



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

**Interpolación de Lagrange de grado arbitrario sobre cuadriláteros convexos:  
condiciones geométricas para estimaciones óptimas del error en  $W^{1,p}$ .**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área  
Ciencias Matemáticas

**Lic. Gabriel Monzón**

Director de tesis: Dr. Gabriel Acosta Rodríguez.  
Consejero de estudios: Dr. Gabriel Acosta Rodríguez.

Lugar de trabajo: Instituto de Ciencias de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

Buenos Aires, 2017.

Fecha de defensa: 22 de mayo de 2017.



## Resumen

Este trabajo trata sobre la estimación del error en la norma  $W^{1,p}$  para la  $Q_k$  interpolación de Lagrange sobre cuadriláteros convexos generales  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Denotando con  $Q_k$  al interpolante, la estimación estándar del error se encuentra usualmente escrita en la forma

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} + h |u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1,p,K}, \quad (0.0.1)$$

siendo  $h$  el diámetro de  $K$ . La desigualdad (0.0.1) involucra la estimación  $L^p$  del error

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1,p,K}, \quad (0.0.2)$$

y la estimación en la seminorma

$$|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K}. \quad (0.0.3)$$

Una cuestión central sobre (0.0.1) es la dependencia de la constante  $C$  en función de cantidades geométricas básicas asociadas al elemento  $K$  considerado. Es bien sabido que la constante  $C$  en (0.0.2) permanece uniformemente acotada para cuadriláteros convexos arbitrarios. Sin embargo, este hecho es falso para la constante  $C$  en (0.0.3). El objetivo principal de este trabajo es el estudio de la dependencia de  $C$  en (0.0.3) en relación a los *ángulos interiores* de  $K$ . A pesar que esta relación ha sido considerada en trabajos previos, ninguno de ellos, hasta donde nosotros sabemos, ha dado un resultado tan claro como el que ofrecemos aquí. Por ejemplo, acotar el mínimo y el máximo ángulo interior es considerado como una cuestión central en algoritmos de generación de mallas a partir del trabajo de Ciarlet y Raviart [13], sin embargo ninguna prueba de suficiencia ha sido dada hasta ahora (al menos para grados arbitrarios de interpolación).

Nosotros mostramos que (0.0.1) puede ser obtenido, para grados arbitrarios de interpolación  $k$  y para cualquier  $p \geq 1$ , bajo el supuesto de cotas uniformes tanto para el mínimo como para el máximo ángulo interior de un cuadrilátero convexo general. También mostramos, exhibiendo contraejemplos adecuados, que la condición sobre el ángulo máximo no puede ser relajada si  $p \geq 3$  y la condición sobre el ángulo mínimo tampoco puede ser relajada si  $1 \leq p < 3$ . Para el caso más común  $p = 2$  y  $k = 1$ , mostramos que la estimación anisotrópica del error (una versión más sutil de (0.0.3)) puede ser obtenida agregando a las hipótesis previas un requerimiento extra vinculado al *casí* paralelismo de un par de lados opuestos del elemento.

Para la interpolación de Lagrange de primer orden  $Q_1$  probamos que la condición sobre los ángulos interiores puede ser reemplazado por la *propiedad de descomposición regular* para cualquier  $p$  en el rango  $1 \leq p < 3$ . La propiedad de descomposición regular fue introducida en [2] para probar la estimación  $H^1$  del error para  $Q_1$  y puede ser considerada como una condición débil sobre la geometría de los elementos. Mostramos también que la propiedad de descomposición regular no es suficiente para grados superiores a 1.

En el caso de grados más altos no hay antecedentes relevantes sobre condiciones generales bajo las cuales (0.0.1) valga. Nosotros probamos que, cuando  $1 \leq p < 3$  y  $k \geq 2$ , la constante  $C$  involucrada en la estimación del error puede ser acotada en términos del *ángulo interior mínimo* del cuadrilátero. Teniendo en consideración que la condición sobre el ángulo mínimo no puede ser relajada si  $1 \leq p < 3$ , se deduce la suficiencia y necesidad de dicha condición.

Este trabajo está estructurado como sigue: a modo de introducción y motivación de nuestro trabajo, en el Capítulo 1, comenzamos con una breve compilación de diferentes y relevantes condiciones bajo las cuales la estimación  $H^1$  del error fue obtenida, los Capítulos 2 y 3 están dedicados a introducir una configuración de referencia y a probar que el estudio puede ser reducido a estos elementos particulares, el Capítulo 4 está enteramente dedicado a probar la estimación del error sobre los elementos de referencia y en el Capítulo 5 compilamos los principales resultados que hemos obtenido sobre cuadriláteros convexos generales. Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos una estimación anisotrópica del error en cuadriláteros con ángulos interiores acotados y un par de lados opuestos casi paralelos.

# Lagrange interpolation of arbitrary degree on convex quadrilaterals: geometric conditions for optimal error estimates in $W^{1,p}$ .

## Abstract

This work deals with error estimates in the  $W^{1,p}$  norm for the  $\mathcal{Q}_k$  Lagrange interpolation on a general convex quadrilateral  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Denoting the interpolant with  $Q_k$ , the standard error estimate is usually found in the form

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} + h |u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1,p,K}, \quad (0.0.4)$$

being  $h$  the diameter of  $K$ . Inequality (0.0.1) involves the  $L^p$  error estimate

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1,p,K}, \quad (0.0.5)$$

and the seminorm estimate

$$|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K}. \quad (0.0.6)$$

A central matter of (0.0.4) concerns the dependence of  $C$  on basic geometric quantities of the underlying element  $K$ . It is known that the constant  $C$  in (0.0.5) remains uniformly bounded for arbitrary convex quadrilaterals. However this statement is false for the constant  $C$  in (0.0.6). The primary goal of this work is to study the dependence of  $C$  in (0.0.6) on the *interior angles* of  $K$ . Although the role of the interior angles have been related to  $C$  in many previous works, none of them, to our best knowledge, have given a result as plain as the one offered in this work. For instance, since the early work by Ciarlet and Raviart [13], bounding the minimal and the maximal interior angle is considered a central matter in mesh generation algorithms, however no proof of sufficiency has been given so far (at least for an arbitrary degree of interpolation).

We show that (0.0.4) can be derived, for arbitrary degree of interpolation  $k$  and for any  $p \geq 1$ , under the assumption of uniform bounds for the minimal and maximal inner angles of a general convex quadrilateral. We also show, exhibiting counterexamples, that the condition on the maximum angle can not be relaxed if  $p \geq 3$ , while if  $1 \leq p < 3$  the condition on the minimum angle can not be relaxed either. For the most standard case  $p = 2$  and  $k = 1$ , we show that *anisotropic* error estimates (a sharp version of (0.0.6)) can be obtained under previous hypotheses assuming that the element has a pair of opposite sides almost parallels.

The *regular decomposition property* was introduced in [2] to prove  $H^1$  error estimates for the  $Q_1$  interpolation operator. Generalizing this result, we prove that the requirement on the inner angles can be replaced by the weaker *regular decomposition property* in the case of  $Q_1$ , provided that  $1 \leq p < 3$ . For higher degrees we show that, when  $1 \leq p < 3$ , the constant  $C$  involved in the error estimate can be bounded in terms of the *minimal interior angle* of the quadrilateral. Taking into account that this condition can not be relaxed if  $1 \leq p < 3$ , sufficiency and necessity of the minimum angle condition is derived.

This work is structured as follow: as motivation and introduction to our work, in Chapter 1, we start with a brief compilation of different and relevant conditions under which the  $H^1$  error estimate was obtained, Chapters 2 and 3 are dedicated to introduce a reference configuration and

to prove that we can reduce our study to these particular elements, Chapter 4 is entirely dedicated to prove the error estimates on reference elements and Chapter 5 compile the main results about general convex quadrilaterals. Finally, in Chapter 6 we link the conditions on inner angles with anisotropic error estimates under an extra assumption on a pair of opposite sides.

## Agradecimientos

Agradezco principalmente a Gabriel por haber asumido el compromiso de acompañarme y guiarme en este proyecto que comenzó hace ya varios años y del cual este trabajo es fruto. Gracias, no solo por los invaluable aportes y enseñanzas del trabajo en sí mismo, sino también por dejarme conocer y disfrutar de la calidad de persona que es; por la paciencia, el tiempo y el respeto que me ha brindado todos estos años.

A los jurados, por haber aceptado officiar ese rol, por el tiempo y esfuerzo dedicados. Particularmente agradezco a T. Apel por la detección temprana de un error en una versión preliminar de la tesis, y a S. Martínez por las observaciones, comentarios y sugerencias que han servido para mejorar la calidad de este trabajo.

A mi esposa, por el apoyo y empuje constante y por el mejor regalo que me pudo dar: la paternidad. A mis hijos, Santino y Martina, que son motivo permanente de orgullo y superación, gracias por existir y perdón por las ausencias necesarias para haber llegado hasta acá. Agradezco también a mis viejos a quienes, sin lugar a dudas, les debo lo que soy.

Finalmente agradezco a todos aquellos quienes directa o indirectamente han sido parte de esta etapa.





# Índice general

<b>1. Antecedentes.</b>	<b>1</b>
1.1. Error clásico. . . . .	1
1.2. Error anisotrópico. . . . .	9
<b>2. Los elementos de referencia.</b>	<b>11</b>
2.1. Preliminares: definiciones y notaciones. . . . .	11
2.2. Condiciones sobre la configuración de referencia. . . . .	15
2.3. Aspectos técnicos. . . . .	17
2.3.1. Sobre la comparación del error bajo mapeos afines. . . . .	17
2.3.2. Sobre las funciones base. . . . .	19
2.3.3. Sobre la integral $I_p$ . . . . .	23
<b>3. Condiciones Geométricas</b>	<b>26</b>
3.1. La propiedad de descomposición regular. . . . .	26
3.1.1. Reducción a la configuración de referencia. . . . .	27
3.1.2. Estimación para $I_p$ . . . . .	32
3.2. La condición de regularidad. . . . .	38
3.2.1. Reducción a la configuración de referencia. . . . .	39
3.3. La doble condición del ángulo. . . . .	40
3.3.1. Reducción a la configuración de referencia. . . . .	40
3.3.2. Estimación para $I_p$ . . . . .	42
3.4. La condición del ángulo mínimo. . . . .	43
<b>4. Estimación del error sobre la configuración de referencia.</b>	<b>45</b>
4.1. Estimación para $ u - \Pi_k u _{1,p,K}$ . . . . .	46
4.2. Estimación para $ \Pi_k u - Q_k u _{1,p,K}$ . . . . .	48
4.2.1. Descomposición del término $ \Pi_k u - Q_k u _{1,p,K}$ . . . . .	49
4.2.2. Estimaciones para la seminorma de las funciones base. . . . .	49
4.2.3. Estimaciones para ciertas evaluaciones de la función $\Pi_k u - u$ . . . . .	51
<b>5. Resultados principales.</b>	<b>60</b>
5.1. Pre-requisitos. . . . .	60
5.2. Estimación del error en $L^p$ . . . . .	62
5.3. Teoremas principales. . . . .	63
5.4. Optimalidad y otras cuestiones. . . . .	65
<b>6. Error anisotrópico bajo la DAC en cuadriláteros con lados opuestos casi paralelos.</b>	<b>75</b>
6.1. Antecedentes extendidos. . . . .	76
6.2. Reducción a la configuración de referencia. . . . .	79

6.3. Caracterización geométrica. . . . .	80
6.4. La estimación del error . . . . .	84
6.4.1. Sobre la configuración de referencia . . . . .	84
6.4.2. Sobre cuadriláteros generales . . . . .	84
6.5. Comentarios finales . . . . .	85

# Capítulo 1

## Antecedentes.

A modo de introducción presentamos este apartado cuyo objetivo principal es brindar un panorama general sobre algunos antecedentes que, a nuestro entender, han sido de gran relevancia en el estudio de condiciones sobre la geometría de elementos cuadriláteros bajo las cuales la estimación clásica del error en  $H^1$

$$|u - Q_1u|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)} \quad (1.0.1)$$

se encuentra garantizada para una constante positiva  $C$  uniforme. Si bien la notación involucrada en (1.0.1) será detallada completamente en el Capítulo 2 cabe aclarar que  $K$  denota un cuadrilátero convexo general cuyo diámetro es  $h$  y  $Q_1u$  es el interpolador de Lagrange de primer orden de la función  $u \in H^2(K)$ .

Muchas de las condiciones descritas en esta sección serán desarrolladas con mayor detalle, principalmente, en el Capítulo 3 en el cual no solo las estableceremos formalmente sino que caracterizaremos a los cuadriláteros que las verifican en términos de *equivalencia* usando una clase particular de elementos que llamaremos *cuadriláteros de referencia* (en el Capítulo 2 precisaremos el significado de las expresiones *equivalencia* y *cuadriláteros de referencia*, de momento lo creemos innecesario y entendemos que el lector puede darse una idea intuitiva sobre lo que estamos diciendo). No obstante, nos parece relevante mencionar aquí tanto la aparición cronológica de dichas condiciones como el rol que cumplieron en el desarrollo de esta teoría.

No está entre nuestro objetivo ser exhaustivos en esta breve reseña de antecedentes, pues dada la diversidad de condiciones introducidas a lo largo del tiempo y la distinta naturaleza de las mismas, compilar y comparar dichas condiciones podría ser el objeto de un trabajo en sí mismo. Para este fin, sugerimos consultar [18] y los trabajos citados allí y a lo largo de estas notas. Simplemente, contemplamos las condiciones geométricas que a nuestro entender son las más significativas en el desarrollo de esta teoría y que sentaron las bases para el desarrollo del presente trabajo.

### 1.1. Error clásico.

El trabajo [12] bien podría considerarse como uno de los pioneros en cuanto al estudio del error (1.0.1) por lo que nos parece adecuado tomarlo como punto de partida. Este paper es compilado, entre tantos otros, en [13] y, (casi) sin lugar a dudas, [13] constituye parte de la bibliografía obligatoria para alguien que se encuentre interesado en el estudio de problemas similares al que aquí nos convoca.

En [12] (resp. [13]), los autores prueban que si existe una constante positiva  $\mu_1$  para la cual se

cumple

$$\frac{h}{s} \leq \mu_1 \quad (1.1.2)$$

siendo  $s$  la longitud del lado más corto de  $K$  y  $h$  el diámetro de  $K$ ; y además existe otra constante positiva  $\mu_2$  verificando

$$|\cos(\theta)| \leq \mu_2 < 1 \quad (1.1.3)$$

para todo ángulo  $\theta$  interior a  $K$ , entonces la estimación clásica del error (1.0.1) vale con una constante  $C$  que solo depende de  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .

Tratemos de entender algunas de las implicancias geométricas de (1.1.2) y (1.1.3). En principio, (1.1.2) establece que la medida del lado más corto (o de menor longitud para ser más precisos) de  $K$  es comparable al diámetro de dicho elemento. En la Sección 2.1 estableceremos formalmente el sentido del término *comparable*; no obstante, basta con aclarar que usualmente nos referiremos a dos cantidades como *comparables* si el hecho que una de ellas tienda a cero implica que la cantidad restante también lo haga y, análogamente, si una de ellas se agranda considerablemente, también lo hace la cantidad restante. Luego, a fin de mostrar que  $s$  y  $h$  resultan comparables asumiendo la validez de (1.1.2), basta notar que

$$1 \leq \frac{h}{s} \leq \mu_1$$

donde la primer desigualdad es gracias a que  $s \leq h$ .

En particular, el hecho que la medida del lado más corto resulte comparable al diámetro del elemento implica que si el diámetro se mantiene constante, ninguno de los lados del cuadrilátero puede tender a cero.

Por otro lado, sabemos que en el intervalo  $[0, \pi]$ , la condición  $|\cos(x)| = 1$  es equivalente a que  $x = 0$  o  $x = \pi$ . Ahora, dado que  $K$  es un cuadrilátero convexo, cualquiera de los ángulos interiores  $\theta$  verifica  $\theta \in [0, \pi]$  por lo que la condición (1.1.3) implica que todos los ángulos interiores del cuadrilátero se encuentren uniformemente acotados lejos de 0 y de  $\pi$ . Esta condición jugará un rol fundamental en la teoría que desarrollaremos por lo que, oportunamente, volveremos sobre la misma y la estableceremos formalmente como la *doble condición del ángulo* (en inglés, *double angle condition*) aunque en algunos textos (ver, por ejemplo, [6]) también se la denomina *condición del ángulo interior* (*interior angle condition*). Concretamente, la Sección 3.3 del Capítulo 3 se encuentra enteramente destinada a establecer de manera formal esta condición y a caracterizar aquellos elementos que la verifiquen en términos de equivalencia con ciertos cuadriláteros particulares (que como hemos señalado en la introducción de este apartado, los llamaremos *cuadriláteros de referencia*).

**Observación 1.1.1** *Como mencionamos anteriormente, la doble condición del ángulo requiere que todos los ángulos interiores del cuadrilátero se encuentren uniformemente acotados lejos de 0 y de  $\pi$ . Es inmediato verificar que este requerimiento es equivalente a pedir que se cumplan simultáneamente las siguientes dos condiciones:*

- (1) *el ángulo interior mínimo se encuentra acotado uniformemente lejos de 0 y*
- (2) *el ángulo interior máximo se encuentra acotado uniformemente lejos de  $\pi$ .*

*Las condiciones (1) y (2) son esenciales en la estimación del error de interpolación para elementos triangulares (ver, por ejemplo, [9, 15]) y es usual referirse a las mismas como condición del ángulo mínimo (minimum angle condition) y condición del ángulo máximo (maximum angle condition), respectivamente. Veremos que, particularmente, la condición del ángulo mínimo también juega un rol decisivo en la estimación del error de interpolación para elementos cuadriláteros.*

Como consecuencia de las observaciones que hemos realizado previamente, notemos que si una familia de cuadriláteros convexos verifica las condiciones (1.1.2) y (1.1.3), entonces dicha familia de cuadriláteros no puede (entre otras cosas) degenerar en un triángulo. En efecto, si una familia de cuadriláteros degenera en un triángulo es, básicamente, porque alguno de los vértices del cuadrilátero se aproxima al segmento determinado por los dos vértices adyacentes a él; ahora, ésto solo es posible en los siguientes dos casos:

- (1) cuando el vértice en cuestión tiende a alguno de los vértices adyacentes a él o
- (2) cuando el vértice en cuestión tiende a algún punto interior al segmento determinado por los dos vértices adyacentes.

Si sucede (1) entonces la distancia entre dichos vértices, que coincide con la medida de uno de los lados del cuadrilátero, tiende a cero; pero vimos que (1.1.2) impide que esto ocurra (ver Figura 1.1 *izquierda* para una referencia ilustrativa) asumiendo, claro está, que el diámetro del elemento no varía significativamente. Si sucede (2) entonces el ángulo interior del cuadrilátero asociado al vértice en cuestión tiende a  $\pi$ , pero vimos que (1.1.3) garantiza que esto no pueda ocurrir (ver Figura 1.1 *derecha* para una referencia ilustrativa). De esta manera queda probada nuestra afirmación acerca de que una familia de cuadriláteros convexos verificando las condiciones (1.1.2)-(1.1.3) no pueda degenerar en un triángulo.

El próximo antecedente al que queremos referirnos involucra una de las primeras condiciones geométricas que subsana esta cuestión sobre que ciertas familias de cuadriláteros degeneren en un triángulo.

Concretamente nos referimos al trabajo [16] en el cual la condición requerida es la siguiente: la existencia de una constante positiva  $\sigma$  que verifique

$$\frac{h}{\rho} \leq \sigma \tag{1.1.4}$$

donde  $h$  continúa denotando el diámetro de  $K$  y  $\rho$  es el máximo entre todos los diámetros de las bolas contenidas en  $K$ .

**Observación 1.1.2** *Siguiendo la terminología usada por algunos autores, entre los cuales nos gustaría destacar [11], diremos que una familia de elementos cuadriláteros  $\mathcal{T}$  es no degenerada, o que posee la condición no degenerativa (non-degenerate condition) si se verifica (1.1.4) para todos los elementos de la familia  $\mathcal{T}$ . Cuando esto suceda, haciendo abuso del lenguaje, diremos que  $K$  es no degenerado cualquiera sea  $K \in \mathcal{T}$ .*

*En muchos textos la condición no degenerativa es también llamada condición de regularidad (regularity condition). Aunque para algunos autores (ver por ejemplo [13]), es necesario el siguiente requerimiento extra: los diámetros de los elementos de  $\mathcal{T}$  deben tender a cero.*

*Teniendo en cuenta que en la práctica dicho requerimiento extra es deseable y generalmente satisfecho, tal vez sea asumido implícitamente y esto explique la sutil diferencia en cuanto a los diferentes sentidos para la misma terminología. Nosotros, habiendo dejado claro este punto, usaremos indistintamente los términos no degenerado y regular así como también condición no degenerativa y condición de regularidad.*

Es inmediato verificar que  $\rho \leq h$  por la propia definición de estos parámetros. Combinando este hecho con (1.1.4) sigue que

$$1 \leq \frac{h}{\rho} \leq \sigma,$$

y en consecuencia, el diámetro del cuadrilátero y el diámetro de la bola más grande contenida en él son comparables en el mismo sentido que hemos usado anteriormente.

En el plano geométrico, esto permite que la familia de cuadriláteros pueda degenerar en un triángulo pero impide que los elementos sean demasiado estrechos o chatos. Apelando a la intuición y siendo informales, si un cuadrilátero fuera achatándose (pensemos por ejemplo en un rectángulo cuya altura tiende a cero) entonces las bolas contenidas en él serían cada vez más pequeñas de modo que el diámetro de las mismas va tendiendo a cero mientras que el diámetro de los cuadriláteros se mantiene constante o va siendo cada vez más grande (en realidad, el diámetro del cuadrilátero también podría converger a cero pero el orden con que lo hace es menor al orden con que los diámetros de las bolas contenidas en él tienden a cero). Por otro lado, para ilustrar que la condición de regularidad permite a ciertas familias de cuadriláteros degenerar en un triángulo basta observar los dos ejemplos presentados en la Figura 1.1.

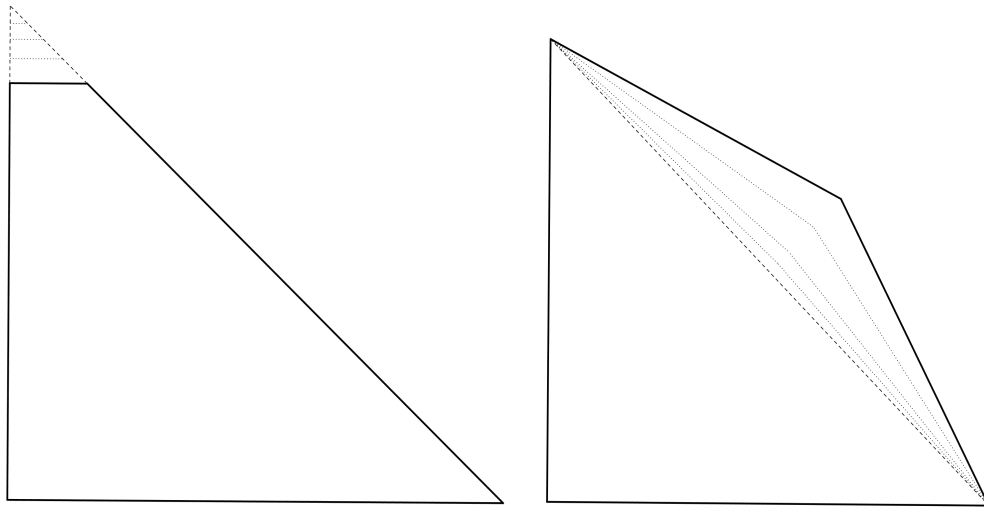


Figura 1.1: Familias de cuadriláteros regulares que degeneran en un triángulo. *Izquierda*: por acercamiento de dos vértices consecutivos, *derecha*: por acercamiento de un vértice a un punto interior al segmento determinado por los dos vértices adyacentes

Tal como puede apreciarse en la Figura 1.1, la condición de regularidad no implica los requerimientos (1.1.2)-(1.1.3). No obstante, la implicación recíproca es verdadera; es decir, vale

$$(1.1.2) - (1.1.3) \implies (1.1.4) \tag{1.1.5}$$

por lo que la condición no degenerativa es un requerimiento ciertamente más débil que las condiciones (1.1.2)-(1.1.3). Una prueba de (1.1.5) puede encontrarse en [16] donde se establece explícitamente la dependencia de  $\sigma$  en función de las constantes  $\mu_1$  y  $\mu_2$ ; concretamente, en ese trabajo se muestra que

$$\sigma = \mu_1(1 - \mu_2^2)^{-1/2}$$

verifica lo requerido.

La condición de regularidad es, sin lugar a dudas, una de las condiciones más extensamente consideradas en problemas similares al que estamos tratando en este trabajo, es decir, para estimaciones *a priori* del error de interpolación para diversos interpoladores. Nosotros dedicaremos enteramente la Sección 3.2 del Capítulo 3 a caracterizar los elementos que verifican la condición de regularidad en términos de equivalencia con ciertos elementos de referencia para luego poder establecer los resultados necesarios para nuestro estudio. Sin embargo, para elementos cuadriláteros *degenerados* o *no regulares* no es mucho lo que se sabe al respecto. Nos referimos por elementos *degenerados* o *no regulares* a aquellos elementos para los cuales (1.1.4) no vale, aunque usualmente también nos referiremos a éstos como *elementos anisotrópicos*.

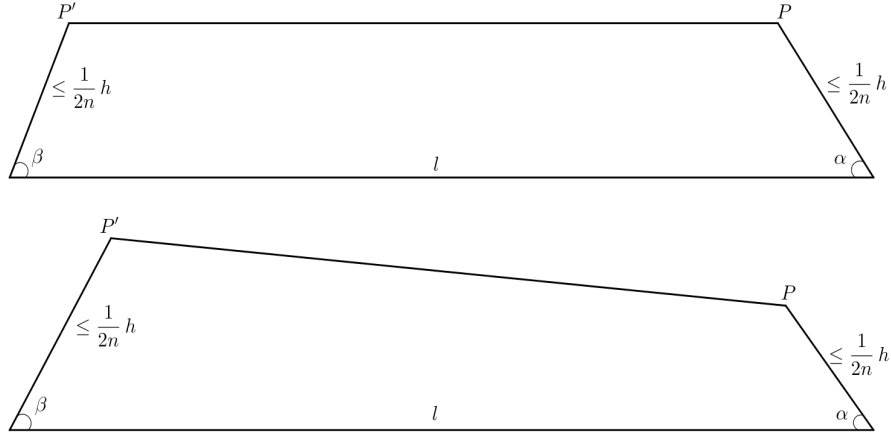


Figura 1.2: Representación de cuadriláteros típicos considerados en [22]. *Arriba*: lados de mayor longitud opuestos y paralelos; *Abajo*: lados de mayor longitud opuestos y *casi* paralelos.

Uno de los primeros resultados sobre la estimación del error para cuadriláteros anisotrópicos se encuentra en [22]. En este trabajo se prueba la estimación del error (1.0.1) para familias muy particulares de cuadriláteros convexos que (bajo cierto punto de vista) pueden ser considerados como *trapezios anisotrópicos* o ligeras perturbaciones de éstos. La clase de cuadriláteros considerada en [22] cumple tener los lados de mayor longitud opuestos y paralelos, o *casi* paralelos en el siguiente sentido: si  $l$  denota el lado de mayor longitud y  $P, P'$  son los vértices del cuadrilátero no pertenecientes a  $l$ , entonces la proporción  $\text{dist}(P, l)/\text{dist}(P', l)$  debe encontrarse entre  $1/2$  y  $1$ ; por otra parte, los lados restantes deben tener su longitud acotada superiormente por  $h/(2n)$  siendo  $n$  un entero mayor o igual a  $6$  ( $n \geq 6$ ) (en la Figura 1.2 ilustramos un par de elementos verificando estas condiciones). En [21] se prueba la estimación del error para elementos similares a los recién descritos; en efecto, se mantiene el requerimiento sobre que los lados de mayor longitud deben ser opuestos y paralelos, aunque la restricción sobre los lados restantes es relajada considerablemente.

Un hecho relevante a destacar en estos trabajos es el siguiente: la constante involucrada en (1.0.1) depende inversamente del seno de  $\alpha$  o de  $\beta$  siendo éstos los ángulos opuestos a  $P'$  y  $P$ , respectivamente (ver Figura 1.2). Como consecuencia de este hecho, si se pretende que la constante en (1.0.1) se encuentre uniformemente acotada, tanto  $\alpha$  como  $\beta$  deben estar acotados lejos de  $0$  y de  $\pi$ . Luego, usando que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero es  $2\pi$ , sigue que los ángulos opuestos a  $l$  no pueden tender simultáneamente a  $\pi$ , por lo que, (en principio) a lo sumo uno de ellos puede hacerlo.

Si bien las condiciones requeridas sobre estos cuadriláteros pueden resultar restrictivas, dan lugar a que la condición no degenerativa (1.1.4) pueda no cumplirse, por lo que efectivamente constituye un resultado válido y destacable para elementos anisotrópicos o no regulares.

Continuando con la descripción de algunos antecedentes, nos referimos ahora al paper [2], el cual puede considerarse como el germen del presente trabajo. En este paper se introduce la llamada *propiedad de descomposición regular* (*regular decomposition property*) que es, en relación a las condiciones pre-existentes, la menos restrictiva y, de hecho, la más débil bajo la cual la estimación del error (1.0.1) vale.

Concretamente, un cuadrilátero  $K$  verifica la propiedad de descomposición regular si puede ser dividido, a lo largo de una de sus diagonales (la cual llamaremos  $d_1$ ), en dos triángulos cada uno de los cuales tiene su ángulo máximo acotado lejos de  $\pi$  de modo que el cociente  $|d_2|/|d_1|$  se encuentre superiormente acotado por una constante fija siendo  $d_2$  la diagonal restante de  $K$ .

En términos más simples, la propiedad de descomposición regular se verifica si es posible dividir al cuadrilátero por su diagonal más larga de manera que los triángulos resultantes cumplan la condición del ángulo máximo; o si es posible dividir al cuadrilátero por la diagonal de menor longitud de modo que los triángulos resultantes cumplan la condición del ángulo máximo y las medidas de las diagonales sean comparables.

En la Sección 3.1 del Capítulo 3 volveremos a considerar esta condición y caracterizaremos a aquellos cuadriláteros que la verifiquen en términos de equivalencia con ciertos cuadriláteros pertenecientes a la configuración de referencia para luego poder establecer los resultados que nos permitirán realizar nuestro estudio de una manera ordenada y sistemática. No obstante, nos parece importante señalar aquí en qué sentido decimos que la propiedad de descomposición regular es más débil que las condiciones a las que nos referimos anteriormente; con este motivo realizamos las siguientes observaciones.

**Observación 1.1.3** *Si un cuadrilátero  $K$  tiene todos sus ángulos interiores acotados superiormente por una constante  $\psi_M < \pi$  (es decir, si verifica la condición del ángulo máximo), entonces satisface trivialmente la propiedad de descomposición regular (para mostrar ésto basta dividir a  $K$  por la diagonal de mayor longitud). La familia de cuadriláteros representada en la Figura 1.1 (derecha) sirve como ejemplo para ilustrar que la implicación recíproca no es verdadera.*

**Observación 1.1.4** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo que satisface la condición de regularidad (1.1.4); entonces  $K$  satisface la propiedad de descomposición regular donde la constante  $\psi_M$  que acota los ángulos interiores depende de la constante  $\sigma$  involucrada en (1.1.4) y el cociente entre las diagonales se encuentra superiormente acotado por  $\sigma$ .*

*En efecto, del trabajo [16], sabemos que los ángulos interiores de  $K$  se encuentran acotados inferiormente por una constante positiva  $\delta = \delta(\sigma)$  (dicho en otros términos, estamos usando aquí que la condición de regularidad implica la condición del ángulo mínimo); por lo tanto, hay a lo sumo un ángulo interior  $\theta$  de  $K$  que no está acotado superiormente por  $\pi - \delta$ . Luego, dividiendo a  $K$  por la diagonal que tiene como uno de sus extremos al vértice asociado al ángulo  $\theta$ , nuestra afirmación sigue fácilmente.*

**Observación 1.1.5** *Como hemos señalado oportunamente, bajo las hipótesis requeridas en [21, 22] sobre  $K$ , una constante uniforme en la estimación del error (1.0.1) implica que  $K$  tenga, a lo sumo, un solo ángulo interior tendiente a  $\pi$ . Dividiendo a  $K$  por la diagonal que tiene como uno de sus extremos al vértice en el cual se encuentra dicho ángulo (el tendiente a  $\pi$ ), es inmediato verificar que  $K$  cumple la propiedad de descomposición regular.*

Ilustramos con un ejemplo extraído de [2] que las implicaciones recíprocas vinculadas a las observaciones 1.1.4 y 1.1.5 no son necesariamente válidas; esto completa nuestro argumento sobre que la propiedad de descomposición regular es ciertamente una de las condiciones más débiles bajo la cual la estimación del error (1.0.1) vale con una constante uniforme.

**Ejemplo 1.1.1** *Consideremos los cuadriláteros cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, s)$  y  $(s^2, s^2 + s)$  con  $0 < s < \frac{1}{2}$  (ver Figura 1.3 para una referencia gráfica).*

*Una verificación de rutina muestra que la condición de regularidad (1.1.4) no vale con  $\sigma$  independiente de  $s$  (de hecho, es evidente que cuando  $s$  tiende a cero, el diámetro de las bolas contenidas también tiende a cero mientras que el diámetro del cuadrilátero tiende a 1). Por otro lado, para  $s$  suficientemente pequeño, los lados de mayor longitud de  $K$  no son opuestos como es requerido en [21, 22].*

*No obstante, la diagonal más larga de  $K$  (a saber, la que une los vértices  $(0, s)$  y  $(1, 0)$ ) permite dividir al elemento en dos triángulos los cuales tienen su máximo ángulo acotado superiormente por  $3\pi/4$  de modo que  $K$  verifica trivialmente la propiedad de descomposición regular.*



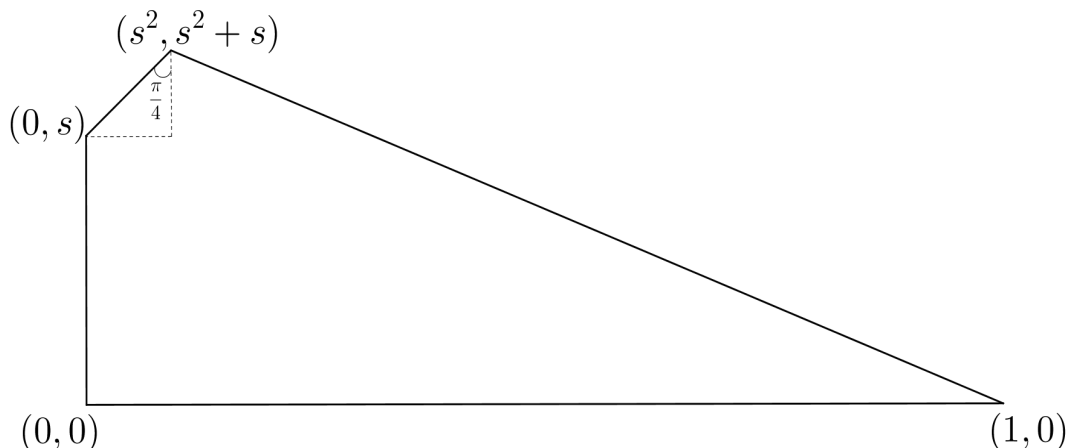


Figura 1.3: Representación de un elemento con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,s)$  y  $(s^2, s + s^2)$  donde  $0 < s < \frac{1}{2}$ .

Por último, nos referiremos al trabajo [17] en el cual la estimación del error de interpolación es obtenida bajo una condición que puede considerarse como una generalización de la propiedad de descomposición regular; de hecho, el nombre de dicha condición hace referencia precisamente a esta cuestión: *propiedad de descomposición regular generalizada (generalized regular decomposition property)*.

A continuación establecemos formalmente la definición de la propiedad de descomposición regular generalizada:

**Definición 1.1.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo. Diremos que  $K$  satisface la propiedad de descomposición regular generalizada con constantes  $N \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $0 < \psi_M < \pi$  si es posible dividir a  $K$  por una de sus diagonales (que llamaremos  $d_1$ ) en dos triángulos de forma tal que el triángulo de mayor área  $T_1$  tenga su ángulo interior máximo acotado superiormente por  $\psi_M$  y se verifique*

$$\frac{h}{|d_1| \sin(\alpha)} \left( \frac{|T_2|}{|T_1|} \ln \left( \frac{|T_1|}{|T_2|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq N, \quad (1.1.6)$$

siendo  $T_2$  el triángulo restante,  $h$  el diámetro de  $K$  y  $\alpha$  el máximo ángulo interior de  $T_2$ .

Básicamente, esta condición establece que al dividir al cuadrilátero por la diagonal más larga en los triángulos  $T_1$  y  $T_2$  entonces, cuando ambos triángulos tengan áreas comparables deben satisfacer la condición del ángulo máximo; en otro caso, la condición del ángulo máximo solo deberá ser satisfecha por el triángulo de mayor área  $T_1$ . Este último condicionamiento se debe a que, si el área del triángulo  $T_2$  es considerablemente menor al área de  $T_1$ , el error sobre  $T_2$  contribuye poco al error global, y en consecuencia su ángulo máximo puede ser tan grande como se quiera siempre que la razón  $\frac{|T_2|}{|T_1|}$  tienda a cero.

Particularmente, en el caso que el cuadrilátero  $K$  degenera al triángulo más grande ( $T_1$ ), la condición del ángulo máximo sobre el triángulo más chico ( $T_2$ ) puede ser relajada. De hecho esta es la motivación señalada en [17] para introducir la propiedad (1.1.6).

Es bastante simple verificar que si un cuadrilátero verifica la propiedad de descomposición regular entonces verifica también la propiedad de descomposición regular generalizada. En efecto, supongamos que un cuadrilátero  $K$  cumple la propiedad de descomposición regular; entonces es posible dividir a  $K$  por una de sus diagonales ( $d_1$ ) en dos triángulos  $T_1$  y  $T_2$  los cuales tienen todos sus ángulos interiores acotados superiormente por una constante  $\psi_M < \pi$  y, además,  $|d_2|/|d_1| \leq N$

para cierta constante  $N$  siendo  $d_2$  la diagonal restante de  $K$ . Sin pérdida de generalidad podemos elegir la notación de modo que  $T_1$  sea el triángulo de mayor área, i.e.  $|T_1|/|T_2| \geq 1$ . Un análisis elemental de la función  $x^{-1} \ln(x)$  permite ver que la misma se encuentra uniformemente acotada por  $e^{-1}$  en el intervalo  $[1, +\infty)$ ; luego,  $\left(\frac{|T_2|}{|T_1|} \ln\left(\frac{|T_1|}{|T_2|}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$ . Por otro lado, el ángulo más grande de  $T_2$ ,  $\alpha$ , claramente se encuentra acotado lejos de cero y, por hipótesis, lejos de  $\pi$  de modo que  $1/\sin(\alpha) \leq C$  para cierta constante  $C$ . Finalmente, el diámetro  $h$  es comparable a la diagonal más larga de  $K$ ; por lo tanto,  $h/|d_1|$  se encuentra superiormente acotado por una constante  $D$  (si  $h$  es comparable a  $|d_1|$  no hay nada que decir, mientras que si  $h$  es comparable a  $|d_2|$  usamos la hipótesis  $|d_2|/|d_1| \leq N$ ). Combinando lo observado sigue que

$$\frac{h}{|d_1| \sin(\alpha)} \left( \frac{|T_2|}{|T_1|} \ln\left(\frac{|T_1|}{|T_2|}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq DCe^{-\frac{1}{2}}$$

lo que garantiza (1.1.6).

No obstante, la implicación recíproca no es necesariamente válida; es decir, que un cuadrilátero satisfaga la propiedad de descomposición regular generalizada no garantiza que verifique la propiedad de descomposición regular como puede apreciarse en el siguiente ejemplo (extraído de [17]).

**Ejemplo 1.1.2** Consideremos cuadriláteros cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(a^s, a)$  y  $(0, a)$  donde  $0 < a < 1$  y  $s > 2$  (ver Figura 1.4 para una referencia gráfica).

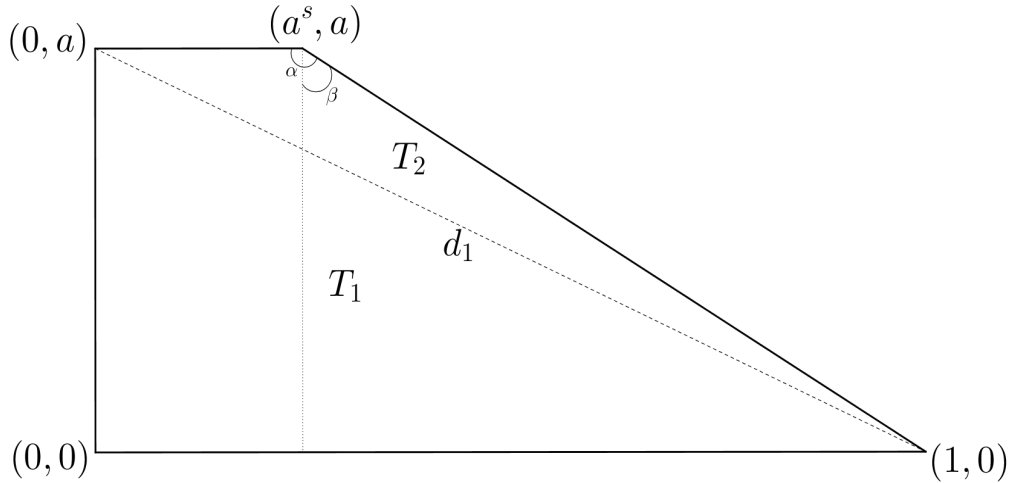


Figura 1.4: Representación de un elemento con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(a^s, a)$  y  $(0, a)$  donde  $0 < a < 1$  y  $s > 2$ .

Sea  $K$  un cuadrilátero del tipo antes descrito. Notemos que al dividir  $K$  por la diagonal  $d_1$  que conecta los vértices  $(1, 0)$  y  $(0, a)$ , el triángulo  $T_2$  de vértices  $(1, 0)$ ,  $(a^s, a)$  y  $(0, a)$  no verifica la condición del ángulo máximo cuando  $a \rightarrow 0$  puesto que el ángulo  $\alpha$  opuesto a dicha diagonal tiende a  $\pi$ . En efecto, basta notar que

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\beta) = \frac{a}{\sqrt{(1-a^s)^2 + a^2}} \quad (1.1.7)$$

siendo  $\beta$  al ángulo comprendido entre los segmentos  $(a^s, 0)(a^s, a)$  y  $(1, 0)(a^s, a)$ .

Por otro lado, si dividiéramos a  $K$  por la diagonal restante,  $d_2$ , tendríamos

$$\frac{|d_1|}{|d_2|} = \left( \frac{1+a^2}{a^{2s}+a^2} \right)^{1/2} \rightarrow \infty$$

cuando  $a$  tiende a cero. En consecuencia, para valores suficientemente pequeños de  $a$ ,  $K$  no satisface la propiedad de descomposición regular.

Veamos que  $K$  verifica la propiedad de descomposición regular generalizada.

Comencemos notando que el ángulo más grande de  $T_2$  es el que se encuentra ubicado en el vértice  $(a^s, a)$ , es decir, es  $\alpha$  y verifica (1.1.7). Por otro lado,

$$h = |d_1| = \sqrt{1 + a^2}, \quad |T_1| = \frac{a}{2}, \quad |T_2| = \frac{a^{s+1}}{2}.$$

Por lo tanto, para  $s > 2$  fijo y  $a \rightarrow 0$  resulta que

$$\frac{h}{|d_1| \operatorname{sen}(\alpha)} \left( \frac{|T_2|}{|T_1|} \ln \left( \frac{|T_1|}{|T_2|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = [((1 - a^s)^2 + a^2) a^{s-2} \ln(a^{-s})]^{\frac{1}{2}}$$

tiende a cero, con lo cual, tomando  $a$  suficientemente pequeño, se verifica (1.1.6) para una constante  $N$  independiente de  $a$ . Finalmente, dado que todos los ángulos interiores de  $T_1$  se encuentran acotados superiormente por  $\pi/2$ , sigue que  $K$  verifica la propiedad de descomposición regular generalizada.

Finalizamos este apartado señalando que todas las condiciones descritas previamente han sido consideradas al estudiar el error de interpolación (1.0.1) en  $H^1$ , es decir,

$$|u - Q_1 u|_{H^1(K)} \leq Ch |u|_{H^2(K)}.$$

Sin embargo, en [17], se estudia un error similar pero correspondiente al espacio  $W^{1,p}$ ; a saber,

$$|u - Q_1 u|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (1.1.8)$$

bajo ciertas condiciones cuyos enunciados omitimos pero que varían dependiendo el valor de  $p$  y cuyo sentido o interpretación geométrica no es evidente así como tampoco su verificación. No obstante, hasta donde sabemos, los trabajos [17, 3, 4] son los únicos en los cuales se ha realizado el estudio de (1.1.8) para  $p \geq 1$  arbitrario. Dado que el presente trabajo se basa, principalmente, en la descripción de los resultados obtenidos en [3, 4] omitimos la descripción de los mismos en esta sección.

## 1.2. Error anisotrópico.

Dentro de la clase de elementos no regulares o anisotrópicos (aquellos que no verifican la condición de regularidad (1.1.4)) hay elementos para los cuales existen dos direcciones bien determinadas y diferenciadas que, a *grosso modo*, permiten describir la geometría del elemento; pensemos por ejemplo en rectángulos chatos o estrechos. Para esta clase de elementos es deseable una estimación del error que enfatice estas direcciones privilegiadas (por describirlas de alguna manera); concretamente, la estimación del error de interpolación deseada es una versión más débil que (1.0.1) que es conocida como *estimación anisotrópica del error de interpolación*. Como veremos en breve, este tipo de estimación vincula la medida de estas direcciones particulares con la variación de la función en tales direcciones.

Para rectángulos y paralelogramos (imágenes afines del cuadrado unitario) vale la siguiente estimación anisotrópica del error [6, 8]

$$|u - Q_1 u|_{H^1(K)} \leq C \left[ h_1 \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u \right\|_{L^2(K)} + h_2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \right\|_{L^2(K)} \right], \quad (1.2.9)$$

donde  $h_1$  y  $h_2$  denotan las medidas de la base y altura del rectángulo o paralelogramo, respectivamente.

Observando que

$$h_1, h_2 \leq h \quad \text{y} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u \right\|_{L^2(K)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \right\|_{L^2(K)} \leq |u|_{H^2(K)},$$

es inmediato verificar que (1.0.1) se deduce de (1.2.9). En este sentido, decimos que (1.2.9) es una versión más débil que (1.0.1). Además, las direcciones  $x_1$  y  $x_2$  (que claramente son las dos direcciones significativas para describir la geometría de un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados o de un paralelogramo) son las que se destacan en (1.2.9), particularmente, la estimación (1.2.9) pone énfasis tanto en las medidas del elemento en tales direcciones como en la variación de la función en dichas direcciones.

En [7] se compilan estos resultados y se muestra que la estimación anisotrópica también puede obtenerse para cierta clase de *elementos subparamétricos*, entendiéndose por estos últimos cuadriláteros que se obtienen a partir el elemento de referencia (cuadrado unitario) mediante transformaciones que resultan ser pequeñas perturbaciones de mapeos afines por funciones bilineales. En pocas palabras, los cuadriláteros considerados en [7] son ligeras perturbaciones de un rectángulo.

Sabemos que hablar de *perturbaciones de un rectángulo* es impreciso y merece ser bien definido. En el Capítulo 6, Sección 6.1, estableceremos formalmente lo que entendemos por dichas perturbaciones y lo haremos en el mismo sentido en que fue establecido en [7]. En dicho capítulo mostraremos que sobre aquellos cuadriláteros que verifican la doble condición del ángulo y tienen un par de lados opuestos casi paralelos en un sentido similar al indicado en la Figura 1.2, vale una estimación anisotrópica del error. Tal como hemos hecho para las condiciones previas, caracterizaremos estos elementos en términos de equivalencia con ciertos cuadriláteros de referencia.

Una última observación merece ser destacada.

**Observación 1.2.1** *Aunque no es elemental, es posible verificar que los cuadriláteros considerados en [7], que (como acabamos de señalar) esencialmente son perturbaciones de un rectángulo lo que permite tener cierta intuición sobre la geometría de dichos elementos, tienen su ángulo interior máximo acotado lejos de  $\pi$ . Es decir, verifican la condición del ángulo máximo y, en consecuencia, (gracias a la Observación 1.1.3) satisfacen también la propiedad de descomposición regular.*

En el sentido dado por la observación previa, la propiedad de descomposición regular junto a su generalización que hemos descrito oportunamente; son, hasta donde sabemos, las propiedades menos restrictivas y más débiles bajo las cuales es posible obtener la estimación clásica del error de interpolación en  $H^1$  para la interpolación de Lagrange de primer orden.

## Capítulo 2

# Los elementos de referencia.

Una de las herramientas centrales en nuestro estudio del error de interpolación es la reducción de cuadriláteros convexos generales a una familia particular de cuadriláteros. Concretamente, mostraremos que podemos reducir el análisis a ciertas clases de elementos que, esencialmente, son perturbaciones de trapecios rectángulos a los cuales se les ha perturbado únicamente el vértice opuesto al ángulo recto. Esta técnica ha sido introducida en [2] y la hemos desarrollado y extendido (principalmente en [4]) para nuestro trabajo.

Esta reducción de casos a estudiar no es gratuita y requiere de ciertos resultados, la mayoría bastante técnicos, que básicamente responden a dos cuestiones: la primera de ellas, mostrar que los errores entre cuadriláteros vinculados por una transformación afín (la cual debe satisfacer ciertos requerimientos particulares) resultan comparables en el sentido que tener una estimación para un elemento garantice tener una estimación similar en el elemento restante; y, la segunda de ellas, mostrar que bajo ciertas condiciones geométricas sobre los cuadriláteros existen este tipo de transformaciones afines.

La primera de estas cuestiones es respondida en la Sección 2.3.1 del presente capítulo; mientras que, a fin de simplificar la presentación de los resultados y facilitar la lectura, la segunda es enteramente desarrollada en el Capítulo 3.

Este capítulo está destinado a introducir definiciones, notaciones y convenciones que usaremos a lo largo de todo el trabajo y que merecen ser escritas en forma detallada y de manera explícita. Particularmente, introducimos aquí la *configuración de referencia*, es decir, la familia de cuadriláteros a la cual podemos reducir el análisis del error, y presentamos algunos resultados básicos vinculados a este tipo de elementos. Aunque estas pocas líneas son meramente descriptivas, creemos que son suficientes para aclarar la razón de centrar la atención en esta configuración de referencia. Los aspectos técnicos que justifican la reducción del estudio a estos cuadriláteros particulares serán cubiertos completamente en Capítulo 3 como ya hemos señalado.

### 2.1. Preliminares: definiciones y notaciones.

A lo largo de este trabajo, como ya lo venimos haciendo, denotaremos con  $K$  a un cuadrilátero convexo general de vértices  $V_1, V_2, V_3$  y  $V_4$ . Más aún, aplicando movimientos rígidos en el plano de ser necesario, asumiremos siempre que  $V_1$  está ubicado en el origen y el resto de la notación es adoptada de modo que los vértices son enumerados en sentido antihorario. Sin pérdida de generalidad asumiremos también que  $V_2$  está ubicado sobre el eje de abscisas positivas y que  $K$  se encuentra enteramente contenido en el semiplano superior respecto al eje de abscisas.

Por cuestiones que quedarán claras en los siguientes apartados (particularmente en el Capítulo 3) estaremos interesados en cierta familia particular de cuadriláteros a la que llamaremos *configuración de referencia*. Cada cuadrilátero de referencia; es decir, cada cuadrilátero perteneciente a

la configuración de referencia, será denotado por  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  para ciertas constantes  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} > 0$  asumiendo que este elemento tiene los siguientes vértices

$$V_1 = (0, 0), \quad V_2 = (a, 0), \quad V_3 = (\tilde{a}, \tilde{b}) \quad \text{y} \quad V_4 = (0, b).$$

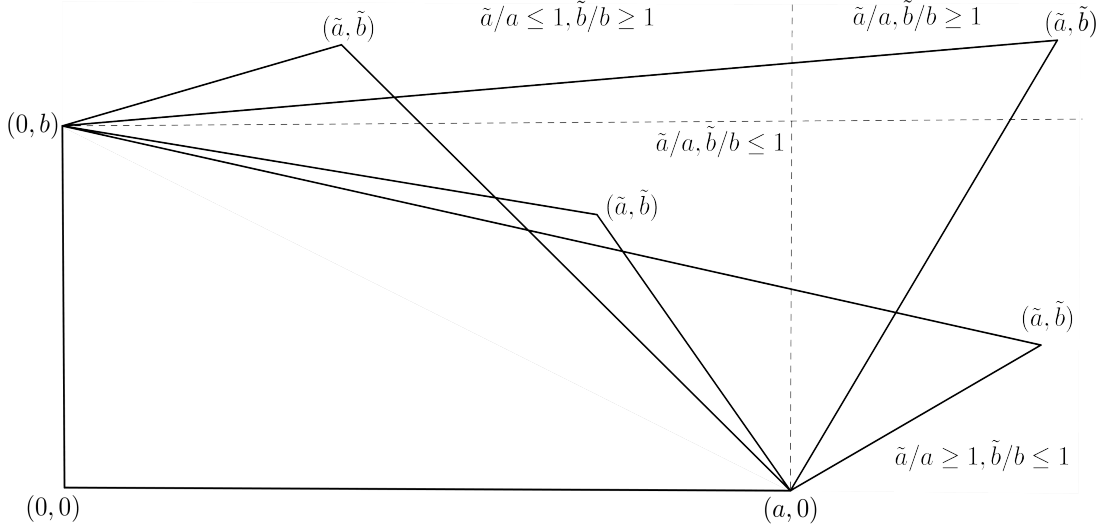


Figura 2.1: Representación de un elemento de referencia con las cuatro configuraciones posibles según los cocientes  $\tilde{a}/a$  y  $\tilde{b}/b$ .

En la Figura 2.1 ilustramos cuatro cuadriláteros pertenecientes a la configuración de referencia, uno por cada región posible determinadas por los cocientes  $\tilde{a}/a$  y  $\tilde{b}/b$  al ser comparados con 1.

En el caso particular del cuadrado unitario de referencia simplificaremos la notación escribiendo  $\hat{K} = K(1, 1, 1, 1)$  y, siendo consistentes con esta notación, sus vértices serán denotados por  $\hat{V}_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , preservando la convención ya establecida en cuanto al orden de enumeración.

Indistintamente usaremos  $\hat{X} = (\hat{x}, \hat{y})$  y  $X = (x, y)$  para las variables sobre  $\hat{K}$  y  $K$ , respectivamente.

Para un entero positivo  $k$  consideraremos sobre  $\hat{K}$  el conjunto  $\mathcal{N}(\hat{K})$  constituido por los siguientes  $(k+1)^2$  puntos o nodos  $\{\hat{N}_{ij}\}_{0 \leq i, j \leq k}$  donde

$$\hat{N}_{ij} = \left( \frac{j}{k}, \frac{i}{k} \right). \quad (2.1.1)$$

Observemos que con la notación asumida tenemos  $\hat{V}_1 = \hat{N}_{00}$ ,  $\hat{V}_2 = \hat{N}_{0k}$ ,  $\hat{V}_3 = \hat{N}_{kk}$  y  $\hat{V}_4 = \hat{N}_{k0}$ .

Al conjunto de nodos sobre  $\hat{K}$ ,  $\mathcal{N}(\hat{K})$ , lo dividiremos en dos subconjuntos; a saber, los *nodos laterales* y los *nodos internos* o *interiores*. Los nodos internos son aquellos puntos  $\hat{N}_{ij}$  donde  $1 \leq i, j \leq k-1$  mientras que los nodos laterales son los restantes puntos de  $\mathcal{N}(\hat{K})$  que no son nodos interiores.

Evidentemente, los nodos laterales se encuentran ubicados sobre el borde de  $\hat{K}$  mientras que los nodos internos se encuentran en el interior de  $\hat{K}$  (ver Figura 2.2).

Como es usual, con motivo de definir los elementos isoparamétricos (cuando  $k = 1$ ) y subparamétricos (cuando  $k > 1$ ) sobre  $K$ , consideraremos el espacio

$$\hat{\mathcal{Q}}_k(\hat{K}) = \{\hat{p} : \hat{p}(\hat{X}) = \sum_{r,s \leq k} a_{rs} \hat{x}^r \hat{y}^s, \quad a_{r,s} \in \mathbb{R}\}$$

y la transformación  $F_K : \widehat{K} \rightarrow K$  dada por

$$F_K(\widehat{X}) = \sum_{i=1}^4 V_i \widehat{\phi}_i(\widehat{X}), \quad (2.1.2)$$

donde, para cada  $i$ ,  $\widehat{\phi}_i \in \widehat{\mathcal{Q}}_1(\widehat{K})$  es la función bilineal base asociada al vértice  $\widehat{V}_i$ . Concretamente,

$$\widehat{\phi}_1(\widehat{X}) = (1 - \widehat{x})(1 - \widehat{y}), \quad \widehat{\phi}_2(\widehat{X}) = \widehat{x}(1 - \widehat{y}), \quad \widehat{\phi}_3(\widehat{X}) = \widehat{x}\widehat{y} \quad \text{y} \quad \widehat{\phi}_4(\widehat{X}) = (1 - \widehat{x})\widehat{y}$$

por lo que cada función base verifica:  $\widehat{\phi}_i(\widehat{V}_j) = \delta_i^j$ .

Mapeando el conjunto  $\mathcal{N}(\widehat{K})$  mediante  $F_K$  queda definido sobre  $K$  el conjunto de nodos  $\mathcal{N}(K)$ ; esto es,  $\mathcal{N}(K) = \{N_{ij}\}_{0 \leq i, j \leq k}$  donde

$$N_{ij} = F_K(\widehat{N}_{ij}). \quad (2.1.3)$$

El conjunto de nodos  $\mathcal{N}(K)$  queda dividido en dos subconjuntos: los *nodos laterales* y los *nodos internos o interiores* siendo los nodos laterales de  $K$  las imágenes por  $F_K$  de los nodos laterales de  $\widehat{K}$  y siendo los nodos internos de  $K$  las imágenes por  $F_K$  de los nodos interiores de  $\widehat{K}$ . Claramente, los nodos laterales de  $K$  se encuentran ubicados sobre el borde de  $K$  y los nodos internos de  $K$  se encuentran en el interior de  $K$  (ver Figura 2.2).

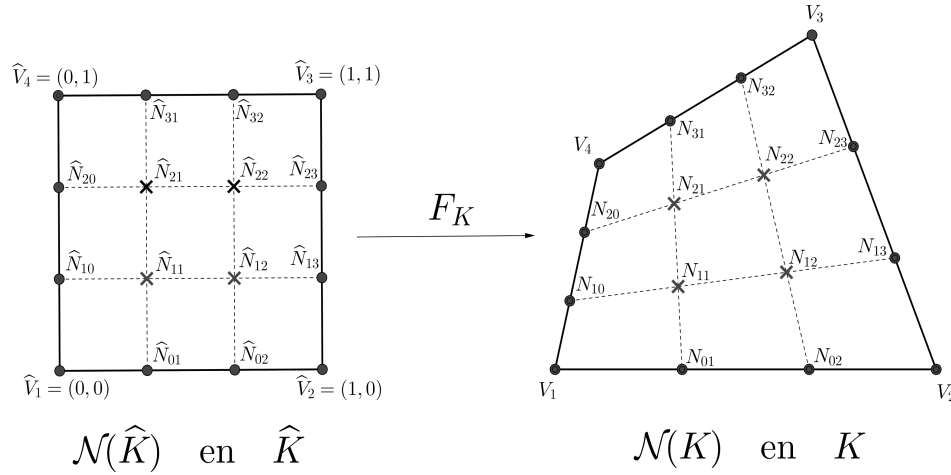


Figura 2.2: Notación para los nodos en un elemento de tercer orden. *Nodos laterales*: •, *nodos interiores*: ×

Las funciones base sobre  $K$  se definen por

$$\phi_{ij} = \widehat{\phi}_{ij} \circ F_K^{-1} \quad (2.1.4)$$

donde  $\widehat{\phi}_{ij} \in \widehat{\mathcal{Q}}_k(\widehat{K})$  verifica  $\widehat{\phi}_{ij}(\widehat{N}_{lr}) = \delta_{ij}^{lr}$ . En general, el espacio  $\mathcal{Q}_k(K)$  de elementos finitos isoparamétricos o subparamétricos (dependiendo del  $k$  elegido) se define por

$$\mathcal{Q}_k(K) = \{f : f \circ F_K \in \widehat{\mathcal{Q}}_k(\widehat{K})\}. \quad (2.1.5)$$

Es inmediato verificar que las funciones base  $\phi_{ij}$  sobre  $K$  pertenecen al espacio  $\mathcal{Q}_k(K)$  y verifican la siguiente propiedad de interpolación

$$\phi_{ij}(N_{lr}) = \delta_{ij}^{lr} \quad (2.1.6)$$

(debido a (2.1.6), y como es usual en la literatura clásica, nos referiremos a  $\phi_{ij}$  como la *función base asociada al nodo*  $N_{ij}$ ).

Consecuentemente, el  $\mathcal{Q}_k$ -operador de interpolación  $Q_k$  sobre  $K$  se define por

$$Q_k u(X) = \widehat{Q}_k \widehat{u}(\widehat{X}) \quad (2.1.7)$$

donde  $X = F_K(\widehat{X})$ ,  $\widehat{Q}_k$  es el  $\widehat{\mathcal{Q}}_k$ -operador de interpolación de Lagrange de orden  $k$  sobre  $\widehat{K}$  y  $\widehat{u} = u \circ F_K$ .

Al trabajar con elementos de referencia, que recordamos son notados por  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ , y con el operador de interpolación definido sobre estos elementos será de utilidad en repetidas oportunidades considerar propiedades del triángulo  $T = T(a, b)$  cuyos vértices son  $V_1^T = (0, 0)$ ,  $V_2^T = (a, 0)$  y  $V_3^T = (0, b)$ ; y propiedades del  $\mathbb{P}_k$ -operador de interpolación de Lagrange de orden  $k$  sobre  $T$  al que denotaremos por  $\Pi_k$  (usamos  $\mathbb{P}_k$  para referirnos al espacio de polinomios en dos variables de grado a lo sumo  $k$ ). En relación a este operador, cabe señalar que los nodos de interpolación involucrados en su definición son

$$N_{ij}^T = (aj/k, bi/k), \quad 0 \leq i + j \leq k. \quad (2.1.8)$$

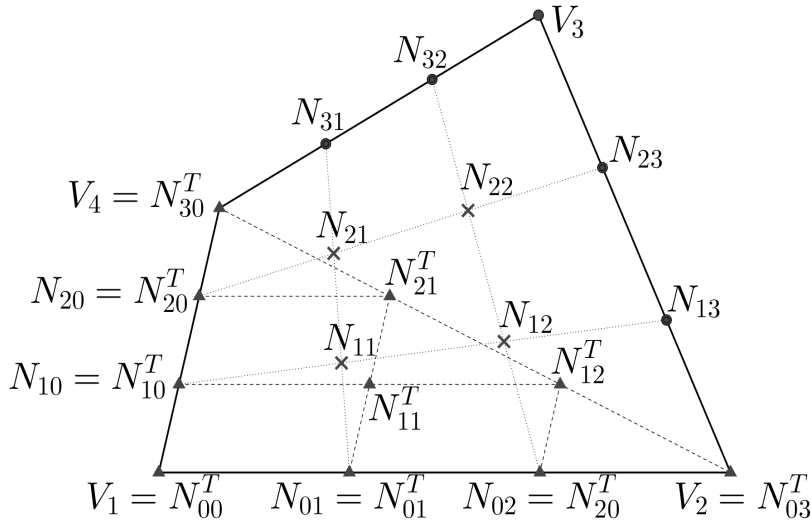


Figura 2.3: Notación para los nodos en un elemento de tercer orden. Los nodos para el operador  $\Pi_3$  están indicados por  $\blacktriangle$ .

Finalizamos este apartado con dos cuestiones notacionales simples: la primera de ellas es que usaremos la letra  $C$  para referirnos repetidamente a una constante real positiva la cual puede variar de línea a línea, e incluso, dentro de la misma línea; y la segunda tiene como objeto dejar formalmente establecido lo que entendemos por cantidades *comparables* y la notación respectiva (ya hemos usado esta terminología en el Capítulo 1): diremos que las cantidades  $s$  y  $t$  son *comparables* si existe una constante positiva  $C$  que verifique

$$C^{-1}s \leq t \leq Cs \quad (2.1.9)$$

y en este caso escribiremos  $s \underset{C}{\sim} t$ , o simplemente,  $s \sim t$ .

Es inmediato verificar que (2.1.9) es equivalente a la existencia de constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  verificando

$$C_1s \leq t \leq C_2s. \quad (2.1.10)$$



Observamos este hecho evidente ya que a fin de mostrar que las cantidades  $s$  y  $t$  son comparables suele ser más sencillo mostrar (2.1.10), en contraposición a (2.1.9), como ejemplificaremos oportunamente.

## 2.2. Condiciones sobre la configuración de referencia.

Aunque todavía no lo hayamos probado y quede mucho camino para poder hacerlo, afirmamos que si somos capaces de probar la estimación del error sobre ciertas clases de elementos pertenecientes a la configuración de referencia seremos capaces de obtener el mismo tipo de estimación sobre cuadriláteros generales. Esta es una de las herramientas clave de nuestro análisis que ha sido introducida en [2] y que hemos desarrollado y perfeccionado en [3, 4] como ya hemos adelantado.

Bajo este supuesto (todavía hipotético pero que será desarrollado en el Capítulo 3 como también ya hemos mencionado en repetidas oportunidades) concentraremos nuestra atención en estudiar con detalle la configuración de referencia bajo ciertas condiciones que, a fin de cuentas y luego de haber exhibido los argumentos necesarios, permitirán caracterizar las propiedades geométricas contempladas: *condiciones sobre los ángulos interiores*, *condición de regularidad* y *propiedad de descomposición regular*.

Teniendo presente esta idea, introducimos las siguientes condiciones sobre elementos del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ :

$$\text{Condición } (\Delta 1): \quad \frac{\tilde{a}}{a}, \frac{\tilde{b}}{b} \leq C \quad (2.2.11)$$

con su versión más restrictiva

$$\text{Condición } (D1): \quad \frac{\tilde{a}}{a}, \frac{\tilde{b}}{b} \leq 1; \quad (2.2.12)$$

$$\text{Condición } (D2): \quad \frac{1}{\sin(\alpha)} \leq C \quad (2.2.13)$$

siendo  $\alpha$  el ángulo entre la diagonal  $d_1$  de  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  que conecta  $V_2$  con  $V_4$  y el segmento  $l$  que tiene a  $V_3$  y a  $V_4$  como extremos (preservaremos esta notación a lo largo del texto, ver Figura 2.4); y

$$\text{Condición } (\Delta 2): \quad |l| \leq C|s| \quad (2.2.14)$$

donde  $s$  denota el lado de menor longitud, o simplemente más corto, de  $K$ .

A simple vista, pareciera que estas condiciones poco tienen que ver con algunas de las condiciones sobre los ángulos interiores introducidas en el Capítulo 1 (*condición del ángulo máximo* y *doble condición del ángulo*) o con la *propiedad de descomposición regular*. No obstante, como también ya hemos adelantado repetidamente, uno de nuestros objetivos es mostrar cómo estas condiciones geométricas pueden ser caracterizadas en términos de las condiciones  $(\Delta 1)$ ,  $(D1)$ ,  $(D2)$  y  $(\Delta 2)$ , pero antes de hacer ésto debemos lidiar con algunas cuestiones técnicas que iremos desarrollando en los siguientes apartados.

Por lo pronto, señalamos dos implicaciones evidentes de estos requerimientos y mostramos que las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  y  $[\Delta 2, D2]$  resultan ser equivalentes:

Dado que  $|s| \leq |l|$  por ser  $s$  el lado más corto de  $K$ , la propiedad  $(\Delta 2)$  establece que la medida de  $l$  y la medida de  $s$  son comparables en el sentido descrito en (2.1.9). Por otro lado, la propiedad  $(D2)$ , junto a la convexidad de  $K$ , básicamente establece que el ángulo  $\alpha$  se mantiene acotado lejos de 0 y de  $\pi$ , lo que (informalmente hablando) implica que el segmento  $l$  se mantenga *lejos* de la diagonal  $d_1$ .

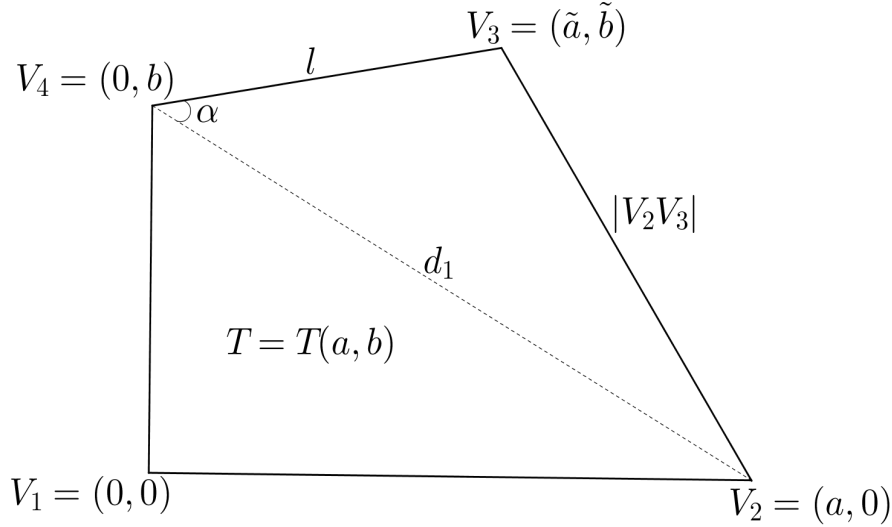


Figura 2.4: Notación para el elemento  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ .

**Lema 2.2.1** Sea  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo general. Entonces, las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  y  $[\Delta 2, D2]$  son equivalentes.

**Demostración.** Dado que  $|l|^2 = \tilde{a}^2 + |b - \tilde{b}|^2$ , para mostrar que  $(\Delta 2)$  implica  $(\Delta 1)$  basta observar que

$$\tilde{a} \leq |l| \leq C|s| \leq Ca \quad (2.2.15)$$

y; similarmente,

$$|b - \tilde{b}| \leq |l| \leq C|s| \leq Cb. \quad (2.2.16)$$

El argumento concluye usando desigualdad triangular en el primer término de (2.2.16) pues esto permite obtener  $\tilde{b} \leq Cb$ .

Asumamos ahora la validez de  $[\Delta 1, D2]$ . El teorema del seno aplicado al triángulo  $\Delta(V_2V_3V_4)$  permite obtener la siguiente igualdad

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta_3)} = \frac{|V_2V_3|}{|d_1|} \quad (2.2.17)$$

siendo  $\beta_3$  el ángulo interior de  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  ubicado en el vértice  $V_3$  y denotando por  $|V_2V_3|$  la medida del segmento de extremos  $V_2$  y  $V_3$ .

Por la desigualdad triangular y  $(\Delta 1)$  tenemos

$$|V_2V_3|^2 = |a - \tilde{a}|^2 + \tilde{b}^2 = a^2 \left|1 - \frac{\tilde{a}}{a}\right|^2 + \tilde{b}^2 \leq a^2 \left(1 + \frac{\tilde{a}}{a}\right)^2 + \tilde{b}^2 \leq a^2(1 + C)^2 + C^2b^2. \quad (2.2.18)$$

Como  $|d_1|^2 = a^2 + b^2$ , de (2.2.18) concluimos que  $|V_2V_3| \leq C|d_1|$ . Este hecho junto a (2.2.17) y a que  $\alpha$  se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$ , permite obtener  $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta_3)} \leq C$  por lo que  $\beta_3$  también se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$ . Invertiendo los cocientes en (2.2.17), los argumentos dados permiten concluir que  $|V_2V_3|$  y  $|d_1|$  son comparables.

Denotando por  $\gamma$  al ángulo interior de  $\Delta(V_2V_3V_4)$  ubicado en  $V_2$  tenemos (por  $(D2)$  y el teorema del seno nuevamente)

$$|l| \leq \frac{|l|}{\sin(\gamma)} = \frac{|V_2V_3|}{\sin(\alpha)} \leq C|V_2V_3|; \quad (2.2.19)$$

y como  $|V_2V_3|$  y  $|d_1|$  son comparables, resulta que  $|l| \leq C \min\{|V_2V_3|, |d_1|\}$ .

Consideramos ahora dos casos dependiendo si  $b/a$  tiende de a cero o no. Si  $b/a$  tiende a cero afirmamos que  $\tilde{b} > b$  y  $|b - \tilde{b}|/\tilde{a} \geq C > 0$ . En efecto, llamaremos  $\alpha_1$  al ángulo comprendido entre  $d_1$  y la recta paralela al eje de abscisas que pasa por  $V_4$  (ver Figura 2.5); notemos que  $\alpha_1 \leq C < \pi/2$  y  $\tan(\alpha_1) = b/a$  por lo que  $\alpha_1$  tiende a cero. Si  $\tilde{b} \leq b$  entonces  $\alpha \leq \alpha_1$  (ver Figura 2.5 *derecha*) contradiciendo (D2) por lo que  $\tilde{b} > b$ . En este caso escribiremos  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  (ver Figura 2.5 *izquierda*). De (D2) sabemos que  $\alpha$  no tiende a cero; luego,  $\alpha_2$  debe encontrarse acotado lejos de cero y de  $\pi$  por lo tanto la afirmación queda probada observando que  $\tan(\alpha_2) = |b - \tilde{b}|/\tilde{a}$ . Tenemos entonces que  $b < a$  y  $\tilde{a} \leq C|b - \tilde{b}|$  por lo que  $|l| = (\tilde{a}^2 + (b - \tilde{b})^2)^{1/2} \leq C|b - \tilde{b}| \leq Cb$ , lo que prueba ( $\Delta 2$ ).

Finalmente, asumamos que  $\frac{b}{a} > C > 0$ . En este caso, si  $a$  y  $b$  son comparables, no resta nada que probar ya que también resultan comparables a  $d_1$ . Por lo tanto asumiremos que  $a/b$  tiende a cero. Bajo estas condiciones, con argumentos de la misma naturaleza a los ya esbozados y usando fuertemente que  $\alpha$  se encuentra acotado lejos de cero y de  $\pi$ , se deduce que  $\frac{|b - \tilde{b}|}{\tilde{a}} \leq C$ . Resulta entonces que  $a < b$  y  $|l| = (\tilde{a}^2 + (b - \tilde{b})^2)^{1/2} \leq C\tilde{a} \leq Ca$  gracias a ( $\Delta 1$ ). El resultado queda entonces demostrado.  $\square$

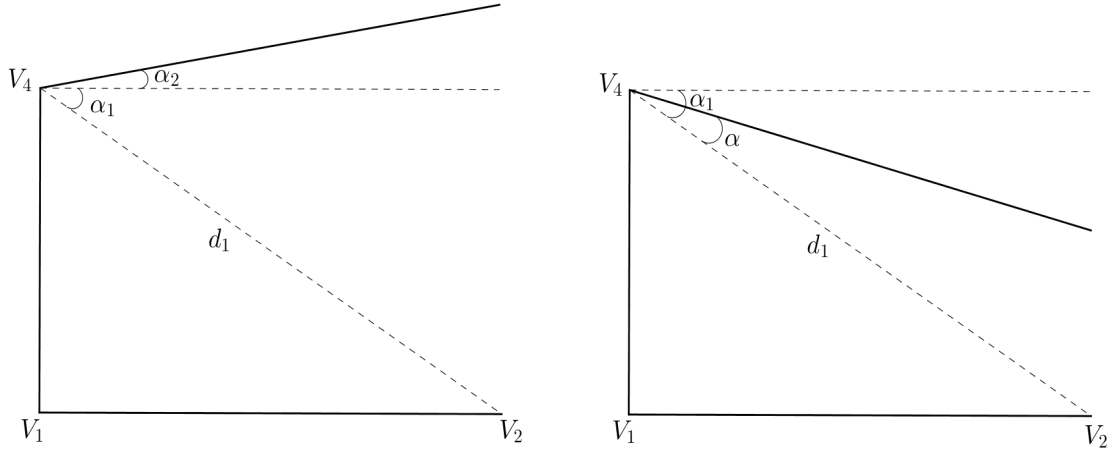


Figura 2.5: Ilustración de la notación usada para los ángulos en la demostración del Lema 2.2.1. *Izquierda*: ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  bajo el supuesto  $\tilde{b} > b$ , *derecha*: ángulos  $\alpha$  y  $\alpha_1$  bajo el supuesto  $\tilde{b} \leq b$ .

## 2.3. Aspectos técnicos.

### 2.3.1. Sobre la comparación del error bajo mapeos afines.

Ya hemos dicho que si somos capaces de probar la estimación del error sobre ciertos cuadriláteros de referencia seremos capaces de obtener el mismo tipo de estimación sobre cuadriláteros generales. Esta sección tiene por objeto dejar en claro en qué sentido hacemos esta afirmación. El resultado clave para esta cuestión es el Lema 2.3.1 el cual, básicamente, establece que los errores de interpolación entre un elemento y su imagen por una transformación afín con determinadas propiedades, resultan ser comparables. En este lema quedan en evidencia los requisitos que debe cumplir dicha transformación para que, valga la redundancia, los errores entre dos elementos vinculados por ella sean comparables. En este sentido, es lógico pensar que nuestro siguiente paso sea mostrar la existencia de este tipo de transformaciones afines entre cuadriláteros que satisfagan ciertas propiedades geométricas y los elementos de referencia. Con estos resultados probados queda

claro que podemos reducir nuestro estudio a la configuración de referencia. Este es a *grosso modo* el esquema de trabajo que seguiremos, pero por lo pronto enunciemos y probemos el siguiente

**Lema 2.3.1** Sean  $K$  y  $\bar{K}$  dos elementos cuadriláteros, y sea  $L : K \rightarrow \bar{K}$  una transformación afín  $L(X) = BX + P$ . Asumamos que  $L(K) = \bar{K}$ ,  $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$  (en particular el número de condición cumple  $\kappa(B) \leq C$ ). Si  $\bar{Q}_k$  es la  $Q_k$ -interpolación (isoparamétrica para  $k = 1$  o subparamétrica para  $k < 1$ ) sobre  $\bar{K}$  y  $\bar{u} = u \circ L^{-1}$  entonces, para cualquier  $p \geq 1$ , existen constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  tales que

$$C_1 |\bar{u} - \bar{Q}_k \bar{u}|_{1,p,\bar{K}} \leq |u - Q_k u|_{1,p,K} \leq C_2 |\bar{u} - \bar{Q}_k \bar{u}|_{1,p,\bar{K}}$$

y,

$$C_1 |\bar{u}|_{m,p,\bar{K}} \leq |u|_{m,p,K} \leq C_2 |\bar{u}|_{m,p,\bar{K}}$$

cualquiera sea  $m \geq 1$ .

**Demostración.** Por la definición del operador de interpolación tenemos

$$Q_k u(X) = \hat{Q}_k \hat{u}(F_K^{-1}(X)) \quad \text{y} \quad \bar{Q}_k \bar{u}(\bar{X}) = \hat{Q}_k \hat{u}(F_{\bar{K}}^{-1}(\bar{X})),$$

donde  $\bar{X}$  denota la variable sobre  $\bar{K}$ . Dado que  $L$  es una transformación afín, es inmediato verificar que

$$F_{\bar{K}} = L \circ F_K$$

y, en consecuencia,

$$\bar{Q}_k \bar{u}(\bar{X}) = Q_k u(X).$$

Finalmente, el lema sigue planteando las integrales correspondientes, usando regla de la cadena junto a la fórmula de cambio de variables y observando que  $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$ .  $\square$

Dado que estaremos interesados en elementos para los cuales existe una transformación afín cumpliendo los requisitos del lema previo, introducimos la siguiente definición con la intención de simplificar la escritura a futuro.

**Definición 2.3.1** Diremos que dos cuadriláteros  $K$  y  $\bar{K}$  son  $C$ -equivalentes (o simplemente equivalentes) si y sólo si cada uno de ellos puede ser transformado en el otro mediante una transformación afín del tipo descrito en el Lema 2.3.1.

**Observación 2.3.1** Sea  $L$  una transformación afín del tipo descrito en el Lema 2.3.1; esto es,  $L$  se encuentra determinada por una matriz  $B$  que cumple  $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$  para alguna constante positiva  $C$ . Afirmamos que la longitud de un segmento cualquiera resulta comparable a la longitud del segmento imagen mediante el mapeo por  $L$ . Si bien este hecho es elemental lo destacamos ya que haremos uso del mismo en repetidas oportunidades. En efecto, sean  $P$  y  $Q$  dos puntos cualesquiera, entonces

$$\|L(P) - L(Q)\| = \|B(P - Q)\| \leq \|B\| \|P - Q\| \leq C \|P - Q\|$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} \|P - Q\| &= \|L^{-1}(L(P) - L(Q))\| = \|B^{-1}(L(P) - L(Q))\| \\ &\leq \|B^{-1}\| \|L(P) - L(Q)\| \leq C \|L(P) - L(Q)\|. \end{aligned}$$

En suma,

$$C^{-1} \|L(P) - L(Q)\| \leq \|P - Q\| \leq C \|L(P) - L(Q)\|$$

lo que prueba nuestra afirmación.

Finalmente, a fin de explicitar aún más que dos cuadriláteros equivalentes (en el sentido dado por la Definición 2.3.1) poseen *errores comparables* observemos lo siguiente: asumamos que  $K$  y  $\overline{K}$  son equivalentes y que, para  $K$ , vale la siguiente estimación del error

$$|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K} \quad (2.3.1)$$

entonces (haciendo uso del Lema 2.3.1) se tiene

$$|\overline{u} - \overline{Q}_k \overline{u}|_{1,p,\overline{K}} \leq C_1^{-1} |u - Q_k u|_{1,p,K} \leq CC_1^{-1} h^k |u|_{k+1,p,K} \leq CC_1^{-1} C_2 h^k |\overline{u}|_{k+1,p,\overline{K}}.$$

Ahora, como  $h \simeq \frac{\overline{h}}{C}$ , siendo  $\overline{h}$  el diámetro de  $\overline{K}$  (debido a que una transformación afín  $L$  como la del Lema 2.3.1 preserva longitudes, salvo una constante que depende de  $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$  como señalamos en la Observación 2.3.1), sigue que

$$|\overline{u} - \overline{Q}_k \overline{u}|_{1,p,\overline{K}} \leq C \overline{h}^k |\overline{u}|_{k+1,p,\overline{K}}$$

la cual es una estimación del error similar a (2.3.1) pero para el elemento  $\overline{K}$ . Es decir, del Lema 2.3.1 y de la estimación (2.3.1) para  $K$  se deduce una estimación del error similar para el elemento  $\overline{K}$ . Es inmediato verificar que, si asumimos una estimación del error para  $\overline{K}$ , el Lema 2.3.1 permite obtener una estimación similar para el error sobre  $K$ . En este sentido, diremos que si  $K$  y  $\overline{K}$  son elementos equivalentes, los errores sobre ellos resultan comparables.

### 2.3.2. Sobre las funciones base.

Teniendo en cuenta que, para cada una de las condiciones geométricas que contemplaremos, existe una apropiada clase de elementos equivalentes dentro de la configuración de referencia resulta importante considerar la transformación definida en (2.1.2) para el caso particular  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ ; a saber,  $F_K : \widehat{K} \rightarrow K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ ,

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (a\hat{x}(1 - \hat{y}) + \tilde{a}\hat{x}\hat{y}, b\hat{y}(1 - \hat{x}) + \tilde{b}\hat{x}\hat{y}) = (x, y), \quad (2.3.2)$$

así como también su Jacobiano

$$DF_K(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} a + \hat{y}(\tilde{a} - a) & \hat{x}(\tilde{a} - a) \\ \hat{y}(\tilde{b} - b) & b + \hat{x}(\tilde{b} - b) \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

$$J_K := \det(DF_K)(\hat{x}, \hat{y}) = ab(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1)). \quad (2.3.4)$$

**Observación 2.3.2** *Afirmamos que la convexidad de  $K$  es suficiente para garantizar la positividad del Jacobiano  $J_K > 0$  en el interior de  $\widehat{K}$ .*

*En efecto, dado que  $J_K$  es una función afín es suficiente verificar que es positiva en alguno de los vértices de  $\widehat{K}$  y no negativa en el resto. La positividad en  $\widehat{V}_1 = (0, 0)$  es trivial puesto que  $J_K(0, 0) = ab > 0$ , como así también lo es la no negatividad en  $\widehat{V}_2$  y  $\widehat{V}_4$  ya que  $J_K(1, 0) = a\tilde{b} \geq 0$  y  $J_K(0, 1) = \tilde{a}b \geq 0$ . Por otro lado, como  $K$  es un cuadrilátero convexo, el vértice  $V_3 = (\tilde{a}, \tilde{b})$  se encuentra por encima de la diagonal  $d_1 = V_2V_4$  (es decir, por encima del segmento de recta  $y = \frac{b}{a}(a - x)$ ). En consecuencia,*

$$\tilde{b} \geq \frac{b}{a}(a - \tilde{a})$$

*o, equivalentemente,*

$$a\tilde{b} + b\tilde{a} - ab \geq 0.$$

*Por lo tanto,*

$$J_K(1, 1) = ab(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1) \geq 0. \quad (2.3.5)$$

Si tenemos en cuenta que las funciones base sobre un elemento  $K$  se definen usando las funciones base sobre  $\widehat{K}$  y la transformación bilineal  $F_K$  como en (2.1.4), resulta claro que estudiar normas y seminormas de las funciones base sobre  $K$  puede ser reducido al estudio de ciertas integrales, definidas sobre  $\widehat{K}$ , cuyo integrando involucra expresiones que dependen de las funciones base (o alguna de sus derivadas) y también (gracias a la fórmula de cambio de variables) del Jacobiano  $J_K$  de  $F_K$ . Lo que resta de esta sección está destinado a detallar un poco esta cuestión y a brindar algunos resultados generales sobre seminormas de las funciones base.

Centraremos nuestra atención en los elementos de referencia, es decir, en el caso  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ ; y nos gustaría destacar el siguiente hecho: obtener estimaciones para este tipo de seminormas es una cuestión netamente técnica que no solo depende de las condiciones consideradas (( $\Delta 1$ ), ( $D1$ ), ( $D2$ ), ( $\Delta 2$ )) sino también y, particularmente, de la naturaleza del nodo asociado a la función base, ya sea *nodo lateral* o *nodo interno*. Concretamente, veremos que el tratamiento de los nodos *interiores* merece especial atención y cuidado.

Con el afán de simplificar la escritura introducimos la siguiente definición que es más bien notacional antes que conceptual

**Definición 2.3.2** Sean  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$  constantes positivas satisfaciendo (2.3.5) se define la expresión  $I_p$  por

$$I_p = I_p(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}. \quad (2.3.6)$$

**Lema 2.3.2** Si  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es convexo y verifica ( $\Delta 1$ ), entonces para cualquier  $p \geq 1$  y para cualquier función base  $\phi$  existe una constante positiva  $C$  tal que

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p \leq C \frac{b}{a^{p-1}} I_p \quad (2.3.7)$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \leq C \frac{a}{b^{p-1}} I_p. \quad (2.3.8)$$

**Demostración.** Sea  $\widehat{\phi}$  la función base sobre  $\widehat{K}$  correspondiente a  $\phi$  en el sentido dado por (2.1.4), entonces (por regla de la cadena) sigue que

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_K(\hat{x}, \hat{y})} \begin{pmatrix} b + \hat{x}(\tilde{b} - b) & -\hat{y}(\tilde{b} - b) \\ -\hat{x}(\tilde{a} - a) & a + \hat{y}(\tilde{a} - a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

donde  $J_K(\hat{x}, \hat{y}) = \det(DF_K) = ab(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))$ .

Definimos  $R(\hat{x}, \hat{y}) := (1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1)) \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{y}(\tilde{b}/b - 1) \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y})$  y  $S(\hat{x}, \hat{y}) := -\hat{x}(\tilde{a}/a - 1) \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) + (1 + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1)) \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y})$ ; de manera que es inmediato verificar las siguientes igualdades

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = \frac{b}{J_K(\hat{x}, \hat{y})} R(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = \frac{a}{J_K(\hat{x}, \hat{y})} S(\hat{x}, \hat{y}).$$

Planteando las integrales correspondientes y cambiando variables tenemos que

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p = \frac{b}{a^{p-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|R(\hat{x}, \hat{y})|^p}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}$$

y

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p = \frac{a}{b^{p-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|S(\hat{x}, \hat{y})|^p}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}.$$

La demostración concluye usando que  $R$  y  $S$  se encuentran uniformemente acotados dado que ambos son polinomios,  $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$  y (gracias a  $(\Delta 1)$ )  $0 \leq \tilde{a}/a, \tilde{b}/b \leq C$ .  $\square$

El resultado anterior provee cotas para cualquier función base; pero como ya hemos adelantado, las funciones base asociadas a *odos interiores* requieren un tratamiento particular. En concreto tenemos

**Lema 2.3.3** *Si  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es convexo y verifica  $(\Delta 1)$ , entonces para cualquier  $p \geq 1$  y para cualquier función base  $\phi$  asociada a un nodo interior de  $K$ , existe una constante positiva  $C$  tal que*

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p \leq C \frac{b}{a^{p-1}} \left[ |1 - \tilde{b}/b|^p I_p + \max\{1, (b/\tilde{b})^{p-1}/2\} \right] \quad (2.3.10)$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \leq C \frac{a}{b^{p-1}} \left[ (\tilde{a}/a)^p I_p + \max\{1, (b/\tilde{b})^{p-1}/2\} \right]. \quad (2.3.11)$$

**Demostración.** Dado que  $\phi$  está asociada a un nodo interior sobre  $K$ , sigue que  $\hat{\phi}$  (dada por (2.1.4)) se encuentra asociada a un nodo interior sobre  $\hat{K}$ ; por lo tanto, existe  $P \in \mathcal{Q}_{k-2}(\hat{K})$  tal que  $\hat{\phi}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}(1 - \hat{x})\hat{y}(1 - \hat{y})P(\hat{x}, \hat{y})$  (la escritura anterior para  $\hat{\phi}$  se debe a los siguientes dos hechos:  $\hat{\phi} \in \mathcal{Q}_k(\hat{K})$  y  $\hat{\phi}$  se anula sobre el borde de  $\hat{K}$ ). Luego

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} = \hat{y}(1 - \hat{y})A \quad \text{y} \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} = \hat{x}(1 - \hat{x})B$$

siendo  $A(\hat{x}, \hat{y}) := \frac{\partial}{\partial \hat{x}} [\hat{x}(1 - \hat{x})P(\hat{x}, \hat{y})]$  y  $B(\hat{x}, \hat{y}) := \frac{\partial}{\partial \hat{y}} [\hat{y}(1 - \hat{y})P(\hat{x}, \hat{y})]$ .

Por regla de la cadena tenemos que

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_K(\hat{x}, \hat{y})} \begin{pmatrix} b + \hat{x}(\tilde{b} - b) & -\hat{y}(\tilde{b} - b) \\ -\hat{x}(\tilde{a} - a) & a + \hat{y}(\tilde{a} - a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}(1 - \hat{y})A(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(1 - \hat{x})B(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix}$$

donde  $J_K(\hat{x}, \hat{y}) = \det(DF_K) = ab(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))$ .

Llamando  $S := \hat{x}\hat{y}[(1 - \hat{x})B - (1 - \hat{y})A]$  y  $R := \hat{y}A$  tenemos

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = \frac{b}{J_K} \left[ (1 - \tilde{b}/b)S + (1 - \hat{y})R \right].$$

Planteando la integral correspondiente y realizando cambio de variables, sigue que

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p = \int_0^1 \int_0^1 \frac{b}{a^{p-1}} \frac{|(1 - \tilde{b}/b)S + (1 - \hat{y})R|^p}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}.$$

Ahora, como  $S$  y  $R$  son polinomios,  $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$  y  $0 \leq \tilde{a}/a, \tilde{b}/b \leq C$  (por  $(\Delta 1)$ ), concluimos que ambas funciones se encuentran uniformemente acotadas; y, en consecuencia, combinando este hecho con la conocida desigualdad:  $(s + t)^p \leq 2^{p-1}(s^p + t^p)$ ,  $p \geq 1$ ,  $s, t \geq 0$ ; se tiene garantizada la existencia de una constante positiva  $C$  verificando

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p \leq C \frac{b}{a^{p-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|1 - \tilde{b}/b|^p + (1 - \hat{y})^p}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}.$$

Una simple re-escritura del segundo miembro en la desigualdad previa en términos de la expresión  $I_p$  permite obtener

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p \leq C \frac{b}{a^{p-1}} \left[ |1 - \tilde{b}/b|^p I_p + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1 - \hat{y})^p}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \right].$$

De la convexidad de  $K$  tenemos  $\tilde{a}/a + \tilde{b}/b - 1 > 0$  (ver (2.3.5)), de donde sigue

$$1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) > 1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) - \hat{y}\tilde{b}/b.$$

Consideraremos ahora los siguientes dos casos:  $\tilde{b}/b < 1$  y  $\tilde{b}/b \geq 1$ .

Asumamos  $\tilde{b}/b < 1$ . En este caso, dado que  $0 \leq \hat{x} \leq 1$  concluimos  $1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) \geq \tilde{b}/b$  y finalmente

$$1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) \geq \tilde{b}/b(1 - \hat{y}).$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1 - \hat{y})^p}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b}{\tilde{b}} \right)^{p-1}.$$

Por otro lado, si  $\tilde{b}/b \geq 1$  observemos que

$$1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) \geq 1 + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) \geq 1 - \hat{y}$$

de donde sigue

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1 - \hat{y})^p}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \leq 1,$$

y así (2.3.10) queda probado.

Por último, la estimación para  $\left\| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p$  puede ser obtenida de una forma similar a partir de la expresión

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = \frac{a}{J_K} [\tilde{a}/aS + (1 - \hat{y})\tilde{R}]$$

donde  $\tilde{R} := \hat{x}(1 - \hat{x})B + \hat{x}R$  ( $B, R$  y  $S$  son las funciones definidas anteriormente).  $\square$

A fin de aclarar de antemano el papel del término  $b/\tilde{b}$  en el lema previo damos el siguiente

**Lema 2.3.4** *Para cualquier cuadrilátero convexo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2]$ ) existe otro cuadrilátero de referencia equivalente (en el sentido de la Definición 2.3.1) satisfaciendo  $[\Delta 1, D2]$  con las mismas constantes y para el cual  $\frac{\tilde{b}}{b} \geq \frac{1}{2}$ .*

**Demostración.** Consideremos el triángulo  $\Delta(V_2V_3V_4)$  y sus ángulos interiores  $\alpha$  y  $\beta$  ubicados en  $V_4$  y  $V_2$  respectivamente. Si para el cuadrilátero original  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ , vale  $\frac{\tilde{b}}{b} \geq \frac{1}{2}$ , entonces no hay nada que probar. En otro caso, podemos asumir  $\frac{\tilde{b}}{b} < \frac{1}{2}$  de forma que  $\alpha \leq \beta$ . Por otro lado, como ambos son ángulos interiores de un triángulo resulta que  $\beta \leq \pi - \alpha$ . Estos dos hechos junto a (D2) implican que  $\beta$  se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$ ; más aún, las cotas para  $\beta$  dependen de las cotas para  $\alpha$ .

Luego, mediante un movimiento rígido en el plano (una simetría respecto a la recta identidad para ser más precisos) podemos transformar nuestro elemento en el cuadrilátero  $K(b, a, \tilde{b}, \tilde{a})$ . El elemento resultante satisface las condiciones requeridas  $[\Delta 1, D2]$  con las mismas constantes que aquellas que se aplican para  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y el lema sigue gracias al hecho que  $\frac{\tilde{a}}{a} \geq \frac{1}{2}$  (lo que es una consecuencia inmediata de (2.3.5) y de la hipótesis  $\frac{\tilde{b}}{b} < \frac{1}{2}$ ).  $\square$

**Observación 2.3.3** *Observemos que, como (D1) claramente implica  $(\Delta 1)$ , el lema previo también se aplica a elementos  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  bajo las condiciones  $[D1, D2]$ .*



### 2.3.3. Sobre la integral $I_p$ .

Como hemos visto en la sección previa, las cotas para la norma de las derivadas parciales de las funciones base (y en consecuencia para su seminorma) dependen de la expresión  $I_p$ . Dado que uno de nuestros objetivos es obtener cotas para la seminorma de las funciones base, claro está, debemos obtener estimaciones para la integral  $I_p$ . Este es básicamente el objeto de esta sección. Comenzaremos con las siguientes definiciones que son meramente notacionales pero que nos permitirán presentar algunos resultados en forma sucinta y legible.

**Definición 2.3.3** Para cualquier  $2 < p < 3$ , y  $t > 0$  definimos

$$\eta_p(t) = \begin{cases} \frac{t^{3-p} - t}{(p-2)(1-t)} & \text{si } t > 0, t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}. \quad (2.3.12)$$

Notemos que, para  $t \neq 1$ ,  $\lim_{p \rightarrow 2} \eta_p(t) = \frac{t \ln(t)}{t-1}$  lo que justifica la siguiente

**Definición 2.3.4**

$$\eta_2(t) = \begin{cases} \frac{t \ln(t)}{t-1} & \text{si } t > 0, t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}. \quad (2.3.13)$$

**Observación 2.3.4** Es inmediato verificar que, para cualquier  $2 \leq p < 3$ ,  $\eta_p$  es una función creciente de  $t$ . Además,

$$0 \leq \eta_p(t) \leq \max\{1, t\}. \quad (2.3.14)$$

**Lema 2.3.5** Sea  $2 \leq p < 3$  y  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$  constantes positivas verificando (2.3.5); entonces, la integral  $I_p$  definida en (2.3.6) cumple lo siguiente:

- (1) Si  $\tilde{a}/a \leq 1$  y  $\tilde{b}/b \leq 1$  entonces,  $I_p \leq \frac{1}{(\tilde{a}/a + \tilde{b}/b - 1)^{p-1}}$ ;
- (2) Si  $\tilde{a}/a > 1$  y  $\tilde{b}/b < 1$  entonces,  $I_p \leq \frac{1}{3-p} \min \left\{ \frac{\mu_p(\tilde{a}/a)}{(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\}$ ;
- (3) Si  $\tilde{a}/a < 1$  y  $\tilde{b}/b > 1$  entonces,  $I_p \leq \frac{1}{3-p} \min \left\{ \frac{\mu_p(\tilde{b}/b)}{(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\}$ ;
- (4) Si  $\tilde{a}/a \geq 1$  y  $\tilde{b}/b \geq 1$  entonces,  $I_p \leq 1$ .

En (2) y (3),  $\mu_p(t) := (t-1)\eta_p(t) + 1$  con  $t \geq 1$  y  $\eta_p$  definido en (2.3.12) o (2.3.13) dependiendo del  $p$  considerado.

**Demostración.**

- (1) Dado que  $\tilde{a}/a, \tilde{b}/b \leq 1$  y  $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$ , sigue que

$$\frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} \leq \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}} \end{aligned}$$

y así (1) queda probado.

(2) Para  $2 < p < 3$  un cálculo directo muestra que

$$I_p = \frac{1}{(3-p)(p-2)} \frac{1 + \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^{3-p}}{\left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \left(1 - \frac{\tilde{b}}{b}\right)}. \quad (2.3.15)$$

Con motivo de acotar esta expresión definimos

$$II_p := \frac{1 + \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^{3-p}}{p-2} \quad (2.3.16)$$

y notemos que podemos reescribirla de la siguiente manera

$$II_p = \left(1 - \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)\right) \eta_p \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right) + \left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \eta_p \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) + \left(\frac{\tilde{b}}{b} - 1\right) \eta_p \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)$$

donde  $\eta_p$  ha sido definida en (2.3.12).

Ahora, dado que  $0 \leq \eta_p(t)$  y  $\frac{\tilde{b}}{b} \leq 1$ , sabemos que el último término de  $II_p$  es negativo, entonces

$$II_p \leq \left(1 - \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)\right) \eta_p \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right) + \left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \eta_p \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right).$$

De (2.3.14) se deduce fácilmente que  $(1-t)\eta_p(t) \leq 1$  para cualquier  $t \geq 0$ , y entonces

$$II_p \leq 1 + \left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \eta_p \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) = \mu_p \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right).$$

Así, de (2.3.15), (2.3.16) y de la desigualdad previa se tiene

$$I_p = \frac{II_p}{(3-p)(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)} \leq \frac{\mu_p(\tilde{a}/a)}{(3-p)(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)}. \quad (2.3.17)$$

Por otro lado, dado que  $\tilde{a}/a > 1$ ,  $\tilde{b}/b < 1$ , y  $\eta_p(t) \leq 1$  para  $0 \leq t \leq 1$ , sigue que

$$\begin{aligned} I_p &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1))^{p-1}} d\hat{x} d\hat{y} \\ &= \frac{\left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^{2-p} - 1}{(2-p)\left(\frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)} = \frac{b}{\tilde{b}} \eta_p \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right) \leq \frac{b}{\tilde{b}}. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Finalmente, para  $2 < p < 3$ , (2) sigue de (2.3.17) y (2.3.18) observando que  $1 \leq \frac{1}{3-p}$ . El caso  $p = 2$  sigue tomando  $p \rightarrow 2$  en (2.3.17) y (2.3.18).

- (3) Sigue como en la parte (2) intercambiando los roles de  $a$  y  $\tilde{a}$  con  $b$  y  $\tilde{b}$ , respectivamente.
- (4) Bajo estas hipótesis sigue inmediatamente que  $1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) \geq 1$  y entonces (4) se deduce fácilmente.  $\square$

# Capítulo 3

## Condiciones Geométricas

En este capítulo mostramos que bajo ciertas condiciones geométricas sobre cuadriláteros generales, podemos en realidad reducir el análisis a determinadas clases de elementos pertenecientes a la configuración de referencia. Más aún, damos caracterizaciones concretas de estas clases en términos de las condiciones  $(\Delta 1)$ ,  $(D1)$ ,  $(D2)$  y  $(\Delta 2)$  que han sido introducidas en (2.2.11), (2.2.12), (2.2.13) y (2.2.14) respectivamente.

Estas caracterizaciones, junto al Lema 2.3.5 y otras cuestiones técnicas, nos permitirán obtener nuevas cotas de la integral  $I_p$  (definida en (2.3.6)) que, como hemos mostrado en el Capítulo 2 (concretamente, en los Lemas 2.3.2 y 2.3.3), es el insumo necesario a fin de obtener estimaciones para las funciones base.

En el afán de simplificar la presentación de la información y hacer más fácil la lectura, este capítulo está dividido en varias secciones; una por cada condición geométrica entre las siguientes: *propiedad de descomposición regular*, *condición de regularidad*, *doble condición del ángulo* y *condición del ángulo mínimo*.

En el primer capítulo del presente trabajo hemos dado las definiciones (al menos informalmente) para la mayoría de estas condiciones; no obstante, a riesgo de ser repetitivos pero con el solo objeto de tener presente los requerimientos exigidos por cada una éstas, recordamos en cada una de las secciones la definición y notación correspondiente a la condición allí contemplada.

### 3.1. La propiedad de descomposición regular.

La *propiedad de descomposición regular* introducida en [2] es una condición geométrica simple de verificar y menos restrictiva, o más *débil*, que las consideradas en la literatura existente antes del trabajo citado. En el primer capítulo de este trabajo hemos desarrollado estas afirmaciones con detalle por lo que sugerimos una revisión del mismo. No obstante, éstas son las principales razones por las cuales resulta relevante estudiar si esta condición sigue siendo suficiente para garantizar la estimación del error de interpolación en grados superiores y para  $p$  en un rango más amplio. Nuestro estudio [3, 4] nos permite afirmar que, salvo para el operador de interpolación de primer orden, la propiedad de descomposición regular no es una condición suficiente para la estimación del error; mientras que, para el operador de primer orden, la estimación del error no solo vale para  $p = 2$  (siendo este el resultado principal de [2]) sino que el rango de  $p$  puede ser extendido al intervalo  $[1, 3)$  y este intervalo es maximal en el sentido que no puede ampliarse (este resultado es el núcleo de [3]).

La presente sección tiene por objeto presentar la caracterización de elementos satisfaciendo la propiedad de descomposición regular que hemos dado en [4]; con el objetivo final de probar los resultados mencionados arriba en forma compacta y fácilmente legible. Es pertinente mencionar

que esta caracterización no la habíamos obtenido en [3] explícitamente, no obstante, nos permitirá presentar los resultados de dicho trabajo en una forma ligeramente diferente que, a nuestro parecer, resulta más amena pero preservando al mismo tiempo el espíritu del enfoque adoptado en [3].

Por lo pronto, recordamos a continuación la definición formal y la notación usada para esta propiedad.

**Definición 3.1.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo. Diremos que  $K$  satisface la propiedad de descomposición regular (regular decomposition property) con constantes  $N \in \mathbb{R}$  y  $0 < \psi_M < \pi$ , o simplemente  $RDP(N, \psi_M)$ , si podemos dividir  $K$  en dos triángulos a lo largo de una de sus diagonales, a la cual llamaremos siempre  $d_1$ , de forma que  $|d_2|/|d_1| \leq N$  (donde  $d_2$  denota la diagonal restante) y ambos triángulos tengan sus ángulos máximos acotados superiormente por  $\psi_M$ .*

### 3.1.1. Reducción a la configuración de referencia.

Mostraremos aquí que, a fin de contemplar aquellos elementos que verifican la  $RDP$ , basta considerar los cuadriláteros pertenecientes a la configuración de referencia que cumplen las condiciones  $[\Delta 2, D2]$ . Sabemos, gracias al Lema 2.2.1, que satisfacer las condiciones  $[\Delta 2, D2]$  es equivalente a verificar  $[\Delta 1, D2]$  por lo que destacaremos este hecho en los enunciados y haremos uso de esta equivalencia cuando nos resulte favorable.

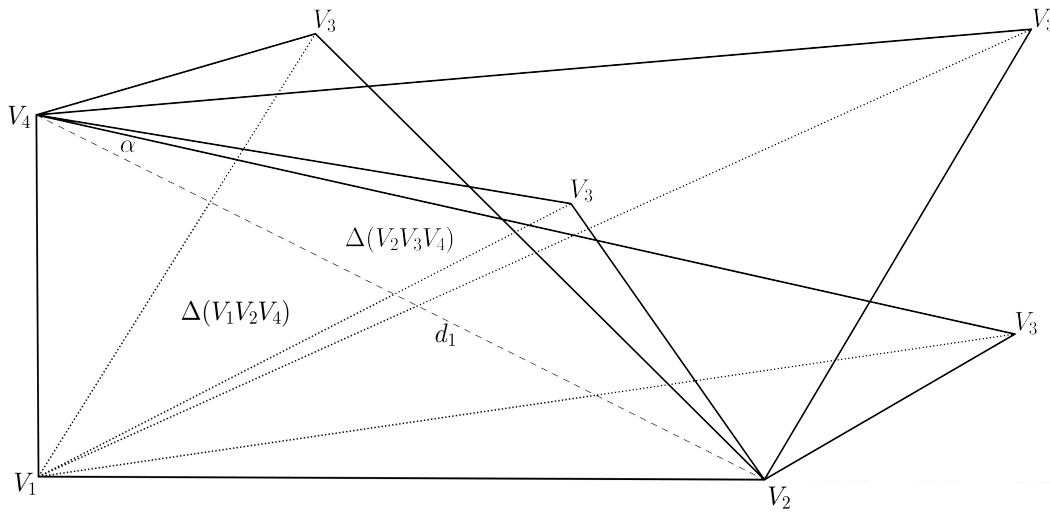


Figura 3.1: Representación de cuatro elementos de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ , uno por cada configuración posible. La línea punteada sin referencia, conectando vértices opuestos en cada elemento, corresponde a la diagonal  $d_2$ .

Un primer paso para obtener la caracterización descrita arriba, es mostrar que los elementos de referencia que satisfacen las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  efectivamente verifican la propiedad de descomposición regular; ésta es básicamente la esencia del siguiente

**Lema 3.1.1** *Sea  $K$  un elemento del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  que satisface  $[\Delta 1, D2]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2]$ ). Entonces  $K$  verifica  $RDP(N, \psi_M)$  donde las constantes  $N$  y  $\psi_M$  dependen únicamente de las constantes involucradas en las condiciones  $[\Delta 1, D2]$ .*

**Demostración.** Dividamos a  $K$  en dos triángulos considerando la diagonal  $d_1 = V_2V_4$ . Que el triángulo  $\Delta(V_2V_3V_4)$  verifica la condición del ángulo máximo es inmediato de (D2) ya que esta condición implica que  $\alpha$ , el ángulo interior de  $\Delta(V_2V_3V_4)$  ubicado en  $V_4$  (ver Figura 3.1), se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$ ; lo que a su vez implica que los restantes ángulos interiores de

este triángulo también se encuentren acotados lejos de  $\pi$ . Que el triángulo  $\Delta(V_1V_2V_4)$  cumple la condición del ángulo máximo es similarmente claro ya que el ángulo ubicado en  $V_1$  es un ángulo recto (ver Figura 3.1). Por último, el hecho que el cociente de las medidas de las diagonales con denominador  $|d_1|$  se encuentra uniformemente acotado se deduce de la expresión

$$\frac{|d_2|}{|d_1|} = \left( \frac{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}{a^2 + b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.1)$$

y de  $(\Delta 1)$  considerando los casos:  $\tilde{a} \leq \tilde{b}$  y  $\tilde{a} > \tilde{b}$ , En efecto, si  $\tilde{a} \leq \tilde{b}$  de (3.1.1) y  $(\Delta 1)$  sigue que

$$\frac{|d_2|}{|d_1|} \leq \sqrt{2} \left( \frac{\tilde{b}^2}{a^2 + b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \frac{\tilde{b}}{b} \leq C;$$

mientras que si  $\tilde{a} > \tilde{b}$  de (3.1.1) y  $(\Delta 1)$  sigue que

$$\frac{|d_2|}{|d_1|} \leq \sqrt{2} \left( \frac{\tilde{a}^2}{a^2 + b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \frac{\tilde{a}}{a} \leq C. \quad \square$$

Con el lema previo estamos bastante cerca de dar la caracterización deseada; no obstante, necesitamos un resultado más que concierne al comportamiento de un ángulo bajo un mapeo lineal y por esta razón presentamos el Lema 3.1.2. Pese a que la demostración de este resultado es elemental, y puede encontrarse en [1], la incluimos aquí con el afán de dar un panorama lo más completo y auto-contenido posible; para este fin, es útil tener presente la siguiente caracterización para el seno del ángulo  $\alpha$  comprendido entre los vectores  $w_1$  y  $w_2$ :

$$\sin(\alpha) = \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|w_1 - tw_2\|}{\|w_1\|}. \quad (3.1.2)$$

En efecto, notemos que, para cualquier  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\|w_1 - tw_2\|^2}{\|w_1\|^2} &= \frac{\langle w_1 - tw_2, w_1 - tw_2 \rangle}{\|w_1\|^2} \\ &= \frac{\langle w_1, w_1 \rangle - 2t \langle w_1, w_2 \rangle + t^2 \langle w_2, w_2 \rangle}{\|w_1\|^2} \\ &= \frac{\|w_1\|^2 - 2t \|w_1\| \|w_2\| \cos(\alpha) + t^2 \|w_2\|^2}{\|w_1\|^2} \\ &= \frac{\|w_2\|^2}{\|w_1\|^2} \left( t - \frac{\|w_1\|}{\|w_2\|} \cos(\alpha) \right)^2 + \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

de modo que (3.1.2) sigue inmediatamente al tomar el mínimo valor de esta expresión como función de  $t$ .

**Lema 3.1.2** *Sea  $L$  la transformación lineal asociada a una matriz  $B$ . Dados dos vectores  $w_1$  y  $w_2$ , sea  $\alpha$  el ángulo entre ellos y sea  $\bar{\alpha}$  el ángulo entre  $L(w_1)$  y  $L(w_2)$ . Entonces, si  $\kappa(B)$  denota al número de condición de  $B$  en la norma euclídea, se tiene*

$$\frac{2}{\pi \kappa(B)} \alpha \leq \bar{\alpha} \leq \pi \left( 1 - \frac{2}{\pi \kappa(B)} \right) + \frac{2}{\pi \kappa(B)} \alpha. \quad (3.1.3)$$

**Demostración.** Sea  $t = \frac{\langle Bw_1, Bw_2 \rangle}{\|Bw_2\|^2} = \frac{\|Bw_1\| \cos(\bar{\alpha})}{\|Bw_2\|}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\|B(w_1 - tw_2)\|^2}{\|Bw_1\|^2} &= \frac{\langle Bw_1 - tBw_2, Bw_1 - tBw_2 \rangle}{\|Bw_1\|^2} \\
&= \frac{\langle Bw_1, Bw_1 \rangle - 2t \langle Bw_1, Bw_2 \rangle + t^2 \langle Bw_2, Bw_2 \rangle}{\|Bw_1\|^2} \\
&= \frac{\|Bw_1\|^2 - 2t \|Bw_1\| \|Bw_2\| \cos(\bar{\alpha}) + t^2 \|Bw_2\|^2}{\|Bw_1\|^2} \\
&= \frac{\|Bw_1\|^2 - \|Bw_1\|^2 \cos^2(\bar{\alpha})}{\|Bw_1\|^2} \\
&= \sin^2(\bar{\alpha})
\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\sin(\bar{\alpha}) = \frac{\|B(w_1 - tw_2)\|}{\|Bw_1\|}. \quad (3.1.4)$$

Por otro lado, notemos que

$$\|Bw_1\| \leq \|B\| \|w_1\|$$

de donde sigue

$$\frac{1}{\|Bw_1\|} \geq \frac{1}{\|B\| \|w_1\|}. \quad (3.1.5)$$

Similarmente tenemos

$$\|w_1 - tw_2\| = \|B^{-1}B(w_1 - tw_2)\| \leq \|B^{-1}\| \|B(w_1 - tw_2)\|,$$

y, en consecuencia,

$$\|B(w_1 - tw_2)\| \geq \frac{\|w_1 - tw_2\|}{\|B^{-1}\|}. \quad (3.1.6)$$

Combinando ahora (3.1.5) y (3.1.6) con (3.1.4) sigue que

$$\sin(\bar{\alpha}) = \frac{\|B(w_1 - tw_2)\|}{\|Bw_1\|} \geq \frac{\|w_1 - tw_2\|}{\|B^{-1}\|} \frac{1}{\|B\| \|w_1\|} = \frac{1}{\kappa(B)} \frac{\|w_1 - tw_2\|}{\|w_1\|}. \quad (3.1.7)$$

Usando ahora que  $\sin(\alpha) = \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|w_1 - tw_2\|}{\|w_1\|}$  (gracias a (3.1.2)), y combinándolo con (3.1.7), tenemos

$$\sin(\bar{\alpha}) \geq \frac{1}{\kappa(B)} \sin(\alpha).$$

En consecuencia

$$\bar{\alpha} \geq \frac{2}{\pi \kappa(B)} \alpha. \quad (3.1.8)$$

En efecto, para  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , (3.1.8) sigue de la desigualdad previa en conjunción con los siguientes dos hechos básicos:

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}, \quad \sin(\bar{\alpha}) \leq \bar{\alpha}.$$

Para  $\alpha \geq \pi/2$  dividimos al ángulo en dos mitades y aplicamos el argumento a cualquiera de éstas. En efecto, supongamos  $\alpha \geq \pi/2$ . Dado que  $\alpha \leq \pi$  sigue que  $\alpha/2 \leq \pi/2$ ; por otro lado, como

$\bar{\alpha}/2$  es la imagen de  $\alpha/2$  por  $L$  (por ser  $L$  un mapeo afín), la conclusión obtenida en (3.1.8) aplica para estos ángulos. Luego,

$$\bar{\alpha}/2 \geq \frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha/2 \quad (3.1.9)$$

y el argumento concluye multiplicando ambos miembros de (3.1.9) por 2.

Por otro lado, aplicando (3.1.8) al ángulo complementario  $\pi - \alpha$  obtenemos

$$\bar{\alpha} \leq \left(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\right)\pi + \frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha \quad (3.1.10)$$

lo que termina el argumento.  $\square$

Ahora sí estamos en condiciones de presentar la siguiente caracterización

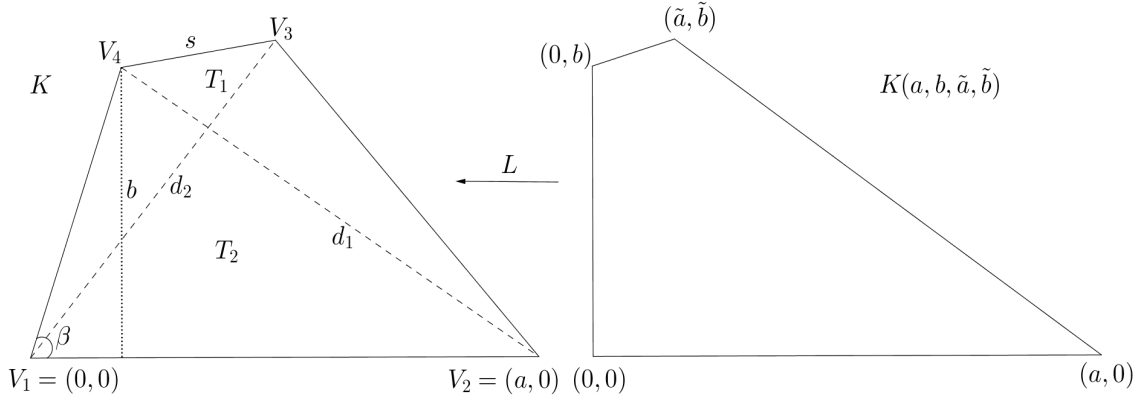


Figura 3.2: Representación de la notación usada en un cuadrilátero  $K$  satisfaciendo la  $RDP$  para la demostración del Teorema 3.1.1 e ilustración del mapeo lineal entre el elemento de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y  $K$ .

**Teorema 3.1.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo general. Entonces  $K$  verifica la  $RDP$ , si y solo si,  $K$  es equivalente a algún cuadrilátero  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo  $[\Delta 2, D2]$  (equivalentemente  $[\Delta 1, D2]$ ).*

**Demostración.** Asumamos que  $K$  es equivalente a algún elemento del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 2, D2]$ . Del Lema 3.1.1 sabemos que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verifica  $RDP(\bar{N}, \bar{\psi}_M)$  donde las constantes  $\bar{N}$  y  $\bar{\psi}_M$  dependen exclusivamente de aquellas constantes involucradas en las condiciones  $[\Delta 2, D2]$ . Dado que  $K = L(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}))$  para cierta transformación afín  $L(X) = BX + P$  del tipo considerado en la Definición 2.3.1 resulta, del Lema 3.1.2 y teniendo en cuenta que una transformación  $L$  del tipo aquí considerada preserva longitudes (salvo, claro está, una constante que depende de  $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$  como señalamos en la Observación 2.3.1) que  $K$  verifica  $RDP(N, \psi_M)$  donde las constantes  $N$  y  $\psi_M$  dependen de  $L$  (en realidad de  $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$ ) como así también de las constantes  $\bar{N}$  y  $\bar{\psi}_M$  involucradas en la  $RDP$  que satisface  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ .

Para mostrar la implicación recíproca asumiremos que  $K$  satisface  $RDP(N, \psi_M)$  y dividiremos al elemento a lo largo de la diagonal  $d_1$  en los triángulos  $T_1$  y  $T_2$  de forma tal que todos los ángulos interiores de ambos triángulos se encuentran superiormente acotados por  $\psi_M$  y  $\frac{|d_2|}{|d_1|} \leq N$  siendo  $d_2$  la diagonal restante de  $K$ . Elegimos la notación en forma tal que el lado más corto de  $K$ , denotado por  $s$ , es uno de los lados de  $T_1$  y llamamos  $\beta$  al ángulo de  $T_2$  opuesto a  $d_1$  (en la Figura



3.2 hemos ilustrado la notación asumida). Luego de un movimiento rígido podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el vértice  $V_1$  correspondiente a  $\beta$  se encuentra ubicado en el origen y  $K$  está enteramente contenido en el semiplano superior. Podemos asumir también que  $V_2$  está ubicado en el punto  $(a, 0)$  con  $a > 0$ , siendo  $V_1V_2$  el lado opuesto a  $s$ , i.e., el lado opuesto al lado más corto de  $K$  se encuentra enteramente contenido en el eje de abscisas positivas. Definimos  $b := |V_1V_4| \sin(\beta)$  (ver Figura 3.2); por lo que  $V_4$  se encuentra ubicado en el punto  $(\cot(\beta)b, b)$ . Notemos que  $\beta$  está acotado lejos de  $\pi$  dado que  $\beta \leq \psi_M$ . Más aún,  $\beta$  también se encuentra acotado lejos de 0. En efecto, como  $\beta$  está acotado lejos de  $\pi$  alguno de los ángulos restantes de  $T_2$  debe encontrarse acotado lejos de 0. Llamaremos  $\gamma$  a dicho ángulo (si hay más de una opción lo elegimos arbitrariamente). Luego,  $\gamma$  se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$  (esto último a causa de  $\gamma \leq \psi_M$ ), por lo tanto,  $1/\sin(\gamma) \leq C$  para alguna constante positiva. Sea  $e$  el lado de  $T_2$  opuesto a  $\gamma$ ; por el teorema del seno tenemos

$$\frac{|d_1|}{\sin(\beta)} = \frac{|e|}{\sin(\gamma)}. \quad (3.1.11)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que el diámetro de un cuadrilátero es comparable a la longitud de su diagonal más larga junto al hecho  $|d_2| \leq N|d_1|$  resulta que  $|e| \leq \max\{1, N\}|d_1|$ . Combinando esta desigualdad con (3.1.11) resulta que  $1/\sin(\beta) \leq C \max\{1, N\}$  lo que prueba nuestra afirmación.

Luego, el mapeo lineal  $L$  asociado a la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & \cot(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  es una transformación que aplica el elemento de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  en  $K$  (para una adecuada elección de  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$ ) que cumple los requerimientos deseados. En efecto, escribiendo  $V_3 = (V_3^1, V_3^2)$ , definimos  $\tilde{a} = V_3^1 - V_3^2 \cot(\beta)$  y  $\tilde{b} = V_3^2$ . Con esta elección es inmediato verificar que  $L(\tilde{a}, \tilde{b}) = V_3$ ; más aún, se tiene  $L(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) = K$  como afirmamos anteriormente. Por otro lado,  $L$  verifica los requerimientos de la Definición 2.3.1. Para justificar ésto comencemos notando que, cualquiera sea el punto  $(x, y)$  de norma 1, vale

$$\begin{aligned} \|B(x \ y)^t\|^2 &= \|(x + y \cot(\beta), y)\|^2 \\ &= \frac{x^2 \sin^2(\beta) + 2xy \sin(\beta) \cos(\beta) + y^2}{\sin^2(\beta)} \\ &\leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{\sin^2(\beta)} \\ &\leq \frac{2(x^2 + y^2)}{\sin^2(\beta)} \\ &= \frac{2}{\sin^2(\beta)} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

(en la ante-última línea hemos hecho uso de la conocida desigualdad  $2xy \leq x^2 + y^2$ ). Luego,  $\|B(x \ y)^t\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin(\beta)}$  para todo vector unitario  $(x, y)$ ; por lo tanto,  $\|B\| = \sup_{\|X\|=1} \|BX^t\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin(\beta)}$ .

En forma análoga, es posible mostrar que  $\|B^{-1}\| \leq \sqrt{2}/\sin(\beta)$ . Finalmente, dado que  $\beta$  se encuentra uniformemente acotado lejos de 0 y de  $\pi$ , existe una constante  $C$  verificando  $\|B\|, \|B^{-1}\| \leq C$ . En particular se tiene  $\kappa(B) < \frac{2}{\sin^2(\beta)} \leq C^2$ .

Por otro lado, notemos que  $(\Delta 2)$  vale debido a que  $L$  preserva longitudes (salvo, como ya hemos aclarado oportunamente, una constante que depende de  $C$ ) y  $V_3V_4 = L(s)$ . Finalmente, dado que  $T_1$  verifica tener su máximo ángulo acotado por  $\psi_M$  y  $s$  es el lado más corto de  $T_1$  sigue que el ángulo de  $T_1$  ubicado en el vértice común entre  $d_1$  y  $s$  se encuentra acotado lejos de 0 y  $\pi$ ; en consecuencia,  $(D 2)$  vale gracias al Lema 3.1.2.  $\square$

La caracterización dada en el teorema previo junto al resultado establecido en el Lema 2.3.1 nos permite, asumiendo como hipótesis la verificación de la *RDP*, reducir nuestro estudio a una clase de elementos contenida en la configuración de referencia. Concretamente, de aquí en adelante asumiremos que cualquier elemento que cumpla la *RDP* es del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 2, D2]$  (o equivalentemente  $[\Delta 1, D2]$ ).

Terminamos esta sección con el siguiente resultado elemental que básicamente establece, en aquellos elementos de referencia satisfaciendo la propiedad de descomposición regular, que el diámetro del elemento resulta comparable a la medida de la diagonal  $d_1$  (si  $d_1$  fuera la diagonal más larga este hecho es evidente; no obstante, podría suceder que  $d_1$  no fuera la diagonal de mayor longitud).

**Lema 3.1.3** *Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo que satisface las condiciones  $[\Delta 1, D2]$ , sea  $d_1$  la diagonal de  $K$  que conecta los vértices  $V_2 = (a, 0)$  y  $V_4 = (0, b)$  y sea  $h$  el diámetro de  $K$ , entonces existe una constante  $C$  (dependiendo solo de las constantes involucradas en  $(\Delta 1)$  y  $(D2)$ ) que cumple*

$$h \leq C|d_1|. \quad (3.1.13)$$

**Demostración.** Por el Lema 3.1.1 sabemos que  $K$  verifica *RDP*( $N, \psi_M$ ) para ciertas constantes  $N$  y  $\psi_M$  (que solo dependen de las constantes involucradas en  $(\Delta 1)$  y  $(D2)$ ); en particular,

$$|d_2|/|d_1| \leq N. \quad (3.1.14)$$

Ahora, si  $h$  coincide con la longitud de alguna de las diagonales entonces (3.1.13) sigue inmediatamente de (3.1.14). En otro caso,  $h$  concuerda con la longitud de alguno de los lados de  $K$ ; afirmamos entonces que  $h = |l| = |V_3V_4|$  o  $h = |l_{23}| = |V_2V_3|$  (denotamos por  $l_{23}$  al lado de  $K$  que conecta los vértices  $V_2$  y  $V_3$ ). En efecto, esto es una consecuencia inmediata del hecho que los dos lados restantes se encuentran superiormente acotados por  $|d_1|$ .

Dado que  $(\Delta 2)$  está garantizado por el Lema 2.2.1 bajo la hipótesis  $[\Delta 1, D2]$ , tenemos que  $|l| \leq C_0|l_{23}|$  (para alguna constante  $C_0$ ) por lo que en realidad la demostración se reduce a mostrar que  $|l_{23}| \leq C|d_1|$  para alguna constante  $C$ .

Finalmente, notemos que de la desigualdad triangular, del hecho  $a \leq |d_1|$  y (3.1.14) tenemos

$$|l_{23}| \leq a + |d_2| \leq |d_1| + |d_2| \leq (1 + N)|d_1|. \quad \square$$

**Observación 3.1.1** *Bajo las hipótesis del lema previo tenemos ciertamente que  $|d_1| \sim h$ . En efecto,  $|d_1| \leq h$  trivialmente lo que junto a (3.1.13) permite escribir*

$$C^{-1}h \leq |d_1| \leq h.$$

### 3.1.2. Estimación para $I_p$

Una de las ventajas de la caracterización obtenida para los elementos de referencia que satisfacen la propiedad de descomposición regular es que permite obtener cotas de la integral  $I_p$  de una forma relativamente simple para cierto rango de  $p$ . Volvemos a destacar que este tipo de estimaciones serán de utilidad al momento de acotar las seminormas de las funciones base. Veremos también, con ayuda de algunos resultados presentados en las secciones siguientes, que las estimaciones obtenidas para la integral  $I_p$  pueden ser extendidas a otras condiciones geométricas tales como la *condición de regularidad* y la *condición del ángulo mínimo*, mientras que para la *doble condición del ángulo* vale la misma estimación pero el rango de  $p$  puede ser extendido.

El resultado principal de esta sección es el Lema 3.1.5; y, a fin de poder demostrarlo, precisamos establecer antes el siguiente resultado que compila varias consecuencias geométricas sobre los elementos de referencia que cumplen la *RDP*.

**Lema 3.1.4** Si  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es un cuadrilátero convexo que satisface las condiciones  $[\Delta 2, D2]$  (equivalentemente  $[\Delta 1, D2]$ ), entonces

- (1)  $\max\{|l|/a, |l|/b\} \leq C(\tilde{a}/a + \tilde{b}/b - 1)$  donde  $C$  es la constante de (D2);
- (2) Si  $\tilde{b}/b \leq 1$  entonces  $a/b \leq C$  donde  $C$  es la constante de (D2);
- (3) Si  $\tilde{b}/b \leq 1/2$  entonces  $b/a \leq C$  siendo  $C$  una constante que depende únicamente de la constante involucrada en  $(\Delta 2)$ ;
- (4) Si  $\tilde{b}/b > 1$  y  $a/b \leq \tan((\pi - \psi_M)/2)$  (donde  $\psi_M$  es la constante del Lema 3.1.1) entonces  $|l| \leq C\tilde{a}$  siendo  $C$  una constante que depende únicamente de las constantes involucradas en  $[\Delta 2, D2]$ ;
- (5) Si  $\tilde{b}/b > 1$  y  $b/a \leq \tan(\alpha/2)$  entonces  $|l| \leq C(\tilde{b} - b)$  siendo  $C$  una constante que depende únicamente de la constante involucrada en (D2);
- (6)  $\min\{1/|\tilde{a} - a|, 1/\tilde{b}\} \leq C/|l|$  siendo  $C$  una constante que depende únicamente de la constante involucrada en  $(\Delta 2)$ ;
- (7)  $\min\{1/|\tilde{b} - b|, 1/\tilde{a}\} \leq C/|l|$  siendo  $C$  una constante que depende únicamente de la constante involucrada en  $(\Delta 2)$ .

**Demostración.**

- (1) La ecuación de la recta que pasa por  $V_2$  y  $V_4$  es  $y(x) = -\frac{b}{a}(x - a)$ . Denotando, como es usual, por  $y^{-1}$  a su inversa, es inmediato verificar

$$\frac{\tilde{b} - y(\tilde{a})}{\tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b})} = \frac{b}{a} \quad (3.1.15)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b})}{a} = \frac{\tilde{b} - y(\tilde{a})}{b} = \frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1. \quad (3.1.16)$$

Un análisis geométrico elemental (ver figura lateral para una ilustración gráfica) permite concluir

$$|l| \sin(\alpha) \leq \tilde{b} - y(\tilde{a})$$

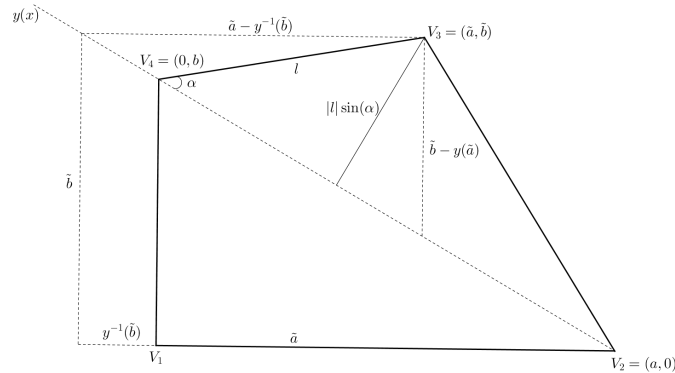
y

$$|l| \sin(\alpha) \leq \tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b}).$$

Combinando el primero de estos hechos con (D2) y (3.1.16) sigue que

$$\frac{|l|}{b} \frac{1}{C} \leq \frac{|l| \sin(\alpha)}{b} \leq \frac{\tilde{b} - y(\tilde{a})}{b} = \frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1.$$

Por lo tanto,  $\frac{|l|}{b} \leq C \left( \frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1 \right)$ . Con argumentos completamente análogos se muestra que  $\frac{|l|}{a} \leq C \left( \frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1 \right)$  con lo cual (1) queda probado.



- (2) Sea  $\beta$  el ángulo entre  $d_1 = V_2V_4$  y el segmento que une los puntos  $V_4$  y  $(a, b)$ . Gracias a la hipótesis  $\tilde{b} \leq b$  resulta que  $\alpha \leq \beta$  (ver figura auxiliar).

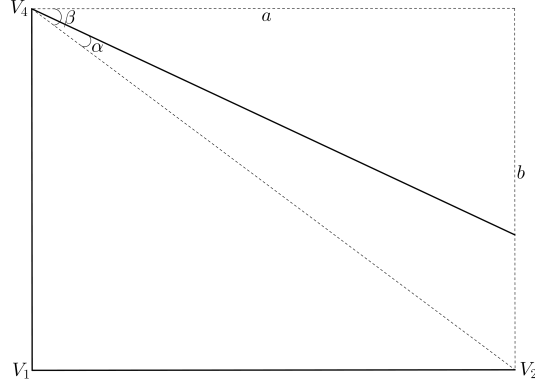
Luego

$$\frac{a}{b} = \cot(\beta) \leq \cot(\alpha)$$

y haciendo uso de la condición (D2), sigue que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \leq \frac{1}{\sin(\alpha)} \leq C$$

por lo que (2) queda probada.



- (3) Bajo la hipótesis tenemos que  $|l| = \sqrt{\tilde{a}^2 + (b - \tilde{b})^2} \geq b - \tilde{b} \geq b/2$ . Luego, dividiendo ambos miembros de la desigualdad por  $a$ , se tiene  $|l|/a \geq b/(2a)$ ; y, en consecuencia,  $\frac{b}{a} \leq 2\frac{|l|}{a}$ . Finalmente, (3) sigue directamente de la condición ( $\Delta 2$ ).

- (4) Sea  $\gamma$  al ángulo entre  $d_1$  y  $V_1V_4$  (ver figura auxiliar). Bajo las hipótesis se tiene

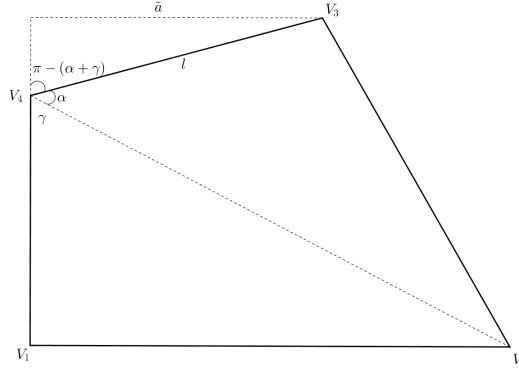
$$\frac{a}{b} = \tan(\gamma) \leq \tan\left(\frac{\pi - \psi_M}{2}\right),$$

y, en consecuencia,  $\gamma \leq \frac{\pi - \psi_M}{2}$ .

Ahora, usando que  $\alpha \leq \psi_M$  resulta

$$\alpha + \gamma \leq \frac{\pi + \psi_M}{2}$$

de donde sigue (por (D2) y el hecho que  $\psi_M < \pi$ ) que  $\alpha + \gamma$  se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$ .



Luego, existe una constante  $C$ , dependiente solo de  $\psi_M$  y de la constante involucrada en (D2), que cumple

$$\frac{1}{\sin(\alpha + \gamma)} \leq C. \quad (3.1.17)$$

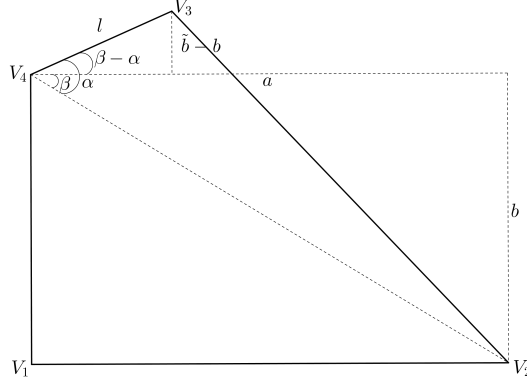
Finalmente, notemos que  $\frac{\tilde{a}}{|l|} = \sin(\pi - (\alpha + \gamma)) = \sin(\alpha + \gamma)$ , que combinado con (3.1.17)

permite obtener  $\frac{|l|}{\tilde{a}} = \frac{1}{\sin(\alpha + \gamma)} \leq C$  lo que prueba (4).

- (5) Sea  $\beta$  como en (2). Es claro que en este caso  $\beta \leq \alpha$  gracias a la hipótesis  $\tilde{b} > b$  (ver figura auxiliar); luego,  $\tan(\beta) = b/a \leq \tan(\alpha/2)$  por lo que  $\beta \leq \alpha/2$ .

Dado que  $\beta \leq \alpha/2$  es inmediato verificar  $\alpha - \beta \geq \alpha/2$ . Combinando este hecho con la conocida desigualdad  $\frac{\sin(x)}{2} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  resulta

$$\begin{aligned} |l| \frac{\sin(\alpha)}{2} &\leq |l| \sin(\alpha/2) \\ &\leq |l| \sin(\alpha - \beta) \\ &= \tilde{b} - b. \end{aligned}$$



Finalmente, gracias a la condición (D2) podemos concluir  $|l| \leq \frac{2}{\sin(\alpha)}(\tilde{b} - b) \leq 2C(\tilde{b} - b)$  lo que concluye el argumento.

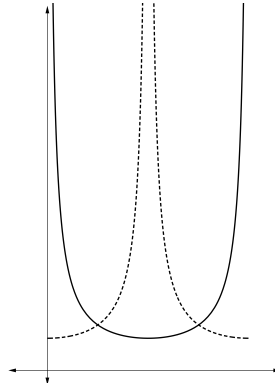
(6) Sea  $\beta_2$  el ángulo interior de  $K$  asociado al vértice  $V_2$ , y sea  $l_{23}$  el segmento de extremos  $V_2$  y  $V_3$ ; entonces

$$\frac{|\tilde{a} - a|}{|l_{23}|} = |\cos(\beta_2)| \quad \text{y} \quad \frac{\tilde{b}}{|l_{23}|} = \sin(\beta_2).$$

Luego, de  $(\Delta 2)$  sigue que

$$\min \left\{ \frac{1}{|\tilde{a} - a|}, \frac{1}{\tilde{b}} \right\} = \frac{1}{|l_{23}|} \min \left\{ \frac{1}{|\cos(\beta_2)|}, \frac{1}{\sin(\beta_2)} \right\} \leq \frac{C}{|l|} \min \left\{ \frac{1}{|\cos(\beta_2)|}, \frac{1}{\sin(\beta_2)} \right\}$$

y el argumento concluye notando que  $\min \left\{ \frac{1}{|\cos(\beta_2)|}, \frac{1}{\sin(\beta_2)} \right\}$  se encuentra uniformemente acotado como puede apreciarse en la figura auxiliar en la que hemos graficado las funciones  $1/|\cos(x)|$  y  $1/\sin(x)$  para  $x \in (0, \pi)$ .



(7) Sigue de un análisis similar al hecho en (6).  $\square$

Presentamos ahora el principal resultado de esta sección, el cuál no solo será de utilidad para demostrar la estimación del error sobre cuadriláteros que cumplen la  $RDP$  sino que jugará un rol importante al momento de presentar ciertos contraejemplos que tienen por objeto mostrar la optimalidad de nuestros resultados.

**Lema 3.1.5** Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo. Asumamos la validez de  $[\Delta 2, D2]$  (equivalentemente  $[\Delta 1, D2]$ ), entonces para cualquier  $1 \leq p < 3$  se tiene

$$\max \left\{ \frac{a}{b^{p-1}}, \frac{b}{a^{p-1}} \right\} I_p \leq C \frac{h}{|l|^{p-1}} \quad (3.1.18)$$

donde  $C$  es una constante que solo depende de  $p$  y de las constantes involucradas en  $[\Delta 2, D2]$ .

**Demostración.** Probaremos esta estimación dividiendo el rango de  $p$ ,  $[1, 3)$ , en los siguientes intervalos:  $[1, 2)$  y  $[2, 3)$ .

$p \in [2, 3)$  : Consideraremos cuatro casos dependiendo si  $\tilde{a}/a$  y  $\tilde{b}/b$  son mayores a 1 o no:

- (1)  $\tilde{a}/a \leq 1$ ,  $\tilde{b}/b \leq 1$ : Del ítem (1) en el Lema 2.3.5 tenemos  $\frac{b}{a^{p-1}}I_p \leq \frac{b}{a^{p-1}} \frac{1}{(\tilde{a}/a + \tilde{b}/b - 1)^{p-1}}$ ; y del ítem (1) en el Lema 3.1.4 sigue que  $\frac{b}{a^{p-1}}I_p \leq C \frac{b}{|l|^{p-1}} \leq C \frac{h}{|l|^{p-1}}$ . La estimación para  $\frac{a}{b^{p-1}}I_p$  se obtiene en forma completamente análoga.
- (2)  $\tilde{a}/a > 1$ ,  $\tilde{b}/b < 1$ : Del ítem (2) en el Lema 2.3.5 y  $(\Delta 1)$  tenemos

$$\frac{b}{a^{p-1}}I_p \leq \frac{C}{3-p} \frac{b}{a^{p-1}} \min \left\{ \frac{1}{(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \quad (3.1.19)$$

y

$$\frac{a}{b^{p-1}}I_p \leq \frac{C}{3-p} \frac{a}{b^{p-1}} \min \left\{ \frac{1}{(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\}. \quad (3.1.20)$$

Ahora, si  $b/\tilde{b} \leq 2$ , la demostración concluye inmediatamente usando (3.1.19), (3.1.20) y  $(\Delta 2)$ . Desarrollamos el argumento para (3.1.19) omitiendo el mismo para (3.1.20) por ser completamente análogo. Bajo la hipótesis  $b/\tilde{b} \leq 2$ , de (3.1.19) sigue que

$$\frac{b}{a^{p-1}}I_p \leq \frac{2C}{3-p} \frac{b}{a^{p-1}} \leq \frac{2C}{3-p} \frac{h}{a^{p-1}}. \quad (3.1.21)$$

Finalmente, usando que  $p - 1 > 0$  junto a  $(\Delta 2)$  resulta que  $1/a^{p-1} \lesssim 1/|l|^{p-1}$  lo que termina el argumento. En otro caso,  $\tilde{b}/b < 1/2$  y así  $1/(1 - \tilde{b}/b) < 2$  lo que permite re-escribir (3.1.19) y (3.1.20) de la siguiente manera

$$\frac{b}{a^{p-1}}I_p \leq \frac{2C}{3-p} \frac{b}{a^{p-1}} \min \left\{ \frac{a}{\tilde{a} - a}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \quad (3.1.22)$$

y

$$\frac{a}{b^{p-1}}I_p \leq \frac{2C}{3-p} \frac{a}{b^{p-1}} \min \left\{ \frac{a}{\tilde{a} - a}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\}. \quad (3.1.23)$$

Por otro lado, de la parte (3) del Lema 3.1.4 tenemos  $b/a \leq C$ ; por lo tanto, usando (3.1.22) combinado con  $(\Delta 2)$  y la parte (6) del Lema 3.1.4 se tiene (usando fuertemente que  $p - 2 \geq 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{b}{a^{p-1}}I_p &\leq \frac{C}{3-p} \frac{1}{a^{p-2}} \min \left\{ \frac{a}{\tilde{a} - a}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \leq \frac{C}{3-p} \frac{1}{|l|^{p-2}} \min \left\{ \frac{a}{\tilde{a} - a}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \\ &\leq \frac{C}{3-p} \frac{h}{|l|^{p-2}} \min \left\{ \frac{1}{\tilde{a} - a}, \frac{1}{\tilde{b}} \right\} \leq \frac{C}{3-p} \frac{h}{|l|^{p-1}}. \end{aligned}$$

La cota para  $\frac{a}{b^{p-1}}I_p$  se obtiene en forma análoga a partir de (3.1.23) combinado con  $(\Delta 2)$  y la parte (2) del Lema 3.1.4.

- (3)  $\tilde{a}/a < 1$ ,  $\tilde{b}/b > 1$ : Debido a (3) del Lema 2.3.5 y a  $(\Delta 1)$  tenemos

$$\frac{b}{a^{p-1}}I_p \leq \frac{C}{3-p} \frac{b}{a^{p-1}} \min \left\{ \frac{1}{(1 - \tilde{a}/a)(\tilde{b}/b - 1)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \quad (3.1.24)$$

y

$$\frac{a}{b^{p-1}}I_p \leq \frac{C}{3-p} \frac{a}{b^{p-1}} \min \left\{ \frac{1}{(1 - \tilde{a}/a)(\tilde{b}/b - 1)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\}. \quad (3.1.25)$$

Sin embargo, no podemos proceder exactamente como en el caso previo porque ahora no tenemos, como antes, que  $a/b$  se encuentre uniformemente acotado superior e inferiormente. Para subsanar esto procedemos como sigue: asumamos primero que  $b/a < 1/\tan((\pi - \psi_M)/2)$  siendo  $\psi_M$  la constante del Lema 3.1.1. Como en la parte (2), podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\tilde{a}/a \leq 1/2$  (en caso contrario, la estimación sigue fácilmente de (3.1.24) y (3.1.25) con  $(\Delta 2)$  con un argumento similar al desarrollado en (3.1.21)). En este caso, de (3.1.24) y  $(\Delta 2)$  se deduce (usando nuevamente que  $p - 2 \geq 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{b}{a^{p-1}} I_p &\leq \frac{2C}{(3-p)\tan((\pi - \psi_M)/2)} \frac{1}{a^{p-2}} \min \left\{ \frac{b}{\tilde{b}-b}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \\ &\leq \frac{2C}{(3-p)\tan((\pi - \psi_M)/2)} \frac{1}{|l|^{p-2}} \min \left\{ \frac{b}{\tilde{b}-b}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \\ &\leq \frac{2C}{(3-p)\tan((\pi - \psi_M)/2)} \frac{h}{|l|^{p-2}} \min \left\{ \frac{1}{\tilde{b}-b}, \frac{1}{\tilde{a}} \right\} \end{aligned}$$

y, por lo tanto, el resultado sigue de la parte (7) del Lema 3.1.4.

Por otro lado, si  $b/a \geq 1/\tan((\pi - \psi_M)/2)$  podemos usar  $(\Delta 2)$  y la parte (4) del Lema 3.1.4 en (3.1.24) para obtener

$$\frac{b}{a^{p-1}} I_p \leq \frac{b}{\tilde{a}a^{p-2}} \leq C \frac{b}{|l|^{p-1}} \leq C \frac{h}{|l|^{p-1}}.$$

Finalmente, con el objetivo de obtener la estimación para  $\frac{a}{b^{p-1}} I_p$  consideraremos los siguientes dos casos:  $a/b < 1/\tan(\alpha/2)$  y  $a/b \geq 1/\tan(\alpha/2)$ . En el primer caso, es decir, asumiendo  $a/b < 1/\tan(\alpha/2)$ ; la estimación sigue de (3.1.25) junto a  $[\Delta 2, D2]$  y la parte (7) del Lema 3.1.4. En efecto, como estamos asumiendo  $\tilde{a}/a \leq 1/2$  sigue que  $1/((1 - \tilde{a}/a)(\tilde{b}/b - 1)) \leq 2b/(\tilde{b} - b)$ ; luego, denotando por  $C_7$  a la constante involucrada en la parte (7) del Lema 3.1.4, vale

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^{p-1}} I_p &\leq \frac{2C}{3-p} \frac{a}{b^{p-1}} \min \left\{ \frac{b}{\tilde{b}-b}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \leq \frac{2C}{(3-p)\tan(\alpha/2)} \frac{1}{b^{p-2}} \min \left\{ \frac{b}{\tilde{b}-b}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \\ &\leq \frac{2C}{(3-p)\tan(\alpha/2)} \frac{h}{b^{p-2}} \min \left\{ \frac{1}{\tilde{b}-b}, \frac{1}{\tilde{a}} \right\} \leq \frac{2CC_7}{(3-p)\tan(\alpha/2)} \frac{h}{b^{p-2}} \frac{1}{|l|}. \end{aligned}$$

El argumento concluye usando  $(\Delta 2)$  pues esta condición permite reemplazar  $b$  por  $|l|$  en el denominador y notando (gracias a  $(D2)$ ) que  $\alpha$  se encuentra uniformemente acotado lejos de 0.

En el segundo caso, es decir, asumiendo que  $a/b \geq 1/\tan(\alpha/2)$ ; la estimación es consecuencia de (3.1.25),  $(\Delta 2)$  y la parte (5) del Lema 3.1.4. En efecto, de (3.1.25) sigue (denotando por  $C_5$  a la constante involucrada en la parte (5) del Lema 3.1.4) que

$$\frac{a}{b^{p-1}} I_p \leq \frac{C}{3-p} \frac{a}{b^{p-1}} \frac{2b}{\tilde{b}-b} \leq \frac{2C}{3-p} \frac{a}{b^{p-2}} \frac{1}{\tilde{b}-b} \leq \frac{2CC_5}{3-p} \frac{a}{b^{p-2}} \frac{1}{|l|} \leq \frac{2CC_5}{3-p} \frac{h}{b^{p-2}} \frac{1}{|l|}.$$

La prueba nuevamente termina reemplazando, en el denominador,  $b$  por  $|l|$  (lo cual es posible gracias a  $(\Delta 2)$ ).

- (4)  $\tilde{a}/a \geq 1$ ,  $\tilde{b}/b \geq 1$ : En este caso, las estimaciones para  $\frac{b}{a^{p-1}} I_p$  y  $\frac{a}{b^{p-1}} I_p$  siguen fácilmente de la cota para  $I_p$  obtenida en (4) del Lema 2.3.5 y de  $(\Delta 2)$ .

$p \in [1, 2)$  : Las estimaciones para este rango de  $p$  siguen de las obtenidas para el caso  $p = 2$  usando desigualdad de Hölder. En efecto, definimos  $\hat{p} := \frac{1}{p-1}$  (observemos que  $\hat{p} > 1$  debido a

$1 \leq p < 2$ ) y  $f(\hat{x}, \hat{y}) := \frac{b}{a^{p-1}} \frac{1}{(1+\hat{x}(\tilde{b}/b-1)+\hat{y}(\tilde{a}/a-1))^{p-1}}$ . Usando desigualdad de Hölder tenemos

$$\frac{b}{a^{p-1}} I_p = \|f\|_{0,1,\hat{K}} \leq \|f\|_{0,\hat{p},\hat{K}} \|1\|_{0,\hat{q},\hat{K}} = \|f\|_{0,\hat{p},\hat{K}} |\hat{K}|^{1/\hat{q}} = \|f\|_{0,\hat{p},\hat{K}} \quad (3.1.26)$$

siendo  $\hat{q}$  el exponente dual de  $\hat{p}$ , i.e.  $1/\hat{p} + 1/\hat{q} = 1$ .

Re-escribiendo (3.1.26) tenemos

$$\frac{b}{a^{p-1}} I_p \leq \left( \int_0^1 \int_0^1 \frac{b^{\frac{1}{p-1}}}{a(1+\hat{x}(\tilde{b}/b-1)+\hat{y}(\tilde{a}/a-1))} d\hat{x} d\hat{y} \right)^{p-1} \quad (3.1.27)$$

y dado que

$$\left( \int_0^1 \int_0^1 \frac{b^{\frac{1}{p-1}}}{a(1+\hat{x}(\tilde{b}/b-1)+\hat{y}(\tilde{a}/a-1))} d\hat{x} d\hat{y} \right)^{p-1} = b^{2-p} \left( \frac{b}{a} I_2 \right)^{p-1}$$

concluimos

$$\frac{b}{a^{p-1}} I_p \leq b^{2-p} \left( \frac{b}{a} I_2 \right)^{p-1}. \quad (3.1.28)$$

Usando la estimación probada para  $p = 2$ , a saber  $\frac{b}{a} I_2 \lesssim \frac{h}{|l|}$ , sigue que

$$\frac{b}{a^{p-1}} I_p \leq C b^{2-p} \left( \frac{h}{|l|} \right)^{p-1}. \quad (3.1.29)$$

Finalmente, dado que  $b \leq h$ , de (3.1.29) sigue que  $\frac{b}{a^{p-1}} I_p \leq C \frac{h}{|l|^{p-1}}$ .

Intercambiando, el rol de  $a$  y  $b$  y notando que  $a \leq h$ , se obtiene la estimación  $\frac{a}{b^{p-1}} I_p \leq C \frac{h}{|l|^{p-1}}$  lo que termina la prueba para este caso.  $\square$

En la demostración del lema previo puede verse que la constante en (3.1.18) puede comportarse como  $1/(3-p)$  por lo que no es posible tener una cota uniforme para  $p \geq 3$  bajo las condiciones  $[\Delta 2, D2]$  (que como ya hemos mostrado, equivale a considerar la clase de elementos de referencia que verifican la *RD*). En consecuencia, si nuestro objetivo es tener una cota uniforme en (3.1.18) cualquiera sea  $p \geq 1$  es necesario restringir la clase de elementos de referencia considerada. Concretamente, veremos que podemos lograr esto si la clase de elementos de referencia verifican las condiciones  $[D1, D2]$  que, como mostraremos en breve, equivale a considerar la clase de elementos de referencia que satisfacen la doble condición del ángulo.

## 3.2. La condición de regularidad.

Comenzamos recordando la definición formal de esta condición

**Definición 3.2.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo de diámetro  $h$ . Diremos que  $K$  satisface la condición de regularidad (regularity condition) con constante  $\sigma \in \mathbb{R}$  si*

$$h/\rho \leq \sigma \quad (3.2.30)$$

donde  $\rho$  denota el diámetro de la bola más grande contenida en  $K$ .



Si bien hemos escrito la Definición 3.2.1 de condición de regularidad para cuadriláteros convexos por ser éste el principal objeto de estudio en el presente trabajo; cabe señalar que dicha definición puede ser naturalmente extendida a polígonos convexos generales. Aclarada esta cuestión, en breve nos referiremos a *triángulos regulares* y lo haremos en este sentido.

Un hecho evidente, que también usaremos en breve, es que si un cuadrilátero convexo (más general, un polígono convexo cualquiera) es regular en el sentido dado por (3.2.30); entonces dicho elemento tiene todos sus ángulos interiores acotados lejos de cero, i.e. todos sus ángulos interiores se encuentran inferiormente acotados por una constante positiva que depende únicamente de la constante  $\sigma$  implicada en (3.2.30). Como consecuencia directa de este hecho resulta que si un cuadrilátero cumple la condición de regularidad, entonces cumple también la propiedad de descomposición regular (ver Observación 1.1.4 en el Capítulo 1).

### 3.2.1. Reducción a la configuración de referencia.

Similarmente a como lo hicimos para la propiedad de descomposición regular, nuestro objetivo es mostrar que si un cuadrilátero cumple la condición de regularidad entonces es equivalente (en el sentido dado por (3.2.30)) a un cuadrilátero de referencia cumpliendo ciertos requerimientos. Como vimos en el Teorema 3.1.1, para la *RDP*, bastaba con considerar las condiciones  $[\Delta 2, D2]$  o equivalentemente  $[\Delta 1, D2]$ ; no obstante, para la condición de regularidad necesitamos introducir una condición geométrica extra. En efecto, asociado a los elementos de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  consideramos la siguiente

$$\text{Condición (D3):} \quad a \underset{C}{\sim} b. \quad (3.2.31)$$

Notemos que la condición (D3) establece que la medida de los lados  $V_1V_2$  y  $V_1V_4$  son comparables en el sentido definido en (2.1.9). Ahora, como el ángulo comprendido entre estos lados es un ángulo recto, sigue que el triángulo  $T(a, b) = \Delta(V_1V_2V_4)$  debe ser regular en el sentido que aclaramos oportunamente. Ahora, dado que este triángulo *regular* se encuentra enteramente contenido en el cuadrilátero  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ , si este elemento también verifica  $(\Delta 1)$ , se deduce que dicho cuadrilátero resulta también ser *regular* (la necesidad de asumir  $(\Delta 1)$  es para garantizar que el diámetro de  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y de  $T(a, b)$  sean comparables). Recíprocamente, si el cuadrilátero  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es regular, sabemos que cumple la propiedad de descomposición regular. Gracias al Teorema 3.1.1 sabemos entonces que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  cumple las condiciones  $[\Delta 1, D2]$ . Ahora, de la regularidad de  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y de  $(\Delta 1)$  sigue fácilmente que  $a$  y  $b$  deben ser comparables. Esta simple observación es la que motiva la introducción y consideración de la condición (D3) para la *condición de regularidad*. Además, esta es la esencia de la demostración de la caracterización que damos en el Teorema 3.2.1 aunque allí debemos lidiar con la cuestión técnica de trabajar con elementos equivalentes (en el sentido de la Definición 2.3.1).

Como conclusión del párrafo anterior, podemos afirmar que si el cuadrilátero de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es regular, entonces cumple las condiciones  $[\Delta 1, D2, D3]$  y recíprocamente. Teniendo presente este hecho, creemos haber motivado el principal resultado de esta sección que es la siguiente caracterización de cuadriláteros regulares.

**Teorema 3.2.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo general. Entonces  $K$  es regular (en el sentido de (3.2.30)), si y solo si, es equivalente a algún elemento del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 2, D2, D3]$  (o equivalentemente  $[\Delta 1, D2, D3]$ ).*

**Demostración.** Gracias a la observación realizada en el último párrafo de la sección previa sabemos que los elementos que satisfacen la condición de regularidad también verifican la propiedad de descomposición regular (donde las constantes implicadas en esta propiedad dependen únicamente

de la constante involucrada en la condición de regularidad). Del Teorema 3.1.1 sigue entonces que  $K$  puede ser transformado mediante un mapeo afín  $L$ ,  $L(X) = BX + P$ , en un elemento del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ . Ahora, dado que  $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$  (ver Teorema 3.1.1 y Definición 2.3.1), el elemento  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es regular y como ya hemos señalado en la motivación de este teorema, la regularidad del elemento de referencia junto a  $(\Delta 1)$  permiten concluir la validez de  $(D3)$ .

Para probar la implicación restante asumamos que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es un elemento satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 2, D2, D3]$  (equiv.  $[\Delta 1, D2, D3]$ ). Gracias a  $(D3)$  se tiene que el triángulo  $T(a, b)$  es regular; lo que combinado con las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  implica que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verifique (3.2.30). En consecuencia, cualquier elemento de la forma  $L(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}))$  es regular donde  $L$  es un mapeo afín del tipo considerado en la Definición 2.3.1.  $\square$

La caracterización dada en el teorema previo junto al resultado establecido en el Lema 2.3.1 nos permite, asumiendo como hipótesis la condición de regularidad, reducir nuestro estudio a la clase de elementos de referencia que cumplen  $[\Delta 2, D2, D3]$  o, equivalentemente,  $[\Delta 1, D2, D3]$ . Por esta razón, de aquí en adelante asumiremos que cualquier cuadrilátero regular es del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 2, D2, D3]$  (o equivalentemente  $[\Delta 1, D2, D3]$ ). Por último, observemos que para esta clase de elementos el resultado establecido en el Lema 3.1.5 continúa siendo válido.

### 3.3. La doble condición del ángulo.

La *doble condición del ángulo* es satisfecha cuando todos los ángulos interiores del elemento se encuentran acotados lejos de 0 y de  $\pi$  tal como lo establecemos formalmente en la siguiente

**Definición 3.3.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo. Diremos que  $K$  satisface la doble condición del ángulo (double angle condition) con constantes  $\psi_m, \psi_M \in \mathbb{R}$  si*

$$0 < \psi_m \leq \theta \leq \psi_M < \pi \quad (3.3.32)$$

*cualquiera sea el ángulo interior  $\theta$  de  $K$ . Cuando esto suceda escribiremos  $DAC(\psi_m, \psi_M)$ .*

#### 3.3.1. Reducción a la configuración de referencia.

Siguiendo el espíritu de las secciones previas nuestro objetivo es caracterizar la clase de elementos de referencia equivalentes (en el sentido de la Definición 2.3.1) a aquellos cuadriláteros que cumplan la  $DAC$ , para así poder reducir nuestro análisis a esta clase de cuadriláteros particulares.

Es inmediato verificar que si dividimos a un cuadrilátero que satisface  $DAC(\psi_m, \psi_M)$  por su diagonal más larga,  $d_1$ , los requerimientos de la  $RDP$  son satisfechos. En efecto,  $|d_2|/|d_1| \leq 1$  y todos los ángulos interiores de los triángulos obtenidos se encuentran acotados superiormente por  $\psi_M$ , i.e.  $RDP(1, \psi_M)$  vale (ver Observación 1.1.3). Luego, como consecuencia del Teorema 3.1.1, un elemento que cumple la  $DAC$  puede ser transformado mediante un mapeo afín en un cuadrilátero de referencia para el cual  $[\Delta 1, D2]$  vale.

Sin embargo, veremos que considerando otra transformación afín (que puede no coincidir con la implicada en la demostración del Teorema 3.1.1) podemos considerar como clase de equivalencia de elementos de referencia a aquella para la cual  $[D1, D2]$  vale. Es decir, podemos reemplazar la condición  $(\Delta 1)$  por su versión más restrictiva  $(D1)$ .

A grandes rasgos, son dos las grandes ventajas que tiene reemplazar  $[\Delta 1, D2]$  por  $[D1, D2]$ ; a saber, el tratamiento del error es considerablemente más simple y, además, podemos hacerlo para cualquier  $p \geq 1$ . Estas cuestiones quedarán oportunamente claras; no obstante, nos parece pertinente señalarlas aquí para justificar el siguiente

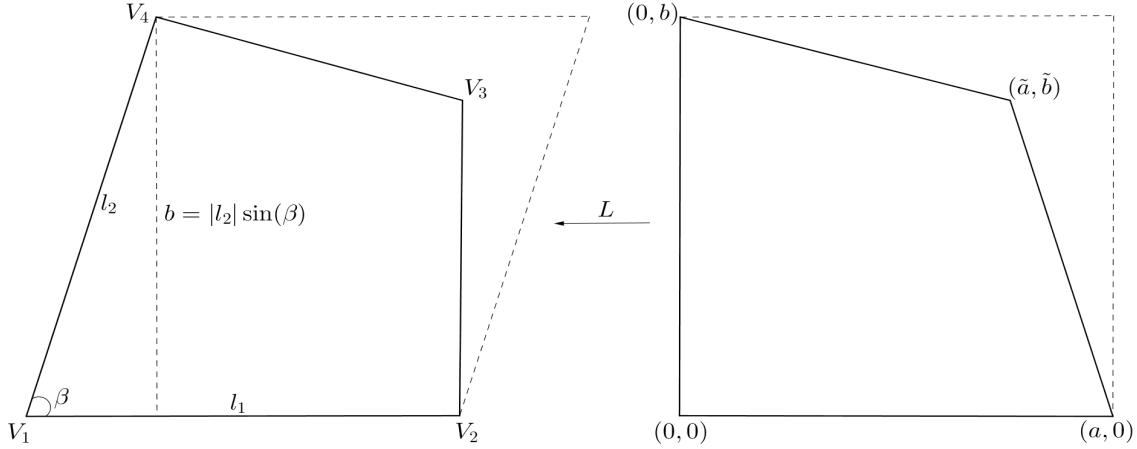


Figura 3.3: Representación de la notación usada en un cuadrilátero  $K$  satisfaciendo la  $DAC$  para la demostración del Teorema 3.3.1 e ilustración del mapeo lineal entre el elemento de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y  $K$ .

**Teorema 3.3.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo general. Entonces  $K$  satisface  $DAC(\psi_m, \psi_M)$ , si y sólo si, es equivalente a un elemento  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[D1, D2]$ .*

**Demostración.** Observemos que para cualquier cuadrilátero convexo  $K$  siempre es posible elegir dos lados adyacentes del mismo,  $l_1$  y  $l_2$ , de modo que  $K$  se encuentre enteramente contenido en el paralelogramo generado por éstos (claramente pueden no ser únicos; en caso de haber varias opciones, hacemos una elección arbitraria).

Llamaremos  $V_1$  al vértice común entre  $l_1$  y  $l_2$ , y  $\beta$  al ángulo interior de  $K$  ubicado en  $V_1$ . De ser necesario, luego de movimientos rígidos en el plano, podemos asumir que  $V_1 = (0, 0)$  y que  $l_1$  se encuentra completamente contenido en el eje de abscisas positivas con coordenadas  $(a, 0)$ . Más aún, podemos asumir también que  $l_2$  se encuentra en el semiplano superior (en la Figura 3.3 hemos ilustrado la notación adoptada descrita previamente).

Por la convención que hemos adoptado para la asignación de notación a los vértices de un cuadrilátero,  $l_2$  es el lado que une  $V_1$  y  $V_4$ . Similarmente, a como hemos hecho en la demostración del Teorema 3.1.1 definimos  $b = |l_2| \sin(\beta)$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & \cot(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Luego,  $V_4$  puede ser escrito como  $V_4 = (b \cot(\beta), b)$ ; y considerando  $L$  como el mapeo lineal asociado a la matriz  $B$  tenemos la transformación buscada. En efecto, dado que  $\|B\|, \|B^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{\sin(\beta)}$  (remitimos a (3.1.12) para más detalles) con  $\beta$  uniformemente acotado lejos de 0 y de  $\pi$  (debido a que  $K$  cumple la  $DAC$ ) resulta que  $L$  es del tipo de mapeos afines considerado en la Definición 2.3.1. Por otro lado, eligiendo  $\tilde{a} = V_3^1 - V_3^2 \cot(\beta)$  y  $\tilde{b} = V_3^2$  donde  $V_3 = (V_3^1, V_3^2)$  es inmediato verificar que  $L(\tilde{a}, \tilde{b}) = V_3$  y, entonces,  $L(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) = K$ . Por otro lado, como  $L$  es un mapeo lineal,  $L$  aplica el paralelogramo generado por  $l_1$  y  $l_2$  en el rectángulo  $R_{ab} = K(a, b, a, b)$ ; este hecho junto a que  $V_3$  se encuentra en el interior de dicho paralelogramo permite concluir que  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  es un punto interior de  $R_{ab}$  lo que garantiza (D1) (remitimos a la Figura 3.3 para una ilustración gráfica). Por otro lado, gracias al Lema 3.1.2 y a que el ángulo interior de  $K$  ubicado en  $V_3$  se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$ , el ángulo interior de  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  ubicado en  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  también tiene esta propiedad. Como consecuencia de este hecho podemos concluir que al menos uno de los restantes ángulos interiores del triángulo de vértices  $(0, b)$ ,  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  y  $(a, 0)$  se encuentra acotado lejos de cero y de  $\pi$ . Realizando un movimiento rígido de ser necesario podemos asumir que este ángulo se encuentra ubicado en el vértice  $(0, b)$  por lo que la condición (D2) se encuentra garantizada.

Recíprocamente, asumamos que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verifica  $[D1, D2]$  y es equivalente a  $K$ . Afirmamos que tanto el ángulo máximo como el ángulo mínimo de  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  se encuentran lejos de 0 y de

$\pi$  (donde las constantes que sirven para acotar superior e inferiormente dependen únicamente de aquellas involucradas en las condiciones  $[D1, D2]$ ). En efecto, en  $V_1$  tenemos un ángulo recto por lo que resta estudiar los vértices restantes. El ángulo en  $V_4$  está superiormente acotado por  $\pi/2$  gracias a  $(D1)$ ; además es más grande que  $\alpha$  por lo que está lejos de cero (debido a  $(D2)$ ). Respecto al ángulo en el vértice  $V_3$  nuevamente gracias a  $(D1)$  concluimos que se encuentra inferiormente acotado por  $\pi/2$  y; de  $(D2)$ , sigue que no puede tender a  $\pi$ . Finalmente, el ángulo en  $V_2$  es mayor que  $\alpha$  (lo que implica estar lejos de cero debido a  $(D2)$ ) y está superiormente acotado por  $\pi/2$  (por  $(D1)$ ). La demostración concluye usando el Lema 3.1.2 gracias a que  $K$  y  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  son equivalentes en el sentido de la Definición 2.3.1.  $\square$

Antes de continuar, en el siguiente lema destacamos un resultado que ha sido demostrado en la última parte de la demostración previa y que nos será de utilidad a futuro.

**Lema 3.3.1** *Sea  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un elemento general satisfaciendo las condiciones  $[D1, D2]$ , entonces  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verifica  $DAC(\psi_m, \psi_M)$  siendo  $\psi_m$  y  $\psi_M$  constantes que solo dependen de aquellas involucradas en  $[D1, D2]$ .*

La caracterización dada en el Teorema 3.3.1 junto al resultado establecido en el Lema 2.3.1 nos permite, asumiendo como hipótesis la doble condición del ángulo, reducir el análisis del error a la clase de elementos de referencia que cumplen  $[D1, D2]$ . De aquí en adelante asumiremos que cualquier cuadrilátero que cumple la  $DAC$  es del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo  $(D1)$  y  $(D2)$ .

Teniendo en consideración este hecho y el ítem (2) del Lema 3.1.4 hay una consideración extra que haremos la cual establecemos explícitamente en el siguiente

**Lema 3.3.2** *Sea  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un elemento general satisfaciendo las condiciones  $[D1, D2]$ , entonces  $a \leq Cb$  siendo  $C$  la misma constante que la involucrada en  $(D2)$ .*

**Demostración.** La demostración es la misma que la del ítem (2) del Lema 3.1.4.  $\square$

**Observación 3.3.1** *Observemos que el Lema 3.1.3 sigue valiendo bajo las condiciones  $[D1, D2]$  ya que  $[D1, D2] \Rightarrow [\Delta1, D2]$  trivialmente. Por lo tanto, la Observación 3.1.1 también vale bajo estas hipótesis.*

### 3.3.2. Estimación para $I_p$ .

Como una de las ventajas del Teorema 3.3.1 habíamos mencionado que este resultado permitiría obtener la estimación del error para cualquier  $p \geq 1$ . Esta sección tiene por objeto exhibir el principal resultado que nos permitirá hacer esto. Dicho resultado es equivalente al Lema 3.1.5 pero, como ya destacamos, está enunciado para cualquier  $p \geq 1$ .

**Lema 3.3.3** *Si  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es un cuadrilátero convexo satisfaciendo las condiciones  $[D1, D2]$  entonces, cualquiera sea  $p \geq 1$ , vale*

$$\max \left\{ \frac{a}{b^{p-1}}, \frac{b}{a^{p-1}} \right\} I_p \leq C \frac{h}{|l|^{p-1}} \quad (3.3.33)$$

donde  $C$  es una constante que solo depende de aquellas involucradas en  $[D1, D2]$ .

**Demostración.** La demostración de este resultado es similar a la realizada en el Lema 3.1.5 para el caso correspondiente a  $\tilde{a}/a, \tilde{b}/b \leq 1$ . No obstante, reproducimos aquí la idea general que implica re-escribir el ítem (1) del Lema 3.1.4. En efecto, de  $(D1)$  tenemos

$$\frac{1}{(1 + \hat{x}(\frac{\tilde{b}}{b} - 1) + \hat{y}(\frac{\tilde{a}}{a} - 1))^{p-1}} \leq \frac{1}{(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1)^{p-1}}, \quad (3.3.34)$$

ya que  $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$ .

Por otro lado, llamando  $y(x) = -b/a(x - a)$  a la ecuación de la recta que pasa por  $V_2$  y  $V_4$  se tiene (ver (3.1.16))

$$\frac{\tilde{b} - y(\tilde{a})}{b} = \frac{\tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b})}{a} = \frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1,$$

y dado que  $|l| \sin(\alpha) \leq \tilde{b} - y(\tilde{a})$  y  $|l| \sin(\alpha) \leq \tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b})$  (ver figura abajo de la ecuación (3.1.16) para un argumento geométrico sobre estas desigualdades), sigue

$$I_p \leq \min\{a^{p-1}, b^{p-1}\} \frac{1}{|l|^{p-1} \sin(\alpha)^{p-1}}. \quad (3.3.35)$$

Finalmente, la desigualdad (3.3.33) es una consecuencia directa de (3.3.35) teniendo en cuenta que  $a, b \leq h$  y que  $\alpha$  se encuentra uniformemente acotado lejos de 0 y de  $\pi$  (gracias a (D2)).  $\square$

### 3.4. La condición del ángulo mínimo.

En esta última sección tenemos un objetivo similar al de las secciones precedentes: caracterizar los elementos que cumplen la *condición del ángulo mínimo* y, haciendo uso de la misma, garantizar la estimación (3.1.18) para la integral  $I_p$  bajo este requerimiento. Siguiendo una estructura similar a la adoptada en los apartados anteriores comenzamos recordando la definición y notación correspondiente a la *condición del ángulo mínimo*.

**Definición 3.4.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo. Diremos que  $K$  satisface la condición del ángulo mínimo (minimum angle condition) con constante  $\psi_m \in \mathbb{R}$  si*

$$0 < \psi_m \leq \theta \quad (3.4.36)$$

donde  $\theta$  es cualquiera de los ángulos interiores de  $K$ . Cuando esto suceda escribiremos  $mac(\psi_m)$ .

La Definición 3.4.1 ha sido enunciada para cuadriláteros convexos ya que este tipo de elementos son el principal objeto de estudio en el presente trabajo; no obstante, cabe señalar que la *condición del ángulo mínimo* puede ser naturalmente extendida a polígonos convexos generales. Aclarada esta cuestión, en breve usaremos esta condición sobre triángulos; y lo haremos en este sentido. Por último, es inmediato mostrar que aquellos triángulos que verifiquen tener su ángulo mínimo acotado lejos de cero, son regulares en el sentido dado por (3.2.30) (básicamente porque el diámetro de la bola más grande contenida en el triángulo puede ser escrita en términos de los ángulos interiores de dicho elemento). Este hecho evidente para triángulos deja de ser cierto para otro tipo de polígonos. En el caso concreto de cuadriláteros notemos que existen elementos que tienen todos sus ángulos interiores lejos de cero pero que no son regulares; basta considerar por ejemplo, rectángulos donde la longitud de uno de los lados sea considerablemente más chica que la longitud del lado no paralelo.

En lo que resta de esta sección damos dos caracterizaciones para aquellos elementos que satisfacen la condición del ángulo mínimo. La primera de ellas la damos en la Observación 3.4.1 en la cual mostramos que aquellos elementos que verifican tener su ángulo más chico acotado lejos de 0 o bien son regulares o bien tienen el ángulo máximo acotado lejos de  $\pi$ . En términos más concretos, si un elemento verifica la *mac* entonces es regular o verifica la *DAC*. Claramente, estas opciones no son excluyentes como puede observarse al considerar un rectángulo regular.

Teniendo presente dicha observación y combinándola con las caracterizaciones que hemos encontrado tanto para los elementos que cumplen la *condición de regularidad* (Teorema 3.2.1) como la *doble condición del ángulo* (Teorema 3.3.1), podemos enunciar la segunda caracterización para elementos que cumplen la *mac* en términos de clases equivalentes dentro de la configuración de referencia la cual queda formalmente establecida en el Teorema 3.4.1.

**Lema 3.4.1** *Si  $K$  verifica  $mac(\psi_m)$ , entonces  $K$  cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- (1)  $DAC(\psi_m, \pi - \frac{\psi_m}{2})$ ;
- (2) *la condición de regularidad (3.2.30) con  $\sigma = \sigma(\psi_m)$ .*

**Demostración.** Si (1) vale no hay nada que probar; asumamos entonces que (1) no vale. En este caso  $K$  tiene al menos un ángulo interno que es mayor a  $\pi - \psi_m/2$ ; de hecho, es fácil ver que dicho ángulo es único por lo que lo llamaremos  $\theta$ . Dividamos a  $K$  en dos triángulos  $T_1$  y  $T_2$  a través de la diagonal opuesta a  $\theta$ , y fijemos la notación de forma que  $\theta$  sea un ángulo interno de  $T_1$ . Llamaremos  $\beta_1$  y  $\beta_2$  a los restantes ángulos interiores de  $T_1$ . Una simple inspección muestra que  $\beta_i < \psi_m/2$  para  $i = 1, 2$ . Sean  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , los ángulos complementarios en  $K$  de  $\beta_i$  respectivamente; es decir,  $\beta_i + \gamma_i$  es un ángulo interior de  $K$  para  $i = 1, 2$ . Es inmediato verificar que  $\gamma_i > \psi_m/2$ , de modo que  $T_2$  es un triángulo que tiene sus tres ángulos interiores acotados lejos de 0. En términos de la condición del ángulo mínimo y para ser más precisos,  $T_2$  verifica  $mac(\psi_m/2)$ ; y en consecuencia,  $T_2$  es un triángulo regular en el sentido de (3.2.30) con constante  $\sigma = \sigma(\psi_m)$ . De este hecho, sigue fácilmente que  $K$  es un cuadrilátero regular en el mismo sentido, i.e., de forma tal que (3.2.30) vale (más aún, la misma constante  $\sigma$  puede ser usada).  $\square$

**Teorema 3.4.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo general. Entonces  $K$  satisface  $mac$ , si y solo si,  $K$  es equivalente a algún elemento del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  para el cual vale  $[D1, D2]$  o vale  $[\Delta1, D2, D3]$  (equiv.  $[\Delta2, D2, D3]$ ).*

**Demostración.** La demostración es una consecuencia directa del Lema 3.4.1 y los Teoremas 3.2.1 y 3.3.1 como señalamos previamente.  $\square$

Para finalizar este apartado, notemos que la caracterización dada en el Teorema 3.4.1 junto al Lema 2.3.1 nos permite, asumiendo como hipótesis la condición del ángulo mínimo, reducir el análisis del error a las clases de elementos de referencia que cumplen  $[D1, D2]$  o  $[\Delta1, D2, D3]$  (equiv.  $[\Delta2, D2, D3]$ ). Por este motivo, de aquí en adelante asumiremos que cualquier cuadrilátero que cumple la  $mac$  es del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo alguna de las condiciones previamente detalladas. Observemos también que bajo este supuesto la estimación (3.1.18) para la integral  $I_p$  sigue siendo válida para  $1 \leq p < 3$ .

## Capítulo 4

# Estimación del error sobre la configuración de referencia.

Como es evidente del título del presente capítulo, nuestro objetivo a lo largo del mismo es obtener la estimación del error sobre elementos pertenecientes a la configuración de referencia. Por este motivo, a lo largo de todo este capítulo  $K$  denotará siempre un cuadrilátero del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ . A riesgo de ser redundantes pero con la intención de ser lo más claro posible en nuestra exposición aclararemos este hecho en repetidas oportunidades.

Recordemos que usamos  $\Pi_k$  para escribir el  $\mathbb{P}_k$ -operador de interpolación de Lagrange de orden  $k$  sobre el triángulo  $T = T(a, b)$  (ver Sección 2.1 en Capítulo 2); luego, para cualquier  $p \geq 1$ , haciendo uso de la desigualdad triangular podemos escribir

$$|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq |u - \Pi_k u|_{1,p,K} + |\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}. \quad (4.0.1)$$

Esta técnica consistente en descomponer la seminorma del error del  $\mathcal{Q}_k$ -interpolador mediante el error del  $\mathbb{P}_k$ -interpolador y el término que mide la diferencia entre ambos interpoladores es una herramienta ampliamente usada en contextos similares al que estamos considerando en este trabajo (ver, por ejemplo, [16, 17, 22]). Ciertas variantes de esta técnica implican la descomposición usando algún polinomio que no necesariamente es el polinomio interpolador  $\Pi_k u$  (ni siquiera tiene por qué ser un polinomio interpolador); quizás, la opción más frecuente sea la consideración del *polinomio de Taylor promediado*. No daremos aquí detalles al respecto aunque sugerimos ver [11, Sección 4.4] para una descripción de este hecho; simplemente, nuestra intención es señalar que este tipo de técnica es frecuente al momento de obtener estimaciones similares a la que motiva este trabajo. Señalamos por último que la descomposición (4.0.1) claramente puede realizarse para cualquier elemento, no necesariamente debe ser del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ .

La principal razón para descomponer el error  $|u - Q_k u|_{1,p,K}$  en términos de  $|u - \Pi_k u|_{1,p,K}$  y  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  se basa en que obtener la estimación deseada para cada uno de estos últimos dos términos es factible y considerablemente más simple que lidiar directamente con la expresión  $|u - Q_k u|_{1,p,K}$ . En efecto, la estimación del error para el término  $|u - \Pi_k u|_{1,p,K}$  es bastante simple de obtener ya que se basa fuertemente en la estimación del error sobre el triángulo  $T = T(a, b)$ ; sin embargo, dos cuestiones técnicas deben ser subsanadas: la primera, garantizar que sobre el triángulo  $T$  ciertamente vale la estimación del error (que, como veremos en breve, este hecho es una cuestión menor gracias a resultados conocidos), mientras que la segunda es bastante más técnica ya que requiere mostrar que una estimación del error sobre el triángulo  $T$  permite obtener una estimación similar sobre el cuadrilátero  $K$ . Los detalles de los aspectos técnicos recién descritos son el objeto de la Sección 4.1 del presente capítulo.

Por otro lado, la estimación para el término  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  es considerablemente más compleja y trabajosa. Es difícil explicar en pocas líneas el tratamiento que usaremos para este término

pero básicamente, mostraremos que podemos reducir la estimación de  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  a acotaciones de evaluaciones de la función  $\Pi_k u - u$  en determinados nodos de interpolación y a estimaciones de la seminorma de las funciones base asociadas a tales nodos. Casi la totalidad del presente capítulo está dedicada a presentar los aspectos técnicos y detalles de lo recién expuesto.

#### 4.1. Estimación para $|u - \Pi_k u|_{1,p,K}$ .

En el Capítulo 3 hemos considerado varias condiciones geométricas sobre cuadriláteros; muchas de las cuales están vinculadas con los ángulos interiores de tales elementos por lo que pueden ser naturalmente extendidas a polígonos convexos generales. A continuación enunciamos una condición, también vinculada con los ángulos interiores de un elemento, que no fue explícitamente considerada allí pero que; como veremos en breve, juega un rol importante en la obtención de estimaciones para el error de interpolación sobre triángulos. La importancia de este tipo de estimación fue mencionada en la introducción del presente capítulo y radica en el hecho de ser uno de los resultados necesarios para obtener cotas del término  $|u - \Pi_k u|_{1,p,K}$ .

Damos la definición de *condición del ángulo máximo* para triángulos ya que en esta oportunidad es éste el tipo de elementos que nos interesa considerar; no obstante, es pertinente señalar que dicha definición puede ser naturalmente extendida a cualquier polígono convexo.

**Definición 4.1.1** *Sea  $T$  un triángulo cualquiera. Diremos que  $T$  satisface la condición del ángulo máximo (maximum angle condition) con constante  $\psi_M \in \mathbb{R}$  si*

$$\theta \leq \psi_M < \pi \quad (4.1.2)$$

donde  $\theta$  es cualquiera de los ángulos interiores de  $T$ . Cuando esto suceda escribiremos  $MAC(\psi_M)$ .

**Observación 4.1.1** *Observemos que si un cuadrilátero del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verifica la condición (D2), entonces el triángulo  $\Delta(V_2 V_3 V_4)$  verifica trivialmente la MAC para alguna constante que solo depende de la constante involucrada en (D2).*

Teniendo presente que  $T = T(a, b)$  es el triángulo de vértices  $V_1 = (0, 0)$ ,  $V_2 = (a, 0)$  y  $V_4 = (0, b)$ ,  $T$  satisface trivialmente la condición del ángulo máximo con constante  $\pi/2$  por ser un triángulo rectángulo. Gracias a los trabajos [7, 9, 15] y al hecho que  $T$  verifica  $MAC(\pi/2)$  se tiene

$$\|u - \Pi_k u\|_{0,p,T} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1,p,T}, \quad (4.1.3)$$

y

$$|u - \Pi_k u|_{1,p,T} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,T}. \quad (4.1.4)$$

Notemos que (4.1.3) y (4.1.4) es la descomposición del error de interpolación sobre el triángulo  $T$  en  $W^{1,p}(T)$ , discriminando la norma  $p$  del error (4.1.3) de la seminorma (4.1.4) similarmente a como haremos al trabajar con el error de interpolación sobre el cuadrilátero  $K$ .

Tenemos garantizada entonces una estimación del error similar a la que queremos obtener sobre  $K$ , pero sobre el elemento  $T$ . Nuestro siguiente paso es mostrar que este tipo de estimación puede ser extendida del dominio  $T$  al dominio  $K$ ; este hecho, es establecido y probado en el Lemma 4.1.2 pero su demostración requiere del siguiente resultado elemental

**Lema 4.1.1** *Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo que satisface  $(\Delta 1)$ . Sea  $T = T(a, b)$ , entonces para cualquier polinomio  $q \in \mathbb{P}_k$ , existe una constante que solo depende de  $k$  y de la constante involucrada en  $(\Delta 1)$  que cumple*

$$\|q\|_{0,p,K} \leq C \|q\|_{0,p,T}. \quad (4.1.5)$$



**Demostración.** Introducimos los rectángulos  $K_s$  y  $K_l$  en la siguiente forma

$$K_s := K(a/2, b/2, a/2, b/2) \subset T \subset K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}) \subset K_l := K(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}, \bar{b})$$

donde  $\bar{a} = \max\{a, \tilde{a}\}$ ,  $\bar{b} = \max\{b, \tilde{b}\}$ .

Todo lo que necesitamos mostrar es que

$$\|q\|_{0,p,K_l} \leq C \|q\|_{0,p,K_s}. \quad (4.1.6)$$

Gracias a  $(\Delta 1)$  tenemos que los cocientes  $\frac{\bar{a}}{a}$ ,  $\frac{\bar{b}}{b}$  se encuentran acotados en términos de una constante genérica  $C$ . Con la intención de ser claros en nuestra exposición, renombramos a la constante  $C$  por  $\bar{C}$ . Consideremos ahora los siguientes conjuntos de referencia

$$\hat{K}_{\bar{C}} = K\left(\frac{1}{2\bar{C}}, \frac{1}{2\bar{C}}, \frac{1}{2\bar{C}}, \frac{1}{2\bar{C}}\right) \subset \hat{K} = K(1, 1, 1, 1).$$

Dado que  $\|\hat{q}\|_{0,p,\hat{K}}$  y  $\|\hat{q}\|_{0,p,\hat{K}_{\bar{C}}}$  definen normas sobre  $\mathbb{P}_k$  y; por un resultado básico y conocido, dos normas cualesquiera en un espacio de dimensión finita resultan equivalentes (en el sentido dado por (2.1.9)) sigue que

$$\|\hat{q}\|_{0,p,\hat{K}} \leq C \|\hat{q}\|_{0,p,\hat{K}_{\bar{C}}} \quad (4.1.7)$$

cualquiera sea  $\hat{q} \in \mathbb{P}_k$ , donde la constante  $C$  depende únicamente de  $k$  y de  $\bar{C}$ .

Finalmente, (4.1.6) sigue de (4.1.7) mediante un cambio de variables dado por el mapeo lineal  $L: \hat{K} \rightarrow K_l$ ,  $L(\hat{x}, \hat{y}) = (\bar{a}\hat{x}, \bar{b}\hat{y})$ , teniendo en cuenta que para dicha  $L$  se cumple  $L(\hat{K}_{\bar{C}}) \subset K_s$  (que el Jacobiando de  $L$  sea constante garantiza la independencia respecto a  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$ ).  $\square$

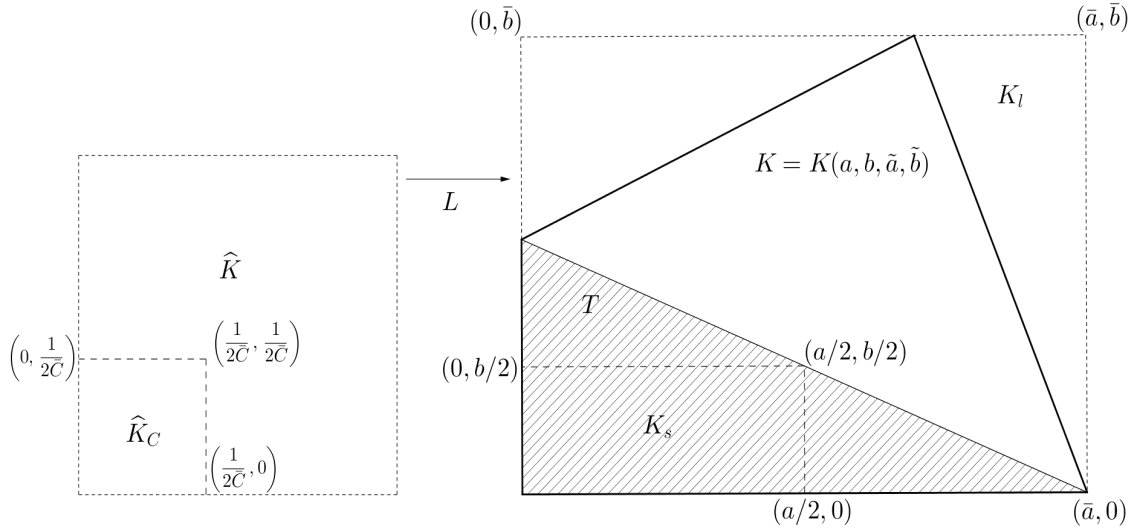


Figura 4.1: Ilustración de la notación usada en la demostración del Lema 4.1.1 asociada al elemento  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  cuando  $\bar{a} = \tilde{a}$  y  $\bar{b} = b$ .

Estamos ahora en condiciones de probar la extensión de (4.1.4) al cuadrilátero  $K$ .

**Lema 4.1.2** Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo que satisface  $(\Delta 1)$ . Sea  $T = T(a, b)$  y  $\Pi_k u$  el  $\mathbb{P}_k$ -operador de interpolación de Lagrange sobre  $T$ . Entonces, para cualquier  $p \geq 1$

$$|u - \Pi_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K}. \quad (4.1.8)$$

**Demostración.** Sea  $u \in W^{k+1,p}(K)$  y  $\mathcal{P}_k u \in \mathbb{P}_k(K)$  definido por

$$\int_K D^\alpha u = \int_K D^\alpha \mathcal{P}_k u \quad (|\alpha| \leq k). \quad (4.1.9)$$

De la convexidad de  $K$  y (4.1.9), sigue (aplicando la desigualdad de Poincaré repetidamente) que

$$|u - \mathcal{P}_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K}. \quad (4.1.10)$$

Por otro lado, la desigualdad triangular permite escribir

$$|u - \Pi_k u|_{1,p,K} \leq |u - \mathcal{P}_k u|_{1,p,K} + |\mathcal{P}_k u - \Pi_k u|_{1,p,K}. \quad (4.1.11)$$

Observemos que el primer término del miembro derecho de (4.1.11) ya está acotado gracias a (4.1.10). Para obtener la estimación del segundo término consideramos una derivada primera arbitraria de  $\mathcal{P}_k u - \Pi_k u$ , a la cual llamaremos  $D(\mathcal{P}_k u - \Pi_k u) \in \mathbb{P}_{k-1}(K)$ , y gracias al Lema 4.1.1 y desigualdad triangular sigue que

$$\begin{aligned} \|D(\mathcal{P}_k u - \Pi_k u)\|_{0,p,K} &\leq C \|D(\mathcal{P}_k u - \Pi_k u)\|_{0,p,T} \\ &\leq C |\mathcal{P}_k u - \Pi_k u|_{1,p,T} \\ &\leq C [|\mathcal{P}_k u - u|_{1,p,T} + |u - \Pi_k u|_{1,p,T}] \\ &\leq C [|\mathcal{P}_k u - u|_{1,p,K} + |u - \Pi_k u|_{1,p,T}]. \end{aligned}$$

Finalmente, el lema es consecuencia de (4.1.4) y (4.1.10).  $\square$

## 4.2. Estimación para $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$ .

Ya adelantamos que la estimación para  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  en (4.0.1) es considerablemente más técnica que la del término  $|u - \Pi_k u|_{1,p,K}$ . De hecho, el tratamiento de este término es completamente diferente a lo visto en la sección previa (que como vimos tiene por objeto, presentar la demostración de la cota para el término  $|u - \Pi_k u|_{1,p,K}$ ).

Concretamente y parafraseando lo dicho en la presentación de este capítulo, veremos que la estimación de  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  se reduce a acotar la evaluación de la función  $\Pi_k u - u$  en determinado subconjunto de nodos y a la estimación de la seminorma de las funciones base asociadas a tales nodos. Cabe señalar que, para los elementos subparamétricos, i.e. aquellos donde  $k > 1$ ; dentro del conjunto de nodos en los cuales será evaluada la función  $\Pi_k u - u$  se encuentran los *nodos interiores* lo que requerirá especial cuidado y tratamiento.

Con la intención de presentar todos los resultados vinculados a esta cuestión en forma clara y lo más consisa posible, en lo que sigue consideraremos tres secciones: la primera de ellas (muy breve por cierto) está destinada a justificar la afirmación del párrafo anterior acerca de que la estimación de  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  se reduce a la estimación de la seminorma de ciertas funciones base y a la acotación de evaluaciones de la función  $\Pi_k u - u$  en determinados nodos; la segunda, está destinada a exhibir los resultados propios a la seminorma de las funciones base (las demostraciones de estos resultados serán muy simples gracias a la colección de cotas que hemos obtenido en el Capítulo 3 para la integral  $I_p$ ); mientras que la tercera, está destinada a presentar los resultados vinculados a las evaluaciones de  $\Pi_k u - u$ . Ahora, para presentar esta última serie de resultados, será necesario el estudio previo de algunas propiedades correspondientes a triángulos cuyos vértices son algunos de los nodos de interpolación. Esta es la razón por la que subdividiremos esta sección en dos subsecciones: la primera de ellas tiene por objeto exhibir algunas propiedades de ciertas clases de triángulos; y la segunda a dar concretamente la estimación deseada para la evaluación  $(\Pi_k u - u)(N)$  siendo  $N$  un punto perteneciente al conjunto de nodos.

#### 4.2.1. Descomposición del término $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$ .

Es inmediato verificar que  $\Pi_k u - Q_k u$  pertenece al espacio  $\mathcal{Q}_k(K)$  de elementos finitos definido en (2.1.5); por lo tanto

$$\Pi_k u - Q_k u = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} \phi_{ij} \quad (4.2.12)$$

para ciertas constantes  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  ya que  $\{\phi_{ij}\}_{i,j}$  constituye una base de dicho espacio. Notemos que, gracias a la propiedad de interpolación (2.1.6), al evaluar en el nodo  $N_{lr}$  obtenemos la siguiente caracterización para la constante  $a_{lr}$

$$(\Pi_k u - Q_k u)(N_{lr}) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} \phi_{ij}(N_{lr}) = a_{lr}. \quad (4.2.13)$$

Dado que  $Q_k u(N_{lr}) = u(N_{lr})$ , una expresión equivalente a (4.2.13) es

$$a_{lr} = (\Pi_k u - u)(N_{lr}). \quad (4.2.14)$$

Ahora, dado que  $\Pi_k u$  coincide con  $u$  en cada uno de los nodos laterales ubicados sobre  $V_1 V_2$  y  $V_1 V_4$  (ver (2.1.8) en la Sección 2.1 del Capítulo 2); sigue que la función  $\Pi_k u - u$  se anula sobre el conjunto de nodos  $\{N_{0t}, N_{t0}\}_{0 \leq t \leq k}$  o, equivalentemente,  $a_{lr} = 0$  si  $l = 0$  o  $r = 0$ . Teniendo en consideración esto, (4.2.12) puede ser escrito como sigue

$$\Pi_k u - Q_k u = \sum_{i,j \neq 0} (\Pi_k u - u)(N_{ij}) \phi_{ij} \quad (4.2.15)$$

donde  $\phi_{ij}$  es la función base asociada al nodo  $N_{ij}$ .

Usando desigualdad triangular en (4.2.15) se tiene

$$|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K} \leq \sum_{i,j \neq 0} |(\Pi_k u - u)(N_{ij})| |\phi_{ij}|_{1,p,K} \quad (4.2.16)$$

que es justamente la reducción de la seminorma de la función  $\Pi_k u - Q_k u$  en términos de las evaluaciones de  $\Pi_k u - u$  en ciertos nodos y de la seminorma de las funciones base asociadas a dichos nodos.

Finalizamos este apartado notando que, por (4.2.16), (4.0.1) puede escribirse de la siguiente manera

$$|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq |u - \Pi_k u|_{1,p,K} + \sum_{i,j \neq 0} |(\Pi_k u - u)(N_{ij})| |\phi_{ij}|_{1,p,K}. \quad (4.2.17)$$

#### 4.2.2. Estimaciones para la seminorma de las funciones base.

Condensaremos las cotas para la seminorma de las funciones base en el siguiente lema el cual es una consecuencia inmediata de las estimaciones obtenidas en el Capítulo 2 para la integral  $I_p$ . En el enunciado de este resultado nos referiremos por *función base interior* a una función base asociada a un nodo interior (en el sentido definido en (2.1.6)); y por *función base lateral* a una función base asociada a un nodo lateral (en el sentido también definido en (2.1.6)). También asumiremos que  $q$  es el *exponente conjugado* o *dual* de  $p$  en el sentido usual de estos términos, es decir, si cumplen

$$1/p + 1/q = 1. \quad (4.2.18)$$

Notemos que como consecuencia inmediata de (4.2.18) se tiene la siguiente expresión de  $q$  en términos de  $p$

$$q = p/(p - 1). \quad (4.2.19)$$

**Lema 4.2.1** Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo.

- (a) Asumamos que  $1 \leq p < 3$  y que  $K$  satisface las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2]$ ) entonces para cualquier función base  $\phi$  vale

$$|\phi|_{1,p,K} \leq C \frac{h^{1/p}}{|l|^{1/q}},$$

donde  $q$  es el exponente conjugado de  $p$  (en este caso, la constante  $C$  puede comportarse como  $\frac{1}{3-p}$  tal como se observó seguidamente al Lema 3.1.5).

- (b) Asumamos que  $1 \leq p < 3$  y que  $K$  satisface las condiciones  $[\Delta 1, D2, D3]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2, D3]$ ) entonces

$$|\phi|_{1,p,K} \leq C \frac{h^{1/p}}{a^{1/q}},$$

donde  $\phi$  es una función base interior y  $q$  es el exponente conjugado de  $p$ .

- (c) Para cualquier  $p \geq 1$ , asumamos que  $K$  satisface las condiciones  $[D1, D2]$  entonces para cualquier función base interior vale

$$|\phi|_{1,p,K} \leq C \frac{h^{1/p}}{a^{1/q}},$$

siendo  $q$  es el exponente conjugado de  $p$ .

- (d) Para cualquier  $p \geq 1$ , asumamos que  $K$  satisface las condiciones  $[D1, D2]$  entonces para cualquier función base lateral vale

$$|\phi|_{1,p,K} \leq C \frac{h^{1/p}}{|l|^{1/q}}$$

siendo  $q$  es el exponente conjugado de  $p$ .

**Demostración.** La parte (a) es una consecuencia inmediata de los Lemas 2.3.2 y 3.1.5. En efecto, del Lema 2.3.2 sigue que

$$|\phi|_{1,p,K}^p \leq C \max \left\{ \frac{a}{b^{p-1}}, \frac{b}{a^{p-1}} \right\} I_p;$$

mientras el Lema 3.1.5 establece que  $\max \left\{ \frac{a}{b^{p-1}}, \frac{b}{a^{p-1}} \right\} I_p \leq C \frac{h}{|l|^{p-1}}$ , con lo cual

$$|\phi|_{1,p,K} \leq C \frac{h^{1/p}}{|l|^{(p-1)/p}}.$$

La demostración del ítem (a) concluye entonces usando (4.2.19).

Por otro lado, de los Lemas 2.3.3 y 2.3.4 concluimos que, a fin de demostrar la validez del ítem (b), es suficiente con probar las siguientes estimaciones

$$\frac{b}{a^{p-1}} |1 - \tilde{b}/b|^p I_p, \quad \frac{a}{b^{p-1}} (\tilde{a}/a)^p I_p \leq C \frac{h}{a^{p-1}}. \quad (4.2.20)$$

En efecto, gracias al Lema 2.3.4, la expresión  $\max\{1, (b/\tilde{b})^{p-1}/2\}$  se encuentra acotada superiormente por una constante uniforme por lo que el término  $\frac{b}{a^{p-1}} \max\{1, (b/\tilde{b})^{p-1}/2\}$  en (2.3.10) del Lema 2.3.3 está superiormente acotado por  $C \frac{b}{a^{p-1}}$  para alguna constante  $C$  y dado que  $b \leq h$  la estimación deseada es válida para el término  $\frac{b}{a^{p-1}} \max\{1, (b/\tilde{b})^{p-1}/2\}$  por lo que restaría obtener la estimación  $\frac{b}{a^{p-1}} |1 - \tilde{b}/b|^p I_p \leq \frac{h}{a^{p-1}}$ . Por otro lado, dado que  $\max\{1, (b/\tilde{b})^{p-1}/2\}$  se encuentra

acotada superiormente por una constante uniforme,  $a \underset{C}{\simeq} b$  (gracias a (D3)) y  $a \leq h$ , sigue que  $\frac{a}{b^{p-1}} \max\{1, (b/\tilde{b})^{p-1}/2\} \leq C \frac{h}{a^{p-1}}$  con lo cual restaría acotar la expresión  $\frac{a}{b^{p-1}} (\tilde{a}/a)^p I_p$  en (2.3.11) del Lema 2.3.3.

Habiendo justificado la suficiencia de (4.2.20) para obtener la estimación deseada en (b), probaremos (4.2.20):

usando que  $|b - \tilde{b}| \leq |l|$  y el Lema 3.1.5 tenemos

$$\frac{b}{a^{p-1}} |1 - \tilde{b}/b|^p I_p = \frac{b}{a^{p-1}} \frac{|b - \tilde{b}|^p}{b^p} I_p \leq C \frac{|l|^p}{b^p} \frac{b}{a^{p-1}} I_p \leq C \frac{|l|^p}{b^p} \frac{h}{|l|^{p-1}} = C \frac{|l|}{b} \frac{h}{b^{p-1}}. \quad (4.2.21)$$

De ( $\Delta 2$ ) sigue que  $|l|/b \leq C$  y como  $a \underset{C}{\simeq} b$  (gracias a (D3)) podemos combinar estos hechos con (4.2.21) para obtener

$$\frac{b}{a^{p-1}} |1 - \tilde{b}/b|^p I_p \leq C \frac{h}{a^{p-1}}$$

que es la estimación deseada para el primer término de (4.2.20). La estimación para el término restante es completamente similar usando que  $\tilde{a} \leq |l|$  en lugar de  $|b - \tilde{b}| \leq |l|$  y notando que (D3) no es necesario en este caso; en efecto

$$\frac{a}{b^{p-1}} (\tilde{a}/a)^p I_p \leq \frac{|l|^p}{a^p} \frac{a}{b^{p-1}} I_p \leq C \frac{|l|^p}{a^p} \frac{h}{|l|^{p-1}} = C \frac{|l|}{a} \frac{h}{a^{p-1}} \leq \tilde{C} \frac{h}{a^{p-1}}$$

(la segunda desigualdad es gracias al Lema 3.1.5 mientras que la última desigualdad es a causa de ( $\Delta 2$ )).

El ítem (c) se deduce con argumentos completamente análogos a los usados para obtener la estimación del ítem (b) haciendo las siguientes salvedades: en lugar del Lema 3.1.5 se usa el Lema 3.3.3 y en lugar de (D3) se usa el Lema 3.3.2.

Por último, el ítem (d) sigue directamente combinando los Lemas 2.3.2 y 3.3.3.  $\square$

### 4.2.3. Estimaciones para ciertas evaluaciones de la función $\Pi_k u - u$ .

Aunque no sea un hecho evidente, afirmamos que la evaluación de  $\Pi_k u - u$  en el nodo  $N$  está íntimamente vinculado con la medida de algún segmento que tiene como extremos a  $N$  y a otro nodo de interpolación que precisaremos cuando resulte oportuno, entre otras cantidades igualmente significativas. Esta es, básicamente, la razón por la que la siguiente sección está enteramente destinada a estudiar los segmentos antes descritos.

#### Triángulos contenidos en $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ que satisfacen la MAC.

Notemos que si  $N$  es alguno de los nodos involucrados en la definición de  $\Pi_k u$ , i.e. algunos de los nodos  $N^T$  sobre el triángulo  $T = T(a, b)$  detallados en (2.1.8) de la Sección 2.1 del Capítulo 2; entonces  $(\Pi_k u - u)(N) = 0$  por lo que no es necesaria ninguna estimación en este caso. Asumamos entonces que  $N$  no es ninguno de los nodos  $N^T$ , i.e., asumamos  $N = N_{ij}$  con  $i \neq 0$  y  $j \neq 0$ .

Estamos particularmente interesados en considerar ciertos triángulos con la siguiente propiedad:  $N_{ij}$  es uno de sus vértices y los vértices restantes pertenecen al conjunto de nodos laterales usados en la definición de  $\Pi_k u$ .

Habiendo aclarado cuáles serán los objetos de estudio de la presente sección introducimos las siguientes notaciones con la intención de simplificar la escritura en lo que resta del apartado:

- si  $N_{ij}$  es un nodo ubicado sobre el segmento  $V_3 V_4$  (*lado superior* de  $K$ ), i.e.  $i = k$  y  $1 \leq j \leq k$ , consideraremos el triángulo

$$T_{kj} = \Delta(N_{kj} N_{k0}^T N_{k-j,j}^T) \quad (4.2.22)$$

- si  $N_{ij}$  es un nodo ubicado sobre el segmento  $V_2V_3$  (lado derecho de  $K$ ), i.e.  $1 \leq i \leq k$  y  $j = k$ , consideraremos el triángulo

$$T_{ik} = \Delta(N_{ik}N_{0k}^TN_{i,k-i}^T) \quad (4.2.23)$$

- si  $N_{ij}$  es un nodo interior, i.e.  $1 \leq i, j \leq k - 1$  consideraremos el triángulo

$$T_{ij} = \Delta(N_{ij}N_{0j}^TN_{i0}^T). \quad (4.2.24)$$

Con el afán de ilustrar la notación asumida, presentamos la Figura 4.2 en la cual se considera un elemento de tercer orden.

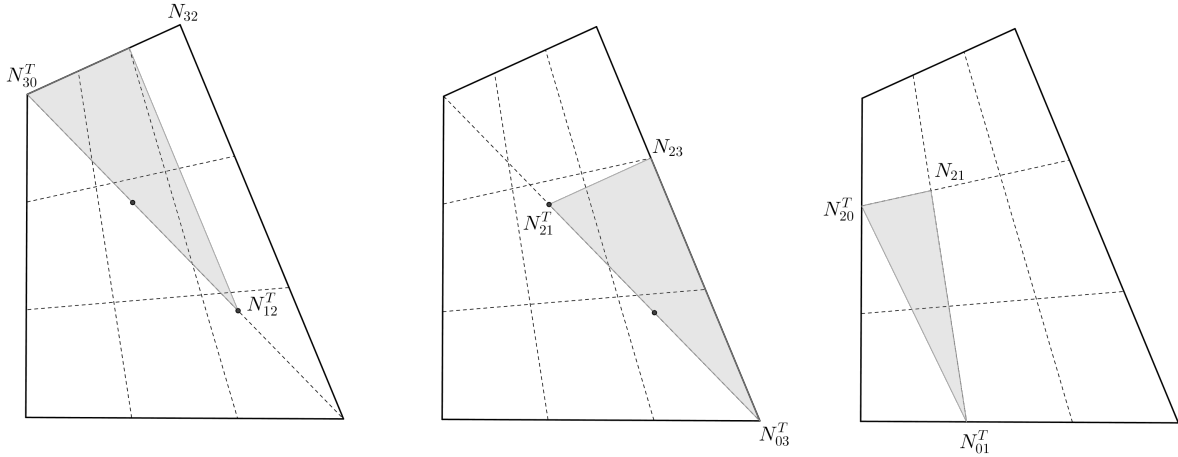


Figura 4.2: Representación de  $T_{32}$ ,  $T_{23}$  y  $T_{21}$  en un  $Q_3$ -elemento. Izquierda:  $T_{32}$ , centro:  $T_{23}$ , derecha:  $T_{21}$ .

**Observación 4.2.1** Notemos que cuando  $k = 1$ , (4.2.22) y (4.2.23) se reducen al triángulo  $T_{11} = \Delta(V_2V_3V_4)$ . Notemos también que, cualquiera sea  $k$ , los triángulos  $T_{kj}$  y  $T_{ik}$  son semejantes al triángulo  $\Delta(V_2V_3V_4)$ .

Lo que resta de esta sección está destinado a presentar algunas propiedades básicas sobre este tipo de triángulos y la medida de alguno de sus lados.

Como consecuencia inmediata de las observaciones 4.2.1 y 4.1.1 tenemos el siguiente resultado para los nodos ubicados sobre alguno de los lados de  $K$

**Lema 4.2.2** Sea  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  (equiv.  $[\Delta 2, D2]$ ), entonces para cualquier  $T = T_{kj}$  (respectivamente  $T = T_{ik}$ ) definido en (4.2.22) (resp. (4.2.23)) se tiene que el lado  $N_{kj}N_{k0}^T$  (resp.  $N_{ik}N_{i,k-i}^T$ ) es comparable al lado  $l = V_3V_4$  y el ángulo de  $T$  ubicado en  $N_{k0}$  (resp.  $N_{i,k-i}^T$ ) es el ángulo  $\alpha$  de la condición (D2). En particular,  $T$  verifica la MAC.

Ya hemos mencionado y evidenciado que los nodos interiores merecen especial atención y tratamiento; el siguiente resultado es una prueba más de esta afirmación

**Lema 4.2.3** Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo satisfaciendo las condiciones  $[D1, D2]$  o  $[\Delta 1, D2, D3]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2, D3]$ ). Si  $1 \leq i, j \leq k - 1$  entonces

- (a)  $|N_{i0}N_{ij}| \underset{C}{\sim} a$  y  $|N_{0j}N_{ij}| \underset{C}{\sim} b$  (en particular,  $|N_{i0}N_{0j}| \underset{C}{\sim} h$ ).
- (b)  $\alpha_{ij}$  se encuentra acotado lejos de 0 y de  $\pi$  siendo  $\alpha_{ij}$  el ángulo entre  $N_{i0}N_{ij}$  y  $N_{i0}N_{0j}$ . En particular, para  $1 \leq i, j \leq k-1$ , cualquier triángulo  $T = \Delta(N_{i0}N_{0j}N_{ij})$  verifica la condición del ángulo máximo.

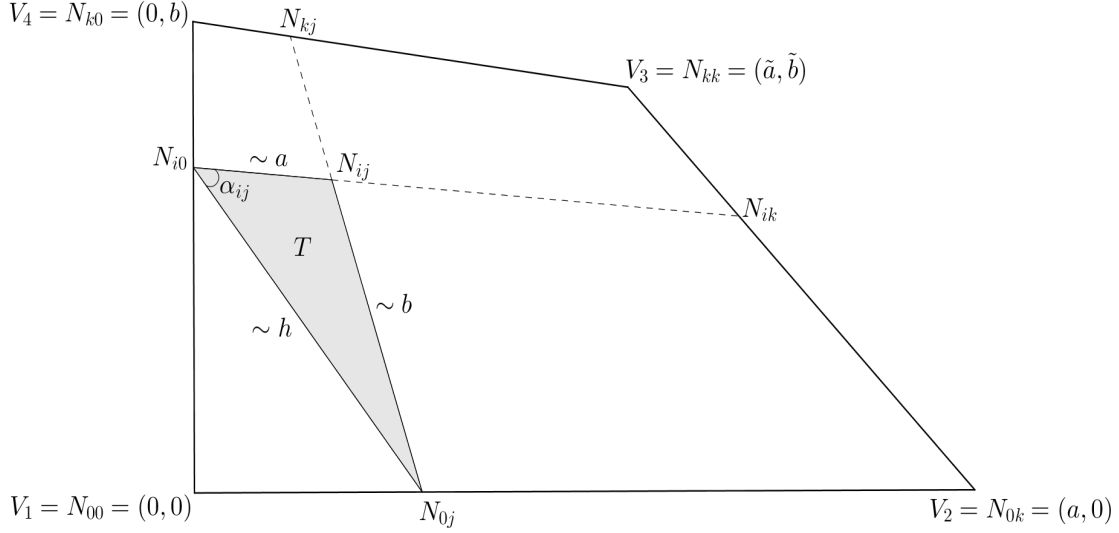


Figura 4.3: Ilustración de la notación usada en el Lema 4.2.3.

### Demostración.

- (a) Comencemos observando que a fin de probar que la medida del segmento  $N_{i0}N_{ij}$  es comparable a la medida del lado  $V_1V_2$ ,  $a$ , es suficiente con mostrar que la medida del segmento  $N_{i0}N_{ik}$  es comparable a  $a$  ya que los segmentos  $N_{i0}N_{ij}$  y  $N_{i0}N_{ik}$  son mutuamente proporcionales.

Mostraremos entonces que  $N_{i0}N_{ik} \underset{C}{\sim} a$ : para  $0 < \hat{y} = i/k < 1$  se tiene

$$\begin{aligned} |N_{i0}N_{ik}|^2 &= \|F_K(1, \hat{y}) - F_K(0, \hat{y})\|^2 \\ &= \left\| (a(1 - \hat{y}) + \tilde{a}\hat{y}, (\tilde{b} - b)\hat{y}) \right\|^2 \\ &= a^2(1 - \hat{y})^2 + 2a\tilde{a}\hat{y}(1 - \hat{y}) + \hat{y}^2(\tilde{a}^2 + (\tilde{b} - b)^2). \end{aligned}$$

Ahora, como  $2a\tilde{a}\hat{y}(1 - \hat{y}) + \hat{y}^2(\tilde{a}^2 + (\tilde{b} - b)^2) \geq 0$  y  $|l|^2 = \tilde{a}^2 + (\tilde{b} - b)^2$  sigue que

$$a^2(1 - \hat{y})^2 \leq |N_{i0}N_{ik}|^2 \leq a^2(1 - \hat{y})^2 + 2a\tilde{a}\hat{y}(1 - \hat{y}) + \hat{y}^2|l|^2 \quad (4.2.25)$$

(de hecho, la última desigualdad es en realidad una igualdad).

Usando  $(\Delta 1)$  (o  $(D1)$ , dependiendo la hipótesis asumida) tenemos que  $\tilde{a} \leq C_1 a$  para alguna constante  $C_1$  y por lo tanto (4.2.25) implica

$$a^2(1 - \hat{y})^2 \leq |N_{i0}N_{ik}|^2 \leq a^2(1 - \hat{y})^2 + 2C_1 a^2 \hat{y}(1 - \hat{y}) + \hat{y}^2|l|^2. \quad (4.2.26)$$

Finalmente, gracias a la validez de  $(\Delta 2)$  (consecuencia inmediata de las hipótesis asumidas y del Lema 2.2.1), la medida del lado  $l$  es comparable a la medida del lado más corto de  $K$ ; y dado que la medida del lado más corto es claramente menor o igual a la medida del lado  $V_1V_2$  sigue que

$$|l| \leq C_2 a$$

siendo  $C_2$  la constante involucrada en  $(\Delta 2)$ . Luego, de (4.2.26) se deduce

$$a^2(1 - \hat{y})^2 \leq |N_{i0}N_{ik}|^2 \leq [(1 - \hat{y})^2 + 2C_1\hat{y}(1 - \hat{y}) + \hat{y}^2C_2^2] a^2 \quad (4.2.27)$$

o, equivalentemente,

$$a(1 - \hat{y}) \leq |N_{i0}N_{ik}| \leq [(1 - \hat{y})^2 + 2C_1\hat{y}(1 - \hat{y}) + \hat{y}^2C_2^2]^{1/2} a. \quad (4.2.28)$$

Dado que las constantes  $1 - \hat{y}$  y  $[(1 - \hat{y})^2 + 2C_1\hat{y}(1 - \hat{y}) + \hat{y}^2C_2^2]^{1/2}$  son independientes de la geometría de  $K$ ; de hecho, solo dependen de  $k$  y de las constantes involucradas en  $[\Delta 1, D2]$  (resp.  $[D1, D2]$ ), sigue que  $|N_{i0}N_{ik}|$  y  $a$  son comparables.

Por otro lado, en completa analogía a lo recién probado, notemos que a fin de probar que la medida del segmento  $N_{0j}N_{ij}$  es comparable a la medida del lado  $V_1V_4$ ,  $b$ , es suficiente con mostrar que la medida del segmento  $N_{0j}N_{kj}$  es comparable a  $b$  ya que los segmentos  $N_{0j}N_{ij}$  y  $N_{0j}N_{kj}$  son mutuamente proporcionales. Con esta intención, observemos que para un apropiado  $0 < \hat{x} < 1$  se tiene

$$\begin{aligned} |N_{0j}N_{kj}|^2 &= \|F_K(\hat{x}, 1) - F_K(\hat{x}, 0)\|^2 \\ &= \left\| ((\tilde{a} - a)\hat{x}, b(1 - \hat{x}) + \tilde{b}\hat{x}) \right\|^2 \\ &= (\tilde{a} - a)^2\hat{x}^2 + (b(1 - \hat{x}) + \tilde{b}\hat{x})^2. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Ahora, como  $\tilde{b}\hat{x}$ ,  $(\tilde{a} - a)^2\hat{x}^2 \geq 0$  sigue inmediatamente  $b^2(1 - \hat{x})^2 \leq |N_{0j}N_{kj}|^2$ . Por otro lado, re-escribiendo el último término de (4.2.29) tenemos

$$|N_{0j}N_{kj}|^2 = (\tilde{a} - a)^2\hat{x}^2 + (\hat{x}(\tilde{b} - b) + b)^2 \quad (4.2.30)$$

y, usando la conocida desigualdad  $(s + t)^2 \leq 2(s^2 + t^2)$ , sigue que

$$|N_{0j}N_{kj}|^2 \leq (\tilde{a} - a)^2\hat{x}^2 + 2 \left[ (\tilde{b} - b)^2\hat{x}^2 + b^2 \right] \leq 2 \left[ (\tilde{a} - a)^2\hat{x}^2 + (\tilde{b} - b)^2\hat{x}^2 + b^2 \right]. \quad (4.2.31)$$

En consecuencia, tenemos hasta aquí la siguiente cadena de desigualdades

$$b^2(1 - \hat{x})^2 \leq |N_{0j}N_{kj}|^2 \leq 2 \left[ (\tilde{a} - a)^2\hat{x}^2 + (\tilde{b} - b)^2\hat{x}^2 + b^2 \right]. \quad (4.2.32)$$

Observemos que gracias a  $(\Delta 1)$  (o  $(D1)$ , dependiendo la hipótesis asumida), existe una constante  $C_1$  tal que  $\tilde{a}/a, \tilde{b}/b \leq C_1$  y en consecuencia

$$(\tilde{a} - a)^2 = a^2 \left( \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right)^2 \leq 2a^2 \left[ \left( \frac{\tilde{a}}{a} \right)^2 + 1 \right] \leq 2a^2(C_1^2 + 1), \quad (4.2.33)$$

$$(\tilde{b} - b)^2 = b^2 \left( \frac{\tilde{b}}{b} - 1 \right)^2 \leq 2b^2 \left[ \left( \frac{\tilde{b}}{b} \right)^2 + 1 \right] \leq 2b^2(C_1^2 + 1) \quad (4.2.34)$$

Combinando (4.2.32) con (4.2.33) y (4.2.34) sigue que

$$b^2(1 - \hat{x})^2 \leq |N_{0j}N_{kj}|^2 \leq 2 \left[ (a^2\hat{x}^2(C_1^2 + 1) + b^2(2(C_1^2 + 1)\hat{x}^2 + 1)) \right]. \quad (4.2.35)$$

Eligiendo adecuadamente la constante  $C$  podemos escribir (4.2.35) como sigue

$$b^2(1 - \hat{x})^2 \leq |N_{0j}N_{kj}|^2 \leq C(a^2 + b^2). \quad (4.2.36)$$



Finalmente, la demostración concluye usando (D3) en un caso o el Lema 3.3.2 en otro. Notemos además que las constantes implicadas son independientes de la geometría de  $K$ ; de hecho, solo dependen de  $k$  y de las constantes involucradas en  $[\Delta 1, D2]$  (resp.  $[D1, D2]$ ).

Habiendo probado ya  $|N_{i0}N_{ij}| \underset{C}{\simeq} a$  y  $|N_{0j}N_{ij}| \underset{C}{\simeq} b$ , es inmediato (usando  $(\Delta 1)$  o  $(D1)$ , dependiendo la condición asumida, junto a las Observaciones 3.1.1 y 3.3.1) que  $|N_{i0}N_{0j}| \underset{C}{\simeq} h$ .

- (b) Definimos  $A$  como la matriz cuadrada de orden 2 cuyas filas están dadas por  $w_1 = N_{i0} - N_{ik}$  y  $w_2 = N_{i0} - N_{0j}$ . Dado que el valor absoluto del determinante de  $A$  coincide con el área del paralelogramo generado por  $w_1$  y  $w_2$ , es inmediato verificar que

$$|\det(A)| = \|w_1\| \|w_2\| \sin(\alpha_{ij})$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{\sin(\alpha_{ij})} = \frac{\|w_1\| \|w_2\|}{|\det(A)|}.$$

Gracias a lo probado en el ítem previo sabemos que el numerador puede ser acotado en términos de  $ab$ . Por otro lado, afirmamos que

$$0 < ab < C |\det(A)| \tag{4.2.37}$$

para cierta constante que solo depende de  $k$  y de las constantes involucradas en  $[\Delta 1, D2]$  (resp.  $[D1, D2]$ ). Notemos que asumiendo la validez de esta afirmación se concluye de inmediato que el ángulo  $\alpha_{ij}$  se encuentra acotado lejos de cero y de  $\pi$  ya que el cociente  $1/\sin(\alpha_{ij})$  se encuentra superiormente acotado.

Mostremos entonces la validez de (4.2.37). Teniendo presente que

$$A = \begin{pmatrix} (\tilde{a} - a)y + a & (\tilde{b} - b)y \\ -ax & by \end{pmatrix}$$

siendo  $x = \frac{j}{k}$  e  $y = \frac{i}{k}$ , un cálculo directo permite obtener la siguiente expresión para el determinante de esta matriz

$$|\det(A)| = aby \left| 1 + \left( \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right) y + \left( \frac{\tilde{b}}{b} - 1 \right) x \right|.$$

Ahora, dado que  $1 \leq i \leq k - 1$ , todo lo que necesitamos mostrar es que el término dentro del módulo  $m = 1 + \left( \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right) y + \left( \frac{\tilde{b}}{b} - 1 \right) x$  permanece lejos de cero. Para mostrar este hecho consideraremos dos casos:  $\frac{\tilde{b}}{b} - 1 \geq 0$  y  $\frac{\tilde{b}}{b} - 1 < 0$ .

Si  $\frac{\tilde{b}}{b} - 1 \geq 0$  entonces

$$m \geq 1 + \left( \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right) y = 1 - y + \frac{\tilde{a}}{a} y \geq 1 - y$$

y no resta nada que mostrar. Por otro lado, si  $\frac{\tilde{b}}{b} - 1 < 0$  entonces

$$m \geq \left( \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right) y + \frac{\tilde{b}}{b} = \left( \frac{\tilde{b}}{b} + \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right) y + \frac{\tilde{b}}{b} (1 - y) > \frac{\tilde{b}}{b} (1 - y)$$

donde la primer desigualdad sigue tomando  $x = 1$  (por hipótesis tenemos que  $x < 1$ , pero a los fines de la acotación basta tomar este valor límite para  $x$ ) mientras que la segunda desigualdad es consecuencia de la convexidad de  $K$  (ver (2.3.5) en la Sección 2.3.2 para más detalle). El argumento concluye usando el Lema 2.3.4 para garantizar que el factor  $\tilde{b}/b$  se encuentra acotado lejos de cero (ver también la Observación 2.3.3).  $\square$

### Estimación final.

En esta última sección tenemos por objeto presentar y demostrar adecuadas estimaciones para el término  $|(\Pi_k u - u)(N)|$ , es decir, para la evaluación de la función  $\Pi_k u - u$  en el nodo  $N$ . Esta serie de resultados constituyen el ingrediente final para obtener la cota buscada para la expresión  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  que también será presentada al final de este apartado.

Comenzamos entonces presentando un resultado de [20] que nos será de suma utilidad y que, básicamente, acota la norma  $p$  de una función sobre uno de los lados de un triángulo en términos de la norma y seminorma  $p$  de la misma función sobre todo el triángulo.

**Lema 4.2.4** *Sea  $T$  un triángulo con diámetro  $h_T$  y sea  $e$  alguno de los lados de  $T$ . Para cualquier  $p \geq 1$  vale*

$$\|u\|_{0,p,e} \leq 2^{1/q} \left( \frac{|e|}{|T|} \right)^{1/p} \left\{ \|u\|_{0,p,T} + h_T |u|_{1,p,T} \right\}$$

siendo  $q$  el exponente dual de  $p$ .

**Demostración.** Ver Lema 3.2 en [20].  $\square$

Habiendo enunciado este resultado estamos ahora en condiciones de presentar las estimaciones deseadas; para tal fin consideraremos el triángulo  $T_{ij}$  asociado al nodo  $N_{ij}$  tal como hemos definido previamente en el primer apartado de esta sección.

**Lema 4.2.5** *Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo satisfaciendo la condiciones  $[D1, D2]$  o  $[\Delta1, D2, D3]$  (equivalentemente  $[\Delta2, D2, D3]$ ). Para cualquier  $p \geq 1$ , denotando por  $q$  a su exponente dual, se tiene*

(a) (Nodos laterales) *Asumamos que  $i = k$  y  $1 \leq j \leq k$  o  $j = k$  e  $1 \leq i \leq k$  entonces*

$$|(u - \Pi_k u)(N_{ij})| \leq C \frac{|l|^{1/q}}{h^{1/p}} \left[ |u - \Pi_k u|_{1,p,T} + h_T |u - \Pi_k u|_{2,p,T} \right],$$

donde  $T = T_{ij}$ . Más aún, la estimación sigue valiendo si  $K$  satisface  $[\Delta1, D2]$ .

(b) (Nodos interiores) *Si  $1 \leq i, j \leq k - 1$  entonces*

$$|(u - \Pi_k u)(N_{ij})| \leq C \frac{a^{1/q}}{h^{1/p}} \left[ |u - \Pi_k u|_{1,p,T} + h_T |u - \Pi_k u|_{2,p,T} \right],$$

donde  $T = T_{ij}$ .

### Demostración.

(a) Por una analogía inmediata en el tratamiento de los nodos ubicados sobre el lado derecho de  $K$  respecto a los nodos ubicados sobre el superior de  $K$  escribiremos solo la demostración para los nodos pertenecientes al segundo conjunto, i.e. para los nodos  $N_{ij}$  con  $i = k$  y  $1 \leq j \leq k$ .

Llamaremos  $e$  al lado del triángulo  $T = T_{kj}$  cuyos extremos son  $V_4 = N_{k0}$  y  $N_{kj}$ , es decir,  $e := N_{k0}N_{kj}$  (ver Figura 4.4, izquierda). Dado que  $(u - \Pi_k u)(N_{k0}) = 0$ , usando desigualdad de Hölder y el Lema 4.2.4, sigue que

$$\begin{aligned} |(u - \Pi_k u)(N_{kj})| &\leq \int_e |\partial_e(u - \Pi_k u)| dx \\ &\leq |e|^{1/q} \|\partial_e(u - \Pi_k u)\|_{0,p,e} \\ &\leq 2^{1/q} \frac{|e|}{|T|^{1/p}} \left[ \|\partial_e(u - \Pi_k u)\|_{0,p,T} + h_T |\partial_e(u - \Pi_k u)|_{1,p,T} \right]. \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

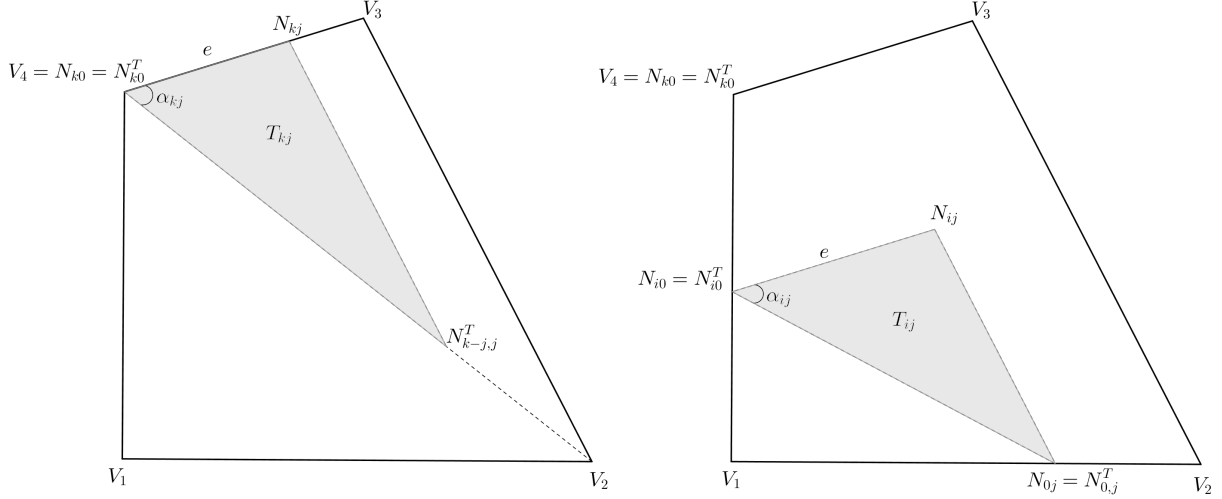


Figura 4.4: *Izquierda*: ilustración de  $T_{kj}$ . *Derecha*: ilustración de  $T_{ij}$ .

Notemos que  $|T| = |N_{k0}N_{k-j,j}^T||e| \sin(\alpha_{kj})$  (ver Figura 4.4, *izquierda*). Ahora, teniendo presente (D2) junto al hecho  $|N_{k0}N_{k-j,j}^T| \sim |d_1| \sim h$  (gracias al Lema 4.2.2 y las Observaciones 3.1.1 y 3.3.1) sigue que

$$\frac{1}{|T|} \leq C \frac{1}{h|e|}.$$

Apelando nuevamente al Lema 4.2.2 tenemos que  $|e| = |N_{k0}N_{kj}| \sim |l|$  por lo que deducimos

$$\frac{|e|}{|T|^{1/p}} \leq C \frac{|l|^{1/q}}{h^{1/p}}$$

que es lo requerido para obtener la estimación del ítem (a). Una mirada cuidadosa sobre el argumento esbozado permite concluir que basta solo asumir  $[\Delta 1, D2]$ .

- (b) La demostración de esta estimación requiere el mismo tipo de ideas que las usadas en la parte (a); no obstante, con el afán de brindar un panorama lo más completo posible a continuación exhibimos la misma.

En este caso, llamaremos  $e$  al lado del triángulo  $T = T_{ij}$  cuyos extremos son los nodos  $N_{i0}$  y  $N_{ij}$ , es decir,  $e := N_{i0}N_{ij}$  (ver Figura 4.4, *derecha*). Dado que  $(u - \Pi_k u)(N_{i0}) = 0$  (ya que  $N_{i0} = N_{i0}^T$ ), usando desigualdad de Hölder y el Lema 4.2.4, sigue que

$$\begin{aligned} |(u - \Pi_k u)(N_{ij})| &\leq \int_e |\partial_e(u - \Pi_k u)| dx \\ &\leq |e|^{1/q} \|\partial_e(u - \Pi_k u)\|_{0,p,e} \\ &\leq 2^{1/q} \frac{|e|}{|T|^{1/p}} \left[ \|\partial_e(u - \Pi_k u)\|_{0,p,T} + h_T |\partial_e(u - \Pi_k u)|_{1,p,T} \right]. \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

Notemos que ahora  $|T| = |N_{i0}N_{0j}||e| \sin(\alpha_{ij})$  (ver Figura 4.4, *derecha*). Ahora, teniendo presente que  $|N_{i0}N_{0j}| \sim h$  (gracias a la parte (a) del Lema 4.2.3) y  $1/\sin(\alpha_{ij}) \leq C$  para alguna constante (gracias a la parte (b) del Lema 4.2.3) sigue que

$$\frac{1}{|T|} \leq C \frac{1}{h|e|}.$$

Apelando nuevamente al primer ítem del Lema 4.2.3 tenemos que  $|e| = |N_{i0}N_{ij}| \sim a$  por lo que inmediatamente se tiene

$$\frac{|e|}{|T|^{1/p}} \leq C \frac{a^{1/q}}{h^{1/p}}$$

lo que concluye la demostración de la parte (b).  $\square$

Habiendo obtenido las estimaciones necesarias para la seminorma de las funciones base (Lema 4.2.1) y para las evaluaciones de la función  $u - \Pi_k u$  en los correspondientes nodos (Lema 4.2.5) estamos ahora en condiciones de presentar el siguiente resultado que, básicamente, constituye el último insumo a fin de acotar el término  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  tal como expresa (4.2.16) y hemos desarrollado en la Sección 4.2.1.

Para simplificar el enunciado del lema introducimos la siguiente referencia

$$|(u - \Pi_k u)(N_{ij})| |\phi_{ij}|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K}, \quad (4.2.40)$$

donde  $\phi_{ij}$  es la función base asociada al nodo  $N_{ij}$ .

**Lema 4.2.6** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ ,  $k > 1$  y sean  $1 \leq i, j \leq k$ , entonces*

- (a) *Si  $1 \leq p < 3$  y  $K$  satisface las condiciones  $[\Delta 1, D2, D3]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2, D3]$ ), entonces (4.2.40) vale.*
- (b) *Si  $p \geq 1$  y  $K$  satisface las condiciones  $[D1, D2]$ , entonces (4.2.40) vale.*

**Demostración.** La demostración es esencialmente una combinación inmediata de los Lemas 4.2.1 y 4.2.5 junto a la estimación del error de interpolación sobre triángulos (4.1.4), teniendo presente que dicha estimación vale ya que cada uno de los triángulos  $T_{ij}$  satisface la condición del ángulo máximo (gracias a los Lemas 4.2.2 y 4.2.3).  $\square$

El Lema 4.2.6 y la cota dada en (4.2.16) permite obtener en forma inmediata la estimación del término  $|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K}$  la cual establecemos explícitamente en uno de los últimos resultados de este capítulo

**Lema 4.2.7** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y  $k > 1$  entonces*

- (a) *Si  $1 \leq p < 3$  y  $K$  satisface las condiciones  $[\Delta 1, D2, D3]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2, D3]$ ), entonces vale*

$$|\Pi_k u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K} \quad (4.2.41)$$

- (b) *Si  $p \geq 1$  y  $K$  satisface las condiciones  $[D1, D2]$ , entonces (4.2.41) vale.*

Finalmente, el Lema 4.2.7 junto al Lema 4.1.2 permite obtener la estimación del error sobre cuadriláteros del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  para  $k > 1$  tal como mostramos en (4.2.17). A continuación hacemos explícita esta estimación en la siguiente

**Proposición 4.2.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  entonces*

- (a) *Si  $1 \leq p < 3$  y  $K$  satisface las condiciones  $[\Delta 1, D2, D3]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2, D3]$ ), entonces vale*

$$|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K} \quad (4.2.42)$$

- (b) *Si  $p \geq 1$  y  $K$  satisface las condiciones  $[D1, D2]$ , entonces (4.2.42) vale.*

**Demostración.** Como adelantamos, la demostración es una combinación inmediata de los Lemas 4.2.7 y 4.1.2 gracias a (4.2.17).  $\square$

Para finalizar establecemos dos proposiciones análogas a la anterior para el caso  $k = 1$  en el cual es posible relajar las condiciones impuestas cuando  $p \in [1, 3)$ .

**Proposición 4.2.2** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[\Delta 1, D2]$  (equivalentemente  $[\Delta 2, D2]$ ), entonces, para cualquier  $1 \leq p < 3$ , vale*

$$|u - Q_1 u|_{1,p,K} \leq Ch|u|_{2,p,K}. \quad (4.2.43)$$

**Demostración.** Gracias al Lema 4.2.2 podemos deducir en forma completamente análoga a lo hecho en la parte (a) del Lema 4.2.5 la siguiente estimación

$$|(u - \Pi_1 u)(V_3)| \leq C \frac{|l|^{1/q}}{h^{1/p}} \left[ |u - \Pi_1 u|_{1,p,T} + h_T |u - \Pi_1 u|_{2,p,T} \right] \quad (4.2.44)$$

siendo  $T = \Delta(V_2 V_3 V_4)$ . La estimación (4.2.44) junto a la parte (a) del Lema 4.2.1 y (4.2.16) permite obtener

$$|\Pi_1 u - Q_1 u|_{1,p,K} \leq Ch|u|_{2,p,K}. \quad (4.2.45)$$

Finalmente, combinando este hecho con (4.2.17) y el Lema 4.1.2 queda probado (4.2.43).  $\square$

**Proposición 4.2.3** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[D1, D2]$ , entonces, cualquiera sea  $p \geq 1$ , vale*

$$|u - Q_1 u|_{1,p,K} \leq Ch|u|_{2,p,K}. \quad (4.2.46)$$

**Demostración.** La demostración es completamente similar a la de la Proposición 4.2.2 solo que se usa la parte (d) del Lema 4.2.1 en lugar de la parte (a).  $\square$

# Capítulo 5

## Resultados principales.

En este capítulo presentamos los principales resultados que hemos obtenido en relación a la estimación del error

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} + h|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,p,K} \quad (5.0.1)$$

para cuadriláteros convexos generales. Exhibimos también una serie de contraejemplos a fin de mostrar la optimalidad de nuestros resultados.

### 5.1. Pre-requisitos.

En esta breve sección enunciamos y presentamos algunos resultados ampliamente conocidos que son esenciales a fin de completar nuestra exposición. Bien podríamos haber presentado este apartado como un Apéndice, no obstante, este formato nos parece más conveniente.

Con la intención de introducir notación comenzamos presentando las siguientes definiciones asociadas a un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\rho_{\text{máx}} := \sup \{ \rho : \Omega \text{ es estrellado respecto a una bola de radio } \rho \} \quad (5.1.2)$$

(recordamos que  $\Omega$  es estrellado respecto a  $B$  si, para todo  $X \in \Omega$ , la cápsula convexa de  $\{X\} \cup B$  es un subconjunto de  $\Omega$ ),

$$d := \text{diam}(\Omega), \quad (5.1.3)$$

$$\gamma := d/\rho_{\text{máx}}. \quad (5.1.4)$$

El primer resultado que enunciamos es la conocida *desigualdad de Sobolev*, que queda establecida como sigue

**Lema 5.1.1 (Desigualdad de Sobolev)** *Supongamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es estrellado respecto a una bola  $B$ . Si  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  donde (i)  $1 < p < \infty$  y  $m > n/p$  o (ii)  $p = 1$  y  $m \geq n$ , entonces  $u$  es continua sobre  $\Omega$  y*

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega} \leq C \|u\|_{m,p,\Omega} \quad (5.1.5)$$

donde la constante  $C$  depende de  $m, d$  y  $\gamma$ .

**Demostración.** Ver Lema 4.3.4 en [11].  $\square$

A continuación enunciamos dos resultados ampliamente conocidos vinculados a aproximaciones polinomiales de funciones. Ambos resultados tienen la misma estructura, a saber,

*dada una función  $u$  perteneciente al espacio  $W^{m,p}(\Omega)$  existe algún polinomio  $P$  que cumple*

$$|u - P|_{r,p,\Omega} \leq Cd^s |u|_{t,p,\Omega}$$

donde  $s$  es un entero no negativo dependiente de  $m$  y  $r$ ;  $y$   $t$  es un entero no negativo dependiente de  $m$ .

La diferencia esencial entre los resultados que enunciaremos es que, precisando el polinomio  $P$  considerado, las expresiones para  $s$  y  $t$  difieren considerablemente. Como veremos en breve, las dos determinaciones de  $P$  involucradas se basan o hacen uso del *polinomio de Taylor centrado en un punto*, por lo que es razonable recordar la definición de éste e introducir la notación que usaremos al referirnos a él.

**Definición 5.1.1** Definimos el polinomio de Taylor de orden  $m$  de  $u$  centrado en  $y$  como

$$T_y^m(x) := \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y) (x - y)^\alpha \quad (5.1.6)$$

supuesto que  $u$  es una función para la cual se encuentran definidas las derivadas  $D^\alpha u$  indicadas.

**Observación 5.1.1** En (5.1.6) hemos usado la notación usual para un multi-índice de  $n$  componentes; a saber, si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$  entonces

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad y \quad X^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n})$$

donde  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Estamos ahora en condiciones de definir el *polinomio de Taylor promediado*.

**Definición 5.1.2** Supongamos que  $u$  tiene derivadas débiles de orden estrictamente menor a  $m$  en una región  $\Omega$  tal que  $B \subset\subset \Omega$ . El correspondiente polinomio de Taylor de orden  $m$  de  $u$  promediado sobre  $B$  está definido como

$$TP^m u := \int_B T_y^m(x) \phi(y) dy \quad (5.1.7)$$

donde  $B$  es una bola y  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  es una función soportada en  $B$  que verifica  $\int_{\mathbb{R}^2} \phi = 1$ .

Aclarada la notación y teniendo presente (5.1.7) procedemos a enunciar el siguiente resultado de aproximación polinomial.

**Lema 5.1.2 (Bramble-Hilbert)** Sea  $B$  una bola en  $\Omega$  siendo  $\Omega$  un dominio estrellado respecto a  $B$  tal que el radio  $\rho$  de  $B$  verifica  $\rho > \rho_{\text{máx}}/2$ . Sea  $TP^m u$  el polinomio de Taylor de orden  $m$  promediado sobre  $B$  ( $u \in W^{m,p}(\Omega)$  con  $p \geq 1$ ). Entonces

$$|u - TP^m u|_{k,p,\Omega} \leq C d^{m-k} |u|_{m,p,\Omega} \quad 0 \leq k \leq m \quad (5.1.8)$$

donde la constante  $C$  depende de  $m$  y  $\gamma$ .

**Demostración.** Ver Lema 4.3.8 en [11].  $\square$

El segundo y último resultado que queremos establecer hace uso de la siguiente *aproximación polinomial de Taylor promediada*

$$P^m u := \frac{1}{|B|} \int_B T_y^m(x) dy \quad (5.1.9)$$

donde  $T_y^m$  es como en (5.1.6) y, en este caso,  $B$  es un subconjunto cualquiera de  $\Omega$  de medida positiva.

**Observación 5.1.2** *Observemos que, tomando  $B$  como una bola, (5.1.9) puede escribirse*

$$P^m u = \int_B T_y^m(x) \frac{\chi_B(y)}{|B|} dy = \int_B T_y^m(x) \phi(y) dy \quad (5.1.10)$$

donde la función  $\phi = \frac{\chi_B}{|B|}$  verifica  $\int_{\mathbb{R}^2} \phi = 1$ . Esta escritura es similar a (5.1.7), sin embargo  $\phi \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Finalmente, enunciamos el resultado de aproximación polinomial vinculado al polinomio (5.1.9) como sigue

**Lema 5.1.3** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio convexo de diámetro  $d$  el cual es estrellado respecto a  $B$ . Dado un entero  $m \geq 0$  y  $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , existe una constante (dependiente solo de  $m$ ) que verifica*

$$\|u - P^m u\|_{r,p,\Omega} \leq C d^{m+1-r} |u|_{m+1,p,\Omega} \quad (5.1.11)$$

cualquiera sea  $0 \leq r \leq m+1$

**Demostración.** Ver Lema 2.1 en [10].  $\square$

## 5.2. Estimación del error en $L^p$ .

La estimación del error para la norma  $L^p$

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} \leq C h^{k+1} |u|_{k+1,p,K} \quad (5.2.12)$$

(cualquiera sea el orden  $k$  considerado) puede ser obtenido de la desigualdad de Sobolev y del lema de aproximación polinomial 5.1.3 gracias a la hipótesis de convexidad asumida sobre el cuadrilátero  $K$ .

Comenzamos enunciado el siguiente resultado el cual establece la estimación deseada pero para una subfamilia particular de elementos de referencia.

**Lema 5.2.1** *Sea  $K = K(1, 1, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo y sean  $\tilde{a}, \tilde{b}$  constantes positivas tales que  $\tilde{a}, \tilde{b} \leq 1$ . Entonces para cualquier  $p \geq 1$  vale*

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} \leq C |u|_{k+1,p,K} \quad (5.2.13)$$

siendo  $C$  una constante independiente de la geometría de  $K$ .

**Demostración.** Consideraremos el polinomio  $P^k u$  definido en (5.1.9) tomando como  $B$  a una bola fija contenida en el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ . Del hecho que  $Q_k P^k u = P^k u$  y la desigualdad triangular sigue que

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} \leq \|u - P^k u\|_{0,p,K} + \|Q_k(P^k u - u)\|_{0,p,K}. \quad (5.2.14)$$

Dado que  $k$  es un entero mayor o igual a 1 las condiciones requeridas en el Lema 5.1.1 son satisfechas trivialmente por lo que

$$\|P^k u - u\|_{0,\infty,K} \leq C \|P^k u - u\|_{k+1,p,K}. \quad (5.2.15)$$

siendo  $C$  una constante independiente de la geometría de  $K$ .

Por otro lado, observemos que  $\text{diam}(K) \sim 1$  pues  $0 \leq \tilde{a}, \tilde{b} \leq 1$ , entonces el Lema 5.1.3 permite escribir

$$\|u - P^k u\|_{0,p,K} \leq C |u|_{k+1,p,K} \quad (5.2.16)$$



y

$$\|u - P^k u\|_{k+1,p,K} \leq C|u|_{k+1,p,K} \quad (5.2.17)$$

siendo  $C$  una constante independiente de la geometría de  $K$ .

Notemos que (5.2.16) da la estimación para el primer término del miembro derecho de (5.2.14). Para obtener la estimación correspondiente al segundo término del mismo miembro basta observar, usando que el interpolador de Lagrange es  $C^0$  (ver [11, Sección 3.3]), que vale

$$\|Q_k(P^k u - u)\|_{0,p,K} \leq \|Q_k(P^k u - u)\|_{0,\infty,K} \leq C\|P^k u - u\|_{0,\infty,K}$$

y usar (5.2.15) junto a (5.2.17).  $\square$

Finalizamos esta sección mostrando que (5.2.13) puede ser extendido a cualquier cuadrilátero convexo.

**Lema 5.2.2** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo cualquiera de diámetro  $h$ , entonces para cualquier  $p \geq 1$  vale*

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,p,K} \quad (5.2.18)$$

siendo  $C$  una constante independiente de la geometría de  $K$ .

**Demostración.** Elegimos dos lados adyacentes de  $K$ , a los cuales llamaremos  $l_1$  y  $l_2$ , de modo que  $K$  se encuentre enteramente contenido en el paralelogramo generado por  $l_1$  y  $l_2$  (notemos que siempre es posible hacer esto y, en caso de haber más de una opción, elegimos  $l_1$  y  $l_2$  arbitrariamente). Es inmediato verificar que este paralelogramo tiene diámetro del mismo orden que  $h$ .

Consideramos la transformación afín  $L$  que aplica el segmento  $l_1$  en el segmento de extremos  $(0,0)$  y  $(1,0)$ ; y que aplica el segmento  $l_2$  en el segmento de extremos  $(0,0)$  y  $(0,1)$ . Llamamos  $\tilde{K} = L(K)$  (observamos que la transformación  $L$  aquí definida también fue considerada en [21] solo que en este trabajo la descripción de  $L$  fue dada en términos de ciertos triángulos -ver (9) en [21]-).

Notemos que  $\tilde{K}$  es un cuadrilátero del tipo  $K(1,1,\tilde{a},\tilde{b})$  para ciertas constantes  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$ . Más aún, es inmediato verificar que  $\tilde{a}, \tilde{b} \leq 1$  por lo que (5.2.18) vale sobre  $\tilde{K}$  gracias al Lema 5.2.1. Finalmente, la fórmula de cambio de variables y el hecho que el Jacobiano de  $L$  sea constante, permite obtener (5.2.18) sobre  $K$  lo que concluye la prueba.  $\square$

### 5.3. Teoremas principales.

En esta sección presentamos nuestros principales resultados en cuanto al error de interpolación en  $W^{1,p}$  para el  $Q_k$ -interpolador de Lagrange, el cual podemos escribir en la forma

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} + h|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,p,K}. \quad (5.3.19)$$

En la Sección 2.3.1, particularmente en el Lema 2.3.1, hemos visto que si dos cuadriláteros se encuentran vinculados por una transformación afín satisfaciendo las condiciones enunciadas en dicho lema, entonces el error de interpolación sobre un elemento puede ser deducido del error de interpolación sobre el elemento restante. Teniendo presente este hecho, a lo largo del Capítulo 3, hemos mostrado que bajo cualquiera de las siguientes condiciones: *RDP*, *DAC* y *mac*; tenemos garantizada la existencia de una transformación afín satisfaciendo los requerimientos del Lema 2.3.1 entre nuestro elemento y algún otro del tipo  $K(a,b,\tilde{a},\tilde{b})$ . Además, el elemento  $K(a,b,\tilde{a},\tilde{b})$  implicado debe satisfacer cierto conjunto de condiciones entre  $(D1)$ ,  $(D2)$ ,  $(D3)$ ,  $(\Delta1)$  y  $(\Delta2)$ . En consecuencia, combinando estos hechos, el estudio del error (5.3.19) se reduce a obtener esta

estimación para los elementos  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  cumpliendo determinadas condiciones; éste es exactamente el objeto del Capítulo 4. Por lo tanto, todo lo que resta hacer para obtener resultados en cuadriláteros generales, es vincular adecuadamente los resultados parciales que hemos obtenido hasta aquí.

Con el afán de simplificar la presentación de los mismos distinguiremos los casos  $k = 1$  y  $k > 1$  en los teoremas 5.3.1 y 5.3.2 respectivamente. Por último, en la sección siguiente mostramos una serie de contraejemplos a fin de mostrar la optimalidad de nuestros resultados.

Como hemos adelantado en el párrafo anterior, nuestro primer resultado está establecido para elementos isoparamétricos ( $k = 1$ ). Este teorema muestra que la propiedad de descomposición regular, *RDP*, es una condición suficiente para obtener la estimación del error (5.3.19) no solo cuando  $p = 2$  (siendo éste el principal resultado obtenido en [2]) sino también cuando  $p$  pertenece al intervalo  $[1, 3)$ ; además (como muestra el Contraejemplo 5.4.1) éste rango de  $p$  es óptimo en el sentido que no puede ser extendido a un intervalo más grande. Por otro lado, este teorema establece también que la constante en (5.3.19) depende de los ángulos interiores del cuadrilátero y, concretamente, si hay garantía de tener todos los ángulos interiores acotados lejos de cero y de  $\pi$  (es decir, si se cumple la doble condición del ángulo *DAC*) entonces (5.3.19) vale cualquiera sea  $p$  ( $p \geq 1$ ). Este es el principal resultado que hemos obtenido en el trabajo [3] y lo enunciamos como sigue

**Teorema 5.3.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo de diámetro  $h$  y sea  $k = 1$ .*

- (a) *Si  $K$  satisface  $RDP(N, \psi_M)$ , entonces (5.3.19) vale para cualquier  $1 \leq p < 3$  con  $C = C(N, \psi_M)$ .*
- (b) *Si  $K$  satisface  $DAC(\psi_m, \psi_M)$ , entonces (5.3.19) vale para cualquier  $p \geq 1$  con  $C = C(\psi_m, \psi_M)$ .*

**Demostración.** Dado que la estimación del error para la norma en  $L^p$  ya fue demostrada en el Lema 5.2.2 bajo la sola condición de convexidad sobre  $K$ , resta probar la estimación

$$|u - Q_1 u|_{1,p,K} \leq Ch|u|_{2,p,K}. \quad (5.3.20)$$

Para obtener (5.3.20) en la parte (a) basta observar, gracias al Teorema 3.1.1 y a lo desarrollado en la Sección 2.3.1, que podemos reducir nuestro estudio al caso en que  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y se verifican las condiciones  $[\Delta 1, D2]$ . Bajo estos supuestos, siempre que  $1 \leq p < 3$ , (5.3.20) está garantizado por la Proposición 4.2.2.

Similarmente, para obtener (5.3.20) en la parte (b) basta observar, gracias al Teorema 3.3.1 y a lo desarrollado en la Sección 2.3.1, que podemos reducir nuestro estudio al caso en que  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y se verifican las condiciones  $[D1, D2]$ . Finalmente, bajo estos supuestos, (5.3.20) vale cualquiera sea  $p \geq 1$  gracias a la Proposición 4.2.3.  $\square$

Teniendo en consideración el teorema previo resulta natural estudiar si la propiedad de descomposición regular resulta ser también condición suficiente a fin de obtener la estimación del error (5.3.19) para el caso de elementos subparamétricos ( $k > 1$ ). El Contraejemplo 5.4.2 muestra que no; concretamente, en este ejemplo mostramos elementos subparamétricos que satisfacen la *RDP* para los cuales no vale (5.3.19). Queda así abierto el problema de determinar condiciones geométricas que permitan a los elementos no ser regulares pero que permitan garantizar la estimación (5.3.19). Nuestro estudio sobre este problema nos permite enunciar el Teorema 5.3.2, principal resultado de [4], en el cual mostramos que (similarmente al caso de primer grado) la constante en (5.3.19) depende de los ángulos interiores del cuadrilátero y, nuevamente, si hay garantía de tener todos los ángulos interiores acotados lejos de cero y de  $\pi$  (es decir, si se cumple la doble condición del ángulo) entonces (5.3.19) vale cualquiera sea  $p$ . No obstante, este resultado puede

mejorarse notablemente cuando  $p$  pertenece al intervalo  $[1, 3)$  ya que en este caso la constante sólo depende del ángulo mínimo; en consecuencia, si el ángulo interior más chico del cuadrilátero se encuentra acotado lejos de cero (es decir, si se cumple la condición del ángulo mínimo *mac*) entonces (5.3.19) vale. Más aún, este resultado es lo mejor que puede obtenerse en los siguientes sentidos: si la *mac* no se cumple, entonces (5.3.19) puede no valer (ver Contraejemplo 5.4.2), y el rango de  $p$  considerado ( $1 \leq p < 3$ ) es lo más grande posible (ver Contraejemplo 5.4.3).

**Teorema 5.3.2** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo de diámetro  $h$  y sea  $k \geq 2$  un entero:*

- (a) *Si  $K$  satisface  $mac(\psi_m)$ , entonces (5.3.19) vale para cualquier  $1 \leq p < 3$  con  $C = C(\psi_m)$ .*
- (b) *Si  $K$  satisface  $DAC(\psi_m, \psi_M)$ , entonces (5.3.19) vale para cualquier  $p \geq 1$  con  $C = C(\psi_m, \psi_M)$ .*

**Demostración.** Dado que la estimación del error para la norma en  $L^p$  fue demostrada en el Lema 5.2.2 bajo la sola condición de convexidad sobre  $K$ , resta probar la estimación

$$|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^k |u|_{k+1,p,K}. \quad (5.3.21)$$

Para obtener (5.3.21) en la parte (a) basta observar, gracias al Teorema 3.4.1 y a lo desarrollado en la Sección 2.3.1, que podemos reducir nuestro estudio al caso en que  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y se verifican alguno de los siguientes conjuntos de condiciones:  $[\Delta 1, D2, D3]$  o  $[D1, D2]$ . Bajo cualquiera de estos supuestos, (5.3.21) está garantizado por la Proposición 4.2.1 (en efecto, bajo las condiciones  $[\Delta 1, D2, D3]$  usamos la parte (a) y bajo las condiciones  $[D1, D2]$  usamos la parte (b) de la mencionada proposición).

Similarmente, para obtener (5.3.21) en la parte (b) basta observar, gracias al Teorema 3.3.1 y a lo desarrollado en la Sección 2.3.1, que podemos reducir nuestro estudio al caso en que  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  y se verifican las condiciones  $[D1, D2]$ . Bajo estos supuestos, (5.3.21) está garantizado por la parte (b) de la Proposición 4.2.1 por lo que la demostración está completa.  $\square$

## 5.4. Optimalidad y otras cuestiones.

Con la intención de realizar una exposición lo más pródiga y ordenada posible, decidimos presentar todos los contraejemplos que justifican la optimalidad de nuestros resultados (en el sentido que fue aclarado oportunamente y que volveremos a mencionar para una mayor claridad) juntos en la presente sección. Además, cuando sea posible, señalaremos algunas implicancias o consecuencias relevantes vinculadas a la validez de la estimación (5.3.19) en relación a determinadas condiciones geométricas.

Comenzamos con el Contraejemplo 5.4.1 que tiene como objetivo mostrar que el rango de  $p$  en la parte (a) del Teorema 5.3.1, a saber  $[1, 3)$ , es lo más grande posible. La condición geométrica asumida en este caso es la propiedad de descomposición regular por lo que básicamente este ejemplo trata con una familia de cuadriláteros satisfaciendo la *RDP* para los cuales la estimación (5.3.20) no vale cuando  $p \geq 3$ .

**Contraejemplo 5.4.1** *Consideramos el elemento  $K = K(1, 1, s, s)$ , con  $\frac{1}{2} < s < 1$ . Informalmente hablando, veremos que cuando  $s$  tiende a  $1/2$ , la estimación dada en (5.3.20) no vale si  $p \geq 3$ .*

*Antes de mostrar esto observemos que  $K$  verifica la *RDP*  $(2, \pi/2)$  independientemente de  $s$ . En efecto, dividiendo a  $K$  por la diagonal  $d_1$  que conecta los vértices  $V_1 = (0, 0)$  y  $V_3 = (s, s)$  tenemos que*

$$\frac{|d_2|}{|d_1|} = \frac{1}{s} < 2$$

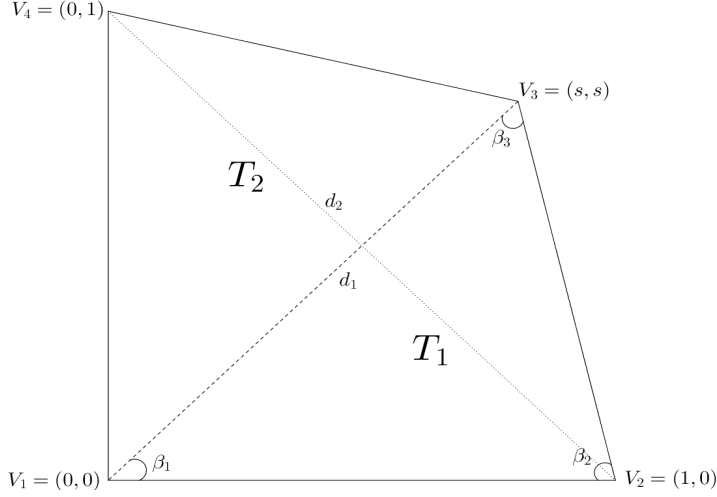


Figura 5.1: Notación asumida sobre el cuadrilátero  $K(1, 1, s, s)$  como  $\mathcal{Q}_1$ -elemento.

ya que  $s > 1/2$  ( $d_2$  denota la diagonal restante, ver Figura 5.1). Por otro lado, los triángulos  $T_1 = \Delta(V_1V_2V_3)$  y  $T_2 = \Delta(V_1V_3V_4)$  en los que queda dividido  $K$  son claramente congruentes entre sí por lo que solo resta ver que  $T_1$  verifica  $MAC(\pi/2)$ . El ángulo interior de  $T_1$ ,  $\beta_1$ , ubicado en  $V_1$  es  $\pi/4$  mientras que el ángulo interior ubicado en  $V_2$ ,  $\beta_2$ , es evidentemente mayor a  $\pi/4$  y menor a  $\pi/2$  (gracias a que  $\frac{1}{2} < s < 1$ ); en consecuencia, el ángulo restante,  $\beta_3$ , se encuentra superiormente acotado por  $\pi/2$  pues

$$\pi = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \beta_3 \implies \frac{\pi}{2} > \beta_3.$$

Hecho esto, consideremos ahora la función  $u(x, y) = xy$ . Notemos que esta función no pertenece al espacio  $\mathcal{Q}_1(K)$  ya que  $s < 1$ . En efecto, como  $s < 1$  y teniendo en cuenta que en este caso  $F_K(\hat{x}, \hat{y}) = ((s-1)\hat{x}\hat{y} + \hat{x}, (s-1)\hat{x}\hat{y} + \hat{y})$ , sigue que

$$u \circ F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (s-1)[(s-1)(\hat{x}\hat{y})^2 + \hat{x}^2\hat{y} + \hat{x}\hat{y}^2] + \hat{x}\hat{y} \notin \widehat{\mathcal{Q}}_1(\widehat{K}).$$

Por otro lado, si (5.3.20) valiera entonces

$$|u - Q_1u|_{1,p,K} \leq Ch|u|_{2,p,K}; \quad (5.4.22)$$

y en consecuencia

$$\left\| \frac{\partial(u - Q_1u)}{\partial x} \right\|_{0,p,K} \leq Ch|u|_{2,p,K}. \quad (5.4.23)$$

Usando desigualdad triangular, de (5.4.23), sigue que

$$\left\| \frac{\partial Q_1u}{\partial x} \right\|_{0,p,K} \leq Ch|u|_{2,p,K} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{0,p,K}. \quad (5.4.24)$$

Ahora, notemos que, para todo punto  $(x, y) \in K$  vale  $y \leq 1$  por lo que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{0,p,K} = \left( \int_K y^p \, dx dy \right)^{1/p} \leq \left( \int_K 1 \, dx dy \right)^{1/p} = |K|^{1/p} \leq 1; \quad (5.4.25)$$

y también es inmediato verificar que

$$|u|_{2,p,K} \leq 1. \quad (5.4.26)$$

Luego, (5.4.25) y (5.4.26) junto al hecho que  $h \sim 1$  permite concluir que el miembro derecho de (5.4.24) se encuentra uniformemente acotado por arriba, por lo tanto, el miembro izquierdo de (5.4.24),  $\left\| \frac{\partial Q_1 u}{\partial x} \right\|_{0,p,K}$ , también se encuentra superiormente acotado de manera uniforme. Nuestro siguiente paso es mostrar que en realidad esto último no sucede cuando  $p \geq 3$  con lo cual podemos concluir que (5.4.22) no vale.

Teniendo en cuenta que  $u(V_i) = 0$  para  $i = 1, 2, 4$ , sigue que  $Q_1 u = u(V_3)\phi_3 = s^2\phi_3$  siendo  $\phi_3$  la función base asociada a  $V_3$ ; por lo tanto

$$\left\| \frac{\partial Q_1 u}{\partial x} \right\|_{0,p,K} = s^2 \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{0,p,K}. \quad (5.4.27)$$

Dado que, para este caso la transformación  $F_K$  está dada por

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(1 + \hat{y}(s-1)), \hat{y}(1 + \hat{x}(s-1))),$$

sigue (de la regla de la cadena o ver (2.3.9) en la demostración del Lema 2.3.2) que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{[1 + \hat{x}(s-1)] \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{y}(s-1) \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y})}{1 + \hat{x}(s-1) + \hat{y}(s-1)} \\ &= \frac{[1 + \hat{x}(s-1)]\hat{y} - \hat{y}(s-1)\hat{x}}{1 + \hat{x}(s-1) + \hat{y}(s-1)} \\ &= \frac{\hat{y}}{1 + \hat{x}(s-1) + \hat{y}(s-1)}. \end{aligned}$$

Luego, haciendo cambio de variables y restringiendo el dominio respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\hat{y}^p}{(1 + \hat{x}(s-1) + \hat{y}(s-1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \\ &\geq \frac{1}{2^p} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + (s-1)\hat{x} + (s-1)\hat{y})^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}. \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

Integrando explícitamente en el último miembro de (5.4.28) para  $p > 3$  se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p \geq \frac{((2s-1)^{3-p} - (\frac{3}{2}s - \frac{1}{2})^{3-p} - s^{3-p} + (\frac{1}{2} + \frac{s}{2})^{3-p})}{2^p(3-p)(2-p)(s-1)^2}$$

por lo que es inmediato verificar que  $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{0,p,K}^p \rightarrow \infty$  cuando  $s \rightarrow \frac{1}{2}$ . Esto permite concluir, como ya hemos explicado anteriormente, que (5.3.19) no puede valer independientemente de  $s$  cuando  $p > 3$ .

Consideremos ahora el caso  $p = 3$ . Tenemos entonces (de la expresión para  $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{0,3,K}$  dada en (5.4.28)) que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{0,3,K}^3 &\geq \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + (s-1)\hat{x} + (s-1)\hat{y})^2} d\hat{x}d\hat{y} \\ &= \frac{\ln(\frac{3}{2}s - \frac{1}{2}) + \ln(s) - \ln(2s-1) - \ln(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2})}{(s-1)^2}. \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

Luego, el término logarítmico  $\ln(2s - 1)$  es el responsable del hecho que  $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{0,3,K}^3 \rightarrow \infty$  cuando  $s \rightarrow \frac{1}{2}$ , permitiéndonos concluir lo mismo sobre la no validez de (5.4.22).

**Observación 5.4.1** Notemos que el Contraejemplo 5.4.1 muestra también que la restricción sobre el ángulo máximo no puede ser relajada cuando  $k = 1$  y  $p \geq 3$ . En otras palabras, MAC es condición necesaria a fin de garantizar la validez de (5.3.20) para elementos isoparamétricos cuando  $p \in [3, \infty)$ .

El siguiente contraejemplo tiene como objetivo principal mostrar que la condición del ángulo mínimo (*mac*) resulta necesaria para garantizar la estimación del error (5.3.21) en elementos subparamétricos cuando  $p \in [1, 3)$ . En este sentido, la parte (a) de nuestro Teorema 5.3.2 es lo más óptima posible ya que establece que la *mac* es condición suficiente y necesaria para garantizar el error de interpolación (5.3.19) cuando  $k \geq 2$  y  $1 \leq p < 3$ . Concretamente, en el Contraejemplo 5.4.2 exhibimos una familia de cuadriláteros que no satisface la condición del ángulo mínimo (por tener un ángulo interior tendiente a cero) que, considerados como  $\mathcal{Q}_2$  elementos y para una adecuada función  $u$  que también exhibimos explícitamente, el interpolador  $Q_2 u$  no verifica (5.3.21). Como una consecuencia extra de este ejemplo podemos afirmar que la propiedad de descomposición regular (*RDP*) no es condición suficiente para garantizar la estimación (5.3.21) en elementos subparamétricos cuando  $1 \leq p < 3$  tal como señalamos en la Observación 5.4.2 ya que la familia considerada en este ejemplo verifica la *RDP* con constantes uniformes.

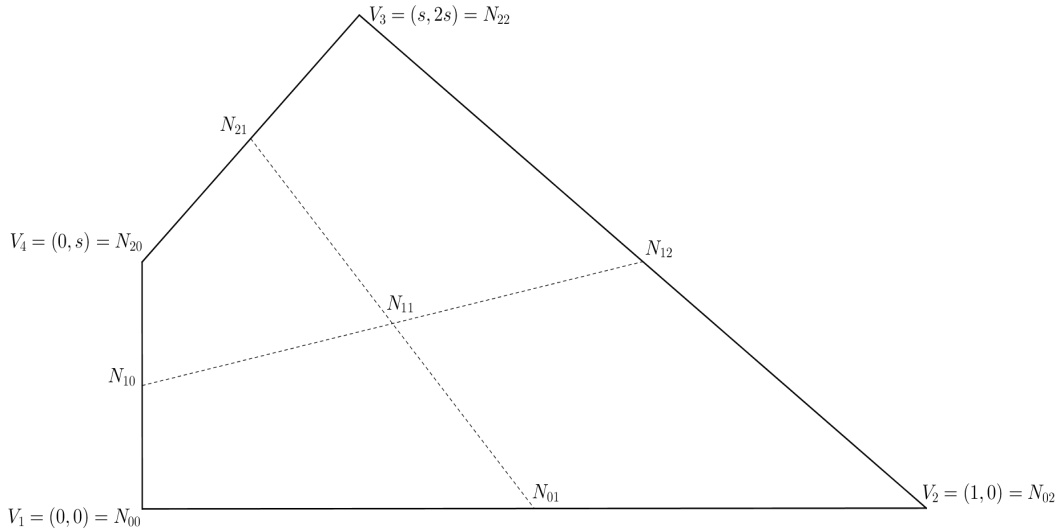


Figura 5.2: Representación del cuadrilátero  $K(1, s, s, 2s)$  y sus nodos como un  $\mathcal{Q}_2$ -elemento.

**Contraejemplo 5.4.2** A lo largo de este ejemplo asumiremos  $1 \leq p < 3$  (este requerimiento para  $p$  lo usaremos fuertemente al evocar la parte (a) del Lema 4.2.1).

Consideremos cuadriláteros del tipo  $K = K(1, s, s, 2s)$  con  $0 < s < 1/2$  vistos como  $\mathcal{Q}_2$  elementos (ver Figura 5.2). Es inmediato verificar que el ángulo ubicado en el vértice  $V_2$  tiende a cero cuando  $s \rightarrow 0$ .

Sobre cada elemento  $K$  consideraremos la función  $u(x, y) = x(x - 1/2)(x - 1)$  (la cual, por cierto, no pertenece al espacio  $\mathcal{Q}_2$ ) y dado que  $u(N_{0t}) = 0 = u(N_{t0})$  para  $0 \leq t \leq 2$  resulta

$$Q_2 u = u(N_{11})\phi_{11} + u(N_{12})\phi_{12} + u(N_{22})\phi_{22} + u(N_{21})\phi_{21}.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{s-1} \frac{\partial Q_2 u}{\partial y} = \frac{(s-3)(s+1)}{2^6} \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} + s \left( \frac{s+1}{2^3} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial y} + (s-1/2) \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} + \frac{(s-2)}{2^3} \frac{\partial \phi_{21}}{\partial y} \right).$$

Luego, gracias a la desigualdad triangular y para una adecuada constante  $C$  independiente de  $s$ , se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C \left[ \left\| \frac{\partial Q_2 u}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + s \left( \left\| \frac{\partial \phi_{12}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + \left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + \left\| \frac{\partial \phi_{21}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \right) \right]. \quad (5.4.30)$$

La parte (a) del Lema 4.2.1 nos permite escribir (para alguna constante  $C$ )

$$\left\| \frac{\partial \phi_{12}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + \left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + \left\| \frac{\partial \phi_{21}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq |\phi_{12}|_{1,p,K} + |\phi_{22}|_{1,p,K} + |\phi_{21}|_{1,p,K} \leq C \frac{h^{1/p}}{|l|^{1/q}}$$

siendo  $q$  el exponente dual de  $p$ . Teniendo en cuenta que  $h \sim 1$  y  $|l| \sim s$  sigue que

$$\left\| \frac{\partial \phi_{12}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + \left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + \left\| \frac{\partial \phi_{21}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C s^{-1/q}. \quad (5.4.31)$$

Combinando (5.4.31) con (5.4.30) tenemos (eligiendo adecuadamente la constante  $C$ )

$$\left\| \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C \left( \left\| \frac{\partial Q_2 u}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + s^{1/p} \right).$$

Asumamos que (5.3.21) vale para esta familia de elementos. En este caso tendríamos

$$\left\| \frac{\partial Q_2 u}{\partial y} \right\|_{0,p,K} = \left\| \frac{\partial(Q_2 u - u)}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq |Q_2 u - u|_{1,p,K} \leq C h^2 |u|_{3,p,K}$$

y dado que  $h^2 \sim 1$ ,  $|u|_{3,p,K} \sim |K|^{1/p} \sim s^{1/p}$  valdría

$$\left\| \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C s^{1/p} \quad (5.4.32)$$

(para una constante  $C$  adecuada).

Por otro lado, un cálculo directo y similar al que realizamos para la función  $\phi_3$  en el Contraejemplo 5.4.1 permite obtener la siguiente escritura

$$\left( \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = \frac{2^4 \hat{x} [(s-1)\hat{y}(\hat{x}-\hat{y}) + (1-\hat{x})(1-2\hat{y})]}{s[1+\hat{x}+(s-1)\hat{y}]}.$$

Luego,

$$\left\| \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p = \int_{[0,1]^2} \frac{2^{4p} \hat{x}^p |(s-1)\hat{y}(\hat{x}-\hat{y}) + (1-\hat{x})(1-2\hat{y})|^p}{s^{p-1} [1+\hat{x}+(s-1)\hat{y}]^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}$$

Sea  $R = [0, 1/8] \times [1/4, 3/8] \subset [0, 1]^2$ . No es difícil ver que sobre  $R$  se tiene

$$(s-1)\hat{y}(\hat{x}-\hat{y}) + (1-\hat{x})(1-2\hat{y}) > (s-1)\hat{y}(\hat{x}-\hat{y}) > 0 \quad (5.4.33)$$

que, combinado con el hecho  $1+\hat{x}+(s-1)\hat{y} \leq 1+\hat{x}$ , permite deducir

$$\left\| \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \geq \frac{2^{4p}(1-s)^p}{s^{p-1}} \int_R \frac{\hat{x}^p \hat{y}^p (\hat{x}-\hat{y})^p}{[1+\hat{x}]^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}. \quad (5.4.34)$$

Ahora, dado que la función  $\hat{y}^p(\hat{x} - \hat{y})^p$  se encuentra acotada inferiormente por una constante positiva sobre  $R$  y la función  $\hat{x}^p/(1 + \hat{x})^{p-1}$  es integrable sobre este dominio sigue que

$$\left\| \frac{\partial \phi_{11}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \geq C \frac{1}{s^{1/q}}. \quad (5.4.35)$$

Finalmente, combinando (5.4.32) con (5.4.35) y tomando  $s \rightarrow 0$  se llega a una contradicción que provino de suponer válida (5.3.21). En consecuencia, la estimación del error no puede valer con una constante  $C$  uniforme.

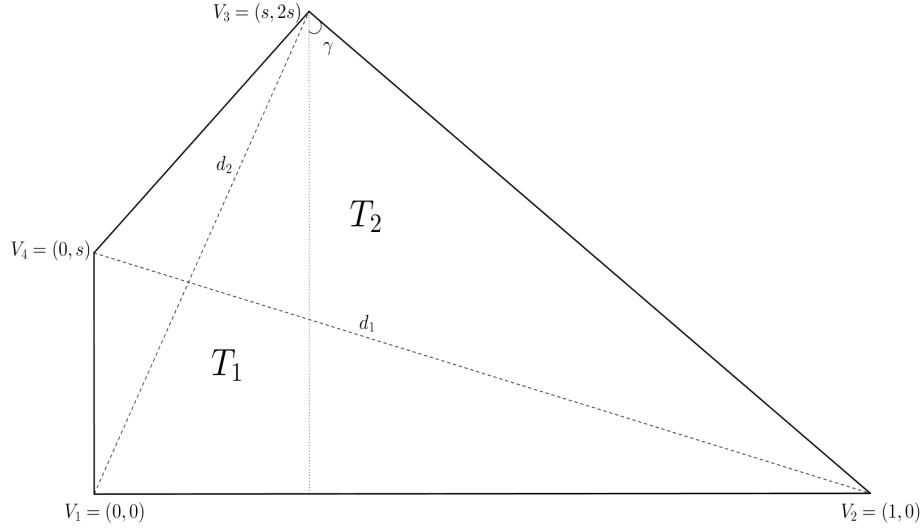


Figura 5.3: Notación para el cuadrilátero  $K(1, s, s, 2s)$ .

**Observación 5.4.2** Cada elemento en la familia  $\{K(1, s, s, 2s)\}_{0 < s < 1/2}$  verifica  $RDP(\sqrt{5}, 3/4\pi)$ . En efecto, consideremos un elemento del tipo  $K(1, s, s, 2s)$  con  $0 < s < 1/2$  y dividámoslo por la diagonal  $d_1$  que conecta los vértices  $V_2$  y  $V_4$ . Entonces, denotando por  $d_2$  a la diagonal restante, tenemos

$$\left( \frac{|d_2|}{|d_1|} \right)^2 = \frac{5s^2}{1 + s^2}$$

y como  $s^2/(1 + s^2) \leq 1$  sigue trivialmente que  $|d_2|/|d_1| \leq \sqrt{5}$ . Resta mostrar que los triángulos  $T_1 = \Delta(V_1V_2V_4)$  y  $T_2 = \Delta(V_2V_3V_4)$  verifican  $MAC(3/4\pi)$ . Para  $T_1$  podemos incluso mejorar la afirmación ya que verifica  $MAC(\pi/2)$  por ser triángulo rectángulo. Para mostrar que  $T_2$  verifica  $MAC(3/4\pi)$  alcanza con mostrar que los ángulos ubicados en  $V_3$  y  $V_4$  están acotados por  $3/4\pi$  ya que el ángulo restante es claramente menor que estos dos. Que el ángulo ubicado en  $V_4$  es menor a  $3/4\pi$  sigue del hecho que este ángulo es menor al ángulo interior del cuadrilátero  $K(1, s, s, 2s)$  ubicado en el mismo vértice el cual es exactamente  $3/4\pi$ . Para ver que el ángulo  $\beta_3$  ubicado en  $V_3$  está acotado por  $3/4\pi$  observemos que

$$\beta_3 = \pi/4 + \gamma > 3/4\pi \implies \gamma > \pi/2 \quad (5.4.36)$$

siendo  $\gamma$  el ángulo comprendido entre  $V_2V_3$  y el segmento perpendicular a  $V_1V_2$  que pasa por  $V_3$  (ver Figura 5.3). Es fácil ver que  $\tan(\gamma) = \frac{1-s}{2s}$  y dado que  $0 < s < 1/2$ , tenemos  $\tan(\gamma) > 1/2$  lo cual está en contradicción con (5.4.36); en consecuencia, (5.4.36) no puede valer mostrando que  $\beta_3 \leq 3/4\pi$ .

Ahora, por lo visto en el Contraejemplo 5.4.2, sabemos que la constante involucrada en el error (5.3.19) no se encuentra uniformemente acotada; en consecuencia, la  $RDP$  no es condición suficiente bajo la cual la estimación del error de interpolación en elementos subparamétricos valga.



**Observación 5.4.3** Recordemos que para el caso isoparamétrico ( $k = 1$ ), cuando  $1 \leq p < 3$ , la constante en la estimación del error puede ser acotada de manera uniforme usando solo las constantes  $N$  y  $\psi_M$  involucradas en la  $RDP(N, \psi_M)$  (ver parte (a) en el Teorema 5.3.1). La no existencia de nodos interiores en este caso es uno de los factores importantes para obtener tal estimación ya que, como puede apreciarse en el contraejemplo anterior, donde  $k = 2$ , el rol del nodo interior es fundamental en la construcción de dicho ejemplo. Tal vez esta observación lleve al lector a pensar que remover los nodos interiores pueda ayudar a debilitar las condiciones bajo las cuales la estimación (5.3.21) valga; lamentablemente, esto no es posible. En nuestro caso particular, si considerásemos el elemento finito cuyos nodos coinciden con los indicados para  $K(1, s, s, 2s)$  salvo el nodo interior, el cual es intencionalmente omitido (lo que conlleva una elección alternativa de las funciones nodales o base, ver [11, Sección 3.5] para detalles) estaríamos considerando el elemento finito conocido como serendipity.

Del trabajo [5], sabemos que la precisión de los elementos serendipity puede ser seriamente deteriorada incluso para elementos regulares. La razón de este deterioro es la no inclusión del espacio  $\mathbb{P}_k$  en el espacio de interpolación. Nuestra prueba se basa en gran medida sobre esta propiedad (ver, por ejemplo, la derivación de (4.2.17) en la Sección 4.2.1 del Capítulo 4).

El último contraejemplo que presentamos es para mostrar que el rango de  $p$  en la parte (a) del Teorema 5.3.2 no puede ser extendido. Ese ítem del teorema afirma que la condición del ángulo mínimo es condición suficiente para garantizar la estimación del error cuando  $k > 1$  y  $1 \leq p < 3$ ; por lo tanto, presentamos una familia de elementos subparamétricos que verifican la *mac* y para la cual la estimación (5.3.21) no vale cuando  $p \geq 3$ . En este sentido, el Contraejemplo 5.4.3 tiene el mismo espíritu que el Contraejemplo 5.4.1; más aún, los cuadriláteros considerados en ambos ejemplos son básicamente los mismos solo que en el primer caso los tomamos como  $\mathcal{Q}_1$ -elementos mientras que en esta ocasión los tomaremos como  $\mathcal{Q}_2$ -elementos para satisfacer el requerimiento  $k > 1$ .

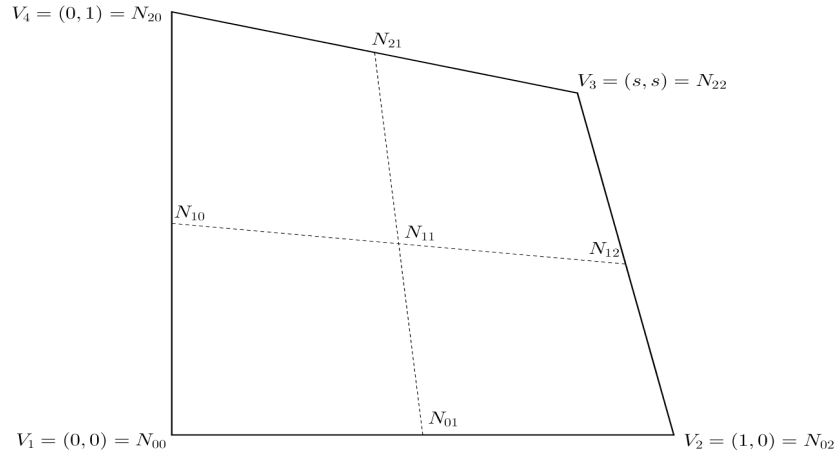


Figura 5.4: Representación del cuadrilátero  $K(1, 1, s, s)$  y sus nodos como  $\mathcal{Q}_2$ -elemento.

**Contraejemplo 5.4.3** Consideremos la familia  $K(1, 1, s, s)$ , con  $\frac{1}{2} < s \leq 5/8$ . Observemos que el ángulo máximo de  $K = K(1, 1, s, s)$  (el cual se encuentra ubicado en el vértice  $V_3$ ) se aproxima a  $\pi$  cuando  $s \rightarrow \frac{1}{2}$  mientras que  $K$  verifica trivialmente *mac*( $\pi/4$ ) para cualquier valor de  $s$  en el rango especificado.

Consideremos ahora la función  $u(x, y) = x(x - 1/4)(x - 3/4)(x - 3/8)(x - 1)$ . Dado que  $u(N_{0t}) = 0 = u(N_{t0})$  para  $0 \leq t \leq 2$  resulta que

$$\mathcal{Q}_2 u = u(N_{11})\phi_{11} + u(N_{12})\phi_{12} + u(N_{21})\phi_{21} + u(N_{22})\phi_{22};$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial(Q_2u)}{\partial y} = u(N_{11})\frac{\partial\phi_{11}}{\partial y} + u(N_{12})\frac{\partial\phi_{12}}{\partial y} + u(N_{21})\frac{\partial\phi_{21}}{\partial y} + u(N_{22})\frac{\partial\phi_{22}}{\partial y}. \quad (5.4.37)$$

Es inmediato verificar que  $u(N_{11}), u(N_{12})$  y  $u(N_{21})$  son expresiones polinómicas en la variable  $s$  que tienen a  $1/2$  como raíz simple. Justificaremos nuestra afirmación exhibiendo la cuenta para  $u(N_{11})$ , los casos restantes son similares por lo que omitiremos el cálculo para los mismos. Dado que  $N_{11} = (\frac{s+1}{4}, \frac{s+1}{4})$  sigue, evaluando  $u$ ,

$$u(N_{11}) = \frac{1}{4^5} s(s+1)(s-3)(s-2)(s-1/2) \quad (5.4.38)$$

lo que justifica nuestra afirmación.

Luego, para cada  $(i, j) \in I = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ , podemos escribir

$$u(N_{ij}) = (s-1/2)q_{ij}(s) \quad (5.4.39)$$

siendo  $q_{ij}$  algún polinomio adecuado (de (5.4.38) sabemos que  $q_{11}(s) = \frac{1}{4^5} s(s+1)(s-3)(s-2)$ ). En cuanto a  $u(N_{22})$  tenemos que

$$|u(N_{22})| > C > 0 \quad (5.4.40)$$

para alguna constante  $C$  ya que  $\frac{1}{2} < s \leq 5/8$ .

Luego, usando desigualdad triangular en (5.4.37) y gracias a (5.4.39) y (5.4.40), se tiene

$$\left\| \frac{\partial\phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C \left[ \left\| \frac{\partial Q_2 u}{\partial y} \right\|_{0,p,K} + (s-1/2) \sum_{(i,j) \in I} \left\| \frac{\partial\phi_{ij}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \right] \quad (5.4.41)$$

para alguna constante  $C$ .

Si la estimación del error (5.3.21) valiera (recordemos que aquí  $p \geq 3$ ) entonces

$$\left\| \frac{\partial Q_2 u}{\partial y} \right\|_{0,p,K} = \left\| \frac{\partial Q_2 u - u}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq |Q_2 u - u|_{1,p,K} \leq C|u|_{3,p,K},$$

pues  $h \sim 1$ . En consecuencia

$$\left\| \frac{\partial Q_2 u}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C \quad (5.4.42)$$

ya que  $|u|_{3,p,K} \sim |K| \leq 1$ .

Por otro lado, recordemos que gracias a (3.3.35) en la Sección 3.3.2 del Capítulo 3 tenemos

$$I_p \leq \frac{1}{|l|^{p-1} \sin(\alpha)^{p-1}}. \quad (5.4.43)$$

Dado que  $\alpha$  es el ángulo comprendido entre  $V_2V_4$  y  $V_3V_4$ , es inmediato verificar que  $\sin(\alpha) = \frac{|V_3(1/2, 1/2)|}{|V_3V_4|} = \frac{(s-1/2)\sqrt{2}}{\sqrt{s^2+(1-s)^2}}$  (ver Figura 5.5); ahora, como  $\sqrt{s^2+(1-s)^2}$  se encuentra uniformemente acotado sigue que  $\sin(\alpha) \sim (s-1/2)$ .

Combinando este hecho con (5.4.43) y notando que  $|l| \sim 1$  resulta que

$$I_p \leq C \frac{1}{(s-1/2)^{p-1}}. \quad (5.4.44)$$

Luego, la estimación previa junto al Lema 2.3.2 permiten obtener

$$\sum_{(i,j) \in I} \left\| \frac{\partial\phi_{ij}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C \frac{1}{(s-1/2)^{1/q}} \quad (5.4.45)$$

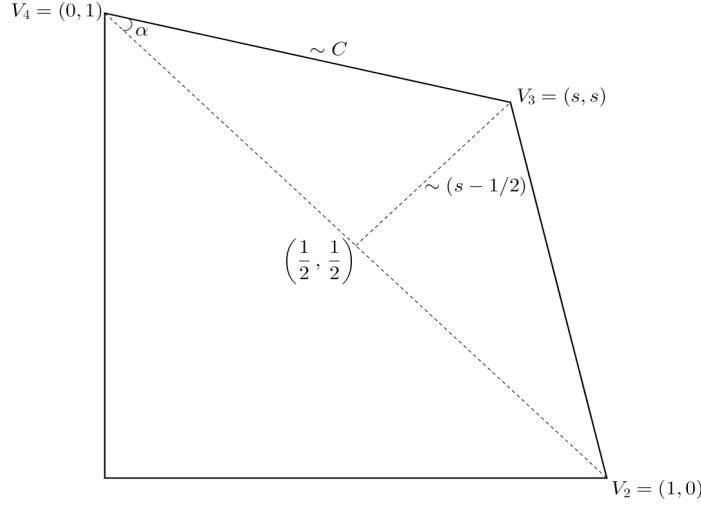


Figura 5.5: Ilustración del hecho  $\sin(\alpha) \sim (s - 1/2)$  en  $K(1, 1, s, s)$ .

donde  $q$  es el exponente dual de  $p$ . Finalmente, de (5.4.41) combinado con (5.4.42) y (5.4.45) sigue que

$$\left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K} \leq C \quad (5.4.46)$$

para alguna constante  $C$  positiva.

Similarmente a cómo lo hicimos en los ejemplos previos, un cálculo directo muestra que

$$\left( \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = \frac{2\hat{x} [(s-1)\hat{y}(\hat{x}-\hat{y}) + (2\hat{x}-1)(4\hat{y}-1)]}{1 + (s-1)(\hat{x} + \hat{y})}$$

y entonces, gracias a la fórmula de cambio de variables, se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(2\hat{x} [(s-1)\hat{y}(\hat{x}-\hat{y}) + (2\hat{x}-1)(4\hat{y}-1)])^p}{(1 + (s-1)(\hat{x} + \hat{y}))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}.$$

Sea  $T$  el triángulo de vértices  $(3/4, 3/4)$ ,  $(3/4, 1)$  y  $(1, 1)$ . Existe entonces, una constante  $C$  positiva para la cual vale

$$\left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \geq C \int_T \frac{1}{(1 + (s-1)(\hat{x} + \hat{y}))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}. \quad (5.4.47)$$

Integrando explícitamente cuando  $p > 3$  se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \geq C \frac{(2s-1)^{3-p}/2 + (3s-1)^{3-p}/2^{4-p} - (7s-3)^{3-p}/4^{3-p}}{(s-1)^2(2-p)(3-p)}$$

de modo que  $\left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \rightarrow \infty$  cuando  $s \rightarrow 1/2$ . Este hecho está en contradicción con (5.4.46) lo que nos permite concluir que la estimación del error no vale.

Finalmente, el caso  $p = 3$  sigue en forma completamente similar. La principal diferencia está en la integración del último miembro de (5.4.47) pues en este caso se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \geq C \frac{1}{(s-1)^2} [\ln((7s-3)/4) - \ln((3s-1)/2)/2 - \ln(2s-1)/2].$$

Sin embargo,  $\left\| \frac{\partial \phi_{22}}{\partial y} \right\|_{0,p,K}^p \rightarrow \infty$  cuando  $s \rightarrow 1/2$  gracias al término  $\ln(2s-1)$  lo que nos permite arribar a la misma conclusión del caso previo.

**Observación 5.4.4** *Teniendo en cuenta el ejemplo anterior podemos concluir que lo señalado en la Observación 5.4.1 acerca de la necesidad de la MAC para tener la estimación del error (5.3.21) puede ser extendido a todos los grados cuando  $p \geq 3$ .*

## Capítulo 6

# Error anisotrópico bajo la $DAC$ en cuadriláteros con lados opuestos casi paralelos.

Sobre rectángulos la estimación clásica del error puede ser, en cierto sentido, mejorada por una estimación del tipo *anisotrópica*. En este tipo de estimación, esencialmente, se mide el error sobre los dos lados más significativos del rectángulo enfatizando tanto la medida del elemento sobre cada una de estas direcciones como también la variación de la función en cada dirección. Una de las ventajas que tiene contar con este tipo de estimación es que resulta posible refinar los elementos en una dirección sin alterar el comportamiento del error en la dirección restante.

Estimaciones anisotrópicas han sido probadas no sólo para rectángulos sino también para mapeos afines de éstos (paralelogramos) y para ciertas perturbaciones de rectángulos en un sentido que es necesario precisar y que lo haremos oportunamente.

En este capítulo mostraremos que es posible obtener una estimación anisotrópica para el interpolador de primer orden en el espacio  $H^1$ , sobre aquellos cuadriláteros que verifican la doble condición del ángulo ( $DAC$ ) y que tienen un par de lados opuestos casi paralelos. Concretamente, veremos que si un cuadrilátero  $K$ , verificando la  $DAC(\psi_m, \psi_M)$ , se encuentra contenido en un paralelogramo determinado por dos de sus lados vecinos  $l_1$  y  $l_2$  de modo que

$$\frac{1}{2} + \epsilon \leq \frac{\text{dist}(P, l_1)}{\text{dist}(P', l_1)} \leq 1$$

para algún  $\epsilon$  positivo siendo  $P$  y  $P'$  los vértices de  $K$  opuestos a  $l_1$ ; entonces existe una constante  $C$  dependiente solo de  $\psi_m$ ,  $\psi_M$  y  $\epsilon$  que cumple

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq C \left[ |l_1| \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0,K} + |l_2| \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0,K} \right] \quad (6.0.1)$$

donde  $\partial_{l_i}$  denota la derivada direccional en la dirección  $l_i$ .

Denotando por  $h$  al diámetro de  $K$  entonces  $|l_1|, |l_2| \leq h$ ; luego, de (6.0.1) sigue que

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq Ch \left[ \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0,K} + \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0,K} \right]$$

y en consecuencia

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq Ch |u|_{2,K}. \quad (6.0.2)$$

Es decir, una estimación del tipo anisotrópica (6.0.1) implica la estimación clásica (6.0.2) como la que hemos obtenido en el Teorema 5.3.1. Observemos que la implicación recíproca no es

necesariamente válida. Para ver esto basta considerar elementos donde las medidas de  $l_1$  y  $l_2$  sean considerablemente distintas, es decir, elementos anisotrópicos (recordemos que nos referimos a un elemento como *anisotrópico* si no satisface la condición de regularidad). En estos casos y para ciertas aplicaciones (ver por ejemplo [6, 7, 8, 14] y las referencias allí citadas), una estimación del tipo (6.0.1) es preferible y deseable en contraposición a (6.0.2). Por último, señalamos que sobre elementos regulares las estimaciones (6.0.1) y (6.0.2) esencialmente coinciden ya que  $|l_1| \sim |l_2|$  y  $\|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0,K} + \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0,K} \sim |u|_{2,K}$ .

El esquema de demostración para (6.0.1) es similar al que adoptamos para probar la estimación clásica del error; a saber, mostramos que podemos reducir el estudio a cierta clase de elementos de referencia y probamos la validez de la estimación sobre esta configuración. Queda entonces en evidencia que una de las partes centrales es hallar una caracterización adecuada de los elementos considerados en término de los cuadriláteros de referencia. La caracterización que damos aquí nos permite mostrar que los elementos de referencia que debemos contemplar o bien son regulares o bien son perturbaciones de un rectángulo en el mismo sentido que ya hemos mencionado. En el primero de los casos, es decir, cuando el elemento satisfaga la condición de regularidad; la validez de la estimación del error (6.0.1) es consecuencia de la validez de la estimación (6.0.2) ya que ambas son esencialmente la misma como afirmamos anteriormente, y (6.0.2) fue demostrada para este tipo de elementos en [16] (ver Teorema 6.1.1). En el segundo de los casos, es decir, cuando estemos en presencia de perturbaciones de un rectángulo (en un sentido que precisaremos oportunamente), mostraremos que esta clase de elementos cumplen las condiciones requeridas en [7] bajo las cuales se demostró, en el mismo trabajo, la validez de un resultado que nos permite concluir (6.0.1).

Si bien la estimación que presentamos aquí se basa, como acabamos de mencionar, fuertemente en la validez de una estimación sobre perturbaciones de un rectángulo creemos que nuestra versión es más adecuada ya que está escrita en términos de los lados del cuadrilátero propiamente dicho y no de los lados de un rectángulo del cual el cuadrilátero es obtenido mediante una perturbación pero que no es explícitamente dado. Además, las condiciones que requerimos sobre los cuadriláteros tienen una clara interpretación geométrica y son de inmediata verificación; mientras que las condiciones requeridas en [7] sobre los cuadriláteros resultan más complejas de verificar o testear y carecen de una interpretación geométrica inmediata y clara.

Por último, los resultados mencionados previamente y desarrollados a lo largo de este capítulo están siendo transcritos al trabajo [19] que esperamos concluir en breve.

## 6.1. Antecedentes extendidos.

A fin de unificar notación y tener presentes ciertos resultados, presentamos en esta sección en forma resumida y lo más fiel posible a la versión original, algunos de los resultados publicados en [16] y [7], que como ya adelantamos nos serán de utilidad a fin de probar que la estimación anisotrópica vale bajo la *DAC* en cuadriláteros con un par de lados casi paralelos.

Aunque hemos usado en reiteradas oportunidades la misma notación que la involucrada en el siguiente teorema, recordamos brevemente que  $h$  denota el diámetro de  $K$  y  $\rho$  es el máximo entre los diámetros de todas las bolas contenidas en  $K$ .

**Teorema 6.1.1** *Asumamos que el cuadrilátero  $K$  satisface la condición*

$$\rho/h \geq \sigma \tag{6.1.3}$$

donde  $\sigma$  es una constante. Entonces, existe una constante  $C = C(\sigma)$  la cual depende solo de  $\sigma$ , tal que

$$|u - Q_1 u|_{m,K} \leq Ch^{2-m} |u|_{2,K} \quad \text{para } m = 0 \text{ y } 1 \text{ y para toda } u \in H^2(K). \tag{6.1.4}$$

**Demostración.** Ver Teorema 1 en [16].  $\square$

En pocas palabras, el teorema previo garantiza la estimación clásica del error de interpolación para elementos que satisfacen la condición de regularidad (6.1.3).

**Observación 6.1.1** Aunque sabemos que (6.1.3) implica la RDP y que, en consecuencia, el Teorema 5.3.1 garantiza la validez de (6.1.4); preferimos presentar el Teorema 6.1.1 a fin de independizarnos del Teorema 5.3.1 y apelando a un resultado ampliamente conocido como ciertamente es el Teorema 6.1.1.

En cuanto a la estimación anisotrópica

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq C \left[ |l_1| \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0,K} + |l_2| \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0,K} \right]; \quad (6.1.5)$$

observemos que si ésta vale sobre el cuadrilátero  $K$  es porque las direcciones  $l_1$  y  $l_2$  resultan significativas para dicho elemento, no solo porque aparecen las medidas de tales segmentos sino también porque éstas se encuentran íntimamente vinculadas con la variación de la función en las direcciones determinadas por  $l_1$  y  $l_2$ . Ahora, si en un cuadrilátero existen estas dos direcciones particularmente diferenciadas y que sirven para describir la geometría de dicho elemento (tal vez) resulta intuitivo pensar que ese cuadrilátero no difiere significativamente del paralelogramo determinado por tales direcciones. Esta intuición respecto a la geometría del cuadrilátero puede verse corroborada con las condiciones usualmente pedidas a esta clase de elementos para garantizar (6.1.5). Concretamente, y hasta donde sabemos, los elementos para los cuales (6.1.5), o estimaciones anisotrópicas similares, fue obtenida son rectángulos o pequeñas perturbaciones de éstos. Si bien hablar de *perturbaciones de rectángulos* puede ser amplio y poco preciso, nos interesa destacar el sentido otorgado en [7] a esta expresión. Básicamente, en el trabajo [7], un cuadrilátero  $K$  es considerado como una perturbación de un rectángulo en el siguiente sentido:

existe una forma bilineal  $F_K$  que aplica el cuadrado unitario  $\widehat{K}$  en  $K$  la cual puede escribirse como

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (a\hat{x}, b\hat{y}) + \sum_{i=1}^4 a^{(i)} \widehat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \quad (b \leq a) \quad (6.1.6)$$

donde  $\widehat{\phi}_i$  denota la función base asociada al nodo  $\widehat{V}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ; y, para los vectores *distorsivos*  $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ , existen constantes  $a_0, a_1, a_2$  tales que

$$|a_i^{(j)}| \leq a_i b, \quad 0 \leq a_i \lesssim 1, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (6.1.7)$$

y

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{a} a_1 - a_2 \geq a_0 > 0. \quad (6.1.8)$$

Notemos que el primer término en el lado derecho de (6.1.6) (i.e.  $(a\hat{x}, b\hat{y})$ ) corresponde a la transformación que aplica  $\widehat{K}$  en el rectángulo  $R_{ab} = [0, a] \times [0, b]$ ; mientras que el segundo término (i.e.  $\sum_{i=1}^4 a^{(i)} \widehat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y})$ ) es la perturbación de  $R_{ab}$  propiamente dicha. La interpretación geométrica de las condiciones (6.1.7) y (6.1.8) no es evidente ni clara; sin embargo, dos hechos sencillos e inmediatos pueden ser señalados al respecto: (6.1.7) establece que los vértices de  $R_{ab}$  son perturbados por un factor que es del orden del lado más corto de  $R_{ab}$  (debido a que  $b \leq a$ ); mientras que (6.1.8) se encuentra relacionado tanto con la convexidad del elemento como con su achatamiento o estrechez. Finalmente, notemos que en el caso  $b \ll a$ , la restricción sobre  $a_1$  impuesta por (6.1.8) es poco significativa.

Si bien la interpretación geométrica de las condiciones (6.1.7) y (6.1.8) no es evidente como tampoco lo es su verificación empírica, dichas condiciones permiten que la geometría de los elementos sea considerablemente distinta a la de un rectángulo. Para ilustrar este hecho, apelaremos a un ejemplo dado en [7] que, esencialmente, transcribimos seguidamente.

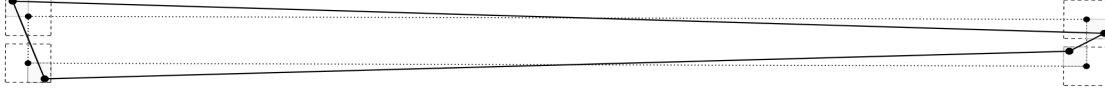


Figura 6.1: Ilustración de un elemento considerado en el Ejemplo 6.1.1.

**Ejemplo 6.1.1** Consideremos la familia de cuadriláteros que son perturbaciones del rectángulo  $R_{ab}$  con  $b \ll a$ , mediante el mapeo (6.1.6), donde los vectores distorsivos son

$$a^{(1)} = a^{(3)} = ((1/2 - \epsilon)b, -(1/2 - \epsilon)b) \quad (6.1.9)$$

y

$$a^{(2)} = a^{(4)} = (-(1/2 - \epsilon)b, (1/2 - \epsilon)b) \quad (6.1.10)$$

con  $\epsilon \in (0, 1/2)$ .

Afirmamos que, fijado  $\epsilon$ , esta familia de cuadriláteros verifican las condiciones (6.1.7) y (6.1.8). En efecto, es inmediato chequear que

$$|a_i^{(j)}| \leq \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) b \quad i = 1, 2, j = 1, \dots, 4$$

por lo que (6.1.7) se cumple trivialmente con  $a_1 = 1/2$  y  $a_2 = 1/2 - \epsilon$  (también es posible considerar  $a_1 = a_2 = 1/2 - \epsilon$ ).

Por otro lado, para ver que (6.1.8) vale, observemos que si  $b/a \leq \epsilon$  (en este sentido decimos que  $b \ll a$ ) entonces

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{a} a_1 - a_2 = \epsilon - \frac{b}{a} 1/2 \geq \epsilon/2;$$

i.e. (6.1.8) se verifica con  $a_0 = \epsilon/2$ .

En la Figura 6.1 se ilustra un elemento perteneciente a la clase antes descrita que puede considerarse extremo ya que (informalmente hablando) corresponde a valores de  $\epsilon$  pequeños.

Para un elemento  $K$  satisfaciendo simultáneamente (6.1.7) y (6.1.8), fue probada en [7] la siguiente estimación anisotrópica

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq C \left[ a \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u \right\|_{0,K} + b \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \right\|_{0,K} \right] \quad (6.1.11)$$

siendo  $C$  una constante uniforme. Concretamente, el resultado que estamos evocando es el Teorema 2.8, [7], que transcribimos a continuación (preservando mayoritariamente la notación usada allí)



**Teorema 6.1.2** Consideremos un elemento rectangular  $\tilde{e}$  con lados de longitud  $a$  y  $b$ ,  $a \geq b$ , los cuáles son paralelos a los ejes en el  $x_1, x_2$ -sistema coordinado. Las coordenadas de los cuatro vértices son perturbadas por vectores  $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})^T$  satisfaciendo (6.1.7), (6.1.8). El elemento resultante es denotado por  $e$ . Sea  $u \in W^{\ell,p}(e) \cap \mathcal{C}(\bar{e})$  donde  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \ell \leq k+1$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Fijemos  $m \in \{0; 1\}$  y  $q \in [1, \infty]$  tal que  $m < \ell$  y  $W^{\ell-m,p}(e) \hookrightarrow L^q(e)$ . Entonces la estimación anisotrópica del error de interpolación

$$|u - I_h u; W^{m,q}(e)| \lesssim (\text{meas}_2 e)^{1/q-1/p} \sum_{|\alpha|=\ell-m} (a, b)^\alpha |D^\alpha u; W^{m,p}(e)| \quad (6.1.12)$$

vale siempre que  $p > 2$  si  $\ell = 1$ . El resultado también es válido para  $m = \ell = 0$ ,  $p = \infty$ ,  $q \in [1, \infty]$ .

**Observación 6.1.2** En el Teorema 6.1.2 debe entenderse que  $k$  es el grado del polinomio  $I_h u$  siendo  $I_h u$  el interpolador de Lagrange; en nuestra notación,  $I_h u = Q_1 u$ .

## 6.2. Reducción a la configuración de referencia.

Siguiendo de cerca el esquema de trabajo para obtener la estimación clásica del error de interpolación, mostraremos que en este caso también podemos reducir nuestro estudio a elementos del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ . Es decir, suponiendo que el cuadrilátero  $K$  verifica la DAC y que es equivalente al elemento  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  (en el sentido dado en el Teorema 3.3.1); si mostramos que (6.1.5) vale sobre  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  veremos que una estimación similar vale sobre  $K$ . Este es, básicamente, el objetivo de la presente sección.

Gracias al Teorema 3.3.1 tenemos, suponiendo que  $K$  verifica la DAC( $\psi_m, \psi_M$ ), que existe un cuadrilátero  $\bar{K} = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  (satisfaciendo las condiciones [D1, D2]) y una transformación afín  $L: \bar{K} \rightarrow K$  determinada por la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & \cot(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  tal que  $L(\bar{K}) = K$  siendo  $\beta$  el ángulo comprendido entre los lados  $l_1$  y  $l_2$  (recordemos que  $l_1$  y  $l_2$  son dos lados adyacentes de  $K$  tales que el paralelogramo generado por estos lados contiene enteramente a  $K$ ). Más aún, podemos asumir que  $l_1$  tiene como extremos a los vértices  $V_1 = (0, 0)$  y  $V_2 = (a, 0)$ , mientras que  $l_2$  tiene como extremos a los vértices  $V_1$  y  $V_4 = (b \cot(\beta), b)$  (con  $b > 0$ ).

**Observación 6.2.1** Sabemos que  $\bar{K} = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  también satisface la DAC con constantes  $\bar{\psi}_m$  y  $\bar{\psi}_M$  que dependen solo de  $\psi_m$  y  $\psi_M$ . De hecho, el Lema 3.1.2 permite generalizar, en forma inmediata, este resultado a cuadriláteros equivalentes arbitrarios. Establecemos formalmente esta propiedad a continuación ya que es un resultado interesante en sí mismo.

**Lema 6.2.1** Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos cuadriláteros convexos arbitrarios. Si  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes entonces  $K_1$  verifica la DAC si y sólo si  $K_2$  verifica la DAC.

Usaremos  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  para denotar la variable sobre  $\bar{K}$ , i.e.  $L(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (x_1, x_2)$  siendo  $L$  la transformación afín descrita anteriormente, y usaremos  $\bar{v}$  para denotar una función definida sobre  $\bar{K}$  la cual es construída a partir de una función  $v$  definida sobre  $K$  por  $\bar{v} = v \circ L$ . Aclaradas estas cuestiones estamos ahora en condiciones de mostrar que el error anisotrópico sobre  $K$  puede ser deducido del error sobre  $\bar{K}$ . En efecto, asumamos que

$$|\bar{u} - \bar{Q}_1 \bar{u}|_{1, \bar{K}} \leq C_1 \left[ a \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \nabla \bar{u} \right\|_{0, \bar{K}} + b \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \nabla \bar{u} \right\|_{0, \bar{K}} \right] \quad (6.2.13)$$

(es decir, asumamos que el error anisotrópico vale sobre  $\bar{K}$ ) siendo  $C_1$  una constante positiva.

Dado que la matriz asociada al mapeo  $L$  es  $B = \begin{pmatrix} 1 & \cot(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y, además,  $l_1 = V_1V_2 = (a, 0)$ ,  $l_2 = V_1V_4 = (b \cot(\beta), b)$  resulta que

$$a \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}_1} = l_1 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_1| \partial_{l_1} v \circ L \quad (6.2.14)$$

y

$$b \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}_2} = l_2 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_2| \partial_{l_2} v \circ L. \quad (6.2.15)$$

Cambiando variables y teniendo en cuenta que  $\det(B) = 1$ , de (6.2.14) y (6.2.15) sigue que

$$a \left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}_1} \right\|_{0, \bar{K}} + b \left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}_2} \right\|_{0, \bar{K}} = |l_1| \|\partial_{l_1} v\|_{0, K} + |l_2| \|\partial_{l_2} v\|_{0, K} \quad (6.2.16)$$

Finalmente, combinando (6.2.13), (6.2.16) y el Lema 2.3.1, tenemos

$$\begin{aligned} |u - Q_1 u|_{1, K} &\leq C_0 |\bar{u} - \bar{Q}_1 \bar{u}|_{1, \bar{K}} \\ &\leq C_0 C_1 \left[ a \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \nabla \bar{u} \right\|_{0, \bar{K}} + b \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \nabla \bar{u} \right\|_{0, \bar{K}} \right] \\ &\lesssim |l_1| \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0, K} + |l_2| \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0, K}; \end{aligned}$$

i.e. vale la siguiente estimación anisotrópica sobre  $K$

$$|u - Q_1 u|_{1, K} \leq C \left[ |l_1| \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0, K} + |l_2| \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0, K} \right] \quad (6.2.17)$$

siendo  $C$  una constante positiva que solo depende de  $\psi_m$  y  $\psi_M$ .

Mostrado esto, el resto del capítulo está destinado a obtener (6.2.13).

### 6.3. Caracterización geométrica.

Por lo expuesto en la sección previa centraremos nuestra atención en elementos del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones

$$(D1) \quad \frac{\tilde{a}}{a}, \frac{\tilde{b}}{b} \leq 1 \quad (6.3.18)$$

y

$$(D2) \quad \frac{1}{\sin(\alpha)} \leq C \quad (6.3.19)$$

siendo  $\alpha$  el ángulo entre la diagonal  $d_1$  de  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  que conecta  $V_2$  con  $V_4$  y el segmento  $l_{34}$  que tiene a  $V_3$  y a  $V_4$  como extremos (ver Figura 6.2).

Para esta clase de elementos, gracias al Lema 3.3.2, podemos suponer

$$a/b \leq C \quad (6.3.20)$$

(siendo  $C$  una constante positiva dependiente solo de  $\psi_m$  y  $\psi_M$ ).

A fin de ser consistentes con la notación usada en (6.1.6) respecto a los parámetros  $a$  y  $b$  (a saber,  $b \leq a$ ), aplicaremos a nuestro elemento una simetría respecto al eje  $y = x$  de modo que el elemento  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es aplicado en el elemento  $K(b, a, \tilde{b}, \tilde{a})$ . Para simplificar nuestra exposición denotaremos por  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  al elemento resultante luego de aplicar este movimiento rígido. Notemos que la condición (6.3.18) se preserva ya que hay simetría entre los roles de  $\tilde{a}/a$  y  $\tilde{b}/b$ ; no

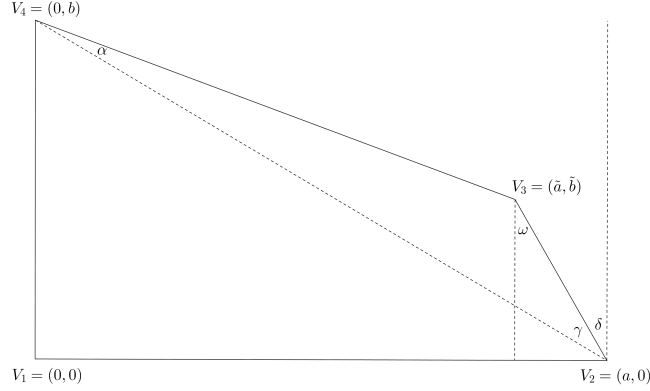


Figura 6.2: Notación para ángulos adoptada sobre  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ .

obstante, las condiciones (6.3.19) y (6.3.20) deben ser respectivamente re-escritas. La condición (6.3.19) asume la forma

$$(D2') \quad \frac{1}{\sin(\gamma)} \leq C \quad (6.3.21)$$

donde  $\gamma$  es el ángulo entre la diagonal  $d_1$  de  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  que conecta  $V_2$  con  $V_4$  y el segmento  $l_{23}$  que tiene a  $V_2$  y a  $V_3$  como extremos (ver Figura 6.2); mientras que la condición (6.3.20) asume la forma

$$b/a \leq C \quad (6.3.22)$$

con  $C = C(\psi_m, \psi_M)$ .

De aquí en adelante, cuando un elemento general del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  cumpla la *DAC*, asumiremos que dicho elemento satisface las condiciones  $[D1, D2']$  y (6.3.22).

A fin de poder demostrar el principal resultado de esta sección necesitamos lidiar con algunas cuestiones técnicas previamente. El siguiente lema tiene por objeto proveer una estimación elemental pero útil.

**Lema 6.3.1** *Sea  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo verificando las condiciones  $[D1, D2']$ . Existe entonces una constante positiva  $a_1$  tal que*

$$\frac{a - \tilde{a}}{b} \leq a_1. \quad (6.3.23)$$

*Más aún,  $a_1$  puede tomarse como  $\tan(\psi_M - \pi/2)$  siendo  $\psi_M < \pi$  una constante que acota superiormente todos los ángulos de  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ .*

**Demostración.** Como hemos señalado en la Observación 6.2.1, dado que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verifica  $[D1, D2']$ ,  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  cumple la *DAC*. Asumamos entonces que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  obedece  $DAC(\psi_m, \psi_M)$ .

Sea  $\omega$  el ángulo entre  $l_{23}$  y la recta vertical que pasa por  $V_3$  (ver Figura 6.2). Gracias a (D1) tenemos

$$\frac{a - \tilde{a}}{b} \leq \frac{a - \tilde{a}}{\tilde{b}} = \tan(\omega). \quad (6.3.24)$$

Por otro lado, notemos que  $\pi/2 + \omega \leq \beta_3 \leq \psi_M$  siendo  $\beta_3$  el ángulo interior de  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  ubicado en  $V_3$ . Luego,  $\omega \leq \psi_M - \pi/2$  y entonces  $\tan(\omega) \leq \tan(\psi_M - \pi/2)$ . La demostración concluye tomando  $a_1 = \tan(\psi_M - \pi/2)$  como afirmamos.  $\square$

En lo que sigue usaremos la misma notación introducida en la demostración del Teorema 3.3.1 para un cuadrilátero convexo general  $K$  el cual satisface la *DAC*. Concretamente, asumiremos

que  $K$  se encuentra íntegramente contenido en el semiplano superior; más aún,  $K$  está enteramente contenido en un paralelogramo determinado por dos de sus lados ( $l_1$  y  $l_2$ ) los cuales son consecutivos o vecinos tales que  $l_1$  es el segmento que conecta los vertices  $V_1 = (0, 0)$  y  $V_2 = (a, 0)$ , mientras que  $l_2$  es el segmento que conecta los vertices  $V_1$  y  $V_4 = (b \cot(\beta), b)$  siendo  $\beta$  el ángulo interior de  $K$  ubicado en  $V_1$  y  $b = |l_2| \sin(\beta)$  (ver Figura 6.3).

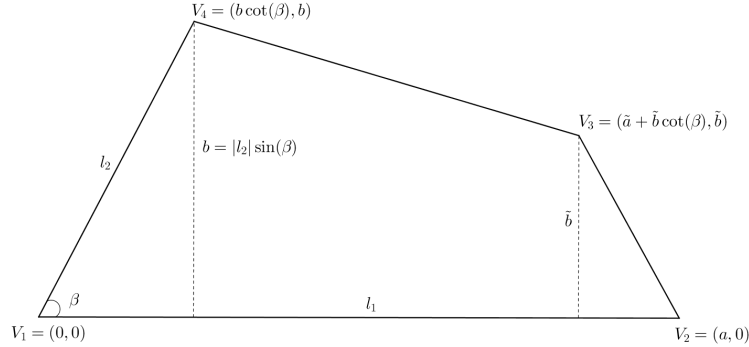


Figura 6.3: Notación adoptada sobre  $K$ .

Asumiremos también un requerimiento extra en la geometría del elemento el cual, esencialmente, ha sido introducido en [22]. Básicamente, la restricción geométrica de este requerimiento obliga a que el lado  $l_1$  y el lado de  $K$  opuesto a  $l_1$  sean *casi* paralelos. En la siguiente definición precisamos el sentido dado a este *casi* paralelismo usando la notación asumida y que hemos aclarado previamente.

**Definición 6.3.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo. Diremos que  $K$  satisface la propiedad de lados opuestos casi paralelos (almost parallel opposite sides property) con constante  $\epsilon > 0$ , o simplemente  $aposp(\epsilon)$ , si*

$$\frac{1}{2} + \epsilon \leq \frac{\text{dist}(V_3, l_1)}{\text{dist}(V_4, l_1)} \leq 1. \quad (6.3.25)$$

Bajo el supuesto que  $K$  cumple con la *DAC* hemos probado (Teorema 3.3.1 mediante y reescritura de condición (6.3.19) por (6.3.21)) que  $K$  es equivalente a un cuadrilátero de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  satisfaciendo las condiciones  $[D1, D2']$ . La equivalencia entre estos elementos se realiza mediante el mapeo afín  $L$  asociado a la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & \cot(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (para mayores detalles sugerimos releer la demostración del Teorema 3.3.1). Dado que  $V_3 = L(\tilde{a}, \tilde{b}) = (\tilde{a} + \tilde{b} \cot(\beta), \tilde{b})$  y  $V_4 = (b \cot(\beta), b)$ , es inmediato verificar el siguiente hecho (ver Figura 6.3)

$$\frac{\text{dist}(V_3, l_1)}{\text{dist}(V_4, l_1)} = \frac{\tilde{b}}{b}. \quad (6.3.26)$$

Luego, si  $K$  satisface también la  $aposp(\epsilon)$  resulta que

$$\frac{1}{2} + \epsilon \leq \frac{\tilde{b}}{b} \leq 1. \quad (6.3.27)$$

Al combinar el Teorema 3.3.1 con (6.3.27) obtenemos la siguiente caracterización para aquellos cuadriláteros que satisfacen simultáneamente  $[DAC, aposp]$ .

**Teorema 6.3.1** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo general. Si  $K$  satisface  $DAC(\psi_m, \psi_M)$  y  $\text{aposp}(\epsilon)$ , entonces  $K$  es equivalente a un elemento del tipo  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verificando*

$$(D1') \quad \tilde{a}/a \leq 1, \quad \frac{1}{2} + \epsilon \leq \tilde{b}/b \leq 1. \quad (6.3.28)$$

y

$$(D2') \quad \frac{1}{\sin(\gamma)} \leq C \quad (6.3.29)$$

donde  $\gamma$  es el ángulo interior del triángulo  $\Delta(V_2V_3V_4)$  ubicado en  $V_2$  y  $C$  es una constante positiva que solo depende de  $\psi_m$  y  $\psi_M$ .

Con lo señalado hasta aquí estamos en condiciones de probar el principal resultado de esta sección el cual esencialmente establece que aquellos cuadriláteros de referencia que satisfacen las condiciones  $(D1')$  y  $(D2')$  dadas en (6.3.28) y (6.3.29), respectivamente; o bien son regulares o bien son perturbaciones de un rectángulo en el sentido que hemos precisado oportunamente.

**Proposición 6.3.1** *Sea  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo verificando las condiciones  $[D1', D2']$  entonces  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  o bien es regular o bien es la perturbación de un rectángulo en el sentido dado por (6.1.7) y (6.1.8).*

**Demostración.** Gracias a la Observación 6.2.1 sabemos que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  verifica  $DAC(\psi_m, \psi_M)$  para ciertas constantes  $\psi_m$  y  $\psi_M$ . Sea  $a_1 = \tan(\psi_M - \pi/2)$ .

Si  $a_1 = 0$  entonces  $\psi_M = \pi/2$ . Por lo tanto,  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  es un rectángulo y no hay nada que probar.

Asumamos entonces  $a_1 > 0$ . Escribiendo la forma bilineal  $F_K : \widehat{K} \rightarrow K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  en la forma que (6.1.6) requiere, tenemos

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (a\hat{x}, b\hat{y}) + (\tilde{a} - a, \tilde{b} - b)\hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}). \quad (6.3.30)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir  $b \leq a$ . En otro caso,  $b/a > 1$  que junto a (6.3.22) permite concluir que  $a$  y  $b$  son comparables. Ahora, como  $a \sim b$  resulta que el triángulo  $\Delta(V_1V_2V_4)$  cumple con la condición de regularidad para alguna constante  $\sigma$ . Luego, gracias a  $(D1')$  y al hecho que  $\Delta(V_1V_2V_4)$  se encuentra contenido en  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ , sigue que  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  también verifica la condición de regularidad. Un argumento similar se puede usar bajo el supuesto  $\frac{b}{a} > \frac{\epsilon}{2a_1}$  para concluir que, en este caso,  $K$  es regular.

Asumamos  $b/a \leq \frac{\epsilon}{2a_1} \leq 1$ . De (6.3.30) es claro que el único vector distorsivo no necesariamente nulo es  $a^{(3)} = (\tilde{a} - a, \tilde{b} - b)$ . Además, de  $(D1')$  sigue que

$$\frac{|a_2^{(3)}|}{b} = \frac{b - \tilde{b}}{b} \leq \frac{1}{2} - \epsilon =: a_2 \quad (6.3.31)$$

y, gracias al Lemma 6.3.1 (ver demostración),

$$\frac{|a_1^{(3)}|}{b} = \frac{a - \tilde{a}}{b} \leq a_1 = \tan(\psi_M - \pi/2). \quad (6.3.32)$$

Las ecuaciones (6.3.32) y (6.3.31) muestran que (6.1.7) se satisface para la elección de  $a_1$  y  $a_2$  que hemos hecho. Afirmamos que la condición (6.1.8) se encuentra garantizada si elegimos  $a_0 = \epsilon/2$ . En efecto, de la hipótesis sobre  $b/a$  sigue que

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{a}a_1 - a_2 = \epsilon - \frac{b}{a}a_1 \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Un argumento completamente análogo puede ser usado cuando  $b/a \leq 1 \leq \frac{\epsilon}{2a_1}$  para concluir que  $K$  verifica (6.1.7) y (6.1.8). De esta manera, hemos visto que  $K$  o bien es regular o bien es la perturbación de un rectángulo dependiendo de la condición asumida sobre  $b/a$  lo que concluye la prueba.  $\square$

## 6.4. La estimación del error

En esta sección obtenemos la estimación anisotrópica del error sobre todos aquellos cuadriláteros convexos generales que verifican la doble condición del ángulo (*DAC*) y la propiedad de lados opuestos casi paralelos (*aposp*). No obstante, como hemos mostrado en la Sección 6.2 podemos reducir el estudio a cierta clase de elementos pertenecientes a la configuración de referencia. Por esta razón, presentamos dos apartados dentro de esta sección; en el primero de ellos obtenemos la estimación anisotrópica del error sobre elementos de referencia, mientras que en la segunda, obtenemos la estimación anisotrópica del error en cuadriláteros arbitrarios.

### 6.4.1. Sobre la configuración de referencia

La caracterización geométrica obtenida en la Proposición 6.3.1 para todos aquellos cuadriláteros de referencia que satisfacen las condiciones  $[D1', D2']$  nos permitirá probar la estimación anisotrópica sobre esta clase de elementos y bajo las mismas hipótesis. Establecemos formalmente este resultado en el siguiente

**Teorema 6.4.1** *Sea  $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  un cuadrilátero convexo verificando las condiciones  $[D1', D2']$ . Entonces vale la estimación anisotrópica del error*

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[ a \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u \right\|_{L^2(K)} + b \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \right\|_{L^2(K)} \right] \quad (6.4.1)$$

con  $C$  una constante positiva que sólo depende de aquellas constantes involucradas en  $[D1', D2']$ .

**Demostración.** Bajo las condiciones  $[D1', D2']$  resulta que  $K$  verifica  $DAC(\psi_m, \psi_M)$  con  $\psi_m$  y  $\psi_M$  constantes que dependen solo de aquellas involucradas en  $[D1', D2']$  (ver Observación 6.2.1).

Sea  $a_1 = \tan(\psi_M - \pi/2)$ . Si  $a_1 = 0$  o  $a_1 > 0$  con  $\frac{b}{a} \leq \min\{1, \frac{\epsilon}{2a_1}\}$ , la demostración de la Proposición 6.3.1 garantiza que  $K$  es la perturbación de un rectángulo en el sentido dado por (6.1.7) y (6.1.8) (remitimos a dicha demostración para mayores detalles). Luego, (6.4.1) vale gracias al Teorema 6.1.2.

Por otro lado, si  $a_1 > 0$  y  $\frac{b}{a} > \min\{1, \frac{\epsilon}{2a_1}\}$ , la demostración de la Proposición 6.3.1 garantiza que  $K$  verifica la condición de regularidad (6.1.3). Luego, la estimación anisotrópica del error se reduce a la estimación clásica (6.0.2) la cual vale gracias al Teorema 6.1.1 (o al Teorema 5.3.1 tal como hemos señalado en la Observación 6.1.1).  $\square$

### 6.4.2. Sobre cuadriláteros generales

En este breve apartado enunciamos formalmente nuestro principal teorema el cual, básicamente, establece que la estimación anisotrópica del error vale sobre todos aquellos cuadriláteros convexos que cumplen la *DAC* y la *aposp*.

**Teorema 6.4.2** *Sea  $K$  un cuadrilátero convexo verificando la  $DAC(\psi_m, \psi_M)$ . Asumamos que  $K$  se encuentra contenido en el paralelogramo determinado por  $l_1$  y  $l_2$  siendo  $l_1$  y  $l_2$  dos lados adyacentes de  $K$  de modo que  $aposp(\epsilon)$  se cumple. Entonces la siguiente estimación anisotrópica del error en  $H^1$  vale sobre  $K$*

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[ |l_1| \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{L^2(K)} + |l_2| \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{L^2(K)} \right] \quad (6.4.1)$$

para alguna constante positiva  $C = C(\psi_m, \psi_M, \epsilon)$ .

**Demostración.** Dado que  $K$  verifica  $DAC(\psi_m, \psi_M)$  y  $aposp(\epsilon)$ , el Teorema 6.3.1 garantiza que  $K$  es equivalente a un elemento de referencia  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$  que satisface las condiciones  $[D1', D2']$ .

Por lo probado en la Sección 6.2 y con el objetivo de obtener (6.4.1) sobre  $K$ , resulta suficiente demostrar la validez de (6.4.1) sobre  $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ . Luego, la demostración termina gracias al Teorema 6.4.1.  $\square$

## 6.5. Comentarios finales

Si bien la demostración de (6.4.1) se basa fuertemente en aquella obtenida en [7] (que hemos transcrito aquí en (6.1.11) y, más generalmente, en (6.1.12)), creemos que (6.4.1) presenta una ventaja sobre (6.1.11). A saber, la estimación (6.4.1) está dada en términos de los lados del cuadrilátero  $K$  propiamente dicho mientras que (6.1.11) está establecida en términos de los lados del rectángulo a partir del cual se obtuvo  $K$  luego de aplicarle una perturbación del tipo (6.1.6) bajo las condiciones (6.1.7) y (6.1.8). Más aún, pese a que dicho rectángulo puede ser fácilmente obtenido a partir de la geometría de  $K$ , no es explícitamente dado.

Por otro lado, como hemos señalado oportunamente, las condiciones (6.1.7) y (6.1.8) no tienen una interpretación geométrica clara mientras que la *doble condición del ángulo* ( $DAC$ ) y la *propiedad de lados opuestos casi paralelos* ( $aposp$ ) sí la tienen como hemos desarrollado y aclarado oportunamente. Esta cuestión puede resultar sumamente útil en aplicaciones prácticas y testeos.

Por último, sospechamos que, al menos sobre cuadriláteros anisotrópicos (es decir, sobre cuadriláteros particularmente chatos o estrechos) las condiciones que determinan ser la perturbación de un rectángulo ((6.1.7) y (6.1.8)) pueden resultar equivalentes a satisfacer tanto la doble condición del ángulo como la propiedad de lados opuestos casi paralelos bajo algún mínimo supuesto extra. Hasta el momento no hemos sido capaces de probar formalmente este hecho por lo que queda como un problema abierto y será objeto de estudio en un trabajo futuro.

# Conclusiones

- El estudio del error de interpolación en  $W^{1,p}$

$$\|u - Q_k u\|_{0,p,K} + h|u - Q_k u|_{1,p,K} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,p,K}$$

sobre elementos cuadriláteros convexos generales  $K$  de orden arbitrario  $k$  para el interpolador de Lagrange  $Q_k$  se ha realizado obteniendo resultados que son (en el sentido que hemos explicado oportunamente) óptimos y que se resumen en la siguiente tabla

	$1 \leq p < 3$	$p \geq 3$
$k = 1$	<i>RDP</i>	<i>DAC</i>
$k \geq 2$	<i>mac</i>	<i>DAC</i>

- Se ha mostrado que la condición del ángulo máximo es condición necesaria para garantizar la validez del error de interpolación, no solo en primer orden sino también en orden superior, si  $p \geq 3$ .
- Para orden superior, mostramos que la condición del ángulo mínimo es condición necesaria para garantizar la validez del error de interpolación si  $1 \leq p < 3$ .
- Hemos logrado caracterizar, sobre elementos cuadriláteros, las más conocidas y menos restrictivas condiciones geométricas contempladas en la bibliografía (a nuestro entender) más relevante que garantizan la validez de la estimación del error de interpolación en términos de elementos equivalentes pertenecientes a una configuración de referencia y en términos de condiciones simples sobre estos elementos como resultan ser las condiciones  $(D1)$ ,  $(D2)$ ,  $(D3)$ ,  $(\Delta1)$  y  $(\Delta2)$ .
- Estudiando la estimación clásica del error de interpolación en el espacio  $W^{k,p}$ ,  $k \geq 2$ , con el enfoque descrito aquí, no hemos podido resolver las dificultades que se presentaron. Creemos que este enfoque, ciertamente, no es conveniente para tal fin. No obstante, el estudio de dicho error es una cuestión que ha quedado abierta para trabajo futuro.
- Obtuvimos una estimación anisotrópica del error en  $H^1$  para el interpolador de primer orden bajo la *doble condición del ángulo* y la *propiedad de lados opuestos casi paralelos*. Particularmente, hemos caracterizado a los elementos que verifican estas condiciones en términos de elementos de referencia equivalentes y de las condiciones  $(D1')$ ,  $(D2')$ .
- Creemos que es posible obtener una comparación clara y precisa entre los requerimientos pedidos en [7] para que el cuadrilátero pueda considerarse como una perturbación de un rectángulo, y las condiciones  $[DAC, aposp]$ . No obstante, no hemos sido capaces hasta el momento de establecer dicha comparación en términos claros; esperamos revertir esta situación a futuro.



- Queda abierta la cuestión sobre la necesidad de las condiciones  $[DAC, aposp]$  a fin de garantizar la estimación anisotrópica. Sospechamos que la *aposp* no resulta condición necesaria. Más aún, el debilitamiento de (alguno de) estos requerimientos de modo que la estimación anisotrópica siga valiendo es una cuestión de mayor interés y que también queda como objeto de estudio a futuro.

# Bibliografía

- [1] Acosta G., Durán R. G. (1999): The maximum angle condition for mixed and nonconforming elements: Application to the Stokes equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 37, pp. 18-36.
- [2] Acosta G., Durán R. G. (2000): Error estimates for  $Q_1$  isoparametric elements satisfying a weak angle condition, *SIAM J. Numer. Anal.*, 38, 1073-1088.
- [3] Acosta G., Monzón G. (2006): Interpolation error estimates in  $W^{1,p}$  for degenerate  $Q_1$  isoparametric elements, *Numer. Math.*, 104, 129-150.
- [4] Acosta G., Monzón G. (2017): The minimal angle condition for quadrilateral finite elements of arbitrary degree. *J. Comput. Appl. Math.*, 317, 218-234.
- [5] Arnold D.N., Boffi D. , Falk R.S. (2002): Approximation by quadrilateral finite elements. *Math. Comp.* Vol. 71, 239, 909-922.
- [6] Apel, Th. (1998): Anisotropic interpolation error estimates for isoparametric quadrilateral finite elements, *Computing*, 60, 157-174.
- [7] Apel, Th. (1999): Anisotropic finite elements: Local estimates and applications. *Advances in Numerical Mathematics*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig.
- [8] Apel Th., Dobrowolski M.(1992): Anisotropic interpolation with applications to the finite element method, *Computing*, 47, 277-293.
- [9] Babuška, I., Aziz, A. K. (1976): On the angle condition in the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 13, 214-226.
- [10] Boffi D., Brezzi F., Demkowicz L., Durán R., Falk R., Fortin M. (2008): Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1939, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Brenner S. C., Scott R. L. (2008): The mathematical theory of finite element methods, 3rd edn. *Text in applied mathematics 15*. Springer, Berlin Heidelberg Newyork.
- [12] Ciarlet P. G., Raviart P. A. (1972): Interpolation theory over curved elements, with applications to finite elements methods, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 1, 217-249.
- [13] Ciarlet, P. G., Raviart, P. A. (1978): The finite element method for elliptic problems. *Studies in Mathematics and its applications*, vol 4, North-Holland Publishing Company.
- [14] Durán R. G. (2006): Error estimates for anisotropic finite elements and applications. *International Congress of Mathematicians. Vol. III*, 1181–1200, Eur. Math. Soc., Zürich.
- [15] Jamet, P. (1976): Estimations d’erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés, *RAIRO Anal. Numer.*, 10, 46-61.

- [16] Jamet, P. (1977): Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles, *SIAM J. Numer. Anal.*, 14, 925-930.
- [17] Mao S., Nicaise S., Shi Z. C. (2008): On the interpolation error estimates for  $Q_1$  quadrilateral finite elements, *SIAM J. Numer. Anal.*, 47, 467-486.
- [18] Ming P., Shi Z.C. (2002): Quadrilateral mesh revisited, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191, 5671-5682.
- [19] Monzón G.: Anisotropic error estimate under the double angle condition on quadrilaterals with almost parallel sides. En proceso de escritura.
- [20] Verfürth R. (1999): Error estimates for some quasi-interpolation operators. *RAIRO Math. Mod. and Num. Anal.*, Volume 33, Issue 4, 695-713.
- [21] Zenisek, A., Vanmaele, M. (1995): The interpolation theorem for narrow quadrilateral isoparametric finite elements, *Numer. Math.*, 72, 123-141.
- [22] Zenisek, A., Vanmaele, M. (1995): Applicability of the Bramble Hilbert lemma in interpolation problems of narrow quadrilateral isoparametric finite elements, *J. Comp. Appl. Math.*, 63, 109-122.