}_{p-1} &= \frac{2^{2\beta+3}}{2p + 2\beta + 1}\frac{\Gamma(p + \beta + 1)\Gamma(p + \beta)}{\Gamma(p)\Gamma(p + 2\beta + 2)} \\
&= \frac{2^{2\beta+3}}{2p + 2\beta + 1}\frac{\Gamma(p + \beta + 1)}{\Gamma(p)p^{\beta+1}}\frac{\Gamma(p + \beta)}{\Gamma(p)p^\beta}\frac{\Gamma(p)p^{2\beta+2}}{\Gamma(p + 2\beta + 2)}\frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.2 existe una constante positiva C, independiente de p y de β pero que podría depender de β_0, tal que

$$\frac{\Gamma(p+\beta+1)}{\Gamma(p)p^{\beta+1}} \leq C, \quad \frac{\Gamma(p+\beta)}{\Gamma(p)p^{\beta}} \leq C, \quad \text{y} \quad \frac{\Gamma(p)p^{2\beta+2}}{\Gamma(p+2\beta+2)} \leq C.$$

Como $\beta > -1$ y $p \geq 1$ entonces $2p + 2\beta + 1 \geq p$, luego

$$\gamma_{p-1}^{\beta+2,\beta} \leq C\frac{2^{2\beta_0+3}}{p^2}.$$

En consecuencia, existe una constante positiva $C = C(\beta_0)$, independiente de p y de β, tal que

$$||g||^2_{L^2_\beta(I)} \leq C\Gamma(\beta+1)^2 p^{-2\beta} p^{-2}.$$

como deseábamos. □

Corolario 4.2.1. *Sea K un paralelogramo con V_1, V_2, V_3 y V_4 los vértices de K. Sean $p \geq 1$ un grado polinomial, $0 < \beta_0 < 0$ y $-1 < \beta \leq \beta_0$, existe $\xi_{K,l}$ y unas constante positiva $C = C(\beta_0)$ tal que*

1. $\xi_{K,l}(V_j) = \delta_{lj}$ *(toma el valor 1 en V_l y 0 en los otros vértices),*
2. $\xi_{K,l} \in \mathcal{Q}_p(K)$,
3. $||\xi_{K,l}||_{L^2_\beta(K)} \leq C\Gamma(\beta+1)^2 p^{-2-2\beta}$ *y*
4. $||\xi_{K,l}||_{L^2_\beta(e)} \leq C\Gamma(\beta+1) p^{-1-\beta} \quad \forall$ *e lado de K.*

Donde $C = C(\beta_0)$ es una constante positiva que no depende de p ni de β.

Demostración. Sean $Q = (-1,1)^2$ el cuadrado de referencia, $p \geq 1$ un grado polinomial y g como en el Lema 4.2.1, consideramos $G(x,y) = g(x)g(y)$, es inmediato ver que esta función satisface

- $G(-1,-1) = 1$ y toma el valor 0 en el resto de los vértices de Q,
- $G \in \mathcal{Q}_p(Q)$,
- $||G||_{L^2_\beta(Q)} \leq C\Gamma(\beta+1)^2 p^{-2-2\beta}$ y
- $||G||_{L^2_\beta(e)} \leq C\Gamma(\beta+1) p^{-1-\beta} \quad \forall\, e$ lados de Q.

Donde $C = C(\beta_0)$ es una constante positiva que no depende ni de p ni de β. Sea ahora $F_{K,V_l} : Q \to K$ una transformación afín tal que $F_{K,V_l}(-1,-1) = V_l$ luego, la función $\xi_{K,l} = G \circ F^{-1}_{K,V_l}$ satisface (1)-(4). □

Corolario 4.2.2. *Sea K un paralelogramo y e un lado de K. Sea $p \geq 1$ un grado polinomial y $w \in \mathcal{P}_p(e)$ tal que $w|_{\partial e} = 0$ (o sea $w(V) = 0$ para todo V vértice de e). Sean $-1 < \beta_0 < 0$ y $-1 < \beta \leq \beta_0$, luego existe ψ una extensión de w a K tal que*

1. $\psi \in \mathcal{Q}_p(K)$
2. $\psi|_e = w$,
3. $\psi|_{\partial K \setminus e} = 0$ *y*
4. $\|\psi\|_{L^2_\beta(K)} \leq C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}\|w\|_{L^2_\beta(e)}$ *donde la constante $C = C(\beta_0)$ es independiente de p y de β.*

Demostración. Definimos

$$\hat{\psi}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{w}(\hat{x}, -1)g(\hat{y})$$

donde g es el polinomio de grado p del Lema 4.2.1, luego $\hat{\psi}$ satisface

- $\hat{\psi} \in \mathcal{Q}_p(Q)$,
- $\hat{\psi}|_{\hat{e}} = \hat{w}$,
- $\hat{\psi}|_{\partial Q \setminus \hat{e}} = 0$ y
- $\|\hat{\psi}\|_{L^2_\beta(Q)} \leq C\Gamma(\beta + 1)p^{-(1+\beta)}\|\hat{w}\|_{L^2_\beta(\hat{e})}$ donde la constante positiva $C = C(\beta_0)$ es independiente de p y de β.

Sea $F_{K,e} : Q \to K$ una transformación afín tal que $F_{K,e}(\hat{e}) = e$. Definimos

$$= (\hat{\psi}) \circ F_{K,e}^{-1},$$

esta función ψ satisface (1)-(4) y la demostración concluye. □

4.2.2. Construcción del interpolador global

Dado Ω un dominio abierto y poligonal en $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{T}$ una malla de Ω en paralelogramos. Para cada $K \in \mathcal{T}$ elegimos un grado polinomial y notamos $\mathbf{p} = (p_K)$ al vector de grados polinomiales, vamos a asumir que los grados polinomiales cumplen la condición de conformidad (2.2.21) (i.e., los grados polinomiales de elementos vecinos son comparables). Sean $S^p(\mathcal{T})$ y $S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ como en (2.2.20) y (2.2.22) respectivamente.

En el siguiente teorema introducimos un operador local y presentamos algunas estimaciones de error locales.

Teorema 4.2.1. *Sea $-1 < \beta < -1/2$ y $p \geq 1$ un grado polinomial. Para cada $V \in \mathcal{N}$ y $u \in H_0^{1,\beta}(\mathcal{T}) \cap C^0(\bar{\Omega})$ existe un operador $I_V^\beta : H_0^{1,\beta}(\mathcal{T}) \cap C^0(\bar{\Omega}) \to S^p(\mathcal{T}_V)$ y una constante positiva C tal que*

$$\|u - I_V^\beta u\|_{L^2\beta(K)} \leq C \max\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\} \frac{1}{-1-2\beta}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}_V)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_V$$
$$\|u - I_V^\beta u\|_{L^2_\beta(e)} \leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}_V)} \qquad \forall e \in \mathcal{E}_V$$

La constante C es independiente de p, de β y de u. Si $\gamma \in (\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^\circ)$ es tal que $\gamma \subset \partial\omega_V$ luego $I_V^\beta u|_\gamma = u|_\gamma = 0$

Demostración. Para cada $K \in \mathcal{T}_V$ consideramos $\Pi_{p,K}^\beta u$ como en el Teorema 4.1.1. Ahora, vamos a definir ϕ_K tal que $\phi_K(V) = u(V)$ para todo V vértice de K. En efecto, dados V_1, V_2, V_3 y V_4 los vértices de K, definimos el polinomio ϕ_K de grado p del siguiente modo:

$$\phi_K = \Pi_{p,K}^\beta u + \sum_{l=1}^{4}(u - \Pi_{p,K}^\beta u)(V_l)\xi_{K,l}$$

con $\xi_{K,l}$ el polinomio de grado p definido en el Corolario 4.2.1.

Por lo tanto, usando (4.1.4), (4.1.6) y iii) del Corolario 4.2.1

$$\begin{aligned}
\|u - \phi_K\|_{L^2_\beta(K)} &\leq \|u - \Pi_{p,K}^\beta u\|_{L^2_\beta(K)} + \sum_{l=1}^{4}|(u - \Pi_{p,K}^\beta u)(V_l)|C\Gamma(\beta+1)^2(p+1)^{-2-2\beta} \\
&\leq C(p+1)^{-1}|u|_{H^{1,\beta}(K)} + C\frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{1/2+\beta}|u|_{H^{1,\beta}(K)}\Gamma(\beta+1)^2(p+1)^{-2-2\beta} \\
&= C(p+1)^{-1}|u|_{H^{1,\beta}(K)} + C\frac{1}{(-1-2\beta)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)},
\end{aligned}$$

en el último paso usamos que como $\beta < -1/2$ entonces $1 < \frac{1}{-1-2\beta}$ y $(p+1)^{-1} \leq (p+1)^{-(3/2+\beta)}$. Para todo e lado de K, de (4.1.5), (4.1.6) y iv) del Corolario 4.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u - \phi_K\|_{L^2_\beta(e)} &\leq \|u - \Pi_{p,K}^\beta u\|_{L^2_\beta(e)} + \sum_{l=1}^{4}|(u - \Pi_{p,K}^\beta u)(V_l)|C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-1-\beta} \\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(K)} + C\frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)^2}(p+1)^{1/2+\beta}|u|_{H^{1,\beta}(K)}\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-1-\beta} \\
&= \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(K)} + C\frac{1}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(K)},
\end{aligned}$$

como $\beta < -1/2$ entonces $1 < \frac{1}{-1-2\beta}$ y entonces

$$\|u - \phi_K\|_{L^2_\beta(e)} \leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(K)}.$$

Donde C es una constante positiva que no depende de p, ni de β ni de u. Sea $e \in \mathcal{T}_V \cap (\omega_V)^\circ$ y sean K_1 y K_2 los elementos de $\mathcal{T}_V$ que comparten al lado e, consideramos

$$w = (\phi_{K_1} - \phi_{K_2})|_e \quad \in \mathcal{P}_p(e).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^2_\beta(e)} &\leq \|u - \phi_{K_1}\|_{L^2_\beta(e)} + \|u - \phi_{K_2}\|_{L^2_\beta(e)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}(|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} + |u|_{H^{1,\beta}(K_2)}).
\end{aligned}$$

Luego, sea $\psi \in \mathcal{Q}_p(K_1)$ una extensión de w a K_1 como en el Corolario 4.2.2 entonces,

$$\begin{aligned}
\psi|_e &= w, \\
\psi|_{\partial K_1 \setminus e} &= 0, \\
\|\psi\|_{L^2_\beta(K_1)} &\leq C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}\|w\|_{L^2_\beta(e)}.
\end{aligned}$$

Definimos $\tilde{\phi}_{K_1} = \phi_{K_1} - \psi$, notemos que esta función satisface :

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{K_1}|_e &= \phi_{K_2}|_e \\
\tilde{\phi}_{K_1}|_{\partial K_1 \setminus e} &= \phi_{K_1}|_{\partial K_1 \setminus e}
\end{aligned}$$

y tenemos las siguientes estimaciones de interpolación

$$\begin{aligned}
\|u - \tilde{\phi}_{K_1}\|_{L^2_\beta(K_1)} &\leq \|u - \phi_{K_1}\|_{L^2_\beta(K_1)} + \|\psi\|_{L^2_\beta(K_1)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} + C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}\|w\|_{L^2_\beta(e)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} \\
&+ C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}\frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}(|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} + |u|_{H^{1,\beta}(K_2)}) \\
&\leq C max\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\}\frac{1}{-1-2\beta}(p+1)^{-(3/2+\beta)}(|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} + |u|_{H^{1,\beta}(K_2)}),
\end{aligned}$$

y, para el lado e, resulta

$$\begin{aligned}
\|u-\tilde{\phi}_{K_1}\|_{L^2_\beta(e)} &\leq \|u-\phi_{K_1}\|_{L^2_\beta(e)} + \|\psi\|_{L^2_\beta(e)} \\
&= \|u-\phi_{K_1}\|_{L^2_\beta(e)} + \|w\|_{L^2_\beta(e)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} \\
&+ \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}(|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} + |u|_{H^{1,\beta}(K_2)}) \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-1/2}(|u|_{H^{1,\beta}(K_1)} + |u|_{H^{1,\beta}(K_2)}).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos modificar ϕ_{K_1} por $\tilde{\phi}_{K_1}$ y repetir este proceso en cada $e \in \mathcal{T}_V \cap (\omega_V)^\circ$.

Si $\gamma \in (\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^\circ)$ es tal que $\gamma \subset \partial\omega_V$, consideramos $K \in \mathcal{T}_V$ tal que $\gamma \in \partial K$. Sea $w = \phi_K|_\gamma$, observemos que $w = u = 0$ en $\partial\gamma$. Ahora, sea ψ como en el Corolario 4.2.2 una extensión de w a K y $\tilde{\phi}_K = \phi_K - \psi$ luego,

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_K|_\gamma &= 0, \\
\tilde{\phi}_K|_{\partial K\setminus\gamma} &= \phi_K|_{\partial K\setminus\gamma}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|u-\tilde{\phi}_K\|_{L^2_\beta(K)} &\leq \|u-\tilde{\phi}_K\|_{L^2_\beta(K)} + \|\psi\|_{L^2_\beta(K)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)} + C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}\|w\|_{L^2_\beta(\gamma)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)} + C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}\|\phi_K\|_{L^2_\beta(\gamma)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)} \\
&+ C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}(\|u-\phi_K\|_{L^2_\beta(\gamma)} + \|u\|_{L^2_\beta(\gamma)}),
\end{aligned}$$

como $\|u\|_{L^2_\beta(\gamma)} = 0$ porque $u|_\gamma = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u-\tilde{\phi}_K\|_{L^2_\beta(K)} &\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)} \\
&+ C\Gamma(\beta+1)(p+1)^{-(1+\beta)}\|u-\phi_K\|_{L^2_\beta(\gamma)} \\
&\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)} \\
&+ \frac{C}{(-1-2\beta)}(p+1)^{-(1+\beta)}(p+1)^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(K)} \\
&\leq C max\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\}\frac{1}{-1-2\beta}(p+1)^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(K)}.
\end{aligned}$$

Podemos modificar ϕ_K a $\tilde{\phi}_K$ y repetir este procedimiento para todo $\gamma \in (\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^\circ)$ con $\gamma \subset \partial\omega_V$. Así, el operador $I_V^\beta u|_K = \phi_K$ satisface todos los requerimientos. $\square$

Ahora vamos a introducir un operador global $Iu \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ el cual satisface las siguientes estimaciones de error.

Teorema 4.2.2. *Sean $-1 < \beta < -1/2$ y $u \in H_0^{1,\beta}(\mathcal{T}) \cap C^0(\bar{\Omega})$ luego, existe $Iu \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ y una constante positiva C tal que*

$$\|u - Iu\|_{L^2_\beta(K)} \leq Cmax\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\}\frac{1}{-1-2\beta}p_K^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_K})} \quad \forall\, K \in \mathcal{T}, \tag{4.2.7}$$

$$\|u - Iu\|_{L^2_\beta(e)} \leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}p_e^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_e})} \quad \forall\, e \in \mathcal{E}. \tag{4.2.8}$$

La constante C no depende de $\mathbf{p}$, ni de β ni de u.

Demostración. Una propiedad fundamental del espacio $S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ (ver, por ejemplo, [Mel05]) es que podemos identificar "nodal shape functions" que forman una partición de la unidad, es decir, para cada vértice $V \in \mathcal{N}$, podemos identificar funciones $\varphi_V \in S^1(\mathcal{T})$ tal que

$$\varphi_V|_{\Omega\setminus\omega_V} \equiv 0, \quad \sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V \equiv 1 \quad \text{y} \quad \sup_{x\in\Omega}|\varphi_V(x)| \leq 1.$$

Consideramos $I_V^\beta u \in S^{p_V-1}(\mathcal{T}_V)$ como en el Teorema 4.2.1 con $p = p_V - 1$ y definimos

$$Iu = \sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V I_V^\beta u.$$

Es claro que $Iu \in C_0^0(\bar{\Omega})$ y

$$Iu|_K = \sum_{V\in K} \varphi_V I_V^\beta u|_K,$$

como $p_V \leq p_K$, para todo K tal que $V \in K$, luego $Iu|_K \in \mathcal{Q}_{p_K}(K)$ y

$$\begin{aligned}
\|u - Iu\|_{L^2_\beta(K)} &= \|\sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V u - \sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V I_V^\beta u\|_{L^2_\beta(K)} \\
&= \|\sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V(u - I_V^\beta u)\|_{L^2_\beta(K)} \leq \sum_{V\in K}\|u - I_V^\beta u\|_{L^2_\beta(K)} \\
&\leq Cmax\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\}\frac{1}{-1-2\beta}\sum_{V\in K} p_V^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}_V)},
\end{aligned}$$

como los grados polinomiales de elementos vecinos son comparables

$$p_V^{-(3/2+\beta)} \leq Cp_K^{-(3/2+\beta)},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\|u - Iu\|_{L^2_\beta(K)} &\leq Cmax\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\}\frac{1}{-1-2\beta} p_K^{-(3/2+\beta)} \sum_{V\in K} |u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}_V)} \\ &\leq Cmax\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\}\frac{1}{-1-2\beta} p_K^{-(3/2+\beta)} |u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_K})}\end{aligned}$$

y vale la primer estimación.

Ahora, sea $e \in \mathcal{E}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|u - Iu\|_{L^2_\beta(e)} &= \|\sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V u - \sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V I_V^\beta u\|_{L^2_\beta(e)} \\ &= \|\sum_{V\in\mathcal{N}} \varphi_V (u - I_V^\beta u)\|_{L^2_\beta(e)} \\ &\leq \sum_{V\in e} \|\varphi_V (u - I_V^\beta u)\|_{L^2_\beta(e)} \leq \sum_{V\in e} \|u - I_V^\beta u\|_{L^2_\beta(e)} \\ &\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)} \sum_{V\in e} p_V^{-1/2} |u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}_V)},\end{aligned}$$

como los grados polinomiales de elementos vecinos son comparables

$$p_V^{-1/2} \leq C p_e^{-1/2},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\|u - Iu\|_{L^2_\beta(e)} &\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)} p_e^{-1/2} \sum_{V\in e} |u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}_V)} \\ &\leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)} p_e^{-1/2} |u|_{H^{1,\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_e})}\end{aligned}$$

y concluimos la demostración. $\square$

Capítulo 5

Estimaciones de error a posteriori para la versión p de FEM

En este capítulo introducimos un indicador del error a posteriori para el problema modelo de Poisson en dos dimensiones (2.2.17) y, usando las estimaciones de error del p-interpolador obtenidas en el capítulo previo para funciones en espacios de Jacobi-Sobolev con pesos, mostramos la equivalencia entre el indicador y el error en una norma con pesos adecuada. Esta equivalencia es fundamental ya que garantiza que el indicador de error a posteriori resulte ser una buena medida de como es la distribución del error en la malla donde la solución discreta ha sido calculada [AM15], y guiar así el desarrollo de métodos de refinamiento adaptativo.

5.1. Definiciones y propiedades

Sea Q, como en los capítulos previos, el cuadrado de referencia y sean $\beta > -1$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ con $\alpha_i \geq 0$ entero. Definimos la función de peso $\tilde{W}_{\beta,\alpha}$ en Q como sigue:

$$\tilde{W}_{\beta,\alpha}(x_1, x_2) = (1 - x_1^2)^{\beta-\alpha_1}(1 - x_2^2)^{\beta-\alpha_2}.$$

Observemos que $\tilde{W}_{\beta,\alpha} = W_{\beta,-\alpha}$.

Luego, el espacio de Sobolev con pesos $\tilde{H}^{k,\beta}(Q)$ se define como la clausura de las funciones $C^\infty(\bar{Q})$ con la norma

$$||u||^2_{\tilde{H}^{k,\beta}(Q)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_Q |\partial^\alpha u|^2 \tilde{W}_{\beta,\alpha}.$$

Denotamos $|u|^2_{\tilde{H}^{k,\beta}(Q)}$ la semi-norma

$$|u|_{\tilde{H}^{k,\beta}(Q)} = \sum_{|\alpha|=k} \int_Q |\partial^\alpha u|^2 \tilde{W}_{\beta,\alpha}.$$

Vamos a notar $\tilde{L}^2_\beta(Q) = \tilde{H}^{0,\beta}(Q)$.

Sean K un paralelogramo, $F : Q \to K$ una transformación afín y $u \in C^\infty(\bar{K})$ luego, $\tilde{u} = u \circ F \in C^\infty(\bar{Q})$ y podemos definir (ver, por ejemplo [Guo05])

$$\|u\|_{\tilde{H}^{k,\beta}(K)} = \|\tilde{u}\|_{\tilde{H}^{k,\beta}(Q)}.$$

Luego, el espacio de Sobolev con pesos $\tilde{H}^{k,\beta}(K)$ se define como la clausura de las funciones $C^\infty(\bar{K})$ con la norma $\tilde{H}^{k,\beta}(K)$. Vamos a notar $\tilde{L}^2_\beta(K) = \tilde{H}^{0,\beta}(K)$.

Sea $\mathcal{T}$ una partición de Ω cuyos elementos son paralelogramos. Para $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ definimos

$$\|u\|^2_{\tilde{H}^{k,\beta}(\mathcal{T})} = \sum_{K\in\mathcal{T}} \|u\|^2_{\tilde{H}^{k,\beta}(K)}$$

Por lo tanto, los espacios de Sobolev con pesos $\tilde{H}^{k,\beta}(\mathcal{T})$ y $\tilde{H}^{k,\beta}_0(\mathcal{T})$ para $\mathcal{T}$ una partición de Ω se definen de la siguiente manera:

$$\tilde{H}^{k,\beta}(\mathcal{T}) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{\tilde{H}^{k,\beta}(\mathcal{T})}}$$
$$\tilde{H}^{k,\beta}_0(\mathcal{T}) = \overline{C^\infty_0(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{\tilde{H}^{k,\beta}(\mathcal{T})}}.$$

Vamos a notar $\tilde{L}^2_\beta(\mathcal{T}) = \tilde{H}^{0,\beta}(\mathcal{T})$.

Observación 5.1.1. *Observemos que los espacios $\tilde{H}^{k,\beta}(\mathcal{T})$, $\tilde{H}^{k,\beta}_0(\mathcal{T})$ y las respectivas normas dependen de la partición $\mathcal{T}$ que estemos considerando.*

Lema 5.1.1. *Sea $0 < \beta < 1$ y $u \in H^{1+s}(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$ luego $u \in \tilde{H}^{1,\beta}(\mathcal{T})$.*

Demostración. Debido a que las funciones $C^\infty(\bar{\Omega})$ son densas en $H^{1+s}(\Omega)$, el resultado se puede obtener de de la desigualdad (1.8) de [BB01] en Q, es decir,

$$\int_Q \frac{f^2(\hat{x},\hat{y})}{\rho((\hat{x},\hat{y}),\partial Q)^{2\lambda}} \leq C\|f\|^2_{H^\lambda(Q)} \quad \forall f \in H^\lambda(Q) \quad 0 < \lambda < 1/2 \tag{5.1.1}$$

donde $\rho((\hat{x},\hat{y}),\partial Q)$ denota la distancia de $(\hat{x},\hat{y})$ al borde de Q.

En efecto, existe $\varphi_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\varphi_n \longrightarrow u$ cuando $n \to \infty$ en $H^{1+s}(\Omega)$.
Sea $K \in \mathcal{T}$ y $F_K : Q \to K$ una transformación afín, denotamos $\widehat{\varphi_n - u} = (\varphi_n - u) \circ F_K$.
Como $\beta > 0$

$$\int_Q (\widehat{\varphi_n - u})^2 (1-\hat{x}^2)^\beta (1-\hat{y}^2)^\beta \leq \int_Q (\widehat{\varphi_n - u})^2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

luego

$$\|\varphi_n - u\|_{L^2_\beta(K)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Como $0 < \beta < 1$ y $(1 - \hat{x}^2) \geq \rho((\hat{x}, \hat{y}), \partial Q)$ tenemos que

$$\int_Q (\partial_{\hat{x}}(\widehat{\varphi_n - u}))^2 (1 - \hat{x}^2)^{\beta-1}(1 - \hat{y}^2)^{\beta} \leq \int_Q \frac{(\partial_{\hat{x}}(\widehat{\varphi_n - u}))^2}{\rho((\hat{x}, \hat{y}), \partial Q)^{2\lambda}}$$

con $\lambda = \frac{1-\beta}{2}$. Ahora, como $0 < \lambda < 1/2$ por (5.1.1) obtenemos que

$$\int_Q \frac{(\partial_{\hat{x}}(\widehat{\varphi_n - u}))^2}{\rho((\hat{x}, \hat{y}), \partial Q)^{2\lambda}} \leq \|\partial_x(\widehat{\varphi_n - u})\|^2_{H^\lambda(Q)} \leq |\widehat{\varphi_n - u}|^2_{H^{1+\lambda}(Q)}$$

luego, si $\lambda \leq s$ tenemos que

$$|\widehat{\varphi_n - u}|^2_{H^{1+\lambda}(Q)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

y por lo tanto

$$\int_Q (\partial_{\hat{x}}(\widehat{\varphi_n - u}))^2 (1 - \hat{x}^2)^{\beta-1}(1 - \hat{y}^2)^{\beta} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Podemos proceder de manera análoga para las otras derivadas y concluir que $\varphi_n \longrightarrow u$ cuando $n \to \infty$ en $\tilde{H}^{1,\beta}(K)$. Así, debido a que podemos hacer esto para cualquier $K \in \mathcal{T}$, se obtiene el resultado deseado. □

5.2. Norma del error en espacios de Sobolev con pesos

Consideramos el problema modelo de Poisson en dos dimensiones (2.2.16), el Problema Variacional asociado (2.2.17) y el Problema Variacional Discreto (2.2.23).

Sea u la solución de (2.2.17) y u_N la solución de (2.2.23). Como en [Guo05], introducimos la norma del error $e = u - u_N$ para $K \in \mathcal{T}$ de la siguiente manera

$$|||e|||_K = \sup_{\|v\|_{H^{1,-\beta}(K)}=1} |a(e, v)| \leq \|e\|_{\tilde{H}^{1,\beta}(K)}$$

y la norma global

$$|||e||| = \sup_{\|v\|_{H_0^{1,-\beta}(\mathcal{T})}=1} |a(e, v)| \leq \|e\|_{\tilde{H}^{1,\beta}(\mathcal{T})}.$$

Es importante remarcar que la norma global no se puede obtener como suma de contribuciones locales.

Observación 5.2.1. *Sea $0 < \beta < 1$ y u la solución de (2.2.17), si $u \in H^{1+s}(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$ luego $e \in \tilde{H}^{1,\beta}(\mathcal{T})$ y, $|||e|||_K$ y $|||e|||$ están bien definidas.*

Observemos que como las normas de Jacobi-Sobolev con pesos dependen de la malla $\mathcal{T}$ que estemos considerando, entonces la norma del error $|||e|||$ también depende de la malla $\mathcal{T}$, consideramos entonces en una malla fija $\mathcal{T}$ la versión p de FEM.

Nuestro propósito es introducir estimadores del error a posteriori y demostrar que resultan ser equivalentes a $|||e|||$. Para llevar a cabo nuestras estimaciones necesitamos de algunos lemas previos, los cuales vamos a enunciar y demostrar en la siguiente sección.

5.3. Resultados Técnicos

El siguiente lema provee estimaciones inversas con pesos para polinomios en el dominio de referencia unidimensional. Es importante señalar que estas son generalizaciones de las estimaciones inversas en los espacios de Sobolev sin pesos [Bel78, Kro08], con el mismo óptimo orden de magnitud en el grado del polinomio interviniente.

Lema 5.3.1. *Sean $I = [-1, 1]$, $\alpha > -1$ y $\beta > -1$. Luego existen constantes positivas $C_1 = C_1(\alpha)$ y $C_2 = C_2(\beta)$ tal que para todo polinomio $P \in \mathcal{P}_p(I)$ de grado p vale*

$$\int_I P(x)^2(1-x^2)^{\alpha}dx \leq C_1 p^2 \int_I P(x)^2(1-x^2)^{\alpha+1}dx$$
$$\int_I P'(x)^2(1-x^2)^{\beta+1}dx \leq C_2(p+2\beta+1)^2 \int_I P(x)^2(1-x^2)^{\beta}dx$$

Si además suponemos $-1/2 \leq \alpha \leq -1/4$ y $-1 < \beta < \beta_0$ entonces podemos elegir C_1 independiente de α y $C_2 = C_2(\beta_0)$ independiente de β.

Demostración. La primer desigualdad, pero con constantes que podrían depender de α, la podemos encontrar, por ejemplo, en [BM97a, BFO01]. Nuestro interés es seguir con detalle esta demostración para establecer como dependen las constantes de α para el caso $-1/2 \leq \alpha \leq -1/4$, que es el caso que vamos a necesitar mas adelante.

Sea $P \in \mathcal{P}_p(I)$ luego, existen constantes $a_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$P(x) = \sum_{k=1}^{p+1} a_k J_k^{\alpha}{}'(x),$$

donde J_k^{α} son los polinomios de Jacobi definidos en (3.1.2), y por (3.1.1) podemos escribir

$$P(x) = \sum_{k=1}^{p+1} a_k \frac{k+2\alpha+1}{2} J_{k-1}^{\alpha+1}(x).$$

A partir de la relación (3.2.10) tenemos que

$$\int_I P(x)^2(1-x^2)^{\alpha+1} = \sum_{k=1}^{p+1} |a_k|^2 \frac{(k+2\alpha+1)^2}{4}\gamma_{k-1}^{\alpha+1},$$

y en virtud del Lema 3.1.5 sabemos que existe una constante positiva C, que no depende de p ni de α, tal que

$$\int_I P(x)^2(1-x^2)^{\alpha+1} \geq C \sum_{k=1}^{p+1} |a_k|^2 \frac{(k+2\alpha+1)^2}{k}.$$

Ahora, como $\alpha > -1$, $2\alpha + 1 > -1$ y en consecuencia

$$\int_I P(x)^2(1-x^2)^{\alpha+1} \geq C \sum_{k=1}^{p+1} |a_k|^2 \frac{(k-1)^2}{k} \geq C \sum_{k=1}^{p+1} |a_k|^2 (k+1/2).$$

Vamos a ver ahora que existe una constante positiva C_I, independiente de k y de α, tal que

$$\int_I \left(J_k^{\alpha}{}'(x)\right)^2 (1-x^2)^{\alpha} \leq C_I k^2. \tag{5.3.2}$$

En efecto, de la ecuación (3.1.7) resulta

$$\int_I \left(J_{k+1}^{\alpha}{}'(x)\right)^2 (1-x^2)^{\alpha} = \int_I \Big(C_1(k,\alpha) J_k^{\alpha}(x) + C_2(k,\alpha) J_{k-1}^{\alpha}{}'(x)\Big)^2 (1-x^2)^{\alpha},$$

donde

$$C_1(k,\alpha) = \frac{(2k+2\alpha+1)(k+\alpha+1)}{(k+2\alpha+1)} \quad \text{y} \quad C_2(k,\alpha) = \frac{(k+\alpha)(k+\alpha+1)}{(k+2\alpha)(k+2\alpha+1)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_I \left(J_{k+1}^{\alpha}{}'(x)\right)^2 (1-x^2)^{\alpha} &= \int_I \Big(C_1(k,\alpha) J_k^{\alpha}(x) + C_2(k,\alpha) J_{k-1}^{\alpha}{}'(x)\Big)^2 (1-x^2)^{\alpha} \\ &= \int_I \Big(C_1(k,\alpha) J_k^{\alpha}(x)\Big)^2 (1-x^2)^{\alpha} + \int_I \Big(C_2(k,\alpha) J_{k-1}^{\alpha}{}'(x)\Big)^2 (1-x^2)^{\alpha} \\ &+ 2C_1(k,\alpha) C_2(k,\alpha) \int_I J_{k-1}^{\alpha}{}'(x) J_k^{\alpha}(x) (1-x^2)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Si en (3.1.4) consideramos $\beta_1 = \beta_2 = \alpha$ entonces tenemos que para $0 \leq m < k$ vale

$$\int_I x^m J_k^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha} = 0,$$

por ende, para cualquier plinomio $R(x)$ de grado menor a k se tiene

$$\int_I R(x) J_k^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha} = 0,$$

en particular se deduce que

$$\int_I J_{k-1}^{\alpha}{}'(x) J_k^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha} = 0$$

y por ende

$$\begin{aligned} \int_I \left(J_{k+1}^{\alpha}{}'(x)\right)^2 (1-x^2)^{\alpha} &= \int_I \Big(C_1(k,\alpha) J_k^{\alpha}(x)\Big)^2 (1-x^2)^{\alpha} + \Big(C_2(k,\alpha) J_{k-1}^{\alpha}{}'(x)\Big)^2 (1-x^2)^{\alpha} \\ &= (C_1(k,\alpha))^2 \gamma_k^{\alpha} + \int_I \Big(C_2(k,\alpha) J_{k-1}^{\alpha}{}'(x)\Big)^2 (1-x^2)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Usando el Lema 3.1.5 y que $-1/2 \leq \alpha \leq -1/4$ podemos afirmar que existe una constante positiva B, independiente de α y k, tal que

$$C_1(k,\alpha)^2\gamma_k^\alpha \leq B\frac{(2k+3)^2(k+2)^2}{(k-1)^2k} \leq \tilde{C}k$$

para alguna constante positiva $\tilde{C}$, independiente de k y α. En consecuencia

$$\int_I (J_{k+1}^\alpha{}'(x))^2\,(1-x^2)^\alpha \leq \tilde{C}k + \int_I \Big(C_2(k,\alpha)J_{k-1}^\alpha{}'(x)\Big)^2(1-x^2)^\alpha. \tag{5.3.3}$$

Observemos primero que en el caso $-1/2 \leq \alpha \leq -1/4$ vale que

$$C_2(k,\alpha)^2(k-1)^2 \leq (k-\alpha)^2, \quad \forall k \geq 2. \tag{5.3.4}$$

Para $k = 0,1,2$ se puede ver sin dificultad que existe una constante positiva $\bar{C}$, independiente de α, tal que

$$\int_I (J_k^\alpha{}'(x))^2\,(1-x^2)^\alpha \leq \bar{C}. \tag{5.3.5}$$

Vamos a probar (5.3.2), con constante $C_I = \text{máx}(\tilde{C},\bar{C})$, por inducción en k.

Usando (5.3.5) y que $\bar{C} \leq C_I$ queda demostrado (5.3.2) para los casos $k = 0,1,2$. Sea $K \geq 3$ fijo, supongamos que (5.3.2) vale para todo $k < K$ (hipótesis inductiva), queremos ver que entonces vale también para el caso $k = K$.

En efecto, usando la hipótesis inductiva en (5.3.3) y (5.3.4) es claro que

$$\begin{aligned}\int_I (J_K^\alpha{}'(x))^2\,(1-x^2)^\alpha &\leq \tilde{C}(K-1) + C_IC_2(K-1,\alpha)^2(K-2)^2\\ &\leq \tilde{C}(K-1) + C_I(K-1-\alpha)^2,\end{aligned}$$

como $-1/2 \leq \alpha \leq -1/4$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_I (J_K^\alpha{}'(x))^2\,(1-x^2)^\alpha &\leq \tilde{C}(2+2\alpha)(K-1) + C_I(K-1-\alpha)^2\\ &\leq C_I(2+2\alpha)(K-1) + C_I(K-1-\alpha)^2\\ &\leq C_I(2(K-1) + 2\alpha(K-1) + (K-1)^2 - 2\alpha(K-1) + \alpha^2)\\ &\leq CK^2\end{aligned}$$

quedando también demostrado (5.3.2) para cualquier $k = K \geq 3$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_I P(x)^2(1-x^2)^\alpha &\leq C\Big(\sum_{k=0}^{p+1}|a_k|\big(\int_I (J_k^\alpha{}'(x))^2(1-x^2)^\alpha\big)^{1/2}\Big)^2\\ &\leq CC_I\Big(\sum_{k=0}^{p+1}|a_k|k\Big)^2,\end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned}\int_I P(x)^2(1-x^2)^\alpha &\le C\Big(\sum_{k=0}^{p+1} a_k^2(k+\frac{1}{2})\Big)\Big(\sum_{k=0}^{p+1}\frac{k^2}{k+\frac{1}{2}}\Big)\\ &\le Cp^2\int_I P(x)^2(1-x^2)^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

con C independiente de α.

El Teorema 3.95 de [Sch98] da una demostración de la segunda desigualdad en los casos $\beta=-1/2$ y $\beta=0$, vamos a generalizar esta demostración para cualquier $-1<\beta\le\beta_0$ con especial énfasis en ver la dependencia respecto de β de las constantes involucradas .

Sea $P\in\mathcal{P}_p(I)$, luego sabemos que existen constantes $a_k\in\mathbb{R}$ tal que

$$P(x)=\sum_{k=0}^{p} a_k J_k^\beta(x),$$

donde J_k^β son los polinomios de Jacobi definidos en (3.1.2). Por (3.2.10) obtenemos entonces que

$$\int_I P(x)^2(1-x^2)^\beta=\sum_{k=0}^{p}|a_k|^2\gamma_k^\beta.$$

Luego

$$P'(x)=\sum_{k=0}^{p} a_k J_k^{\beta}{}'(x),$$

y de (3.1.1) para $k\ge 1$, se tiene que $J_k^{\beta}{}'(x)=\frac{1}{2}(k+2\beta+1)J_{k-1}^{\beta+1}(x)$. Es claro que $J_0^{\beta}{}'=0$ y por ende

$$P'(x)=\sum_{k=1}^{p} a_k\frac{1}{2}(k+2\beta+1)J_{k-1}^{\beta+1}(x).$$

Como

$$\begin{aligned}\int_I P'(x)^2(1-x^2)^{\beta+1} &= \sum_{k=1}^{p}|a_k|^2\frac{1}{4}(k+2\beta+1)^2\gamma_{k-1}^{\beta+1}\\ &\le C(p+2\beta+1)^2\sum_{k=1}^{p}|a_k|^2\frac{\gamma_{k-1}^{\beta+1}}{\gamma_k^\beta}\gamma_k^\beta,\end{aligned}$$

por el Lema 3.1.5 podemos afirmar que existe una constante positiva C, independiente de β (pero que podría depender de β_0), tal que

$$\frac{\gamma_{k-1}^{\beta+1}}{\gamma_k^\beta}\le C\frac{k-1}{k}\le C,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_I P'(x)^2(1-x^2)^{\beta+1} &\leq C(p+2\beta+1)^2\sum_{k=1}^{p}|a_k|^2\gamma_k^\beta \\ &= C(p+2\beta+1)^2\int_I P(x)^2(1-x^2)^\beta\end{aligned}$$

como deseábamos demostrar. □

Lema 5.3.2. *Sean $1/2 \leq \beta \leq 3/4$, p un grado polinomial y $P \in \mathcal{P}_p(I)$, existe $\hat{v}(\hat{x},\hat{y})$ con $(\hat{x},\hat{y}) \in Q$ y una constante positiva C, independiente de p y β, tal que*

i) $\hat{v}(\hat{x},-1) = P(\hat{x})(1-\hat{x}^2)^\beta$, $\hat{v}|_{\partial Q\setminus\ell} = 0$ *donde* $\ell = I\times\{-1\}$*;*

ii) $\|\hat{v}\|_{L^2_{-\beta}(Q)} \leq C(p+1)^{\beta-1}\|P\|_{L^2_\beta(I)}$*;*

iii) $\|\hat{v}\|_{H^{1,-\beta}(Q)} \leq C(p+1)^\beta\|P\|_{L^2_\beta(I)}$.

Demostración. Por el Lema 4.2.1 y la Observación 3.1.1 existe $g \in \mathcal{P}_p(I)$ tal que $g(1) = 0$, $g(-1) = 1$ y existe una constante C, independiente de β y de p, tal que $\|g\|_{H^{0,-\beta}(I)} \leq C(p+1)^{-(1-\beta)}$. Definimos $\hat{v}(\hat{x},\hat{y}) = P(\hat{x})(1-\hat{x}^2)^\beta g(\hat{y})$, esta extensión satisface obviamente la condición i). Vamos a probar la condición ii)

$$\begin{aligned}\int_Q \hat{v}(\hat{x},\hat{y})^2(1-\hat{x}^2)^{-\beta}(1-\hat{y}^2)^{-\beta} &= \int_I P(\hat{x})^2(1-\hat{x}^2)^\beta d\hat{x}\int_I g(\hat{y})^2(1-\hat{y}^2)^{-\beta}d\hat{y} \\ &= \|P\|^2_{L^2_\beta(I)}\|g\|^2_{L^2_{-\beta}(I)} \\ &\leq C(p+1)^{-2(1-\beta)}\|P\|^2_{L^2_\beta(I)},\end{aligned}$$

luego,

$$\|\hat{v}\|_{L^2_{-\beta}(Q)} \leq C(p+1)^{-(1-\beta)}\|P\|_{L^2_\beta(I)}.$$

Para probar la condición iii) calculamos $\|\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\|_{L^2_{-\beta}(Q)}$ y $\|\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}}\|_{L^2_{-\beta}(Q)}$,

$$\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}(\hat{x},\hat{y}) = \Big(\frac{\partial P}{\partial\hat{x}}(\hat{x})(1-\hat{x}^2)^\beta + P(\hat{x})\beta(1-\hat{x}^2)^{\beta-1}(-2\hat{x})\Big)g(\hat{y}),$$

luego,

$$\begin{aligned}\int_Q\Big(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}(\hat{x},\hat{y})\Big)^2(1-\hat{x}^2)^{1-\beta}(1-\hat{y}^2)^{-\beta} \leq C\Big\{&\int_Q\Big(\frac{\partial P}{\partial\hat{x}}(\hat{x})\Big)^2(1-\hat{x}^2)^{\beta+1}(1-\hat{y}^2)^{-\beta}g(\hat{y}) \\ &+\int_Q P(\hat{x})^2(1-\hat{x}^2)^{\beta-1}(1-\hat{y}^2)^{-\beta}g(\hat{y})\Big\},\end{aligned}$$

como $1/2 \le \beta \le 3/4$ entonces $-1/2 \le \beta - 1 \le -1/4$ y por las estimaciones inversas del Lema 5.3.1 existe una constante positiva C, independiente de p y de β, tal que

$$\int_I (\frac{\partial P}{\partial \hat{x}}(\hat{x}))^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta+1} d\hat{x} \le C(p+1)^2 \int_I P(\hat{x})^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta} d\hat{x}$$
$$\int_I P(\hat{x})^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta-1} d\hat{x} \le C(p+1)^2 \int_I P(\hat{x})^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta} d\hat{x}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_Q (\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}(\hat{x},\hat{y}))^2 (1-\hat{x}^2)^{1-\beta}(1-\hat{y}^2)^{-\beta} &\le C(p+1)^2 \|P\|^2_{L^2_\beta(I)} \|g\|^2_{L^2_{-\beta}(I)} \\ &\le C(p+1)^2 (p+1)^{-2(1-\beta)} \|P\|^2_{L^2_\beta(I)} \\ &= C(p+1)^{2\beta} \|P\|^2_{L^2_\beta(I)}. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}(\hat{x},\hat{y}) = P(\hat{x})(1-\hat{x}^2)^{\beta} \frac{\partial g}{\partial \hat{y}}(\hat{y}),$$

luego,

$$\int_Q (\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}(\hat{x},\hat{y}))^2 (1-\hat{y}^2)^{1-\beta}(1-\hat{x}^2)^{-\beta} = \int_I P(\hat{x})^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta} d\hat{x} \int_I \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{y}}(\hat{y})\right)^2 (1-\hat{y}^2)^{1-\beta} d\hat{y},$$

por las estimaciones inversas del Lema 5.3.1

$$\int_I \frac{\partial g}{\partial \hat{y}}(\hat{y})^2 (1-\hat{y}^2)^{1-\beta} d\hat{y} \le C(p+1)^2 \int_I g(\hat{y})^2 (1-\hat{y}^2)^{-\beta} d\hat{y},$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_Q (\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}(\hat{x},\hat{y}))^2 (1-\hat{y}^2)^{1-\beta}(1-\hat{x}^2)^{-\beta} &\le C(p+1)^2 \|P\|^2_{L^2_\beta(I)} \|g\|_{L^2_{-\beta}(I)} \\ &\le C(p+1)^{2\beta} \|P\|^2_{L^2_\beta(I)}. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Combinando las estimaciones de (5.3.6) y (5.3.7) obtenemos la estimación iii) y la demostración concluye. $\square$

5.4. Indicadores de error

En primer lugar vamos a demostrar un lema que establece la validez de la ecuación de error en los espacios de Sobolev con peso bajo consideración. Si bien la demostración se obtiene usando argumentos de densidad, al igual que con los espacios de Sobolev usuales, vamos a incluirla por completitud.

Lema 5.4.1. *Sea $1/2 < \beta < 3/4$, vamos a asumir que u, la solución de (2.2.17), es tal que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$, y por ende $e \in \tilde{H}^{1,\beta}(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)$. Sea $v \in H_0^{1,-\beta}(\mathcal{T})$ luego,*

$$a(e,v) = \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(\int_K (f+\Delta u_N)v + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} \int_\ell \Big[\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big]_\ell v\Big). \tag{5.4.8}$$

Demostración. Sabemos que el resultado vale si $v \in H_0^1(\Omega)$, vamos a generalizarlo al espacio $H_0^{1,-\beta}(\mathcal{T})$. En efecto, sea $v \in H_0^{1,-\beta}(\mathcal{T})$ sabemos que existe $\phi_n \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\phi_n \to v$ en $H^{1,-\beta}(\mathcal{T})$ cuando $n \to \infty$. Luego, como el resultado 5.4.8 vale en espacios de Sobolev clásicos, tenemos

$$a(e,\phi_n) = \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(\int_K (f+\Delta u_N)\phi_n + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} \int_\ell \Big[\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big]_\ell \phi_n\Big).$$

Vamos a demostrar ahora que $a(e,\phi_n) \to a(e,v)$ cuando $n \to \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned}
|a(e,\phi_n) - a(e,v)| &= \Big|\int_\Omega \nabla e\cdot\nabla(\phi_n - v)\Big| \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big|\int_K \nabla e\cdot\nabla(\phi_n - v)\Big| \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K |e_x(\phi_n - v)_x| + \int_K |e_y(\phi_n - v)_y|.
\end{aligned}$$

Sea $K \in \mathcal{T}$, haciendo un cambio de variables, multiplicando y dividiendo por los pesos correspondientes y usando Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_K |e_x(\phi_n - v)_x| &= C(K) \int_K |\hat{e}_x||(\widehat{\phi_n - v})_x|(1-x^2)^{\frac{\beta-1}{2}}(1-y^2)^{\frac{\beta}{2}}(1-x^2)^{\frac{-\beta+1}{2}}(1-y^2)^{\frac{-\beta}{2}} \\
&\leq \Big(\int_K \hat{e}_x{}^2(1-x^2)^{\beta-1}(1-y^2)^\beta\Big)^{1/2}\Big(\int_K ((\widehat{\phi_n - v})_x)^2(1-x^2)^{-\beta+1}(1-y^2)^{-\beta}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Observemos que como $e \in \tilde{H}^{1,\beta}(\mathcal{T})$ luego $\int_K \hat{e}_x{}^2(1-x^2)^{\beta-1}(1-y^2)^\beta$ es finita. Usando que $\int_K (\widehat{\phi_n - v})_x{}^2(1-x^2)^{-\beta+1}(1-y^2)^{-\beta}$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$, luego $\int_K |e_x(\phi_n - v)_x|$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.
Análogamente se ve que $\int_K |e_y(\phi_n - v)_y|$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$ y así tenemos que $a(e,\phi_n) \to a(e,v)$ cuando $n \to \infty$.

Usando argumentos similares se ve que $\int_K (f+\Delta u_N)\phi_n \to \int_K (f+\Delta u_N)v$ cuando $n \to \infty$, y que para cada $\ell \in \mathcal{E}^\circ$ se tiene $\int_\ell \Big[\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big]_\ell \phi_n \to \int_\ell \Big[\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big]_\ell v$ cuando $n \to \infty$ y concluimos la demostración.

□

En lo que sigue vamos a asumir que $1/2 < \beta < 3/4$ y u, la solución de (2.2.17), es tal que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$, y por ende $e \in \tilde{H}^{1,\beta}(\mathcal{T}) \cap H^1_0(\Omega)$.

Sea $v \in H_0^{1,-\beta}(\mathcal{T})$ tal que $\|v\|_{H_0^{1,-\beta}(\mathcal{T})} = 1$ usando la ecuación del error (5.4.8) luego,

$$a(e,v) = \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(\int_K (f + \Delta u_N)v + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} \int_\ell \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell v \Big).$$

Sea $\epsilon > 0$ y $v_\epsilon \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\|v - v_\epsilon\|_{H_0^{1,-\beta}(\mathcal{T})} \leq \epsilon$. Por el resultado de trazas del Corolario 3.2.1 tenemos que que para $\ell \in \mathcal{E}^\circ$

$$\|v - v_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(\ell)} \leq C_\beta^{1/2} \|v - v_\epsilon\|_{H^{1,-\beta}(K)}$$

con $C_\beta = C \max\{(\gamma_0^{-\beta})^{-1}, \frac{1}{(\beta)\Gamma(-\beta+1)^2}\}$, la constante C no depende de v, ni de ϵ, ni de β. Por la Observación 3.1.1 existen constantes positivas A y B tales que

$$A \leq \Gamma(-\beta+1) \leq B, \quad \forall 1/2 < \beta < 3/4,$$

y recordemos de (3.1.6) que

$$(\gamma_0^{-\beta})^{-1} = \frac{(-2\beta+1)\Gamma(-2\beta+1)}{2^{-2\beta}\Gamma(-\beta+1)^2},$$

y por (3.1.3): $(-2\beta+1)\Gamma(-2\beta+1) = \Gamma(-2\beta+2)$. Luego, por la Observación 3.1.1, para $1/2 < \beta < 3/4$ tenemos que $(\gamma_0^{-\beta})^{-1} \leq C$, para alguna constante positiva C independiente de β. En consecuecia,

$$\|v - v_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(\ell)} \leq C\|v - v_\epsilon\|_{H^{1,-\beta}(K)} \leq C(\ell)\epsilon,$$

con C independiente de v y β.

Como $-3/4 < -\beta < -1/2$ podemos considerar Iv_ϵ como en el Teorema 4.2.2, usando (5.4.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
a(e,v) &= a(e, v - Iv_\epsilon) + a(e, Iv_\epsilon) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(\int_K (f + \Delta u_N)(v - Iv_\epsilon) + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} \int_\ell \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell (v - Iv_\epsilon) \Big) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(\int_K (f + \Delta u_N)((v - v_\epsilon) + (v_\epsilon - Iv_\epsilon)) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} \int_\ell \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell ((v - v_\epsilon) + (v_\epsilon - Iv_\epsilon)) \Big),
\end{aligned}$$

usando el Teorema de Cambio de Variables

$$\begin{aligned}
a(e,v) = \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(C(K) \int_Q (\widehat{f + \Delta u_N})((\widehat{v - v_\epsilon}) + (\widehat{v_\epsilon - Iv_\epsilon})) \\
+ \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell) \int_{\hat{e}} \left[\widehat{\frac{\partial u_N}{\partial n}}\right]_\ell ((\widehat{v - v_\epsilon}) + (\widehat{v_\epsilon - Iv_\epsilon})) \Big),
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

y la definición de las normas de Sobolev con pesos

$$
\begin{aligned}
a(e,v) \leq \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f+\Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)}(\|v-v_\epsilon\|_{H^{0,-\beta}(K)} + \|v_\epsilon - Iv_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(K)})\\
+\frac{1}{2}\sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell)\Big\|\left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell\Big\|_{L^2_\beta(\ell)}(\|v-v_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(\ell)} + \|v_\epsilon - Iv_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(\ell)})\Big).
\end{aligned}
$$

Haciendo uso nuevamente del Teorema 4.2.2 sabemos que existe una constante positiva C, independiente de p, de β y de v_ϵ, tal que

$$
\begin{aligned}
\|v_\epsilon - Iv_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(K)} &\leq Cmax\{1, \frac{1}{\Gamma(-\beta+1)}\}\frac{1}{-1+2\beta}p_K^{-(3/2-\beta)}|v_\epsilon|_{H^{1,-\beta}(\omega_K)} \quad \forall\, K\in\mathcal{T},\\
\|v_\epsilon - Iv_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(e)} &\leq \frac{C}{(-1+2\beta)\Gamma(-\beta+1)}p_e^{-1/2}|v_\epsilon|_{H^{1,-\beta}(\omega_e)} \quad \forall\, e\in\mathcal{E}.
\end{aligned}
$$

Por ora parte, en virtud de la Observación 3.1.1 sabemos que existen constantes positivas A y B tales que

$$
A \leq \Gamma(-\beta+1) \leq B, \quad \forall 1/2 < \beta < 3/4
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|v_\epsilon - Iv_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(K)} &\leq C\frac{1}{-1+2\beta}p_K^{-(3/2-\beta)}|v_\epsilon|_{H^{1,-\beta}(\omega_K)} \quad \forall\, K\in\mathcal{T},\\
\|v_\epsilon - Iv_\epsilon\|_{L^2_{-\beta}(e)} &\leq C\frac{1}{-1+2\beta}p_e^{-1/2}|v_\epsilon|_{H^{1,-\beta}(\omega_e)} \quad \forall\, e\in\mathcal{E},
\end{aligned}
$$

usando esto y (4.2.8), obtenemos

$$
\begin{aligned}
a(e,v) &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f+\Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)}(\epsilon + \frac{C}{-1+2\beta}p_K^{-(3/2-\beta)}\|v_\epsilon\|_{H^{1,-\beta}(\omega_K)})\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell)\Big\|\left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell\Big\|_{L^2_\beta(\ell)}(\epsilon + \frac{C}{-1+2\beta}p_\ell^{-1/2}\|v_\epsilon\|_{H^{1,-\beta}(\omega_\ell)})\Big)\\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f+\Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)}(\epsilon + \frac{C}{-1+2\beta}p_K^{-(3/2-\beta)}(\|v-v_\epsilon\|_{H^{1,-\beta}(\omega_K)} + \|v\|_{H^{1,-\beta}(\omega_K)}))\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell)\Big\|\left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell\Big\|_{L^2_\beta(\ell)}(\epsilon + \frac{C}{-1+2\beta}p_\ell^{-1/2}(\|v-v_\epsilon\|_{H^{1,-\beta}(\omega_\ell)} + \|v\|_{H^{1,-\beta}(\omega_\ell)}))\Big)\\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f+\Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)}(\epsilon + \frac{C}{-1+2\beta}p_K^{-(3/2-\beta)}(\epsilon + \|v\|_{H^{1,-\beta}(\omega_K)}))\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell)\Big\|\left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell\Big\|_{L^2_\beta(\ell)}(\epsilon + \frac{C}{-1+2\beta}p_\ell^{-1/2}(\epsilon + \|v\|_{H^{1,-\beta}(\omega_\ell)}))\Big),
\end{aligned}
$$

como esto vale para todo $\epsilon > 0$ podemos concluir que

$$a(e, v) \leq \frac{C}{-1+2\beta} \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)} p_K^{-(3/2-\beta)} \|v\|_{H^{1,-\beta}(\omega_K)} + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell) \Big\| \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell \Big\|_{L^2_\beta(\ell)} p_\ell^{-1/2} \|v\|_{H^{1,-\beta}(\omega_\ell)}\Big).$$

Así,

$$|||e||| \leq \frac{C}{-1+2\beta} \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)} p_K^{-(3/2-\beta)} + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell) \Big\| \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell \Big\|_{L^2_\beta(\ell)} p_\ell^{-1/2}\Big).$$

Sea ahora $f_{p_K} = \Pi^\beta_{p_K,K} f$ como en el Corolario 4.1.1, luego

$$|||e||| \leq \frac{C}{-1+2\beta} \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f_{p_K} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)} p_K^{-(3/2-\beta)} + \|f - f_{p_K}\|_{L^2_\beta(K)} p_K^{-(3/2-\beta)} + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell) \Big\| \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell \Big\|_{L^2_\beta(\ell)} p_l^{-1/2}\Big).$$

Sea $0 < \delta < 1/4$, tomamos $\beta = 1/2 + \delta$. Entonces, existe una constante positiva C, independiente de $\mathbf{p}$ y de β, tal que

$$|||e||| \leq \frac{C}{\delta} \sum_{K\in\mathcal{T}} C(K)\Big(\|f_{p_K} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)} p_K^{-(1-\delta)} + \|f - f_{p_K}\|_{L^2_\beta(K)} p_K^{-(1-\delta)} + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell) \Big\| \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell \Big\|_{L^2_\beta(\ell)} p_\ell^{-1/2}\Big). \tag{5.4.10}$$

Para cada elemento $K \in \mathcal{T}$ definimos el indicador del error local como:

$$\eta_K^2 = \eta_{B_K}^2 + \eta_{E_K}^2 \tag{5.4.11}$$

donde

$$\eta_{B_K}^2 = \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)} p_K^{-2} \quad \text{y} \quad \eta_{E_K}^2 = \frac{1}{4} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} \eta_\ell^2, \tag{5.4.12}$$

con

$$\eta_\ell^2 = \|R_\ell\|^2_{L^2_\beta(l)} p_\ell^{-1}, \quad R_\ell = \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell. \tag{5.4.13}$$

Por consiguiente, el estimador global esta dado por

$$\eta^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}} \eta_K^2. \tag{5.4.14}$$

Así, gracias a la estimación (5.4.10), tenemos el siguiente teorema que prueba la confiabilidad del estimador del error salvo términos de mayor orden.

Teorema 5.4.1. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < \frac{1}{4}$, u la solución de (2.2.17), u_N la solución de (2.2.23) y $e = u - u_N$. Sea η como en (5.4.14). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva $C(\mathcal{T})$ que no depende de $\mathbf{p}$ ni de β tal que*

$$|||e||| \leq \frac{C(\mathcal{T})}{\delta} p_{max}^{\delta} \Big\{ \eta + \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}} p_K^{-2} \|f - f_{p_K}\|^2_{L^2_\beta(K)} \Big)^{1/2} \Big\},$$

donde $p_{max} = \max\{p_K | K \in \mathcal{T}\}$.

Para garantizar la eficiencia del indicador de error, lo cual junto a la confiabilidad es una cualidad fundamental sobre el estimador de error para guiar con él esquemas de refinamiento adaptativo, nuestro próximo objetivo es probar que η_K está acotado por la norma del error con pesos salvo términos de mayor orden.

El siguiente lema nos provee una estimación por arriba para el primer término del indicador de error definido en (5.4.11).

Lema 5.4.2. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < \frac{1}{4}$, u la solución de (2.2.17), u_N la solución de(2.2.23) y $e = u - u_N$. Sea η_{B_K} como en (5.4.12). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva $C(K)$ tal que*

$$\eta_{B_K} \leq C(K)\big(|||e|||_K + \frac{1}{p_K} \|f_{p_K} - f\|_{L^2_\beta(K)}\big).$$

La constante $C(K)$ no depende de p_K ni de β.

Demostración. Notemos que,

$$\begin{aligned} \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)} &= \|\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N}\|^2_{L^2_\beta(Q)} = \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2 (1-\hat{x}^2)^\beta (1-\hat{y}^2)^\beta \\ &= \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N}) \hat{v_K} \end{aligned}$$

donde $\hat{v_K} = (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})(1-\hat{x}^2)^\beta (1-\hat{y}^2)^\beta$. Sea

$$v_K = \hat{v_K} \circ F_K^{-1} \text{ en } K \qquad \text{y} \qquad v_K = 0 \text{ en } \Omega \setminus K.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)} &= C(K) \int_K (f_{p_K} + \Delta u_N) v_K \\ &= C(K) \big(\int_K f v_K + \int_K \Delta u_N v_K + \int_K (f_{p_K} - f) v_K \big), \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Observemos que $v_K \in H_0^1(\Omega)$, en efecto

$$\int_K v_K^2 = C(K) \int_Q \hat{v_K}^2 = C(K) \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2 (1-\hat{x}^2)^{2\beta} (1-\hat{y}^2)^{2\beta} \leq C(K) \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2 < \infty,$$

y asumiendo que podemos escribir $F_K(\hat{x},\hat{y}) = B(\hat{x},\hat{y}) + c$ luego,

$$\nabla v_K = ((\nabla \hat{v_K}) \circ F_K^{-1})B^{-1}$$

y por lo tanto

$$\int_K |\nabla v_K|^2 \leq \|B^{-1}\|^2 \int_K |(\nabla \hat{v_K}) \circ F_K^{-1}|^2 \leq C(K) \int_Q |\nabla \hat{v_K}|^2.$$

Observemos que

$$\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{x}} = \Big(\frac{\partial (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})}{\partial \hat{x}}(1-\hat{x}^2)^\beta + (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})\beta(1-\hat{x}^2)^{\beta-1}(-2\hat{x})\Big)(1-\hat{y}^2)^\beta, \tag{5.4.16}$$

lo que implica

$$\int_Q (\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{x}})^2 \leq C\Big(\int_Q (\frac{\partial (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})}{\partial \hat{x}})^2(1-\hat{x}^2)^{2\beta}(1-\hat{y}^2)^{2\beta} + \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2(1-\hat{x}^2)^{2(\beta-1)}(1-\hat{y}^2)^{2\beta}\Big),$$

como $\beta > 1/2$ luego $2(\beta-1) > -1$ y $\int_Q (\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{x}})^2 < \infty$. Análogamente $\int_Q (\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{y}})^2 < \infty$ y entonces $v_K \in H_0^1(\Omega)$.

Ahora, como $v_K \in H_0^1(\Omega)$ y u es solución de (2.2.17) luego $\int_K f v_K = \int_K \nabla u \cdot \nabla v_K$ y

$$\begin{aligned}
\|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)} &= C(K)\Big(\int_K \nabla u \cdot \nabla v_K - \int_K \nabla u_N \cdot \nabla v_K + \int_K (f_{p_K} - f)v_K\Big) \\
&= C(K)\Big(\int_K \nabla e \cdot \nabla v_K + \int_Q (f_{p_K} - f)v_K\Big) \\
&= C(K)\Big(a(e, v_K) + \int_K (f_{p_K} - f)v_K\Big) \\
&= C(K)\Big(\|v_K\|_{H^{1,-\beta}(K)} a(e, \frac{v_K}{\|v_K\|_{H^{1,-\beta}(K)}}) + \int_K (f_{p_K} - f)v_K\Big) \\
&\leq C(K)(\|v_K\|_{H^{1,-\beta}(K)} |||e|||_K + \|f_{p_K} - f\|_{L^2_\beta(K)} \|v_K\|_{L^2_{-\beta}(K)}).
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|v_K\|^2_{L^2_{-\beta}(K)} = \|\hat{v_K}\|^2_{L^2_{-\beta}(Q)} &= \int_Q \hat{v_K}^2 (1-\hat{x}^2)^{-\beta}(1-\hat{y}^2)^{-\beta} \\
&= \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2 (1-\hat{x}^2)^\beta (1-\hat{y}^2)^\beta \\
&= \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)}.
\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
|v_K|^2_{H^{1,-\beta}(K)} &= |\hat{v_K}|^2_{H^{1,-\beta}(Q)} \\
&= \int_Q (\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{x}})^2(1-\hat{x}^2)^{1-\beta}(1-\hat{y}^2)^{-\beta} + \int_Q (\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{y}})^2(1-\hat{x}^2)^{-\beta}(1-\hat{y}^2)^{1-\beta}.
\end{aligned} \tag{5.4.19}$$

Por (5.4.16)

$$\begin{aligned}\int_Q \Big(\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{x}}\Big)^2 (1-\hat{x}^2)^{1-\beta}(1-\hat{y}^2)^{-\beta} &\leq C\Big(\int_Q \Big(\frac{\partial (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})}{\partial \hat{x}}\Big)^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta+1}(1-\hat{y}^2)^{\beta} \\ &\quad + \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta-1}(1-\hat{y}^2)^{\beta}\Big) \\ &= C(I + II).\end{aligned}$$

Ahora, como $1/2 \leq \beta \leq 3/4$ entonces $-1/2 \leq \beta - 1 \leq -1/4$ y por las estimaciones inversas dadas en el Lema 5.3.1 existe una constante positiva C, que no depende de β ni de p_K, tal que

$$I \leq C p_K^2 \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta}(1-\hat{y}^2)^{\beta} = C p_K^2 \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)}$$

y

$$II \leq C p_K^2 \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})^2 (1-\hat{x}^2)^{\beta}(1-\hat{y}^2)^{\beta} = C p_K^2 \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)}.$$

Por lo tanto,

$$\int_Q \Big(\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{x}}\Big)^2 (1-\hat{x}^2)^{1-\beta}(1-\hat{y}^2)^{-\beta} \leq C p_K^2 \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)}. \tag{5.4.20}$$

Análogamente

$$\int_Q \Big(\frac{\partial \hat{v_K}}{\partial \hat{y}}\Big)^2 (1-\hat{y}^2)^{1-\beta}(1-\hat{x}^2)^{-\beta} \leq C p_K^2 \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)}. \tag{5.4.21}$$

Luego, combinando (5.4.19), (5.4.20) y (5.4.21) obtenemos

$$\|v_K\|_{H^{1,-\beta}(K)} \leq C p_K \|f_{p_K} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)}, \tag{5.4.22}$$

con C independiente de p_K y de β. Por consiguiente, usando esta estimación en (5.4.17) podemos concluir que

$$\|f_{p_K} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)} \leq C(K)\big(p_K |||e|||_K + \|f_{p_K} - f\|_{L^2_\beta(K)}\big)$$

y de este modo se alcanza el resultado deseado.

□

El siguiente lema nos provee una estimación por arriba para η_ℓ.

Lema 5.4.3. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < \frac{1}{4}$, u la solución de (2.2.17), u_N la solución de (2.2.23) y $e = u - u_N$. Sea $\ell \in \mathcal{E}^\circ$, K_1 y $K_2 \in T$ tal que $\ell = K_1 \cap K_2$ y η_ℓ como en (5.4.13). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva $C(\ell)$ tal que*

$$\begin{aligned}\eta_\ell \leq C(\ell)\Big(&|||e|||_{K_1} p_\ell^\delta + \|f_{p_{K_1}} - f\|_{L^2_\beta(K_1)} p_{K_1}^{-1+\delta} + |||e|||_{K_2} p_\ell^\delta \\ &+ \|f_{p_{K_2}} - f\|_{L^2_\beta(K_2)} p_{K_2}^{-1+\delta} + |||e|||_{\mathcal{T}|_{\omega_\ell}} p_\ell^\delta\Big).\end{aligned}$$

La constante $C(\ell)$ es independiente de **p** *y β.*

Demostración. Sea $\omega_\ell = K_1 \cup K_2$ y $\hat{v}$ como en el Lema 5.3.2 con $P(\hat{x}) = \hat{R}_\ell(\hat{x}, -1)$, $p = p_\ell$. Sea $F_{K_1} : Q \to K_1$ y $F_{K_2} : Q \to K_2$ transformaciones afines tal que $F_{K_i}(I \times \{-1\}) = \ell$. Definimos v_ℓ tal que $v_\ell|_{K_i} = \hat{v} \circ F_{K_i}^{-1}$, luego existe una constante C independiente de p_ℓ y de β tal que

i) $\widehat{(v_\ell|_\ell)}(\hat{x}, -1) = \hat{R}_\ell(\hat{x})(1 - \hat{x}^2)^\beta, \quad v_\ell|_{\partial\omega_\ell \setminus \ell} = 0;$

ii) $\|v_\ell\|_{H^{0,-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})} \leq C(p_\ell + 1)^{-(1-\beta)} \|R_\ell\|_{L^2_\beta(\ell)};$

iii) $\|v_\ell\|_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})} \leq C(p_\ell + 1)^\beta \|R_\ell\|_{L^2_\beta(\ell)}.$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|R_\ell\|^2_{L^2_\beta(\ell)} &= \int_I \hat{R}_\ell(\hat{x})^2 (1 - \hat{x}^2)^\beta d\hat{x} = \int_I \hat{R}_\ell \hat{v}_\ell = C(\ell) \int_\ell R_\ell v_\ell \\
&= C(\ell)\Big(- \int_{\omega_\ell} \Delta u_N v_\ell - \int_{\omega_\ell} \nabla u_N \cdot \nabla v_\ell \Big) \\
&= C(\ell)\Big(- \int_{K_1} \Delta u_N v_\ell - \int_{K_1} \nabla u_N \cdot \nabla v_\ell - \int_{K_2} \Delta u_N v_\ell - \int_{K_2} \nabla u_N \cdot \nabla v_\ell \Big) \\
&= C(\ell)\Big(- \int_{K_1} (f_{p_{K_1}} + \Delta u_N) v_\ell - \int_{K_1} \nabla u_N \cdot \nabla v_\ell + \int_{K_1} (f_{p_{K_1}} - f) v_\ell \\
&\quad - \int_{K_2} (f_{p_{K_2}} + \Delta u_N) v_\ell - \int_{K_2} \nabla u_N \cdot \nabla v_\ell + \int_{K_2} (f_{p_{K_2}} - f) v_\ell + \int_{\omega_\ell} f v_\ell \Big)
\end{aligned}$$

Es fácil ver que $v_\ell \in H^1_0(\omega_\ell)$ luego, como u es solución de (2.2.17) tenemos que $\int_{\omega_\ell} f v_\ell = \int_{\omega_\ell} \nabla u \cdot \nabla v_\ell$ y

$$\begin{aligned}
\|R_\ell\|^2_{L^2_\beta(\ell)} &= C(\ell)\Big(- \int_{K_1} (f_{p_{K_1}} + \Delta u_N) v_\ell - \int_{K_1} \nabla u_N \cdot \nabla v_\ell + \int_{K_1} (f_{p_{K_1}} - f) v \\
&\quad - \int_{K_2} (f_{p_{K_2}} + \Delta u_N) v_\ell - \int_{K_2} \nabla u_N \cdot \nabla v_\ell + \int_{K_2} (f_{p_{K_2}} - f) v_\ell + \int_{\omega_\ell} \nabla u \cdot \nabla v_\ell \Big) \\
&= C(\ell)\Big(- \int_{K_1} (f_{p_{K_1}} + \Delta u_N) v_\ell + \int_{K_1} (f_{p_{K_1}} - f) v_\ell - \int_{K_2} (f_{p_{K_2}} + \Delta u_N) v_\ell \\
&\quad + \int_{K_2} (f_{p_{K_2}} - f) v_\ell + \int_{\omega_\ell} \nabla e \cdot \nabla v_\ell \Big),
\end{aligned} \tag{5.4.23}$$

consecuentemente

$$\begin{aligned}
\|R_\ell\|^2_{L^2_\beta(\ell)} \leq C(\ell)\Big(&\|f_{p_{K_1}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_1)} \|v_\ell\|_{L^2_{-\beta}(K_1)} + \|f_{p_{K_1}} - f\|_{L^2_\beta(K_1)} \|v_\ell\|_{L^2_{-\beta}(K_1)} \\
&+ \|f_{p_{K_2}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_2)} \|v_\ell\|_{L^2_{-\beta}(K_2)} + \|f_{p_{K_2}} - f\|_{L^2_\beta(K_2)} \|v_\ell\|_{L^2_{-\beta}(K_2)} \\
&+ \|v_\ell\|_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})} a\Big(e, \frac{v}{\|v_\ell\|_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})}}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

por ii) y iii) tenemos que

$$\begin{aligned}\|R_\ell\|_{L^2_\beta(\ell} &\le C(\ell)\Big(\|f_{p_{K_1}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_1)}(p_\ell+1)^{-1/2+\delta} + \|f_{p_{K_1}} - f\|_{L^2_\beta(K_1)}(p_\ell+1)^{-1/2+\delta}\\ &+ \|f_{p_{K_2}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_2)}(p_\ell+1)^{-1/2+\delta} + \|f_{p_{K_2}} - f\|_{L^2_\beta(K_2)}(p_\ell+1)^{-1/2+\delta}\\ &+ (p_\ell+1)^{1/2+\delta}|||e|||_{\mathcal{T}|_{\omega_\ell}}\Big),\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}p_\ell^{-1/2}\|R_\ell\|_{L^2_\beta(\ell)} \le C(\ell)\Big(&\|f_{p_{K_1}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_1)}p_\ell^{-1+\delta} + \|f_{p_{K_1}} - f\|_{L^2_\beta(K_1)}p_\ell^{-1+\delta}\\ &+ \|f_{p_{K_2}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_2)}p_\ell^{-1+\delta} + \|f_{p_{K_2}} - f\|_{L^2_\beta(K_2)}p_\ell^{-1+\delta} + |||e|||_{\mathcal{T}|_{\omega_\ell}}p_\ell^{\delta}\Big).\end{aligned}$$

Como los grados polinomiales de elementos vecinos son comprables, el Lema 5.4.2 nos permite inferir que

$$\begin{aligned}p_\ell^{-1/2}\|R_\ell\|_{L^2_\beta(\ell)} \le C(\ell)\Big(&|||e|||_{K_1}p_\ell^{\delta} + \|f_{p_{K_1}} - f\|_{L^2_\beta(K_1)}p_{K_1}^{-1+\delta} + |||e|||_{K_2}p_\ell^{\delta}\\ &+ \|f_{p_{K_2}} - f\|_{L^2_\beta(K_2)}p_{K_2}^{-1+\delta} + |||e|||_{\mathcal{T}|_{\omega_\ell}}p_\ell^{\delta}\Big).\end{aligned}$$

y la demostración concluye. □

Ahora estamos en condiciones de concluir la eficiencia de nuestro indicador de error.

Teorema 5.4.2. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < 1/4$, u la solución de (2.2.17), u_N la solución de (2.2.23), $e = u - u_N$ y η como en (5.4.14). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ con $s \ge \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva C, independiente de* **p** *y β, tal que*

$$\eta \le C p_{max}^{\delta}\Big\{|||e||| + \big(\sum_{K\in\mathcal{T}} p_K^{-2}\|f_{p_K} - f\|^2_{L^2_\beta(K)}\big)^{1/2}\Big\},$$

Demostración. Sea $K \in \mathcal{T}$, y v_K como en la demostración del Lema 5.4.2, en esta demostración mostramos que

$$\|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)} = C(K)a(e, v_K) + C(K)\int_K (f_{p_K} - f)v_K,$$

luego,

$$\eta^2_{B_K} = a(e, (p_K+1)^{-2}C(K)v_K) + (p_K+1)^{-2}C(K)\int_K (f_{p_K} - f)v_K,$$

sea $v_{\mathcal{T}} = \sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}C(K)v_K$, de (5.4.18) y (5.4.22) se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}}\eta_{B_K}^2 &= a(e,v_{\mathcal{T}}) + \sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}C(K)\int_K (f_{p_K}-f)v_K \\
&= \|v_{\mathcal{T}}\|_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T})} a(e,\frac{v_{\mathcal{T}}}{\|v_{\mathcal{T}}\|_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T})}}) + \sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}C(K)\int_K (f_{p_K}-f)v_K \\
&\leq |||e|||(\sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-4}\|v_K\|^2_{H^{1,-\beta}(K)})^{1/2} \\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}\|f_{p_K}-f\|_{L^2_\beta(K)}\|v_K\|_{L^2_{-\beta}(K)} \\
&\leq C\Big(|||e|||(\sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}\|f_{p_K}+\Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)})^{1/2} \\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}\|f_{p_K}-f\|_{L^2_\beta(K)}\|f_{p_K}+\Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)}\Big) \\
&\leq C\Big(|||e||| + (\sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}\|f_{p_K}-f\|^2_{L^2_\beta(K)})^{1/2}\Big)(\sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}\|f_{p_K}+\Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)})^{1/2}\Big),
\end{aligned}$$

luego,

$$(\sum_{K\in\mathcal{T}}\eta_{B_K}^2)^{1/2} \leq C\Big(|||e||| + (\sum_{K\in\mathcal{T}}(p_K+1)^{-2}\|f_{p_K}+\Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)})^{1/2}\Big). \tag{5.4.24}$$

Sea $\ell \in \mathcal{E}^\circ$, y v_ℓ como en la demostración del Lema 5.4.3, sean K_1^ℓ y K_2^ℓ los elementos que comparten al lado ℓ entonces de (5.4.23) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|R_\ell\|^2_{L^2_\beta(\ell)} &= a(e,C(\ell)v_\ell) + C(\ell)\Big(-\int_{K_1^\ell}(f_{p_{K_1^\ell}}+\Delta u_N)v_\ell + \int_{K_1^\ell}(f_{p_{K_1^\ell}}-f)v_\ell \\
&\quad - \int_{K_2^\ell}(f_{p_{K_2^\ell}}+\Delta u_N)v_\ell + \int_{K_2^\ell}(f_{p_{K_2^\ell}}-f)v_\ell\Big).
\end{aligned}$$

Sea $v_{\mathcal{T}} = \sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ} C(\ell)p_\ell^{-1}v_\ell$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2 &= \|v_{\mathcal{T}}\|_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T})} a\Big(e,\frac{v_{\mathcal{T}}}{\|v_{\mathcal{T}}\|_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T})}}\Big) \\
&\quad + \sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ} C(\ell)\Big(-\int_{K_1^\ell}(f_{p_{K_1^\ell}}+\Delta u_N)v_\ell p_\ell^{-1} + \int_{K_1^\ell}(f_{p_{K_1^\ell}}-f)v_\ell p_\ell^{-1} \\
&\quad - \int_{K_2^\ell}(f_{p_{K_2^\ell}}+\Delta u_N)v_\ell p_\ell^{-1} + \int_{K_2^\ell}(f_{p_{K_2^\ell}}-f)v_\ell p_\ell^{-1}\Big).
\end{aligned}$$

Observemos que por la definición de la norma de Jacobi-Sobolev con pesos para $\mathcal{T}$ (3.2.19) tenemos

$$\|v_{\mathcal{T}}\|^2_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T})} = \sum_{K\in\mathcal{T}}\|v_{\mathcal{T}}\|^2_{H^{1,-\beta}(K)},$$

y mirando el soporte de las funciones v_ℓ tenemos

$$\|v_\mathcal{T}\|^2_{H^{1,-\beta}(K)} \leq \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell)^2 p_\ell^{-2}\|v_\ell\|^2_{H^{1,-\beta}(K)} \leq \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell)^2 p_\ell^{-2}\|v_\ell\|^2_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})},$$

y, usando que cada $\ell \in \mathcal{E}^\circ$ forma parte del borde de dos elementos de $\mathcal{T}$, entonces existe C que no depende de $\mathcal{T}$ tal que

$$\|v_\mathcal{T}\|^2_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T})} \leq C\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ} C(\ell)^2 p_\ell^{-2}\|v_\ell\|^2_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2 \leq C|||e|||\big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ} C(\ell)^2 p_\ell^{-2}\|v_\ell\|^2_{H^{1,-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})}\big)^{1/2} + \sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ} C(\ell)\Big(\|f_{p_{K_1^\ell}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_1^\ell)} \\ + \|f_{p_{K_1^\ell}} - f\|_{L^2_\beta(K_1^\ell)} + \|f_{p_{K_2^\ell}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_2^\ell)} + \|f_{p_{K_2^\ell}} - f\|_{L^2_\beta(K_2^\ell)}\Big)\|v_\ell\|_{L^2_{-\beta}(\mathcal{T}|_{\omega_\ell})} p_\ell^{-1}.\end{aligned}$$

De las estimaciones para v_ℓ, dadas en ii) y iii) en la demostración del Lema 5.4.3, se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2 &\leq C|||e|||\big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ} p_\ell^{-1} p_\ell^{2\delta}\|R_\ell\|_{L^2_\beta(\ell)}\big)^{1/2} + \sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\Big(\|f_{p_{K_1^\ell}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_1^\ell)} \\ &\quad + \|f_{p_{K_1^\ell}} - f\|_{L^2_\beta(K_1^\ell)} + \|f_{p_{K_2^\ell}} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K_2^\ell)} + \|f_{p_{K_2^\ell}} - f\|_{L^2_\beta(K_2^\ell)}\Big)\|R_\ell\|_{L^2_\beta(\ell)} p_\ell^{-1/2} p_\ell^{-1+\delta} \\ &\leq C p_{max}^\delta |||e|||\big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2\big)^{1/2} + C\Big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ} p_\ell^{2(-1+\delta)}\big(\|f_{p_{K_1^\ell}} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K_1^\ell)} + \|f_{p_{K_1^\ell}} - f\|^2_{L^2_\beta(K_1^\ell)} \\ &\quad + \|f_{p_{K_2^\ell}} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K_2^\ell)} + \|f_{p_{K_2^\ell}} - f\|^2_{L^2_\beta(K_2^\ell)}\big)\Big)^{1/2}\big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2\big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Como los grados polinomiales de elementos vecinos son comprables tenemos que

$$\big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2\big)^{1/2} \leq C p_{max}^\delta |||e||| + C\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}} p_K^{2\delta}\eta_K^2 + p_K^{2(-1+\delta)}\|f_{p_K} - f\|^2_{L^2_\beta(K)}\Big)^{1/2}.$$

Luego,

$$\big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2\big)^{1/2} \leq C p_{max}^\delta\Big\{|||e||| + \big(\sum_{K\in\mathcal{T}}\eta_K^2\big)^{1/2} + \big(\sum_{K\in\mathcal{T}} p_K^{-2}\|f_{p_K} - f\|^2_{L^2_\beta(K)}\big)^{1/2}\Big\},$$

y por (5.4.24)

$$\big(\sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2\big)^{1/2} \leq C p_{max}^\delta\Big\{|||e||| + \big(\sum_{K\in\mathcal{T}} p_K^{-2}\|f_{p_K} - f\|^2_{L^2_\beta(K)}\big)^{1/2}\Big\}.$$

Ahora estamos en condiciones de computar η,

$$\begin{aligned}\eta^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}}(\eta_{B_K}^2 + \eta_{E_K}^2) \leq C\big(\sum_{K\in\mathcal{T}}\eta_{B_K}^2 + \sum_{\ell\in\mathcal{E}^\circ}\eta_\ell^2\big) \\ &\leq C p_{max}^\delta\Big\{|||e||| + \big(\sum_{K\in\mathcal{T}} p_K^{-2}\|f_{p_K} - f\|^2_{L^2_\beta(K)}\big)^{1/2}\Big\}^2,\end{aligned}$$

como queríamos. □

Terminamos este capítulo resaltando que, hasta donde se sabe, la estimaciones quasi-optimas obtenidas en el Teorema 5.4.1 y el Teorema 5.4.2 constituyen uno de los mejores resultados que se pueden obtener para estimaciones de error de tipo residual para el caso bidimensional.

Capítulo 6

Generalización a la versión *hp* de FEM

En este capítulo obtenemos estimaciones de error a posteriori para la versión hp de FEM para nuestro problema modelo (2.2.17). Por otra parte, mostramos como se puede construir una base del espacio $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$.

6.1. Estimaciones de error a posteriori para la versión *hp* de FEM

Nuestro propósito es presentar resultados análogos a los obtenidos en el capítulo anterior para la versión p de FEM pero para la versión hp de FEM. Para lograr esto es fundamental analizar como dependen de la malla las constantes involucradas en el Teorema 5.4.1 y en el Teorema 5.4.2, y por ende necesitamos mirar la dependencia respecto de la malla de las constantes involucradas en los resultados previos a estos teoremas, i.e., los teoremas de interpolación y de trazas.

En lo que sigue vamos a considerar Ω un dominio abierto y poligonal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{T}$ una partición admisible de Ω en paralelogramos. Vamos a asumir la hipótesis de regularidad de la malla (2.2.18), i.e., existe una constante γ positiva tal que

$$h_K \leq \gamma h_{K'} \quad \forall K, K' \in \mathcal{T} \text{ con } K \cap K' \neq \emptyset.$$

Para cada $K \in \mathcal{T}$ elegimos un grado polinomial (máximo) y notamos $\mathbf{p} = (p_K)$ al vector de grados polinomiales. Vamos a asumir (2.2.21) ,i.e., existe una constante positiva C tal que

$$p_K \leq C p_{K'} \quad K, K' \in \mathcal{T} \text{ con } K \cap K' \neq \emptyset.$$

Empezamos la sección mirando los teoremas de trazas y de interpolación obtenidos en los capítulos 3 y 4. Un seguimiento de la demostración nos permite fácilmente concluir que, para estos teoremas, las constantes involucradas resultan ser independientes de la malla y por lo tanto podemos afirmar los siguientes resultados:

- **Teorema de Trazas:** Sean K un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, γ un lado de K y $-1 < \beta < 0$. Existe una función $T : H^{1,\beta}(K) \to L^2_\beta(\gamma)$ única, lineal, continua, tal que si $u \in C^\infty(\bar{K})$ vale $T(u) = u$ y
$$\|T(u)\|_{L^2_\beta(\gamma)} \leq C_\beta^{1/2}\|u\|_{H^{1,\beta}(K)}, \tag{6.1.1}$$
donde $C_\beta = C\,\text{máx}\{(\gamma_0^\beta)^{-1}, \frac{1}{(-\beta)\Gamma(\beta+1)^2}\}$, la constante C no depende de u, ni de β, ni de K.

- **hp Interpolador con pesos:** Sea $-1 < \beta < -1/2$ y $u \in H_0^{1,\beta}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ luego, existe $Iu \in S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ y una constante positiva C tal que
$$\|u - Iu\|_{L^2_\beta(K)} \leq C\,\text{máx}\{1, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\}\frac{1}{-1-2\beta}p_K^{-(3/2+\beta)}|u|_{H^{1,\beta}(\omega_K)} \quad \forall\, K \in \mathcal{T}, \tag{6.1.2}$$
$$\|u - Iu\|_{L^2_\beta(e)} \leq \frac{C}{(-1-2\beta)\Gamma(\beta+1)}p_e^{-1/2}|u|_{H^{1,\beta}(\omega_e)} \quad \forall\, e \in \mathcal{E}. \tag{6.1.3}$$
La constante C no depende de $\mathbf{p}$, ni de β, ni de u, ni de K, ni de $\mathcal{T}$.

Ahora, mirando en el capítulo anterior la ecuación del error
$$\begin{aligned} a(e,v) = &\sum_{K\in\mathcal{T}}\Big(\int_K (f + \Delta u_N)((v - v_\epsilon) + (v_\epsilon - Iv_\epsilon)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ}\int_\ell \left[\frac{\partial u_N}{\partial n}\right]_\ell ((v - v_\epsilon) + (v_\epsilon - Iv_\epsilon))\Big), \end{aligned}$$
usando el Teorema de Cambio de Variables podemos escribir (5.4.9) :
$$\begin{aligned} a(e,v) = &\sum_{K\in\mathcal{T}}\Big(C(K)\int_Q \widehat{(f + \Delta u_N)}(\widehat{(v - v_\epsilon)} + \widehat{(v_\epsilon - Iv_\epsilon)}) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} C(\ell)\int_{\hat{e}} \left[\widehat{\frac{\partial u_N}{\partial n}}\right]_\ell (\widehat{(v - v_\epsilon)} + \widehat{(v_\epsilon - Iv_\epsilon)})\Big), \end{aligned}$$
las constantes $C(K)$ y $C(l)$ vienen de realizar los cambios de variables correspondientes, en efecto, consideramos una transformación afín $F_K : Q \to K$ luego
$$(x,y)^t = F_K(\hat{x},\hat{y}) = B(\hat{x},\hat{y})^t + C,$$
entonces el Jacobiano del cambio de variables es $|det(B)|$ y es sabido que $|det(B)| = |K|$, y como estamos suponiendo que la malla cumple la condición de regularidad (2.2.18) entonces $|K| \sim h_K^2$. Análogamente se puede ver que $C(l) = |l| = h_\ell$.

Siguiendo las cuentas que se encuentran en el capítulo previo a continuación de la ecuación del error (5.4.9), se obtiene el siguiente resultado:

Sea $0 < \delta < 1/4$, tomamos $\beta = 1/2 + \delta$, luego existe una constante positiva C independiente de $\mathbf{p}$, de $\mathcal{T}$ y de β tal que

$$|||e||| \leq \frac{C}{\delta} \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(\|f_{p_K} + \Delta u_N\|_{L^2_\beta(K)} h_K^2 p_K^{-(1-\delta)} + \|f - f_{p_K}\|_{L^2_\beta(K)} h_K^2 p_K^{-(1-\delta)} \\ + \frac{1}{2} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} h_\ell \Big\| \left[\frac{\partial u_N}{\partial n} \right]_\ell \Big\|_{L^2_\beta(\ell)} p_\ell^{-1/2} \Big).$$

Luego, para cada elemento $K \in \mathcal{T}$ el indicador del error local se define como:

$$\eta_K^2 = \eta_{B_K}^2 + \eta_{E_K}^2 \tag{6.1.4}$$

donde

$$\eta_{B_K}^2 = \frac{h_K^4}{p_K^2} \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)} \quad \text{y} \quad \eta_{E_K}^2 = \frac{1}{4} \sum_{\ell\subset\partial K\cap\mathcal{E}^\circ} \eta_\ell^2, \tag{6.1.5}$$

con

$$\eta_\ell^2 = \frac{h_\ell^2}{p_\ell} \|R_\ell\|^2_{L^2_\beta(l)}, \quad R_\ell = \left[\frac{\partial u_N}{\partial n} \right]_\ell. \tag{6.1.6}$$

Por consiguiente, el estimador global esta dado por

$$\eta^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}} \eta_K^2. \tag{6.1.7}$$

Así, tenemos el siguiente teorema que prueba la confiabilidad del estimador del error salvo términos de mayor orden.

Teorema 6.1.1. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Sean u la solución de (2.2.17), u_N la solución de (2.2.23) y $e = u - u_N$. Sea η como en (6.1.7). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva C que no depende de* $\mathbf{p}$*, ni de $\mathcal{T}$ ni de β tal que*

$$|||e||| \leq \frac{C}{\delta} \text{máx}\{p_{max}^\delta, 1\} \Big\{ \eta + \Big(\sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{h_K^4}{p_K^2} \|f - f_{p_K}\|^2_{L^2_\beta(K)} \Big)^{1/2} \Big\},$$

donde $p_{max} = \text{máx}\{p_K | K \in \mathcal{T}\}$.

En lo que sigue vamos a generalizar a la versión hp de FEM los teoremas del capítulo 5 que proveen la eficiencia del estimador.

Mirando la demostración del Teorema 5.4.2 , la ecuación (5.4.15) muestra que

$$\begin{aligned} \|f_{p_K} + \Delta u_N\|^2_{L^2_\beta(K)} &= \|\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N}\|^2_{L^2_\beta(Q)} \\ &= \int_Q (\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N})(1 - \hat{x}^2)^\beta (1 - \hat{y}^2)^\beta \\ &= C(K) \int_K (f_{p_K} + \Delta u_N) v_K \end{aligned}$$

donde $\widehat{f_{p_K} + \Delta u_N} = (f_{p_K} + \Delta u_N) \circ F_K$, con $F_K : Q \to K$ una transformación afín. La constante $C(K)$ viene de realizar un cambio de variables en el último paso, en efecto, realizamos el siguiente cambio de variables,

$$(x, y)^t = F_K(\hat{x}, \hat{y}) = B(\hat{x}, \hat{y})^t + C,$$

luego, el Jacobiano de la transformación afín es $|det(B^{-1})| = |det(B)|^{-1} = |K|^{-1}$, como estamos asumiendo que la malla es regular (2.2.18), entonces $C(K) \sim h_K^{-2}$. Siguiendo todas las cuentas que le siguen a esta ecuación podemos arribar al siguiente resultado.

Teorema 6.1.2. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < \frac{1}{4}$, u la solución de (2.2.17), u_N la solución de(2.2.23) y $e = u - u_N$. Sea η_{B_K} como en (6.1.5). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva C tal que*

$$\eta_{B_K} \leq C(|||e|||_K + \frac{h_K^2}{p_K} \|f_{p_K} - f\|_{L^2_\beta(K)}).$$

La constante C no depende de p_K, ni de K, ni de β.

Ahora vamos a acotar la parte del salto del estimador por el error. Análogamente, hay que mirar como dependen las contantes $C(\ell)$ del lado ℓ cuando hacemos un cambio de variables y usar la hipótesis de regularidad de la malla (2.2.18). Luego, es sencillo ver que podemos alcanzar el siguiente resultado:

Teorema 6.1.3. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < \frac{1}{4}$, u la solución de (2.2.17), u_N la solución de (2.2.23) y $e = u - u_N$. Sea $\ell \in \mathcal{E}^\circ$, K_1 y $K_2 \in \mathcal{T}$ tal que $\ell = K_1 \cap K_2$ y η_ℓ como en (6.1.6). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva C tal que*

$$\begin{aligned}\eta_\ell \leq C\Big(&|||e|||_{K_1} p_\ell^\delta + \|f_{p_{K_1}} - f\|_{L^2_\beta(K_1)} h_{K_1}^2 p_{K_1}^{-1+\delta} + |||e|||_{K_2} p_\ell^\delta \\ &+ \|f_{p_{K_2}} - f\|_{L^2_\beta(K_2)} h_{K_2}^2 p_{K_2}^{-1+\delta} + |||e|||_{\mathcal{T}|_{\omega_\ell}} p_\ell^\delta\Big).\end{aligned}$$

La constante C es independiente de $\mathbf{p}$*, de ℓ y de β.*

Para obtener la eficiencia de nuestro estimador global, vamos a seguir las ideas de la demostración del Teorema 5.4.2 considerando el nuevo estimador η como en (6.1.7) y mirando como dependen las constantes de K y de ℓ como hicimos en los dos teoremas previos al realizar los reescales clásicos que se tienen al pasar del elemento de referencia a un elemento genérico, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.1.4. *Sea $\beta = 1/2 + \delta$ con $0 < \delta < 1/4$. Consideramos una malla $\mathcal{T}$ que cumpla con la condición de regularidad (2.2.18), sean u la solución de (2.2.17), u_N la solución de (2.2.23), $e = u - u_N$ y η como en (6.1.7). Vamos a asumir que $u \in H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $s \geq \frac{1-\beta}{2}$. Luego, existe una constante positiva C independiente de* $\mathbf{p}$*, $\mathcal{T}$ y β tal que*

$$\eta \leq C \operatorname{máx}\{p_{max}^\delta, 1\}\Big\{|||e||| + (\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^4 p_K^{-2} \|f_{p_K} - f\|^2_{L^2_\beta(K)})^{1/2}\Big\}.$$

Concluimos entonces que el estimador propuesto resulta tanto confiable como eficiente.

6.2. Construcción de $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$

Al aplicar la versión hp del método de elementos finitos una cuestión que surge naturalmente es como construir adecuadamente las bases, sobretodo teniendo en cuenta que el grado del polinomio aproximante podria variar al pasar de un elemento a otro. En esta sección mostraremos una posible manera de llevar a cabo esta construcción [Sch98].

6.2.1. Espacios de polinomios en $Q = (-1, 1)^2$

Recordemos que habíamos notado $\mathcal{P}_p(Q)$ al espacio de polinomios de grado total p y $Q_p(Q)$ al espacio de polinomios de grado a lo sumo p en cada variable en $Q = (-1, 1)^2$, con

$$dim(\mathcal{P}_p(Q)) = (p+1)(p+2)/2, \quad dim(Q_p(Q)) = (p+1)^2.$$

Nos va a ser útil darle un nombre a cada lado del elemento de referencia Q, entonces notamos

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_1 &= \{1\} \times [-1, 1] \\ \hat{\ell}_2 &= [-1, 1] \times \{1\} \\ \hat{\ell}_3 &= \{-1\} \times [-1, 1] \\ \hat{\ell}_4 &= [-1, 1] \times \{-1\} \end{aligned}$$

como muestra la Figura 6.1

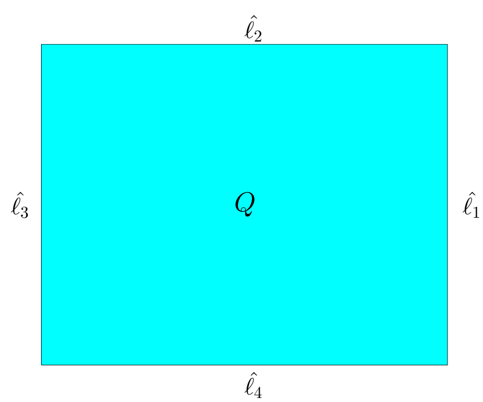

Figura 6.1: Dominio de referencia

Para poder definir una base de $Q_p(Q)$ nos va a ser útil dividir los grados de libertad en externos e internos (ver sección 4.4.2 en [Sch98]). Luego, notamos $\mathcal{E}^p(Q)$ al espacio que se define de la siguiente manera

$$\mathcal{E}^p(Q) = \mathcal{P}_1(I) \otimes \mathcal{P}_p(I) + \mathcal{P}_p(I) \otimes \mathcal{P}_1(I), \quad I = (-1, 1),$$

donde $\otimes$ indica el producto tensorial; a este espacio se lo suele llamar espacio de grados de libertad externos de grado p.

A continuación vamos a definir una base de $\mathcal{E}^p(Q)$ que va a consistir en dos conjuntos de funciones, unas son las llamadas "funciones de forma nodales"

$$\begin{aligned} \hat{N}^{0,1}(\hat{x},\hat{y}) &= (1-\hat{x})(1-\hat{y})/2 \\ \hat{N}^{0,2}(\hat{x},\hat{y}) &= (1+\hat{x})(1-\hat{y})/2 \\ \hat{N}^{0,3}(\hat{x},\hat{y}) &= (1+\hat{x})(1+\hat{y})/2 \\ \hat{N}^{0,4}(\hat{x},\hat{y}) &= (1-\hat{x})(1+\hat{y})/2, \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

y las llamadas "funciones de forma de lados"

$$\begin{aligned} \hat{N}_i^{1,1}(\hat{x},\hat{y}) &= \frac{1}{2}(1-\hat{x})\phi_i(\hat{y}), \quad i = 1,\dots,p-1, \\ \hat{N}_i^{1,2}(\hat{x},\hat{y}) &= \frac{1}{2}(1+\hat{x})\phi_i(\hat{y}), \quad i = 1,\dots,p-1, \\ \hat{N}_i^{1,3}(\hat{x},\hat{y}) &= \frac{(-1)^i}{2}(1-\hat{y})\phi_i(\hat{x}), \quad i = 1,\dots,p-1, \\ \hat{N}_i^{1,4}(\hat{x},\hat{y}) &= \frac{(-1)^i}{2}(1-\hat{y})\phi_i(\hat{x}), \quad i = 1,\dots,p-1, \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

donde $\phi_i(\xi)$ son las antiderivadas de los polinomios de Legendre L_i normalizadas, i.e.,

$$\phi_i(\xi) = \sqrt{\frac{2i+1}{2}} \int_{-1}^{\xi} L_i(t)dt, \quad i = 1,2,\dots.$$

El término $(-1)^i$ en (6.2.9) es necesario para asegurar la invarianza de las funciones $\hat{N}_i^{1,j}$ con respecto a una rotación de coordenadas en Q. Las funciones $\hat{N}^{1,j}$ corresponde al lado $\hat{\ell}_j$ ya que se anula en el resto de los lados.

Definimos la función burbuja en Q

$$b_Q(\hat{x},\hat{y}) = (1-\hat{x}^2)(1-\hat{y}^2). \tag{6.2.10}$$

Ahora podemos definir

$$\mathcal{J}^p(Q) := \{b_Q v | v \in \mathcal{Q}_{p-2}(Q)\}.$$

Luego, el espacio producto tensorial es

$$\mathcal{Q}_p(Q) = \mathcal{E}_p(Q) \oplus \mathcal{J}^p(Q).$$

Vamos a definir un conjunto de funciones llamadas "funciones de forma internas":

$$\hat{N}_{i,j}^2(\hat{x},\hat{y}) = b_Q(\hat{x},\hat{y}) L_i(\hat{x}) L_j(\hat{y}). \tag{6.2.11}$$

Una base para $\mathcal{Q}_p(Q)$ consiste de las "funciones de forma externas" definidas en (6.2.8) y (6.2.9), más las "funciones de forma internas" dadas en (6.2.11), para $0 \le i, j \le p-2$.

En muchas casos en la práctica es habitual hacer uso de otro espacio de polinomios llamado "espacio truncado"(ver [MW01]), el cual notamos como $\mathcal{A}_p(Q)$ y definimos de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_p(Q) = \mathcal{E}_p(Q) \oplus \mathcal{I}^p(Q),$$

donde

$$\mathcal{I}^p(Q) := \{b_Q v | v \in \mathcal{P}_{p-4}(Q)\}.$$

Una base para $\mathcal{A}_p(Q)$ consiste de las "funciones de forma externas" definidas en (6.2.8) y (6.2.9) más las "funciones de forma internas" definidas en (6.2.11), para $0 \le i + j \le p-4$.

6.2.2. Construcción de una base para $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$

El objetivo ahora es guiar a la construcción de una base del espacio $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$, logramos esto imponiendo condiciones para garantizar la continuidad de las funciones que son polinomios en cada elemento. Con este objetivo en mente, es útil asociar a cada lado $\ell \in \mathcal{E}^{\circ}$ un grado polinomial que lo vamos a notar p_ℓ. Sean K y K' los dos elementos de $\mathcal{T}$ que comparten el lado ℓ, luego vamos a requerir que

$$p_\ell = min\{p_K, p_{K'}\}.$$

Sean $K \in \mathcal{T}$ un elemento cualquiera de la malla y $F_K : Q \to K$ una transformación afín, notamos $\ell_i = F_K(\hat{\ell}_i)$ y $\mathcal{E}_K = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$.

Nuestro objetivo entonces es buscar una base del espacio de polinomios de grado p_K en K tal que restringidos a ℓ_i tienen grado p_{ℓ_i} para cada $i = 1, \ldots, 4$. Para ello, basta considerar la base del espacio $\mathcal{Q}_p(Q)$, definida anteriormente, y componer las funciones de la base con la transformación afín F_K^{-1}. Además, queremos restringir la cantidad de funciones $\hat{N}_i^{1,j}$ asociadas a cada lado $\hat{\ell}_j$, para lograr esto simplemente tomamos para cada j las funciones $\hat{N}_i^{1,j}$ correspondientes a $i = 1, \ldots, p_{\ell_j} - 1$, de esta manera nos aseguramos que las funciones de la base restringidas al lado ℓ_j sean un polinomio de grado a lo sumo p_{ℓ_j}.

Como es habitual, una base para $S^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$ consiste en la elección de funciones que restringidas a cada elemento K (consideramos las que tienen soporte en K) coinciden con la base del espacio de polinomios de grado a lo sumo p_K descripto anteriormente.

Por último, observemos que si buscamos una base para $S_0^{\mathbf{p}}(\mathcal{T})$, las funciones de la base se tienen que anular en el borde de Ω, para esto, cuando elegimos las funciones nodales tenemos que elegir sólo las bases asociadas a los nodos internos, e imponer en cada lado ℓ del borde que $p_\ell = 0$.

Capítulo 7

Conclusiones y líneas de investigación a futuro

En esta tesis hemos presentado diversos resultados novedosos concernientes a la teoría de interpolación en espacios de Jacobi-Sobolev con pesos. Estos resultados nos han permitido establecer estimaciones a posteriori del error en una norma con pesos adecuada para la p-aproximación por elementos finitos de la solución de un problema modelo bidmensional. Las estimaciones a posteriori obtenidas en esta tesis son, en comparación con las presentes hasta el momento en la bibliografía para el problema modelo por nosotros considerado, las mejores estimaciones obtenidas al trabajar con estimadores de error de tipo residual y han dado lugar al trabajo [AM15].

Es claro que, los estimadores de error a posteriori propuestos en esta tesis para la versión p de FEM en una malla de paralelogramos (ver (5.4.14), son cantidades computables que dependen sólo de la solución y de los datos. Por los resultados obtenidos en los Teoremas 5.4.1 y 5.4.2 podemos garantizar que estos estimadores nos proveen de información confiable acerca de la calidad de la aproximación y, al ser estos estimadores sumas de contribuciones locales, nos proveen también una herramienta eficaz para decidir en que elementos de la malla nos conviene incrementar el grado polinomial (marcado de los elementos a refinar). Este tipo de estimaciones son la base de los algoritmos adaptativos que son un proceso de la forma

$$Resolver \longrightarrow Estimar \longrightarrow Marcar \longrightarrow Refinar,$$

donde, para la versión p de FEM, refinar significa incrementar el grado polinomial.

Actualmente nos encontramos en la etapa de implementación de un algoritmo de estas características en una malla de paralelogramos. Es sabido que (ver [Sch98]) la matriz de rigidez del sistema lineal a resolver está mal condicionada cuando p es grande, por lo que es recomendable usar métodos iterativos para resolver este tipo de sistemas (por ejemplo gmres en MATLAB que en particular nos da la información del orden del error cometido). Otra cuestión a tener en cuenta al momento de refinar es la conformidad p (2.2.21), para lograr esto se pueden usar por ejemplo ideas similares a las que se encuentran en la Tesis de Doctorado de Mario Scheble [Sch10] donde se muestra un algoritmo que garantiza la conformidad p para el caso de trabajar con mallas de triángulos.

Posteriormente, esperamos generalizar la implementación para la versión hp de FEM usando los estimadores (6.1.7) y teniendo en cuenta que ahora refinar puede ser, en cada elemento marcado, achicar el tamaño del paralelogramo (respetando las hipótesis de h-conformidad de la malla 2.2.18) y/o incrementar el grado polinomial (teniendo en cuenta la p-conformidad 2.2.21). En [MW01, APRS11, APRS12] los autores proponen un algoritmo adaptativo usando predictores del error para poder decidir cuál de estas dos opciones de refinamiento elegimos en cada paso.

Si bien en la Tesis de Licenciatura ([Mor10]), usando los estimadores de error propuestos por Melenk y Wohlmuth ([MW01]) para el caso $\alpha = 0$, se muestran ejemplos numéricos para la versión hp de FEM en mallas de triángulos, no ha sido demostrado que esos estimadores sean equivalentes al error, en alguna norma de Sobolev, con constantes de equivalencia independientes de p. De hecho, resultados análogos de interpolación como los obtenidos en el Teorema 4.2.2 no se pueden generalizar fácilmente a mallas de triángulos. Si bien localmente se tienen resultados de interpolación en los triángulos, no es inmediato acotar el error de interpolación en los lados o en los vértices del triángulo, lo que es fundamental para pegar con continuidad a los interpoladores locales y obtener un interpolador global; para luego utilizar estos interpoladores y obtener estimaciones de error a posteriori para la versión p de FEM. En [DX01] podemos encontrar una función de peso definida en un triángulo de referencia y los respectivos polinomios de Jacobi ortogonales en dicho triángulo con respecto al peso ahí definido. Las normas de Jacobi-Sobolev con pesos para triángulos se pueden encontrar en [BS00] , donde además se tiene un resultado de interpolación con una cota análoga a (4.1.1) del Teorema 4.1.1 cambiando el rectángulo de referencia por el triángulo de referencia. Se puede observar que las mismas ideas que se utilizan en la demostración del Teorema 4.1.1 para concluir los errores de interpolación en los lados del rectángulo de referencia (4.1.2) y en los vértices (4.1.3) no nos llevan a resultados análogos cuando el dominio es un triángulo. Un tema de investigación a futuro es entonces como obtener estimaciones del error de interpolación análogas a (4.1.2) y (4.1.3) obtenidas en el Teorema 4.1.1 pero para los lados y los vértices de un triángulo genérico para luego construir interpoladores globales y así poder generalizar a mallas de triángulos los resultados obtenidos en esta tesis.

Bibliografía

[Ahl78] L. V. Ahlfors – *Complex analysis*, third éd., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[AM15] M. G. Armentano et V. Moreno – "p-Interpolation of smooth functions in Jacobi weighted spaces and its application to a posteriori error estimations", preprint, arXiv: 1502.03776, 2015.

[AO00] M. Ainsworth et J. T. Oden – *A posteriori error estimation in finite element analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.

[AP02] M. Ainsworth et K. Pinchadez – "hp-approximation theory for bdfm and rt finite elements on quadrilaterals", *SIAM J. Numer. Anal.* **40** (2002), no. 6, p. 2047–2068.

[APRS11] M. G. Armentano, C. Padra, R. Rodríguez et M. Scheble – "An *hp* finite element adaptive scheme to solve the Laplace model for fluid-solid vibrations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **200** (2011), no. 1-4, p. 178–188.

[APRS12] — , "An *hp* adaptive strategy to compute the vibration modes of a fluid-solid coupled system", *CMES Comput. Model. Eng. Sci.* **84** (2012), no. 4, p. 359–381.

[AS64] M. Abramowitz et I. A. Stegun – *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, vol. 55, For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

[AS97] M. Ainsworth et B. Senior – "Aspects of an adaptive *hp*-finite element method: adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **150** (1997), no. 1-4, p. 65–87, Symposium on Advances in Computational Mechanics, Vol. 2 (Austin, TX, 1997).

[BB01] F. B. Belgacem et S. C. Brenner – "Some nonstandard finite element estimates with applications to 3d poisson and signorini problems", *Electronic Transactions on Numerical Analysis* **12** (2001), p. 134–148.

[BD11] M. Bürg et W. Dörfler – "Convergence of an adaptive *hp* finite element strategy in higher space-dimensions", *Appl. Numer. Math.* **61** (2011), no. 11, p. 1132–1146.

[Bel78] R. Bellman – "A note on inequalities", General inequalities (Proc. First Internat. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1976), I, Birkhäuser, Basel, 1978, p. 3–4.

[BFO01] C. Bernardi, N. Fiétier et R. G. Owens – "An error indicator for mortar element solutions to the Stokes problem", *IMA J. Numer. Anal.* **21** (2001), no. 4, p. 857–886.

[BG88] I. Babuška et B. Q. Guo – "Regularity of the solution of elliptic problems with piecewise analytic data. I. Boundary value problems for linear elliptic equation of second order", *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988), no. 1, p. 172–203.

[BG00] I. Babuška et B. Guo – "Optimal estimates for lower and upper bounds of approximation errors in the *p*-version of the finite element method in two dimensions", *Numer. Math.* **85** (2000), no. 2, p. 219–255.

[BG02a] — , "Direct and inverse approximation theorems for the p-version of the finite element method in the framework of weighted besov spaces. part i: Approximability of functions in the weighted besov spaces", *SIAM J. Numer. Anal.* **39** (2001/2002), no. 5, p. 1512–1538.

[BG02b] — , "Direct and inverse approximation theorems for the *p*-version of the finite element method in the framework of weighted Besov spaces. II. Optimal rate of convergence of the *p*-version finite element solutions", *Math. Models Methods Appl. Sci.* **12** (2002), no. 5, p. 689–719.

[BG10] — , "Local jacobi operators and applications to the p-version of finite element method in two dimensions", *SIAM J. Numer. Anal.* **48** (2010), no. 1, p. 147–163.

[BM97a] C. Bernardi et Y. Maday – "Spectral methods", Handbook of numerical analysis, Vol. V, Handb. Numer. Anal., V, North-Holland, Amsterdam, 1997, p. 209–485.

[BM97b] — , "Spectral methods", Handbook of numerical analysis, Vol. V, Handb. Numer. Anal., V, North-Holland, Amsterdam, 1997, p. 209–485.

[BPS09] D. Braess, V. Pillwein et J. Schöberl – "Equilibrated residual error estimates are *p*-robust", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **198** (2009), no. 13-14, p. 1189–1197.

[BS87] I. Babuška et M. Suri – “The *h-p* version of the finite element method with quasi-uniform meshes”, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **21** (1987), no. 2, p. 199–238.

[BS94a] I. Babuška et M. Suri – “The *p* and *h-p* versions of the finite element method, basic principles and properties”, *SIAM Rev.* **36** (1994), no. 4, p. 578–632.

[BS94b] S. C. Brenner et L. R. Scott – *The mathematical theory of finite element methods*, Texts in Applied Mathematics, vol. 15, Springer-Verlag, New York, 1994.

[BS00] D. Braess et C. Schwab – “Approximation on simplices with respect to weighted Sobolev norms”, *J. Approx. Theory* **103** (2000), no. 2, p. 329–337.

[Cia78] P. G. Ciarlet – *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.

[Con78] J. B. Conway – *Functions of one complex variable*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[DH07] W. Dörfler et V. Heuveline – “Convergence of an adaptive *hp* finite element strategy in one space dimension”, *Appl. Numer. Math.* **57** (2007), no. 10, p. 1108–1124.

[DM13] P. Dörsek et J. M. Melenk – “Symmetry-free, *p*-robust equilibrated error indication for the *hp*-version of the FEM in nearly incompressible linear elasticity”, *Comput. Methods Appl. Math.* **13** (2013), no. 3, p. 291–304.

[Dör96] W. Dörfler – “A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation”, *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (1996), no. 3, p. 1106–1124.

[DX01] C. F. Dunkl et Y. Xu – *Orthogonal polynomials of several variables*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[GB86a] B. Guo et I. Babuška – “The *h-p* version of the finite element method. part 1: The basic approximation results.”, *Comput. Mech.* **1** (1986), p. 21–41.

[GB86b] — , “The *h-p* version of the finite element method. part 2: The general results and application”, *Comput. Mech.* **1** (1986), p. 203–220.

[GB10] — , “Local Jacobi operators and applications to the *p*-version of finite element method in two dimensions”, *SIAM J. Numer. Anal.* **48** (2010), no. 1, p. 147–163.

[GR65] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik – *Table of integrals, series, and products*, Fourth edition prepared by Ju. V. Geronimus and M. Ju. Ceĭtlin. Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc. Translation edited by Alan Jeffrey, Academic Press, New York-London, 1965.

[Gri85] P. Grisvard – *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[GS07] B. Guo et W. Sun – "The optimal convergence of the *h-p* version of the finite element method with quasi-uniform meshes", *SIAM J. Numer. Anal.* **45** (2007), no. 2, p. 698–730.

[Guo05] B. Guo – "Recent progress on a-posteriori error analysis for the *p* and *h-p* finite element methods", Recent advances in adaptive computation, Contemp. Math., vol. 383, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, p. 47–61.

[Guo09] — , "Aproximation theory for the p-version of the finite element method in three dimensions part ii: convergence of the p version of the finite element method", *SIAM J. Numer. Anal.* **47** (2009), no. 4, p. 2578–2611.

[Kro08] A. Kroó – "On the exact constant in the L_2 Markov inequality", *J. Approx. Theory* **151** (2008), no. 2, p. 208–211.

[Lan99] S. Lang – *Complex analysis*, fourth éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Mel05] J. M. Melenk – "*hp*-interpolation of nonsmooth functions and an application to *hp*-a posteriori error estimation", *SIAM J. Numer. Anal.* **43** (2005), no. 1, p. 127–155.

[MNS00] P. Morin, R. H. Nochetto et K. G. Siebert – "Data oscillation and convergence of adaptive FEM", *SIAM J. Numer. Anal.* **38** (2000), no. 2, p. 466–488 (electronic).

[Mor10] V. Moreno – *Estimaciones de error a priori y a posteriori para la versión hp del método de elementos finitos*, Mémoire, Universidad de Buenos Aires, 2010.

[MW01] J. M. Melenk et B. I. Wohlmuth – "On residual-based a posteriori error estimation in *hp*-FEM", *Adv. Comput. Math.* **15** (2001), no. 1-4, p. 311–331 (2002).

[Sch98] C. Schwab – *p- and hp-finite element methods*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998, Theory and applications in solid and fluid mechanics.

[Sch10] M. Scheble – "Un método hp-adaptivo para resolver problemas de vibraciones en sistemas con acoplamiento fluido-estructura", Thèse, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo. División de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche (CNEA),S. C. de Bariloche, Río Negro, Argentina, 2010.

[Ver96] R. Verfürth – *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, Wiley & Teubner, 1996.