



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Desarrollo y análisis de métodos de elementos finitos para la resolución numérica de problemas de Stokes-Darcy

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en
el área Ciencias Matemáticas

Lic. María Lorena Stockdale

Director de tesis y Consejero de estudios: Dra. María Gabriela Armentano.

Lugar de trabajo: IMAS - Conicet, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA.

Fecha de defensa: 6 de septiembre de 2019.

Desarrollo y análisis de métodos de elementos finitos para la resolución numérica de problemas de Stokes-Darcy

Resumen

En esta tesis desarrollamos y analizamos una aproximación unificada del par velocidad-presión para el problema de Stokes-Darcy acoplado, en un dominio bidimensional. El problema acoplado de Stokes-Darcy describe el movimiento de un fluido viscoso incompresible, modelado por la ecuación de Stokes, que fluye a través de una interfase a un medio poroso, modelado por la ecuación de Darcy, con condiciones de interfase dadas por la conservación de masa, el balance de fuerzas normales y la ley de Beavers-Joseph-Saffman.

El desarrollo de métodos numéricos eficientes para aproximar la solución al problema de Stokes, al problema de Darcy y, en particular, al problema acoplado, ha ido en aumento en los últimos años debido a su importancia en hidrología, dinámica de fluidos y en diferentes problemas de filtración. Es sabido que, las aproximaciones por elementos finitos estables para el problema de Stokes pueden no ser apropiadas para el problema de Darcy (y por ende para el problema de Stokes-Darcy acoplado), siendo entonces un problema interesante la elección de espacios de elementos finitos adecuados para el problema acoplado. Con el objetivo entonces de obtener aproximaciones a la solución del modelo acoplado, haciendo uso de espacios de elementos finitos estables para el problema de Stokes, introducimos una modificación en la formulación del problema de Darcy.

En primer lugar asumimos que tanto el dominio como la interfase fueran poligonales y, gracias a la modificación introducida en la formulación del problema de Darcy, resolvimos el problema acoplado de Stokes-Darcy usando el clásico Mini-element. Demostramos que el método propuesto es incondicionalmente estable, tiene una precisión óptima con respecto a la regularidad de la solución y es de fácil implementación. Presentamos también experimentos numéricos que confirman la estabilidad y exactitud del método propuesto, el cual es probablemente uno de los más sencillos para la aproximación unificada (y continua en cada una de las dos regiones) del sistema acoplado.

Posteriormente realizamos el análisis y la resolución numérica, con el método de elementos finitos considerado anteriormente, del problema acoplado de Stokes-Darcy en dominios curvos usando triángulos curvos. El interés de este enfoque reside en poder representar fehacientemente tanto el dominio como la interfase. Para este problema obtuvimos también, bajo apropiadas condiciones sobre el dominio en consideración, estimaciones de error de orden óptimo, extendiendo así los resultados obtenidos para el caso poligonal.

Palabras Claves: El problema de Stokes-Darcy acoplado, Elementos finitos mixtos, Análisis de estabilidad.

Development and analysis of finite element methods for the numerical resolution of Stokes-Darcy problems

Abstract

In this thesis we develop and analyze a unified approximation of the velocity-pressure pair for the Stokes-Darcy coupled problem, in a bidimensional domain. The Stokes-Darcy coupled problem describes the motion of an incompressible viscous fluid, modeled by the Stokes equation, which flows across an interface into a porous medium, modeled by the Darcy equation, with interface conditions given by mass conservation, the balance of normal forces and the Beavers-Joseph-Saffman condition.

The development of efficient numerical methods to approximate the solution to the Stokes problem, to the Darcy problem and, in particular, the coupled problem, has been increasing in recent years due to its importance in hydrology, fluid dynamics and in different problems of filtration. It is well known that stable finite element approximations for the Stokes problem may not be appropriate for Darcy problem (and therefore for the Stokes-Darcy coupled problem), thus the choice of suitable finite element spaces is an interesting problem for the coupled problem. In order to obtain approximations to the solution of the coupled model, making use of stable finite element spaces for the Stokes problem, we introduced a modification in the formulation of the Darcy problem.

First, we assumed that both the domain and the interface were polygonal and, thanks to the modification introduced in the formulation of the Darcy problem, we solved the Stokes-Darcy coupled problem using the classic Mini-element. We show that the proposed method is unconditionally stable, has optimal accuracy with respect to solution regularity and has simple and straightforward implementation. We also present numerical experiments that confirm the stability and accuracy of the proposed method, which is probably one of the simplest for the unified approach (and continues in each of the two regions) of the coupled system.

Finally, we make the analysis and numerical resolution, with the finite element method considered above, of the Stokes-Darcy coupled problem in curved domains using curved triangles. The interest of this approach lies in being able to faithfully represent both the domain and the interface. For this problem we also obtained, under appropriate conditions on the domain under consideration, optimal order error estimates, thus extending the results obtained for the polygonal case.

Keywords: The Stokes-Darcy coupled problem, Mixed finite elements, Stability analysis.

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciéndole a la persona con la que más interactué en todo este hermoso proceso, a mi directora, María Gabriela Armentano. Por ser una persona super comprometida, que me transmitió en cada encuentro las herramientas necesarias para llevar adelante este trabajo y de la que siempre obtengo buenos consejos. Gracias por todo Profe Gaby!

En segundo lugar, quiero agradecer a Conicet por el apoyo económico que me brindó, sin el mismo hubiera sido imposible la concreción de este sueño. Además, mi eterna gratitud para con la Universidad de Buenos Aires, por darme uno de los mejores instrumentos para defenderme en la vida: la educación pública de calidad.

A mi familia, por estar siempre a mi lado y acompañarme en todo lo que emprendo. A los que están y a los que se fueron, que no se apartan nunca de mi lado y velan por mí.

A los Profesores Ricardo Durán y Rodolfo Rodríguez por lo generosos que fueron al escucharme a lo largo del doctorado y siempre brindarme devoluciones enriquecedoras. Incluyo en este párrafo a uno de los referees de nuestro primer trabajo que con sus sugerencias no hizo más que potenciarlo.

A todas las personas que conocí y traté en todo este período, gracias por escucharme, darme una palabra de aliento, y compartir el día a día junto a mí. En especial a Fran, a Tati y a los chicos de computación de la oficina de al lado. No hubieran sido tan divertidos todos estos años sin ustedes!

En fin, a Dios, a la vida, a las bellas almas y al amor que es lo único que me impulsa en cada paso que doy, en cada tarea que desempeño.

Índice general

1. Introducción	11
2. Métodos Mixtos	15
2.1. El Problema de Stokes	15
2.2. El Problema de Darcy	16
2.3. Teoría General Abstracta de Métodos Mixtos	17
2.3.1. Existencia y Unicidad de Solución del Problema de Stokes	20
2.3.2. Existencia y Unicidad de Solución del Problema de Darcy	21
2.4. Aproximación numérica por elementos finitos	22
2.4.1. El operador de Fortin	23
2.4.2. Ejemplos de espacios de elementos finitos para los problemas de Stokes y de Darcy	24
3. Una aproximación unificada por elementos finitos mixtos del problema acoplado de Stokes-Darcy en un dominio poligonal	27
3.1. Planteo del Problema	27
3.2. El problema acoplado de Stokes-Darcy modificado	31
3.3. Aproximación por MINI-elements del problema modificado	33
4. Aproximación numérica del problema acoplado de Stokes-Darcy en dominios curvos	47
4.1. Elementos curvos	48
4.2. Aproximación de Stokes-Darcy modificado en dominios curvos	53
5. Experimentos numéricos	71
5.1. Experimentos numéricos para el problema de Stokes-Darcy en dominios poligonales	72
5.1.1. Ejemplo 1	72
5.1.2. Ejemplo 2	73
5.2. Experimentos numéricos para el problema de Stokes-Darcy en dominios curvos	75

5.2.1.	Ejemplo 1 - Borde Curvo	75
5.2.2.	Ejemplo 2 - Interfase Curva	77

Capítulo 1

Introducción

Problemas que involucran el acoplamiento entre sólidos y fluidos surgen naturalmente al modelar distintos fenómenos tales como el movimiento de la sangre en los vasos sanguíneos, la penetración del aire en los pulmones, la filtración de aguas superficiales a través de rocas y arena, entre otros. Estos problemas involucran la interacción entre desplazamientos de un medio sólido continuo con un medio fluido o bien la existencia de un flujo que se mueve en cierta parte libremente y en otra parte en un medio poroso. Estos modelos no se pueden, en general, resolver analíticamente y resulta necesario recurrir a la simulación numérica de los mismos.

Debido a sus numerosas aplicaciones, el análisis numérico para el acoplamiento de fluidos viscosos incompresibles (modelados por la ecuación de Stokes) con flujo en un medio poroso (modelado por la ecuación de Darcy) ha ido en aumento en los últimos años existiendo una vasta bibliografía al respecto (ver por ejemplo, [25, 30, 31] y sus referencias).

Al formular la resolución numérica de estos modelos se plantea la posibilidad de utilizar o no los mismos elementos finitos en cada uno de los dos subdominios correspondientes al medio poroso y al fluido. Es importante señalar que, como observaremos en el capítulo 2, las familias de elementos finitos estables para el problema de Stokes y de Darcy no suelen ser las mismas, lo que introduce una complicación extra al considerar el problema acoplado. Muchas de las aproximaciones por elementos finitos están basadas entonces en una combinación de elementos estables para la ecuación de Stokes con elementos estables para la ecuación de Darcy.

Al indagar en los trabajos que abordan este tema notamos que una gran mayoría considera espacios de elementos finitos diferentes en cada una de las regiones (ver, por ejemplo, [25, 26] y sus referencias). Por otro lado, otros artículos utilizan los mismos espacios de elementos finitos en ambas regiones pero, por lo general, introducen algunos términos de penalización. Por ejemplo, en [33], formulan un elemento finito unificado utilizando los elementos no conformes de Crouzeix-Raviart para la aproximación de las velocidades y el espacio de las funciones constantes a trozo para la aproximación de las

presiones en ambas regiones y agregan términos de penalización que corresponden al salto de las velocidades sobre los bordes, en [31] los autores proponen la misma discretización por elementos Crouzeix-Raviart no conformes en todo el dominio y también incorporan términos de penalización. En esta tesis nos centramos en el desarrollo de una discretización unificada (diferente a aquella considerada en [29]) donde ambas regiones (Stokes y Darcy) son aproximadas utilizando los mismos elementos finitos continuos.

Por último, mencionamos que la mayor parte de los trabajos sobre este problema que uno puede encontrar en la bibliografía se restringen, en general, al caso en que los dominios (y principalmente la interfase) son poligonales y es por eso que resulta también interesante considerar dominios curvos y desarrollar métodos que respeten dicha geometría. Especialmente métodos que contemplen la posibilidad de tener interfases curvas que es donde confluyen dos problemas de características bien distintas.

En esta tesis se demuestra la convergencia con orden óptimo para la aproximación numérica mediante los elementos finitos llamados comúnmente *MINI elements*, para el modelo de Stokes-Darcy acoplado en dominios bidimensionales tanto poligonales como curvos. Cabe mencionar que los resultados obtenidos para el caso poligonal y para el caso curvo están presentes en los trabajos [4] y [5] respectivamente.

A continuación, damos una descripción general del contenido de cada uno de los capítulos que componen esta tesis.

En el capítulo 2 se presenta la formulación abstracta de los métodos mixtos y los resultados teóricos relativos a la existencia de solución. Además, se realiza tanto el análisis del problema de Stokes como de Darcy y de sus aproximaciones en el contexto de dicha teoría. También citamos las clásicas familias de elementos finitos que se conocen estables para ambos problemas. Estos resultados facilitarán el seguimiento del análisis que se lleva adelante en los siguientes capítulos.

En el capítulo 3 se presenta una modificación a la formulación del problema de Darcy (siguiendo las ideas dadas en [20]), y por consiguiente del problema acoplado. El nuevo problema tiene la misma solución que el original e, independientemente del tamaño de la malla, la condición de estabilidad para el nuevo problema de Stokes-Darcy acoplado se reduce a la misma que para el problema de Stokes. Esta conveniente reformulación permite la aplicación del clásico *MINI element* ($\mathcal{P}_1 \oplus$ Burbuja, \mathcal{P}_1) a todo el problema acoplado, aproximación que además resulta ser continua en cada porción del dominio. Además, mostramos en detalle cómo llevar a cabo la construcción del “clásico operador” de Fortin y verificamos que satisface todas las propiedades necesarias para demostrar que el método propuesto es incondicionalmente estable. Finalmente, concluimos que el método converge con precisión óptima con respecto a la regularidad de la solución.

El capítulo 4 versa sobre el análisis y la resolución numérica, con el método de elementos finitos considerado anteriormente, del problema acoplado de Stokes-Darcy en

dominios curvos usando triángulos curvos. El interés de este enfoque reside en poder representar fehacientemente, mediante el empleo de “triángulos curvos”, tanto el dominio como la interfase. Su análisis requiere algunas consideraciones especiales respecto al caso poligonal. Bajo apropiadas condiciones sobre el dominio en consideración, demostramos estimaciones de error de orden óptimo, extendiendo así los resultados obtenidos para el caso poligonal.

En el capítulo 5 realizamos una serie de ejemplos numéricos, tanto en dominios poligonales como curvos, que evidencian la buena performance del método propuesto. Destacamos que el mismo es realmente de fácil implementación y es uno de los más sencillos que se pueden considerar si se busca una aproximación unificada y continua en Ω_S y en Ω_D del sistema acoplado.

Capítulo 2

Métodos Mixtos

El nombre “métodos mixtos” se aplica a una variedad de métodos de elementos finitos en los cuales dos espacios son utilizados para la aproximación de dos variables diferentes. En algunos casos la segunda variable es introducida en la formulación del problema por interés físico y en otros, la formulación mixta surge naturalmente. Una característica de los métodos mixtos es que no todas las elecciones de los espacios de elementos conducen a aproximaciones convergentes. Existen algunas condiciones claves que conducen al éxito de un método mixto.

El problema de Stokes modela los movimientos de un fluido incompresible que ocupa cierta cavidad, si el fluido fuese viscoso y la cavidad porosa, se los modela a partir del problema de Darcy. En estos problemas existen dos variables independientes, la velocidad del fluido y la presión, por ende la formulación mixta resulta naturalmente apropiada para el estudio y la resolución de ambos.

Al comienzo del capítulo describimos los problemas de Stokes y de Darcy e introducimos notación que utilizamos a lo largo de la tesis. Luego presentamos la teoría general abstracta de los métodos mixtos la cual permite, en particular, establecer la existencia y unicidad de solución para el problema de Stokes, para el problema de Darcy y, como se verá más adelante, para el problema de Stokes-Darcy acoplado cuya resolución es objeto de esta tesis. Finalmente, exponemos algunos ejemplos clásicos de espacios de elementos finitos conformes utilizados comúnmente para el problema de Stokes y también mostramos algunos ejemplos clásicos de elementos finitos para el problema de Darcy.

2.1. El Problema de Stokes

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, acotado, con borde poligonal. Consideramos el problema de Stokes clásico que modela el movimiento de un fluido incompresible que

ocupa la cavidad Ω , al definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma := \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es la velocidad del fluido, p es la presión, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$ es la fuerza por unidad de masa y $\mu > 0$ es la viscosidad que asumiremos constante.

Dado que el problema de Stokes involucra dos variables independientes, la presión y la velocidad, resulta natural plantear un espacio adecuado para cada una de ellas, dando lugar así a una formulación variacional mixta.

Sea $\mathbf{V} := (H_0^1(\Omega))^2$ y $Q := L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\}$, multiplicando las ecuaciones por funciones test e integrando por partes obtenemos la forma débil de (2.1.1): Encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $p \in Q$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in Q, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

donde $(\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ y las formas bilineales $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} & \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q & \mathbf{v} \in \mathbf{V}, q \in Q \end{aligned}$$

donde $\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}$ y si A y B están en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ entonces $A : B = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$.

Para simplificar notación las normas y seminormas de los espacios de Sobolev $H^m(D)$, con m un entero, son denotadas por $\|\cdot\|_{m,D}$ y $|\cdot|_{m,D}$ respectivamente y $(\cdot, \cdot)_D$ representa el producto interno en $L^2(D)$ o $\mathbf{L}^2(D)$ para cualquier subdominio $D \subset \Omega$. Asimismo, la norma en $L^\infty(D)$ o $\mathbf{L}^\infty(D)$ es denotada por $\|\cdot\|_{\infty,D}$. En el caso en que $D = \Omega$ omitiremos el segundo índice, indicando las normas directamente por $\|\cdot\|_m$ y $|\cdot|_m$. Denotaremos con negrita los espacios que están constituidos por funciones vectoriales. Vamos a denotar con C , una constante genérica. Debe quedar claro que C podría no ser la misma a lo largo de los capítulos.

Para mostrar la existencia y la unicidad de solución del problema variacional mixto (2.1.2) vamos a hacer uso de la Teoría General de Métodos Mixtos.

2.2. El Problema de Darcy

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal, acotado y abierto con borde $\Gamma := \partial\Omega$. El problema de Darcy, que modela el movimiento de un fluido en un medio poroso, está dado por encontrar la velocidad \mathbf{u} y la presión p tal que

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

donde $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ representa la fuerza por unidad de masa, $g \in L^2(\Omega)$ es una fuente y \mathbf{n} es la normal exterior unitaria en Γ . Asumimos además que g satisface la condición de compatibilidad $\int_{\Omega} g = 0$.

Sea $\mathbf{H}(\operatorname{div}, D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D) : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(D)\}$, $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D) : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(D), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \partial D\}$, con la norma $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, D)} = (\|\mathbf{v}\|_{0,D}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,D}^2)^{\frac{1}{2}}$, y $L_0^2(D) = \{q \in L^2(D) : \int_D q = 0\}$.

Definimos los espacios: $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$ y $Q = L_0^2(\Omega)$, con las normas $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)}$ y $\|q\|_Q = \|q\|_0$ respectivamente. La forma variacional de (2.2.3) está dada por: Encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $p \in Q$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}, q) = (-g, q) & \forall q \in Q, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

donde las formas bilineales $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ se definen en $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ y $\mathbf{V} \times Q$, respectivamente, como

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} & \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q & \mathbf{v} \in \mathbf{V}, q \in Q. \end{aligned}$$

Se probará la buena definición de la formulación continua (2.2.4) utilizando la Teoría Clásica de Métodos Mixtos.

2.3. Teoría General Abstracta de Métodos Mixtos

Los problemas de Stokes y de Darcy son un caso particular de una clase general de problemas, llamados problemas mixtos, cuya teoría desarrollaremos a lo largo de esta sección siguiendo los libros [8, 15, 28] y sus referencias.

Dados V y Q dos espacios de Hilbert, el problema mixto general es hallar (u, p) en $V \times Q$ tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = F(v) & v \in V, \\ b(u, q) = G(q) & q \in Q, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ son, respectivamente, formas bilineales continuas de $V \times V$ y $V \times Q$, es decir, existe $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq C \|u\|_V \|v\|_V & \forall u \in V & \forall v \in V, \\ |b(u, q)| &\leq C \|u\|_V \|q\|_Q & \forall u \in V & \forall q \in Q \end{aligned}$$

y $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$ son funcionales lineales y continuos.

Notemos que el problema (2.3.5) se puede escribir también de la siguiente manera: llamamos $H = V \times Q$ y sea

$$c((u, p), (v, q)) = a(u, v) + b(v, p) + b(u, q)$$

una forma bilineal continua de $H \times H$. El problema (2.3.5) es equivalente a hallar $(u, p) \in H$ tal que

$$c((u, p), (v, q)) = F(v) + G(q) \quad \forall (v, q) \in H. \quad (2.3.6)$$

La principal dificultad en este planteo es que, por ejemplo, para el Problema de Stokes la forma bilineal c no es coercitiva y en consecuencia, la teoría clásica para garantizar la existencia y unicidad de solución (que hace uso del Teorema de Lax Milgram) no puede ser aplicada.

Para mostrar la existencia y unicidad de solución del problema mixto general (2.3.5) se trabaja con los siguientes operadores: $A : V \rightarrow V'$ y $B : V \rightarrow Q'$ definidos como:

$$\langle Au, v \rangle_{V' \times V} := a(u, v) \quad \forall v \in V,$$

$$\langle Bv, q \rangle_{Q' \times Q} := b(v, q) \quad \forall q \in Q$$

y sus respectivos adjuntos: $A^* : V \rightarrow V'$ tal que $\langle u, A^*v \rangle_{V \times V'} := a(u, v) \quad \forall u \in V$ y $B^* : Q \rightarrow V'$ definido como $\langle v, B^*q \rangle_{V \times V'} := b(v, q) \quad \forall v \in V$.

Con estos operadores el problema (2.3.5) puede describirse como hallar $(u, p) \in V \times Q$ tal que:

$$\begin{cases} Au + B^*p = F & \text{en } V' \\ Bu = G & \text{en } Q' \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Antes de seguir vamos a dar unas definiciones y enunciar un lema que es una de las herramientas fundamentales en las demostraciones de los resultados que siguen.

Definición: Dado $A : V_1 \rightarrow V_2'$ un operador lineal y $S \subseteq V_1$ un subespacio, definimos:

$$\ker A = \{v \in V_1 : Av = 0\}$$

y

$$S^\circ = \{A \in V_1' : \langle A, v \rangle_{V_1' \times V_1} = 0 \quad \forall v \in S\}$$

a $S^\circ \subset V_1'$ se lo suele llamar el espacio anulador de S .

Sean V_1 y V_2 espacios de Hilbert y $A : V_1 \rightarrow V_2'$ un operador lineal y continuo. Entonces tenemos el siguiente Lema:

Lema 2.3.1. $(\ker A)^\circ = \overline{\text{Im} A^*}$ y $(\ker A^*)^\circ = \overline{\text{Im} A}$.

Definición: Sean V_1 y V_2 espacios de Hilbert y $b : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que b satisface la **condición inf-sup** si existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{u \in V_1, u \neq 0} \frac{b(u, v)}{\|u\|_{V_1}} \geq \beta \|v\|_{V_2} \quad \forall v \in V_2.$$

Para ver que el problema propuesto tiene solución se utiliza el siguiente Lema.

Lema 2.3.2. *Sea $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y continua. Son equivalentes:*

a) $\exists \beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q \quad (2.3.8)$$

b) B^* es un isomorfismo de $Q \rightarrow (\ker B)^\circ$ y

$$\|B^*q\|_{V'} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$$

c) B es un isomorfismo de $(\ker B)^\perp \rightarrow Q'$ y

$$\|Bv\|_{Q'} \geq \beta \|v\|_V \quad \forall v \in (\ker B)^\perp \quad (2.3.9)$$

Definición: Dada $G \in Q'$ definimos el espacio $W(G) = \{v \in V : Bv = G\}$. Notamos que, en concordancia a lo definido anteriormente, $W(0) = \ker B = W$.

Consideremos los siguientes Problemas:

Problema A: Hallar $(u, p) \in V \times Q$ tal que

$$\begin{cases} Au + B^*p = F & F \in V' \\ Bu = G & G \in Q' \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Problema B: Hallar $u \in V$ tal que

$$\begin{cases} a(u, v) = F(v) & \forall v \in W \\ u \in W(G) \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Se puede ver que si la forma bilineal b satisface la condición inf-sup los **Problemas A y B** son equivalentes.

Teorema 2.3.1. *Si b satisface la condición inf-sup, es decir, $\exists \beta > 0$ tal que*

$$\sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{b(u, q)}{\|u\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q,$$

*entonces los **Problemas A y B** son equivalentes.*

Observación 2.3.1. *Sabemos que u es solución de \mathbf{A} si y sólo si u es solución de \mathbf{B} . Luego, si probáramos que el **Problema B** tiene solución y ésta es única, obtendríamos la unicidad del **Problema A**.*

El siguiente Lema, el cual puede entenderse como una generalización del Teorema de Lax Milgram, es de vital importancia en la demostración del Teorema de existencia y unicidad del problema (2.3.5).

Lema 2.3.3. *Si existe $\alpha > 0$ tal que $a(\cdot, \cdot)$ cumple las siguientes dos condiciones inf-sup:*

$$\begin{aligned} i) \quad & \sup_{u \in W, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V} \geq \alpha \|v\|_V \quad \forall v \in W \\ ii) \quad & \sup_{v \in W, v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_V \quad \forall u \in W \end{aligned}$$

entonces, para todo $G \in W'$ existe una única $u \in W$ tal que $a(u, v) = G(v)$ para todo $v \in W$. Además

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|G\|_{W'}.$$

Observación 2.3.2. *Si el operador B es idénticamente nulo, entonces $W = \ker(B) = V$. Luego, dado $G \in V'$, si a es continua y cumple las condiciones del lema anterior con $W = V$ entonces existe una única $u \in V$ tal que $a(u, v) = G(v) \quad \forall v \in V$.*

Finalmente, enunciaremos el teorema que nos asegura la existencia y unicidad del problema mixto (2.3.5):

Teorema 2.3.2. *Si a satisface las dos condiciones inf-sup del Lema 2.3.3 y b satisface la condición inf-sup del Lema 2.3.2 entonces existe un único $(u, p) \in V \times Q$ tal que*

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = F(v) & \forall v \in V \\ b(u, q) = G(q) & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Además, tenemos las siguientes acotaciones

$$\begin{aligned} \|u\|_V &\leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}\right) \|G\|_{Q'} \quad y \\ \|p\|_Q &\leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}\right) \|F\|_{V'} + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\beta^2} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}\right) \|G\|_{Q'}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

2.3.1. Existencia y Unicidad de Solución del Problema de Stokes

En vista de los resultados previos, para garantizar que el problema de Stokes tiene solución y ésta es única hay que verificar que las correspondientes formas a y b son

bilineales, continuas y cumplen la condición inf-sup. Recordemos que para el problema de Stokes teníamos $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \\ b(u, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q \end{aligned}$$

con $\mathbf{V} = (H_0^1(\Omega))^2$ y $Q = L_0^2(\Omega)$.

Como $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$ haciendo uso de la desigualdad de Poincaré: $\|\nabla \mathbf{u}\|_0 \leq C_p \|\mathbf{u}\|_1$, con $C_p > 0$, vemos fácilmente que $\|\nabla \mathbf{u}\|_0$ y $\|\mathbf{u}\|_1$ son equivalentes y por ende a es coercitiva, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. En particular, a satisface las dos condiciones inf-sup del Lema 2.3.3 ya que: Dada $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$,

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_1} \geq C \|\mathbf{u}\|_1.$$

La otra inf-sup es consecuencia de la simetría de a .

Debemos ver ahora que b satisface la condición inf-sup dada en el Lema 2.3.2. Para ello vamos a hacer uso del siguiente resultado (ver, por ejemplo, [15, Lema 2.2]).

Teorema 2.3.3. *Dada $f \in L_0^2(\Omega)$ existe $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$ y una constante $C > 0$ tal que*

$$- \operatorname{div} \mathbf{u} = f \quad y \quad \|\mathbf{u}\|_1 \leq C \|f\|_0.$$

Luego, dada $q \in L_0^2(\Omega)$ el Teorema anterior nos garantiza que $\exists \mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$: $-\operatorname{div} \mathbf{u} = q$ y en consecuencia

$$\|q\|_0 = \frac{\|q\|_0^2}{\|q\|_0} = \frac{\int_{\Omega} q^2}{\|q\|_0} = - \frac{\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q}{\|q\|_0} = \frac{b(\mathbf{u}, q)}{\|q\|_0} \leq C \frac{b(\mathbf{u}, q)}{\|\mathbf{u}\|_1} \leq C \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1}.$$

Por lo tanto, b cumple la inf-sup con lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 2.3.2 y concluir la existencia y unicidad de solución del problema (2.1.2).

Corolario 2.3.1. *Existe un único $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ solución del Problema de Stokes (2.1.2).*

2.3.2. Existencia y Unicidad de Solución del Problema de Darcy

En este caso las formas bilineales $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ b(u, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q \end{aligned}$$

con $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ y $Q = L^2_0(\Omega)$.

Si consideramos $Ker(B) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} : \text{div } \mathbf{u} = 0\}$, entonces a resulta coercitiva en el $Ker(B)$, pues para todo $\mathbf{u} \in Ker(B)$, $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_0^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2$.

Veamos ahora que b satisface la condición inf-sup del Lema 2.3.2. En principio, dado $q \in L^2$ sabemos que existe $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ tal que $-\text{div } \mathbf{v} = q$ y $\|\mathbf{v}\|_1 \leq C\|q\|_0$. Por lo tanto, utilizando además que $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq \|\mathbf{v}\|_1$ podemos ver que

$$\frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} = \frac{-\int \text{div } \mathbf{v} q}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} = \frac{\int q^2}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} = \frac{\|q\|_0^2}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \geq \frac{\|q\|_0^2}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq C\|q\|_0.$$

Aplicando entonces el Teorema 2.3.2 se concluye la buena definición de la formulación continua (2.2.4) y se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3.2. *Existe un único $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ solución del Problema de Darcy (2.2.4).*

2.4. Aproximación numérica por elementos finitos

Consideremos ahora subespacios $V_h \subset V$ y $Q_h \subset Q$ ambos de dimension finita. El problema mixto discreto, asociado al problema mixto (2.3.5), es:

Hallar $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tales que

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = F(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ b(u_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (2.4.14)$$

Consideremos $B_h : V_h \rightarrow Q'_h$ definido por: $\langle B_h v_h, q_h \rangle_{Q'_h \times Q_h} := b(v_h, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h$. Llamemos $W_h = \ker B_h \subset V_h$.

Luego, en vista del Teorema 2.3.2 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.4.1. *Si las formas bilineales y continuas a y b satisfacen las siguientes condiciones inf-sup con constantes α^* y β^* independientes de h .*

$$\begin{aligned} \sup_{v_h \in W_h, v_h \neq 0} \frac{a(u_h, v_h)}{\|v_h\|_V} &\geq \alpha^* \|u_h\|_V \quad \forall u_h \in W_h, \\ \sup_{u_h \in W_h, u_h \neq 0} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_V} &\geq \alpha^* \|v_h\|_V \quad \forall v_h \in W_h, \\ \sup_{v_h \in W_h, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V} &\geq \beta^* \|q_h\|_V \quad \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

existe un único par $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ solución del problema (2.4.14). Además existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|u_h\|_V + \|p_h\|_Q \leq C(\|F\|_{V'} + \|G\|_{Q'}). \quad (2.4.16)$$

En un problema mixto dado, si a y b satisfacen las condiciones inf-sup continuas del Teorema 2.3.2 y para una determinada elección de los espacios V_h y Q_h se satisfacen las condiciones inf-sup discretas del Corolario 2.4.1, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1. *Si a y b satisfacen las condiciones inf-sup continuas del Teorema 2.3.2 con constantes α y β respectivamente y satisfacen las condiciones inf-sup discretas del Corolario 2.4.1 con constantes α^* y β^* respectivamente, entonces*

$$\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right) \quad (2.4.17)$$

Si además $\ker B_h \subset \ker B$ entonces $\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$.

Observación 2.4.1. *Si en un problema el espacio discreto $V_h \subset V$ y tuviéramos que a fuera coercitiva, entonces cumpliría la inf-sup continua y discreta puesto que la coercitividad es una propiedad hereditaria e implica la condición inf-sup. En cambio, si supiéramos que b satisface la inf-sup continua, a diferencia de la coercitividad, la condición inf-sup no es hereditaria, es decir, la validez de la condición inf-sup en un espacio V no garantiza su validez en V_h . Entonces para poder garantizar la existencia y unicidad de solución del problema (2.4.14) deberíamos ver que, para cada elección de los subespacios V_h y Q_h , la forma b satisface la condición inf-sup discreta (2.4.15).*

2.4.1. El operador de Fortin

Un criterio muy útil para verificar la condición inf-sup discreta (2.4.15) en las aplicaciones es el siguiente resultado enunciado por Fortin en [24].

Teorema 2.4.2. *Asumiendo que (2.3.8) vale. Luego, la condición inf-sup discreta (2.4.15) vale con una constante $\beta^* > 0$ independiente de h , si y sólo si, existe un operador*

$$\Pi_h : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$$

tal que

$$b(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall q \in Q_h \quad (2.4.18)$$

y,

$$\|\Pi_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.4.19)$$

con una constante $C > 0$ independiente de h .

Demostración. Supongamos que el operador Π_h existe. Luego, de (2.4.18), (2.4.19) y (2.3.8) tenemos que para $q \in Q_h$,

$$\beta \|q\|_Q \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b(\Pi_h \mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \leq C \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b(\Pi_h \mathbf{v}, q)}{\|\Pi_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \quad (2.4.20)$$

y por lo tanto, (2.4.15) vale con $\beta^* = \frac{\beta}{C}$.

Por el contrario, supongamos que (2.4.15) vale con β^* independiente de h . Luego, de (2.3.9) sabemos que para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existe un único $\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h^\perp$ tal que $b(\mathbf{v}_h, q) = b(\mathbf{v}, q) \quad \forall q \in Q_h$ y, $\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{\|b\|}{\beta^*} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$. Por lo tanto, $\Pi_h \mathbf{v} = \mathbf{v}_h$ define el operador requerido. \square

Observación 2.4.2. *En la práctica, a veces es suficiente demostrar la existencia del operador Π_h en un subespacio $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, donde pertenece la solución exacta, que verifique (2.4.18) y (2.4.19) para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ y donde la norma del lado derecho de (2.4.19) se reemplaza por una norma más fuerte (la del subespacio \mathbf{S}). Esto es, en algunos casos, más fácil porque la construcción explícita del operador Π_h requiere suposiciones de regularidad que no son válidas para una función cualquiera en \mathbf{V} .*

2.4.2. Ejemplos de espacios de elementos finitos para los problemas de Stokes y de Darcy

Es bien sabido que la discretización de la velocidad y la presión, para los problemas de Stokes y de Darcy tiene que realizarse de una manera particular para evitar inestabilidades (ver, por ejemplo, [32]).

Más aún, si consideramos un problema de Darcy en algún dominio \mathcal{D} y espacios de elementos finitos $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_0(\text{div}, \mathcal{D})$ y $Q_h \subset L_0^2(\mathcal{D})$, para aproximar la velocidad y la presión, las siguientes dos condiciones tienen que cumplirse:

$$\text{D1. } \exists \alpha > 0 : \|\mathbf{v}_h\|_{0, \mathcal{D}}^2 \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \mathcal{D})}^2, \quad \forall \mathbf{v}_h \text{ tal que: } (\text{div } \mathbf{v}_h, q_h)_{\mathcal{D}} = 0, \quad \forall q_h \in Q_h.$$

D2. La condición LBB, es decir, existe $\hat{\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_h, q_h)_{\mathcal{D}}}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \mathcal{D})}} \geq \hat{\beta} \|q_h\|_{0, \mathcal{D}} \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Por lo tanto, la principal diferencia es que mientras que en el problema de Stokes la familia de elementos tiene que satisfacer sólo la condición inf-sup, el problema de Darcy tiene que cumplir estas dos condiciones de compatibilidad. En efecto, para cualquier función $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D})$ tenemos que $\|\mathbf{v}\|_{1, \mathcal{D}} \geq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \mathcal{D})}$, es claro que, si la familia de elementos finitos satisface la condición inf-sup relacionada al problema de Stokes:

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_h, q_h)_{\mathcal{D}}}{\|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{D}}} \geq \tilde{\beta} \|q_h\|_{0, \mathcal{D}} \quad \forall q_h \in Q_h,$$

también satisface la condición D2 pero no necesariamente la condición D1, a menos que $\text{div}(\mathbf{V}_h) = Q_h$. Por lo tanto, las aproximaciones por elementos finitos estables del problema de Stokes pueden no ser apropiadas para el problema de Darcy.

Ejemplos de elementos finitos para el problema de Stokes

- **Taylor-Hood:** el elemento de Taylor-Hood es un elemento triangular de frecuente uso donde tanto la velocidad como la presión son polinomiales y en donde la velocidad tiene un grado más que la presión y a ésta última se la toma continua. Los espacios discretos para la velocidad y la presión que se consideran son:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_h &= \{\mathbf{v}_h \in (C(\bar{\Omega}))^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \mathbf{v}_h|_T \in (P_2)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad \text{y} \\ Q_h &= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) : q_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}\end{aligned}$$

donde \mathcal{T}_h es una partición de Ω en triángulos. Se puede ver la demostración de la condición inf-sup en el libro [28].

- **P_1P_1 estabilizados:** Es sabido que la aproximación de la velocidad y la presión por elementos P_1 continuos no satisface la condición inf-sup y puede conducir a la aparición de modos de presión espúreos (ver, por ejemplo, [15]). Debido a la simplicidad de estos elementos ha sido de interés el desarrollo de los llamados métodos de estabilización que en su mayoría consisten en enriquecer la forma bilineal c adicionándole algún término, por ejemplo, una forma bilineal del tipo $g(p, q)$, tal que la nueva forma bilineal

$$\tilde{c} = c((u, p), (v, q)) + g(p, q) = a(u, v) + b(v, p) + b(u, q) + g(p, q)$$

resulte ser coercitiva y de esta forma poder resolver con los clásicos P_1P_1 el problema modificado. Algunos de los métodos de estabilización más usados están presentes en los trabajos [9] y [13].

- **MINI:** es probablemente el elemento más sencillo para la aproximación de las ecuaciones de Stokes. La idea principal del MINI es incluir una función burbuja en el espacio \mathbf{V}_h . Sean λ_1, λ_2 y λ_3 las coordenadas baricéntricas de un triángulo (por ejemplo: $\lambda_1 = x_1, \lambda_2 = x_2$ y $\lambda_3 = 1 - x_1 - x_2$ en el triángulo unitario). Luego $b_T = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ se anula en los lados del triángulo. Agregar esta función burbuja no afecta la continuidad. Los espacios para la velocidad y la presión se definen por:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_h &= \{\mathbf{v}_h \in (C(\bar{\Omega}))^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \mathbf{v}_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \oplus B_3 \quad \text{y} \\ Q_h &= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) : q_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.\end{aligned}$$

con $B_3 = \{\mathbf{v} \in C^0(\bar{\Omega}) : \mathbf{v}|_T \in \langle \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \rangle \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$. La demostración de la estabilidad para estos elementos puede verse en [6].

Ejemplos de elementos finitos para el problema de Darcy

- **Raviart Thomas:** el espacio de Raviart Thomas de orden más bajo es uno de los clásicos elementos que se usa para aproximar las ecuaciones de Darcy. Los espacios para la velocidad y la presión se definen por

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}|_T \in RT_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \text{ y}$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q|_T \in P_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

donde $RT_0(T) = (P_0(T))^2 + \mathbf{x}P_0(T)$. Sólo la componente normal de la velocidad es continua y la condición inf-sup se satisface pues $\text{div } \mathbf{V}_h = Q_h$ (ver, por ejemplo, [15]).

- **P_1P_1 estabilizados:** Existen también para este problema varios métodos de estabilización los cuales, en muchos casos, dependen de parámetros que se determinan empíricamente. Algunos de estos métodos pueden encontrarse en [9] y en sus referencias.

Capítulo 3

Una aproximación unificada por elementos finitos mixtos del problema acoplado de Stokes-Darcy en un dominio poligonal

Es sabido que, las aproximaciones por elementos finitos estables para el problema de Stokes pueden no ser apropiadas para el problema de Darcy (y por ende para el problema de Stokes-Darcy acoplado), por lo que comúnmente se usan espacios diferentes para las discretizaciones correspondientes a las regiones de Darcy y de Stokes. En este capítulo desarrollamos y analizamos una aproximación unificada del par velocidad-presión para el problema de Stokes-Darcy acoplado, en un dominio poligonal bidimensional. Más precisamente, con el objetivo de obtener aproximaciones a la solución del modelo acoplado, haciendo uso de espacios de elementos finitos estables para el problema de Stokes, introdujimos una modificación del problema de Darcy. Esta modificación nos permite, en particular, aplicar el clásico MINI-element a todo el problema acoplado de Stokes-Darcy. Para demostrar que el método propuesto es incondicionalmente estable construimos el operador de Fortin y, haciendo uso de la teoría exhibida en el capítulo 2 concluimos que el método propuesto tiene una precisión óptima con respecto a la regularidad de la solución.

3.1. Planteo del Problema

Consideramos un dominio poligonal, abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dividido en dos subdominios abiertos con bordes Lipschitz continuos Ω_S y Ω_D , donde los índices S y D representan fluido y poroso, respectivamente. Asumimos que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_S \cup \bar{\Omega}_D$, $\Omega_S \cap \Omega_D = \emptyset$ y $\bar{\Omega}_S \cap \bar{\Omega}_D = \Gamma_I$ por lo tanto, Γ_I representa la interfase entre el fluido y el medio poroso.

Las partes restantes de los bordes se denotan por $\Gamma_S = \partial\Omega_S \setminus \Gamma_I$ y $\Gamma_D = \partial\Omega_D \setminus \Gamma_I$. Denotamos por \mathbf{n}_S el vector normal unitario exterior sobre $\partial\Omega_S$ y por \mathbf{n}_D el vector normal sobre $\partial\Omega_D$, orientado exteriormente. Notar que sobre la interfase Γ_I , tenemos que $\mathbf{n}_S = -\mathbf{n}_D$. Ejemplos de tales dominios son presentados en la Figura 3.1.

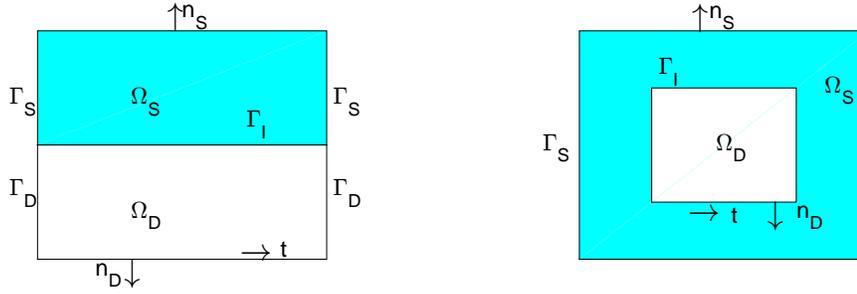


Figura 3.1: Ejemplos de dominios bidimensionales para el sistema acoplado Stokes-Darcy

El problema acoplado de Stokes-Darcy describe el movimiento de un fluido viscoso incompresible que ocupa una región Ω_S que fluye a través de la interfaz común a un medio poroso que vive en otra region Ω_D saturada con el mismo fluido. El modelo matemático de este problema puede ser definido por dos grupos separados de ecuaciones y un conjunto de términos de acoplamiento.

Para cualquier función \mathbf{v} definida en Ω , teniendo en cuenta que su restricción a Ω_S o a Ω_D podría desempeñar un papel matemático diferente (especialmente sus trazas sobre Γ_I), definimos $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}|_{\Omega_S}$ y $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}|_{\Omega_D}$.

En Ω_S , el movimiento del fluido está gobernado por las ecuaciones de Stokes para la velocidad \mathbf{u}_S y la presión p_S :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}_S + \nabla p_S = \mathbf{f}_S, & \text{in } \Omega_S, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0, & \text{in } \Omega_S, \\ \mathbf{u}_S = 0, & \text{in } \Gamma_S, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

donde $\mathbf{f}_S \in (L^2(\Omega_S))^2$ representa la fuerza por unidad de masa y $\mu > 0$ la viscosidad.

En Ω_D , el movimiento del fluido en el medio poroso está gobernado por la ley de

Darcy para la velocidad \mathbf{u}_D y la presión p_D :

$$\begin{cases} \frac{\mu}{K} \mathbf{u}_D + \nabla p_D = \mathbf{f}_D, & \text{in } \Omega_D, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_D = g_D, & \text{in } \Omega_D, \\ \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0, & \text{in } \Gamma_D, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

donde $\mathbf{f}_D \in (L^2(\Omega_D))^2$ representa la fuerza por unidad de masa, $g_D \in L^2(\Omega_D)$ es una fuente y K denota el tensor de permeabilidad que se reduce a un escalar positivo en el caso isotrópico considerado aquí.

En Γ_I , consideramos las siguientes condiciones de borde (ver, por ejemplo, [26]):

$$\begin{cases} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0, \\ p_S \mathbf{n}_S - \mu \nabla \mathbf{u}_S \mathbf{n}_S - p_D \mathbf{n}_S - \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} = 0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

donde la primera ecuación representa la conservación de masa y la segunda es debido al balance de las fuerzas normales y la condición de Beavers-Joseph-Saffman, con $\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$, α un parámetro determinado por evidencia experimental y \mathbf{t} el vector tangente sobre Γ_I (recomendamos [11] para más detalles sobre las condiciones en la interfase).

Definimos los espacios

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}^1(\Omega_S), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_S, \text{ y } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_D = 0 \text{ en } \Gamma_D \}$$

y

$$Q = L_0^2(\Omega),$$

con las normas $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = (|\mathbf{v}|_{1, \Omega_S}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega_D}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0, \Omega_D}^2)^{\frac{1}{2}} = (|\mathbf{v}|_{1, \Omega_S}^2 + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_D)}^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\|q\|_Q = \|q\|_0$ respectivamente.

Multiplicando la primera ecuación de (3.1.1) por una función test $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y la segunda por $q \in Q$, integrando por partes sobre Ω_S los términos que involucran $\Delta \mathbf{u}_S$ y ∇p_S , obtenemos la forma variacional de las ecuaciones de Stokes:

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega_S} \nabla \mathbf{u}_S : \nabla \mathbf{v} - \mu \int_{\Gamma_I} (\nabla \mathbf{u}_S \mathbf{n}_S) \cdot \mathbf{v}_S - \int_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{v} p_S + \int_{\Gamma_I} \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}_S p_S &= \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \int_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{u}_S q &= 0 \quad \forall q \in Q. \end{aligned}$$

Aplicamos un tratamiento similar a las ecuaciones de Darcy testeando la primera ecuación de (3.1.2) con una función suave $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y la segunda con $q \in Q$, integrando

por partes sobre Ω_D los términos que involucran ∇p_D , obtenemos la forma variacional de las ecuaciones de Darcy:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{K} \int_{\Omega_D} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega_D} p_D \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Gamma_I} \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}_D p_D &= \int_{\Omega_D} \mathbf{f}_D \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \int_{\Omega_D} \operatorname{div} \mathbf{u}_D q &= \int_{\Omega_D} g_D q \quad \forall q \in Q. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Ahora, incorporando las condiciones de borde (3.1.3) y teniendo en cuenta que las funciones vectoriales en \mathbf{V} tienen componentes normales débilmente continuas sobre Γ_I (ver Teorema 2.5 de [28]), la formulación variacional mixta del problema acoplado (3.1.1)-(3.1.3) se puede formular como sigue [30, 31]: Encontrar $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ que satisfagan

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}, q) = G(q) & \forall q \in Q, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

donde las formas bilineales $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ están definidas sobre $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ y $\mathbf{V} \times Q$, respectivamente, como:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega_S} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \int_{\Gamma_I} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t})(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t}) + \frac{\mu}{K} \int_{\Omega_D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

y

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q.$$

Por último, las formas lineales F y G están definidas como:

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_D} \mathbf{f}_D \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad G(q) = - \int_{\Omega_D} g_D q.$$

Es fácil probar que a y b son continuas, b satisface la condición inf-sup continua y a es coercitiva sobre el espacio nulo de b (ver, p.ej., Lema 3.3 de [30]). Está claro también que F y G son continuas y acotadas. Luego, usando la teoría clásica de métodos mixtos (ver el Teorema 2.3.2 del capítulo 2) se sigue el buen planteo de la formulación continua (3.1.5) y por lo tanto obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Existe única $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ solución de (3.1.5). Además, existe C , dependiente de la constante de la condición inf-sup continua de b , la constante de coercitividad (sobre el espacio nulo de b) de a y las constantes de acotación de a y b , tal que*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + \|p\|_Q \leq C \{ \|\mathbf{f}_S\|_{0, \Omega_S} + \|\mathbf{f}_D\|_{0, \Omega_D} + \|g_D\|_{0, \Omega_D} \}.$$

Observación 3.1.1. *Observamos que la formulación variacional mixta del problema acoplado (3.1.5) es equivalente a la formulación débil (2.4) (y también (2.5)) de [30], con la particularidad que, en nuestro caso, para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tenemos que $\int_{\Gamma_I} (\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_D) \cdot \mathbf{n}_S p_D = 0$.*

Es bien sabido que la discretización de la velocidad y la presión, para los problemas de Stokes y de Darcy, y del problema acoplado, tiene que realizarse de una manera particular para evitar inestabilidades (ver, por ejemplo, [32]).

Más aún, si consideramos un problema de Darcy en algún dominio \mathcal{D} y espacios de elementos finitos $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_0(\text{div}, \mathcal{D})$ y $Q_h \subset L_0^2(\mathcal{D})$, para aproximar la velocidad y la presión, las siguientes dos condiciones tienen que cumplirse:

$$\text{D1. } \exists \alpha > 0 : \|\mathbf{v}_h\|_{0,\mathcal{D}}^2 \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}(\text{div},\mathcal{D})}^2, \quad \forall \mathbf{v}_h \text{ tal que: } (\text{div } \mathbf{v}_h, q_h)_{\mathcal{D}} = 0, \quad \forall q_h \in Q_h.$$

D2. La condición LBB, es decir, existe $\hat{\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_h, q_h)_{\mathcal{D}}}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}(\text{div},\mathcal{D})}} \geq \hat{\beta} \|q_h\|_{0,\mathcal{D}} \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Por lo tanto, la principal diferencia para lidiar con el problema acoplado es que, mientras que en el problema de Stokes la familia de elementos tiene que satisfacer sólo la condición inf-sup, el problema de Darcy tiene que cumplir estas dos condiciones de compatibilidad. En efecto, para cualquier función $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D})$ tenemos que $\|\mathbf{v}\|_{1,\mathcal{D}} \geq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div},\mathcal{D})}$, es claro que, si la familia de elementos finitos satisface la condición inf-sup relacionada al problema de Stokes:

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_h, q_h)_{\mathcal{D}}}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{D}}} \geq \tilde{\beta} \|q_h\|_{0,\mathcal{D}} \quad \forall q_h \in Q_h,$$

también satisface la condición D2 pero no necesariamente la condición D1, a menos que $\text{div}(\mathbf{V}_h) = Q_h$. Por lo tanto, las aproximaciones por elementos finitos estables del problema de Stokes pueden no ser apropiadas para el problema de Darcy y, por consiguiente, para el problema acoplado bajo consideración.

3.2. El problema acoplado de Stokes-Darcy modificado

En esta sección introducimos una modificación a las ecuaciones de Darcy, con el propósito en mente del desarrollo de una discretización unificada para el problema acoplado, es decir, las partes de Stokes y Darcy son discretizadas usando los mismos espacios de elementos finitos continuos.

La modificación que aplicamos a una de las ecuaciones de Darcy sigue la idea dada en [20] para ecuaciones lineales elípticas. En efecto, observamos que tomando la segunda ecuación del problema de Darcy (3.1.2) podemos escribir, para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$,

$$\int_{\Omega_D} (\text{div } \mathbf{u}_D - g_D) \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.2.6)$$

Luego, sumando esta ecuación a la primera ecuación de la forma variacional dada en (3.1.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{K} \int_{\Omega_D} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_D} \operatorname{div} \mathbf{u}_D \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_{\Omega_D} p_D \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Gamma_I} \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}_D p_D \\ = \int_{\Omega_D} \mathbf{f}_D \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_D} g_D \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \int_{\Omega_D} \operatorname{div} \mathbf{u}_D q = \int_{\Omega_D} g_D q \quad \forall q \in Q. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

De ahora en adelante, trabajamos con esta forma variacional modificada de las ecuaciones de Darcy.

De la misma manera que antes, incorporando las condiciones de borde (3.1.3) y recordando que, como $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, tiene componente normal débilmente continua sobre Γ_I , la forma variacional del problema de Stokes-Darcy modificado puede ser escrito de la siguiente manera: Encontrar $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ que satisfaga

$$\begin{cases} \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}, q) = G(q) \quad \forall q \in Q, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

donde las formas bilineales $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ están definidas en $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \times Q$, respectivamente, como:

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega_S} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\mu}{K} \int_{\Omega_D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_D} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \int_{\Gamma_I} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t})(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t}),$$

y

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q.$$

Por último, las formas lineales L y G están definidas como:

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_D} \mathbf{f}_D \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_D} g_D \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \text{y} \quad G(q) = - \int_{\Omega_D} g_D q.$$

Este problema tiene única solución. En efecto, cuando consideramos el problema (3.1.5), vimos que b era continua y satisfacía la condición inf-sup continua y G era continua y acotada. Es claro que, con la modificación que introdujimos, la nueva forma bilineal \tilde{a} es coercitiva y continua y L es continua y acotada. Luego, aplicando la teoría clásica de métodos mixtos se sigue el buen planteo de la formulación continua (3.2.8).

Teorema 3.2.1. *Existe una única $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ solución de (3.2.8). Más aún, existe una constante positiva \tilde{C} , dependiente de la constante de la condición inf-sup continua de b , la constante de coercitividad de \tilde{a} y la constante de acotación de \tilde{a} y b , tal que*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + \|p\|_Q \leq \tilde{C} \{ \|\mathbf{f}_S\|_{0, \Omega_S} + \|\mathbf{f}_D\|_{0, \Omega_D} + \|g_D\|_{0, \Omega_D} \}.$$

3.3. Aproximación por MINI-elements del problema modificado

En esta sección, usamos los clásicos MINI-element (introducidos en [6]) para aproximar la velocidad y la presión tanto en la porción del dominio gobernado por la ecuación de Stokes como en la porción del dominio gobernado por la ecuación de Darcy. Teniendo en cuenta la modificación que realizamos en la sección anterior, vamos a demostrar que estos elementos (que son probablemente uno de los elementos más sencillos para la aproximación de la ecuación de Stokes) pueden ser aplicados con éxito al problema acoplado de Stokes-Darcy modificado.

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones de Ω tal que dos triángulos cualesquiera en \mathcal{T}_h comparten a lo sumo un vértice o un lado y cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ está en Ω_S o Ω_D . Sean \mathcal{T}_h^S y \mathcal{T}_h^D las correspondientes triangulaciones inducidas de Ω_S y Ω_D . Para cualquier $T \in \mathcal{T}_h$, denotamos por h_T el diámetro de T y ρ_T el diámetro de la mayor bola inscrita en T y $\eta_T = \frac{h_T}{\rho_T}$. Asumimos que la familia de triangulaciones es regular, es decir, existe $\eta > 0$ tal que $\eta_T \leq \eta$ para todo $T \in \mathcal{T}_h$ y $h > 0$. Además asumimos que la triangulación \mathcal{T}_h satisface que: para $T \in \mathcal{T}_h$, tenemos que T y Γ_I comparten a lo sumo un vértice o un lado (en particular, T no puede tener dos lados en Γ_I).

Sean $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ y $Q_h \subset Q$ espacios de elementos finitos. La formulación débil (3.2.8) nos lleva al siguiente problema discreto : Encontrar $(\mathbf{v}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ que satisfaga

$$\begin{cases} \tilde{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = L(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Se dice que la discretización es uniformemente estable si existen constantes $\delta, \gamma > 0$, independientes de h , tales que

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &\geq \delta \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}^2 & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}} &\geq \gamma \|q_h\|_Q & \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

De ahora en adelante, denotaremos por C a una constante positiva genérica, no necesariamente la misma en cada ocurrencia, la cual puede depender de la malla sólo a través del parámetro η .

Para $T \in \mathcal{T}_h$, sea b_T la burbuja cúbica estándar dada por:

$$b_T = \begin{cases} \delta_{1,T} \delta_{2,T} \delta_{3,T} & \text{en } T \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus T, \end{cases}$$

donde $\delta_{1,T}$, $\delta_{2,T}$ y $\delta_{3,T}$ denotan las coordenadas baricéntricas de $T \in \mathcal{T}_h$. Es fácil ver que la función burbuja satisface:

$$\int_T b_T = Ch_T^2 \text{ y } \|b_T\|_{1,T} \leq C. \quad (3.3.11)$$

Para cualquier subdominio $\mathcal{D} \subseteq \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $P_k(\mathcal{D}) = \{v \in C^0(\mathcal{D}) : v|_T \in \mathcal{P}_k(T) \forall T \in \mathcal{T}_h \cap \mathcal{D}\}$.

Introducimos la siguiente notación

$$\mathcal{E} = \{\text{todos los lados en } \mathcal{T}_h\}, \quad \mathcal{N} = \{\text{todos los vértices en } \mathcal{T}_h\},$$

y denotamos por N al número de vértices en \mathcal{N} .

Sea A un conjunto, definimos

$$\mathcal{E}_A = \{\ell \in \mathcal{E} : \ell \subset A\}.$$

Descomponemos

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\Omega_S} \cup \mathcal{E}_{\Omega_D} \cup \mathcal{E}_{\Gamma_S} \cup \mathcal{E}_{\Gamma_D} \cup \mathcal{E}_{\Gamma_I}.$$

Para $n \in \mathcal{N}$ denotamos

$$\omega_n = \bigcup \{T \mid T \in \mathcal{T}_h \text{ y } n \in T\}.$$

Para cualquier $T \in \mathcal{T}_h$ definimos

$$\omega_T = \bigcup \{\omega_n \mid n \text{ es un vértice de } T\}.$$

Para $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}$, denotamos por T_S y T_D los dos triángulos que comparten ℓ , con $T_S \in \mathcal{T}_h^S$ y $T_D \in \mathcal{T}_h^D$, y por $\omega_\ell = T_S \cup T_D$. Enumeramos los vértices de T_S y T_D de forma tal que los vértices de ℓ son numerados primero, es decir, sean e_1 y e_2 los vértices de ℓ denotamos por e_3^S y e_3^D los vértices en Ω_S y Ω_D respectivamente. Consideramos la función burbuja de lado clásica b_ℓ definida por:

$$b_\ell = \begin{cases} \delta_{e_1, T_i} \delta_{e_2, T_i} & \text{en } T_i, i = S \text{ o } D, \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \omega_\ell, \end{cases}$$

y definimos el espacio asociado a b_ℓ por

$$B_{3,\ell} := \{v_h \in C^0(\Omega) : v_h|_{\omega_\ell} = b_\ell \psi_{\omega_\ell}, \forall \ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}, \text{ con } \psi_{\omega_\ell} \in C^0(\omega_\ell), \psi_{\omega_\ell}|_{T_i} \in P_1(T_i) \\ \text{ y } \psi_{\omega_\ell}(e_3^i) = 0, i = S \text{ o } D\}.$$

Por otro lado, el espacio asociado a b_T es dado por

$$B_3 := \{v_h \in C^0(\Omega) : v_h|_T = c_T b_T, c_T \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Los espacios de elementos finitos para las velocidades y las presiones son

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h := \{ & \mathbf{v}_h \in (C^0(\Omega_S))^2, \mathbf{v}_h \in (C^0(\Omega_D))^2 : \mathbf{v}_h|_T \in (P_1(T) \oplus B_3)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset, \\ & \text{y } \mathbf{v}_h|_T \in (P_1(T) \oplus B_3)^2 \oplus B_{3,\ell}|_T \mathbf{n}_\ell \quad \forall T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \ell, \\ & \mathbf{v}_h = 0 \text{ en } \Gamma_S, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_D = 0 \text{ en } \Gamma_D \text{ y } \mathbf{v}_h^D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{v}_h^S \cdot \mathbf{n}_S = 0 \text{ en } \Gamma_I\}, \\ & \text{y} \\ Q_h := \{ & q_h \in C^0(\Omega_S), q_h \in C^0(\Omega_D) : q_h|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Observamos que, bases para el espacio $B_{3,\ell}$ pueden ser obtenidas fácilmente, por ejemplo, de la siguiente manera: Sea \hat{T} el clásico triángulo de referencia, es decir, el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Para cada triángulo $T \subset \omega_\ell$, denotamos por e_1, e_2 y e_3 los vértices de T , tal que e_1 y e_2 son los vértices de ℓ y e_3 es el vértice de T que no se encuentra en Γ_I . Si denotamos por (x_j, y_j) , $1 \leq j \leq 3$, las coordenadas de los vértices e_j de T , luego la transformación afín de \hat{T} en el triángulo de vértices e_1, e_2 y e_3 puede ser definida como:

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = (x_3 + (x_1 - x_3)\hat{x} + (x_2 - x_3)\hat{y}, y_3 + (y_1 - y_3)\hat{x} + (y_2 - y_3)\hat{y}),$$

observamos que F mapea el lado $\overline{(1,0)(0,1)}$ en ℓ . En \hat{T} consideramos las bases de Lagrange $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ tal que: $\hat{\beta}_1(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 1$, $\hat{\beta}_1(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = 0$ y $\hat{\beta}_1(0,0) = 0$, y $\hat{\beta}_2(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 0$, $\hat{\beta}_2(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = 1$ y $\hat{\beta}_2(0,0) = 0$. Por lo tanto, las correspondientes funciones bases en T son $\beta_{T,i} = \hat{\beta}_i \circ F^{-1}$, $i = 1, 2$.

Luego, definimos las burbujas cúbicas $v_{\ell,1}$ y $v_{\ell,2}$ tal que, $v_{\ell,i}|_T = \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \beta_{T,i}$, $i = 1, 2$ (ver Figura 3.2).

Remarcamos que el espacio de velocidades \mathbf{V}_h contiene funciones de la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{c}_T b_T + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}} (\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} \mathbf{n}_\ell + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2} \mathbf{n}_\ell),$$

donde \mathbf{v}^0 es un campo vectorial lineal a trozos continuo en Ω_D y Ω_S , b_T es una función burbuja en el triángulo T , \mathbf{c}_T es un vector constante, $v_{\ell,1}$ y $v_{\ell,2}$ son las funciones burbujas definidas anteriormente con soporte en ω_ℓ , y $\alpha_{\ell,i}$, $i = 1, 2$ son constantes.

El correspondiente espacio de presiones Q_h está formado por funciones lineales a trozos continuas sobre Ω_D y Ω_S .

Notemos que aunque las funciones burbuja añadidas son continuas sobre $\bar{\Omega}$, como las funciones lineales a trozos no se suponen continuas sobre $\bar{\Omega}$, a todas las funciones en \mathbf{V}_h y Q_h se les permite ser discontinuas a través de Γ_I .

Para asegurar la existencia y unicidad de solución por elementos finitos del problema discreto (3.3.9) para estos espacios, utilizamos el Corolario 2.4.1 del capítulo 2. En particular, para probar la condición inf-sup discreta (3.3.10), buscamos un “operador

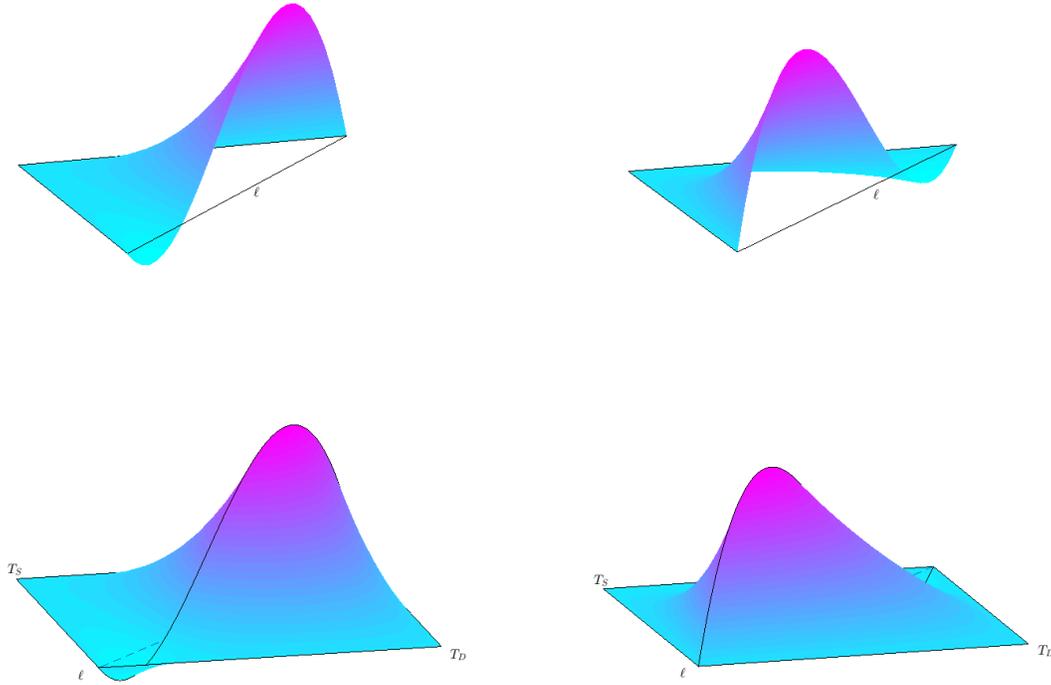


Figura 3.2: Las funciones burbuja $v_{\ell,1}|_T$ y $v_{\ell,2}|_T$ (arriba) y $v_{\ell,1}$ y $v_{\ell,2}$ en ω_ℓ (abajo)

de Fortin” (ver sección 2.4.1 del capítulo 2) $\mathbf{\Pi}_h : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{V}_h$ tal que

$$\begin{cases} b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \forall q_h \in Q_h \\ \|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_1 \end{cases}$$

donde $\|\mathbf{v}\|_1 = (\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_1^2)^{\frac{1}{2}}$.

Para definir el operador $\mathbf{\Pi}_h$ usamos el interpolador de Clément.

Para cualquier $n \in \mathcal{N}$ y $v \in L^2(\omega_n)$, podemos definir $\mathcal{P}_{\omega_n} : L^2(\omega_n) \rightarrow P_0(\omega_n)$ la proyección ortogonal de v en $P_0(\omega_n)$ con respecto al producto interno en $L^2(\omega_n)$ que cumple

$$\int_{\omega_n} v p_0 = \int_{\omega_n} \mathcal{P}_{\omega_n}(v) p_0 \quad \forall p_0 \in P_0(\omega_n),$$

3.3. APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES-DARCY MODIFICADO 37

y por lo tanto

$$\mathcal{P}_{\omega_n}(v) = \frac{1}{|\omega_n|} \int_{\omega_n} v.$$

Sean $\{\phi_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ las bases de Lagrange de \mathcal{T}_h , es decir, dado un nodo n_i , $\phi_i(n_i) = 1$ y vale cero en el resto de los nodos de la malla \mathcal{T}_h .

Para cualquier $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $n \in \mathcal{N}$ podemos definir $\mathbf{P}_{\omega_n}(\mathbf{v}) = (\mathcal{P}_{\omega_n}(v_1), \mathcal{P}_{\omega_n}(v_2))$. Luego, consideramos el interpolador de Clément como:

$$\mathcal{I}\mathbf{v}(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \mathbf{P}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}).$$

Para construir el operador global $\mathbf{\Pi}_h$, primero imponemos una condición en cada vértice $n \in \mathcal{N}$ de acuerdo a su localización en el dominio.

$$\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}(n) = \begin{cases} \mathcal{I}\mathbf{v}(n) = \mathbf{P}_{\omega_n}(\mathbf{v}) & \text{si } n \in \Omega_S, n \in \Omega_D \text{ o } n \in \Gamma_I^\circ \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde Γ_I° denota, como es usual, el interior de Γ_I .

Observamos que $\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} = ((\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v})_1, (\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v})_2)$ por lo tanto, para simplificar la notación, llamamos $\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v} = (\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v})_j$ para $1 \leq j \leq 2$.

Para cada $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}$, tenemos dos grados de libertad más sobre ℓ y por lo tanto podemos imponer que

$$\int_{\ell} \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma = \int_{\ell} \mathbf{v}^D \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma, \quad \forall \gamma \in P_1(\ell),$$

donde \mathbf{n}_ℓ representa el vector normal unitario sobre ℓ orientado hacia el exterior de Ω_D .

La otra condición, relacionada a la burbuja en cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$, que consideramos para definir el operador es:

$$\int_T \mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v} = \int_T v_j \quad j = 1, 2. \quad (3.3.12)$$

Escribimos una fórmula para el operador global en cada $T \in \mathcal{T}_h$. Notar que hay dos casos a considerar:

- a) $T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset$.
- b) $T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \ell$.

a) Para cualquier triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ que no tiene lados sobre Γ_I , como para ambas coordenadas del operador estamos usando el espacio $P_1 \oplus B_3$. Denotamos por n_i , $1 \leq i \leq 3$, sus vértices y por β_i las bases de Lagrange de T , es decir, $\beta_i(n_i) = 1$ y es cero en

el resto de los nodos de T . Para cada $j = 1, 2$, observamos que el operador restringido a T tiene la forma:

$$\mathbf{\Pi}_{h,j}\mathbf{v}|_T = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \beta_i|_T + \gamma^j \mathbf{b}_T,$$

donde

$$\alpha_i^j = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D, \end{cases}$$

y la constante γ^j se obtiene utilizando (3.3.12), es decir,

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \int_T \beta_i + \gamma^j \int_T \mathbf{b}_T = \int_T v_j, \quad j = 1, 2,$$

y por lo tanto,

$$\gamma^j = \frac{\int_T v_j - \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \int_T \beta_i}{\int_T \mathbf{b}_T}, \quad j = 1, 2.$$

Luego,

$$\mathbf{\Pi}_{h,j}\mathbf{v}|_T = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \beta_i|_T + \left(\frac{\int_T v_j - \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \int_T \beta_i}{\int_T \mathbf{b}_T} \right) \mathbf{b}_T.$$

Modificamos el proyector (ver, p.ej., Capítulo II sección 6 de [17]) para considerar las diferentes condiciones impuestas sobre los vértices al definir el operador

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j) = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D, \end{cases}$$

y por lo tanto $\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_1), \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_2))$.

Luego, usamos el siguiente interpolador modificado

$$\tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \tilde{\mathbf{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}).$$

Utilizando la expresión del interpolador que definimos previamente podemos reescribir el operador como

$$\mathbf{\Pi}_{h,j}\mathbf{v}(x)|_T = \tilde{\mathcal{I}}_j\mathbf{v}(x)|_T + \left(\frac{\int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j\mathbf{v}(x)|_T)}{\int_T \mathbf{b}_T} \right) \mathbf{b}_T(x). \quad (3.3.13)$$

3.3. APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES-DARCY MODIFICADO 39

b) Sea $T \in \mathcal{T}_h$ un triángulo con un lado en Γ_I , es decir, $\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \ell$. Para cada $j = 1, 2$, observamos que el operador restringido a T tiene la forma:

$$\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_T = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \beta_i|_T + \gamma^j \mathbf{b}_T + b_\ell \psi_{\omega_\ell}|_T \mathbf{n}_{\ell,j},$$

donde

$$\alpha_i^j = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D. \end{cases}$$

Definimos, de la misma manera que lo hicimos anteriormente, el proyector correspondiente

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j) = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D, \end{cases}$$

y el interpolador

$$\tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}),$$

con $\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_1), \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_2))$.

Para determinar γ^j y $v_\ell = b_\ell \psi_{\omega_\ell}$, en principio observamos que en este caso, tenemos dos grados de libertad más sobre ℓ y por lo tanto podemos imponer que

$$\int_\ell \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma = \int_\ell \mathbf{v}^D \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma, \quad \forall \gamma \in P_1(\ell), \quad (3.3.14)$$

donde \mathbf{n}_ℓ representa el vector normal unitario sobre ℓ orientado hacia el exterior de Ω_D . Luego, γ^j se obtiene de forma tal que (3.3.12) valga.

Por lo tanto, para cada $j = 1, 2$, observamos que el operador restringido a T tiene la forma:

$$\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}(x)|_T = \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)|_T + \left(\frac{\int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}) - \int_T v_\ell \mathbf{n}_{\ell,j}}{\int_T \mathbf{b}_T} \right) \mathbf{b}_T(x) + v_\ell(x)|_T \mathbf{n}_{\ell,j}. \quad (3.3.15)$$

donde, en vista de la condición (3.3.14), v_ℓ es tal que

$$\int_\ell v_\ell \gamma = \int_\ell (\mathbf{v}^D - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma, \quad \forall \gamma \in P_1(\ell), \quad (3.3.16)$$

con, para $T \subset \omega_\ell$, $v_\ell|_T = \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \psi_{\omega_\ell}|_T$. Es fácil probar que v_ℓ , es decir, ψ_{ω_ℓ} existe y es única. Primero, notemos que el número de condiciones definiendo ψ_{ω_ℓ} (dos por que $\gamma \in P_1(\ell)$) es igual a los grados de libertad de ψ_{ω_ℓ} . Para demostrar la existencia de ψ_{ω_ℓ} , es suficiente probar unicidad. Por lo tanto, tomando $\varphi_\ell = \psi_{\omega_\ell}|_\ell$, tenemos que $\varphi_\ell \in P_1(\ell)$ y $\int_\ell \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \varphi_\ell \gamma = 0 \quad \forall \gamma \in P_1(\ell)$, en particular podemos tomar $\gamma = \varphi_\ell$ y por lo tanto, $\int_\ell \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \varphi_\ell^2 = 0$. Luego, $\varphi_\ell = 0$ con lo que podemos deducir que, ψ_{ω_ℓ} es cero en ℓ . Finalmente, como ψ_{ω_ℓ} es cero también en los vértices de ω_ℓ que no están sobre ℓ , podemos concluir que $\psi_{\omega_\ell} \equiv 0$ como queríamos probar.

Tenemos que verificar ahora que el operador $\mathbf{\Pi}_h$ satisface

$$b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Considerando que

$$b(\mathbf{v}, q_h) = - \int_{\Omega_D} \operatorname{div} \mathbf{v} q_h - \int_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{v} q_h,$$

tenemos que

$$b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = - \int_{\Omega_D} \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) q_h - \int_{\Omega_S} \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) q_h.$$

Sumando sobre todos los triángulos en ambos dominios, integrando por partes en cada triángulo obtenemos

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) &= - \sum_{T \subset \Omega_D} \int_T \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) q_h - \sum_{T \subset \Omega_S} \int_T \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) q_h \\ &= \sum_{T \subset \Omega_D} \left(\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla q_h - \int_{\partial T} q_h (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D \right) + \\ &\quad \sum_{T \subset \Omega_S} \left(\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla q_h - \int_{\partial T} q_h (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S \right). \end{aligned}$$

Para cualquier $\ell \in \mathcal{E}_{\Omega_S} \cup \mathcal{E}_{\Omega_D}$ elegimos un vector normal unitario \mathbf{n}_ℓ y denotamos a los dos triángulos que comparten dicho lado como T_{in} y T_{out} , con \mathbf{n}_ℓ apuntando hacia el exterior de T_{out} . Definimos

$$[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\ell]_\ell := (\mathbf{v}|_{T_{\text{out}}}) \cdot \mathbf{n}_\ell - (\mathbf{v}|_{T_{\text{in}}}) \cdot \mathbf{n}_\ell,$$

que corresponde al salto de la componente normal de \mathbf{v} a través del lado ℓ . Notar que este valor es independiente de la dirección del vector normal elegido \mathbf{n}_ℓ .

3.3. APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES-DARCY MODIFICADO 41

Reescribiendo las integrales sobre los bordes de los triángulos, obtenemos

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) &= \sum_{T \subset \Omega_D} \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla q_h + \sum_{T \subset \Omega_S} \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla q_h \\
&- \frac{1}{2} \sum_{T \subset \Omega_D} \sum_{\ell \in \mathcal{E}_T \cap \Omega_D} \int_{\ell} [(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\ell}]_{\ell} q_h - \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_D}} \int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_h \\
&- \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}} \left[\int_{\ell} (\mathbf{v}^D - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_{D,h} + \int_{\ell} (\mathbf{v}^S - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_{S,h} \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{T \subset \Omega_S} \sum_{\ell \in \mathcal{E}_T \cap \Omega_S} \int_{\ell} [(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\ell}]_{\ell} q_h - \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_S}} \int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_h \\
&= I + II + III + IV + V + VI + VII.
\end{aligned}$$

Analizamos el valor de cada uno de los términos previos:

I - II) Como $q_h|_T \in P_1$, su gradiente es constante y por (3.3.12) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla q_{S,h} &= 0 \quad \forall T \subset \Omega_S, \\
\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla q_{D,h} &= 0 \quad \forall T \subset \Omega_D.
\end{aligned}$$

IV - VII) Si $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_S}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ y tenemos $\int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_h = 0$. Por otro lado, si $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_D}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ y por lo tanto $\int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_h = 0$.

III-VI) Por la continuidad de la componente normal de \mathbf{v} y $\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ tenemos que $\int_{\ell} [(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\ell}]_{\ell} q_h = 0$, para cualquier $\ell \in \mathcal{E}_{\Omega_S} \cup \mathcal{E}_{\Omega_D}$.

V) Si $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}$, como $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tenemos que $\int_{\ell} (\mathbf{v}^S - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_{S,h} = \int_{\ell} (\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}^D) \cdot \mathbf{n}_D q_{S,h}$. Por lo tanto, para probar que $\int_{\ell} (\mathbf{v}^D - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_{D,h} + \int_{\ell} (\mathbf{v}^S - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_{S,h} = 0$, es suficiente ver que:

$$\int_{\ell} \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_D \delta = \int_{\ell} \mathbf{v}^D \cdot \mathbf{n}_D \delta \quad \forall \delta \in P_1(\ell),$$

que vale por la propiedad (3.3.14). Finalmente, podemos asegurar que el término V se anula.

Como consecuencia podemos concluir que $b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \forall q_h \in Q_h$.

Lo siguiente que necesitamos probar es que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = (\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1,\Omega_S}^2 + \|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div},\Omega_D)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\mathbf{v}\|_1.$$

Primero analizamos $|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}|_{1,\Omega_S}$.

$$|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}|_{1,\Omega_S}^2 = |\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_{1,\Omega_S}^2 + |\mathbf{\Pi}_{h,2} \mathbf{v}|_{1,\Omega_S}^2.$$

Podemos calcular la seminorma de los operadores

$$|\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_{1,\Omega_S}^2 = \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_{1,T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_{1,T}^2, \quad j = 1, 2.$$

Comenzamos estudiando el término $I = \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_{1,T}^2$. De (3.3.13) tenemos que

$$I \leq C \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}|_{1,T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} \frac{\left| \int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}) \right|^2}{\left(\int_T \mathbf{b}_T \right)^2} |\mathbf{b}_T|_{1,T}^2 \right).$$

Aplicando (3.3.11) obtenemos

$$I \leq C \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)|_{1,T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} \frac{1}{h_T^4} \left| \int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)) \right|^2 \right) \quad (3.3.17)$$

Para el segundo término tenemos que

$$\left| \int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)) \right| \leq \int_T |v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)| \leq |T|^{\frac{1}{2}} \|v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)\|_{0,T}.$$

Usando $|T|^{\frac{1}{2}} \sim h_T$ y considerando la propiedad de aproximación dada en la página 84 de [17] obtenemos

$$\left| \int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)) \right| \leq Ch_T^2 \|v_j\|_{1,\omega_T}.$$

Para el primer término en (3.3.17) observamos que, fijando i , $1 \leq i \leq 3$, como el gradiente de $\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j)$ es cero, para $j = 1, 2$, aplicando una estimación inversa (ver, p.ej.,

3.3. APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA DE STOKES-DARCY MODIFICADO 43

Lema 3.1 de [22]) y la propiedad de aproximación previa obtenemos

$$\begin{aligned}
|\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)|_{1,T} &= |\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x) - \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j)|_{1,T} \leq C \frac{1}{h_T} \|\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x) - \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j)\|_{0,T} \\
&\leq C \frac{1}{h_T} \left(\|\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x) - v_j\|_{0,T} + \|v_j - \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j)\|_{0,T} \right) \\
&\leq C \|v_j\|_{1,\omega_T} + C \frac{1}{h_T} \|v_j - \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j)\|_{0,T}.
\end{aligned}$$

Considerando la propiedad de aproximación dada en la página 85 de [17] obtenemos que

$$\|v_j - \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j)\|_{0,T} \leq Ch_{\omega_{n_i}} |v_j|_{1,\omega_{n_i}},$$

luego

$$|\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)|_{1,T} \leq C \|v_j\|_{1,\omega_T} + C \frac{h_{\omega_{n_i}}}{h_T} |v_j|_{1,\omega_{n_i}}.$$

Como $h_{\omega_{n_i}} \leq Ch_T$ (ver, p.ej., Lema 1 de [35])

$$|\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}(x)|_{1,T} \leq C \|v_j\|_{1,\omega_T}.$$

Por lo tanto, concluimos que, como el número de triángulos en un vecindario ω_{n_i} está acotado por una constante uniforme,

$$I \leq C \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} \|v_j\|_{1,\omega_T}^2 \leq C \|v_j\|_1^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_1^2.$$

Continuamos analizando el término $II = \sum_{T \in \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_{1,T}^2$, es decir, el caso en que T tiene sólo un lado sobre la interfase, al que denotamos como ℓ .

De (3.3.15) tenemos que

$$\begin{aligned}
II &\leq C \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}|_{1,T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} \frac{\left| \int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}) \right|^2 + \left| \int_T v_\ell n_{\ell,j} \right|^2}{\left(\int_T \mathbf{b}_T \right)^2} |\mathbf{b}_T|_{1,T}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |v_\ell n_{\ell,j}|_{1,T}^2 \right). \tag{3.3.18}
\end{aligned}$$

Observamos que $v_\ell|_T = \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \psi_{\omega_\ell}|_T$ y ψ_{ω_ℓ} puede ser obtenida resolviendo el sistema no singular (3.3.16). Más precisamente, como para cada $T \subset \omega_\ell$, la función $\psi_{\omega_\ell}|_T$

puede ser escrita como $\psi_{\omega_\ell}|_T = \alpha_{\ell,1}\beta_{T,1} + \alpha_{\ell,2}\beta_{T,2}$ (con $\beta_{T,j}$, $j = 1, 2$, la base Lagrangiana definida anteriormente), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \int_\ell \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \beta_{T,1}^2 & \int_\ell \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \beta_{T,2} \beta_{T,1} \\ \int_\ell \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \beta_{T,1} \beta_{T,2} & \int_\ell \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \beta_{T,2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\ell,1} \\ \alpha_{\ell,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_\ell (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_\ell \beta_{T,1} \\ \int_\ell (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_\ell \beta_{T,2} \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por $\beta_{\omega_\ell,j}$ las funciones continuas definidas en ω_ℓ tal que $\beta_{\omega_\ell,j}|_T = \beta_{T,j}$, $j = 1, 2$, mediante un cálculo sencillo podemos ver que

$$|\alpha_{\ell,j}| \leq \frac{C}{|\ell|} \max_{j=1,2} \left| \int_\ell (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x)) \cdot \mathbf{n}_\ell \beta_{\omega_\ell,j} \right|$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_T (v_\ell n_{\ell,j})^2 &= \int_T (\delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \psi_{\omega_\ell} n_{\ell,j})^2 = \int_T ((\alpha_{\ell,1} \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \beta_{T,1}(x) + \alpha_{\ell,2} \delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T} \beta_{T,2}(x)) n_{\ell,j})^2 \\ &\leq C \max_{i=1,2} |\alpha_{\ell,i}|^2 \|\delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T}\|_{0,T}^2 \\ &\leq C \frac{1}{|\ell|} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x)\|_{0,\ell}^2 \|\delta_{e_1,T} \delta_{e_2,T}\|_{0,T}^2 \\ &\leq C \frac{|T|}{|\ell|} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x)\|_{0,\ell}^2 \leq Ch_T^2 \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}^2 \end{aligned}$$

donde usamos que $\int_T \delta_{e_1,T}^{n_1} \delta_{e_2,T}^{n_2} dx = \frac{n_1!n_2!2!}{(n_1+n_2+2)!} |T|$ y $\|\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x)\|_{0,\ell} \leq C|\ell|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}$ (ver, por ejemplo, [17, 34]).

Por lo tanto, $|\int_T v_\ell n_{\ell,j}| \leq |T|^{\frac{1}{2}} \|v_\ell n_{\ell,j}\|_{0,T} \leq Ch_T^2 \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}$. Más aún, usando una desigualdad inversa clásica, obtenemos

$$|v_\ell n_{\ell,j}|_{1,T} \leq C \frac{1}{h_T} \|v_\ell n_{\ell,j}\|_{0,T} \leq C \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}.$$

Por lo tanto, usando estas estimaciones en la expresión (3.3.18) del operador junto con el hecho de que $|\tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v}|_{1,T} \leq C \|v_j\|_{1,\omega_T}$ y $|\int_T (v_j - \tilde{\mathcal{I}}_j \mathbf{v})| \leq Ch_T^2 \|v_j\|_{1,\omega_T}$ como probamos anteriormente, podemos concluir que

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1,\Omega_S} \leq C \|\mathbf{v}\|_1.$$

Finalmente, queremos estimar $\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div},\Omega_D)}$.

Como $\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div},\Omega_D)} \leq \|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1,\Omega_D}$, con un análisis similar al que realizamos anteriormente para acotar $|\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_{1,\Omega_S}^2$, podemos afirmar que

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1,\Omega_D} \leq C \|\mathbf{v}\|_1.$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes resultados.

Lema 3.3.1. *El operador $\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ es acotado: Existe una constante positiva C tal que*

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_1.$$

Lema 3.3.2. *Condición Inf-Sup Discreta: Existe una constante positiva β tal que*

$$\sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}} \geq \beta \|q_h\|_Q \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Demostración. Sea $q_h \in Q_h$, es un resultado bien conocido (ver, p.ej., Corolario 2.4 en el Capítulo I de [28]) que existe una función vectorial $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y una constante $C_1 > 0$, independiente de q_h tal que $-\operatorname{div} \mathbf{v} = q_h$ y $\|\mathbf{v}\|_1 \leq C_1 \|q_h\|_0$.

Por la definición de $\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$, tenemos que $b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = 0$. Luego, el Lema 4.1 implica que

$$b(\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v}, q_h) = \|q_h\|_0^2 \geq \frac{1}{C_1} \|\mathbf{v}\|_1 \|q_h\|_0 \geq \frac{1}{C C_1} \|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|q_h\|_0,$$

lo que completa la demostración con $\beta = (C C_1)^{-1}$. \square

Teniendo en consideración que la forma bilineal \tilde{a} es coercitiva y continua, b es continua y satisface la condición inf-sup discreta, aplicando el Corolario 2.4.1 del capítulo 2, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Existe una única solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ del problema (3.3.9).*

En virtud del Teorema 2.4.1 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2. *Sea $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ la solución de la formulación débil (3.2.8) del problema acoplado. Sea $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ la solución del problema discreto (3.3.9). Sean los espacios de elementos finitos descritos en la sección 3. Luego, existe una constante C tal que:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|p - p_h\|_Q \leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right\}.$$

Luego, usando las estimaciones de error clásicas del interpolador de Clément (ver, por ejemplo, página 84 de [17]) y los resultados conocidos de error de interpolación de espacios de Sobolev (Teorema 1.4 de [28]) concluimos el siguiente resultado.

Corolario 3.3.1. *Sea (\mathbf{u}, p) la solución de los problemas acoplados (3.1.1)-(3.1.2) junto con las condiciones de interfase (3.1.3) tal que $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $p \in Q$ son lo suficientemente suaves tal que las normas del lado derecho de (3.3.19) son finitas para ciertos $r_1, r_2 \in (0, 1]$. Luego, la solución discreta (\mathbf{u}_h, p_h) del problema (3.3.9) satisface la siguiente estimación de error*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|p - p_h\|_Q \leq C \{h^{r_1} \|\mathbf{u}\|_{1+r_1, \Omega_S} + h^{r_2} \|\mathbf{u}\|_{1+r_2, \Omega_D} + h(|p|_{1, \Omega_S} + |p|_{1, \Omega_D})\}. \quad (3.3.19)$$

Capítulo 4

Aproximación numérica del problema acoplado de Stokes-Darcy en dominios curvos

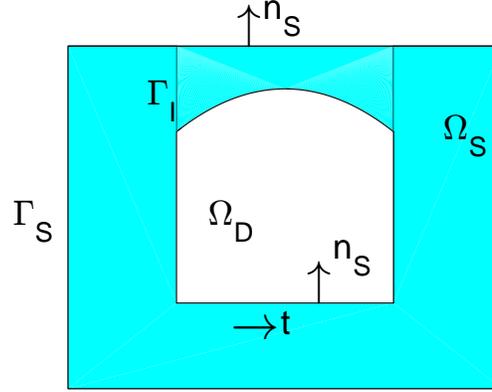
En este capítulo realizamos el análisis y la resolución numérica, con el método de elementos finitos considerado en el capítulo anterior, del problema acoplado de Stokes-Darcy en dominios curvos usando triángulos curvos. El interés de nuestro enfoque reside en poder representar fehacientemente, mediante el empleo de “triángulos curvos”, tanto el dominio como la interfase. Su análisis requiere algunas consideraciones especiales respecto al caso poligonal. Para este problema logramos obtener bajo apropiadas condiciones sobre el dominio en consideración, estimaciones de error de orden óptimo, extendiendo así los resultados obtenidos para el caso poligonal.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto y acotado, del mismo modo que lo hicimos en el capítulo 3, suponemos que Ω está dividido en dos subdominios abiertos Ω_S y Ω_D . Asumimos además que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_S \cup \bar{\Omega}_D$, $\Omega_S \cap \Omega_D = \emptyset$ y $\bar{\Omega}_S \cap \bar{\Omega}_D = \Gamma_I$ por lo tanto, Γ_I representa la interfase entre el fluido y el medio poroso. Las partes restantes de los bordes se denotan por $\Gamma_S = \partial\Omega_S \setminus \Gamma_I$ y $\Gamma_D = \partial\Omega_D \setminus \Gamma_I$, como se ilustra en la Figura 4.1. En esta oportunidad, suponemos que Γ_I , Γ_S y Γ_D son C^{k+1} a trozos, para $k \geq 1$, lo suficientemente grande como para satisfacer nuestros requerimientos.

El problema acoplado de Stokes-Darcy modificado, cuya forma variacional fue obtenida en las secciones 3.1 y 3.2 del capítulo 3, consistía en encontrar $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ tal que

$$\begin{cases} \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = L(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}, q) = G(q) & \forall q \in Q, \end{cases} \quad (4.0.1)$$

donde las formas bilineales $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ fueron definidas sobre $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \times Q$, respec-


 Figura 4.1: Ejemplo de dominio curvo bidimensional Ω

tivamente, como:

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega_S} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\mu}{K} \int_{\Omega_D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_D} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \int_{\Gamma_I} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t})(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t}),$$

y

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q,$$

y las formas lineales L y G como:

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_D} \mathbf{f}_D \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_D} g_D \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \text{y} \quad G(q) = - \int_{\Omega_D} g_D q.$$

En el Teorema 3.2.1 del capítulo anterior se demostró que este problema tiene única solución.

4.1. Elementos curvos

Los elementos curvos, que emplearemos a lo largo de este capítulo para representar fehacientemente los bordes curvos del dominio, pueden verse como una generalización natural de los elementos triangulares.

Asumimos que los bordes, Γ_I , Γ_S y Γ_D , pueden ser divididos en un número finito de arcos tal que cada uno de ellos tiene una representación paramétrica $(\phi(s), \psi(s))$, $a \leq s \leq b$, con funciones ϕ y ψ de clase C^{k+1} y tal que al menos una de las derivadas de ϕ y ψ es diferente de cero en (a, b) .

Dividimos Ω utilizando triángulos y complementamos en la parte curva de Γ_I , Γ_S y Γ_D con elementos curvos.

Para mostrar cómo llevamos adelante la construcción de la malla y las propiedades que dicha construcción tiene, vamos a denotar por Γ un borde curvo genérico, es decir, Γ puede estar representando la parte curva de Γ_I , Γ_S o Γ_D . Asumimos que el borde de los elementos curvos consisten de un arco $\widehat{P_1P_3} \subset \Gamma$ y segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ con P_1 y P_3 en el borde curvo y $P_2 \in \Omega$ (ver Figura 4.2). Denotamos por T al interior de esta curva, y por h_T y θ_T a la medida del lado más grande y del ángulo más chico del triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 . Notar que usamos la misma notación para llamar tanto a los triángulos curvos como a los triángulos clásicos.

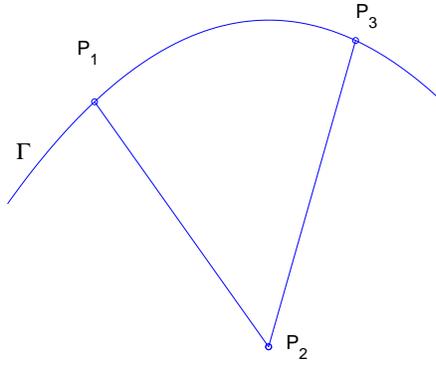


Figura 4.2: Triángulo curvo

Sea \hat{T} el clásico triángulo de referencia, es decir, el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Luego, para cada triángulo T en la triangulación introducimos una aplicación F que mapea el triángulo cerrado \hat{T} en el triángulo cerrado \overline{T} . De hecho, si denotamos por (x_j, y_j) , $1 \leq j \leq 3$, las coordenadas de los vértices P_j de T luego, el mapeo F puede ser definido como (ver [36]):

$$F(\xi, \eta) = F_0(\xi, \eta) + (1 - \xi - \eta)(\Phi(\eta), \Psi(\eta)) \quad (4.1.2)$$

donde F_0 es la transformación afín de \hat{T} en el triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 , es decir,

$$F_0(\xi, \eta) = (x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta, y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta), \quad (4.1.3)$$

y las funciones Φ y Ψ están definidas como:

$$\Phi(\eta) = \frac{\phi(s_1 + (s_3 - s_1)\eta) - x_1 - (x_3 - x_1)\eta}{1 - \eta} \quad (4.1.4)$$

y

$$\Psi(\eta) = \frac{\psi(s_1 + (s_3 - s_1)\eta) - y_1 - (y_3 - y_1)\eta}{1 - \eta} \quad (4.1.5)$$

con s_1 y s_3 los valores de los parámetros correspondientes a los vértices P_1 y P_3 respectivamente. Remarcamos que el punto $\eta = 1$ es sólo una singularidad aparente, más aún, es posible extender $\Phi(\eta)$ y $\Psi(\eta)$ para $\eta = 1$ tal que pertenezcan a C^k para $\eta \in [0, 1]$ (ver [36]).

Luego, dada una función polinomial $\hat{v}(\xi, \eta)$ en \hat{T} , de grado p , podemos definir una función $v(x, y)$ en T como: $v(x, y) = \hat{v}(F^{-1}(x, y))$.

El siguiente lema, que relaciona las seminormas de las funciones $v(x, y)$ y $\hat{v}(\xi, \eta)$, será de gran utilidad en las demostraciones a realizar, el mismo es un caso particular del Teorema 4.3.2 de [21] o del Lema 1 de [3].

Lema 4.1.1. *Si $\hat{v} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en $H^k(\hat{T})$, para $k = 0, 1$, la función $v = \hat{v} \circ F^{-1} : T \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $H^k(T)$ y existe una constante C tal que*

$$|v|_{0,T} \leq |J_F|_{\infty, \hat{T}}^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{0, \hat{T}}, \quad \forall \hat{v} \in L^2(\hat{T}) \quad (4.1.6)$$

$$|v|_{1,T} \leq C |J_F|_{\infty, \hat{T}}^{\frac{1}{2}} |DF^{-1}|_{\infty, T} |\hat{v}|_{1, \hat{T}}, \quad \forall \hat{v} \in H^1(\hat{T}) \quad (4.1.7)$$

Definición (Condición de ángulo mínimo): Sea \mathcal{T}_h una triangulación tal que si θ_T es el menor ángulo del triángulo formado por P_1, P_2 y P_3 , existe $\theta_0 > 0$ tal que $\theta_T \geq \theta_0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$.

El siguiente teorema presenta algunas propiedades de la transformación F , su demostración forma parte del Teorema 1 de [36], por una cuestión de completitud, la incluiremos en esta sección.

Teorema 4.1.1. *Sea Γ de clase C^{k+1} a trozos con $k \geq 1$. Si \mathcal{T}_h es una triangulación que cumple la condición de ángulo mínimo y h es suficientemente pequeño, la transformación F mapea \hat{T} uno a uno en T . El Jacobiano $J_F(\xi, \eta)$ de este mapeo es distinto a cero sobre \hat{T} , el lado $\overline{R_1 R_3}$ se mapea en el arco $\widehat{P_1 P_3}$, los lados $\overline{R_1 R_2}$ y $\overline{R_2 R_3}$ se mapean linealmente en los lados $\overline{P_1 P_2}$ y $\overline{P_2 P_3}$ respectivamente. Además, tanto la transformación F como su transformación inversa F^{-1} son de clase C^k . Más aún,*

$$c_1 h^2 \leq |J_F(\xi, \eta)| \leq c_2 h^2, \quad c_1 = \text{constante} > 0, \quad (4.1.8)$$

$$D^i x(\xi, \eta) = O(h^{|j|}), \quad D^i y(\xi, \eta) = O(h^{|j|}), \quad 1 \leq |i| \leq k, \quad (4.1.9)$$

$$D^i \xi(x, y) = O(h^{-1}), \quad D^i \eta(x, y) = O(h^{-1}), \quad |i| = 1, \quad (4.1.10)$$

donde $i = (i_1, i_2)$, $|i| = i_1 + i_2$, $D^i u(x, y) = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}}$ y $D^i v(\xi, \eta) = \frac{\partial^{|i|} v}{\partial \xi^{i_1} \partial \eta^{i_2}}$.

Demostración. Primero extendemos la definición de $\Phi(\eta)$ y $\Psi(\eta)$ para $\eta = 1$ y encontramos estimaciones para estas funciones y sus derivadas. Ambas $\Phi(\eta)$ y $\Psi(\eta)$ son de la forma $G(\eta) = \frac{g(\eta)}{(1-\eta)}$, donde $g(\eta)$ es de clase C^k y $g(0) = g(1) = 0$. Para esa función,

$$G^{(j)}(\eta) = (-1)^{j+1} (1-\eta)^{-j-1} \int_{\eta}^1 (\tau-1)^j g^{(j+1)}(\tau) d\tau, \quad j = 0, \dots, k. \quad (4.1.11)$$

Evidentemente (4.1.11) vale para $j = 0$. Supongamos que es verdadera para $j = s$. Integrando por partes, obtenemos

$$G^{(s)}(\eta) = \frac{1}{s+1} [-g^{(s+1)}(\eta) + (-1)^{s+2} (1-\eta)^{-s-1} \int_{\eta}^1 (\tau-1)^{s+1} g^{(s+2)}(\tau) d\tau].$$

Por lo tanto,

$$(s+1)G^{(s)}(\eta) + g^{(s+1)}(\eta) = (-1)^{s+2} (1-\eta)^{-s-1} \int_{\eta}^1 (\tau-1)^{s+1} g^{(s+2)}(\tau) d\tau.$$

Por otro lado, derivando la igualdad $(1-\eta)G(\eta) = g(\eta)$ obtenemos

$$(1-\eta)G^{(s+1)}(\eta) = (s+1)G^{(s)}(\eta) + g^{(s+1)}(\eta),$$

y vemos que (4.1.11) es cierta para $j = s+1$.

Ahora, de (4.1.11) se sigue que $G^{(j)}(\eta)$, con $j = 0, \dots, k$, puede ser extendido de forma continua para $\eta = 1$ porque usando el teorema del valor medio encontramos que

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} G^{(j)}(\eta) = -\frac{1}{j+1} g^{(j+1)}(1).$$

De (4.1.11) también obtenemos estimaciones de $\Phi^{(j)}(\eta)$ y $\Psi^{(j)}(\eta)$, $j = 0, \dots, k$. Si $g(\eta) = \phi(s_1 + \bar{s}_3 \eta) - x_1 - \bar{x}_3 \eta$, luego

$$\begin{aligned} g'(\eta) &= \bar{s}_3 \phi'(s_1 + \bar{s}_3 \eta) - [\phi(s_3) - \phi(s_1)] = \bar{s}_3 [\phi'(s_1 + \bar{s}_3 \eta) - \phi'(s_1 + \bar{s}_3 \tilde{\eta})] \\ &= \bar{s}_3^2 (\eta - \tilde{\eta}) \phi''(s_1 + \bar{s}_3 \tilde{\eta}), \quad 0 < \tilde{\eta}, \tilde{\eta} < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g'(\eta) = O(\bar{s}_3^2)$. Si $j \geq 2$, luego $g^{(j)}(\eta) = (\bar{s}_3)^j \phi^{(j)}(s_1 + \bar{s}_3 \eta) = O(\bar{s}_3^j)$. Como $|\phi'(s)| \geq m$, m constante > 0 , o $|\psi(s)'| \geq m$ sobre (a, b) , podemos ver fácilmente que

$\bar{x}_3 = O(h)$. Las estimaciones finales para $\Phi(\eta)$ se siguen de (4.1.11) (también podemos escribirlas para $\Psi(\eta)$) y son las siguientes

$$\Phi(\eta) = O(h^2), \quad \Psi(\eta) = O(h^2), \quad (4.1.12)$$

$$\Phi^{(j)}(\eta) = O(h^{j+1}), \quad \Psi^{(j)}(\eta) = O(h^{j+1}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.1.13)$$

Ahora probaremos que el mapeo F es inyectivo. Del teorema del seno se sigue que el lado menor del triángulo $P_1P_2P_3$ es mayor o igual que $h \sin \tau_0$. Por lo tanto, vale que $\sqrt{\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2} \geq h \sin \tau_0$ y

$$|\bar{x}_2| \geq c_0 h \quad \text{o} \quad |\bar{y}_2| \geq c_0 h,$$

con $c_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \tau_0$. Consideremos que vale el primer caso y escribamos a $x = x(\xi, \eta) = x_0(\xi, \eta) + (1 - \xi - \eta)\Phi(\eta)$ de la siguiente manera

$$x - x_1 - \bar{x}_3\eta - (1 - \eta)\Phi(\eta) = [\bar{x}_2 - \Phi(\eta)]\xi.$$

Como $\Phi(\eta) = O(h^2)$ y $|\bar{x}_2| \geq c_0 h$ podemos calcular ξ de la ecuación si h es suficientemente chico. Haciendo esto y reemplazando a ξ en $y = y(\xi, \eta) = y_0(\xi, \eta) + (1 - \xi - \eta)\Psi(\eta)$, llegamos a una ecuación de la forma $y = X(\eta)$. Mediante un cálculo sencillo, y utilizando las estimaciones (4.1.12) y (4.1.13), obtenemos

$$X'(\eta) = \frac{J_0}{\bar{x}_2} + O(h^2), \quad (4.1.14)$$

donde

$$J_0 = \begin{vmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \end{vmatrix}.$$

El valor absoluto de J_0 es igual a $2 \times$ (el área del triángulo $P_1P_2P_3$) lo que hace posible estimar $|J_0|$. Luego de algunos cálculos elementales obtenemos

$$\frac{1}{2} \sin \tau_0 h^2 < |J_0| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} h^2. \quad (4.1.15)$$

De (4.1.15) y (4.1.14) se sigue (teniendo en cuenta que $|\bar{x}_2| \geq c_0 h$) que $X'(\eta) \neq 0$ para $0 \leq \eta \leq 1$, si h es lo suficientemente chico, y esto prueba que el mapeo F es inyectivo. Como es continuo sobre \bar{T}_1 es un homeomorfismo. De la construcción de $\Phi(\eta)$ y $\Psi(\eta)$ se ve inmediatamente que los lados $\overline{R_1R_3}$ se mapean en el arco $\overline{P_1P_3}$, y los lados $\overline{R_1R_2}$ y $\overline{R_2R_3}$ son mapeados linealmente en los lados $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$, respectivamente. El homeomorfismo mapea el interior de la curva de Jordan en el interior de su imagen. Por lo tanto, es un homeomorfismo de \bar{T}_1 en \bar{T} . En relación al Jacobiano $J(\xi, \eta)$ podemos ver que

$$J(\xi, \eta) = J_0 + O(h^3).$$

Considerando la estimación (4.1.15) obtenemos inmediatamente (4.1.8). Más aún, el mapeo es de clase C^k y como $J(\xi, \eta) \neq 0$ sobre \bar{T}_1 se sigue que el mapeo inverso es también de esa clase. Finalmente, las estimaciones (4.1.9) y (4.1.10) se siguen de (4.1.12), (4.1.12) y (4.1.8). \square

4.2. Aproximación de Stokes-Darcy modificado en dominios curvos

En esta sección, utilizamos nuevamente los elementos MINI para aproximar a la velocidad y a la presión en todo el dominio. Este tipo de elemento, como demostraremos a lo largo de este capítulo, se puede aplicar con éxito al problema acoplado de Stokes-Darcy modificado incluso en dominios curvos, empleando elementos curvos a lo largo de la parte curva de Γ_I , Γ_S y Γ_D .

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones de Ω tal que cualesquiera dos triángulos en \mathcal{T}_h comparten a lo sumo un vértice o un lado y cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ está en Ω_S o en Ω_D . Sean \mathcal{T}_h^S y \mathcal{T}_h^D las correspondientes triangulaciones inducidas de Ω_S y Ω_D . Asumimos que la familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}$ satisface:

1. La condición de ángulo mínimo, es decir, existe una constante $\theta_0 > 0$ tal que $\theta_T \geq \theta_0$, para cualquier $T \in \mathcal{T}_h$,
2. Para $T \in \mathcal{T}_h$, tenemos que T y Γ_I comparten a lo sumo un vértice o un lado (en particular, T no puede tener dos lados en Γ_I).

Recalcamos que ahora T representa indistintamente un triángulo con bordes rectos o un triángulo con un borde curvo.

Sean $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ y $Q_h \subset Q$ espacios de elementos finitos. La formulación débil (4.0.1) nos conduce al siguiente problema discreto: Encontrar $(\mathbf{v}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ que satisfaga

$$\begin{cases} \tilde{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = L(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Recordemos que la discretización se dice que es uniformemente estable si existen constantes $\delta, \gamma > 0$, independientes de h , tal que

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &\geq \delta \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}^2 & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}} &\geq \gamma \|q_h\|_Q & \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

De ahora en adelante tengamos presente que C es una constante genérica positiva, no necesariamente la misma en cada ocurrencia, que puede depender de la malla sólo a través del parámetro θ_0 .

Para cualquier subdominio $\mathcal{D} \subseteq \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $W_k(\mathcal{D}) = \{v \in C^0(\mathcal{D}) : v|_T = \hat{v}|_{\hat{T}}(F^{-1}(x, y)) \text{ with } \hat{v}|_{\hat{T}} \in \mathcal{P}_k(\hat{T}) \forall T \in \mathcal{T}_h \cap \mathcal{D}\}$. Notemos que, debido a la presencia de triángulos curvos, la transformación F puede no ser una transformación afín y por ende las funciones en $W_k(\mathcal{D})$ ya no son necesariamente polinomiales. Para definir entonces las bases de los espacios involucrados y las funciones pertinentes a

nuestro análisis, vamos a valernos de definiciones en elementos de referencia (argumentos similares a los que exhibiremos aquí se utilizan en el trabajo [3]).

La correspondiente burbuja en cada triángulo (el cual podría ser curvo) se define ahora de la siguiente manera: Para $T \in \mathcal{T}_h$, sea

$$b_T(x, y) = \begin{cases} \hat{b}_{\hat{T}}(F^{-1}(x, y)) & \text{en } T \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus T, \end{cases}$$

donde $\hat{b}_{\hat{T}}$ es la clásica burbuja cúbica dada por $\hat{b}_{\hat{T}} = \hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}} \hat{\delta}_{(0,1),\hat{T}}$, donde $\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}}$, $\hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}}$ y $\hat{\delta}_{(0,1),\hat{T}}$ denotan las coordenadas baricéntricas de \hat{T} . Como, cualquiera sea el caso, la transformación F manda bordes en bordes, es claro que la función b_T sigue siendo una función burbuja en T .

Usando las propiedades (4.1.8) y (4.1.10), es fácil ver que la función burbuja satisface:

$$\int_T b_T \leq Ch_T^2 \quad \text{y} \quad \|b_T\|_{1,T} \leq C. \quad (4.2.18)$$

Recordamos la notación introducida en el capítulo anterior, consideramos para cada $n \in \mathcal{N}$ el correspondiente patch ω_n y para $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}$ el patch $\omega_\ell = T_S \cup T_D$, donde T_S y T_D denotan los dos triángulos que comparten ℓ , con $T_S \in \mathcal{T}_h^S$ y $T_D \in \mathcal{T}_h^D$.

Podemos asociar cualquier patch ω_n con un patch de referencia $\hat{\omega}_n$ como se sigue (ver Figura 4.3): Sea N_n el número de triángulos en ω_n , luego el correspondiente patch de referencia $\hat{\omega}_n$ es el polígono regular con N_n lados de longitud 1 que está centrado en el origen 0 y es triangulado por N_n triángulos que comparten el vértice 0. El patch ω_n puede ser relacionado con el patch de referencia por medio de un homeomorfismo $F_{\omega_n} : \hat{\omega}_n \rightarrow \omega_n$ con $F_{\omega_n}(0) = n$ que tiene la forma

$$F_{\omega_n}|_T := F \circ F_A^{-1} \quad (4.2.19)$$

donde el mapeo F_A es la transformación afín entre \hat{T} y los triángulos en $\hat{\omega}_n$.

Por otra parte, podemos asociar cualquier patch ω_ℓ con un patch de referencia $\hat{\omega}_\ell$ (ver Figura 4.4). Más aún, si enumeramos los vértices de T_S y T_D de forma tal que los vértices de ℓ son numerados primero, es decir, sean e_1 y e_2 los vértices de ℓ denotamos por e_3^S y e_3^D los vértices en Ω_S y Ω_D respectivamente. Luego, asociado a ω_ℓ podemos definir una transformación $F_{\omega_\ell} : \hat{\omega}_\ell \rightarrow \omega_\ell$, donde $\hat{\omega}_\ell = \hat{T}_1 \cup \hat{T}_2$ con $\hat{T}_1 = \hat{T}$ y \hat{T}_2 el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -1)$. El homeomorfismo F_{ω_ℓ} tiene la forma

$$F_{\omega_\ell}|_T := F \circ F_A^{-1} \quad (4.2.20)$$

donde el mapeo F_A es la transformación afín entre \hat{T} y los triángulos en $\hat{\omega}_\ell$.

Además, podemos definir una función burbuja de lado, b_ℓ , como:

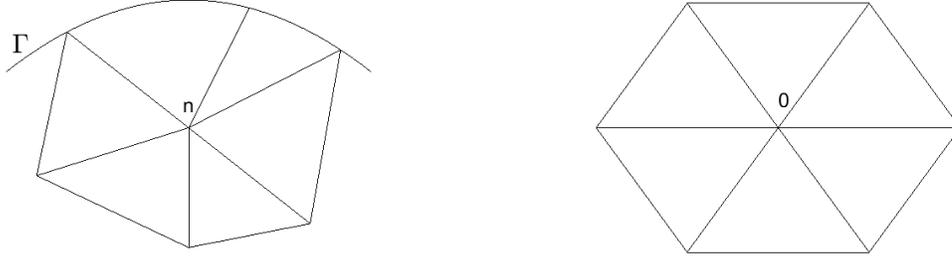


Figura 4.3: ω_n y $\hat{\omega}_n$.

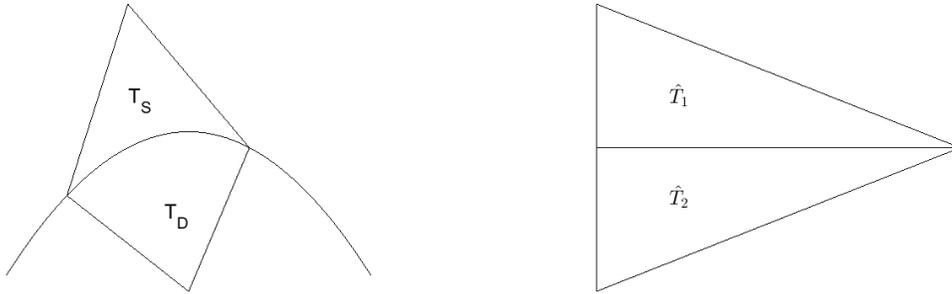


Figura 4.4: ω_ℓ y $\hat{\omega}_\ell$.

$$b_\ell(x, y) = \begin{cases} \hat{b}_\ell(F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)) & \text{en } \omega_\ell, \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \omega_\ell, \end{cases}$$

donde \hat{b}_ℓ es la función burbuja de lado cuadrática a trozos definida por $\hat{b}_\ell|_{\hat{T}_i} = \hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_i} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_i}$, $i = 1, 2$.

Asociados a cada lado $\ell \in \Gamma_I$ definimos las funciones burbuja $v_{\ell,1}$ y $v_{\ell,2}$ con soporte en ω_ℓ de la siguiente manera. Sea $\hat{T}_1 = \hat{T}$ el clásico triángulo de referencia, es decir, el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y \hat{T}_2 el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -1)$. Para cada triángulo $T_k \subset \omega_\ell$ ($k = S$ o D), denotamos por e_1, e_2 y e_3 los vértices de T_k , tal que e_1 y e_2 son vértices de ℓ y e_3 es el vértice de T_k que no está sobre Γ_I . Si denotamos por (x_j, y_j) , $1 \leq j \leq 3$, a las coordenadas de los vértices e_j de T_k ($k = S$ o D), luego la transformación de \hat{T}_i ($i = 1$ o 2) en el triángulo de vértices

e_1, e_2 y e_3 puede ser definida como en (4.2.20).

Por ejemplo, en \hat{T}_1 consideramos las bases Lagrangianas $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_1}$ y $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_1}$ tal que: $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_1}(\frac{1}{4}, 0) = 1$, $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_1}(\frac{3}{4}, 0) = 0$ y $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_1}(0, 1) = 0$, y $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_1}(\frac{1}{4}, 0) = 0$, $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_1}(\frac{3}{4}, 0) = 1$ y $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_1}(0, 1) = 0$. Por lo tanto, las correspondientes funciones bases en T_S resultan ser $\beta_{T_S,i} = \hat{\beta}_{i,\hat{T}_1} \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)$, $i = 1, 2$. Aplicando el mismo razonamiento en \hat{T}_2 obtenemos que las correspondientes funciones bases en T_D son $\beta_{T_D,i} = \hat{\beta}_{i,\hat{T}_2} \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)$, $i = 1, 2$, donde $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_2}$ y $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_2}$ son tal que: $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_2}(\frac{1}{4}, 0) = 1$, $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_2}(\frac{3}{4}, 0) = 0$ y $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_2}(0, -1) = 0$, y $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_2}(\frac{1}{4}, 0) = 0$, $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_2}(\frac{3}{4}, 0) = 1$ y $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_2}(0, -1) = 0$.

Luego, definimos las burbujas $v_{\ell,1}$ y $v_{\ell,2}$ tal que, $v_{\ell,i}|_{T_S} = (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1} \hat{\beta}_{i,\hat{T}_1}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)$ y $v_{\ell,i}|_{T_D} = (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_2} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_2} \hat{\beta}_{i,\hat{T}_2}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)$, $i = 1, 2$ (ver Figura 4.5).

Los espacios de elementos finitos para las velocidades y las presiones son

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h := \{ & \mathbf{v}_h \in (C^0(\Omega_S))^2, \mathbf{v}_h \in (C^0(\Omega_D))^2 : \mathbf{v}_h|_T = \hat{\mathbf{v}}_h|_{\hat{T}}(F^{-1}(x, y)), \hat{\mathbf{v}}_h|_{\hat{T}} \in (P_1(\hat{T}) \oplus \langle \hat{b}_{\hat{T}} \rangle)^2, \\ & \forall T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset, \text{ y } \mathbf{v}_h|_T = \hat{\mathbf{v}}_h|_{\hat{T}_i}(F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)), \\ & \hat{\mathbf{v}}_h|_{\hat{T}_i} \in (P_1(\hat{T}_i) \oplus \langle \hat{b}_{\hat{T}_i} \rangle)^2 \oplus \langle \hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_i} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_i} \hat{\beta}_{1,\hat{T}_i}, \hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_i} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_i} \hat{\beta}_{2,\hat{T}_i} \rangle \cdot (\mathbf{n}_\ell \circ F_{\omega_\ell}), \\ & \forall T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \ell \text{ donde } i = 1 \text{ si } T = T_S \text{ o } i = 2 \text{ si no,} \\ & \mathbf{v}_h = 0 \text{ en } \Gamma_S, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_D = 0 \text{ en } \Gamma_D \text{ y } \mathbf{v}_h^D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{v}_h^S \cdot \mathbf{n}_S = 0 \text{ en } \Gamma_I \} \end{aligned}$$

y

$$Q_h := \{q_h \in C^0(\Omega_S), q_h \in C^0(\Omega_D) : q_h|_T = \hat{q}_h|_{\hat{T}}(F^{-1}(x, y)), \hat{q}_h|_{\hat{T}} \in P_1(\hat{T}) \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap L_0^2(\Omega).$$

El espacio correspondiente a las velocidades \mathbf{V}_h está formado por funciones de la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{c}_T b_T + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}} (\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} \mathbf{n}_\ell + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2} \mathbf{n}_\ell),$$

donde \mathbf{v}^0 es una función continua sobre Ω_D y Ω_S ($\mathbf{v}^0|_T = \hat{\mathbf{v}}^0|_{\hat{T}} \circ F^{-1}(x, y)$ donde $\hat{\mathbf{v}}^0|_{\hat{T}}$ es un campo vectorial lineal a trozos sobre \hat{T}), b_T es una función burbuja en el triángulo T , \mathbf{c}_T es un vector constante, $v_{\ell,1}$ y $v_{\ell,2}$ son las funciones burbujas definidas anteriormente con soporte en ω_ℓ , y $\alpha_{\ell,i}$, $i = 1, 2$ son constantes.

El espacio correspondiente a las presiones Q_h está formado por funciones continuas q_h sobre Ω_D y Ω_S donde $q_h|_T = \hat{q}_h|_{\hat{T}} \circ F^{-1}(x, y)$ y $\hat{q}_h|_{\hat{T}}$ es una función lineal a trozos sobre \hat{T} .

Nuevamente usamos la teoría de elementos finitos mixtos para concluir la existencia y unicidad de solución por elementos finitos del problema discreto (4.2.16) para estos

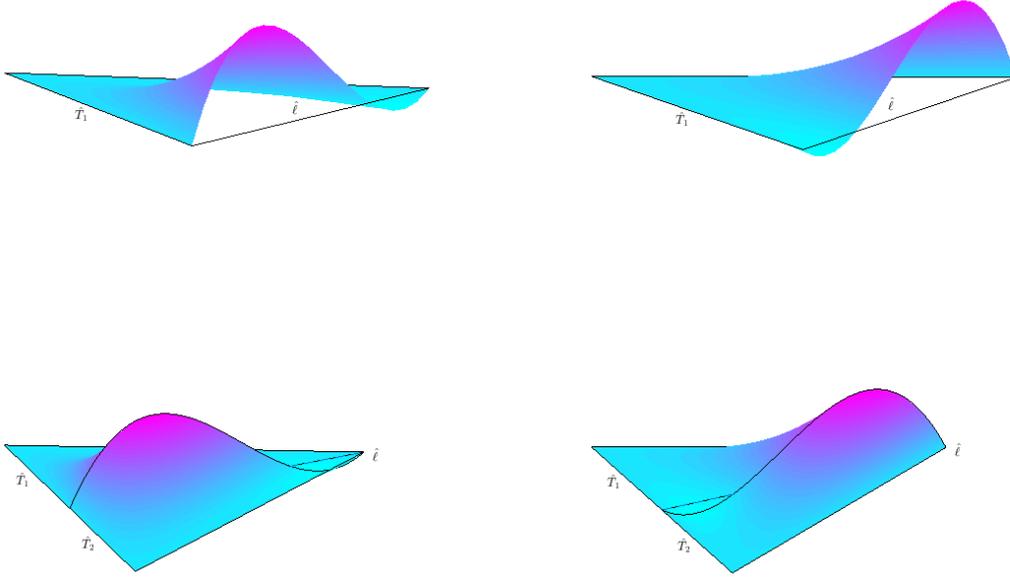


Figura 4.5: Las funciones burbujas $\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1}$, $\hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1}$, $\hat{\beta}_{1,\hat{T}_1}$ y $\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1}$, $\hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1}$, $\hat{\beta}_{2,\hat{T}_1}$ (arriba) y $\hat{v}_{\ell,1}$ y $\hat{v}_{\ell,2}$ en $\hat{\omega}_\ell$ (abajo).

espacios. Con el fin de demostrar la condición inf-sup discreta (4.2.17), buscamos un operador $\mathbf{\Pi}_h : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{V}_h$ tal que

$$\begin{cases} b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \forall q_h \in Q_h \\ \|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_h} \leq C \|\mathbf{v}\|_1 \end{cases}$$

donde $\|\mathbf{v}\|_1 = (\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_1^2)^{\frac{1}{2}}$.

Llamamos $W_0(\omega_n) = \{\kappa \in C^0(\omega_n) : \kappa|_{\omega_n} = \hat{\kappa}|_{\hat{\omega}_n} \circ F_{\omega_n}^{-1}(x, y) \text{ con } \hat{\kappa}|_{\hat{\omega}_n} \in P_0(\hat{\omega}_n) \text{ y } n \in \Omega_S \cup \Gamma_I^\circ \cup \Omega_D\}$. Para definir el operador $\mathbf{\Pi}_h$ usamos el interpolador de Clément.

Para cualquier $n \in \mathcal{N}$ y $v \in L^2(\omega_n)$, podemos definir $\mathcal{P}_{\omega_n} : L^2(\omega_n) \rightarrow W_0(\omega_n)$ la proyección ortogonal de v en $W_0(\omega_n)$ con respecto al producto interno en $L^2(\omega_n)$ que cumple

$$\int_{\omega_n} v p_0 = \int_{\omega_n} \mathcal{P}_{\omega_n}(v) p_0 \quad \forall p_0 \in W_0(\omega_n),$$

y por lo tanto

$$\mathcal{P}_{\omega_n}(v) = \frac{1}{|\omega_n|} \int_{\omega_n} v.$$

A cada triangulación \mathcal{T}_h le podemos asociar una “triangulación de referencia” $\hat{\mathcal{T}}_h$ conectando, para todo $n \in \mathcal{N}$, patches ω_n con sus correspondientes patches de referencia $\hat{\omega}_n$.

Sea $\{\hat{\phi}_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ la base Lagrangiana en $\hat{\mathcal{T}}_h$, es decir, dado un nodo \hat{n}_i , $\hat{\phi}_i(\hat{n}_i) = 1$ y vale cero en el resto de los nodos de la malla $\hat{\mathcal{T}}_h$.

Para cualquier $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $n \in \mathcal{N}$ podemos definir $\mathbf{P}_{\omega_n}(\mathbf{v}) = (\mathcal{P}_{\omega_n}(v_1), \mathcal{P}_{\omega_n}(v_2))$. Luego, consideremos el siguiente interpolador de Clément:

$$\mathcal{I}\mathbf{v}(x, y) = \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i(F^{-1}(x, y)) \mathbf{P}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}).$$

En pos de construir el operador global $\mathbf{\Pi}_h$, imponemos una condición en cada vértice $n \in \mathcal{N}$ de acuerdo a su localización en el dominio.

$$\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}(n) = \begin{cases} \mathcal{I}\mathbf{v}(n) = \mathbf{P}_{\omega_n}(\mathbf{v}) & \text{si } n \in \Omega_S, n \in \Omega_D \text{ o } n \in \Gamma_I^\circ \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde Γ° denota, como es usual, el interior de Γ .

Observamos que $\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} = ((\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v})_1, (\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v})_2)$ por lo tanto, para simplificar notación, llamamos $\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v} = (\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v})_j$ para $1 \leq j \leq 2$.

Para cada $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}$, tenemos dos grados de libertad más sobre ℓ y por consiguiente podemos imponer que

$$\int_{\ell} \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma = \int_{\ell} \mathbf{v}^D \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma, \quad \forall \gamma \in W_1(\Gamma_I),$$

donde \mathbf{n}_ℓ representa el vector normal unitario en ℓ con orientación exterior a Ω_D y $W_1(\Gamma_I) = \{\zeta \in C^0(\Gamma_I) : \zeta|_\ell = \hat{\zeta}|_{\hat{\ell}} \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y) \text{ con } \hat{\zeta}|_{\hat{\ell}} \in P_1(\hat{\ell}) \quad \forall \ell \in \mathcal{T}_h \cap \Gamma_I\}$.

La otra condición, relacionada a la burbuja en cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$, que consideramos para definir el operador es la siguiente:

$$\int_T \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} \cdot DF^{-1}(j, :) dx dy = \int_T \mathbf{v} \cdot DF^{-1}(j, :) dx dy \quad j = 1, 2, \quad (4.2.21)$$

donde DF^{-1} se refiere a la matriz jacobiana de F^{-1} , es decir, $DF^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Ahora sí, estamos en condiciones de escribir una fórmula para el operador global en cada $T \in \mathcal{T}_h$. Notar que hay dos casos a considerar:

- a) $T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset$.
b) $T \in \mathcal{T}_h : \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \ell$.

a) Para cualquier triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ que no tiene lados en Γ_I , denotamos por n_i , $1 \leq i \leq 3$, a sus vértices y por \hat{n}_i los correspondientes en \hat{T} . Sean $\hat{\beta}_i$ las bases de Lagrange en \hat{T} , es decir, $\hat{\beta}_i(\hat{n}_i) = 1$ y vale cero en el resto de los nodos de \hat{T} . Además, consideramos $\beta_i = \hat{\beta}_i|_{\hat{T}} \circ F^{-1}(x, y)$. Para cada $j = 1, 2$, observamos que el operador restringido a T tiene la forma:

$$\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}|_T(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \beta_i(x, y) + \gamma^j \mathbf{b}_T(x, y),$$

donde

$$\alpha_i^j = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D, \end{cases}$$

y la constante γ^j se obtiene utilizando (4.2.21), es decir,

$$\begin{pmatrix} \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy & \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \\ \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy & \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(1, :) dx dy \\ \int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(2, :) dx dy \end{pmatrix}.$$

Sea

$$M = \begin{pmatrix} \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy & \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \\ \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy & \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \end{pmatrix},$$

notemos que en el caso en que la transformación fuera afín, o sea, $F(\xi, \eta) = F_0(\xi, \eta)$, tenemos que $M = (\int_T \mathbf{b}_T dx dy) DF^{-1}(x, y) = (\int_T \mathbf{b}_T dx dy) DF_0^{-1}(x, y)$, la cual es obviamente inversible. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir:

Hipótesis (H1): La transformación $F(\xi, \eta)$ es tal que, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, M es inversible.

Considerando la hipótesis anterior obtenemos, por un simple cálculo, que

$$\gamma^1 = \frac{1}{\Delta} \left[\begin{pmatrix} \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \\ \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(1, :) dx dy \\ \int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(2, :) dx dy \end{pmatrix} - \right]$$

y

$$\gamma^2 = \frac{1}{\Delta} \left[- \begin{pmatrix} \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy \\ \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(1, :) dx dy \\ \int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(2, :) dx dy \end{pmatrix} + \right]$$

donde $\Delta = \det (M)$, es decir,

$$\Delta = \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy \right) \left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right) - \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy \right).$$

Observemos que en el caso en que $F(\xi, \eta) = F_0(\xi, \eta)$ resulta: $\Delta = (\int_T b_T dx dy)^2 \det (DF_0^{-1}(x, y))$.
Utilizando γ^1, γ^2 y Δ , la expresión del operador nos quedaría

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_T(x, y) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i^1 \beta_i|_T(x, y) + \frac{1}{\Delta} \left[\left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(1, :) dx dy \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(2, :) dx dy \right) \right] b_T(x, y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{h,2} \mathbf{v}|_T(x, y) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \beta_i|_T(x, y) + \frac{1}{\Delta} \left[- \left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(1, :) dx dy \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_i^1 \alpha_i^2]) DF^{-1}(2, :) dx dy \right) \right] b_T(x, y). \end{aligned}$$

Ahora modificamos el proyector para considerar las diferentes condiciones impuestas sobre los vértices cuando definimos al operador

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j) = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D, \end{cases}$$

y por lo tanto $\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_1), \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_2))$.

Luego, usamos el siguiente interpolador modificado

$$\tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x, y) = \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i(F^{-1}(x, y)) \tilde{\mathbf{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}).$$

Utilizando lo definido anteriormente podemos reescribir el operador de la siguiente manera

$$\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_T(x, y) = \tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}(x, y)|_T + \frac{1}{\Delta} \left[\left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x, y)) DF^{-1}(1, :) dx dy \right) \right]$$

$$-\left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy\right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x, y)) DF^{-1}(2, \cdot) dx dy\right) \Big] b_T(x, y) \quad (4.2.22)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{h,2}\mathbf{v}|_T(x, y) &= \tilde{\mathcal{I}}_2\mathbf{v}(x, y)|_T + \frac{1}{\Delta} \left[-\left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy\right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x, y)) DF^{-1}(1, \cdot) dx dy\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy\right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x, y)) DF^{-1}(2, \cdot) dx dy\right) \right] b_T(x, y). \end{aligned}$$

b) Sea $T \in \mathcal{T}_h$ un triángulo con un lado en Γ_I , es decir, $\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \ell$. Para cada $j = 1, 2$, observamos que el operador restringido a T tiene la forma:

$$\mathbf{\Pi}_{h,j}\mathbf{v}|_T(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j \beta_i|_T(x, y) + \gamma^j b_T(x, y) + (\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2})|_T(x, y) n_{\ell,j}(x, y),$$

donde

$$\alpha_i^j = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D. \end{cases}$$

Definimos, de la misma forma que lo hicimos anteriormente, el correspondiente operador

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_j) = \begin{cases} \mathcal{P}_{\omega_{n_i}}(v_j) & \text{si } n_i \in \Omega_S, n_i \in \Omega_D \text{ o } n_i \in \Gamma_I^\circ, \\ 0 & \text{si } n_i \in \bar{\Gamma}_S \text{ o } n_i \in \Gamma_D, \end{cases}$$

y el interpolador

$$\tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}(x, y) = \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i(F^{-1}(x, y)) \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}),$$

con $\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_1), \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_2))$.

Para determinar γ^j , $\alpha_{\ell,1}$ y $\alpha_{\ell,2}$, en principio observamos que en este caso, tenemos dos grados de libertad más en ℓ , por lo tanto podemos imponer que

$$\int_\ell \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma = \int_\ell \mathbf{v}^D \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma, \quad \forall \gamma \in W_1(\Gamma_I), \quad (4.2.23)$$

donde \mathbf{n}_ℓ representa el vector normal unitario en ℓ con orientación exterior a Ω_D . Luego, γ^j se obtiene de forma tal que (4.2.21) valga.

Por lo tanto, observamos que el operador restringido a T tiene la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{h,1}\mathbf{v}|_T(x, y) &= \tilde{\mathcal{I}}_1\mathbf{v}|_T(x, y) \\ &+ \frac{1}{\Delta} \left[\int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial n}{\partial y} dx dy \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(1, :) dx dy - \int_T (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(1, :) dx dy \right) \right. \\ &- \left. \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(2, :) dx dy - \int_T (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(2, :) dx dy \right) \right] \mathbf{b}_T(x, y) \\ &+ (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2})|_T(x, y) \mathbf{n}_{\ell,1}(x, y) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{h,2}\mathbf{v}|_T(x, y) &= \tilde{\mathcal{I}}_2\mathbf{v}|_T(x, y) + \\ &\frac{1}{\Delta} \left[- \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial n}{\partial x} dx dy \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(1, :) dx dy - \int_T (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(1, :) dx dy \right) \right. \\ &+ \left. \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(2, :) dx dy - \int_T (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(2, :) dx dy \right) \right] \mathbf{b}_T(x, y) \\ &+ (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2})|_T(x, y) \mathbf{n}_{\ell,2}(x, y). \end{aligned}$$

donde, en vista de la condición (4.2.23), $\alpha_{\ell,1}$ y $\alpha_{\ell,2}$ son tal que

$$\int_\ell (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2})|_T \gamma = \int_\ell (\mathbf{v}^D - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_\ell \gamma, \quad \forall \gamma \in W_1(\Gamma_I), \quad (4.2.25)$$

con, para $T \subset \omega_\ell$, $v_{\ell,i}|_T = (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_j} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_j} \hat{\beta}_{i,\hat{T}_j}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)$ (donde $j = 1$ si $T = T_S$ o $j = 2$ si no). Es fácil probar que $\alpha_{\ell,1}$ y $\alpha_{\ell,2}$ existen y son únicas. Primero, notamos que el número de condiciones que definen $\alpha_{\ell,1}$ y $\alpha_{\ell,2}$ (dos porque $\gamma \in W_1(\Gamma_I)$) es igual a los grados de libertad (dos porque tenemos dos incógnitas). Para demostrar la existencia de $\alpha_{\ell,1}$ y $\alpha_{\ell,2}$, es suficiente probar unicidad, es decir,

$$\int_\ell (\alpha_{\ell,1}v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2}v_{\ell,2})|_T \gamma = 0 \quad \forall \gamma \in W_1(\Gamma_I) \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha_{\ell,1} = \alpha_{\ell,2} = 0.$$

Si consideramos $\varphi_\ell = [(\alpha_{\ell,1}\hat{\beta}_{1,\hat{T}_j} + \alpha_{\ell,2}\hat{\beta}_{2,\hat{T}_j}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)]|_\ell$, tenemos que $\varphi_\ell \in W_1(\Gamma_I)$ y $\int_\ell (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_j} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_j}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1} \varphi_\ell \gamma = 0 \quad \forall \gamma \in W_1(\Gamma_I)$. Tomando, en particular, $\gamma = \varphi_\ell$ obtenemos, $\int_\ell (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_j} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_j}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1} \varphi_\ell^2 = 0$. Parametrizamos a $\hat{\ell}$ de la siguiente forma, $\xi(t) = (t, 0)$ con $0 \leq t \leq 1$. Luego, como $F_{\omega_\ell}(\xi(t))$ es una parametrización de ℓ

obtenemos

$$0 = \int_{\ell} (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_j} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_j}) \circ F_{\omega_{\ell}}^{-1} \varphi_{\ell}^2 = \int_0^1 [(\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_j} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_j}) \circ \xi(t)] [(\alpha_{\ell,1} \hat{\beta}_{1,\hat{T}_j} + \alpha_{\ell,2} \hat{\beta}_{2,\hat{T}_j}) \circ \xi(t)]^2 \left\| \left(\frac{\partial(F_{\omega_{\ell}}(\xi(t)))_1}{\partial t}, \frac{\partial(F_{\omega_{\ell}}(\xi(t)))_2}{\partial t} \right) \right\|$$

donde $(F_{\omega_{\ell}}(\xi(t)))_i$ representa la coordenada i -ésima de la transformación.

Por lo tanto, $(\alpha_{\ell,1} \hat{\beta}_{1,\hat{T}_j} + \alpha_{\ell,2} \hat{\beta}_{2,\hat{T}_j}) \circ \xi(t) = 0$ para todo t , $0 \leq t \leq 1$, y por lo tanto deben ser $\alpha_{\ell,1} = \alpha_{\ell,2} = 0$ como queríamos ver.

Tenemos que verificar que el operador $\mathbf{\Pi}_h$ satisface

$$b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \forall q_h \in Q_h.$$

De la misma manera que hicimos en la sección 3.3 del capítulo anterior podemos escribir:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) &= \sum_{T \subset \Omega_D} \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \nabla q_h \, dx \, dy + \sum_{T \subset \Omega_S} \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \nabla q_h \, dx \, dy \\ &- \frac{1}{2} \sum_{T \subset \Omega_D} \sum_{\ell \in \mathcal{E}_T \cap \Omega_D} \int_{\ell} [(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\ell}]_{\ell} q_h - \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_D}} \int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_h \\ &- \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}} \left[\int_{\ell} (\mathbf{v}^D - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_{D,h} + \int_{\ell} (\mathbf{v}^S - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_{S,h} \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{T \subset \Omega_S} \sum_{\ell \in \mathcal{E}_T \cap \Omega_S} \int_{\ell} [(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\ell}]_{\ell} q_h - \sum_{\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_S}} \int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_h \\ &= I + II + III + IV + V + VI + VII. \end{aligned}$$

El propósito ahora es analizar el valor de cada uno de los términos anteriores teniendo presente la presencia de triángulos curvos.

I - II) Queremos ver que

$$\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \nabla q_{S,h} \, dx \, dy = 0 \quad \forall T \subset \Omega_S \quad \text{y} \quad \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \nabla q_{D,h} \, dx \, dy = 0 \quad \forall T \subset \Omega_D.$$

Probaremos la primera igualdad, la segunda se deduce de la misma forma. Como $\hat{q}_{S,h} \in P_1(\hat{T})$, su gradiente es constante, por lo tanto tenemos que

$$\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \nabla q_{S,h} \, dx \, dy = \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \nabla^{\xi,\eta} \hat{q}_{S,h} DF^{-1}(x, y) \, dx \, dy.$$

Supongamos ahora que $\nabla^{\xi,\eta} \hat{q}_{S,h} = [C_1 \ C_2]$ luego

$$\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla^{\xi,\eta} \hat{q}_{S,h} DF^{-1}(x, y) dx dy =$$

$$\int_T (\mathbf{v}_1 - \mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v})(C_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial \eta}{\partial x}) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{\Pi}_{h,2} \mathbf{v})(C_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + C_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}) dx dy.$$

Reacomodando y aplicando (4.2.21) obtenemos

$$\int_T C_1 [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{\Pi}_{h,2} \mathbf{v}) \frac{\partial \xi}{\partial y}] + C_2 [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{\Pi}_{h,2} \mathbf{v}) \frac{\partial \eta}{\partial y}] dx dy$$

$$= C_1 \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) DF^{-1}(1, :) dx dy + C_2 \int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) DF^{-1}(2, :) dx dy = 0.$$

y concluimos que

$$\int_T (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \nabla q_{S,h} dx dy = 0.$$

IV - VII) Si $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_S}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ y tenemos $\int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_h = 0$. Por otro lado, si $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_D}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ y por lo tanto $\int_{\ell} (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_h = 0$.

III-VI) Por la continuidad de la componente normal de \mathbf{v} y $\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ tenemos que $\int_{\ell} [(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\ell}] q_h = 0$, para cualquier $\ell \in \mathcal{E}_{\Omega_S} \cup \mathcal{E}_{\Omega_D}$.

V) Si $\ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_I}$, como $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tenemos que $\int_{\ell} (\mathbf{v}^S - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_{S,h} = \int_{\ell} (\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}^D) \cdot \mathbf{n}_D q_{S,h}$. Por lo tanto, para probar que $\int_{\ell} (\mathbf{v}^D - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_D q_{D,h} + \int_{\ell} (\mathbf{v}^S - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S q_{S,h} = 0$, es suficiente ver que:

$$\int_{\ell} \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_D \delta = \int_{\ell} \mathbf{v}^D \cdot \mathbf{n}_D \delta \quad \forall \delta \in W_1(\Gamma_I),$$

que vale por la propiedad (4.2.23). Por consiguiente, podemos asegurar que el término V se anula.

Concluimos entonces que el operador $\mathbf{\Pi}_h$ satisface la primera condición que debe cumplir el operador de Fortin, es decir,

$$b(\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}, q_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Finalmente, necesitamos probar que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{v}} = (\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1,\Omega_S}^2 + \|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div},\Omega_D)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\mathbf{v}\|_1.$$

En principio, analizamos $|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}|_{1, \Omega_S}$.

$$|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}|_{1, \Omega_S}^2 = |\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_{1, \Omega_S}^2 + |\mathbf{\Pi}_{h,2} \mathbf{v}|_{1, \Omega_S}^2.$$

Comenzaremos calculando la seminorma del operador $\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}$ (notar que el análisis es similar si en vez de $\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}$ tenemos $\mathbf{\Pi}_{h,2} \mathbf{v}$)

$$|\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_{1, \Omega_S}^2 = \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_{1, T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_{1, T}^2.$$

Analizaremos, en principio, el término $I = \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_{1, T}^2$. De (4.2.22) tenemos que

$$I \leq C \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}(x, y)|_{1, T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |b_T(x, y)|_{1, T}^2 \right. \\ \left. \frac{\left| \left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(1, \cdot) dx dy \right) - \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(2, \cdot) dx dy \right) \right|^2}{|\Delta|^2} \right).$$

Aplicando (4.2.18) obtenemos

$$I \leq C \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}(x, y)|_{1, T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} \frac{\left| \left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(1, \cdot) dx dy \right) - \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(2, \cdot) dx dy \right) \right|^2}{|\Delta|^2} \right). \quad (4.2.26)$$

Examinando el segundo término tenemos que

$$\left| \left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(1, \cdot) dx dy \right) - \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(2, \cdot) dx dy \right) \right|^2 \\ \leq C \left[\left| \int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right|^2 \left| \int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(1, \cdot) dx dy \right|^2 + \left| \int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right|^2 \left| \int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(2, \cdot) dx dy \right|^2 \right].$$

Usando Cauchy-Schwarz, los resultados (4.1.8) y (4.1.10), cambio de variables y que $|T|^{\frac{1}{2}} \sim h_T$ es fácil ver que

$$\left| \int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right|^2 \leq C h_T^2 \quad \text{y} \quad \left| \int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right|^2 \leq C h_T^2.$$

Utilizando los mismos resultados que antes y considerando la propiedad de aproximación dada en la página 84 de [17] para $\|\hat{v}_1 - \hat{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}\|_{0, \hat{T}}$ y $\|\hat{v}_2 - \hat{\mathcal{I}}_2 \mathbf{v}\|_{0, \hat{T}}$ obtenemos

$$\left| \int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(1, :) dx dy \right|^2 \leq Ch_T^2 \|\mathbf{v}\|_{1, \omega_T} \quad \text{y} \quad \left| \int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(2, :) dx dy \right|^2 \leq Ch_T^2 \|\mathbf{v}\|_{1, \omega_T}.$$

En las acotaciones anteriores se utilizó que: $\|\hat{v}_1\|_{1, \hat{\omega}_T} \leq C \|v_1\|_{1, \omega_T} \leq C \|\mathbf{v}\|_{1, \omega_T}$, donde la primera desigualdad vale por (4.1.6).

Luego,

$$\left| \left(\int_T b_T \frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(1, :) dx dy \right) - \left(\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right) \left(\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(2, :) dx dy \right) \right|^2 \leq Ch_T^4 \|\mathbf{v}\|_1^2.$$

Recordando que en el caso afín $\Delta = (\int_T b_T dx dy)^2 \det(DF_0^{-1}(x, y))$ y considerando las acotaciones (3.3.11) y (4.1.15), es fácil ver que en este caso $O(|\Delta|) = h_T^2$.

Hipótesis (H2): La transformación F es tal que, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, existe una constante $C > 0$ tal que $|\Delta|^2 \geq Ch_T^4$.

De (4.2.26) obtenemos

$$I \leq C \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} |\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}(x, y)|_{1, T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} \|\mathbf{v}\|_1^2 \right).$$

Para el primer término, observamos que fijado i (nodo del triángulo T), $1 \leq i \leq 3$, el gradiente de $\tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_1)$ es cero, aplicando la segunda acotación de (4.1.6) obtenemos

$$|\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}|_{1, T} = |\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v} - \tilde{\mathcal{P}}_{\omega_{n_i}}(v_1)|_{1, T} \leq C |\hat{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v} - \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\omega}_{n_i}}(v_1)|_{1, \hat{T}}.$$

Aplicando una estimación inversa (ver, por ejemplo, Lema 3.1 de [22]) y la propiedad de aproximación previa concluimos

$$\begin{aligned} |\hat{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v} - \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\omega}_{n_i}}(v_1)|_{1, \hat{T}} &\leq C \|\hat{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v} - \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\omega}_{n_i}}(v_1)\|_{0, \hat{T}} \\ &\leq C \left(\|\hat{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v} - \hat{v}_1\|_{0, \hat{T}} + \|\hat{v}_1 - \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\omega}_{n_i}}(v_1)\|_{0, \hat{T}} \right) \\ &\leq C \|\hat{v}_1\|_{1, \hat{\omega}_T} + C \|\hat{v}_1 - \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\omega}_{n_i}}(v_1)\|_{0, \hat{T}}. \end{aligned}$$

De la propiedad de aproximación dada en la página 85 de [17] obtenemos que

$$\|\hat{v}_1 - \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\omega}_{n_i}}(v_1)\|_{0, \hat{T}} \leq Ch_{\hat{\omega}_{n_i}} |\hat{v}_1|_{1, \hat{\omega}_{n_i}},$$

luego

$$|\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}|_{1, T} \leq C \|\hat{v}_1\|_{1, \hat{\omega}_T} + Ch_{\hat{\omega}_{n_i}} |\hat{v}_1|_{1, \hat{\omega}_{n_i}}.$$

Como $h_{\hat{\omega}_{n_i}} \leq Ch_{\hat{T}}$ (ver, por ejemplo, Lema 1 de [35])

$$|\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}|_{1,T} \leq C \|\hat{v}_1\|_{1,\hat{\omega}_T}.$$

Por la observación que hicimos anteriormente, $|\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}|_{1,T} \leq C \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}$.

Como el número de triángulos en un vecindario ω_{n_i} está acotado por una constante uniforme,

$$I \leq C \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} = \emptyset} \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} \|\mathbf{v}\|_1^2 \right) \leq C \|\mathbf{v}\|_1^2.$$

Seguimos ahora con el análisis del término $II = \sum_{T \in \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |\mathbf{\Pi}_{h,1} \mathbf{v}|_{1,T}^2$, es decir, el caso en que T tiene sólo un lado en la interfase que denotamos por ℓ .

De (4.2.24) tenemos que

$$\begin{aligned} II \leq C & \left(\sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}(x, y)|_{1,T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} \frac{\left| \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial n}{\partial y} dx dy \right|^2 \left[\left| \int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(1, :) dx dy \right|^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left| \int_T (\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(1, :) dx dy \right|^2 \right] + \left| \int_T \mathbf{b}_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \right|^2 \left[\left| \int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) DF^{-1}(2, :) dx dy \right|^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left| \int_T (\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(2, :) dx dy \right|^2 \right] \right)}{|\Delta|^2} \\ & \left. \left| \mathbf{b}_T(x, y) \right|_{1,T}^2 + \sum_{T \subset \Omega_S: \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{\Gamma_I} \neq \emptyset} |(\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_{\ell,1}|_{1,T}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Observamos que las constantes $\alpha_{\ell,1}$ y $\alpha_{\ell,2}$ pueden ser obtenidas resolviendo el sistema no singular (4.2.25) con $v_{\ell,i}|_T = (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1} \hat{\beta}_{i,\hat{T}_1}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1}(x, y)$.

Más precisamente, si denotamos por $\beta_{\omega_\ell,j}$ a las funciones continuas definidas sobre ω_ℓ tal que $\beta_{\omega_\ell,j}|_T = \beta_{T,j}$, $j = 1, 2$, mediante un cálculo sencillo podemos ver que

$$|\alpha_{\ell,j}| \leq \frac{C}{|\ell|} \max_{j=1,2} \left| \int_\ell (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_\ell \beta_{\omega_\ell,j} \right| \quad (4.2.28)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_T ((\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(1, :))^2 & \leq C \int_T \left((\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_{\ell,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + (\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_{\ell,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \\ & \leq C \int_T \left((\alpha_{\ell,1}^2 v_{\ell,1}^2 + \alpha_{\ell,2}^2 v_{\ell,2}^2) \mathbf{n}_{\ell,1}^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + (\alpha_{\ell,1}^2 v_{\ell,1}^2 + \alpha_{\ell,2}^2 v_{\ell,2}^2) \mathbf{n}_{\ell,2}^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Utilizando (4.1.10) y la desigualdad (4.2.28), podemos afirmar que

$$\begin{aligned} C \int_T \left((\alpha_{\ell,1}^2 v_{\ell,1}^2 + \alpha_{\ell,2}^2 v_{\ell,2}^2) n_{\ell,1}^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + (\alpha_{\ell,1}^2 v_{\ell,1}^2 + \alpha_{\ell,2}^2 v_{\ell,2}^2) n_{\ell,2}^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) &\leq \frac{C}{h_T^2} \max_{i=1,2} |\alpha_{\ell,i}|^2 \int_T (v_{\ell,1}^2 + v_{\ell,2}^2) \\ &\leq \frac{C}{h_T^2 |\ell|^2} \left(\int_\ell |(\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v})| \right)^2 \int_T (v_{\ell,1}^2 + v_{\ell,2}^2). \end{aligned}$$

Usando Cauchy-Schwarz y cambio de variables

$$\frac{C}{h_T^2 |\ell|^2} \left(\int_\ell |(\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v})| \right)^2 \int_T (v_{\ell,1}^2 + v_{\ell,2}^2) \leq \frac{C|\ell|}{h_T^2 |\ell|^2} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}\|_{0,\ell}^2 \int_T (v_{\ell,1}^2 + v_{\ell,2}^2) \leq \frac{C}{h_T^2} \|\hat{\mathbf{v}} - \hat{\tilde{\mathcal{I}}}\mathbf{v}\|_{0,\hat{\ell}}^2 \int_T (v_{\ell,1}^2 + v_{\ell,2}^2).$$

Como $\|\hat{\mathbf{v}} - \hat{\tilde{\mathcal{I}}}\mathbf{v}(x)\|_{0,\hat{\ell}} \leq C|\hat{\ell}|^{\frac{1}{2}} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{\omega}_{\hat{T}}}$, considerando la definición de las funciones burbujas, $v_{\ell,1}$ y $v_{\ell,2}$, y realizando un cambio de variables, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{C}{h_T^2} \|\hat{\mathbf{v}} - \hat{\tilde{\mathcal{I}}}\mathbf{v}\|_{0,\hat{\ell}}^2 \int_T (v_{\ell,1}^2 + v_{\ell,2}^2) &\leq \frac{C}{h_T^2} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{\omega}_{\hat{T}}}^2 \int_T ((\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1} \hat{\beta}_{1,\hat{T}_1}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1})^2 + ((\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1} \hat{\beta}_{2,\hat{T}_1}) \circ F_{\omega_\ell}^{-1})^2 \\ &\leq \frac{C}{h_T^2} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{\omega}_{\hat{T}}}^2 \int_{\hat{T}} (\hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1})^2 |J_F| \leq C \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}^2 \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $\int_{\hat{T}} \hat{\delta}_{(0,0),\hat{T}_1}^{n_1} \hat{\delta}_{(1,0),\hat{T}_1}^{n_2} = \frac{n_1!n_2!2!}{(n_1+n_2+2)!} |\hat{T}|$ junto con la acotación (4.1.10).

Por consiguiente,

$$\left| \int_T (\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(1, \cdot) \right|^2 \leq |T| \|(\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_\ell DF^{-1}(1, \cdot)\|_{0,T}^2 \leq Ch_T^2 \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}^2.$$

Más aún, haciendo cambio de variables, utilizando una clásica desigualdad inversa y la observación anterior obtenemos

$$|(\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_{\ell,1}|_{1,T} \leq C \frac{1}{h_T} \|(\alpha_{\ell,1} v_{\ell,1} + \alpha_{\ell,2} v_{\ell,2}) \mathbf{n}_{\ell,1}\|_{0,T} \leq C \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}.$$

Por lo tanto, usando estas estimaciones en la expresión (4.2.27) del operador junto con el hecho de que $|\tilde{\mathcal{I}}_1 \mathbf{v}(x, y)|_{1,T} \leq C \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}$, $|\int_T b_T \frac{\partial n}{\partial y} dx dy|^2 \leq Ch_T^2$, $|\int_T b_T \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy|^2 \leq Ch_T^2$, $|\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(1, \cdot) dx dy| \leq Ch_T^2 \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}$ y $|\int_T (\mathbf{v} - \tilde{\mathcal{I}}\mathbf{v}) DF^{-1}(2, \cdot) dx dy| \leq Ch_T^2 \|\mathbf{v}\|_{1,\omega_T}$ como lo probamos anteriormente, podemos concluir que

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1,\Omega_S} \leq C \|\mathbf{v}\|_1.$$

Para finalizar, queremos estimar $\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega_D)}$.

Como $\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega_D)} \leq \|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1, \Omega_D}$, con el mismo razonamiento al anterior para $\|\mathbf{\Pi}_{h,j} \mathbf{v}\|_{1, \Omega_S}^2$, podemos concluir que

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{1, \Omega_D} \leq C \|\mathbf{v}\|_1.$$

Luego, podemos afirmar que el operador $\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}$ está acotado, es decir, existe una constante positiva C tal que $\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_1$.

En consecuencia, nuestro operador $\mathbf{\Pi}_h$ cumple las condiciones (2.4.18) y (2.4.19) del Teorema 2.4.2 y por ende se satisface la condición inf-sup discreta, o sea, existe una constante positiva β tal que $\sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}} \geq \beta \|q_h\|_Q \quad \forall q_h \in Q_h$.

Dado que la forma bilineal \tilde{a} es coercitiva y continua, b es continua y satisface la condición inf-sup discreta, en virtud del Corolario 2.4.1 y del Teorema 2.4.1, concerniente a la teoría abstracta de métodos mixtos exhibida en el capítulo 2, podemos enunciar los siguientes dos resultados.

Teorema 4.2.1. *Existe una única solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ del problema (4.2.16).*

Teorema 4.2.2. *Sea $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ la solución de la formulación débil (4.0.1) del problema acoplado. Sea $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ la solución del problema discreto (4.2.16). Luego, existe una constante C tal que:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|p - p_h\|_Q \leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right\}.$$

Luego, considerando que las estimaciones de error clásicas del interpolador de Clément se pueden extender al caso de dominios con triángulos curvos utilizados en este capítulo (deben aplicarse técnicas similares a las usadas en, por ejemplo, el Lema 2 de [3]) y valiéndonos además de los resultados conocidos de error de interpolación de espacios de Sobolev (Teorema 1.4 de [28]) podemos concluir el siguiente resultado.

Corolario 4.2.1. *Sea (\mathbf{u}, p) la solución del problema (4.0.1) tal que $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $p \in Q$ son lo suficientemente suaves tal que las normas del lado derecho de (4.2.29) son finitas para ciertos $r_1, r_2 \in (0, 1]$. Luego, la solución discreta (\mathbf{u}_h, p_h) del problema (4.2.16) satisface la siguiente estimación de error*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|p - p_h\|_Q \leq C \{h^{r_1} \|\mathbf{u}\|_{1+r_1, \Omega_S} + h^{r_2} \|\mathbf{u}\|_{1+r_2, \Omega_D} + h(|p|_{1, \Omega_S} + |p|_{1, \Omega_D})\}. \quad (4.2.29)$$

Terminamos este capítulo mencionando que, las ideas utilizadas aquí para aproximar numéricamente el problema acoplado, podrían ser aplicadas con éxito (con quizás eventuales dificultades técnicas) a otras familias de elementos que se conocen estables para el problema de Stokes, lo que será tema de trabajos futuros.

Capítulo 5

Experimentos numéricos

En este capítulo presentamos distintos ejemplos numéricos referentes a la resolución por MINI-elements del problema acoplado modificado (3.2.8) en un dominio bidimensional. En principio realizaremos experimentos numéricos en dominios poligonales y posteriormente en dominios con secciones curvas. Los experimentos numéricos evidencian el buen desempeño de nuestro método y confirman la estabilidad y exactitud del método propuesto, el cual es probablemente uno de los más sencillos para la aproximación unificada y continua en $\Omega_S \cup \Omega_D$ del sistema acoplado siendo además de fácil implementación.

Comenzaremos introduciendo algunas definiciones sobre los errores que mediremos, relativos a la aproximación de las velocidades y presiones, y las respectivas tasas de convergencia.

Los errores individuales para la velocidad y presión son:

$$\begin{aligned} e_0(p_S) &= \|p_S - p_{S,h}\|_{0,\Omega_S} & e_0(p_D) &= \|p_D - p_{D,h}\|_{0,\Omega_D} \\ e_0(\mathbf{v}_S) &= \|\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_{S,h}\|_{0,\Omega_S} & e_0(\mathbf{v}_D) &= \|\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_{D,h}\|_{0,\Omega_D} \\ e_0(\operatorname{div} \mathbf{v}_S) &= \|\operatorname{div}(\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_{S,h})\|_{0,\Omega_S} & e_0(\operatorname{div} \mathbf{v}_D) &= \|\operatorname{div}(\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_{D,h})\|_{0,\Omega_D} \\ e_1(\mathbf{v}_S) &= |\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_{S,h}|_{1,\Omega_S} \end{aligned}$$

y las tasas de convergencia están dadas por:

$$r_i(\square) = \frac{\log\left(\frac{e_i(\square)}{e'_i(\square)}\right)}{\log\left(\frac{h}{h'}\right)} \quad \square \in \{\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D, \operatorname{div} \mathbf{v}_S, \operatorname{div} \mathbf{v}_D, p_S, p_D\} \text{ e } i = 0, 1$$

donde h y h' denotan dos tamaños de malla consecutivos con errores e_i and e'_i .

Por simplicidad, todos los parámetros tales como K , α y μ se establecen como 1. Mencionamos que, como es difícil construir ejemplos que satisfagan todo el problema acoplado de Stokes-Darcy (3.1.1)-(3.1.3) (en particular, las condiciones de interfase homogéneas (3.1.3)), los experimentos numéricos pueden incluir términos no homogéneos

para las condiciones de interfase y por lo tanto se debe modificar (sólo) el lado derecho en (3.2.8).

Comentamos además que, en la práctica, la conservación de masa y la condición de Neumann tienen que ser impuestas en forma débil. En efecto, cuando ensamblamos la matriz del sistema debemos agregar ecuaciones que aseguren la continuidad de la componente normal de la velocidad y la condición de borde, es decir, $\int_{\Gamma_I} (\mathbf{v}_h^D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{v}_h^S \cdot \mathbf{n}_S) \gamma = 0$ y $\int_{\Gamma_D} \mathbf{v}_h^D \cdot \mathbf{n}_D \gamma = 0$, $\forall \gamma \in \{C^0(\Gamma_I) : \gamma|_\ell \in P_1(\ell)\}$.

5.1. Experimentos numéricos para el problema de Stokes-Darcy en dominios poligonales

En esta sección presentamos dos ejemplos, cada uno de ellos tiene dos sectores: uno gobernado por la ecuación de Stokes y el otro gobernado por la ecuación de Darcy. En el primer ejemplo la parte fluida se comunica con la porosa sólo a través de una porción del borde de la parte porosa, la interfase, mientras que en el otro ejemplo la parte líquida rodea por completo a la parte porosa.

5.1.1. Ejemplo 1

En el primer ejemplo consideramos las regiones $\Omega_S = (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$ y $\Omega_D = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$. La interfase, Γ_I , es la recta $x = \frac{1}{2}$ (ver Figura 5.1).

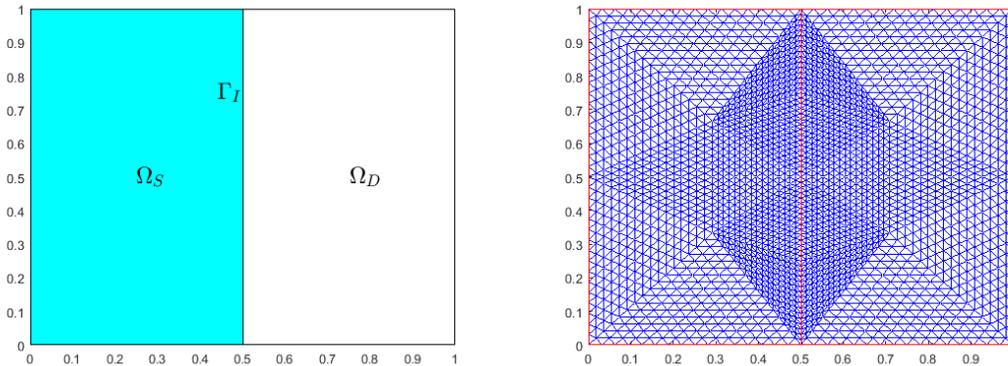


Figura 5.1: Dominio poligonal completo (Ejemplo 1)

Seleccionamos los términos del lado derecho \mathbf{f}_S , $g_S =: \operatorname{div} \mathbf{u}_S$, \mathbf{f}_D , g_D y las condiciones de borde de acuerdo a la solución analítica dada por

$$\mathbf{u}_S(x, y) = \begin{pmatrix} xy(1-y) \\ x^2(1-y)\sin(y) \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_D(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy(1-y)(1-x) \\ xy^2(1-y) \end{pmatrix}$$

$$p_S(x, y) = 12x^2e^y \quad p_D(x, y) = 16xy^3 - e - 2.$$

En este primer ejemplo se satisface que $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0$ en Γ_D y $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0$ en Γ_I . Usando la definición previa de r_i , presentamos para el primer ejemplo, en los Cuadros 5.1 y 5.2, el historial de convergencia para un conjunto de triangulaciones regulares del dominio.

En las Figuras 5.2 y 5.4 mostramos los valores de las velocidades aproximada y exacta y en las Figuras 5.3 y 5.5 los de las presiones. Observando dichas figuras deducimos que los espacios de elementos finitos utilizados proporcionan aproximaciones muy precisas de las incógnitas.

h	$e_0(\mathbf{v}_S)$	$r_0(\mathbf{v}_S)$	$e_0(\mathbf{v}_D)$	$r_0(\mathbf{v}_D)$	$e_0(p_S)$	$r_0(p_S)$	$e_0(p_D)$	$r_0(p_D)$
0.0625	0.00007	2.1274	0.0112	2.3051	0.0069	1.8767	0.0093	1.9248
0.0313	0.00002	2.0078	0.0028	2.0194	0.0020	1.7874	0.0024	1.9266
0.0156	0.000004	2.0020	0.0008	1.7002	0.0006	1.6937	0.0007	1.8263

Cuadro 5.1: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 1 (dominio poligonal)

h	$e_0(\text{div } \mathbf{v}_S)$	$r_0(\text{div } \mathbf{v}_S)$	$e_0(\text{div } \mathbf{v}_D)$	$r_0(\text{div } \mathbf{v}_D)$	$e_1(\mathbf{v}_S)$	$r_1(\mathbf{v}_S)$
0.0625	0.0123	1.0084	0.0224	1.4040	0.0188	1.0109
0.0313	0.0061	1.0023	0.0109	1.0416	0.0094	1.0026
0.0156	0.0031	1.0009	0.0055	0.9781	0.0047	1.0008

Cuadro 5.2: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 1 (dominio poligonal)

5.1.2. Ejemplo 2

El propósito de este segundo ejemplo, que coincide con el Ejemplo 1 en [26], es confirmar la buena performance de nuestro esquema de elementos finitos mixto en comparación con otros elementos estables. Sea $\Omega_D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\Omega_S = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \Omega_D$ un medio poroso rodeado completamente por un fluido (ver Figura 5.6).

La particularidad de este ejemplo es que no hay Γ_D porque el borde de Ω_D representa la interfase, Γ_I . Establecemos el término de forzamiento apropiado \mathbf{f}_S y la fuente g_D , tal que la siguiente solución al problema acoplado de Stokes-Darcy, con $\mathbf{f}_D = \mathbf{0}$, sea exacta

$$\mathbf{u}_S(x, y) = \begin{pmatrix} -4(x^2 - 1)^2(y^2 - 1)y \\ 4(x^2 - 1)(y^2 - 1)^2x \end{pmatrix}$$

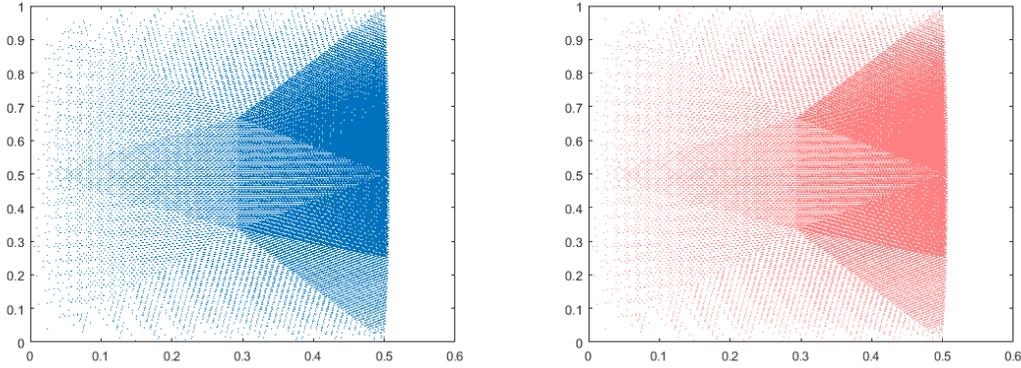


Figura 5.2: \mathbf{v}_S y $\mathbf{v}_{S,h}$ del Ejemplo 1 (dominio poligonal)

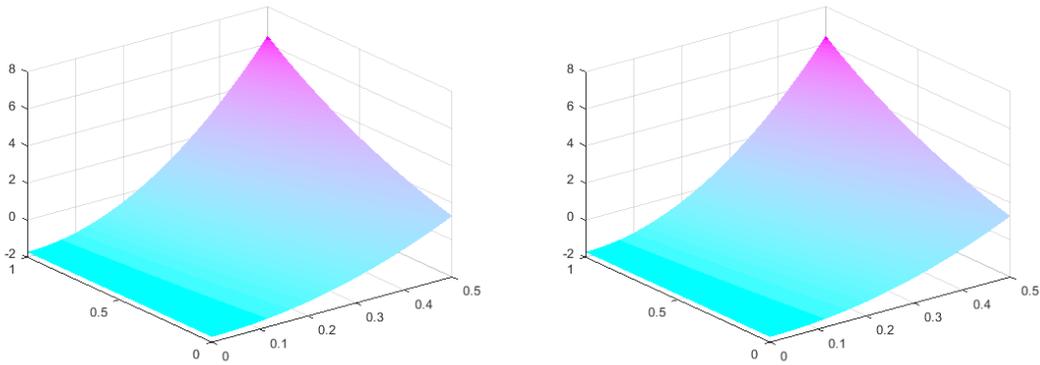


Figura 5.3: p_S y $p_{S,h}$ del Ejemplo 1 (dominio poligonal)

$$p_S(x, y) = -\sin(x)e^y \quad p_D(x, y) = -\sin(x)e^y.$$

En los Cuadros 5.3 y 5.4, presentamos el historial y los radios de convergencia para un conjunto de triangulaciones regulares del dominio. Las Figuras 5.7 y 5.8 muestran, respectivamente, las velocidades aproximada y exacta y los valores de las presiones aproximada y exacta para la región de Stokes, mientras que las Figuras 5.9 y 5.10 exhiben lo correspondiente para la región de Darcy. Los Cuadros 5.3 y 5.4, que pueden ser comparados con la Tabla 2 en [26], muestran que con nuestro método también se puede alcanzar una tasa de convergencia óptima.

Además observamos que, en los dos ejemplos bajo consideración, la tasa de convergencia prevista por el Corolario 4.2.1 es alcanzada por todas las incógnitas.

5.2. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS PARA EL PROBLEMA DE STOKES-DARCY EN DOMINIOS C

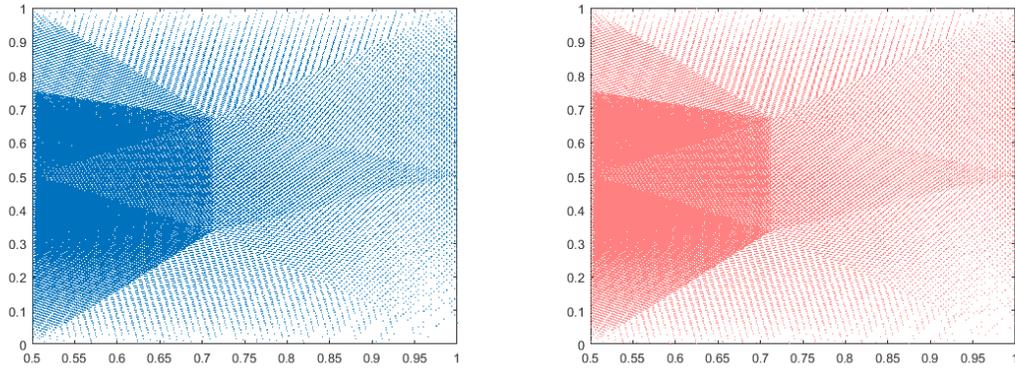


Figura 5.4: \mathbf{v}_D y $\mathbf{v}_{D,h}$ del Ejemplo 1 (dominio poligonal)

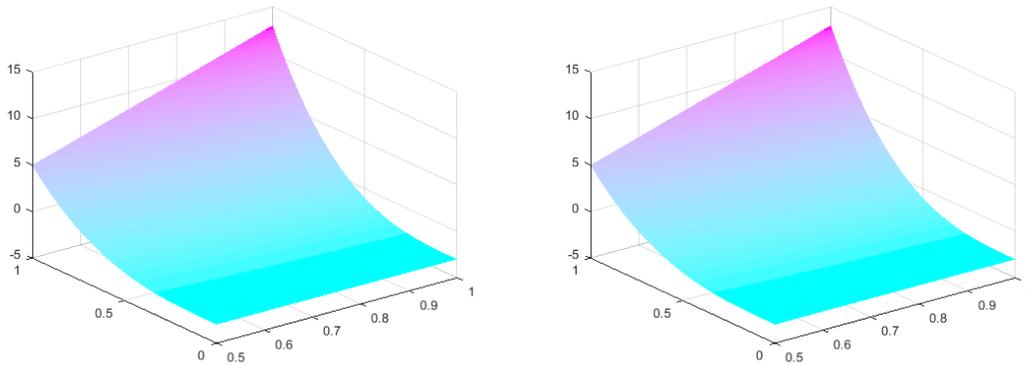


Figura 5.5: p_D y $p_{D,h}$ del Ejemplo 1 (dominio poligonal)

5.2. Experimentos numéricos para el problema de Stokes-Darcy en dominios curvos

En esta sección validaremos nuestro método mediante la resolución de dos problemas con la particularidad que en esta ocasión los dominios con los que trabajamos tienen parte del borde curvo. En el primer ejemplo tanto Γ_S como Γ_D son curvos. En el segundo ejemplo, consideraremos que la parte curva es una porción de la interfase, Γ_I , que comparten ambas regiones.

5.2.1. Ejemplo 1 - Borde Curvo

Consideraremos $\Omega_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1, 1) \text{ e } -\sqrt{1-x^2} < y < 0\}$ y $\Omega_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1, 1) \text{ e } 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$. En este ejemplo, $\Gamma_I = \{(x, y) \in$

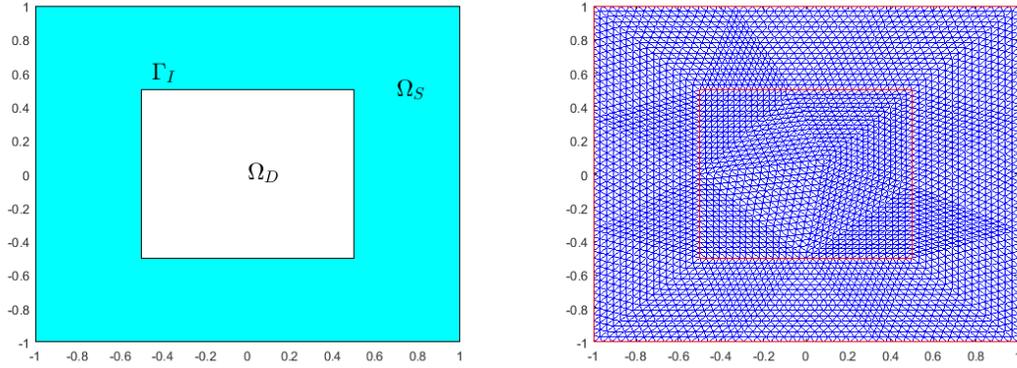


Figura 5.6: Dominio poligonal completo (Ejemplo 2)

h	$e_0(\mathbf{v}_S)$	$r_0(\mathbf{v}_S)$	$e_0(\mathbf{v}_D)$	$r_0(\mathbf{v}_D)$	$e_0(p_S)$	$r_0(p_S)$	$e_0(p_D)$	$r_0(p_D)$
0.0884	0.0046	2.0636	0.0491	0.8073	0.1937	1.4637	0.0049	1.2839
0.0442	0.0011	2.0480	0.0267	0.8809	0.0683	1.5030	0.0020	1.3002
0.0221	0.0003	2.0216	0.0140	0.9324	0.0241	1.5046	0.0008	1.3226

Cuadro 5.3: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 2 (dominio poligonal)

$\mathbb{R}^2 : x \in (-1, 1)$ e $y = 0$ (ver Figura 5.11). Observar que tanto Γ_S como Γ_D son curvos.

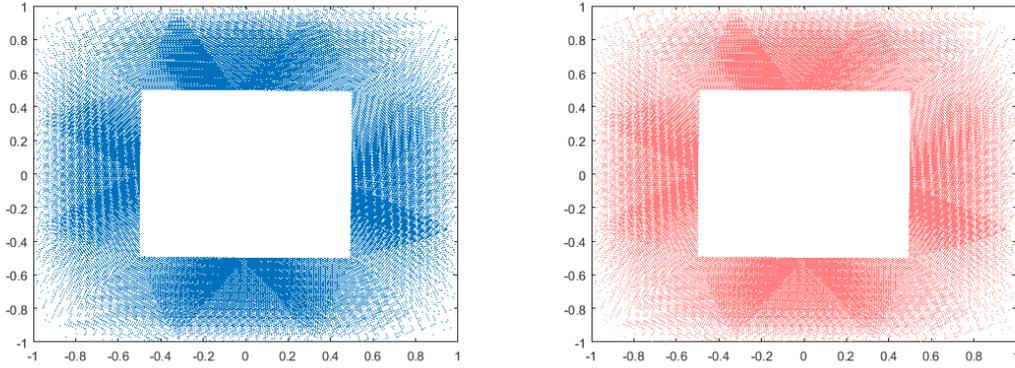
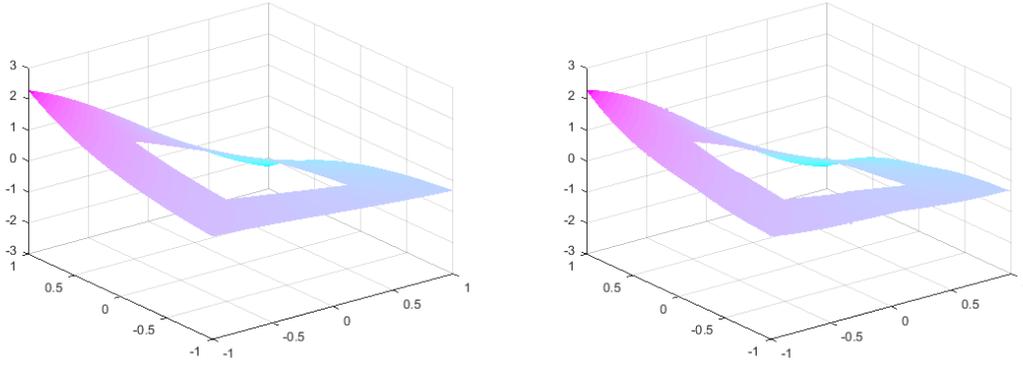
Seleccionamos los términos del lado derecho $\mathbf{f}_S, g_S =: \operatorname{div} \mathbf{u}_S, \mathbf{f}_D, g_D$ y las condiciones de borde de acuerdo a la solución analítica dada por

$$\mathbf{u}_S(x, y) = \mathbf{u}_D(x, y) = \begin{pmatrix} -ye^{(x^2+y^2)}(1 - (x^2 + y^2)) \\ xe^{(x^2+y^2)}(1 - (x^2 + y^2)) \end{pmatrix}$$

$$p_S(x, y) = p_D(x, y) = \cos(\pi(x^2 + y^2)).$$

h	$e_0(\operatorname{div} \mathbf{v}_S)$	$r_0(\operatorname{div} \mathbf{v}_S)$	$e_0(\operatorname{div} \mathbf{v}_D)$	$r_0(\operatorname{div} \mathbf{v}_D)$	$e_1(\mathbf{v}_S)$	$r_1(\mathbf{v}_S)$
0.0884	0.2905	0.9892	0.0437	1.2140	0.9110	0.9935
0.0442	0.1449	1.0034	0.0189	1.2056	0.4558	0.9990
0.0221	0.0723	1.0037	0.0086	1.1382	0.2278	1.0001

Cuadro 5.4: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 2 (dominio poligonal)

Figura 5.7: \mathbf{v}_S y $\mathbf{v}_{S,h}$ del Ejemplo 2 (dominio poligonal)Figura 5.8: p_S y $p_{S,h}$ del Ejemplo 2 (dominio poligonal)

En este primer ejemplo se satisface que $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0$ en Γ_D , $\mathbf{u}_S = 0$ en Γ_S y la conservación de masa en la interfase, es decir, $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0$ en Γ_I .

En los Cuadros 5.5 y 5.6, presentamos el historial y los radios de convergencia para un conjunto de triangulaciones regulares del dominio. Las Figuras 5.12 y 5.13 muestran, respectivamente, las velocidades aproximada y exacta y los valores de las presiones aproximada y exacta para la región de Stokes, mientras que las Figuras 5.14 y 5.15 exhiben lo correspondiente para la región de Darcy. Los Cuadros 5.5 y 5.6, muestran que con nuestro método se puede alcanzar una tasa de convergencia óptima.

5.2.2. Ejemplo 2 - Interfase Curva

Sea $\Omega_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ e } 0 < y < -x^2 + \frac{3}{4}\}$ y $\Omega_S = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \Omega_D$ un medio poroso rodeado completamente por un fluido (ver Figura 5.16).

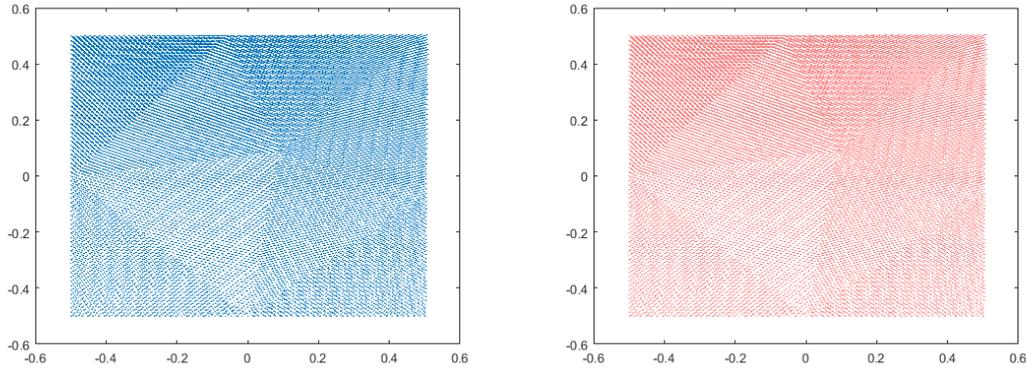


Figura 5.9: \mathbf{v}_D y $\mathbf{v}_{D,h}$ del Ejemplo 2 (dominio poligonal)

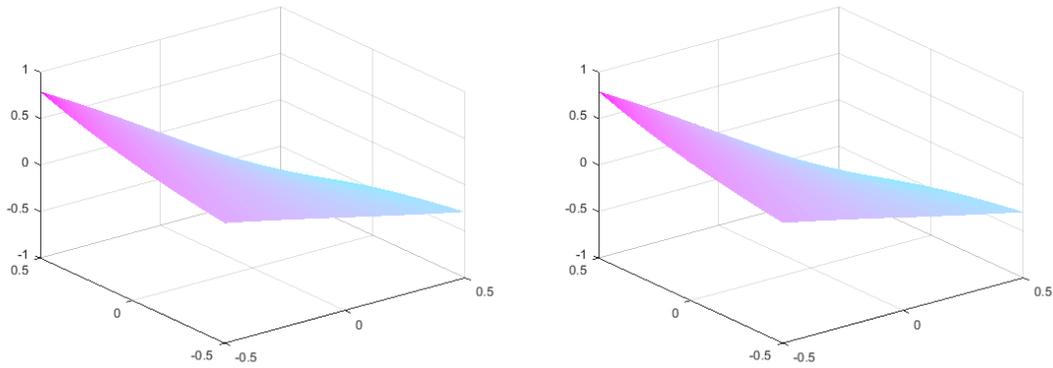


Figura 5.10: p_D y $p_{D,h}$ del Ejemplo 2 (dominio poligonal)

Se observa que no hay Γ_D porque el borde de Ω_D representa la interfase, Γ_I . Notar que uno de los borde que conforman la interfase lo estamos considerando curvo.

Utilizaremos la misma solución exacta con la que trabajamos en el segundo ejemplo en el caso poligonal y valiéndonos de la misma, establecemos el término de forzamiento apropiado \mathbf{f}_S y la fuente g_D .

En los Cuadros 5.7 y 5.8, presentamos el historial y los radios de convergencia para un conjunto de triangulaciones regulares del dominio. Las Figuras 5.17 y 5.18 muestran, respectivamente, las velocidades aproximada y exacta y los valores de las presiones aproximada y exacta para la región de Stokes, mientras que las Figuras 5.19 y 5.20 exhiben lo correspondiente para la región de Darcy. Los Cuadros 5.7 y 5.8, muestran que con nuestro método se puede alcanzar una tasa de convergencia óptima.

Enfatizamos que los resultados numéricos confirman la buena performance del esquema de elementos finitos mixtos con Mini-element para el problema acoplado de

h	$e_0(\mathbf{v}_S)$	$r_0(\mathbf{v}_S)$	$e_0(\mathbf{v}_D)$	$r_0(\mathbf{v}_D)$	$e_0(p_S)$	$r_0(p_S)$	$e_0(p_D)$	$r_0(p_D)$
0.0714	0.0019	2.0931	0.0303	1.0691	0.1038	1.4369	0.0145	1.3362
0.0357	0.0004	2.0473	0.0149	1.0262	0.0364	1.5100	0.0065	1.1469
0.0178	0.0001	2.0009	0.0068	1.1247	0.0128	1.5109	0.0032	1.0247

Cuadro 5.5: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 1 (dominio curvo)

h	$e_0(\text{div } \mathbf{v}_S)$	$r_0(\text{div } \mathbf{v}_S)$	$e_0(\text{div } \mathbf{v}_D)$	$r_0(\text{div } \mathbf{v}_D)$	$e_1(\mathbf{v}_S)$	$r_1(\mathbf{v}_S)$
0.0714	0.0776	0.9482	0.0415	0.6534	0.4484	0.9850
0.0357	0.0388	1.0018	0.0248	0.7407	0.2247	0.9965
0.0178	0.0192	1.0096	0.0146	0.7670	0.1124	0.9994

Cuadro 5.6: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 1 (dominio curvo)

h	$e_0(\mathbf{v}_S)$	$r_0(\mathbf{v}_S)$	$e_0(\mathbf{v}_D)$	$r_0(\mathbf{v}_D)$	$e_0(p_S)$	$r_0(p_S)$	$e_0(p_D)$	$r_0(p_D)$
0.0942	0.0036	2.0461	0.0107	1.3118	0.1715	1.4305	0.0046	1.4986
0.0471	0.0009	2.0433	0.0041	1.3837	0.0625	1.4574	0.0016	1.5606
0.0235	0.0002	2.0256	0.0015	1.4130	0.0223	1.4834	0.0005	1.5404

Cuadro 5.7: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 2 (dominio curvo)

h	$e_0(\text{div } \mathbf{v}_S)$	$r_0(\text{div } \mathbf{v}_S)$	$e_0(\text{div } \mathbf{v}_D)$	$r_0(\text{div } \mathbf{v}_D)$	$e_1(\mathbf{v}_S)$	$r_1(\mathbf{v}_S)$
0.0942	0.2516	0.9810	0.0214	0.7311	0.7388	0.9950
0.0471	0.1258	1.0003	0.0120	0.8350	0.3695	0.9995
0.0235	0.0628	1.0027	0.0064	0.9101	0.1847	1.0002

Cuadro 5.8: Tamaños de malla, errores y tasas de convergencia del Ejemplo 2 (dominio curvo)

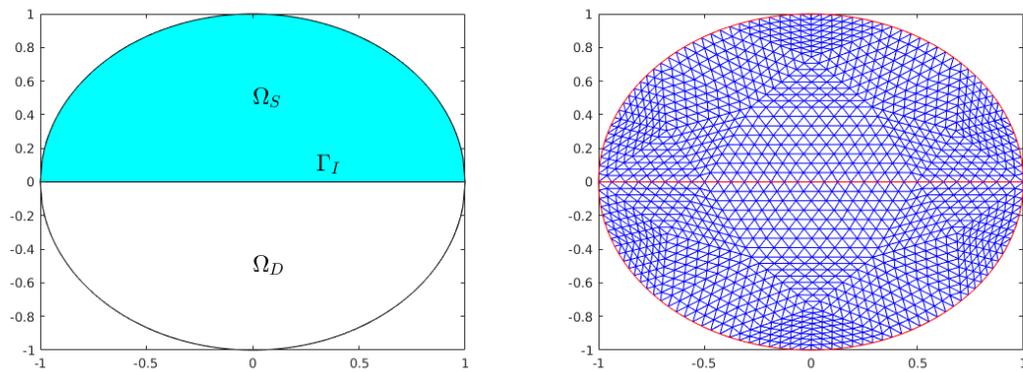
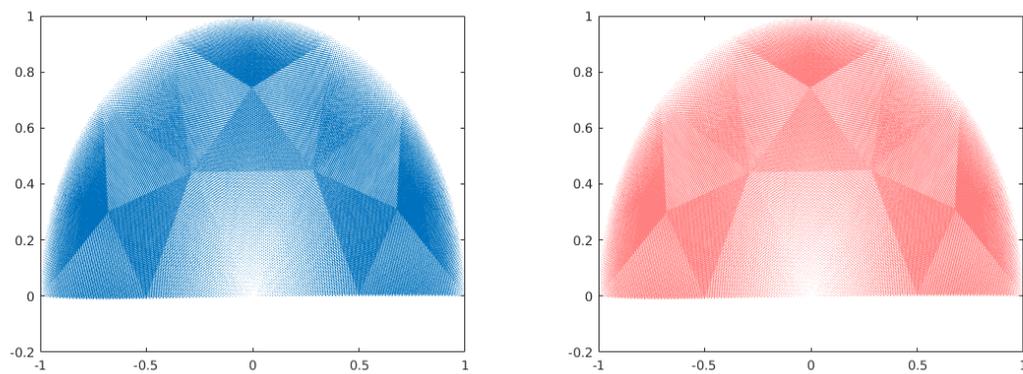


Figura 5.11: Dominio curvo completo (Ejemplo 1)

Figura 5.12: v_S y $v_{S,h}$ del Ejemplo 1 (dominio curvo)

Stokes-Darcy.

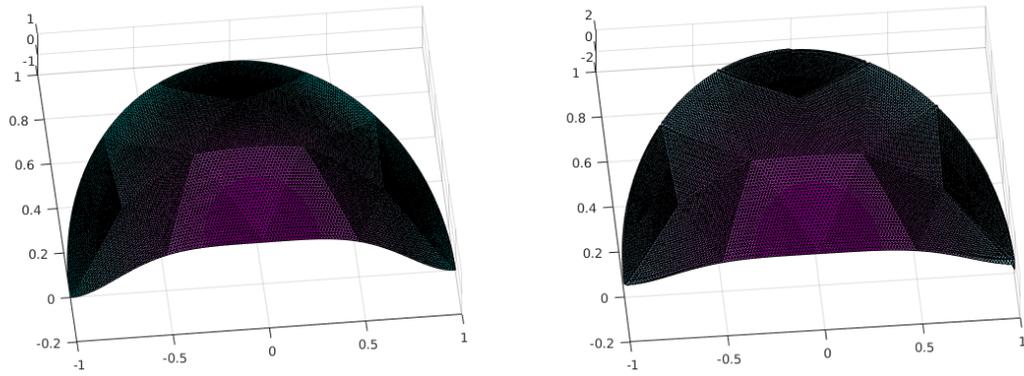


Figura 5.13: p_S y $p_{S,h}$ del Ejemplo 1 (dominio curvo)

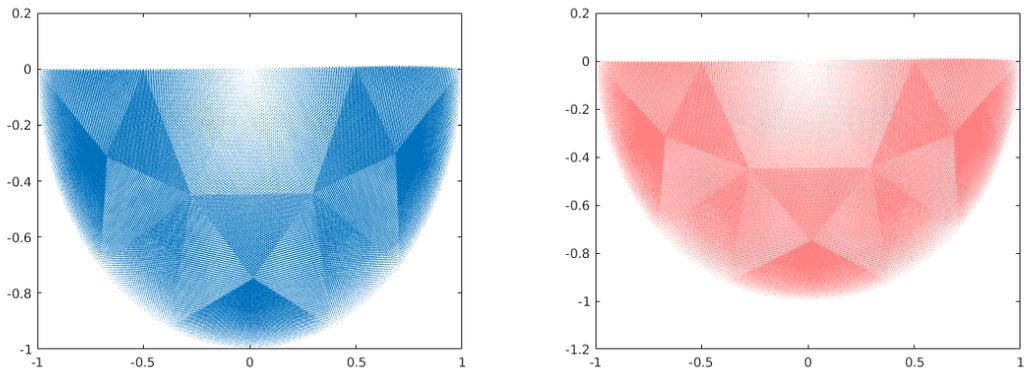


Figura 5.14: v_D y $v_{D,h}$ del Ejemplo 1 (dominio curvo)

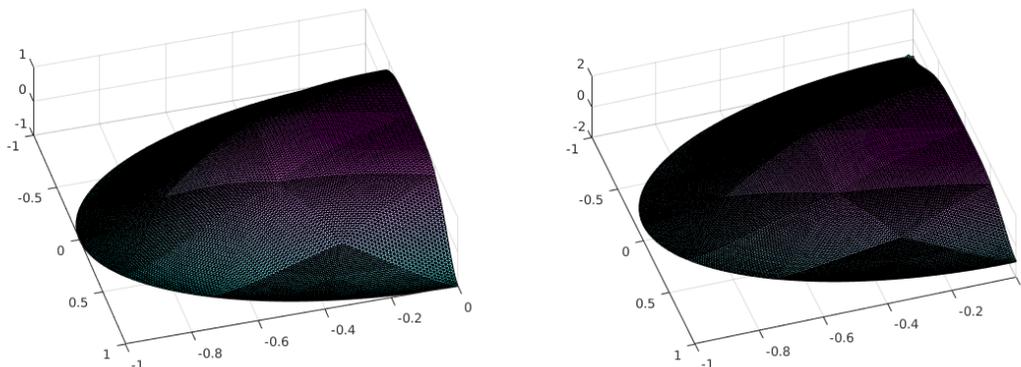


Figura 5.15: p_D y $p_{D,h}$ del Ejemplo 1 (dominio curvo)

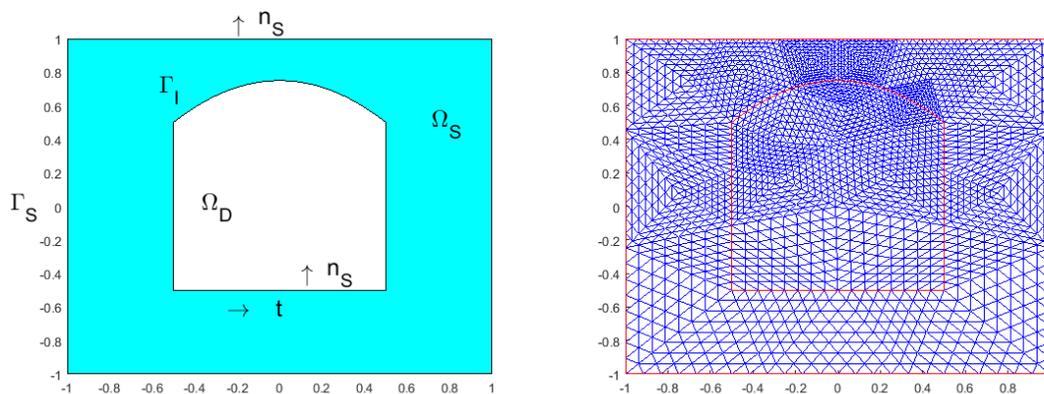


Figura 5.16: Dominio curvo completo (Ejemplo 2)

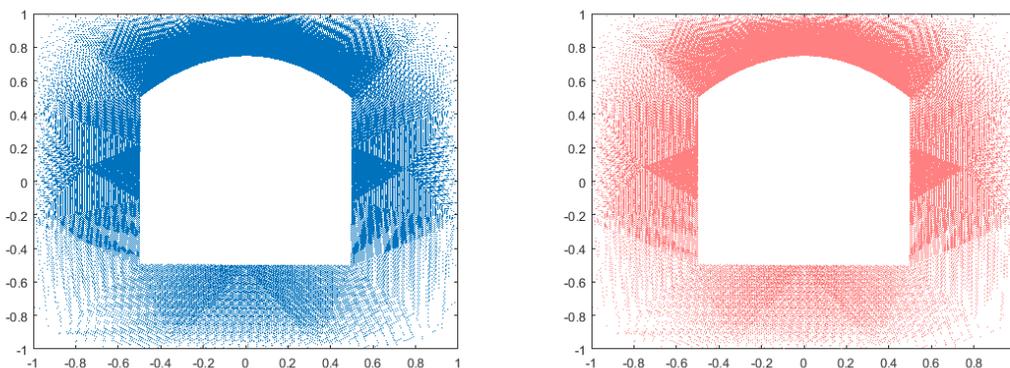


Figura 5.17: v_S y $v_{S,h}$ del Ejemplo 2 (dominio curvo)

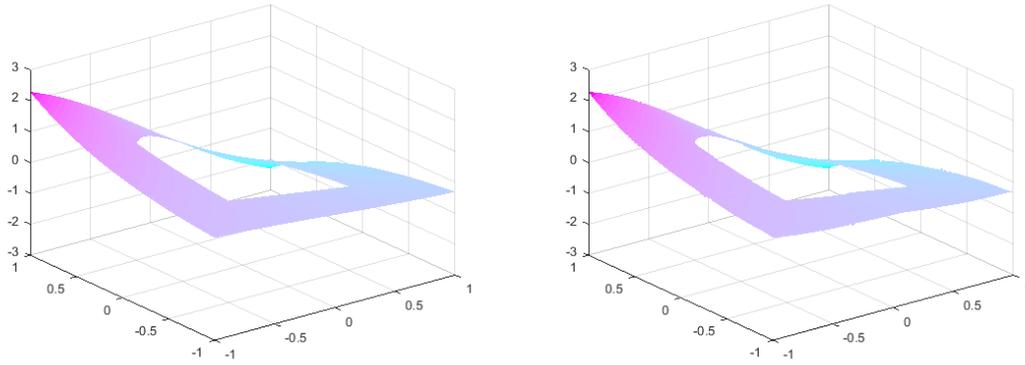


Figura 5.18: p_S y $p_{S,h}$ del Ejemplo 2 (dominio curvo)

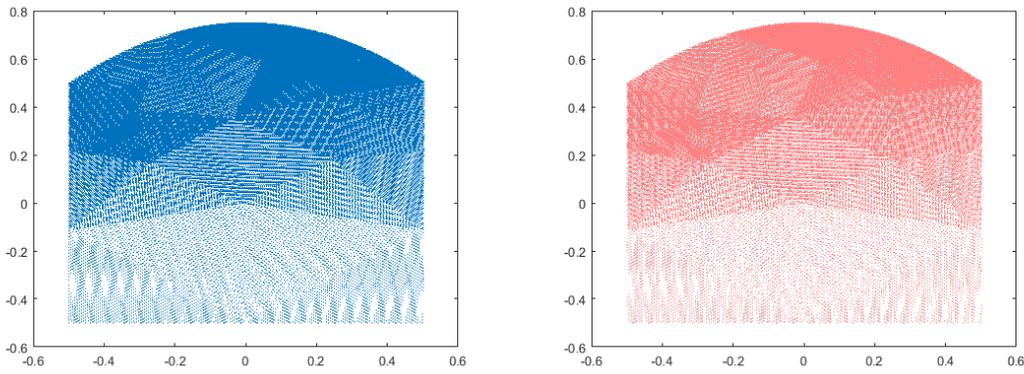


Figura 5.19: \mathbf{v}_D y $\mathbf{v}_{D,h}$ del Ejemplo 2 (dominio curvo)

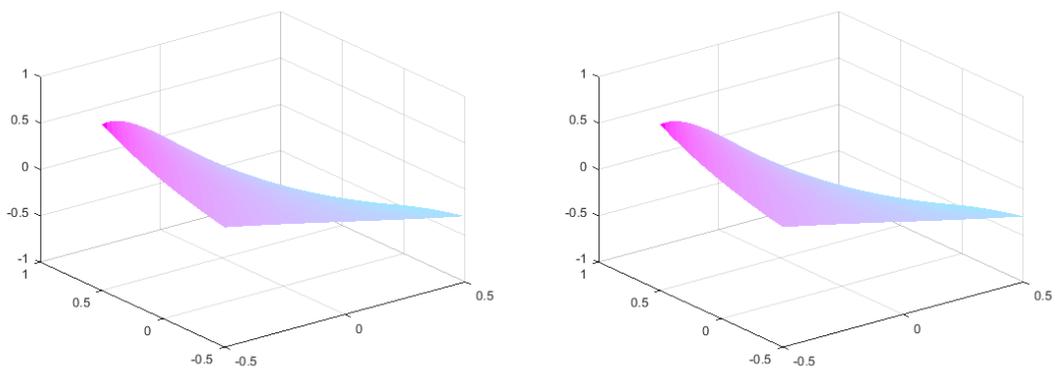


Figura 5.20: p_D y $p_{D,h}$ del Ejemplo 2 (dominio curvo)

Bibliografía

- [1] R. Araya, G. R. Barrenechea and A. Poza, *An adaptive stabilized finite element method for the generalized Stokes problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics. 214 (2008) pp. 457-479.
- [2] M. G. Armentano and J. Blasco, *Stable and unstable cross-grid $P_k Q_l$ mixed finite elements for the Stokes problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics. 234 (5), (2010) pp. 1404-1416.
- [3] M. G. Armentano, C. Padra and M. Scheble, *An hp finite element adaptive scheme to solve the Poisson problem on curved domains*, Comput. Appl. Math., vol. 34 (2), pp. 705-727 (2015).
- [4] María Gabriela Armentano and María Lorena Stockdale, *A unified mixed finite element approximations of the Stokes-Darcy coupled problem*, Computers and Mathematics with Applications Vol.77 (9), pp. 2568-2584 (2019).
- [5] María Gabriela Armentano and María Lorena Stockdale, *Approximations by MINI mixed finite element for the Stokes-Darcy coupled problem on curved domains*, En preparación.
- [6] D. N. Arnold, F. Brezzi and M. Fortin, *A stable finite element for the Stokes equations*, Calcolo 21 (1984) pp. 337-344.
- [7] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers*, R.A.I.R.O. Anal. Numer. 8, 129-151, 1974.
- [8] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin *Mixed Finite Element Methods and Applications*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 44, 2013.
- [9] S. Badia and R. Codina, *Stokes, Maxwell and Darcy: A single finite element approximation for three model problems*, Applied Numerical Mathematics. 62 (2012) pp. 246-263.

- [10] G. R. Barrenechea, L. P. Franca and F. Valentin, *A Petrov-Galerkin enriched method: A mass conservative finite element method for the Darcy equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) pp. 2449-2464.
- [11] G. Beavers and D. Joseph, *Boundary conditions at a naturally impermeable wall*, Journal of Fluid Mechanics 30 (1967) pp. 197-207.
- [12] P. B. Bochev and C. R. Dohrmann, *A computational study of stabilized, low-order $C0$ finite element approximations of Darcy equations*, Comput. Mech. 38 (2006) pp. 323-333.
- [13] P. B. Bochev, C. R. Dohrmann, M. D. Gunzburger, *Stabilization of low-order mixed finite elements for the Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal. 44 (1) (2006) pp. 82-101.
- [14] D. Boffi, *Minimal stabilizations of the P_{k+1} - P_k approximation of the stationary Stokes equations*, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences 5 (2) (1995) pp. 213-224.
- [15] D. Boffi, F. Brezzi, L. Demkowicz, R. G. Durán, R. Falk and M. Fortin, *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications*, Lectures Notes in Mathematics, 1939, 2008.
- [16] D. Boffi and L. Gastaldi, *On the quadrilateral Q_2 - P_1 element for the Stokes problem*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39 (4)(2002) pp. 1001-1011.
- [17] D. Braess, *Finite elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*, Cambridge University Press, 2007.
- [18] F. Brezzi and R. Falk, *Stability of higher-order Hood-Taylor methods*, SIAM Journal on Numerical Analysis 28 (3) (1991) pp. 581-590.
- [19] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1991.
- [20] F. Brezzi, M. Fortin and L. D. Marini, *Mixed Finite Element Methods with continuous stresses*, Math. Models Methods Appl. Sci. 3 (2) (1993) pp. 275-287.
- [21] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [22] P. G. Ciarlet and J. L. Lions, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 8. Gulf Professional Publishing, 1990.
- [23] M. Discacciati and A. Quarteroni, *Navier-Stokes/Darcy coupling: modeling, analysis, and numerical approximation*, Rev. Math. Comput. 22 (2009) pp. 315-426.

- [24] M. Fortin, *An analysis of the convergence of mixed finite element methods*, R.A.I.R.O. Anal. Numer. 11, 341-354, 1977.
- [25] G. N. Gatica, S. Meddahi and R. Oyarzúa, *A conforming mixed finite-element method for the coupling of fluid flow with porous media flow*, IMA Journal of Numerical Analysis, 29 (2009) pp. 86-108.
- [26] G. N. Gatica, R. Oyarzúa and F. J. Sayas, *Analysis of fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupled problem*, Mathematics of Computation Vol. 80, Number 276 (2011) pp. 1911-1948.
- [27] G. N. Gatica, R. Ruiz-Baier and G. Tierra, Giordano, *A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity*, Math. Comp. 85 (297) (2016) pp. 1-33.
- [28] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag, 1986.
- [29] T. Karper, K. A. Mardal and R. Winther, *Unified Finite Element Discretizations Of Coupled Darcy-Stokes Flow*, Numerical Methods for Partial Differential Equations. 25 (2) (2009) pp. 311-326.
- [30] W. J. Layton, F. Schieweck and I. Yotov, *Coupling fluid flow with porous media flow*, Siam J. Numer. Anal., 40 (6) (2003) pp. 2195-2218.
- [31] N. S. Nicaise, B. Ahounou and W. Houedanou, *Residual-based a posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the Stokes-Darcy coupled problem: isotropic discretization*, Afr. Mat. 27, No. 3-4 (2016) pp. 701-729.
- [32] P. A. Raviart and J. M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, (I. Galligani, E. Magenes, eds.), Lectures Notes in Math. 606, Springer Verlag, 1977.
- [33] H. Rui and R. Zhang, *A unified stabilized mixed finite element method for coupling Stokes and Darcy flows*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 198 (2009) pp. 2692-2699.
- [34] R. Verfürth, *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, Oxford, 2013.
- [35] S. Weiber, *Residual error estimate for BEM-based FEM on polygonal meshes*, Numerische Mathematik 118 (4) (2011) pp. 765-788.

- [36] M. Zlamal, *Curved elements in the finite element methods I*, SIAM J. Numer. Anal. 10(1), pp. 229-240, 1973.