



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

**Cohomología de Hochschild de álgebras gentiles, sus extensiones
triviales y una generalización.**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el
área Ciencias Matemáticas

Cristian Arturo Chaparro Acosta

Director de tesis: Andrea Leonor Solotar
Consejero de estudios: Mariano Suárez-Álvarez

Buenos Aires, 2020

Fecha de defensa: 17 de marzo de 2020

Dedicatoria

A Angela Pilar Acosta (madre) y Carlos Arturo Chaparro (padre).

Agradecimientos

A mis padres y mis hermanos, por su amor y apoyo incondicional.

A Andrea Solotar, por su paciencia, dedicación y sabiduría, por ser una guía y por su calidez humana.

A Mariano Suárez, por su entusiasmo contagioso, por su amplio conocimiento y las ganas de transmitirlo.

A Sibylle Schroll, por su carisma, amabilidad y sus recibimientos acogedores en mis visitas a Leicester.

A Alejandra, Angie, Cesar y Jonny, por ser incondicionales y alentarme sin importar el lugar donde me encuentre.

A Belén, Diego, Eugenio, Fer, Fran, Javi C., Luz, Mauro, Nico, Noelia, Pablo B., Pablo Z., Pancho, Pedro, Sofía y Ximena, por hacerme sentir como en casa. A la 2038 por hacer más agradables mis días en la facultad.

A los jurados Claudia Chaio, Gastón García y Octavio Mendoza, por sus correcciones y comentarios.

A todas las personas que conocí desde que llegué a este hermoso país.

Cohomología de Hochschild de álgebras gentiles, sus extensiones triviales y una generalización.

En esta tesis estudiamos la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles, el primer espacio de cohomología de Hochschild de las extensiones triviales de álgebras gentiles y más en general el primer espacio de cohomología de Hochschild de álgebras monomiales cuadráticas. Además, damos una descripción de la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles y de la estructura de álgebra de Lie del primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial tanto de álgebras gentiles como de álgebras monomiales cuadráticas.

En la primera parte probamos un resultado combinatorio para determinar una base de la cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras gentiles, en esta calculamos la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles en grados cero y uno, calculamos una base del primer espacio de homología de Hochschild de álgebras gentiles y una base de un subespacio de las formas bilineales torcidas simétricas. Calculamos la estructura de álgebra de Lie que posee el espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial en grado uno y hacemos una interpretación geométrica usando el grafo de ribbon (cinta) de un álgebra gentil. Finalmente, mostramos que esta información se codifica en el grafo de Brauer correspondiente a la extensión trivial y damos un criterio para determinar cuándo el álgebra de Lie resultante es soluble.

En la segunda parte generalizamos los resultados obtenidos para el primer espacio de cohomología de Hochschild de álgebras gentiles y determinamos una base para toda la cohomología de Hochschild de las mismas álgebras. Calculamos la estructura de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild y finalizamos dando una interpretación geométrica de toda la cohomología usando el grafo de ribbon.

En la tercera y última parte de esta tesis estudiamos el primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras monomiales cuadráticas, que es una generalización de lo desarrollado en la primera parte de este trabajo. También determinamos una base de la cohomología de forma combinatoria y la estructura de álgebra de Lie de este espacio y como caso particular, cuando el álgebra monomial cuadrática es casi gentil, desarrollamos una interpretación mediante el hipergrafo asociado.

Palabras clave: Cohomología de Hochschild, álgebras gentiles, extensiones triviales, álgebras monomiales cuadráticas, estructura de Gerstenhaber, álgebra de grafos de Brauer.

Hochschild cohomology of gentle algebras, their trivial extensions and a generalization.

In this thesis we study the Hochschild cohomology of gentle algebras, the first Hochschild cohomology space of trivial extensions of gentle algebras and more generally the first Hochschild cohomology space of quadratic monomial algebras. In addition, we give a description of the Gerstenhaber algebra structure of the Hochschild cohomology of gentle algebras and of the Lie algebra structure of the first Hochschild cohomology space of the trivial extension of gentle algebras and quadratic monomial algebras.

In the first part we prove a combinatorial result to determine a basis of the Hochschild cohomology of the trivial extension of gentle algebras, in this section we compute the Hochschild cohomology of gentle algebras in degrees zero and one, we compute a basis of the first Hochschild homology space of gentle algebras and a basis of the skew-symmetric bilinear forms. We compute the Lie algebra structure of the Hochschild cohomology of the trivial extension in degree one and we make a geometric interpretation using the ribbon graph of a gentle algebra. Finally, we show that this information is encoded in the Brauer graph corresponding to the trivial extension and we give a criterion to determine when the resulting Lie algebra is solvable.

In the second part we generalize the results obtained for the first Hochschild cohomology space of gentle algebras and we determine a basis for all degrees of the Hochschild cohomology of gentle algebras. We compute the Gerstenhaber structure of the Hochschild cohomology and give a geometric interpretation of the cohomology using the ribbon graph.

In the third and final part of this thesis we study the first Hochschild cohomology space of the trivial extension of quadratic monomial algebras, which is a generalization of what we developed in the first part of this work. We also determine a combinatorial basis of the Hochschild cohomology and the Lie algebra structure of this space and as a particular case, when the quadratic monomial algebra is almost gentle, we develop an interpretation using the Brauer configuration graph.

Keywords: Hochschild cohomology, gentle algebras, trivial extensions, quadratic monomial algebra, Gerstenhaber structure, Brauer graph algebra.

Índice general

Introducción	3
1. Preliminares	7
1.1. Módulos y álgebras	7
1.2. Álgebras de caminos	9
1.3. Homología y cohomología de Hochschild	11
1.3.1. Homología de Hochschild	12
1.3.2. Cohomología de Hochschild	12
1.3.3. Cohomología de Hochschild en grados 0 y 1	14
1.3.4. Cohomología de Hochschild relativa a una subálgebra	14
1.3.5. La resolución de Bardzell	15
1.4. Álgebras de Lie	17
1.4.1. Estructura de Gerstenhaber	18
1.5. Álgebras de grafos de Brauer	19
1.5.1. Carcaj de un álgebra de grafos de Brauer	21
1.5.2. Conjunto de relaciones y álgebra de grafos de Brauer	22
1.5.3. Grafo de ribbon	23
1.5.4. Álgebras gentiles y álgebras de grafos de Brauer	23
1.5.5. Cortes admisibles de álgebras de grafos de Brauer y álgebras gentiles	25
1.6. Álgebras de configuración de Brauer	27
1.6.1. Configuración de Brauer	27
1.6.2. Carcaj de un álgebra de configuración de Brauer	28
1.6.3. Ideal de relaciones de una configuración de Brauer	29
1.6.4. Álgebras casi gentiles y su extensión trivial	30
1.6.5. Cortes admisibles de álgebras de grafos de Brauer y álgebras casi gentiles	33
2. Primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras gentiles	35
2.1. Cohomología de Hochschild de álgebras gentiles en grados 0 y 1	35
2.1.1. HH^0 de álgebras gentiles	37
2.1.2. HH^1 de álgebras gentiles	38
2.2. Dual del primer espacio de homología de Hochschild de un álgebra gentil Λ	46

2.3.	$Alt_{\Lambda}(DA)$ de un álgebra gentil Λ	48
2.4.	Codificación de la cohomología de Hochschild en el grafo de ribbon y en el grafo de Brauer	50
2.4.1.	Codificación	51
3.	Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(\Lambda)$ y $HH^1(T\Lambda)$	57
3.1.	Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(\Lambda)$	59
3.2.	Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(T\Lambda)$	60
3.3.	Nilpotencia y solubilidad	71
4.	$HH^n(\Lambda)$ de álgebras gentiles con $n \geq 2$	75
4.1.	Identificando n -cociclos	75
4.2.	Una base de $HH^n(\Lambda)$ con $n \geq 2$	78
4.3.	Codificación de $HH^n(\Lambda)$ en el grafo de ribbon de Λ	79
4.3.1.	Atajos, ciclos y circuitos	80
4.3.2.	Desviaciones	81
4.4.	Corchete de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles	83
4.4.1.	Producto cup	83
4.4.2.	Estructura de Gerstenhaber	84
5.	Primer espacio de la cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras monomiales cuadráticas	95
5.1.	Cohomología de Hochschild de álgebras monomiales cuadráticas en grados 0 y 1	95
5.1.1.	HH^0 de álgebras monomiales cuadráticas	96
5.1.2.	HH^1 de álgebras monomiales cuadráticas	97
5.2.	$HH_1(A)^*$ y $Alt_A(DA)$ de álgebras monomiales cuadráticas	102
5.3.	Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(TA)$	103
5.4.	HH^1 de álgebras de configuración de Brauer con multiplicidad 1	113
5.4.1.	$HH^1(A)$ y $Alt_A(DA)$ de álgebras casi gentiles.	114
5.4.2.	Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(A)$ de álgebras casi gentiles.	115
5.4.3.	Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(TA)$ de la extensión trivial de un álgebra casi gentil.	116
5.4.4.	Codificación en el hipergrafo asociado	117
	Bibliografía	123

Introducción

Las álgebras de grafos de Brauer aparecen originalmente en la teoría de representaciones modulares de grupos finitos, se encuentran como álgebras de árboles de Brauer en [21] y se definen de forma general en [14] de manera combinatoria sobre grafos. Esta clase de álgebras coincide con las álgebras biseriales especiales simétricas [34, 35], que juegan un papel importante en el estudio de las álgebras autoinyectivas.

Cada una de estas álgebras tiene un grafo finito asociado, con un orden cíclico y una función multiplicidad. Se pueden interpretar por medio de grafos de “ribbon” [28], dando así una perspectiva geométrica a la teoría de representaciones de las álgebras de grafos de Brauer y relacionando dichas álgebras con la teoría de álgebras de conglomerado de superficies.

Cuando un álgebra de grafos de Brauer tiene multiplicidad idéntica a 1 la puede interpretar como la extensión trivial de un álgebra gentil [35], dando así un camino para el estudio de las álgebras de grafos de Brauer con multiplicidad 1 por medio de las álgebras gentiles.

Las álgebras gentiles aparecen a principios de los años 80 en los trabajos de Assem y Happel como álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{A} [4, 5] y tipo $\tilde{\mathbb{A}}$ [6]. Desde ese momento se presentan de forma natural en otros contextos, como por ejemplo bajo la apariencia de álgebras Jacobianas asociadas a carcajes con potencial provenientes de superficies marcadas no punteadas en la teoría de conglomerados [1, 2, 3, 13, 23]. Últimamente, las álgebras gentiles se han asociado a triangulaciones de superficies, en relación con la teoría de conglomerados [3] y con grafos de ribbon [35, 36].

También son elementos importantes en la “mirror symmetry” de 2-variedades, en la que la categoría derivada de un álgebra gentil diferencial graduada suave es equivalente a la categoría de Fukaya parcialmente envuelta de una superficie con puntos marcados (“marked points”) [19, 26]. En el caso graduado trivial, estas categorías son equivalentes a la categoría derivada acotada de álgebras gentiles (no graduadas) y basado en el gráfico de “ribbon” de álgebras gentiles definidos en [35], un modelo geométrico de superficies de esta categoría (que coincide con el modelo subyacente a la categoría de Fukaya parcialmente envuelta) se da en [31].

Opper, Plamondon y Schroll [31] dieron un modelo geométrico de la categoría derivada acotada de álgebras gentiles, basándose en el grafo de ribbon asociado a un álgebra gentil [35]. El modelo codifica gran parte de la información de la categoría derivada, por ejemplo, los objetos descomponibles, los morfismos y los triángulos de Auslander-Reiten.

Es claro que la categoría derivada de un álgebra gentil es una herramienta clave. Por el trabajo de Happel se sabe que hay un “embedding” fielmente pleno de la categoría derivada acotada de un álgebra de dimensión finita en la categoría de módulos estables de

su álgebra repetitiva. El álgebra repetitiva está ligada a la extensión trivial del álgebra, por lo tanto, comprender la extensión trivial de un álgebra A sirve para entender la categoría derivada de A .

En esta tesis se toma este punto de vista al determinar la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles, y la estructura de álgebra de Lie del primer espacio de cohomología de la extensión trivial de álgebras gentiles, que cubren todas las álgebras de grafos de Brauer con multiplicidad 1.

La cohomología de Hochschild de un álgebra A codifica información relevante y es una herramienta importante adjunta al álgebra. Se utiliza para comprender su estructura, por ejemplo, el centro, las derivaciones exteriores y las deformaciones. Dada una K -álgebra A , el espacio vectorial graduado $HH^*(A)$ es un invariante derivado [33], como lo es la homología de Hochschild $HH_*(A)$. Sin embargo, $HH^*(A)$ tiene una estructura mucho más rica:

- es un álgebra conmutativa graduada vía el producto cup,
- está equipada con el corchete de Gerstenhaber:

$$[-, -] : HH^m(A) \otimes HH^n(A) \rightarrow HH^{m+n-1}(A), \text{ para todo } m, n \geq 0$$

tal que $(HH^*(A), [-, -])$ es un álgebra de Lie graduada.

Estas estructuras están relacionadas por la identidad de Poisson, lo que significa que el corchete es una biderivación graduada con respecto al producto cup.

Todo esto en conjunto otorga a $HH^*(A)$ una *estructura de álgebra de Gerstenhaber*, que también es un invariante derivado [22].

En particular, el primer espacio de cohomología de Hochschild $HH^1(A)$, que es isomorfo al cociente de las derivaciones de A módulo las derivaciones internas de A , se convierte en un álgebra de Lie cuyo corchete es inducido por el conmutador de las derivaciones, y para todo $n \in \mathbb{N}$, $HH^n(A)$ es un módulo Lie sobre $HH^1(A)$.

El invariante derivado de Avella-Alaminos y Geiss (AAG) [25] calcula la dimensión de la cohomología Hochschild de álgebras gentiles como espacios vectoriales graduados. Además, el invariante derivado de AAG se codifica en la superficie del modelo geométrico de álgebras gentiles [31] en términos de la cantidad de componentes acotadas, la cantidad de puntos marcados de cada componente acotada y la cantidad de laminaciones que comienzan y terminan en cada componente acotada.

Por otro lado, recientemente Green y Schroll en [18] introducen una generalización de álgebras de grafos de Brauer y las denominan álgebras de configuración de Brauer, estas son álgebras simétricas de dimensión finita, en general son de tipo de representación salvaje y cuando el cuerpo es algebraicamente cerrado coinciden con las álgebras multiseriales especiales simétricas [17].

Una generalización de la noción de álgebra gentil se da en [16] con el nombre de álgebras casi gentiles. Estas son álgebras monomiales cuadráticas y de forma similar a las álgebras gentiles, la extensión trivial de un álgebra casi gentil es un álgebra de configuración de Brauer con multiplicidad idéntica a 1 y viceversa.

En este trabajo, se da una descripción de la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles, la estructura de álgebra de Lie del primer espacio de cohomología de Hochschild de cualquier álgebra de grafos de Brauer con

multiplicidad 1, utilizando el hecho de que hay una correspondencia 1-1 entre álgebras de grafos de Brauer con multiplicidad 1 y las extensiones triviales de álgebras gentiles.

Además, se generalizan las ideas del Capítulo 2 para calcular la estructura de álgebra de Lie del primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de un álgebra monomial cuadrática, dando así el caso particular de la estructura de álgebra de Lie del primer espacio de cohomología de Hochschild de las álgebras de grafos de configuración de Brauer con multiplicidad 1.

Adicionalmente, se da una interpretación de la cohomología de álgebras gentiles por medio del grafo de ribbon marcado asociado y una interpretación del primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de un álgebra casi gentil usando el hipergrafo asociado, que es el análogo al grafo de ribbon en álgebras gentiles.

Se asume que todas las álgebras son indescomponibles y finito dimensionales.

Finalmente, se realiza una sinopsis de los cinco capítulos presentes en esta tesis.

En el Capítulo 1 se encuentran las definiciones, ejemplos y resultados básicos que serán útiles a lo largo de la tesis. Se exponen los resultados necesarios sobre álgebras de caminos, homología y cohomología de Hochschild, álgebras de Lie, álgebras de grafos de Brauer y álgebras de configuración de Brauer.

Posteriormente, en el Capítulo 2 se calcula la cohomología de Hochschild en grados 0 y 1, el primer espacio de homología y un espacio de formas bilineales torcidas simétricas de las álgebras gentiles, todo esto para dar una descripción del primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de un álgebra gentil. Además, se muestra cómo la información del primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras gentiles se codifica en el grafo de ribbon y el grafo de Brauer.

En el Capítulo 3 se describe la estructura de álgebra de Lie del primer espacio de cohomología de Hochschild de álgebras gentiles y su extensión trivial. Se da un criterio de nilpotencia y solubilidad para el primer espacio de cohomología de Hochschild de álgebras de grafos de Brauer con multiplicidad uno.

El Capítulo 4 contiene el cálculo completo de la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles y de la estructura de Gerstenhaber, además se muestra cómo se codifica la cohomología de Hochschild de un álgebra gentil en el grafo de ribbon.

En el capítulo final, el Capítulo 5, se generalizan los resultados obtenidos en los Capítulos 2 y 3 para álgebras monomiales cuadráticas. Como caso particular se determina el primer espacio de cohomología de Hochschild de un álgebra casi gentil y de su extensión trivial; además se describe la codificación de esta información en el hipergrafo asociado.

El contenido de los Capítulos 2 y 3 forma parte del artículo [10], que ha sido aceptado para su publicación en la revista *Journal of Algebra*. Por otra parte, el contenido de los Capítulos 4 y 5 será objeto de una próxima publicación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen las definiciones y resultados básicos necesarios para el desarrollo de esta tesis, para mayor información se puede consultar [7, 8, 9, 15, 16, 18, 24, 27, 28, 35, 36, 40].

En la Sección 1.1 se enuncian las definiciones básicas sobre módulos y álgebras que se van a usar a lo largo de esta tesis.

La Sección 1.2 está dedicada a la homología y cohomología de Hochschild, y a las resoluciones que se utilizan.

En la Sección 1.3 se encuentran las definiciones necesarias de álgebras de Lie y de la estructura de Gerstenhaber que posee la cohomología de Hochschild.

La Sección 1.4 se dedica a las álgebras de caminos.

La Sección 1.5 contiene generalidades de los grafos de Brauer, como caso particular se centra en los grafos de Brauer con multiplicidad uno, que corresponden a la extensión trivial de álgebras gentiles. Se recuerdan las definiciones de álgebras de grafos de Brauer, los grafos de ribbon y las álgebras gentiles.

En la Sección 1.6 se recuerdan las generalidades de las álgebras de configuración de Brauer.

1.1. Módulos y álgebras

Definición 1.1.1. Sea K un cuerpo, una K -álgebra asociativa con unidad (denotada con 1) es un anillo A con una estructura de K -espacio vectorial compatible con la multiplicación del anillo, es decir

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$$

para cada $a, b \in A$ y $\lambda \in K$. Se dice que la K -álgebra es **finito dimensional** o de **dimensión finita** si A es de dimensión finita como K -espacio vectorial. En todo el documento A denota una K -álgebra de dimensión finita.

Definición 1.1.2. Si A y B son dos K -álgebras, un **homomorfismo** $f : A \rightarrow B$ de K -álgebras es un homomorfismo de anillos K -lineal. Si f es un homomorfismo biyectivo de K -álgebras, A y B son K -álgebras **isomorfas**.

Definición 1.1.3. El **álgebra opuesta** A^{op} de A es el álgebra que coincide con A como espacio vectorial y la multiplicación $*$ en A^{op} se define por $a * b = ba$. El **álgebra**

envolvente A^e de A es el álgebra cuyo K -espacio vectorial subyacente es $A \otimes_K A^{op}$ con producto

$$(a \otimes_K b) \cdot (a' \otimes_K b') = aa' \otimes_K b'b.$$

Definición 1.1.4. Sea A una K -álgebra, un A -módulo **a izquierda** es un par (M, \cdot) donde M es un K -espacio vectorial y $\cdot : A \times M \rightarrow M$, $(a, m) \mapsto am$ es una operación binaria que satisface:

1. $a(m + m') = am + am'$,
2. $(a + b)m = am + bm$,
3. $(ab)m = a(bm)$,
4. $1m = m$,
5. $a(\lambda m) = (\lambda a)m = \lambda(am)$.

para cada $a, b \in A$, $m, m' \in M$ y $\lambda \in K$. La definición de A -módulos a derecha es análoga.

Definición 1.1.5. Un **homomorfismo de A -módulos a izquierda** $f : M \rightarrow N$ es un homomorfismo de anillos que cumple $f(am) = af(m)$ para todo $a \in A$ y $m \in M$. Si existe un morfismo biyectivo $f : M \rightarrow N$, M y N se dicen isomorfos.

Observación 1.1.6. Se denota con ${}_A \text{Mod}$ a la categoría de los A -módulos a izquierda y con Mod_A a la categoría de los A -módulos a derecha.

Las categorías de módulos a izquierda sobre A y de módulos a derecha sobre A^{op} son naturalmente isomorfas, y si M es un A -módulo a izquierda, $D(M) := \text{Hom}_K(M, K)$ es un A -módulo a derecha con estructura dada por $(fa)(x) = f(ax)$. De forma similar, si M es un A -módulo a derecha, $D(M)$ es un A -módulo a izquierda con estructura dada por $(af)(x) = f(xa)$.

Definición 1.1.7. Sea M un A -módulo.

- M es **indescomponible** si M no es nulo y no posee una descomposición de la forma $M = N \oplus L$, con N y L A -módulos no nulos.
- M es **libre** si $M \cong A^{(I)}$ para algún conjunto I .
- M es **projectivo** si es sumando directo de un A -módulo libre.

Definición 1.1.8. Un álgebra A es **indescomponible** si no puede descomponerse como suma directa de dos álgebras no nulas.

Definición 1.1.9. Un álgebra A se denomina **básica** si admite una descomposición en suma directa $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, donde todos los módulos P_i son A -módulos projectivos indescomponibles y tales que $P_i \cong P_j$ si y solo si $i = j$.

Definición 1.1.10. Sean A y B dos K -álgebras. Un A - B -**bimódulo** ${}_A M_B$ es una terna $(M, \cdot, *)$ tal que (M, \cdot) es un A -módulo a izquierda y $(M, *)$ es un B -módulo a derecha, y $(a \cdot m) * b = a \cdot (m * b)$ para cada $a \in A$, $b \in B$ y $m \in M$. La categoría de A - B -bimódulos se denota con ${}_A \text{Mod}_B$.

Observación 1.1.11. La categoría de A^e -módulos a izquierda es naturalmente isomorfa a la categoría de A - A -bimódulos.

Definición 1.1.12. Dos K -álgebras A y B se dicen **Morita equivalentes** si existen un A - B -bimódulo P , un B - A -bimódulo Q e isomorfismos $u : P \otimes_B Q \rightarrow A$ (de A -bimódulos) y $v : Q \otimes_A P \rightarrow B$ (de B -bimódulos).

Observación 1.1.13. Si A y B son Morita equivalentes, entonces P y Q inducen las siguientes equivalencias naturales de categorías:

- $(-)\otimes_A P : \text{Mod}_A \rightarrow \text{Mod}_B$ con inversa $(-)\otimes_B Q$,
- $Q\otimes_A (-) : {}_A\text{Mod} \rightarrow {}_B\text{Mod}$ con inversa $P\otimes_B (-)$,
- $Q\otimes_A (-)\otimes_A P : {}_A\text{Mod}_A \rightarrow {}_B\text{Mod}_B$ con inversa $P\otimes_B (-)\otimes_B Q$.

1.2. Álgebras de caminos

Definición 1.2.1. Un **carcaj** es una cuádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ que consiste de dos conjuntos, el conjunto Q_0 cuyos elementos se denominan **vértices** y el conjunto Q_1 cuyos elementos se llaman **flechas**, y dos funciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocian cada flecha a su vértice de inicio $s(a)$ y su vértice de término $t(a)$. El carcaj Q se dice finito si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos. El par ordenado (Q_0, Q_1) se denomina **grafo** subyacente de Q .

Observación 1.2.2. Todos los carcajes que se consideran en esta tesis son finitos, por lo que no se va a mencionar su finitud en los capítulos posteriores.

Definición 1.2.3. Un carcaj se dice **conexo** si el grafo subyacente es conexo.

Definición 1.2.4. Un **subcarcaj** de un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es un carcaj de $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$, $s' = s|_{Q'_1}$ y $t' = t|_{Q'_1}$ son las restricciones de s y t a Q'_1 respectivamente. Un subcarcaj Q' es **maximal** si entre los subcarcajes de Q que cumplen cierta propiedad es maximal respecto a esa propiedad. En cada caso se indicará de que propiedad se trata.

Definición 1.2.5. Dado un carcaj Q , un **camino** en Q es una secuencia de flechas $\alpha = a_n \cdots a_1$ tal que $t(a_i) = s(a_{i+1})$ para cada $1 \leq i < n$. Un camino se denomina **trivial** si $n = 0$, es decir que corresponde a un vértice e . La **longitud** del camino α es la cantidad de flechas que lo componen y se denota $\text{long}(\alpha)$, de donde $\alpha = a_n \cdots a_1$ tiene longitud n , los caminos triviales son de longitud 0. Si $s(a_1) = t(a_n)$ se dice que α es un **ciclo**, si además $\text{long}(\alpha) = 1$ se denomina **bucle** y si $\text{long}(\alpha) = 0$, α es un ciclo trivial.

Observación 1.2.6. Se usarán las letras minúsculas para denotar a las flechas, con excepción de la letra e , esta se usará para denotar a los vértices. Los caminos se denotarán con letras griegas. Los vértices y los caminos triviales se denotarán igual.

Definición 1.2.7. Sea Q un carcaj finito. El **álgebra de caminos** KQ de Q sobre K es la K -álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de caminos en Q de longitud mayor o igual a 0, y el producto de dos caminos está dado por la concatenación, es decir, si α y β son caminos no triviales de la base, $\beta \cdot \alpha = \beta\alpha$ si $s(\beta) = t(\alpha)$, de lo contrario es cero. Si α es un camino en Q y e es un camino trivial, $\alpha \cdot e = \alpha$ si $e = s(\alpha)$, de forma similar $e \cdot \alpha = \alpha$ si $e = t(\alpha)$, de lo contrario es cero.

De la definición se obtiene una descomposición en suma directa del K -espacio vectorial KQ ,

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_n \oplus \cdots$$

donde Q_n denota el conjunto de caminos de longitud n y KQ_n denota el subespacio vectorial generado por Q_n . Es claro que $KQ_n \cdot KQ_m \subseteq KQ_{n+m}$, por consiguiente KQ es una K -álgebra \mathbb{N}_0 -graduada con la longitud de los caminos.

Lema 1.2.8. [7, Lemma 1.4] Sean Q un carcaj y KQ su álgebra de caminos, entonces

1. KQ es un álgebra asociativa,
2. KQ tiene elemento identidad si y solo si Q_0 es finito, y
3. KQ es finito dimensional si y solo si Q es finito y acíclico, es decir, no contiene ciclos.

Corolario 1.2.9. [7, Corollary 1.5] Sea Q un carcaj finito. El elemento $1 = \sum_{e \in Q_0} e$ es el elemento identidad de KQ y el conjunto $\{e \mid e \in Q_0\}$ de todos los caminos triviales es un conjunto completo de idempotentes ortogonales.

Definición 1.2.10. Sea Q un carcaj conexo. El ideal bilátero del álgebra de caminos KQ generado por Q_1 se llama **ideal de flechas** de KQ y se denota por R_Q . Un ideal bilátero I de KQ se dice **admisibile** si existe un entero $n \geq 2$ tal que

$$R_Q^n \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Observación 1.2.11. Todos los ideales considerados en adelante serán admisibles.

Definición 1.2.12. Sea Q un carcaj. Una **relación con coeficientes en K** es una combinación K -lineal de caminos de longitud al menos dos que tienen el mismo inicio y el mismo término. Así, una relación es un elemento de KQ de la forma

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i$$

con α_i un camino de longitud al menos dos, $s(\alpha_i) = s(\alpha_j)$, $t(\alpha_i) = t(\alpha_j)$ y $\lambda_i \in K$ para cada i, j . Si $m = 1$, la relación se denomina monomial, mientras que si la relación es de la forma $\alpha_1 - \alpha_2$ se llama relación de conmutatividad.

Proposición 1.2.13. [7, p. 55-56] Sean Q un carcaj finito e I un ideal admisibile de KQ . Entonces

1. la K -álgebra KQ/I es indescomponible si y solo si Q es un carcaj conexo,
2. KQ/I es una K -álgebra finito dimensional, y
3. el ideal I está generado por un conjunto finito de relaciones.

Definición 1.2.14. Un álgebra A es **monomial** si existe un carcaj Q y un ideal admisibile I generado por relaciones monomiales tales que A es isomorfa a KQ/I . Si además las relaciones son de longitud dos, se denomina **álgebra monomial cuadrática**.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de representaciones es el Teorema de Gabriel, el cual da una descripción de toda álgebra básica e indescomponible como cociente de un álgebra de caminos.

Teorema 1.2.15. [7, Teorema de P. Gabriel, Theorem 3.7] Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K -álgebra básica e indescomponible de dimensión finita. Existe un carcaj Q y un ideal admisible I tal que A es isomorfa a la K -álgebra KQ/I .

Observación 1.2.16. Dada $A = KQ/I$ con Q un carcaj finito e I un ideal admisible, no se va a diferenciar la notación para los elementos de KQ y los de A , el contexto dirá en donde se está trabajando.

1.3. Homología y cohomología de Hochschild

En esta sección se asocia a cada K -álgebra A y a cada A -módulo M una familia de K -espacios vectoriales, estos son los grupos de homología de Hochschild y los grupos de cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M . Todos los A -módulos se consideran a izquierda, salvo que se especifique otra cosa. Los resultados de esta sección se pueden encontrar por ejemplo en [9], [27] y [40].

Se escribe \otimes en lugar de \otimes_K y $A^{\otimes n}$ para denotar el producto tensorial $A \otimes \cdots \otimes A$ de A n -veces. Es claro que $A^{\otimes n}$ es un A - A -bimódulo con estructura

$$a(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)b = aa_1 \otimes \cdots \otimes a_nb,$$

por lo que se puede considerar a $A^{\otimes n}$ como un A^e -módulo a izquierda.

La función $b'_n : A^{\otimes n+2} \rightarrow A^{\otimes n+1}$ con $n \geq 0$ y definida por

$$b'_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

es un morfismo de A^e -módulos.

Proposición 1.3.1.

$$(A^{\otimes n}, b') : \cdots \rightarrow A^{\otimes n+2} \xrightarrow{b'_n} A^{\otimes n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow A^{\otimes 3} \xrightarrow{b'_1} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b'_0} A \rightarrow 0$$

es una resolución libre de A sobre A^e .

Demostración. Se puede encontrar una prueba en [9], Capítulo IX, Sección 6. □

Definición 1.3.2. La resolución de A

$$\mathbb{B}(A) : \cdots \rightarrow A^{\otimes n+2} \xrightarrow{b'_n} A^{\otimes n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow A^{\otimes 3} \xrightarrow{b'_1} A^{\otimes 2}$$

Se llama **resolución de Hochschild** de A o **resolución bar** de A . Además, se denomina **augmentación** de la resolución al morfismo $b'_0 : A \otimes A \rightarrow A$, dado por

$$b'_0(a \otimes b) = ab.$$

1.3.1. Homología de Hochschild

Dado un A - A -bimódulo M , si se aplica el functor $M \otimes_{A^e} (-)$ a la resolución bar de A , se obtiene el complejo de cadena

$$\cdots \rightarrow M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \xrightarrow{\partial_n} M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M \otimes_{A^e} A^{\otimes 3} \xrightarrow{\partial_1} M \otimes_{A^e} A^{\otimes 2} \rightarrow 0$$

donde el diferencial ∂_i es inducido por el diferencial b'_i para cada i . La homología del complejo anterior es la **homología de Hochschild** de A con coeficientes en M .

Para calcular la homología de Hochschild se suele usar la identificación

$$M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \cong M \otimes A^{\otimes n},$$

siempre que $n \geq 0$. Así, el complejo de cadena resultante es

$$(C_*(A, M), \delta_*) : \cdots \rightarrow M \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\delta_n} M \otimes A^{\otimes n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M \otimes A \xrightarrow{\delta_1} M \rightarrow 0$$

donde la componente de grado n -ésimo es $C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$ para $n > 0$, $C_0(A, M) = M$ y $C_n(A, M) = 0$ si $n < 0$. El n -ésimo diferencial inducido es

$$\begin{aligned} \delta_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}. \end{aligned}$$

Definición 1.3.3. *El n -ésimo grupo de homología de Hochschild de A con coeficientes en M es*

$$H_n(A, M) := H_n(C_*(A, M), \delta_*) = \frac{\ker(\delta_n)}{\text{Im}(\delta_{n+1})}.$$

Como caso particular, se denota por $HH_n(A)$ a $H_n(A, A)$.

Nótese que para todo n , $H_n(A, M)$ es un K -espacio vectorial.

Observación 1.3.4. *En cualquier complejo de cadena, los elementos de $\ker(\delta_n)$ se denominan n -ciclos y los elementos de $\text{Im}(\delta_{n+1})$ n -bordes.*

1.3.2. Cohomología de Hochschild

Puede definirse la cohomología de Hochschild aplicando el functor $\text{Hom}_{A^e}(-, M)$ a la resolución bar de A . Se obtiene el siguiente complejo de cocadena:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{\partial^1} \cdots \rightarrow \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n+1}, M) \xrightarrow{\partial^n} \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n+2}, M) \rightarrow \cdots$$

donde $\partial^i(f) = f \circ b'_i$ para cada $f \in \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes i+1}, M)$ e $i > 0$. La homología del complejo anterior es la **cohomología de Hochschild** de A con coeficientes en M .

Usando el isomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n+2}, M) &\cong \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, M) \\ f &\mapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

con $\tilde{f}(a) = f(1 \otimes a \otimes 1)$, se obtiene el complejo de cocadena $(C^*(A, M), \delta^*)$:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_K(A, M) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, M) \xrightarrow{\delta^n} \text{Hom}_K(A^{\otimes n+1}, M) \rightarrow \cdots$$

donde el n -ésimo diferencial $\delta_n : \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, M) \rightarrow \text{Hom}_K(A^{\otimes n+1}, M)$ está definido por

$$\begin{aligned} \delta^n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Definición 1.3.5. *El n -ésimo grupo de cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M es*

$$H^n(A, M) := H^n(C^*(A, M), \delta^*) = \frac{\ker(\delta^n)}{\text{Im}(\delta^{n-1})}.$$

Como caso particular, se denota por $HH^n(A)$ a $H^n(A, A)$.

Se nota también que para cada n , $H^n(A, M)$ es un K -espacio vectorial.

Observación 1.3.6. *En cualquier complejo de cocadena, los elementos de $\ker(\delta^n)$ se denominan n -cociclos y los elementos de $\text{Im}(\delta^{n-1})$ n -cobordes.*

Es claro que $A^{\otimes n+2} \cong A^e \otimes A^{\otimes n}$ es un isomorfismo de A^e -módulos a izquierda. Luego, si A es K -proyectivo, entonces $A^{\otimes n}$ es A^e -proyectivo y por lo tanto $A^{\otimes n+2}$ es A^e -proyectivo. Lo anterior dice que la resolución bar junto con la aumentación es una resolución proyectiva de A e implica el siguiente resultado.

Proposición 1.3.7. *Sean K un cuerpo, A una K -álgebra, M un A - A -bimódulo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\begin{aligned} H_*(A, M) &= \text{Tor}_*^{A^e}(A, M), \\ H^*(A, M) &= \text{Ext}_{A^e}^*(A, M). \end{aligned}$$

En este caso, tanto la homología como la cohomología de Hochschild no dependen de la resolución proyectiva de A sobre A^e que se elija.

Demostración. Una prueba se puede encontrar en [27, Proposition 1.1.13, Section 1.5] o en [9, Capítulo IX]. \square

Observación 1.3.8. [9, p. 181] *Para cada A - A -bimódulo M , la función*

$$H^n(A, D(M)) \rightarrow D(H_n(A, M))$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, y si A es una K -álgebra finitamente generada, entonces la función

$$H_n(A, D(M)) \rightarrow D(H^n(A, M))$$

es también un isomorfismo.

La homología y la cohomología de Hochschild tienen propiedades interesantes de invariancia.

Proposición 1.3.9. [27, Section 1.5.6] La cohomología de Hochschild es invariante Morita, es decir, si A y B son Morita equivalentes, entonces

$$\begin{aligned} H^*(A, M) &\cong H^*(B, Q \otimes_A M \otimes_A P), \\ H^*(B, N) &\cong H^*(A, P \otimes_B N \otimes_B Q). \end{aligned}$$

Para todo A - A -bimódulo M y todo B - B -bimódulo N , donde P y Q son como en la Definición 1.1.12.

Corolario 1.3.10. Si A y B son Morita equivalentes, entonces $HH^n(A)$ y $HH^n(B)$ son isomorfos como K -espacios vectoriales, para cada $n \geq 0$.

1.3.3. Cohomología de Hochschild en grados 0 y 1

De la definición de la cohomología de Hochschild se obtiene:

- La cohomología de Hochschild en grado 0 es

$$\begin{aligned} H^0(A, M) &= \ker(\delta^0) \\ &= \{m \in M \mid \delta^0(m) = 0\} \\ &= \{m \in M \mid \delta^0(m)(a) = am - ma = 0, \forall a \in A\}. \end{aligned}$$

En particular, si $M = A$ entonces $HH^0(A) = Z(A)$, es decir, $HH^0(A)$ es el centro de A .

- La cohomología en grado 1 es $H^1(A, M) = \ker(\delta^1) / \text{Im}(\delta^0)$, donde

$$\begin{aligned} \ker(\delta^1) &= \{f \in \text{Hom}_K(A, M) \mid \delta^1(f) = 0\} \\ &= \{f \in \text{Hom}_K(A, M) \mid \delta^1(f)(a \otimes b) = af(b) - f(ab) + af(b) = 0, \forall a, b \in A\} \\ &= \text{Der}_K(A, M), \end{aligned}$$

es decir, $\ker(\delta^1)$ es el espacio de derivaciones K -lineales de A en M . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{Im}(\delta^0) &= \{f \in \text{Hom}_K(A, M) \mid \text{existe } m \in M \text{ con } f = \delta^0(m)\} \\ &= \text{Der}_K^\circ(A, M), \end{aligned}$$

que es el espacio de K -derivaciones interiores de A en M .

De lo anterior se obtiene que $H^1(A, M) = \text{Der}_K(A, M) / \text{Der}_K^\circ(A, M)$.

1.3.4. Cohomología de Hochschild relativa a una subálgebra

Definición 1.3.11. Sean A una K -álgebra, E una subálgebra de A y M un A - A -bimódulo. Se define el **complejo de Hochschild E -relativo**, $C^*(A, E, M)$ como sigue:

$$C^0(A, E, M) = M^E = \{m \in M \mid sm = ms, \forall s \in E\}$$

y para $n > 0$, $C^n(A, E, M)$ consiste del K -módulo formado por los morfismos K -lineales $f: A^{\otimes n} \rightarrow M$, que satisfacen

$$\begin{aligned} f(sa_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= sf(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n), \\ f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n s) &= f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) s, \\ f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i s \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) &= f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes sa_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n). \end{aligned}$$

Los diferenciales $\delta^n : C^n(A, E, M) \rightarrow C^{n+1}(A, E, M)$ están dados, como antes, por:

$$\delta^n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}.$$

La cohomología de $(C^*(A, E, M), \delta^*)$ se llama **cohomología de Hochschild E -relativa** de A con coeficientes en M y se denota por $H^*(A, E, M)$.

Observación 1.3.12. ■ Si $K = E$ la cohomología de Hochschild K -relativa es la cohomología de Hochschild.

- Hay una inclusión de $C^n(A, E, M)$ en $C^n(A, M)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Estas inclusiones forman un morfismo de complejos e inducen morfismos de $H^n(A, E, M)$ en $H^n(A, M)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.3.13. [9] La cohomología relativa $H^*(A, E, M)$ puede calcularse como la cohomología del subcomplejo $\overline{C}^*(A, E, M)$ de $C^*(A, E, M)$ donde $\overline{C}^n(A, E, M)$ consiste de los elementos de $C^n(A, E, M)$ que cumplen $f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ si algún a_i pertenece a E .

Definición 1.3.14. Una K -álgebra A se dice **separable** si para toda extensión de cuerpos $K \subset L$, la L -álgebra $A_L = A \otimes L$ es semisimple.

Proposición 1.3.15. [40, Theorem 9.2.11] Sea A una K -álgebra. Son equivalentes:

1. A es una K -álgebra de dimensión finita y separable,
2. A es proyectiva como A^e -módulo a izquierda.
3. $H_n(A, M) = 0$ para todo $n \neq 0$ y todo bimódulo M .
4. $H^n(A, M) = 0$ para todo $n \neq 0$ y todo bimódulo M .

Proposición 1.3.16. [20, p. 125] Sea E una subálgebra separable de A . Entonces los morfismos inducidos por la inclusión

$$H^*(A, E, M) \rightarrow H^*(A, M)$$

son isomorfismos.

1.3.5. La resolución de Bardzell

En esta subsección se describe una resolución proyectiva minimal construida por Bardzell en [8] para álgebras monomiales finito dimensionales.

Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial de dimensión finita e I un ideal admisible generado por un conjunto minimal de relaciones monomiales R con la propiedad que cada elemento γ de R no tiene divisores en R salvo γ .

Sean $\Gamma_0 = Q_0$, $\Gamma_1 = Q_1$ y para $n > 1$ sea Γ_n el conjunto de n -concatenaciones que se define inductivamente de la siguiente manera: dado un camino α en Q se consideran los vértices correspondientes a inicios y términos de las flechas de α con orden \prec definido

por el recorrido en α . Sea $R(\alpha)$ el conjunto de caminos en R que son subcaminos de α . Fijando un elemento r_1 en $R(\alpha)$, considérese el conjunto

$$L_2 = \{r \in R(\alpha) \mid s(r_1) \prec s(r) \prec t(r_1)\}.$$

Si $L_2 \neq \emptyset$, sea $r_2 \in L_2$ tal que $s(r_2)$ es mínimo respecto a $s(r)$ para todo $r \in L_2$. Supóngase ahora que r_1, r_2, \dots, r_i se han construido y sea

$$L_{i+1} = \{r \in R(\alpha) \mid t(r_{i-1}) \prec s(r) \prec t(r_i)\}.$$

Si $L_{i+1} \neq \emptyset$, sea $r_{i+1} \in L_{i+1}$ tal que $s(r_{i+1})$ es mínimo respecto a $s(r)$ para todo $r \in L_{i+1}$.

Así, una **n -concatenación** es una $(n-1)$ -upla (r_1, \dots, r_{n-1}) de elementos de R . El subcamino de α con inicio $s(r_1)$ y término $t(r_{n-1})$ se denomina **soporte de la concatenación**. El conjunto de n -concatenaciones se denota por Γ_n .

Sea $\gamma \in \Gamma_n$ y sea $\text{Sub}(\gamma) = \{\gamma' \in \Gamma_{n-1} \mid \gamma = \beta\gamma'\alpha \text{ para algunos } \alpha, \beta \in Q\}$. Nótese que si $\gamma \in \Gamma_n$ y $\gamma' \in \text{Sub}(\gamma)$ con $n \geq 2$, se puede escribir a γ de la siguiente forma

$$\gamma = \mathbf{L}(\gamma')\gamma'\mathbf{R}(\gamma')$$

donde $\mathbf{L}(\gamma'), \mathbf{R}(\gamma') \in Q$. Además, $\mathbf{L}(\gamma')$ y $\mathbf{R}(\gamma')$ no tienen subcaminos en R [8, Lemma 3.4].

Como caso particular, el Lema 3.3 de [8] dice que si $n \geq 1$ y $\gamma \in \Gamma_{2n+1}$ entonces $|\text{Sub}(\gamma)| = 2$, luego $\text{Sub}(\gamma) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ y se puede escribir a γ de dos formas:

$$(1.1) \quad \gamma = \mathbf{L}(\gamma_1)\gamma_1 = \gamma_2\mathbf{R}(\gamma_2).$$

La **resolución proyectiva minimal de Bardzell** se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{R} : \quad \cdots \rightarrow A|K\Gamma_n|A \xrightarrow{\mathbf{b}_n} A|K\Gamma_{n-1}|A \rightarrow \cdots \rightarrow A|K\Gamma_1|A \xrightarrow{\mathbf{b}_1} A|K\Gamma_0|A$$

donde se denota con $|$ el producto tensorial sobre la subálgebra separable de A generada por los vértices, es decir, sobre $E = KQ_0$, y con los diferenciales como sigue

$$\mathbf{b}_1(1|a|1) = a|s(a)|1 - 1|t(a)|a,$$

$$\mathbf{b}_{2n}(1|\gamma|1) = \sum_{\gamma' \in \text{Sub}(\gamma)} \mathbf{L}(\gamma')|\gamma'|\mathbf{R}(\gamma'),$$

$$\mathbf{b}_{2n+1}(1|\gamma|1) = \mathbf{L}(\gamma_1)|\gamma_1|1 - 1|\gamma_2|\mathbf{R}(\gamma_2),$$

donde γ_1 y γ_2 son como en la Ecuación (1.1). Nótese que $\mathbf{b}_0 : A|K\Gamma_0|A \rightarrow A$ con $\mathbf{b}_0(1|e|1) = e$ es la aumentación.

Observación 1.3.17. ■ *La descripción de la resolución \mathcal{R} es equivalente a la dada por Bardzell, debido al isomorfismo de A -bimódulos*

$$\bigoplus_{\gamma \in \Gamma_n} At(\gamma) \otimes s(\gamma)A \cong A|K\Gamma_n|A$$

donde $\beta t(\gamma) \otimes s(\gamma)\alpha \mapsto \beta|\gamma|\alpha$ con $\alpha, \beta \in A$ y $\gamma \in \Gamma_n$.

■ *Sköldbberg demuestra la exactitud de la resolución en [37, Theorem 1].*

En el caso de que A sea un álgebra monomial, la cohomología de Hochschild con coeficientes en A se puede calcular usando la resolución minimal de Bardzell. Así, aplicando el functor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$ a \mathcal{R} y el isomorfismo $\text{Hom}_{A^e}(A|K\Gamma_n|A, A) \cong \text{Hom}_{E^e}(K\Gamma_n, A)$ se obtiene el complejo de cocadena

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(K\Gamma_0, M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(K\Gamma_n, A) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \text{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{n+1}, A) \rightarrow \cdots$$

donde

$$\delta^1(f)(a) = af(s(a)) - f(t(a))a,$$

$$(1.2) \quad \delta^{2n}(f)(\gamma) = \sum_{\gamma' \in \text{Sub}(\gamma)} \mathbf{L}(\gamma')f(\gamma')\mathbf{R}(\gamma'),$$

$$\delta_{2n+1}(f)(\gamma) = \mathbf{L}(\gamma_1)f(\gamma_1) - f(\gamma_2)\mathbf{R}(\gamma_2),$$

donde γ_1 y γ_2 son como en la Ecuación (1.1).

1.4. Álgebras de Lie

Definición 1.4.1. Una K -álgebra de Lie \mathfrak{g} es un K -espacio vectorial con una función bilineal antisimétrica

$$[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que satisface la identidad de Jacobi

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

La función bilineal se llama **corchete de Lie**.

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , una **subálgebra de Lie** \mathfrak{h} de \mathfrak{g} es un subespacio vectorial de \mathfrak{g} que cumple $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Un subconjunto I se llama **ideal** de \mathfrak{g} si I es un subespacio de \mathfrak{g} y se verifica que $[I, \mathfrak{g}] \subset I$.

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es **abeliana** si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Se define inductivamente la **serie derivada** de \mathfrak{g} por

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}] \quad \forall n \geq 1.$$

Para cada n , \mathfrak{g}^n es un ideal de \mathfrak{g} y se cumple

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \cdots$$

El álgebra de Lie \mathfrak{g} es **nilpotente** si $\mathfrak{g}^n = 0$ para algún $n \geq 1$. Por otro lado, se define la **serie central** de la siguiente manera

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}] \quad \forall n \geq 1.$$

También vale que $\mathfrak{g}^{(n)}$ es un ideal para cada $n \geq 1$ y se cumple

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(2)} \supseteq \cdots$$

El álgebra de Lie \mathfrak{g} es **soluble** si $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ para algún $n \geq 0$. Nótese que toda álgebra nilpotente es soluble.

1.4.1. Estructura de Gerstenhaber

En esta subsección se muestra que la cohomología de Hochschild posee una estructura de álgebra de Gerstenhaber.

Definición 1.4.2. Una K -álgebra graduada $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n$ con producto asociativo

$$\smile: H^m \times H^n \rightarrow H^{m+n}$$

se dice un **álgebra de Gerstenhaber** si tiene un corchete

$$[-, -]: H^m \times H^n \rightarrow H^{m+n-1} \quad \forall n, m \geq 0$$

que verifica para cada $a \in H^m$, $b \in H^n$ y $c \in H^t$ las siguientes propiedades:

1. $a \smile b = (-1)^{mn} b \smile a$ (conmutatividad),
2. $[a, b] = -(-1)^{(m-1)(n-1)} [b, a]$ (antisimetría),
3. $(-1)^{(m-1)(t-1)} [[a, b], c] + (-1)^{(n-1)(m-1)} [[b, c], a] + (-1)^{(t-1)(n-1)} [[c, a], b] = 0$ (identidad de Jacobi graduada),
4. $[a \smile b, c] = [a, c] \smile b + (-1)^{m(t-1)} a \smile [b, c]$ (identidad de Poisson).

Gerstenhaber muestra en [15] que la cohomología de Hochschild de un álgebra A con coeficientes en A es un álgebra de Gerstenhaber. El producto y el corchete se definen en el complejo de Hochschild por medio de fórmulas explícitas.

Observación 1.4.3. Es importante resaltar que por ser $HH^\bullet(A)$ un álgebra de Gerstenhaber, se obtiene que $HH^1(A)$ es una subálgebra de Lie y actúa en $HH^n(A)$ con $n > 1$ por medio de la acción adjunta, es decir, usando el corchete de Gerstenhaber.

Nótese que el complejo de cocadena $(C^*(A, M), \delta^*)$ de la Sección 1.3.2 posee como espacio vectorial graduado subyacente a $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \text{Hom}_K(A^{\otimes i}, M)$.

Definición 1.4.4. Sean $f \in \text{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$ y $g \in \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$ elementos homogéneos, el **producto cup** de f y g es el elemento $f \smile g \in \text{Hom}_K(A^{\otimes(m+n)}, A)$ definido por

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m)g(a_{m+1} \otimes \cdots \otimes a_{m+n}).$$

El siguiente lema garantiza que la fórmula anterior define un producto, también llamado producto cup en la cohomología de Hochschild.

Lema 1.4.5. [15, Section 7] Sean f y g elementos homogéneos de grados m y n respectivamente, y sea δ^\bullet el diferencial definido en la Ecuación (1.2). El producto cup satisface

$$\delta^{n+m}(f \smile g) = \delta^n(f) \smile g + (-1)^{mn} f \smile \delta^m(g).$$

El corchete de Gerstenhaber puede obtenerse a partir de una operación intermedia denominada asociador, como sigue:

Definición 1.4.6. Sean $f \in \text{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$ y $g \in \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$, el **asociador** de f y g es un elemento de $\text{Hom}_K(A^{\otimes(m+n-1)}, A)$ denotado por $f \bullet g$ tal que evaluado en $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n-1} \in A^{\otimes(m+n-1)}$ es

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{(i-1)(n-1)} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+n-1}) \otimes a_{i+n} \otimes \cdots \otimes a_{m+n-1}).$$

El corchete de Gerstenhaber está definido por

$$[f, g] = f \bullet g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g \bullet f.$$

Teorema 1.4.7. [15, Theorem 3] Sean $f \in \text{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$ y $g \in \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$, la siguiente igualdad vale.

$$\delta^{n+m-1}(f \bullet g) = f \bullet \delta^n(g) + (-1)^{n-1} \delta^m(f) \bullet g + (-1)^{n-1} (f \smile g - (-1)^{mn} g \smile f).$$

Del teorema anterior se obtiene que si f y g son cociclos, entonces

$$\delta^{n+m-1}(f \bullet g) = (-1)^{n-1} (f \smile g - (-1)^{mn} g \smile f).$$

Luego $f \smile g = (-1)^{mn} g \smile f$ en $\oplus_{i \in \mathbb{N}} HH^i(A)$. Es decir, $(\oplus_{i \in \mathbb{N}} HH^i(A), \smile)$ es un álgebra graduada conmutativa. De hecho, este fue el origen de la estructura de Gerstenhaber en la cohomología de Hochschild.

Ahora, para $f \in \text{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$, $g \in \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$ y $h \in \text{Hom}_K(A^{\otimes t}, A)$, el corchete $[-, -]$ definido satisface:

1. $[f, g] = -(-1)^{(m-1)(n-1)} [g, f]$,
2. $(-1)^{(m-1)(t-1)} [[f, g], h] + (-1)^{(n-1)(m-1)} [[g, h], f] + (-1)^{(t-1)(n-1)} [[h, f], g] = 0$,
3. $\delta^{m+n-1}([f, g]) = [f, \delta^n(g)] + (-1)^{n-1} [\delta^m(f), g]$.

Los dos primeros ítems dicen que $(C^*(A, A), [-, -])$ es un anillo de Lie graduado, mientras que el tercer ítem implica que el corchete induce una operación en $\oplus_{i \in \mathbb{N}} HH^i(A)$. Así, $(\oplus_{i \in \mathbb{N}} HH^i(A), [-, -])$ es un álgebra de Lie graduada.

Por último, Gerstenhaber prueba que \smile y $[-, -]$ están relacionados por medio de la **identidad de Poisson** [15, Section 8, Corollary 2], es decir,

$$[f \smile g, h] = [f, h] \smile g + (-1)^{m(t-1)} f \smile [g, h]$$

para cada $f \in \text{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$, $g \in \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$ y $h \in \text{Hom}_K(A^{\otimes t}, A)$.

1.5. Álgebras de grafos de Brauer

En esta sección se dan las definiciones básicas relacionadas con álgebras de grafos de Brauer y específicamente con álgebras de grafos de Brauer con multiplicidad idénticamente igual a 1. Se muestran algunos resultados que relacionan a las álgebras gentiles con las álgebras de grafos de Brauer.

Definición 1.5.1. Un **grafo de Brauer** G es una cuádrupla $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$ donde

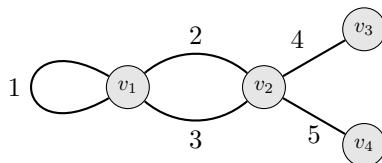
- (G_0, G_1) es un grafo finito no orientado con conjunto de vértices G_0 y conjunto de aristas G_1 ,
- $\mathbf{m} : G_0 \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ es una función, denominada **función multiplicidad** o **multiplicidad** de G ,
- \mathbf{o} se llama **orden cíclico** de G : en cada vértice v de G se ordenan las aristas que inciden en v de forma cíclica y en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que si v es un vértice en el cual incide en una sola arista i con $\mathbf{m}(v) = 1$, entonces el orden cíclico en v es i , mientras que si $\mathbf{m}(v) > 1$, entonces el orden cíclico se da por $i < i$.

Definición 1.5.2. Sea G un grafo, la **valencia** del vértice $v \in G_0$ que se denota $\text{val}_G(v)$ es igual a la cantidad de aristas que inciden en v , cuando la arista es un bucle se cuenta dos veces.

Definición 1.5.3. Una arista i en el vértice v se llama **truncada** si $\mathbf{m}(v)\text{val}_G(v) = 1$. Si la arista i es truncada en sus dos vértices, entonces G es el grafo de Brauer dado por una arista con dos vértices y función multiplicidad 1, y el álgebra de grafos de Brauer correspondiente se define como $K[x]/\langle x^2 \rangle$.

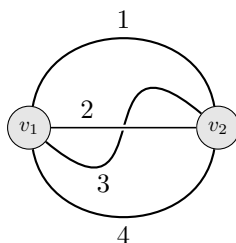
En los siguientes ejemplos se fija el orden cíclico \mathbf{o} dado por el sentido de las manecillas del reloj.

Ejemplo 1.5.4. Considere el grafo de Brauer $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$ dado por



donde $\mathbf{m}(v) = 1$ par cada $v \in G_0 \setminus \{v_2\}$ y $\mathbf{m}(v_2) = 3$. El orden cíclico \mathbf{o} de las aristas que inciden en el vértice v_1 es $1 < 1 < 2 < 3 < 1$, en el vértice v_2 es $2 < 4 < 5 < 3 < 2$, en los vértices v_3 y v_4 es 4 y 5 respectivamente. Además, $\text{val}(v_1) = \text{val}(v_2) = 4$ y $\text{val}(v_3) = \text{val}(v_4) = 1$.

Ejemplo 1.5.5. Sea $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$ como sigue



con $\mathbf{m}(v_1) = 2$ y $\mathbf{m}(v_2) = 3$. El orden cíclico en v_1 es $1 < 2 < 3 < 4 < 1$ y en v_2 es $1 < 4 < 2 < 3 < 1$. Además, $\text{val}(v_1) = \text{val}(v_2) = 4$.

1.5.1. Carcaj de un álgebra de grafos de Brauer

Sean G un grafo de Brauer y v un vértice de G tal que las aristas que inciden en v son i_1, \dots, i_n (si $i_j = i_k$ para algunos valores j, k , entonces i_j es un bucle) y tienen orden cíclico $i_1 < i_2 < \dots < i_n < i_1$. Se dice que i_k es un **sucesor** de i_j en v si $1 \leq j \leq k \leq n$. Como casos particulares i_k es el **sucesor inmediato** de i_j si $k = j + 1$ y además i_1 es el sucesor inmediato de i_n . De forma similar se define **predecesor** y **predecesor inmediato**.

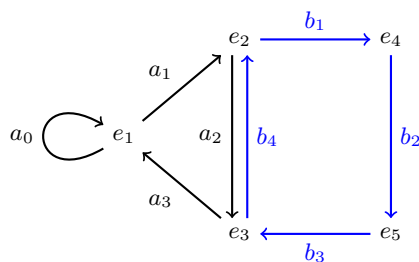
Nótese que si v es un vértice de la arista a con $val_G(v) = 1$ y $\mathbf{m}(v) = 1$, entonces no hay predecesores y tampoco sucesores de a , mientras que si $val_G(v) = 1$ y $\mathbf{m}(v) > 1$, a es predecesor y sucesor de sí mismo.

Dado un grafo de Brauer G , se define el carcaj $Q_G = (Q_0, Q_1)$ de la siguiente manera: el conjunto de vértices Q_0 es el conjunto de aristas G_1 , denotando el vértice correspondiente a la arista $i \in G_1$ por $e_i \in Q_0$. Las flechas en Q se dan por el orden cíclico \mathbf{o} de G , es decir, si i y j son aristas en G que inciden en el vértice v y j es el sucesor inmediato de i , entonces existe una flecha a de e_i a e_j .

Cabe destacar que si i es una arista del vértice no truncado v ($\mathbf{m}(v)val_G(v) \geq 2$), entonces hay un ciclo orientado $C_{v,i}$ en Q_G con origen y término el vértice e_i , que es el ciclo determinado al recorrer una vez el orden cíclico del vértice v empezando en la arista i .

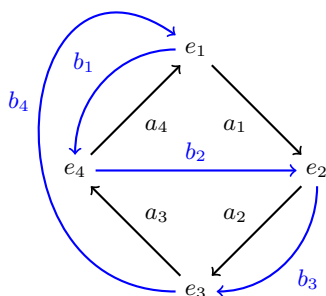
Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.5.6. *El carcaj correspondiente al Ejemplo 1.5.4 es*



El ciclo $C_{v_2,4}$ es $b_1b_4b_3b_2$, mientras que hay dos ciclos $C_{v_1,1}$, estos son $a_3a_2a_1a_0$ y $a_0a_3a_2a_1$.

Ejemplo 1.5.7. *El carcaj correspondiente al Ejemplo 1.5.5 es*



El ciclo $C_{v_2,3}$ es $b_3b_2b_1b_4$ y $C_{v_1,4}$ es $a_3a_2a_1a_4$.

1.5.2. Conjunto de relaciones y álgebra de grafos de Brauer

Se define el **ideal de relaciones** I_G en KQ_G generado por los siguientes tres tipos de elementos.

- **Relaciones de tipo I:** para cada $v, v' \in G_0$ y cada vértice $e_i \in Q_0$ tal que la arista i tiene vértices v, v' , la relación

$$C_{v,i}^{\mathbf{m}(v)} - C_{v',i}^{\mathbf{m}(v')}$$

siempre que ambos vértices sean no truncados.

- **Relaciones de tipo II:** para cada vértice $e_i \in Q_0$ y cada vértice en $v \in G_0$, la relación

$$a_1 C_{v,i}^{\mathbf{m}(v)},$$

con $C_{v,i} = a_n \cdots a_1$.

- **Relaciones de tipo III:** para cada $a, b \in Q_1$ el camino

$$ba$$

siempre que ba no sea un subcamino de un ciclo $C_{v,i}$ para cada $v \in G_0$ y $e_i \in Q_0$, con la siguiente salvedad: $a = b$ es un bucle asociado a un vértice $v \in G_0$ con valencia $val_G(v) = 1$ y multiplicidad $\mathbf{m}(v) > 1$.

Definición 1.5.8. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. El álgebra $A = KQ_G/I_G$ se llama **álgebra de grafos de Brauer** asociada a G .

Observación 1.5.9. Es importante notar que las álgebras de grafos de Brauer son álgebras simétricas finito dimensionales [36], es decir, si A es un álgebra de grafos de Brauer, entonces A es un álgebra de dimensión finita isomorfa como A - A -bimódulo al bimódulo dual $DA = \text{Hom}_K(A, K)$ con estructura dada por $bfa(x) = f(axb)$ para cada $a, b \in A$ y $f \in DA$.

Ejemplo 1.5.10. Si G es como en el Ejemplo 1.5.4, el carcaj es como en el Ejemplo 1.5.6 y las relaciones son las siguientes:

- Tipo I: $a_3a_2a_1a_0 - a_0a_3a_2a_1$, $a_1a_0a_3a_2 - (b_4b_3b_2b_1)^3$ y $a_2a_1a_0a_3 - (b_3b_2b_1b_4)^3$.
- Tipo II: $a_0a_3a_2a_1a_0$, $a_1a_0a_3a_2a_1$, $a_2a_1a_0a_3a_2$, $a_3a_2a_1a_0a_3$, $b_1(b_4b_3b_2b_1)^3$, $b_2(b_1b_4b_3b_2)^3$, $b_3(b_2b_1b_4b_3)^3$ y $b_4(b_3b_2b_1b_4)^3$.
- Tipo III: a_1a_3 , b_1a_1 , a_2b_4 , a_3b_3 y b_4a_2 .

Ejemplo 1.5.11. Para el grafo de Brauer del Ejemplo 1.5.5 y su carcaj correspondiente en el Ejemplo 1.5.7 las relaciones son:

Tipo I: $(a_4a_3a_2a_1)^2 - (b_4b_3b_2b_1)^3$, $(a_1a_4a_3a_2)^2 - (b_2b_1b_4b_3)^3$, $(a_2a_1a_4a_3)^2 - (b_3b_2b_1b_4)^3$ y $(a_3a_2a_1a_4)^2 - (b_1b_4b_3b_2)^3$.

Tipo II: $a_1(a_4a_3a_2a_1)^2$, $a_2(a_1a_4a_3a_2)^2$, $a_3(a_2a_1a_4a_3)^2$, $a_4(a_3a_2a_1a_4)^2$, $b_1(b_4b_3b_2b_1)^3$, $b_2(b_1b_4b_3b_2)^3$, $b_3(b_2b_1b_4b_3)^3$ y $b_4(b_3b_2b_1b_4)^3$.

Tipo III: b_1a_4 , b_3a_1 , b_4a_2 , b_2a_3 , a_1b_4 , a_2b_2 , a_3b_3 y a_4b_1 .

1.5.3. Grafo de ribbon

Los grafos de Brauer se interpretan desde un punto de vista geométrico por medio de grafos de ribbon [28], estos definen una superficie orientada compacta donde la orientación de la superficie está inducida por el orden cíclico del grafo de ribbon [24].

Definición 1.5.12. *Un grafo de ribbon es una quintupla $G = (G_0, G'_1, s, \iota, \sigma)$, donde*

- G_0 es un conjunto finito de vértices,
- G'_1 es un conjunto finito de elementos denominados aristas partidas,
- $s : G'_1 \rightarrow G_0$ es una función, envía cada arista partida en su vértice adyacente,
- $\iota : G'_1 \rightarrow G'_1$ es una involución sin puntos fijos que pega aristas partidas,
- $\sigma : G'_1 \rightarrow G'_1$ es una permutación cuyas órbitas corresponden a $s^{-1}(v)$ para cada $v \in G_0$.

La definición de grafo de ribbon dice que es un grafo no orientado con un orden cíclico que ordena las aristas alrededor de cada vértice. Como ejemplo ver la Figura 1.2 del Ejemplo 1.5.22.

Definición 1.5.13. *Un grafo de ribbon marcado es un grafo de ribbon junto con una función inyectiva $m : G_0 \rightarrow G'_1$ tal que para cada vértice $v \in G_0$, $m(v) \in s^{-1}(v)$.*

La definición anterior dice que un grafo de ribbon marcado es un grafo de ribbon en el que se elige una arista cortada $m(v)$ alrededor de cada vértice v .

1.5.4. Álgebras gentiles y álgebras de grafos de Brauer

En esta subsección se definen las álgebras gentiles y se muestra la conexión con las álgebras de grafos de Brauer por medio de la extensión trivial, para más detalles consultar [35].

Definición 1.5.14. *Un álgebra Λ se llama gentil si es Morita equivalente a un álgebra KQ/I que satisface las siguientes propiedades:*

1. para cada vértice e , existen a lo sumo dos flechas con término en e y existen a lo sumo dos flechas con inicio en e ,
2. para cada flecha a existe a lo sumo una flecha b tal que $ba \notin I$ y existe a lo sumo una flecha c tal que $ac \notin I$,
3. para cada flecha a existe a lo sumo una flecha b tal que $ba \in I$ y existe a lo sumo una flecha c tal que $ac \in I$,
4. I está generado por un conjunto de caminos de longitud 2.

Observación 1.5.15. *Nótese que el carcaj que consiste de un vértice y dos bucles no es un álgebra gentil, ya que un álgebra gentil es de dimensión finita.*

Definición 1.5.16. La *extensión trivial* $TA = A \rtimes DA$ es el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es $A \oplus DA$ y cuyo producto está dado por $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$ para cada $a, b \in A$ y $f, g \in DA$.

El siguiente teorema da una caracterización de las álgebras gentiles por medio de la extensión trivial:

Teorema 1.5.17. [35, p. 2-3] Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. Un álgebra A es un álgebra de grafos de Brauer con función multiplicidad uno si y solo si A es la extensión trivial de un álgebra gentil.

Grafo de ribbon marcado de un álgebra gentil

De [35] se sabe que a cada álgebra gentil Λ se le asocia un grafo de ribbon G_Λ cuya estructura subyacente está determinada por el conjunto de caminos maximales de Λ . La estructura del grafo de ribbon en el sentido del orden cíclico de las aristas alrededor de un vértice está también inducida por los caminos maximales.

Definición 1.5.18. Para $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil sean:

- \mathcal{M} el conjunto de caminos maximales en (Q, I) , es decir, caminos $\alpha \notin I$ tales que $a\alpha, \alpha a \in I$ para cada flecha a .
- \mathcal{M}_0 el conjunto de vértices e tales que e es el inicio o el término de una sola flecha, o bien e es el término de una única flecha a y el inicio de una única flecha b tal que $ba \notin I$.
- $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \mathcal{M}_0$, llamado *conjunto aumentado de caminos maximales*.

Ejemplo 1.5.19. Sea Λ el álgebra gentil dada por el siguiente carcaj y con relaciones $R = \{b_1a_1, a_5b_2\}$. El conjunto aumentado de caminos maximales es

$$\overline{\mathcal{M}} = \{a_5a_4a_3a_2a_1, b_2b_1, e_1, e_3, e_4, e_6, e_7\}.$$

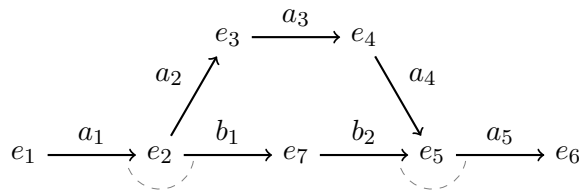


Figura 1.1. Carcaj del álgebra gentil Λ del Ejemplo 1.5.19. Se codifica con una línea punteada gris cada relación que genera el ideal de relaciones del álgebra.

Observación 1.5.20. Por lo general se van a graficar las relaciones que definen al álgebra gentil en el carcaj, por medio de líneas punteadas grises.

Definición 1.5.21. El *grafo de ribbon marcado* G_Λ se define como sigue.

- El conjunto de vértices de G_Λ es $\overline{\mathcal{M}}$.

- Para cada vértice de G_Λ correspondiente a un camino α , existe una arista partida adyacente y etiquetada con i para cada vértice e_i de Q por el cual pasa α . Esto incluye los vértices en los que α empieza y termina. Además, si α pasa a través de e_i dos veces (es decir, α es un bucle), entonces hay una arista partida etiquetada con i por cada ocurrencia.
- Para cada vértice e_i de Q existen exactamente dos aristas partidas etiquetadas con i . La involución ι envía una en la otra.
- Para cada vértice α de G_Λ , los vértices a través de los cuales pasa el camino α se ordenan desde el vértice inicial hasta el vértice final. La permutación σ envía cada vértice en este orden al siguiente, con la propiedad adicional de que el vértice final de α se envía al vértice inicial.
- La función m lleva cada camino α a la arista partida etiquetada con el vértice final del camino α . En otras palabras, m identifica las aristas partidas sucesivas correspondientes a los vértices donde comienza y termina α .

Ejemplo 1.5.22. El grafo de ribbon marcado del álgebra gentil del Ejemplo 1.5.19 es como sigue, donde $a = a_5a_4a_3a_2a_1$ y $b = b_2b_1$.

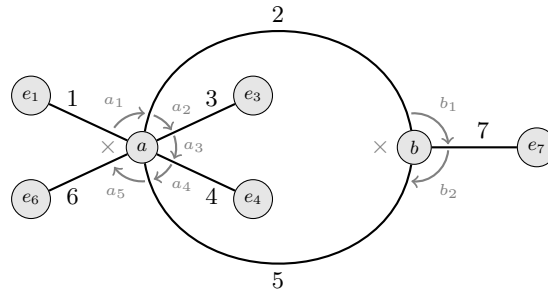


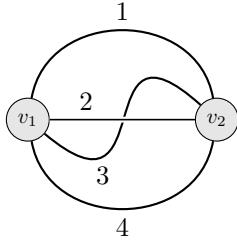
Figura 1.2. Grafo de ribbon marcado del álgebra gentil del Ejemplo 1.5.19. Aparecen las flechas del carcaj en el orden que corresponde, el símbolo \times representa la identificación que hace m en los casos donde el vértice tiene más de una arista.

Observación 1.5.23. De ahora en adelante en el grafo de ribbon aparecerán las flechas del carcaj y el símbolo \times (en color negro) para codificar toda la información.

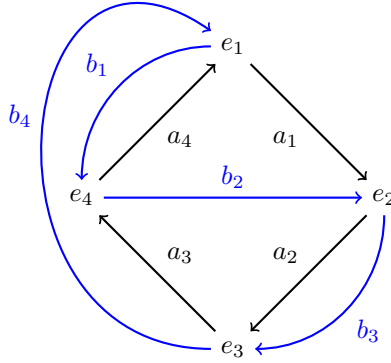
1.5.5. Cortes admisibles de álgebras de grafos de Brauer y álgebras gentiles

Definición 1.5.24. Sea $A = KQ/I$ un álgebra de grafos de Brauer con grafo de Brauer G y multiplicidad \mathbf{m} idénticamente 1. Un **corte admisible** Δ de Q es un conjunto de flechas que contiene exactamente una flecha de cada ciclo C_v (salvo rotación) determinado por el orden cíclico en v , donde v es un vértice de G con $\text{val}_G(v) \neq 1$.

Ejemplo 1.5.25. Considérese el álgebra de grafos de Brauer A con grafo de Brauer G_A y multiplicidad idénticamente 1, y su respectivo carcaj Q_A como en las figuras.



Grafo de Brauer G_A



Carcaj Q_A

Los cortes $\Delta_1 = \{a_1, b_1\}$ y $\Delta_2 = \{a_3, b_4\}$ son admisibles. En este caso los ciclos C_{v_1} y C_{v_2} son los determinados por las flechas a_i y b_j respectivamente para $1 \leq i, j \leq 4$.

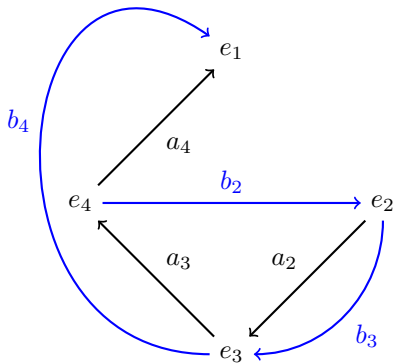
Definición 1.5.26. Se define el **álgebra de corte** con corte admisible Δ como el álgebra $A_\Delta = KQ/\langle I \cup \Delta \rangle$, donde $\langle I \cup \Delta \rangle$ es el ideal de KQ generado por $I \cup \Delta$.

Los siguientes resultados importantes respecto a cortes admisibles de grafos de Brauer con multiplicidad idénticamente 1 aparecen en [35].

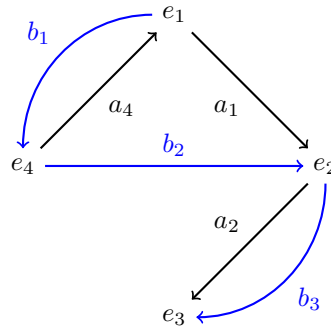
Teorema 1.5.27. [35, Section 4] Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado, y $A = KQ/I$ un álgebra de grafos de Brauer con grafo de Brauer G y función multiplicidad idénticamente 1. Considere un corte admisible Δ de Q , entonces A_Δ es un álgebra gentil y el grafo de ribbon de A_Δ (completando el orden cíclico en cada vértice) es igual a G .

Corolario 1.5.28. [35, Section 4] Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. Cada álgebra gentil Λ es el corte admisible de una única álgebra de grafos de Brauer A , donde A es la extensión trivial de Λ . Recíprocamente, cada álgebra de grafos de Brauer con función de multiplicidad idénticamente 1 es la extensión trivial de un álgebra gentil, no necesariamente única.

Ejemplo 1.5.29. Las álgebras gentiles determinadas por los cortes admisibles Δ_1 y Δ_2 en el Ejemplo 1.5.25 tienen los siguientes carcajes:



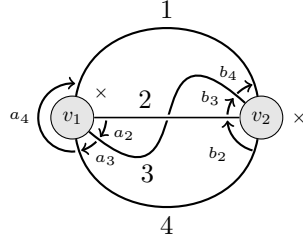
Carcaj del álgebra A_{Δ_1}



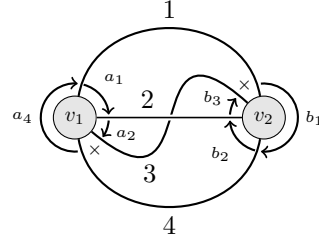
Carcaj del álgebra A_{Δ_2}

donde $A_{\Delta_1} \cong K(Q \setminus \Delta_1) / \langle a_2 b_2, a_3 b_3, b_4 a_2, b_2 a_3 \rangle$ y $A_{\Delta_2} \cong K(Q \setminus \Delta_2) / \langle b_1 a_4, a_4 b_1, b_3 a_1, a_2 b_2 \rangle$.

Observación 1.5.30. *Nótese que los grafos de ribbon marcados tienen el símbolo \times exactamente donde se corta el orden cíclico.*



Grafo de ribbon marcado $G_{A_{\Delta_1}}$



Grafo de ribbon marcado de $G_{A_{\Delta_2}}$

1.6. Álgebras de configuración de Brauer

En esta sección se recuerdan las definiciones básicas relacionadas con álgebras de tipo Brauer y específicamente, el caso en el cual la configuración de Brauer tiene multiplicidad idénticamente 1. Se muestran algunos resultados que relacionan a las álgebras casi gentiles con las álgebras de tipo Brauer.

1.6.1. Configuración de Brauer

Definición 1.6.1. *Una configuración de Brauer reducida G es una cuádrupla $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$ donde*

- G_0 es un conjunto finito cuyos elementos se denominan *vértices*,
- G_1 es una colección finita de multiconjuntos de vértices que se denominan **polígonos**, es decir, si $V \in G_1$, entonces los elementos de V son vértices, posiblemente con repeticiones.
- $\mathbf{m} : G_0 \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ es una función, denominada **función multiplicidad** o **multiplicidad** de G ,
- un vértice $w \in G_0$ se denomina **truncado** si $\mathbf{m}(w) = 1$ y w ocurre exactamente una vez en un polígono V . La suma sobre los polígonos V del número de veces que el vértice w ocurre en V es la **valencia** de w y se denota con $\text{val}_G(w)$. El **orden cíclico** \mathbf{o} se elige para cada vértice no truncado $w \in G_0$ de un orden cíclico de los polígonos que contienen a w , contando repeticiones.

Además se requiere que $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$ satisfaga:

1. cada vértice en G_0 es un vértice de al menos un polígono,
2. cada polígono en G_1 tiene al menos dos vértices,
3. cada polígono en G_1 tiene al menos un vértice tal que $\text{val}_G(w)\mathbf{m}(w) > 1$,
4. si w es un vértice del polígono V y $\text{val}_G(w)\mathbf{m}(w) = 1$, es decir, w es truncado, entonces $V = \{w, w'\}$.

Observación 1.6.2. La configuración de Brauer se denomina reducida por el ítem 4 (ver [18]), en esta tesis se trabaja con la configuración reducida.

Ejemplo 1.6.3. Supóngase que $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$ está dado por $G_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $G_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ donde $V_1 = \{1, 1, 2, 3\}$, $V_2 = \{2, 3\}$, $V_3 = \{1, 3, 3\}$ y $V_4 = \{4, 2\}$. La multiplicidad en cada vértice es $\mathbf{m}(1) = \mathbf{m}(3) = 2$, $\mathbf{m}(2) = 3$ y $\mathbf{m}(4) = 1$, y \mathbf{o} está dado por:

- en el vértice 1: $V_1 < V_1 < V_3$,
- en el vértice 2: $V_2 < V_1 < V_4$,
- en el vértice 3: $V_1 < V_2 < V_3 < V_3$.

Observación 1.6.4. Un grafo de Brauer es una configuración de Brauer con la restricción de que cada polígono es un conjunto con dos vértices.

Definición 1.6.5. Si $V_1 < V_2 < \dots < V_m$ es el orden en el vértice w , se dice que V_{i+1} es el *sucesor* de V_i para $1 < i < m$ con $V_{m+1} = V_1$.

Realización de una configuración de Brauer

Una **realización** de una configuración de Brauer es una representación gráfica de la configuración. Para esto, cada polígono en G_1 es un polígono usual, es decir, si $V = \{w_1, \dots, w_n\}$ es un polígono en G_1 , se obtiene un n -ágono en la representación gráfica con los vértices etiquetados con w_i . Generalmente hay muchas formas de realizar el etiquetado, pero solo una se elige. Si w aparece más de una vez en el vértice, entonces w se pliega automáticamente y se identifican todas las repeticiones con el mismo vértice en el n -ágono. Además, se identifican los vértices de G_0 que ocurren en más de un polígono.

Ejemplo 1.6.6. Una realización de la configuración de Brauer del Ejemplo 1.6.3 es

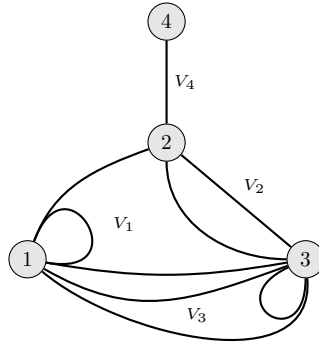


Figura 1.3. Realización de la configuración de Brauer del Ejemplo 1.6.3.

1.6.2. Carcaj de un álgebra de configuración de Brauer

Sea $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$ una configuración de Brauer con $G_1 = \{V_1, \dots, V_m\}$, se define el carcaj Q_G de la siguiente manera. El conjunto de vértices $\{e_1, \dots, e_m\}$ de Q_G se corresponde con el conjunto de polígonos $\{V_1, \dots, V_m\}$ en G_1 . Para definir las flechas de Q_G se usa el

orden \mathbf{o} , para cada v3rtice no truncado w , si V' es el sucesor de V en w , existe una flecha de e en e' en Q_G , donde e y e' son los v3rtices correspondientes en Q_G asociados a los pol3gonos V y V' respectivamente.

Ejemplo 1.6.7. *El carcaj de la configuraci3n de Brauer del Ejemplo 1.6.3 es*

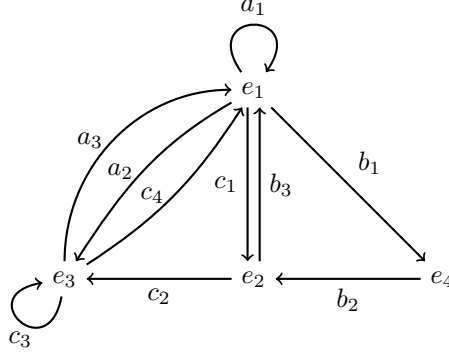


Figura 1.4. Carcaj Q_G del Ejemplo 1.6.3.

Observaci3n 1.6.8. V' puede ser el sucesor de V m3s de una vez en un v3rtice dado y tambi3n V' puede ser el sucesor de V en m3s de un v3rtice. Para cada caso, hay una flecha de e a e' . As3, cada flecha en Q_G est3 asociada a un v3rtice no truncado $w \in G_0$ y dos pol3gonos V y V' en G_1 de modo que V' es el sucesor de V en w . Por el contrario, asociada a dos pol3gonos V y V' , de modo que V' es el sucesor de V en alg3n v3rtice $w \in G_0$, hay una flecha de e a e' en Q_G .

1.6.3. Ideal de relaciones de una configuraci3n de Brauer

Para cada v3rtice no truncado $w \in G_0$ con orden c3clico $V_1 < V_2 < \dots < V_{val_G(w)}$, sea $C_{w,i} = a_{i-1} \dots a_{val_G(w)} \dots a_{i+1} a_i$ el ciclo en Q_G para cada $1 \leq i \leq val_G(w)$, donde la flecha a_j corresponde al pol3gono V_{j+1} siendo el sucesor de V_j en el v3rtice w . F3jese un pol3gono V en G_1 y sup3ngase que el n3mero de ocurrencias de w en V es $t \geq 1$, entonces hay t indices i_1, \dots, i_t tal que $V = V_{i_j}$ para cada $1 \leq j \leq t$. Se definen los w -ciclos especiales en e como $C_{w,i_1}, \dots, C_{w,i_t}$ donde e es el v3rtice en el carcaj Q_G asociado al pol3gono V .

Observaci3n 1.6.9. *N3tese que cada C_{ij} es un ciclo en Q_G , que comienza y termina en el v3rtice e y si w ocurre solo una vez en V y $m(w) = 1$, entonces solo hay un w -ciclo especial en e .*

Se define el ideal de relaciones I_G en KQ_G generado por los siguientes tipos de elementos.

- **Relaciones de tipo I:** para cada pol3gono $V = \{w_1, \dots, w_m\} \in G_1$ y cada par de v3rtices no truncados w y w' en V , la relaci3n

$$C_{w,i_j}^{\mathbf{m}(w)} - C_{w',i'_j}^{\mathbf{m}(w')}$$

para cada $1 \leq i \leq t, 1 \leq i' \leq t'$.

- **Relaciones de tipo II:** para cada w -ciclo especial $C_{w,i}$ con primera flecha a , la relación

$$aC_{w,i}^{\mathbf{m}(w)}.$$

- **Relaciones de tipo III:** para cada $a, b \in (Q_G)_1$ la relación

$$ba$$

siempre que ba no sea un subcamino de un w -ciclo especial $C_{w,i}$ para cada $w \in G_0$, con la siguiente salvedad: $a = b$ es un bucle asociado a un vértice $w \in G_0$ con valencia $val_G(w) = 1$ y multiplicidad $\mathbf{m}(w) > 1$.

Ejemplo 1.6.10. *Las relaciones del Ejemplo 1.6.3 son:*

- *relaciones de tipo I:* $(a_3a_2a_1)^2 - (b_3b_2b_1)^3$, $(a_3a_2a_1)^2 - (c_4c_3c_2c_1)^2$, $(a_1a_3a_2)^2 - (b_3b_2b_1)^3$, $(a_1a_3a_2)^2 - (c_4c_3c_2c_1)^2$, $(b_2b_1b_3)^3 - (c_1c_4c_3c_2)^2$, $(a_2a_1a_3)^2 - (c_2c_1c_4c_3)^2$ y $(a_2a_1a_3)^2 - (c_3c_2c_1c_4)^2$.
- *Relaciones de tipo II:* $a_1(a_3a_2a_1)^2$, $a_2(a_1a_3a_2)^2$, $a_3(a_2a_1a_3)^2$, $b_1(b_3b_2b_1)^3$, $b_2(b_1b_3b_2)^3$, $b_3(b_2b_1b_3)^3$, $c_1(c_4c_3c_2c_1)^2$, $c_2(c_1c_4c_3c_2)^2$, $c_3(c_2c_1c_4c_3)^2$ y $c_4(c_3c_2c_1c_4)^2$.
- *Relaciones de tipo III:* a_1^2 , a_2a_3 , c_4c_2 , c_3^2 , b_1a_1 , c_1a_1 , b_1a_3 , c_1a_3 , a_1b_3 , a_2b_3 , c_1b_3 , a_1c_4 , a_2c_4 , b_1c_4 , c_2b_2 , b_3c_1 , c_3a_2 , c_4a_2 , a_3c_2 y a_3c_3 .

Definición 1.6.11. *El álgebra de configuración de Brauer A_G asociada a una configuración de Brauer G se define como el cociente entre un álgebra de caminos y un ideal de relaciones del tipo dado en esta sección.*

Observación 1.6.12. *Cabe destacar que el ideal I_G generado por las relaciones anteriores es admisible y que el álgebra de configuración de Brauer A_G es un álgebra simétrica [18, Proposition 3.2].*

1.6.4. Álgebras casi gentiles y su extensión trivial

En esta subsección se da la conexión entre las álgebras casi gentiles y las álgebras de configuración de Brauer [16].

Definición 1.6.13. *Un álgebra A se llama **casi gentil** si es Morita equivalente a un álgebra KQ/I que satisface las siguientes propiedades:*

1. *para cada flecha a existe a lo sumo una flecha b tal que $ba \notin I$ y existe a lo sumo una flecha c tal que $ac \notin I$,*
2. *I está generado por un conjunto de caminos de longitud 2.*

Observación 1.6.14. *Nótese que toda álgebra gentil es casi gentil y toda álgebra casi gentil es monomial cuadrática.*

Configuración de Brauer asociada a un álgebra casi gentil

Sean $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil y \mathcal{M} el conjunto de caminos maximales de A . Se define el carcaj Q' por:

- $Q'_0 = Q_0$,
- $Q'_1 = Q_1 \cup \{a_\alpha | \alpha \in \mathcal{M}\}$ con a_α una flecha tal que $s(a_\alpha) = t(\alpha)$ y $t(a_\alpha) = s(\alpha)$ para cada $\alpha \in \mathcal{M}$.

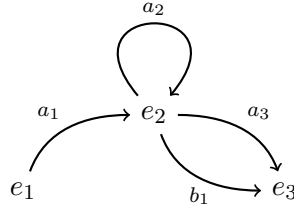
De la definición de Q' , se obtiene que $C_\alpha = a_\alpha \alpha$ es un ciclo en Q' . Se denota con \mathcal{S} el conjunto de ciclos C que son una permutación cíclica de C_α para algún $\alpha \in \mathcal{M}$, nótese que hay una relación de equivalencia dada por la permutación cíclica de los ciclos C .

Considérese el ideal I' generado por las siguientes relaciones.

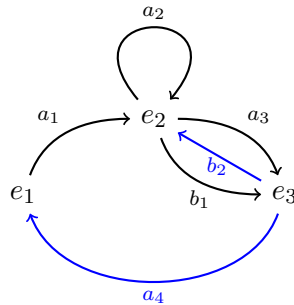
- **Tipo I:** si C y C' son ciclos con $s(C) = s(C')$ la relación $C - C'$.
- **Tipo II:** para cada ciclo C con primera flecha a , la relación aC .
- **Tipo III:** para cada $a, b \in Q'_1$ la relación ba siempre que ba no sea un subcamino de algún ciclo C en \mathcal{S} .

Definición 1.6.15. El álgebra $B = KQ'/I'$ se denomina **álgebra asociada** a A .

Ejemplo 1.6.16. Sea A el álgebra casi gentil dada por el siguiente carcaj



y las relaciones $R = \{a_2^2, a_3a_1, b_1a_1, b_1a_2\}$. El álgebra B asociada a A tiene como carcaj



con ideal de relaciones generado por:

- *tipo I:* $a_1a_4a_3a_2 - b_2b_1$, $a_2a_1a_4a_3 - b_2b_1$, $a_3a_2a_1a_4 - b_1b_2$,
- *tipo II:* $a_1a_4a_3a_2a_1$, $a_2a_1a_4a_3a_2$, $a_3a_2a_1a_4a_3$, $a_4a_3a_2a_1a_4$, $b_1b_2b_1$, $b_2b_1b_2$,

- tipo III: $b_1a_1, a_3a_1, a_2^2, b_1a_2, b_2a_3, a_4b_1, a_2b_2$ y a_3b_2 .

Teorema 1.6.17. [16, Theorem 3.2] Si A es un álgebra casi gentil y B es el álgebra asociada a A , entonces B es un álgebra de configuración de Brauer.

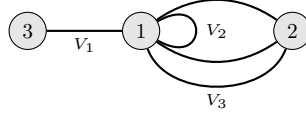
Teorema 1.6.18. [16, Theorem 4.3] Sean $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil y B el álgebra asociada a A , entonces TA y B son álgebras isomorfas.

Teorema 1.6.19. [16, Corollary 4.4] Si A es un álgebra casi gentil, entonces TA es un álgebra de configuración de Brauer con función multiplicidad idénticamente 1.

Recuérdese que una configuración de Brauer G es una cuádrupla $G = (G_0, G_1, \mathbf{m}, \mathbf{o})$, donde G_0 es un conjunto de vértices, G_1 un multiconjunto de polígonos, \mathbf{m} es una función de multiplicidad y \mathbf{o} es una orientación. Para construir la configuración de Brauer correspondiente al álgebra asociada B de A se hace la siguiente construcción.

Sea $\{C_1, \dots, C_m\}$ un conjunto completo de representantes de la clase de equivalencia dada por los ciclos y m' la cantidad de vértices que solo aparecen una vez y en un solo representante. El conjunto de vértices $(G_B)_0$ se define como $(G_B)_0 = \{w_1, \dots, w_m, w'_1, \dots, w'_{m'}\}$. Si $Q_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$, entonces $(G_B)_1 = \{V_1, \dots, V_n\}$, donde w_i ocurre k -veces en el polígono V_j si e_j ocurre como vértice k -veces en el ciclo C_i , y w'_i aparece una vez en V_j si e_j es un vértice del ciclo C_k . La función \mathbf{m} se define idénticamente igual a uno. Por último la orientación en el vértice w_i es $V_{i_1} < \dots < V_{i_{\text{long}(C_i)}}$ siempre que la sucesión de vértices en el ciclo C_i es $e_{i_1}, \dots, e_{i_{\text{long}(C_i)}}, e_{i_1}$.

Ejemplo 1.6.20. La configuración de Brauer del Ejemplo 1.6.16 es $(G_B)_0 = \{1, 2, 3\}$ y $(G_B)_1 = \{V_1, V_2, V_3\}$, donde $V_1 = \{1, 3\}$, $V_2 = \{1, 1, 2\}$, $V_3 = \{1, 2\}$, con orden en el vértice 1 dado por $V_1 < V_2 < V_3$ y en el vértice 2 dado por $V_3 < V_2$. La realización es



Recuérdese que la función multiplicidad es 1 en todos los vértices.

Hipergrafo orientado de un álgebra casi gentil

El hipergrafo orientado de un álgebra casi gentil es el equivalente al grafo de ribbon marcado de álgebras gentiles. En esta parte se da la construcción del hipergrafo.

Un **hipergrafo** es una generalización de un grafo donde una arista puede contener mas de dos vértices, es decir, un hipergrafo \mathcal{H} es un par $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ con \mathcal{H}_0 un conjunto finito de vértices y \mathcal{H}_1 es un conjunto finito de **hiperaristas** dadas por multiconjuntos de elementos de \mathcal{H}_0 , con la convención de que cada multiconjunto contiene al menos dos elementos. Un hipergrafo con orientación es un hipergrafo $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ junto con una orientación σ tal que para cada vértice $w \in \mathcal{H}_0$, el conjunto de hiperaristas que contienen a w están ordenadas de forma cíclica (contando repeticiones).

Sea $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil y \mathcal{M} el conjunto de caminos maximales de A , se considera el conjunto $\overline{\mathcal{M}}$ como en la Definición 1.5.18. Se dice que el vértice e está en \mathcal{M} , si existe un elemento $\alpha \in \overline{\mathcal{M}}$ con $\alpha = \alpha_2 e \alpha_1$, donde α_1 y α_2 son caminos en Q .

Definición 1.6.21. El hipergrafo orientado \mathcal{H}_A se construye como sigue.

- Los vértices \mathcal{H}_0 están en correspondencia con $\overline{\mathcal{M}}$.
- Las hiperaristas en \mathcal{H}_1 se corresponden a los vértices en Q_0 . La hiperarista que corresponde al vértice $e \in Q_0$ está dada por todos los elementos $\alpha \in \overline{\mathcal{M}}$ tales que e está en α .
- La orientación está inducida por los caminos maximales en \mathcal{M} . Sea w un vértice en \mathcal{H}_0 y sean V_1, \dots, V_n las hiperaristas correspondientes a los vértices e_1, \dots, e_n en Q_0 respectivamente y tales que e_1, \dots, e_n están en el camino maximal α correspondiente a w . Supóngase sin pérdida de generalidad que $\alpha = e_n a_{n-1} e_{n-1} \dots e_2 a_1 e_1$ con cada $a_i \in Q_1$, entonces el orden cíclico en w es $V_1 < V_2 < \dots < V_n$.

Observación 1.6.22. Nótese que la función multiplicidad es idénticamente 1 en cada vértice.

Ejemplo 1.6.23. En el Ejemplo 1.6.16 el conjunto $\overline{\mathcal{M}}$ es

$$\overline{\mathcal{M}} = \{a_3 a_2 a_1, b_1, e_1\},$$

por lo que el hipergrafo orientado está definido como sigue:

- $\mathcal{H}_0 = \{1, 2, 3\}$, donde 1 se corresponde con $a_3 a_2 a_1$, 2 con b_1 y 3 con e_1 .
- $\mathcal{H}_1 = \{V_1, V_2, V_3\}$, donde e_1 se corresponde con $V_1 = \{1, 3\}$, e_2 con $V_2 = \{1, 1, 2\}$ y e_3 con $V_3 = \{1, 2\}$.
- El orden en 1 es $V_1 < V_2 < V_2 < V_3$ y el orden en 2 es $V_2 < V_3$.

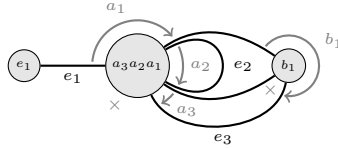


Figura 1.5. Hipergrafo orientado asociado al álgebra del Ejemplo 1.6.16, al igual que en el grafo de ribbon, se representan las flechas del carcaj alrededor de los vértices para ilustrar el carcaj con el hipergrafo.

Teorema 1.6.24. [16, Theorem 7.4] Dos álgebras casi gentiles A_1 y A_2 tienen el mismo hipergrafo orientado asociado si y solo si $TA_1 \cong TA_2$.

1.6.5. Cortes admisibles de álgebras de grafos de Brauer y álgebras casi gentiles

Sea $\{C_1, \dots, C_m\}$ un conjunto completo de representantes de la clase de equivalencia dada por los ciclos especiales. Recuérdese que dos ciclos están en la misma clase de equivalencia si uno es una permutación cíclica del otro.

Definición 1.6.25. Sean $A = KQ_G/I_G$ un álgebra de configuración de Brauer con configuración de Brauer G y multiplicidad m idénticamente 1. Un **corte admisible** Δ de Q_G es un conjunto de flechas que contiene exactamente una flecha de cada ciclo especial C que corresponde a un representante de cada clase de equivalencia C_i para $i = 1, \dots, m$. El álgebra $KQ_G/\langle I_G \cup \Delta \rangle$ se denomina **álgebra asociada al corte** Δ , donde $\langle I_G \cup \Delta \rangle$ es el ideal generado por $I_G \cup \Delta$.

Teorema 1.6.26. [16, Theorem 5.3] Sean $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil con conjunto de caminos maximales \mathcal{M} y $TA = KQ_{TA}/I_{TA}$ la extensión trivial de A , donde el conjunto de flechas nuevas de Q_{TA} es $\Delta = \{a_\alpha | \alpha \in \mathcal{M}\}$. Entonces Δ es un corte admisible de Q_{TA} y el álgebra asociada a Δ es isomorfa a A .

Ejemplo 1.6.27. La segunda gráfica en el Ejemplo 1.6.16 da un corte admisible como en el teorema anterior.

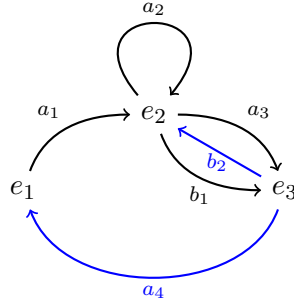


Figura 1.6. Carcaj Q_{TA} de la extensión trivial del álgebra casi gentil del Ejemplo 1.6.16. Las flechas en color azul determinan el conjunto Δ de flechas nuevas para Q_{TA} y definen un corte admisible para Q_{TA} .

Teorema 1.6.28. [16, Corollary 5.7] Cada álgebra de configuración de Brauer con multiplicidad idénticamente 1 es una extensión trivial de un álgebra casi gentil.

Juntando los Teoremas 1.6.19 y 1.6.28 se obtiene que B es un álgebra de configuración de Brauer con multiplicidad 1 si y solo si B es la extensión trivial de un álgebra casi gentil.

Capítulo 2

Primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras gentiles

En este capítulo se estudia la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles en los grados cero y uno, la homología de Hochschild en grado uno y el espacio $Alt_A(DA)$ de formas bilineales torcidas simétricas. También se muestra que esta información se puede obtener del grafo de ribbon del álgebra gentil y del grafo de Brauer para la extensión trivial.

En [11] Cibils, Marcos, Redondo y Solotar, muestran que si A es un álgebra finito dimensional, el primer espacio de cohomología de Hochschild $HH^1(TA)$ de la extensión trivial de A es la suma directa de cuatro espacios vectoriales, a saber,

$$HH^1(TA) = Z(A) \oplus HH^1(A) \oplus HH_1(A)^* \oplus Alt_A(DA),$$

donde $Z(A)$ es el centro de A , que coincide con $HH^0(A)$ y

$$Alt_A(DA) = \{\varphi \in \text{Hom}_{A-A}(DA, A); f\varphi(g) + \varphi(f)g = 0 \text{ para cada } f, g \in DA\}.$$

Para calcular cada uno de los sumandos se utilizan las ideas de [12] y [39].

Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado, Q un carcaj conexo finito, Q_n el conjunto de caminos de longitud n , para cada $n \in \mathbb{N}$ y $E = KQ_0$. Como ya fue dicho, se denota por $s(\alpha)$ el vértice origen del camino orientado α de Q , y por $t(\alpha)$ el vértice al que llega α . De ahora en adelante y salvo que se diga lo contrario, A denota la K -álgebra finito dimensional KQ/I con I el ideal bilátero generado por un conjunto R de caminos de longitud dos, es decir, A es un álgebra monomial cuadrática, como caso particular Λ denotará siempre un álgebra gentil. También, se denota por \mathcal{B} el conjunto de caminos de Q que no tiene elementos de R como subcaminos, por lo tanto, \mathcal{B} es una base del álgebra A . De forma similar, \mathcal{B}_n es el conjunto de caminos de longitud n que son elementos de \mathcal{B} .

2.1. Cohomología de Hochschild de álgebras gentiles en grados 0 y 1

En el presente capítulo y en los posteriores se usa la resolución minimal de Bardzell (Sección 1.3.5), y una identificación con pares paralelos para calcular tanto la cohomología

de Hochschild de álgebras gentiles como para la cohomología de Hochschild de álgebras monomiales cuadráticas en los primeros grados.

Definición 2.1.1. Dado un carcaj Q y dos caminos α, β de Q , se dice que el par (α, β) es un **par paralelo** si $s(\alpha) = s(\beta)$ y $t(\alpha) = t(\beta)$. Si X e Y son conjuntos de caminos de Q , el conjunto $X||Y$ de pares paralelos está formado por todos los pares paralelos (α, β) en $X \times Y$. Se denota por $K(X||Y)$ el espacio vectorial con base el conjunto $X||Y$.

Lema 2.1.2. [39, Lemma 2.3] Sean X e Y conjuntos de caminos de Q , KX y KY los correspondientes E - E -bimódulos. Los espacios vectoriales $K(X||Y)$ y $\text{Hom}_{E^e}(KX, KY)$ son isomorfos.

Demostración. El isomorfismo está dado por $(\gamma, \alpha) \mapsto f_{(\gamma, \alpha)}$, donde

$$f_{(\gamma, \alpha)}(\varepsilon) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \varepsilon = \gamma, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

Notación 2.1.3. ■ Sean ε un camino en Q y $(\gamma, \alpha) \in Q_n||\mathcal{B}$. Se denota por $\varepsilon^{(\gamma, \alpha)}$ la suma de todos los caminos no nulos en \mathcal{B} obtenidos por el reemplazo de una ocurrencia del camino γ en ε por el camino α . Si el camino ε no contiene al camino γ , entonces $\varepsilon^{(\gamma, \alpha)} = 0$; y si cada reemplazo de γ en ε por α no es un camino en \mathcal{B} el sumando es nulo.

- Si X es un conjunto de caminos de Q , la función $\chi_X : \prod_{n \in \mathbb{N}} Q_n \rightarrow \{0, 1\}$ es la **función característica** de X .
- Si e es un vértice de Q , el conjunto Xe está formado por los caminos de X que comienzan en e . De forma similar eX es el conjunto formado por los caminos de X que terminan en e .

Proposición 2.1.4. Sea A un álgebra monomial cuadrática. La cohomología de Hochschild de A es la cohomología del complejo de cocadena

$$0 \longrightarrow K(\Gamma_0||\mathcal{B}) \xrightarrow{d^0} K(\Gamma_1||\mathcal{B}) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} K(\Gamma_n||\mathcal{B}) \xrightarrow{d^n} \dots$$

donde

$$d^{2n}(\gamma', \alpha) = \sum_{\gamma = b\gamma' \in \Gamma_{2n+1}} \chi_{\mathcal{B}}(b\alpha)(\gamma, b\alpha) - \sum_{\gamma = \gamma'a \in \Gamma_{2n+1}} \chi_{\mathcal{B}}(\alpha a)(\gamma, \alpha a),$$

$$d^{2n+1}(\gamma', \alpha) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{2(n+1)}} \chi_{\mathcal{B}}(\gamma^{(\gamma', \alpha)}) (\gamma, \gamma^{(\gamma', \alpha)}).$$

Demostración. Se trata de un cálculo directo. □

Observación 2.1.5. Nótese que en el caso de álgebras monomiales cuadráticas cada conjunto Γ_n con $n > 1$ es

$$\Gamma_n = \{a_n \cdots a_1 \mid a_{i+1}a_i \in R, a_i \in Q_1, 1 \leq i < n-1\}.$$

Además, para cada $n \geq 0$ el diferencial de la Proposición 2.1.4 se puede escribir de la forma

$$d^n(\gamma', \alpha) = \sum_{b\gamma' \in \Gamma_{n+1}} \chi_{\mathcal{B}}(b\alpha)(b\gamma', b\alpha) + (-1)^{n+1} \sum_{\gamma'a \in \Gamma_{n+1}} \chi_{\mathcal{B}}(\alpha a)(\gamma'a, \alpha a).$$

2.1.1. HH^0 de álgebras gentiles

Teorema 2.1.6. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil finito dimensional. El conjunto que consiste de los elementos de la forma:*

1. $(e, \alpha) \in Q_0 \parallel \mathcal{B}_n$ con $n \geq 1$ y $val_Q(e) = 2$,
2. $\sum_{e_i \in Q_0} (e_i, e_i)$.

es una base de $HH^0(\Lambda)$.

Demostración. Es claro que si $(e, \alpha) \in Q_0 \parallel \mathcal{B}_n$ con $n \geq 1$ y $val_Q(e) = 2$, entonces (e, α) es un elemento de $\ker(d^0)$. Nótese que si $(e, \alpha) \in Q_0 \parallel \mathcal{B}_n$ con $val_Q(e) > 2$ y $n \geq 1$, entonces

$$d^0(e, \alpha) = \begin{cases} (b_1, b_1\alpha) & \text{si } b_1\alpha \in \mathcal{B} \text{ y } val_Q(e) = 3, \\ -(b_2, \alpha b_2) & \text{si } \alpha b_2 \in \mathcal{B} \text{ y } val_Q(e) = 3, \\ (b_1, b_1\alpha) - (b_2, \alpha b_2) & \text{si } b_1\alpha, \alpha b_2 \in \mathcal{B} \text{ y } val_Q(e) = 4, \end{cases}$$

donde b_1 y b_2 no son flechas de α y existe por lo menos una de las dos.

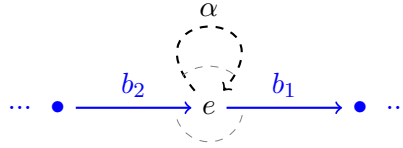


Figura 2.1. Si b_1 y b_2 existen, localmente el carcaj tiene esta forma.

Sean (e, α) y (e', α') dos pares diferentes en $Q_0 \parallel \mathcal{B}$ con las condiciones anteriores. Se quiere ver que los sumandos de $d^0(e, \alpha)$ no aparecen en los sumandos de $d^0(e', \alpha')$. Si $(b_1, b_1\alpha) = (b'_1, b'_1\alpha')$, entonces $b_1 = b'_1$ y $\alpha = \alpha'$, por lo que $e = s(\alpha) = s(\alpha') = e'$, contradiciendo el hecho de que (e, α) y (e', α') son diferentes. Ahora, si $(b_1, b_1\alpha) = (b'_2, \alpha'b'_2)$, entonces $b_1 = b'_2$ y $b_1\alpha = \alpha'b_1$, lo que dice que $\alpha' = b_1\xi$ y $\alpha = \xi'b_1$ para algunos $\xi, \xi' \in \mathcal{B}_{n-1}$, contradiciendo la hipótesis sobre las flechas b_1 y b'_2 , por consiguiente $(b_1, b_1\alpha) \neq (b'_2, \alpha'b'_2)$. Concluimos que no hay una combinación lineal de elementos $(e, \alpha) \in Q_0 \parallel \mathcal{B}_n$ con $val_Q(e) > 2$ y $n \geq 1$ en $\ker(d^0)$.

Por otro lado, nótese que $d^0(e, e) = \sum_{a \in Q_1 e} (a, a) - \sum_{a \in e Q_1} (a, a)$ y que esto es 0 si y solo si $val_Q(e) = 2$ y e es el vértice de incidencia de un bucle; como supusimos que Q es un carcaj conexo, se obtiene que (e, e) es un elemento de la base de $HH^0(\Lambda)$. Ahora, si Q tiene mas de un vértice, entonces la matriz asociada a la restricción de d^0 a $K(Q_0 \parallel Q_0)$ en las bases $Q_0 \parallel Q_0$ del dominio y $Q_1 \parallel \mathcal{B}$ del codominio, tiene como filas a vectores con dos entradas no nulas cuyos valores son 1 y -1 , o el vector nulo, este último siempre que la fila corresponda a un bucle, y como columnas vectores con a lo sumo cuatro entradas no nulas, con valores 1 o -1 (con máximo dos entradas iguales); además, el rango de dicha matriz es $|Q_0| - 1$, por lo que el núcleo tiene dimensión 1, debido a que una flecha que no es bucle aparece en dos vértices y

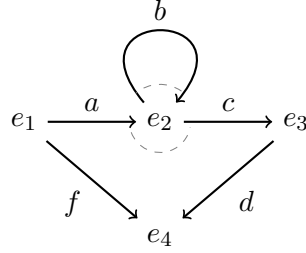
$$\sum_{e_i \in Q_0} d^0(e_i, e_i) = \sum_{e_i \in Q_0} \left(\sum_{a \in Q_1 e_i} (a, a) - \sum_{a \in e_i Q_1} (a, a) \right) = 0.$$

□

2.1.2. HH^1 de álgebras gentiles

Definición 2.1.7. Sea $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_n || (\mathcal{B} \setminus Q_0)$ con $\gamma \neq \alpha$ y $n \geq 1$. Si γ y α no tienen flechas en común se dice que γ es un **atajo** de α , de lo contrario, se dice que α es una **desviación** de γ .

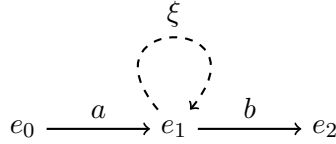
Ejemplo 2.1.8. En el álgebra determinada por el siguiente carcaj, el par paralelo $(f, dcba)$ en $Q_1 || \mathcal{B}_4$ es un atajo, mientras que $(c, cb) \in Q_1 || \mathcal{B}_2$ y cb es una desviación de c .



Proposición 2.1.9. Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática, (a, α) y (b, β) pares paralelos en $Q_1 || \mathcal{B}$, y $\gamma \in R$ tal que $\gamma^{(a, \alpha)} \neq 0$. La igualdad $\gamma^{(a, \alpha)} = \gamma^{(b, \beta)}$ es equivalente a que alguna de las siguientes condiciones se cumpla:

1. $(a, \alpha) = (b, \beta)$,
2. $\gamma = ba$, $\alpha = \xi a$ y $\beta = b\xi$, donde ξ es un ciclo no trivial en \mathcal{B} .

Localmente el carcaj para la segunda condición es



Demostración. La condición $\gamma^{(a, \alpha)} = \gamma^{(b, \beta)}$ implica que en γ aparecen las flechas a y b . Se tienen tres posibilidades, o bien $\gamma = a\gamma_1$ con $a \neq \gamma_1$, o bien $\gamma = \gamma_2 a$ con $a \neq \gamma_2$, o $\gamma = a^2$. Si $a = b$, en el primer caso resulta que $\gamma^{(a, \alpha)} = \alpha\gamma_1 = \beta\gamma_1$, por lo que $\alpha = \beta$; en el segundo caso de forma similar se obtiene lo deseado; para el tercero, si $\gamma = a^2$ resulta que a es un bucle, pero $\gamma^{(a, \alpha)} = \alpha a + a\alpha$ implica que $\alpha = s(a)$, de ahí $\alpha = \beta$.

Sea $a \neq b$ y sin pérdida de generalidad sea $\gamma = ba$, entonces $\gamma^{(a, \alpha)} = b\alpha = \beta a = \gamma^{(b, \beta)}$. Si α es un vértice β también lo es y $a = b$. De ahí, a es la primera flecha de α y b es la última flecha de β , es decir, $\alpha = \xi a$ y $\beta = b\xi'$. Así, $\gamma^{(a, \alpha)} = b\xi a = b\xi' a$ y por consiguiente $\xi = \xi'$ es un ciclo no trivial. La implicación recíproca es inmediata. \square

Definición 2.1.10. Se dice que un n -cociclo X es **irreducible** si es un elemento de $\Gamma_n || \mathcal{B}$ o es una combinación lineal de elementos de $\Gamma_n || \mathcal{B}$ tal que al quitarle cualquiera de sus sumandos deja de ser un n -cociclo.

Observación 2.1.11. Nótese que la proposición anterior dice cómo son los 1-cociclos irreducibles con a lo sumo dos sumandos cuando A es un álgebra gentil. Estos sumandos son dos cuando el elemento está determinado por el ítem 2.

Corolario 2.1.12. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Si X es un 1-cociclo irreducible con mas de un sumando, entonces X es un múltiplo escalar de $(a, \xi a) - (b, b\xi)$, con ξ un ciclo no trivial en \mathcal{B} . Además, X es un 1-coborde.*

Demostración. Es inmediata por la observación anterior y la definición de los diferenciales. \square

Las siguientes proposiciones dicen cómo son las clases de equivalencia no nulas de los atajos y las desviaciones que aparecen en $HH^1(\Lambda)$, se hace la demostración sin usar el corolario.

Proposición 2.1.13. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Si (a, α) es un par paralelo en $Q_1||\mathcal{B}$ tal que a no aparece en las relaciones de R , entonces (a, α) es un 1-cociclo.*

Demostración. La definición de d^1 dice que

$$d^1(a, \alpha) = \sum_{\gamma \in R} (\gamma, \gamma^{(a, \alpha)})$$

y $\sum_{\gamma \in R} (\gamma, \gamma^{(a, \alpha)}) = 0$ si a no aparece en las relaciones de R . \square

Corolario 2.1.14. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Si (a, α) es un atajo en $Q_1||\mathcal{B}$ tal que a no aparece en las relaciones de R , entonces su clase es un elemento de la base de $HH^1(\Lambda)$.*

Demostración. Dado un par $(e, \alpha') \in Q_0||\mathcal{B}$, por definición

$$d^0(e, \alpha') = \sum_{b \in Q_1 e} \chi_B(b\alpha')(b, b\alpha') - \sum_{b \in e Q_1} \chi_B(\alpha' b)(b, \alpha' b).$$

Si a es un atajo de α , el par paralelo (a, α) no aparece en los sumandos anteriores, por lo tanto (a, α) no es un 1-coborde. \square

Observación 2.1.15. *Nótese que si (a, α) es un atajo y a aparece en las relaciones de R , entonces no existe un 1-cociclo que lo tenga como sumando, esto se puede ver por la definición de d^1 ya que a no aparece en las flechas de α .*

Proposición 2.1.16. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil y (a, α) una desviación en $Q_1||\mathcal{B}$.*

1. *La clase de (a, α) es un elemento de la base de $HH^1(\Lambda)$ si a no aparece en las relaciones de R y $\alpha = \alpha_2 a \alpha_1$ con $\alpha_1, \alpha_2 \notin Q_0$.*
2. *Si a aparece en las relaciones de R o α no cumple las condiciones del ítem anterior, entonces la clase donde puede aparecer como sumando la desviación (a, α) es nula en $HH^1(\Lambda)$.*

Demostración. Sea $\alpha = \alpha_2 a \alpha_1$ con $\alpha_1, \alpha_2 \notin Q_0$. Si a no aparece en las relaciones de R , el carcaj tiene un subcarcaj de la forma

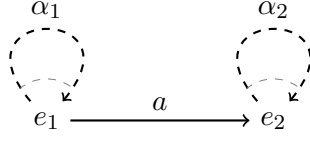


Figura 2.2. $(a, \alpha) \in Q_1 || \mathcal{B}$ con $\alpha = \alpha_2 a \alpha_1$.

Por la proposición anterior (a, α) es un 1-cociclo y por la definición de d^0 no es un 1-coborde. Luego la clase de (a, α) es no nula en $HH^1(\Lambda)$ y es un elemento de la base por la definición de d^0 .

Si a aparece en las relaciones de R y por ser el álgebra gentil, a lo sumo existe una flecha b_1 que no es la última flecha de α_1 con $t(b_1) = s(a)$, y a lo sumo existe una flecha b_2 que no es la primera flecha de α_2 con $s(b_2) = t(a)$, donde la relación ab_1 o b_2a aparece en R siempre que la flecha correspondiente exista. Si $s(a) = e_1$ y $t(a) = e_2$, localmente el carcaj es de la siguiente manera si existen las flechas b_1 y b_2 :

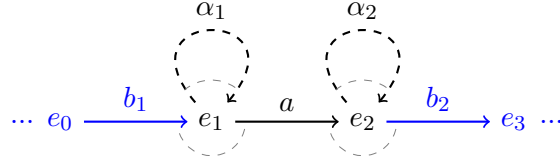


Figura 2.3. Si b_1 y b_2 existen.

Por lo tanto,

$$d^1(a, \alpha) = \begin{cases} (ab_1, \alpha b_1) & \text{si } b_1 \in Q_1 \text{ y } \text{val}_Q(e_2) = 3, \\ (b_2a, b_2\alpha) & \text{si } b_2 \in Q_1 \text{ y } \text{val}_Q(e_1) = 3, \\ (ab_1, \alpha b_1) + (b_2a, b_2\alpha) & \text{si } b_1, b_2 \in Q_1. \end{cases}$$

Así (a, α) no es un 1-cociclo y no aparece como sumando en un 1-cociclo por definición del diferencial d^1 .

Ahora, si $\alpha = a\alpha_1$, aparecen dos casos por ser Λ gentil, el primero es cuando α_1 es un ciclo que no pasa por e_2 , y el segundo cuando pasa por e_2 . En el primer caso existe a lo más una flecha b que no es la última flecha de α_1 con $t(b) = e_1$, y si existe tal flecha, ab debe estar en R por ser Λ gentil.

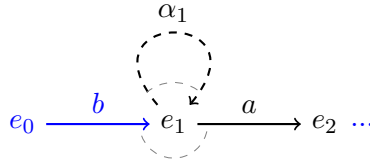


Figura 2.4. Configuración local de Q si b existe.

Por consiguiente

$$d^0(e_1, \alpha_1) = \begin{cases} (a, \alpha) & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 3, \\ (a, \alpha) - (b, \alpha_1 b) & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 4, \end{cases}$$

mientras que

$$d^1(a, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 3, \\ (ab, a\alpha_1 b) & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 4, \end{cases}$$

por lo que (a, α) no es un 1-cociclo y la clase de $(a, \alpha) - (b, \alpha_1 b)$ es nula en $HH^1(\Lambda)$ siempre que b exista; para terminar nótese que si b no existe se obtiene de forma inmediata que la clase de (a, α) es nula en $HH^1(\Lambda)$.

En el segundo caso, si α_1 es un ciclo que pasa por e_2 , localmente el carcaj es de la siguiente forma, con $\alpha_1 = \beta\delta$,

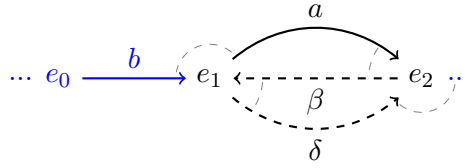


Figura 2.5. Si b existe, localmente el carcaj Q tiene esta forma.

donde a lo sumo existe una flecha b con $t(b) = e_1$ y ab en R . Por consiguiente

$$d^0(e_1, \alpha_1) = \begin{cases} (a, \alpha) & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 3, \\ (a, \alpha) - (b, \alpha_1 b) & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 4, \end{cases}$$

luego $d^0(e_1, \alpha_1) \neq 0$. Por otro lado

$$d^1(a, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 3, \\ (ab, a\alpha_1 b) & \text{si } \text{val}_Q(e_1) = 4, \end{cases}$$

y así (a, α) es un 1-cociclo y un 1-coborde si b no existe, mientras que si b existe se obtiene que (a, α) no es un 1-cociclo y si aparece en el 1-cociclo, $(a, \alpha) - (b, \alpha_1 b)$, entonces este es un 1-coborde.

De forma similar se obtiene el resultado para $\alpha = \alpha_2 a$ y la prueba del enunciado está completa. \square

Aún falta describir los elementos de la forma $(a, s(a))$ con a un bucle y para cualquier flecha a , los elementos diagonales (a, a) .

Proposición 2.1.17. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Si $\text{car}(K) \neq 2$ entonces $K(Q_1 || Q_0) \cap \ker(d^1) = 0$.*

Demostración. Es claro que si Λ no tiene bucles no hay nada que demostrar. Si existe un bucle a , por ser Λ un álgebra gentil de dimensión finita la relación a^2 está en R y a no puede aparecer en otra relación, por lo tanto $d^1(a, s(a)) = 2(a^2, a) \neq 0$. \square

Proposición 2.1.18. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Si $\text{car}(K) = 2$ y a es un bucle, entonces la clase de $(a, s(a))$ es un elemento de la base de $HH^1(\Lambda)$.*

Demostración. Por la definición del diferencial d^1 resulta que $d^1(a, s(a)) = 2(a^2, a) = 0$, mientras que por la definición del diferencial d^0 la pareja $(a, s(a))$ no puede aparecer como sumando de un 1-coborde. \square

Proposición 2.1.19. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil y a una flecha en Q .

1. (a, a) es un 1-cociclo para cada $a \in Q_1$.
2. Si $\text{val}_Q(s(a)) = 1$ o $\text{val}_Q(t(a)) = 1$, entonces la clase de (a, a) es nula en $HH^1(\Lambda)$.
3. Si a es un bucle, entonces (a, a) no es un 1-coborde.

Demostración. 1. Esto se sigue de la definición del diferencial, ya que

$$d^1(a, a) = \sum_{\gamma \in R} (\gamma, \gamma^{(a,a)}) = 0.$$

2. Sea e el vértice de a con valencia 1, entonces $d^0(e, e) = \pm(a, a)$, y por ser (a, a) un 1-cociclo se obtiene lo deseado.

3. Si $e = s(a)$, entonces

$$d^0(e, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{val}_Q(e) = 2, \\ \pm(b, b) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 3 \text{ y } b \text{ incide en } e, \\ (b, b) - (c, c) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 4, s(b) = e = t(c), \end{cases}$$

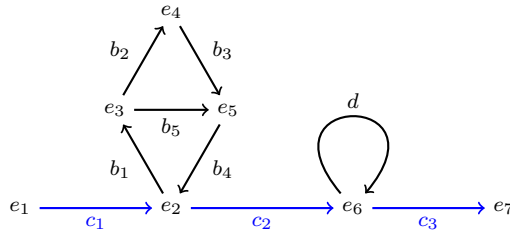
y

$$d^0(e, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{val}_Q(e) = 2, \\ (b, ba) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 3 \text{ y } s(b) = e, \\ -(b, ab) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 3 \text{ y } t(b) = e, \\ (b, ba) - (c, ac) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 4, s(b) = e = t(c). \end{cases}$$

Así, (a, a) no es un elemento de $\text{Im}(d^0)$. □

Definición 2.1.20. Sea Q un carcaj conexo y finito, el subcarcaj maximal inducido por los vértices que forman parte de algún ciclo no dirigido C se denota por H , más precisamente H es el subcarcaj que contiene a todos los vértices de los ciclos (dirigidos o no) y a todas las flechas que tienen como inicio y término solo esos vértices. Además, se denomina **corazón** a cada componente conexa de H . Por otra parte, el subcarcaj minimal en Q que conecta a H se denomina **esqueleto** y se denota por S .

Ejemplo 2.1.21. El siguiente carcaj tiene dos corazones, el primero tiene flechas b_1, b_2, b_3, b_4 y b_5 , mientras que el segundo está determinado por d . El esqueleto es el subcarcaj con flechas c_1, c_2 y c_3 .



Observación 2.1.22. Nótese que $H_1 \cap S_1 = \emptyset$.

Definición 2.1.23. Sea Q un carcaj conexo y finito, se dice que un camino γ es una **rama** de Q si es un subcarcaj maximal conexo que no comparte flechas con H o S .

Proposición 2.1.24. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, γ_0 una rama de Q y a una flecha de γ_0 . Entonces la clase de (a, a) es nula en $HH^1(\Lambda)$.

Demostración. Defínase el conjunto

$$P_0 := \{a \in Q_1 \mid a \text{ es una flecha de } \gamma_0, \text{val}_Q(s(a)) = 1 \text{ o } \text{val}_Q(t(a)) = 1\},$$

por la Proposición 2.1.19 se sabe que $(a, a) = 0$ en $HH^1(\Lambda)$ para cada flecha a en P_0 . Sea γ_1 el subcarcaj conexo resultante de quitar en γ_0 las flechas de P_0 , si γ_1 es vacío se ha terminado, de lo contrario defínase

$$P_1 := \{a \in Q_1 \mid a \text{ es una flecha de } \gamma_1, \text{val}_{Q_1 \setminus P_0}(s(a)) = 1 \text{ o } \text{val}_{Q_1 \setminus P_0}(t(a)) = 1\},$$

de ahí, cada $a \in P_1$ tiene o bien su origen o su término conectado con por lo menos una flecha $b \in P_0$, si se denota por e dicho vértice, entonces

$$d^0(e, e) = \begin{cases} \pm(a, a) \pm (b_1, b_1) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 2, \\ \pm(a, a) \pm (b_1, b_1) \mp (b_2, b_2) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 3, \\ \pm(a, a) \pm (b_1, b_1) \mp (b_2, b_2) \mp (b_3, b_3) & \text{si } \text{val}_Q(e) = 4, \end{cases}$$

donde b_1, b_2 y b_3 son las posibles flechas en P_0 que se conectan por medio de e . Así, la clase (a, a) se escribe como suma de clases nulas en $HH^1(\Lambda)$. Ahora, como Q es finito se puede repetir el proceso y para algún natural n se concluye que $\gamma_n = \emptyset$. Luego la clase (a, a) es nula en $HH^1(\Lambda)$ para cada $a \in \gamma_0$. \square

Proposición 2.1.25. Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil y a una flecha en S , la clase de (a, a) es nula en $HH^1(\Lambda)$.

Demostración. Por la proposición anterior se puede trabajar sobre el subcarcaj $Q^{(1)}$ de Q que no tiene ramas.

Nótese que existe un corazón D en el cual solo incide una flecha de S (de lo contrario se obtiene un ciclo en S), sea a dicha flecha. Como

$$\sum_{e_i \in D_0} d^0(e_i, e_i) = \sum_{e_i \in D_0} \left(\sum_{b \in Q_1^{(1)} e_i} (b, b) - \sum_{b \in e_i Q_1^{(1)}} (b, b) \right) = (a, a),$$

entonces (a, a) es un 1-coborde. Considérese el carcaj $Q^{(1)}$ que consiste de Q sin el corazón D y denótese este subcarcaj con Q' . Si en Q' hay una rama, ésta tiene de extremo la flecha a y de forma similar a la proposición anterior, $(b, b) = 0$ en $HH^1(\Lambda)$ para las flechas b de esa rama. Por lo tanto, en el subcarcaj $Q^{(2)}$ que es el subcarcaj Q' sin la rama, se puede repetir el proceso un número finito de veces y obtener que si a es una flecha de S , la clase de (a, a) resulta ser nulo en $HH^1(\Lambda)$. \square

Definición 2.1.26. La **característica de Euler** de un grafo finito X es el número de vértices menos el número de aristas de X , lo denotamos por $\chi(X)$.

Definición 2.1.27. Un **árbol** es un grafo conexo que no contiene ciclos.

Proposición 2.1.28. [29, Chapter 6, Proposition 6.1] Si T es un árbol, entonces $\chi(T) = 1$. Además, el recíproco es cierto si el grafo es finito y conexo.

Proposición 2.1.29. [29, Chapter 6, Theorem 6.2] Si X es un grafo conexo finito y T un árbol maximal en X , la cantidad de aristas de X no contenidas en T es $1 - \chi(X)$.

Definición 2.1.30. Sea Q un carcaj conexo y finito. Si C es un ciclo (no necesariamente orientado) que se puede recorrer sin pasar dos veces por el mismo vértice se dice que C es un **ciclo simple** en Q . Se denota por \mathcal{C}_D un conjunto de ciclos simples del corazón D con $1 - \chi(D)$ elementos tales que el carcaj inducido formado por la unión es D ; los ciclos de \mathcal{C}_D se llaman **ciclos simples minimales**.

Observación 2.1.31. Cada bucle es un ciclo simple minimal.

Proposición 2.1.32. Sea $Q = D$, por cada ciclo simple C en \mathcal{C}_D hay un representante no nulo (a, a) en $HH^1(\Lambda)$, además toda pareja no nula (a, a) en $HH^1(\Lambda)$ es de esta forma.

Demostración. Sin pérdida de generalidad sea Q un carcaj sin bucles. Si se fija en Q un árbol maximal T y U el conjunto de flechas de Q que no forman parte de T , se considera la matriz A del sistema $d^0(e_i, e_i) = 0$ para cada $e_i \in Q_0$, hay tantas filas como vértices y tantas columnas como flechas en Q (no hay bucles), y si se ubica en las últimas columnas a los elementos de U , como el rango de A es $|Q_0| - 1$, se puede llevar la matriz A a una matriz de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto las clases de las flechas de T están determinadas por las clases de las flechas de U en $HH^1(\Lambda)$ y la clase de (a, a) es no nula en $HH^1(\Lambda)$ para cada a en U . Nótese que las parejas $(a, a) \in HH^1(\Lambda)$ son linealmente independientes, pues de no serlo, en la matriz anterior se tendría una fila con ceros en las posiciones de los elementos de T y en las de U escalares no todos nulos.

Ahora, si Q tiene bucles, esos bucles son ciclos simples y por la Proposición 2.1.19 se obtiene lo deseado. \square

Lema 2.1.33. Sea Q un carcaj conexo y finito. Si $\{D_i\}_{i=1}^r$ es la familia de corazones de Q , entonces

$$1 - \chi(Q) = \sum_{i=1}^r (1 - \chi(D_i)).$$

Demostración. Sea k el número de arboles que conectan a los corazones D_i y para cada i sea r_i el número de corazones D_j adyacentes al árbol T_i . Valen las siguientes igualdades:

$$\chi(Q) = \sum_{i=1}^r \chi(D_i) + \sum_{i=1}^k \chi(T_i) - \sum_{i=1}^k r_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r (1 - \chi(D_i)) = r - \sum_{i=1}^r \chi(D_i).$$

Ya que los T_i son árboles, resulta que $\chi(T_i) = 1$. Así, se debe probar que

$$r = 1 - k + \sum_{i=1}^k r_i.$$

Se realizará la demostración por inducción sobre r : Para $r = 1$, es claro. Supóngase que $r = 1 - k_r + \sum_{i=1}^{k_r} r_i$ y que hay $r + 1$ corazones. Entonces hay dos casos, $k_{r+1} = k_r + 1$ o $k_{r+1} = k_r$. En el primer caso $1 - k_{r+1} + \sum_{i=1}^{k_{r+1}} r_i = 1 - k_r - 1 + \sum_{i=1}^{k_r} r_i + r_{k_{r+1}}$ y por la hipótesis de inducción, esto es $r - 1 + r_{k_{r+1}}$. Dado que el nuevo árbol $T_{k_{r+1}}$ es adyacente a un corazón existente y al nuevo corazón, entonces $r_{k_{r+1}} = 2$. En el otro caso, se pueden enumerar los árboles T_j de tal forma que el nuevo corazón sea adyacente a T_{k_r} . Así $1 - k_{r+1} + \sum_{i=1}^{k_{r+1}} r_i = 1 - k_r + \sum_{i=1}^{k_r-1} r_i + r'_{k_r}$ donde $r'_{k_r} = r_{k_r} + 1$. De donde $1 - k_r + \sum_{i=1}^{k_r} r_i - r_{k_r} + r'_{k_r}$ y se obtiene el resultado por inducción. \square

Teorema 2.1.34. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, una base de $HH^1(\Lambda)$ está dada por las clases de los siguientes elementos:*

1. (a, α) donde a es un atajo de α y a no aparece en las relaciones de R ,
2. (a, α) donde α es una desviación de a , a no aparece en las relaciones de R y $\alpha = \alpha_2 a \alpha_1$ con $\alpha_1, \alpha_2 \notin Q_0$,
3. (a, a) por cada ciclo simple minimal en Q , donde a es una flecha del complemento de un árbol maximal de Q ,
4. si $\text{car}(K) = 2$, además de los elementos anteriores, las parejas $(a, s(a))$ con a un bucle.

Demostración. El resultado se obtiene de las Proposiciones 2.1.13, 2.1.16, 2.1.32, el Lema 2.1.33 y la Proposición 2.1.18. \square

Ejemplo 2.1.35. *Considérese el carcaj Q como sigue:*

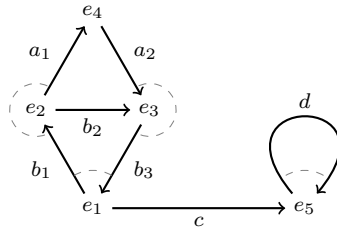


Figura 2.6.

Si I es el ideal admisible generado por $R = \{a_1 b_1, b_3 a_2, b_1 b_3, d^2\}$ y $\text{car}(K) \neq 2$, entonces $\Lambda = KQ/I$ es un álgebra gentil con $HH^0(\Lambda) = K\left(\sum_{i=1}^5 (e_i, e_i)\right)$ y $HH^1(\Lambda) = K(b_2, a_2 a_1) \oplus K(c, d c b_3 b_2 b_1) \oplus K(a_1, a_1) \oplus K(b_1, b_1) \oplus K(d, d)$. Nótese que $(b_2, a_2 a_1)$ es un atajo, $(c, d c b_3 b_2 b_1)$ es una desviación y, (a_1, a_1) , (b_1, b_1) y (d, d) están determinados por los ciclos simples minimales.

Ejemplo 2.1.36. Sea Q el carcaj

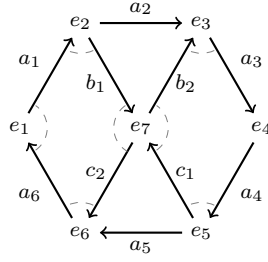


Figura 2.7.

con conjunto de relaciones $R = \{b_1a_1, a_3b_2, c_1a_4, a_6c_2, c_2b_1, b_2c_1, a_1a_6, \}$ e $I = \langle R \rangle$, entonces $\Lambda = KQ/I$ es un álgebra gentil con $HH^0(\Lambda) = K\left(\sum_{i=1}^7 (e_i, e_i)\right) \oplus K(e_1, a_6a_5a_4a_3a_2a_1)$ y $HH^1(\Lambda) = K(a_2, b_2b_1) \oplus K(a_5, c_2c_1) \oplus K(a_1, a_1) \oplus K(a_2, a_2) \oplus K(a_3, a_3) \oplus K(a_5, a_5)$.

2.2. Dual del primer espacio de homología de Hochschild de un álgebra gentil Λ

Sea $X \odot Y$ el conjunto formado por los **pares cíclicos** $\alpha \odot \beta$ donde $\alpha \in X, \beta \in Y$, $s(\alpha) = t(\beta)$ y $t(\alpha) = s(\beta)$. Se denota con \mathcal{B}^* la base dual del espacio vectorial DA con estructura de A - A -bimódulo dada por $afb(x) = f(bxa)$ para cada $a, b, x \in A$ y $f \in DA$. Recuerdese que $E = KQ_0$ es una K -subálgebra separable de A .

Definición 2.2.1. Sean Q un carcaj conexo y finito, y X un conjunto de caminos en Q . El conjunto conformado por los pares $\alpha \odot \beta^*$ con $\alpha \odot \beta \in X \odot \mathcal{B}$ y $\beta^* \in \mathcal{B}^*$ se denota por $X \odot \mathcal{B}^*$, es decir

$$X \odot \mathcal{B}^* := \{\alpha \odot \beta^* \mid \alpha \odot \beta \in X \odot \mathcal{B}\}.$$

Lema 2.2.2. [39, Lemma 4.2.2.1] Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial, X un conjunto de caminos de Q y KX el correspondiente E - E -bimódulo. Los espacios vectoriales $K(X \odot \mathcal{B}^*)$ (resp. $K(\mathcal{B}^* \odot X)$) y $\text{Hom}_{E^e}(KX, DA)$ ($\text{Hom}_{E^e}(DA, KX)$) son isomorfos.

Proposición 2.2.3. [38] Si A es un álgebra monomial, el dual de la homología de Hochschild de A es la homología del complejo de cocadena

$$0 \longrightarrow K(Q_0 \odot \mathcal{B}^*) \xrightarrow{d_0} K(Q_1 \odot \mathcal{B}^*) \xrightarrow{d_1} K(R \odot \mathcal{B}^*) \rightarrow \dots$$

donde los diferenciales de los primeros lugares son

$$d_0(e \odot \alpha^*) = \sum_{a \in Q_1 e} \chi_{\mathcal{B}^*}(a\alpha^*)(a \odot a\alpha^*) - \sum_{a \in eQ_1} \chi_{\mathcal{B}^*}(\alpha^*a)(a \odot \alpha^*a),$$

$$d_1(a \odot \alpha^*) = \sum_{\substack{\gamma \in R \\ \gamma = \theta a \nu}} \chi_{\mathcal{B}^*}(\theta \alpha^* \nu)(\gamma \odot \theta \alpha^* \nu).$$

Se obtiene $HH_1(A)^* \cong \ker(d_1)/\text{Im}(d_0)$.

Por lo anterior, nos interesan los ciclos que tiene el carcaj Q del álgebra gentil para calcular el dual del primer grupo de homología de Hochschild. Los posibles ciclos son:



Sean $e \in Q_0$, $a \in Q_1$, $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ con $\alpha_i \in Q_1$ y $n > 1$. El espacio vectorial $K(Q_0 \odot \mathcal{B}^*)$ está generado por elementos de la forma $e \odot e^*$ y $s(\alpha) \odot \alpha^*$ con α un ciclo en \mathcal{B} ; mientras que $K(Q_1 \odot \mathcal{B}^*)$ está generado por elementos $a \odot s(a)^*$ con a un bucle y $a \odot \alpha^*$ donde a y α forman un par cíclico. Los diferenciales son:

$$d_0 : K(Q_0 \odot \mathcal{B}^*) \longrightarrow K(Q_1 \odot \mathcal{B}^*)$$

$$\begin{aligned} e \odot e^* &\longmapsto 0 \\ s(\alpha) \odot \alpha^* &\longmapsto \begin{cases} \alpha_1 \odot (\alpha_n \dots \alpha_2)^* - \alpha_n \odot (\alpha_{n-1} \dots \alpha_1)^* & \text{si } n > 1, \\ 0 & \text{si } n = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$d_1 : K(Q_1 \odot \mathcal{B}^*) \longrightarrow K(R \odot \mathcal{B}^*)$$

$$\begin{aligned} a \odot s(a)^* &\longmapsto 0 \\ a \odot \alpha^* &\longmapsto \begin{cases} 2a^2 \odot s(a)^* & \text{si } a = \alpha, \\ a\alpha \odot s(\alpha)^* & \text{si } \alpha a \in \mathcal{B} \text{ y } a\alpha \in R, \\ \alpha a \odot t(\alpha)^* & \text{si } \alpha a \in R \text{ y } a\alpha \in \mathcal{B}, \\ a\alpha \odot s(\alpha)^* + \alpha a \odot t(\alpha)^* & \text{si } \alpha a \text{ y } a\alpha \in R, \\ a\alpha_1 \odot (\alpha_n \dots \alpha_2)^* & \text{si } a\alpha_1 \in R, \alpha a \in \mathcal{B} \text{ y } n > 1, \\ \alpha_n a \odot (\alpha_{n-1} \dots \alpha_1)^* & \text{si } a\alpha_1 \in \mathcal{B}, \alpha a \in R \text{ y } n > 1, \\ a\alpha_1 \odot (\alpha_n \dots \alpha_2)^* + \alpha_n a \odot (\alpha_{n-1} \dots \alpha_1)^* & \text{si } a\alpha_1, \alpha a \in R \text{ y } n > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo anterior se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.4. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Los siguientes pares cíclicos forman una base de $HH_1(\Lambda)^*$:*

1. $a \odot b^* - b \odot a^* \in Q_1 \odot Q_1^*$ con $ba = 0 = ab$,
2. $a \odot s(a)^* \in Q_1 \odot Q_0^*$,
3. si $\text{car}(K) = 2$, además de los elementos anteriores se tienen los elementos de la forma $a \odot a^* \in Q_1 \odot Q_1^*$.

Demostración. Se obtiene de forma directa con los diferenciales anteriores. □

Ejemplo 2.2.5. ■ En el Ejemplo 2.1.35 resulta $HH_1(\Lambda)^* = K(d \odot e_5)$.

- En el Ejemplo 2.1.36 vale que $HH_1(\Lambda)^* = 0$.

2.3. $Alt_\Lambda(D\Lambda)$ de un álgebra gentil Λ

Si A es un álgebra monomial recuérdese que

$$Alt_A(DA) = \{\varphi \in \text{Hom}_{A-A}(DA, A); f\varphi(g) + \varphi(f)g = 0 \text{ para cada } f, g \in DA\}.$$

Por adjunción se obtiene

$$\text{Hom}_{A-A}(DA, A) \cong \text{Hom}_K(DA \otimes_{A-A} DA, K).$$

Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}$, es claro que $\alpha\gamma^*\beta \neq 0$ si y solo si $\gamma = \beta\xi\alpha$ para algún ξ en \mathcal{B} , en este caso $\alpha\gamma^*\beta = \xi^*$ y en particular $e_j\gamma^*e_i = (e_i\gamma e_j)^*$.

Nótese que $\{\alpha^* \otimes_{A-A} \beta^* \mid \alpha \odot \beta \in \mathcal{B} \odot \mathcal{B}\}$ es un conjunto de generadores para $DA \otimes_{A-A} DA$.

Definición 2.3.1. Un par cíclico $\alpha \odot \beta \in \mathcal{B} \odot \mathcal{B}$ es **limpio** si satisface:

1. Si $\beta a \in \mathcal{B}$ (resp. $a\beta \in \mathcal{B}$) para algún $a \in Q_1$, entonces a es la última flecha (resp. primera) en α .
2. Si $\alpha b \in \mathcal{B}$ (resp. $b\alpha \in \mathcal{B}$) para algún $b \in Q_1$, entonces b es la última flecha (resp. primera) en β .

Se considera la menor relación de equivalencia que contiene a la relación \sim sobre $\mathcal{B} \odot \mathcal{B}$ generada por

$$(a\alpha \odot \beta) \sim (\alpha \odot \beta a) \text{ y } (\alpha b \odot \beta) \sim (\alpha \odot b\beta) \text{ para cada } a, b \in Q_1.$$

Definición 2.3.2. Una clase de equivalencia en $(\mathcal{B} \odot \mathcal{B}) / \sim$ se dice **limpia** si todos los elementos de la clase son limpios. Se denota con \mathcal{N} el conjunto de clases de equivalencia limpias.

Lema 2.3.3. [12, Lemma 4.2] Hay una biyección entre \mathcal{N} y el conjunto de generadores del espacio vectorial $DA \otimes_{A-A} DA$.

Sea $N \in \mathcal{N}$ una clase de equivalencia limpia y considérese el morfismo ψ_N definido por

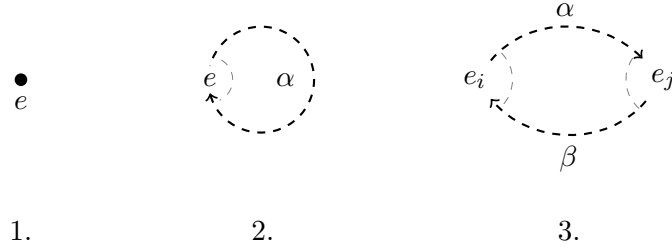
$$\psi_N(\gamma^*) = \sum_{(\gamma, \delta) \in N} \delta$$

para cada $\gamma^* \in \mathcal{B}^*$, entonces ψ_N es un morfismo de A - A -bimódulos [12].

Proposición 2.3.4. [12, Proposition 4.4] Una base de $\text{Hom}_{A-A}(DA, A)$ como espacio vectorial es el conjunto $\{\psi_N\}_{N \in \mathcal{N}}$.

Teorema 2.3.5. [12, Lemma 4.5] El conjunto \mathcal{N} tiene una involución v proporcionada por el flip de pares y $\psi = \sum_{N \in \mathcal{N}} \lambda_N \psi_N \in Alt_A(DA)$ si y solo si $\lambda_N + \lambda_{v(N)} = 0$ para cada $N \in \mathcal{N}$.

Por lo anterior solo interesa determinar las clases limpias según las configuraciones posibles en el carcaj del álgebra gentil Λ , para ésto considérese $\alpha, \beta \in \mathcal{B} \setminus Q_0$, y los ciclos en Q de las siguientes formas:



Nótese que si en los vértices etiquetados de los grafos anteriores inciden otras flechas, se obtienen pares cíclicos no limpios. Según los casos resulta lo siguiente:

1. Como $\overline{e \odot e} = \{e \odot e\}$, por ser simétrica vale $\psi_{\overline{e \odot e}} \in \text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$ si y solo si $\text{car}(K) = 2$.
2. Sea $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$, con $\alpha_i \in Q_1$ para cada i , en este caso las clases son $\overline{e \odot \alpha} = \{e \odot \alpha, \alpha_j \dots \alpha_1 \odot \alpha_n \dots \alpha_{j+1}, \alpha \odot e, \alpha_n \dots \alpha_{j+1} \odot \alpha_j \dots \alpha_1 \mid j \in \{1, \dots, n-1\}\}$ y $\overline{\alpha \odot \alpha} = \{\alpha \odot \alpha\}$. Las dos clases son simétricas y limpias, por lo tanto $\psi_{\overline{\alpha \odot \alpha}}, \psi_{\overline{e \odot \alpha}} \in \text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$ si y solo si $\text{car}(K) = 2$. Por otro lado, $\overline{e \odot e}$ no es limpia.
3. Las clases de $\overline{\alpha \odot \beta}$ y $\overline{\beta \odot \alpha}$ poseen un solo elemento y una es el flip de la otra, por lo que $\psi_{\overline{\alpha \odot \beta}} - \psi_{\overline{\beta \odot \alpha}} \in \text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$, nótese que no importa la característica de K .

Lo anterior es la prueba del siguiente teorema, en el cual se da una base para $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$.

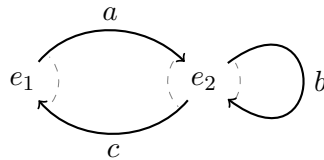
Teorema 2.3.6. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con $Q \neq \bullet$.*

1. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ tal que $\alpha \neq \beta$, $\alpha\beta, \beta\alpha \in I$, $\alpha \odot \beta \in \mathcal{B} \odot \mathcal{B}$ y $\text{val}_Q(s(\alpha)) = \text{val}_Q(s(\beta)) = 2$.
2. Si $\text{car}(K) \neq 2$ entonces $\psi_{\overline{\alpha \odot \beta}} - \psi_{\overline{\beta \odot \alpha}}$ es un elemento de la base de $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$ y todos los elementos de la base de $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$ son de esa forma.
2. Si $\text{car}(K) = 2$ sea $\gamma \in \mathcal{B} \setminus Q_0$ tal que $s(\gamma) = t(\gamma) = e$, y $\text{val}_Q(e) = 2$. El conjunto de elementos $\psi_{\overline{e \odot \gamma}}$, $\psi_{\overline{\gamma \odot \gamma}}$ y $\psi_{\overline{\alpha \odot \beta}} - \psi_{\overline{\beta \odot \alpha}}$ con α y β como en el ítem 1. es una base de $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$.

Si Q es el carcaj con un solo vértice y sin flechas, entonces $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda) = \langle \psi_{\overline{e \odot e}} \rangle$ siempre que $\text{car}(K) = 2$, de lo contrario $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda) = 0$.

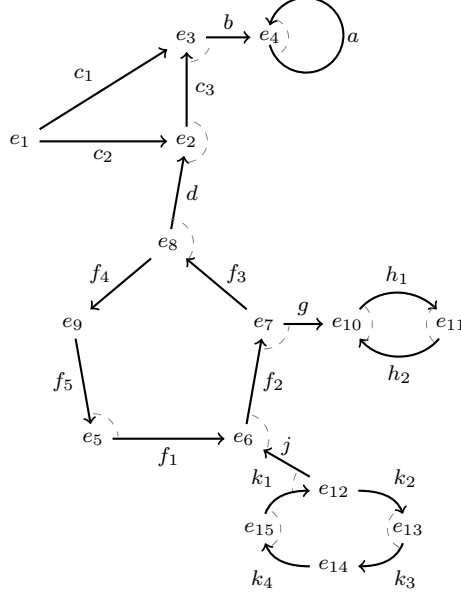
Con el Teorema 2.3.6 se completa cada una de las bases de cada sumando del primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de un álgebra gentil.

Observación 2.3.7. *No necesariamente los ciclos anteriores son simples, un ejemplo de esto es el álgebra determinada por el siguiente carcaj*



y $R = \{ca, ac, b^2\}$, el cual tiene el ciclo $\alpha = cba$ como en el caso 2 y $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda) = K(\psi_{\overline{\alpha \odot \alpha}}) \oplus K(\psi_{\overline{e_1 \odot \alpha}})$ siempre que $\text{car}(K) = 2$, de lo contrario $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda) = 0$.

Ejemplo 2.3.8. Sean $\text{car}(K) \neq 2$, $\Lambda = KQ/I$ con Q como en la siguiente figura e I el ideal generado por $R = \{a^2, bc_3, c_3d, df_3, gf_2, f_1f_5, f_2j, h_1h_2, h_2h_1, jk_1, k_1k_4, k_3k_2\}$, entonces



$$\begin{aligned}
HH^0(\Lambda) &= \overline{K(e_5, f_5 f_4 f_3 f_2 f_1)} \oplus K\left(\sum_{i=1}^{15} (e_i, e_i)\right), \\
HH^1(\Lambda) &= \overline{K(a, a)} \oplus \overline{K(c_1, c_1)} \oplus \overline{K(f_1, f_1)} \oplus \overline{K(h_1, h_1)} \oplus \overline{K(k_1, k_1)} \oplus \overline{K(c_1, c_3 c_2)}, \\
HH_1(\Lambda)^* &= \overline{K(a \odot e_4^*)} \oplus \overline{K(h_1 \odot h_2^* - h_2 \odot h_1^*)}, \\
\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda) &= K\left(\psi_{\overline{k_2 k_1 \odot k_4 k_3}} - \psi_{\overline{k_4 k_3 \odot k_2 k_1}}\right),
\end{aligned}$$

donde

$$\psi_{\overline{k_2 k_1 \odot k_4 k_3}}(\gamma^*) = \begin{cases} k_4 k_3 & \text{si } \gamma = k_2 k_1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \psi_{\overline{k_4 k_3 \odot k_2 k_1}}(\gamma^*) = \begin{cases} k_2 k_1 & \text{si } \gamma = k_4 k_3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.9. En los Ejemplos 2.1.35 y 2.1.36, vemos que $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda) = 0$.

2.4. Codificación de la cohomología de Hochschild en el grafo de ribbon y en el grafo de Brauer

En esta sección se muestra cómo se codifica la información del primer espacio de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras gentiles en el grafo de ribbon y el grafo de Brauer. Se inicia esta sección mostrando que hay una biyección entre los ciclos simples minimales del carcaj y los ciclos simples minimales del grafo de ribbon correspondiente al álgebra.

Círculos simples en el grafo de Brauer

Recuérdese que la característica de Euler $\chi(G)$ de un grafo G es el número de vértices menos el número de aristas, así, si G_Λ es el grafo de ribbon de un álgebra gentil Λ , entonces $\chi(G_\Lambda) = |(G_\Lambda)_0| - |(G_\Lambda)_1|$.

Proposición 2.4.1. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con grafo de ribbon G_Λ . Entonces $\chi(Q) = \chi(G_\Lambda)$ y además, $|\overline{\mathcal{M}}| = 2|Q_0| - |Q_1|$.*

Demostración. Sea $G = G_\Lambda$. Por definición de G , las aristas están en correspondencia uno a uno con los vértices de Q , entonces

$$\begin{aligned}\chi(Q) &= |Q_0| - |Q_1| \\ &= |G_1| - \sum_{m \in G_0} (\text{val}_G(m) - 1) \\ &= |G_1| - \sum_{m \in G_0} \text{val}_G(m) + |G_0|\end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{m \in \Gamma_0} \text{val}_G(m) = 2|G_1|$, resulta $\chi(Q) = \chi(G)$. Además, el número de vértices en G es $2|Q_0| - |Q_1|$ y así $|\overline{\mathcal{M}}| = 2|Q_0| - |Q_1|$. \square

Corolario 2.4.2. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con grafo de ribbon G_Λ . Entonces existe una biyección entre los ciclos simples minimales en Q (como grafo no dirigido) y los ciclos simples minimales en G_Λ .*

Por el corolario anterior cada ciclo simple minimal en Q corresponde a un ciclo simple minimal en G_Λ . Además, por [35], las flechas en Q están en biyección con los ángulos (no marcados) en G_Λ (un ángulo está dado por dos aristas consecutivas según el orden cíclico y que inciden en el mismo vértice). La elección de una flecha a en cada ciclo simple minimal de Q se corresponde con un corte en G_Λ en el ángulo (no marcado) correspondiente a a . Recíprocamente, cada corte en un ángulo no marcado corresponde a una flecha en Q y un conjunto minimal de cortes en G_Λ tal que el grafo cortado es un árbol proporciona un subconjunto de elementos en la base de $HH^1(\Lambda)$ correspondiente a los elementos diagonales, es decir, los elementos de la forma (a, a) que corresponden a una flecha en cada ciclo simple minimal en Q .

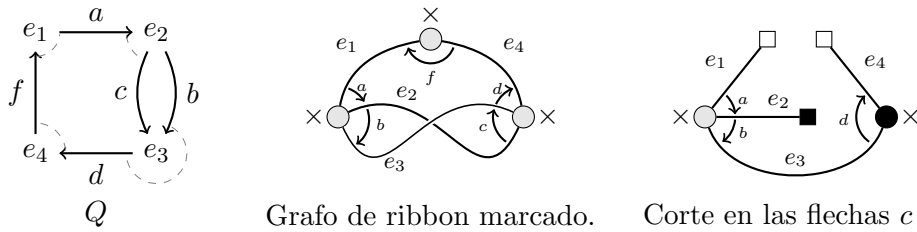


Figura 2.8. Ejemplo de un conjunto minimal de cortes dado por las flechas $\{c, f\}$ que corresponden a los dos elementos (c, c) y (f, f) en la base de $HH^1(A)$.

2.4.1. Codificación

Sea B un álgebra de grafos de Brauer con multiplicidad igual a 1. Usando el hecho de que B es la extensión trivial de un álgebra gentil Λ y que hay un isomorfismo entre $HH^1(T\Lambda)$ y $Z(\Lambda) \oplus HH_1(\Lambda)^* \oplus HH^1(\Lambda) \oplus \text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$, se resumen los resultados obtenidos en las secciones anteriores y se da una base de $HH^1(B)$.

Teorema 2.4.3. *Sea B un álgebra de grafos de Brauer con multiplicidad uno y sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con base de caminos \mathcal{B} y tal que $B \cong T\Lambda$. Supóngase que $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$. Si $\text{car}(K) \neq 2$, entonces el conjunto de los siguientes elementos determina una base de $HH^1(B)$:*

1. $\sum_{e \in Q_0} (e, e)$,
2. $(s(\alpha), \alpha) \in Q_0 || \mathcal{B}$ con α un ciclo no trivial con $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$,
3. $(a, \alpha) \in Q_1 || \mathcal{B}$ donde a es un atajo de α ,
4. $(a, \alpha) \in Q_1 || \mathcal{B}$ con α una desviación vía a ,
5. $(a, a) \in Q_1 || \mathcal{B}$ con a una flecha en el complemento de un árbol maximal en Q , se elige una flecha por cada ciclo simple minimal de Q .
6. $a \odot b^* - b \odot a^* \in Q_1 \odot \mathcal{B}^*$ con $ab, ba \in I$,
7. $a \odot s(a)^* \in Q_1 \odot \mathcal{B}^*$ con a un bucle,
8. $\psi_{\{\alpha, \beta\}} \in \text{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(D\Lambda, \Lambda)$ dada por $\alpha^* \mapsto \beta$, $\beta^* \mapsto -\alpha$ si $\alpha \neq \beta$, $s(\alpha) = t(\beta)$, $s(\beta) = t(\alpha)$, $\alpha\beta, \beta\alpha \in I$, y $\text{val}_Q(s(\alpha)) = \text{val}_Q(s(\beta)) = 2$ y 0 en cualquier otro caso.

Si $\text{car}(K) = 2$, en adición a los elementos anteriores, los siguientes elementos completan una base de $HH^1(B)$:

9. $(a, s(a)) \in Q_1 || \mathcal{B}$ donde a es un bucle.
10. $a \odot a^* \in Q_1 \odot \mathcal{B}^*$ con a un bucle,
11. $\psi_{\{s(\alpha), \alpha\}}, \psi_{\{\alpha, \alpha\}} \in \text{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(D\Lambda, \Lambda)$, donde α es un ciclo con $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$ y
 - i) $\psi_{\{s(\alpha), \alpha\}}(\beta^*) = \gamma$ si $\alpha = \beta\gamma$ o $\alpha = \gamma\beta$ y cero en otro caso,
 - ii) $\psi_{\{\alpha, \alpha\}}(\alpha^*) = \alpha$ y cero en otro caso.

Además, si Γ_B es el grafo de Brauer de B dado por el grafo de ribbon (sin etiquetas) de Λ , entonces las configuraciones locales en las Figuras 2.9, 2.10, 2.11, 2.8, 2.12, 2.13 y 2.14 dan una base de $HH^1(B)$.

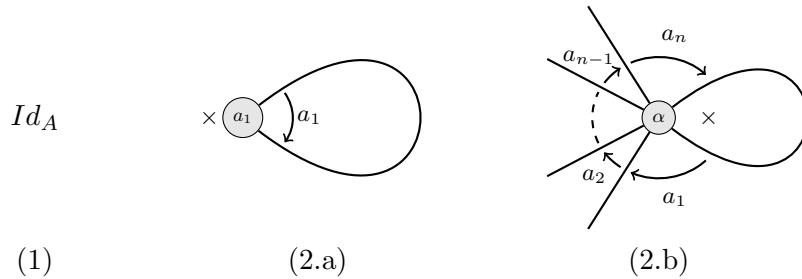


Figura 2.9. Configuración local en el grafo de ribbon marcado de un álgebra gentil Λ , cada uno da lugar a un elemento de la base de $Z(\Lambda)$. La configuración (2.a) es de un bucle a con $\text{val}_Q(s(a)) = 2$.

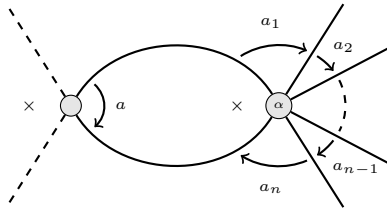


Figura 2.10. La marca \times de la parte izquierda es entre cualquiera de los dos bordes, excepto dentro del ciclo. Esto corresponde a un atajo como en el Teorema 2.1.34 con $\alpha = a_n \dots a_1$ y $a_i \in Q_1$ para $1 \leq i \leq n$.

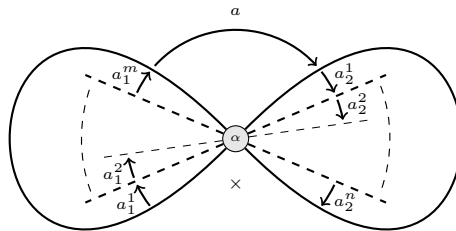


Figura 2.11. Configuración local correspondiente a una desviación $\alpha = a_2^n \dots a_2^1 a a_1^m \dots a_1^1$ vía a como en el Teorema 2.1.34 y $a_1^i, a_2^j \in Q_1$ para $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

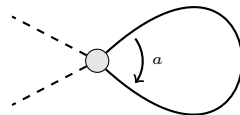


Figura 2.12. Configuración local correspondiente al bucle en el Teorema 2.1.34, solo aparece en la base de $HH^1(\Lambda)$ si $\text{car}(K) = 2$.

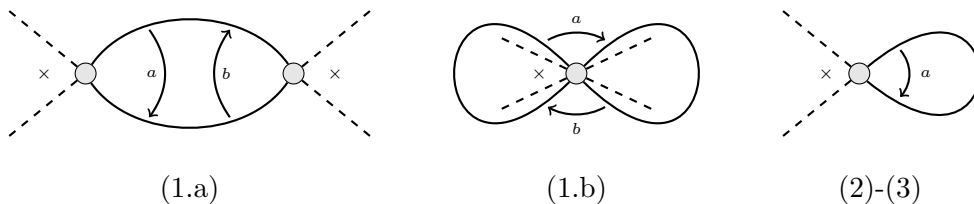


Figura 2.13. Configuraciones locales que dan lugar a elementos de la base de $HH_1(\Lambda)^*$ como se describe en el Teorema 2.2.4.

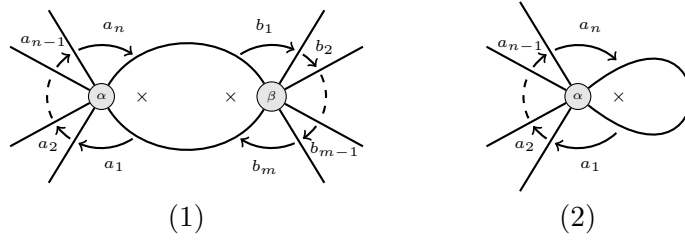
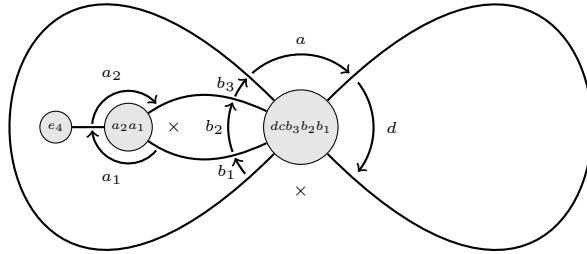


Figura 2.14. Configuraciones locales de B_Λ que aportan un elemento de la base de $Alt_\Lambda(D\Lambda)$ donde (2) solo aparece si $\text{car}(K) = 2$ y donde $\alpha = a_n \dots a_1$ y $\beta = b_m \dots b_1$.

Ejemplo 2.4.4. El grafo de ribbon correspondiente al álgebra gentil Λ del Ejemplo 2.1.35 es el sigue:



Si $\text{car}(K) \neq 2$, del grafo de ribbon se obtiene que $HH^0(\Lambda) \cong K$ y se corresponde con la configuración de la Figura 2.9-(1); aparecen las configuraciones de las Figuras 2.10 y 2.11 aportando los primeros dos sumandos de $HH^1(\Lambda) = K(b_2, a_2 a_1) \oplus K(c, d c b_3 b_2 b_1) \oplus K(a_1, a_1) \oplus K(b_1, b_1) \oplus K(d, d)$, nótese que los últimos tres sumandos se corresponden con los tres ciclos del grafo; la configuración de la Figura 2.13-(2) da $HH_1(\Lambda)^* = K(d \odot e_5^*)$ y no aparecen más configuraciones, de donde $Alt_\Lambda(D\Lambda) = 0$.

Si $\text{car}(K) = 2$, además de los elementos anteriores, las configuraciones de las Figuras 2.12 y 2.13-(2) aportan el par paralelo (d, e_5) y el par cíclico $d \odot d^*$, respectivamente; el primero es para la base de $HH^1(\Lambda)$ y el segundo para la base de $HH_1(\Lambda)^*$.

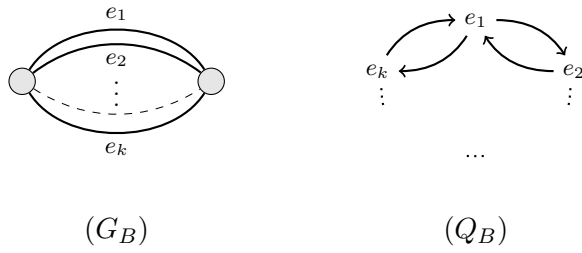
De [35] se obtiene que dada un álgebra de grafo de Brauer B con multiplicidad uno, existe un álgebra gentil Λ tal que $B = T\Lambda$ y Λ no es única. En el siguiente corolario se prueba que siempre se puede elegir un álgebra gentil Λ tal que $Alt_\Lambda(D\Lambda) = 0$.

Corolario 2.4.5. Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Existe un álgebra gentil Λ' tal que $T\Lambda \cong T\Lambda'$ y $Alt_{\Lambda'}(D\Lambda') = 0$.

Demostración. Considérese el grafo de ribbon G_Λ sin las marcas, esto da un grafo de Brauer de $T\Lambda$. Se puede elegir un corte admisible tal que la configuración local (incluyendo las marcas) como en la Figura 2.14 no aparezca. El grafo de ribbon marcado correspondiente a este corte determina un álgebra gentil Λ' con $Alt_{\Lambda'}(D\Lambda') = 0$ y $T\Lambda \cong T\Lambda'$. \square

Sin embargo, dada un álgebra de grafos de Brauer B con multiplicidad uno, no siempre es posible encontrar un álgebra gentil Λ tal que $B \cong T\Lambda$ y $HH_1(\Lambda) = 0$.

Ejemplo 2.4.6. Sea B el álgebra de grafos de Brauer con grafo de Brauer G_B y carcaj Q_B con $k \geq 3$ como siguen:



Cada corte admisible determina un álgebra gentil Λ tal que $B \cong T\Lambda$ y $HH_1(\Lambda) \neq 0$.

Capítulo 3

Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(\Lambda)$ y $HH^1(T\Lambda)$

Se inicia este capítulo recordando algunos resultados sobre cómo los primeros espacios de (co)homología de Hochschild de un álgebra monomial se ven en el primer espacio de cohomología de Hochschild de su extensión trivial. También se recuerdan algunos resultados conocidos del corchete de Gerstenhaber y un morfismo de comparación, antes de determinar explícitamente la estructura de álgebra de Lie del primer espacio de cohomología de Hochschild de álgebras gentiles, el cual es el objetivo de este capítulo.

Sea A un álgebra monomial de dimensión finita. En [38, Théorème 4.1.0.3] Strametz muestra que la siguiente transformación K -lineal es un isomorfismo.

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & Der_K(TA, TA) \longrightarrow Z(A) \oplus Der_K(A, A) \oplus Der_K(A, DA) \oplus Alt_A(DA) \\ & \begin{pmatrix} \varphi_{A,A} & \varphi_{DA,A} \\ \varphi_{A,DA} & \varphi_{DA,DA} \end{pmatrix} \longmapsto (\varphi_{DA,DA} + D(\varphi_{A,A})) + \varphi_{A,A} + \varphi_{A,DA} + \varphi_{DA,A}, \end{aligned}$$

donde $D(\varphi) : DA \rightarrow DA$ con $D(\varphi_{A,A})(f) = f \circ \varphi_{A,A}$. Este morfismo induce un isomorfismo en la cohomología

$$\bar{\Psi} : HH^1(TA) \longrightarrow Z(A) \oplus HH^1(A) \oplus HH^1(A, DA) \oplus Alt_A(DA).$$

Además, en [38, Théorème 2.2.2.1] muestra que el corchete definido por

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = (a', \alpha'^{(a, \alpha)}) - (a, \alpha^{(a', \alpha')}),$$

para todo $(a, \alpha), (a', \alpha') \in Q_1 || \mathcal{B}$ induce un isomorfismo de álgebras de Lie entre $HH^1(A)$ y $\ker(d^1) / \text{Im}(d^0)$. Como consecuencia, demuestra el siguiente teorema:

Teorema 3.0.1. [38, Théorème 4.1.0.6] *Sea A un álgebra monomial finito dimensional:*

1. *El álgebra de Lie $HH^1(A)$ junto con el corchete de Lie usual es una subálgebra de Lie de $HH^1(TA)$. Los factores $Z(A)$, $H^1(A, DA)$ y $Alt_A(DA)$ son subálgebras de Lie abelianas de $HH^1(TA)$.*
2. *El álgebra de Lie $HH^1(A)$ actúa sobre el centro $Z(A)$ mediante el corchete de Gerstenhaber. Para cada $z \in Z(A)$, $\varphi_{A,A} \in HH^1(A)$,*

$$[z, \varphi_{A,A}] = -\varphi_{A,A}(z).$$

Además, $\mathcal{L} := HH^1(A) \oplus Z(A)$ es una subálgebra de Lie de $HH^1(TA)$.

3. El álgebra de Lie \mathcal{L} actúa sobre $H^1(A, DA)$. Se tiene

$$\begin{aligned} [z, \varphi_{A,DA}] &= z\varphi_{A,DA}, \\ [\varphi_{A,A}, \varphi_{A,DA}] &= -D(\varphi_{A,A}) \circ \varphi_{A,DA} - \varphi_{A,DA} \circ \varphi_{A,A}, \end{aligned}$$

para todo $z \in Z(A)$, $\varphi_{A,A} \in HH^1(A)$ y $\varphi_{A,DA} \in H^1(A, DA)$.

4. El álgebra de Lie \mathcal{L} actúa sobre $Alt_A(DA)$. Para cada $z \in Z(A)$, $\varphi_{A,A} \in HH^1(A)$ y $\varphi_{DA,A} \in Alt_A(DA)$ se verifica

$$\begin{aligned} [z, \varphi_{DA,A}] &= -z\varphi_{DA,A}, \\ [\varphi_{A,A}, \varphi_{DA,A}] &= \varphi_{A,A} \circ \varphi_{DA,A} + \varphi_{DA,A} \circ D(\varphi_{A,A}). \end{aligned}$$

5. El K -espacio vectorial $\mathcal{P} := H^1(A, DA) \oplus Alt_A(DA)$ es invariante bajo la acción de \mathcal{L} , satisface $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{L}$ y

$$[\varphi_{A,DA}, \varphi_{DA,A}] = \varphi_{A,DA} \circ \varphi_{DA,A} - \varphi_{DA,A} \circ \varphi_{A,DA} - D(\varphi_{DA,A} \circ \varphi_{A,DA}),$$

para todo $\varphi_{A,DA} \in H^1(A, DA)$ y $\varphi_{DA,A} \in Alt_A(DA)$.

Nótese que en los enunciados anteriores se usa el hecho de que $H^1(A, DA) \cong HH_1(A)^*$. Por otro lado, se usan los siguientes morfismos de comparación entre nuestra resolución y la resolución Bar:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 : \quad A | A &\longrightarrow A \otimes A \\ \alpha | \beta &\longmapsto \alpha \otimes \beta \\ \\ \mathbf{G}_0 : \quad A \otimes A &\longrightarrow A | A \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \alpha | \beta \\ \\ \mathbf{F}_1 : \quad A | KQ_1 | A &\longrightarrow A \otimes A \otimes A \\ \alpha | a | \beta &\longmapsto \alpha \otimes a \otimes \beta \\ \\ \mathbf{G}_1 : \quad A \otimes A \otimes A &\longrightarrow A | KQ_1 | A \\ \alpha \otimes a_n \dots a_1 \otimes \beta &\longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha a_n \dots a_{i+1} | a_i | a_{i-1} \dots a_1 \beta \end{aligned}$$

Estos inducen los siguientes morfismos lineales:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}_1 : \quad \text{Hom}_K(A, A) &\longrightarrow K(Q_1 || \mathcal{B}) \\ f : A \longrightarrow A &\longmapsto \sum_{(a,\alpha) \in Q_1 || \mathcal{B}} \lambda_{a,\alpha} \alpha \\ \varepsilon &\longmapsto \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \lambda_{\varepsilon,\alpha} \alpha \\ \\ \overline{\mathbf{G}}_1 : \quad K(Q_1 || \mathcal{B}) &\longrightarrow \text{Hom}_K(A, A) \\ (a, \alpha) &\longmapsto f_{(a,\alpha)} : A \longrightarrow A \\ \varepsilon &\longmapsto \varepsilon(a,\alpha) \\ \\ \underline{\mathbf{F}}_1 : \quad \text{Hom}_K(A, DA) &\longrightarrow K(Q_1 \odot \mathcal{B}^*) \\ g : A \longrightarrow DA &\longmapsto \sum_{a \odot \alpha \in Q_1 \odot \mathcal{B}} \lambda_{a,\alpha} a \odot \alpha^* \\ \varepsilon &\longmapsto \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \lambda_{\varepsilon,\alpha} \alpha^* \\ \\ \underline{\mathbf{G}}_1 : \quad K(Q_1 \odot \mathcal{B}^*) &\longrightarrow \text{Hom}_K(A, DA) \\ a \odot \alpha^* &\longmapsto g_{a \odot \alpha^*} : A \longrightarrow DA \\ \varepsilon &\longmapsto \sum_{i=1}^n a^*(a_i) a_n \dots a_{i+1} \alpha^* a_{i-1} \dots a_1 \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = a_n \dots a_1$ con cada $a_i \in Q_1$ y $\lambda \in K$.

3.1. Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(\Lambda)$

En esta sección se determina la estructura de $HH^1(\Lambda)$ cuando Λ un álgebra gentil. Se denota por (a, α) y (a', α') a los elementos de $HH^1(\Lambda)$ y en general el corchete entre estos elementos es

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = (a', \alpha'^{(a, \alpha)}) - (a, \alpha^{(a', \alpha')}).$$

Usando la base del Teorema 2.1.34 se obtienen los siguientes corchetes no nulos:

- Si $(a, \alpha), (a', \alpha')$ son atajos, entonces

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = \begin{cases} (a', \alpha') - (a, \alpha) & \text{si } a = \alpha' \text{ y } a' = \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que $(a', \alpha') - (a, \alpha) = 2(a', \alpha') = -2(a, \alpha)$ y que en el caso donde el corchete es no nulo la característica es diferente de 2. Además, el carcaj es el de Kronecker, el cual tiene dos únicas flechas paralelas.

$$e_1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} e_2$$

Figura 3.1. Carcaj de Kronecker.

- Si (a, α) es un atajo y (a', α') está determinado por un ciclo simple minimal, entonces

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = \begin{cases} (a, \alpha) & \text{si } a = a', \\ -(a, \alpha) & \text{si } a' \text{ es una flecha en } \beta, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Vale la pena notar que las diferentes opciones de la flecha a' en un ciclo simple minimal solo generan un cambio de signo en el corchete.

- Si (a, α) es una desviación vía a y (a', α') está determinado por un ciclo simple minimal, entonces

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = \begin{cases} -(a, \alpha) & \text{si } a \neq a' \text{ y } a' \text{ es una flecha en } \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La situación aquí con respecto a las diferentes opciones de la flecha a' en un ciclo simple minimal es similar a la del ítem anterior.

- Si $\text{car}(K) = 2$, el par (a, a) está determinado por un ciclo simple minimal y a' es un bucle con $s(a') = e_j$, entonces

$$[(a, a), (a', e_j)] = \begin{cases} -(a', e_j) & \text{si } a = a', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se resume lo anterior en el siguiente cuadro.

[-, -]		$HH^1(\Lambda)$			
		(a', e_j) si $\text{car}(K) = 2$	(a', a') , a' en un ciclo simple minimal	(a', α') , desviación vía a'	(a', α') atajo
$HH^1(\Lambda)$	(a, α) atajo	0	(a, α) si $a = a'$, $-(a, \alpha)$ si a' aparece en α , 0 en otro caso.	0	$2(a, \alpha)$ si $a = \alpha'$ y $\alpha = a'$, 0 en otro caso.
	(a, α) desviación vía a	0	$-(a, \alpha)$ si $a' \neq \alpha$ y a' aparece en α , 0 en otro caso.	0	
	(a, a) , a en un ciclo simple minimal	$-(a, e_i)$ si $a = a' (i = j)$, 0 en otro caso.	0		
	(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	0			

Cuadro 3.1. Corchete en $HH^1(\Lambda)$.

3.2. Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(T\Lambda)$

En esta sección se describen los corchetes en $HH^1(T\Lambda)$, donde, como siempre Λ es un álgebra gentil.

(1) Corchete entre $Z(\Lambda)$ y $HH^1(\Lambda)$: si $z \in Z(\Lambda)$ y $f_{(a, \alpha)}$ es un elemento de la base de $HH^1(\Lambda)$, por [38, Théorème 4.1.0.6 (2)] resulta que $[z, f_{(a, \alpha)}] = -f_{(a, \alpha)}(z) = -z^{(a, \alpha)}$. Así,

- si α es un ciclo en Λ con $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$ y $e_i = s(\alpha)$, entonces

$$[(e_i, \alpha), (a', \alpha')] = \begin{cases} -(e_i, e_i) & \text{si } \alpha = a' \text{ es un bucle con } \text{car}(K) = 2 \text{ y } \alpha' = e_i, \\ -(e_i, \alpha) & \text{si } a' = \alpha' \text{ y } a' \text{ es una flecha en } \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

- si $z = 1_\Lambda = \sum_{e \in Q_0} e$, entonces $[\sum_{e \in Q_0} (e, e), (a', \alpha')] = 0$ para cada $(a', \alpha') \in HH^1(\Lambda)$.

Lo anterior se resume en el siguiente cuadro:

[-, -]		$HH^1(\Lambda)$			
		(a', e_j) si $\text{car}(K) = 2$	(a', a') a' en un ciclo simple minimal	(a', α') desviación vía a'	(a', α') atajo
$Z(\Lambda)$	(e_i, α)	$-(e_i, \alpha^{(a', e_j)})$	$-(e_i, \alpha^{(a', a')})$	0	0
	$\sum_{e \in Q_0} (e, e)$	0	0	0	0

Cuadro 3.2. Corchete entre $Z(\Lambda)$ y $HH^1(\Lambda)$.

(2) Corchete entre $Z(\Lambda)$ y $HH_1(\Lambda)^*$: si $z \in Z(\Lambda)$ y $g \in H^1(\Lambda, D\Lambda)$, entonces $[z, g](\varepsilon) = zg(\varepsilon)$ donde $\varepsilon = a_n \dots a_1$ y cada $a_i \in Q_1$, de ahí, si $g_{b \odot \beta^*}$ es un sumando de g vale que

$$zg_{b \odot \beta^*}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n b^*(a_i) z a_n \dots a_{i+1} \beta^* a_{i-1} \dots a_1.$$

Luego

$$\begin{aligned} [z, b \odot \beta^*]_g &= \sum_{c \odot \gamma \in Q_1 \odot \mathcal{B}} (zg_{b \odot \beta^*}(c))(\gamma)(c \odot \gamma^*) = \sum_{c \odot \gamma \in Q_1 \odot \mathcal{B}} b^*(c)(z\beta^*)(\gamma)(c \odot \gamma^*) \\ &= \sum_{\{\gamma \mid b \odot \gamma \in Q_1 \odot \mathcal{B}\}} \beta^*(\gamma z)(b \odot \gamma^*), \end{aligned}$$

donde $[z, b \odot \beta^*]_g$ es el sumando correspondiente en $[z, \mathbf{F}_1(g)]$. Si α es un ciclo en el carcaj de Λ con $val_Q(s(\alpha)) = 2$ y $e_i = s(\alpha)$, usando los Teoremas 2.1.6 y 2.2.4 se obtiene:

- Sea $g = g_{a \odot b^*} - g_{b \odot a^*}$, entonces $[\alpha, g] = 0$, ya que $[(e_i, \alpha), a \odot b^*]_g = \sum_{a \odot \gamma \in a \odot \mathcal{B}} b^*(\gamma \alpha) (a \odot \gamma^*) = 0 = \sum_{b \odot \gamma \in b \odot \mathcal{B}} a^*(\gamma \alpha) (b \odot \gamma^*) = [(e_i, \alpha), b \odot a^*]_g$, esta igualdad vale ya que las flechas a y b no son bucles.
- $[(e_i, \alpha), a \odot e_j^*] = \sum_{a \odot \gamma \in a \odot \mathcal{B}} e_j^*(\gamma \alpha) (a \odot \gamma^*) = 0$, pues $\gamma \alpha \neq e_j$.
- Como $a = \gamma \alpha$ si y solo si $\gamma = e_i$ y $\alpha = a$, entonces

$$[(e_i, \alpha), a \odot a^*] = \begin{cases} a \odot e_i^* & \text{si } \alpha = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $[\sum_{e \in Q_0} (e, e), b \odot \beta^*]_g = \sum_{b \odot \gamma \in b \odot \mathcal{B}} \beta^*(\gamma) (b \odot \gamma^*) = b \odot \beta^*$.

$$[1_\Lambda, g] = g, \text{ para cada } g \in HH_1(\Lambda)^*.$$

En el Cuadro 3.3 se resume lo anterior.

(3) Corchete entre $HH^1(\Lambda)$ y $HH_1(\Lambda)^*$: Sea $f_{(a,\alpha)} \in HH^1(\Lambda)$ y $g \in H^1(\Lambda, D\Lambda)$ con $g_{b \odot \beta^*}$ y $[-, -]_g$ como en el ítem 2. Entonces

$$\begin{aligned} [f_{(a,\alpha)}, g_{b \odot \beta^*}]_g(\varepsilon)(\gamma) &= - (D(f_{(a,\alpha)}) \circ g_{b \odot \beta^*})(\varepsilon)(\gamma) - (g_{b \odot \beta^*} \circ f_{(a,\alpha)})(\varepsilon)(\gamma) \\ &= - (g_{b \odot \beta^*}(\varepsilon) \circ f_{(a,\alpha)})(\gamma) - (g_{b \odot \beta^*}(f_{(a,\alpha)}(\varepsilon)))(\gamma) \\ &= -g_{b \odot \beta^*}(\varepsilon)(\gamma^{(a,\alpha)}) - (g_{b \odot \beta^*}(\varepsilon^{(a,\alpha)}))(\gamma). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} [(a, \alpha), (b \odot \beta^*)]_g &= - \sum_{c \odot \gamma \in Q_1 \odot \mathcal{B}} \left((g_{(b \odot \beta^*)}(c))(\gamma^{(a,\alpha)})(c \odot \gamma^*) + (g_{(b \odot \beta^*)}(c^{(a,\alpha)}))(\gamma)(c \odot \gamma^*) \right) \\ &= - \sum_{c \odot \gamma \in Q_1 \odot \mathcal{B}} b^*(c) \beta^*(\gamma^{(a,\alpha)})(c \odot \gamma^*) - \sum_{a \odot \gamma \in a \odot \mathcal{B}} \sum_{i=1}^n b^*(a_i) \beta^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1})(a \odot \gamma^*) \\ &= - \sum_{b \odot \gamma \in b \odot \mathcal{B}} \beta^*(\gamma^{(a,\alpha)})(b \odot \gamma^*) - \sum_{a \odot \gamma \in a \odot \mathcal{B}} \sum_{i=1}^n b^*(a_i) \beta^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1})(a \odot \gamma^*) \end{aligned}$$

donde $\alpha = a_n \dots a_1$.

Para los elementos de las bases según los Teoremas 2.1.34 y 2.2.4 se obtiene:

- sea (a, α) un atajo con $\alpha = a_n \dots a_1$ y cada $a_i \in Q_0$,
 - Si $g = g_{a' \odot b^*} - g_{b' \odot a'^*}$, entonces $[(a, \alpha), a' \odot b'^*]_g = 0$. En efecto, en el primer sumando vale $b'^*(\gamma^{(a,\alpha)}) = 1$ si y solo si $\gamma = a$ y $b' = \alpha$, y en el segundo sumando vale $a'^*(\alpha_i) = 1$ y $b'^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1}) = 1$ si y solo si $b' = \gamma$ y $a' = \alpha$ (por la longitud de b y por ser $\alpha \neq 0$). Ahora, como Λ es un álgebra gentil, hay configuraciones para las cuales los sumandos son no nulos, por consiguiente

$$[(a, \alpha), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = 0.$$

- Sea $g = g_{a' \odot e_j^*}$, como $e_j \neq \gamma^{(a, \alpha)}$ por ser $long(\alpha) \geq 1$ para cada $\gamma \in \mathcal{B}$, entonces el primer sumando es nulo, mientras que $e_j^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1}) = 1$ y $a'^*(a_i) = 1$ si y solo si $e_j = \gamma$ y $a' = a_i$, entonces $long(\alpha) = 1$; pero Λ es gentil y $a' \neq \alpha$, entonces

$$[(a, \alpha), a' \odot e_j^*] = 0.$$

- Si $g = g_{a' \odot a'^*}$, entonces $[(a, \alpha), a' \odot a'^*] = 0$; en efecto, $a'^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1}) = 1$ y $a'^*(a_i) = 1$ si y solo si $a' = a = \gamma$, y $a'^*(\gamma^{(a, \alpha)}) = 1$ si y solo si $a' = \alpha$ y $\gamma = a$, por lo cual resulta que el corchete es no nulo si $\alpha = a'$, lo que no sucede en un álgebra gentil.

- Sea (a, α) una desviación, como $long(\alpha) \geq 3$ vale que

- $[(a, \alpha), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = 0$,
- $[(a, \alpha), a' \odot e_j^*] = 0$,
- $[(a, \alpha), a' \odot a'^*] = 0$.

- Sea a una flecha de un ciclo simple minimal y considérese la clase de la pareja paralela (a, a) , entonces

- sea $g = g_{a' \odot b'^*} - g_{b' \odot a'^*}$, puesto que $a'^*(a) = 1$ y $b'^*(\gamma) = 1$ si y solo si $a' = a$ y $b' = \gamma$, y $b'^*(\gamma^{(a, a)}) = 1$ si y solo si $\gamma = b' = a$, y como $a' \neq b'$ entonces

$$[(a, a), a' \odot b'^*]_g = \begin{cases} -a' \odot b'^* & \text{si } a = a' \text{ o } a = b', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$[(a, a), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = \begin{cases} -a' \odot b'^* + b' \odot a'^* & \text{si } a = a' \text{ o } a = b', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Como $e_j \neq \gamma^{(a, a)}$ y $a'^*(a) = 1$ si y solo si $a' = a$ entonces

$$[(a, a), a' \odot e_j^*] = \begin{cases} -a' \odot e_j^* & \text{si } a' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Obsérvese que $a'^*(a) = 1$ si y solo si $a' = a$, y $a' = \gamma^{(a, a)}$ si y solo si $a' = a = \gamma$, entonces $[(a, a), a \odot a^*] = -a \odot a^* - a \odot a^* = 0$ ya que $a \odot a^*$ aparece con $\text{car}(K) = 2$. Así, $[(a, a), a' \odot a'^*] = 0$.

- Sean a un bucle, $s(a) = e_i$ y $\text{car}(K) = 2$.

- Sea $g = g_{a' \odot b'^*} - g_{b' \odot a'^*}$, como $a'^*(e_i) = 0$ entonces

$$[(a, e_i), a' \odot b'^*]_g = - \sum b'^*(\gamma^{(a, e_i)})(a' \odot \gamma^*),$$

y $b' = \gamma^{(a, e_i)}$ si y solo si $\gamma = ab'$ o $\gamma = b'a$. Si $ab' \neq 0$, entonces $a'a \neq 0$ y

$$[(a, e_i), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = -a' \odot (ab')^* + b' \odot (a'a)^*.$$

Pero la clase de $a' \odot (ab')^* - b' \odot (a'a)^*$ es nula en $HH^1(\Lambda)$. De forma similar si $b'a \neq 0$. Por lo tanto

$$[(a, e_i), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = 0.$$

- Como $a'^*(e_i) = 0$, entonces $[(a, e_i), a' \odot e_j^*] = -\sum e_j^*(\gamma^{(a, e_i)})(a' \odot \gamma^*)$, pero $e_j = \gamma^{(a, e_i)}$ si y solo si $\gamma = a$ y $e_j = e_i$; por ser el álgebra gentil se obtiene $a' = a$. Así,

$$[(a, e_i), a' \odot e_j^*] = \begin{cases} -a \odot a^* & \text{si } e_i = e_j \text{ y } a' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Como $a'^*(e_i) = 0$ entonces $[(a, e_i), a' \odot a'^*] = -\sum a'^*(\gamma^{(a, e_i)})(a' \odot \gamma^*)$. Ahora, $a' = \gamma^{(a, e_i)}$ si y solo si $\gamma = aa'$ o $\gamma = a'a$. Nótese que no es posible tener el camino $a'a$ ni el camino aa' en Q , debido a que son dos bucles y Λ es un álgebra gentil. Luego, $[(a, e_i), a' \odot a'^*] = 0$.

Lo anterior se resume en el siguiente cuadro.

[-, -]		$HH_1(\Lambda)^*$		
		$a' \odot a'^*$ si $\text{car}(K) = 2$	$a' \odot e_j^*$	$a' \odot b'^* - b' \odot a'^*$
$Z(\Lambda)$	(e_i, α)	$\alpha \odot e_i^*$ si $\alpha = a'$, 0 otro caso.	0	0
	$\sum_{e \in Q_0} (e, e)$	$a' \odot a'^*$	$a' \odot e_j^*$	$a' \odot b'^* - b' \odot a'^*$
	(a, α) atajo	0	0	0
	(a, α) desviación vía a	0	0	0
$HH^1(\Lambda)$	(a, a) a en un ciclo simple minimal	0	$-a \odot e_j^*$ si $a = a'$, 0 otro caso.	$-a' \odot b'^* + b' \odot a'^*$ si $a = a' \circ a = b'$, 0 otro caso.
	(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	0	$-a \odot a^*$ si $i = j$ y $a = a'$, 0 otro caso.	0

Cuadro 3.3. $[Z(\Lambda), HH_1(\Lambda)^*]$ y $[HH^1(\Lambda), HH_1(\Lambda)^*]$.

(4) Corchete entre $Z(\Lambda)$ y $Alt_\Lambda(D\Lambda)$:

- sea α un ciclo en Λ con $e_i = s(\alpha)$ y $val_Q(e_i) = 2$:

- si $\psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'} \in Alt_\Lambda(D\Lambda)$ entonces $\alpha' \beta', \beta' \alpha' \in I$, $\alpha' \odot \beta' \in \mathcal{B} \odot \mathcal{B}$ y $val_Q(s(\alpha')) = val_Q(s(\beta')) = 2$. Por lo tanto

$$[(e_i, \alpha), \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = -\alpha \psi_{\alpha' \odot \beta'} + \alpha \psi_{\beta' \odot \alpha'} = 0,$$

ya que $\alpha' \neq \alpha \delta$ y $\beta' \neq \alpha \delta$ para todo $\delta \in \Lambda$ (de lo contrario el par $\alpha' \odot \beta'$ no es limpio).

- Sean $\psi_{e_j \odot \alpha'}, \psi_{\alpha' \odot \alpha'} \in Alt_\Lambda(D\Lambda)$ como en el Teorema 2.3.6 y $\text{car}(K) = 2$, entonces $[(e_i, \alpha), \psi_{\alpha' \odot \alpha'}] = 0$, ya que $-\alpha \alpha' = 0$ para todo $\alpha \in Z(\Lambda) \setminus \{1_\Lambda\}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left[\alpha, \psi_{e_j \odot \alpha'} \right] (\gamma^*) &= -\alpha \psi_{e_j \odot \alpha'} (\gamma^*) \\ &= -\alpha \sum_{\gamma \odot \delta \in e_j \odot \alpha'} \delta \\ &= -\sum_{\gamma \odot \delta \in e_j \odot \alpha'} \alpha \delta \\ &= \begin{cases} -\alpha & \text{si } \gamma = \alpha' \text{ y } e_i = e_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

La última igualdad es cierta ya que $val_Q(e_i) = 2$, de donde

$$\left[(e_i, \alpha), \psi_{e_j \odot \alpha'} \right] = \begin{cases} -\psi_{\alpha' \odot \alpha'} & \text{si } \alpha = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Identificando a $\sum_{e \in Q_0} (e, e)$ con $1_\Lambda \in Z(\Lambda)$, $[1_\Lambda, \psi] = -1_\Lambda \psi = -\psi$.

El Cuadro 3.4 resume lo anterior.

(5) Corchete entre $HH^1(\Lambda)$ y $Alt_\Lambda(D\Lambda)$: dados $f_{(a,\alpha)} \in HH^1(\Lambda)$ y $\psi \in Alt_\Lambda(D\Lambda)$,

$$\begin{aligned} [f_{(a,\alpha)}, \psi](\gamma^*) &= (f_{(a,\alpha)} \circ \psi)(\gamma^*) + (\psi \circ D(f_{(a,\alpha)}))(\gamma^*) \\ &= f_{(a,\alpha)}(\psi(\gamma^*)) + \psi(D(f_{(a,\alpha)})(\gamma^*)) \\ &= \psi(\gamma^*)^{(a,\alpha)} + \psi(\gamma^* \circ f_{(a,\alpha)}). \end{aligned}$$

Se escribe ψ como $\psi = \sum \lambda_{(\alpha',\beta')}(\alpha'^* \mapsto \beta')$, donde $\psi(\alpha'^*) = \lambda_{(\alpha',\beta')}\beta'$ y $\lambda_{(\alpha',\beta')} \in K$, entonces

$$((\alpha'^* \mapsto \beta')(\gamma^*))^{(a,\alpha)} = \begin{cases} \beta'^{(a,\alpha)} & \text{si } \gamma = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

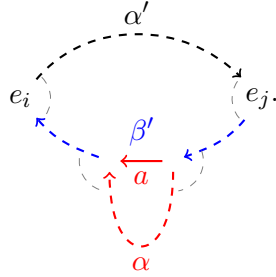
$$(\alpha'^* \mapsto \beta')(\gamma^* \circ f_{(a,\alpha)}) = \begin{cases} \beta' & \text{si } \gamma = \alpha'^{(a,\alpha)}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando los Teoremas 2.1.34 y 2.3.6 se obtiene:

- sea $\psi = \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}$,

$$[f_{(a,\alpha)}, \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = \begin{cases} \psi_{\alpha' \odot \beta'^{(a,\alpha)}} - \psi_{\alpha'^{(a,\alpha)} \odot \beta'} & \text{si } \beta'^{(a,\alpha)} \neq 0, \\ \psi_{\alpha'^{(a,\alpha)} \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'^{(a,\alpha)}} & \text{si } \alpha'^{(a,\alpha)} \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

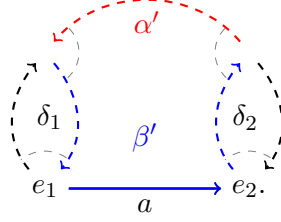
- Si (a, α) es un atajo, por ser Λ un álgebra gentil la configuración del carcaj dice que $\beta'^{(a,\alpha)} = 0$ (de forma similar $\alpha'^{(a,\alpha)} = 0$), pues en el caso en que la flecha a aparece en β' , resulta el siguiente subcarcaj:



Por lo tanto $[(a, \alpha), \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = 0$.

- Sea (a, α) una desviación con $\alpha = \delta_2 a \delta_1$, de forma similar al ítem anterior la configuración del carcaj dice que $\beta'^{(a,\delta_2 a \delta_1)} = 0$ (análogamente $\alpha'^{(a,\delta_2 a \delta_1)} = 0$), pues o el camino $\delta_2 a \delta_1$ aparece en β' y por tanto se obtiene lo deseado, o la

flecha a no aparecer en β' , pues de lo contrario no se mantiene el ciclo $\alpha' \odot \beta'$ limpio, como en la imagen:



Por lo cual $[(a, \alpha), \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = 0$.

- Sea a una flecha de un ciclo simple minimal, entonces

$$\begin{aligned} [f_{(a,a)}, \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}](\gamma^*) &= (\alpha'^* \mapsto \beta')(\gamma^*)^{(a,a)} - (\beta'^* \mapsto \alpha')(\gamma^*)^{(a,a)} \\ &\quad + (\alpha'^* \mapsto \beta')(\gamma^* \circ f_{(a,a)}) - (\beta'^* \mapsto \alpha')(\gamma^* \circ f_{(a,a)}) \\ &= \begin{cases} \beta' & \text{si } \gamma = \alpha' \text{ y } a \text{ es una flecha en } \alpha' \text{ o en } \beta', \\ -\alpha' & \text{si } \gamma = \beta' \text{ y } a \text{ es una flecha en } \alpha' \text{ o en } \beta', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego,

$$[(a, a), \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = \begin{cases} \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'} & \text{si } a \text{ es una flecha en } \alpha' \text{ o en } \beta', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si a es un bucle con $s(a) = e_i$ y $\text{car}(K) = 2$, entonces por la configuración del carcaj resulta que $\beta'^{(a,e_i)} = 0$ (de forma similar $\alpha'^{(a,e_j)} = 0$), luego

$$[(a, e_j), \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = 0.$$

- Sea α' un ciclo en Λ con $e_j = s(\alpha')$ y $\text{car}(K) = 2$.
 - Si $\psi = \psi_{e_j \odot \alpha'}$ con $\alpha' = a_n \dots a_1$ y debido a que $\overline{e_j \odot \alpha'}$ es una clase limpia, para $k \in \{1, \dots, n\}$, las siguientes igualdades valen:

$$\begin{aligned} (a_n \dots a_k)^{(a,\alpha)} &= \begin{cases} a_n \dots a_k & \text{si } (a, \alpha) = (b, b) \text{ y } b \text{ aparece en } a_n \dots a_k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ (a_k \dots a_1)^{(a,\alpha)} &= \begin{cases} a_k \dots a_1 & \text{si } (a, \alpha) = (b, b) \text{ y } b \text{ aparece en } a_k \dots a_1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Y ya que $e_j^{(a,\alpha)} = 0$, entonces,

$$[f_{(a,\alpha)}, \psi] = \begin{cases} \psi & \text{si } (a, \alpha) = (b, b) \text{ y } b \text{ es una flecha en } \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \psi_{\alpha' \odot \alpha'}$, entonces

$$[f_{(a,\alpha)}, \psi_{\alpha' \odot \alpha'}] = \begin{cases} \psi_{e_j \odot \alpha'} & \text{si } (a, \alpha) = (a, e_i), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $\overline{\alpha' \odot \alpha'}$ es limpio, entonces $\alpha'^{(a,\alpha)} = 0$ si (a, α) es un atajo o una desviación; si $(a, \alpha) = (a, e_i)$ y $\alpha' = a$ entonces $\alpha'^{(a,e_i)} = e_i$ y $[f_{(a,e_i)}, \psi_{\overline{\alpha' \odot \alpha'}}] = \psi_{\overline{e_i \odot a}}$. Por otro lado, ya que $\psi_{\overline{\alpha' \odot \alpha'}}$ aparece cuando $\text{car}(K) = 2$ y si $(a, \alpha') = (a, a)$, vale que $[f_{(a,a)}, \psi_{\overline{\alpha' \odot \alpha'}}] = 2\psi_{\overline{\alpha' \odot \alpha'}}$.

Lo anterior se resume en el Cuadro 3.4.

(6) Corchete entre $HH_1(\Lambda)^*$ y $Alt_\Lambda(D\Lambda)$: sean $g \in H^1(\Lambda, D\Lambda)$ y $\psi \in Alt_\Lambda(D\Lambda)$, nótese que

$$[g, \psi] = g \circ \psi - D(\psi \circ g) - \psi \circ g,$$

con $\psi \circ g \in H^1(\Lambda, D\Lambda) \cong HH_1(\Lambda)^*$ y $g \circ \psi - D(\psi \circ g) \in \text{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(D\Lambda, D\Lambda) \cong Z(\Lambda)$.

De forma similar al ítem anterior se escribe $(\alpha'^* \mapsto \beta')$ para referirse a un sumando de ψ en $Alt_\Lambda(D\Lambda)$. Además, se escriben los elementos de $\text{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(D\Lambda, D\Lambda)$ como

$$\phi = \sum_{u,v \in \mathcal{B}} \lambda_{u,v} (u^* \mapsto v^*)$$

donde $\lambda \in K$ y $(u^* \mapsto v^*)(w^*) = v^*$ si y solo si $w = u$.

Usando los Teoremas 2.2.4 y 2.3.6 resulta lo siguiente:

1. Sea $g = g_{a \odot b^*} - g_{b \odot a^*}$ en $HH_1(\Lambda)^*$ y considérese $g_{a \odot b^*}$, entonces

$$g_{a \odot b^*}(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego los sumandos que involucran a $g_{a \odot b^*}$ calculado en el sumando $(u^* \mapsto v)$ de ψ son:

$$(g_{a \odot b^*} \circ (u^* \mapsto v))(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = u \text{ y } v = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot b^*})(\gamma) = \begin{cases} v & \text{si } \gamma = a \text{ y } b = u \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot b^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = v \text{ y } b = u \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \psi_{\overline{\alpha' \odot \beta'}} - \psi_{\overline{\beta' \odot \alpha'}}$ resulta:

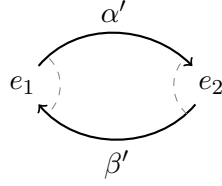
$$(g_{a \odot b^*} \circ \psi_{\overline{\alpha' \odot \beta'}})(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = \alpha' \text{ y } \beta' = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$(\psi_{\overline{\alpha' \odot \beta'}} \circ g_{a \odot b^*})(\gamma) = \begin{cases} \beta' & \text{si } \gamma = a \text{ y } \alpha' = b, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D(\psi_{\overline{\alpha' \odot \beta'}} \circ g_{a \odot b^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \beta' = \gamma \text{ y } \alpha' = b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Todas las igualdades anteriores son nulas salvo cuando el carcaj es



con $long(\alpha') = long(\beta') = 1$. Así, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [g_{a \odot b^*}, \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}]_{\mathfrak{g}} &= \begin{cases} (b^* \mapsto b^*) - (a^* \mapsto a^*) - (a, a) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' = b, \\ -(b^* \mapsto b^*) + (a^* \mapsto a^*) + (a, a) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(a, a) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' = b, \\ (a, a) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} [a \odot b^* - b \odot a^*, \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] &= \begin{cases} -(a, a) - (b, b) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' = b, \\ (a, a) + (b, b) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2(a, a) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' = b, \\ 2(a, a) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sean $\text{car}(K) = 2$, α' un ciclo en Λ con $\alpha' = a_n \dots a_1$, $s(\alpha') = e_j$ y cada $a_i \in Q_1$.

- Si $\psi = \psi_{e_j \odot \alpha'}$, entonces $[g_{a \odot b^*}, \psi]_{\mathfrak{g}} = 0$.

En efecto, para que $g_{a \odot b^*} \circ ((a_n \dots a_{k+1})^* \mapsto a_k \dots a_1)$ sea no nulo, se debe tener $long(a_k \dots a_1) = 1$ y $a_1 = a$, pero por ser $e_j \odot \alpha'$ limpio $a_1 \neq a$; de forma similar se obtiene que $a_l \neq b$ y por lo tanto $((a_n \dots a_{k+1})^* \mapsto a_k \dots a_1) \circ g_{(a \odot b^*)} = 0$. Por otro lado, $g_{(a \odot b^*)} \circ ((a_k \dots a_1)^* \mapsto a_n \dots a_{k+1}) = 0 = ((a_k \dots a_1)^* \mapsto a_n \dots a_{k+1}) \circ g_{(a \odot b^*)}$ por el mismo argumento. En conclusión

$$[a \odot b^* - b \odot a^*, \psi_{e_j \odot \alpha'}] = 0.$$

- Si $\psi = \psi_{\alpha' \odot \alpha'}$ entonces

$$(g_{a \odot b^*} \circ \psi_{\alpha' \odot \alpha'})(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = \alpha' = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$(\psi_{\alpha' \odot \alpha'} \circ g_{a \odot b^*})(\gamma) = \begin{cases} b & \text{si } \gamma = a \text{ y } b = \alpha' \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D(\psi_{\alpha' \odot \alpha'} \circ g_{a \odot b^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = b = \alpha' \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

pero por ser Λ un álgebra gentil, a y b no son bucles, de donde

$$[a \odot b^* - b \odot a^*, \psi_{\alpha' \odot \alpha'}] = 0.$$

2. Sea a un bucle y $g = g_{a \odot e_i^*}$, entonces

$$g_{a \odot e_i^*}(\gamma^*) = \begin{cases} e_i^* & \text{si } \gamma = a, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo que cada uno de los sumandos del corchete calculado en el sumando $(u^* \mapsto v)$ de ψ es:

$$(g_{a \odot e_i^*} \circ (u^* \mapsto v))(\gamma^*) = \begin{cases} e_i^* & \text{si } \gamma = u \text{ y } v = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma) = \begin{cases} v & \text{si } \gamma = a \text{ y } u = e_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = v \text{ y } u = e_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}$ y como a es diferente de α' y de β' entonces

$$[g_{a \odot e_i^*}, \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = 0.$$

Sean $\text{car}(K) = 2$, α' un ciclo en Λ con $\alpha' = a_n \dots a_1$, $s(\alpha') = e_j$ y cada $a_i \in Q_1$.

- Si $\psi = \psi_{e_j \odot \alpha'}$ es un elemento de la base de $\text{Alt}_\Lambda(D\Lambda)$, por las igualdades anteriores y puesto que $\overline{e_j \odot \alpha'}$ es limpio con $\text{long}(\alpha') \geq 1$, los únicos sumandos no nulos son:

$$(g_{a \odot e_i^*} \circ \psi_{e_j \odot \alpha'})(\gamma^*) = \begin{cases} e_i^* & \text{si } \gamma = e_j = e_i \text{ y } \alpha' = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$(\psi_{e_j \odot \alpha'} \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma) = \begin{cases} \alpha' & \text{si } \gamma = a = \alpha' \text{ y } e_j = e_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D(\psi_{e_j \odot \alpha'} \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma^*) = \begin{cases} \alpha'^* & \text{si } \gamma = \alpha' = a \text{ y } e_j = e_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De donde

$$\begin{aligned} [g_{a \odot e_i^*}, \psi_{e_j \odot \alpha'}] &= \begin{cases} (e_j^* \mapsto e_j^*) - (\alpha'^* \mapsto \alpha'^*) - (\alpha', \alpha') & \text{si } a = \alpha' \text{ y } e_i = e_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (e_j, e_j) - (\alpha', \alpha') & \text{si } a = \alpha' \text{ y } e_j = e_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $\psi = \psi_{\alpha' \odot \alpha'}$, entonces

$$\begin{aligned} [g_{a \odot e_i^*}, \psi_{\alpha' \odot \alpha'}] &= \begin{cases} (a^* \mapsto e_i^*) & \text{si } a = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (e_i, a) & \text{si } a = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Sea a un bucle y $\text{car}(K) = 2$. Si $g = g_{a \odot a^*}$ entonces

$$g_{a \odot a^*}(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En consecuencia, cada uno de los sumandos del corchete calculado en el sumando $(u^* \mapsto v)$ de ψ es:

$$(g_{a \odot a^*} \circ (u^* \mapsto v))(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = u \text{ y } v = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot a^*})(\gamma) = \begin{cases} v & \text{si } \gamma = a = u, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot a^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = v \text{ y } a = u, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A partir de lo anterior se pueden desarrollar los siguientes casos:

- Si $\psi = \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}$, como a no puede ser α' ni β' , entonces

$$[g_{a \odot a^*}, \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = 0.$$

- Si $\psi = \psi_{e_j \odot \alpha'}$, los sumandos no nulos son:

$$(g_{a \odot a^*} \circ (e_j^* \mapsto \alpha'))(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = e_j \text{ y } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((\alpha'^* \mapsto e_j) \circ g_{a \odot a^*})(\gamma) = \begin{cases} e_j & \text{si } \gamma = \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$D((\alpha'^* \mapsto e_j) \circ g_{a \odot a^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = e_j \text{ y } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} [g_{a \odot a^*}, \psi_{e_j \odot \alpha'}] &= \begin{cases} (e_j^* \mapsto a^*) - (e_j^* \mapsto a^*) - (\alpha', e_j) & \text{si } a = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(\alpha', e_j) & \text{si } a = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $\psi = \psi_{\alpha' \odot \alpha'}$, entonces

$$(g_{a \odot a^*} \circ \psi_{\alpha' \odot \alpha'})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$(\psi_{\alpha' \odot \alpha'} \circ g_{a \odot a^*})(\gamma) = \begin{cases} \alpha' & \text{si } \gamma = a = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$D(\psi_{\alpha' \odot \alpha'} \circ g_{a \odot a^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} [g_{a \odot a^*}, \psi_{\alpha' \odot \alpha'}] &= \begin{cases} (\alpha'^* \mapsto a^*) - (\alpha'^* \mapsto a^*) - (\alpha', \alpha') & \text{si } a = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(\alpha', \alpha') & \text{si } a = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

El siguiente cuadro resume los cálculos anteriores:

[-, -]		Alt $_{\Lambda}(D\Lambda)$		
		$\psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}$	$\psi_{\alpha' \odot \alpha'}$ si $\text{car}(K) = 2$	$\psi_{e_j \odot \alpha'}$ si $\text{car}(K) = 2$
Z(Λ)	(e_i, α)	0	0	$-\psi_{\alpha \odot \alpha}$ si $\alpha = \alpha'$, 0 otro caso.
	$\sum_{e \in Q_0} (e, e)$	$-\psi_{\alpha' \odot \beta'} + \psi_{\beta' \odot \alpha'}$	$-\psi_{\alpha' \odot \alpha'}$	$-\psi_{e_j \odot \alpha'}$
	(a, α) atajo	0	0	0
	(a, α) desviación vía a	0	0	0
HH $^1(\Lambda)$	(a, a) a en un ciclo simple minimal	$\psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}$ si a es una flecha en α' o β' , 0 otro caso.	0	$\psi_{e_j \odot \alpha'}$ si a es una flecha de α' , 0 otro caso.
	(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	0	$\psi_{e_i \odot \alpha}$ si $a = \alpha'$, 0 otro caso.	0
	$a \odot b^* - b \odot a^*$	$2(a, a)$ si $a = \alpha'$ y $b = \beta'$, $-2(b, b)$ si $a = \beta'$ y $b = \alpha'$, 0 otro caso.	0	0
HH $_1(\Lambda)^*$	$a \odot e_i^*$	0	(e_i, a) si $a = \alpha'$, 0 otro caso.	$(e_i, e_i) - (a, a)$ si $a = \alpha'$ ($\& j = i$), 0 otro caso.
	$a \odot a^*$ si $\text{car}(K) = 2$	0	$-(a, a)$ si $a = \alpha'$, 0 otro caso.	$-(a, e_j)$ si $a = \alpha'$, 0 otro caso.

Cuadro 3.4. $[-, \text{Alt}_{\Lambda}(D\Lambda)]$.

Ejemplo 3.2.1. Los corchetes no nulos del Ejemplo 2.3.8 son:

- $[(c_1, c_1), (c_1, c_3c_2)] = -(c_1, c_3c_2),$
- $[(e_5, f_5f_4f_3f_2f_1), (f_1, f_1)] = -(e_5, f_5f_4f_3f_2f_1),$
- $\left[\sum_{i=1}^{15} (e_i, e_i), \psi_{\overline{k_2k_1 \odot k_4k_3}} - \psi_{\overline{k_4k_3 \odot k_2k_1}} \right] = -\psi_{\overline{k_2k_1 \odot k_4k_3}} + \psi_{\overline{k_4k_3 \odot k_2k_1}},$
- $\left[\sum_{i=1}^{15} (e_i, e_i), a \odot e_4^* \right] = a \odot e_4^*,$
- $\left[\sum_{i=1}^{15} (e_i, e_i), h_1 \odot h_2^* - h_2 \odot h_1^* \right] = h_1 \odot h_2^* - h_2 \odot h_1^*,$
- $\left[(k_1, k_1), \psi_{\overline{k_2k_1 \odot k_4k_3}} - \psi_{\overline{k_4k_3 \odot k_2k_1}} \right] = \psi_{\overline{k_2k_1 \odot k_4k_3}} - \psi_{\overline{k_4k_3 \odot k_2k_1}},$
- $[(a, a), a \odot e_4^*] = -a \odot e_4^*,$
- $[(h_1, h_1), h_1 \odot h_2^* - h_2 \odot h_1^*] = -h_1 \odot h_2^* + h_2 \odot h_1^*.$

Como se verá en la siguiente sección, esta álgebra de Lie es soluble pero no nilpotente.

3.3. Nilpotencia y solubilidad

En esta sección se muestra que el primer espacio de cohomología de Hochschild de un álgebra gentil, así como el de un álgebra de grafos de Brauer con multiplicidad uno, es casi siempre soluble. Este resultado es similar al obtenido por Strametz para álgebras monomiales en [39, Theorem 4.23].

Teorema 3.3.1. *Sea Λ un álgebra gentil. El álgebra de Lie $HH^1(T\Lambda)$ es nilpotente si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. $Z(\Lambda) = K$,
2. $HH_1(\Lambda)^* = 0$,
3. $Alt_\Lambda(D\Lambda) = 0$,
4. para cada (a, α) en la base de $HH^1(\Lambda)$, resulta $\alpha = a$.

Demostración. Supóngase que las cuatro condiciones se satisfacen. Entonces $HH^1(T\Lambda) = K \oplus HH^1(\Lambda)$ y $HH^1(\Lambda)$ tiene una base compuesta por elementos diagonales, es decir, de la forma (a, a) con a determinado por un ciclo simple minimal. Como el corchete entre dos elementos en $K \oplus HH^1(\Lambda)$ es cero se obtiene lo deseado.

Para el recíproco se prueba que si una de las cuatro condiciones no se satisface, entonces $HH^1(T\Lambda)$ no es nilpotente.

Para (1), si $z \in Z(\Lambda) \setminus \{1_\Lambda\}$, entonces existe una flecha a en el ciclo determinado por z tal que $[(s(z), z), (a, a)] = (s(z), z)$.

Para (2), vale $[1_\Lambda, x] = x$ para cada $x \in HH_1(\Lambda)^*$ y para (3), resulta que $[1_\Lambda, x] = -x$ para todo $x \in Alt_\Lambda(D\Lambda)$. La condición (4) se satisface si y solo si $HH^1(\Lambda)$ tiene una base dada por ciclos simples minimales. De ahí, supóngase que este no es el caso. Si a es un atajo de α , entonces existe al menos un ciclo simple minimal y una flecha b del ciclo no dirigido determinado por a y α , por lo que $[(a, \alpha), (b, b)] = \pm(a, \alpha)$. Se obtiene un resultado similar si se toma una desviación en vez de un atajo. Finalmente, si $\text{car}(K) = 2$ y si existe un bucle a en el carcaj de Λ , entonces $(a, s(a))$ es un elemento de la base de $HH^1(\Lambda)$ y $a \odot s(a)^*$ es un elemento de la base de $HH_1(\Lambda)^*$, por lo tanto $HH_1(\Lambda)^*$ no es nulo y el resultado se obtiene. \square

Observación 3.3.2. *Nótese que $HH^1(T\Lambda)$ es nilpotente si y solo si $\dim_K(T\Lambda)$ es lo menor posible, esto pasa si $\dim_K(T\Lambda) = \chi(Q_\Lambda) + 1$.*

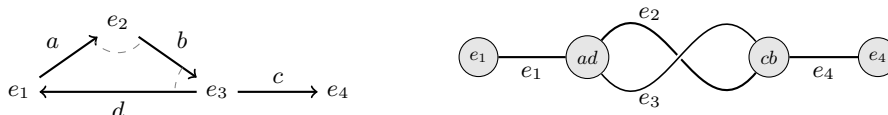
Corolario 3.3.3. *Sea $\Lambda = KQ / \langle R \rangle$ un álgebra gentil con base el conjunto de caminos \mathcal{B} y tal que Q no contiene ciclos orientados. El álgebra de Lie $HH^1(T\Lambda)$ es nilpotente si y solo si no hay flechas b paralelas a un elemento $\alpha \in \mathcal{B}$ tal que b no es una flecha en las relaciones de R y $\alpha \neq b$.*

Demostración. Si Q no contiene ciclos orientados se cumplen los ítems 1, 2 y 3 del Teorema 3.3.1. Ahora, nótese que para obtener la condición 4 del Teorema 3.3.1 no se debe cumplir el ítem 1 del Teorema 2.1.34. \square

Corolario 3.3.4. *Sea Λ un álgebra gentil. Si $HH^1(T\Lambda)$ es nilpotente entonces $HH^1(T\Lambda)$ es un álgebra de Lie abeliana.*

Si el grafo de Λ es un árbol, entonces $T\Lambda$ es de tipo de representación finita y $HH^1(T\Lambda)$ es un álgebra de Lie abeliana. Sin embargo el recíproco no es cierto, si $HH^1(T\Lambda)$ es un álgebra de Lie nilpotente o incluso abeliana entonces Λ no es necesariamente de tipo de representación finita.

Ejemplo 3.3.5. Sea Λ el álgebra gentil con conjunto de relaciones $R = \{ba, db\}$, dada por el siguiente carcaj y grafo de Brauer



Del Teorema 3.3.1 se obtiene que $HH^1(T\Lambda) \cong K \oplus K(b, b)$ es nilpotente, mientras que $T\Lambda$ no es de tipo de representación finita. Esto se sigue del hecho de que el grafo de Brauer de $T\Lambda$ no es un árbol.

Teorema 3.3.6. Sean Λ un álgebra gentil y A el álgebra de grafos de Brauer isomorfa a $T\Lambda$. Supóngase que $\text{car}(K) \neq 2$. Entonces

1. $HH^1(\Lambda)$ es soluble o Λ es el álgebra de Kronecker.
2. $HH^1(A)$ es soluble o A es isomorfa a la extensión trivial del álgebra de Kronecker.

Nótese que si Λ_1 es el álgebra de Kronecker entonces $T\Lambda_1 \cong T\Lambda_2$ donde Λ_2 es el álgebra de Nakayama con radical cuadrado cero y con dos módulos simples. Los carcajes de estas álgebras son



Figura 3.2. El carcaj de la izquierda es el del álgebra de Nakayama con radical cuadrado cero y con dos módulos simples, tiene las relaciones $a_1a_2 = 0 = a_2a_1$. El carcaj de la derecha es el del álgebra de Kronecker.

Demostración. 1. Si Λ es el álgebra de Kronecker, entonces $HH^1(\Lambda) = K(b_1, b_2) \oplus K(b_2, b_1) \oplus K(b_1, b_1)$ con el siguiente cuadro de corchetes:

$[-, -]$	(b_1, b_2)	(b_2, b_1)	(b_1, b_1)
(b_1, b_2)	0	$-2(b_1, b_1)$	(b_1, b_2)
(b_2, b_1)	$2(b_1, b_1)$	0	$-(b_2, b_1)$
(b_1, b_1)	$-(b_1, b_2)$	(b_2, b_1)	0

Cuadro 3.5. Corchete para $HH^1(\Lambda)$ donde Λ es el álgebra de Kronecker.

De ahí, $(HH^1(\Lambda))^{(1)} = HH^1(\Lambda)$. Ahora, si Λ no es el álgebra de Kronecker y por el Cuadro 3.1, no aparecen elementos de la forma (a, a) con a determinado por un ciclo simple minimal en $(HH^1(\Lambda))^{(1)}$, luego $(HH^1(\Lambda))^{(2)} = 0$.

2. Si Λ es diferente del álgebra de Kronecker y del álgebra de Nakayama anterior, entonces por el Cuadro 3.1 los elementos 1_Λ y (a, a) con a determinado por un ciclo simple minimal no aparecen en $(HH^1(T\Lambda))^{(1)}$, por lo que $(HH^1(T\Lambda))^{(2)} = 0$. Finalmente, si Λ es el álgebra de Kronecker entonces $(HH^1(T\Lambda))^{(1)} = HH^1(\Lambda)$ que no es soluble. Ahora, nótese que las extensiones triviales de ambas álgebras son isomorfas, por lo cual no hace falta probar el otro caso.

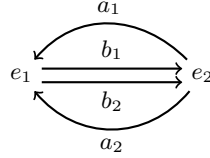


Figura 3.3. Carcaj de la extensión trivial del álgebra de Kronecker, tiene las relaciones $a_1b_1 - a_2b_2$, $b_1a_1 - b_2a_2$, a_ib_j , b_ia_j , $a_ib_ia_i$, $b_ia_ib_i$, con $i, j \in \{1, 2\}$ y $j \neq i$.

□

Sea Λ_1 el álgebra de Kronecker y Λ_2 el álgebra de Nakayama con 2 módulos simples y radical cuadrado cero. En el siguiente corolario se muestra que si $\text{car}(K) \neq 2$ entonces la estructura de álgebra de Lie de $HH^1(T\Lambda_1)$ está dada por $\mathfrak{gl}(2, K)$. Es de notar que el primer espacio de cohomología del álgebra de Nakayama es soluble, mientras que para el álgebra de Kronecker $HH^1(\Lambda_1)$ no es soluble, aunque $T\Lambda_1 \cong T\Lambda_2$.

Corolario 3.3.7. *Sea Λ un álgebra gentil con $\text{car}(K) \neq 2$. El álgebra de Lie $HH^1(T\Lambda)$ es soluble ó $HH^1(T\Lambda) \cong \mathfrak{gl}(2, K)$. La segunda opción se da si Λ es el álgebra de Kronecker o el álgebra de Nakayama con 2 módulos simples y radical cuadrado cero.*

Además, si Λ es el álgebra de Kronecker entonces $HH^1(\Lambda) \cong \mathfrak{sl}(2, K)$ y si Λ es el álgebra de Nakayama con 2 módulos simples y radical cuadrado cero, entonces $HH^1(\Lambda) = K$.

Demostración. Si Λ es el álgebra de Kronecker, considérese el isomorfismo entre $HH^1(\Lambda)$ y $\mathfrak{sl}(2, K)$ dado por $(b_1, b_1) \mapsto \frac{h}{2}$, $(b_1, b_2) \mapsto f$ y $(b_2, b_1) \mapsto e$. Ahora, ya que $Z(\Lambda) = K$, se obtiene que $HH^1(T\Lambda) \cong K \oplus \mathfrak{sl}(2, K)$. □

Observación 3.3.8. *Si $\text{car}(K) = 2$, se sigue del Cuadro 3.5 que $HH^1(\Lambda)$ es soluble también en el caso en que Λ es el álgebra de Kronecker.*

Capítulo 4

$HH^n(\Lambda)$ de álgebras gentiles con $n \geq 2$

En este capítulo se calcula la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles en grados mayores que 1, recuérdese que el complejo de cocadena que se usa en esta tesis se da en la Proposición 2.1.4 y es el siguiente:

$$0 \longrightarrow K(\Gamma_0||\mathcal{B}) \xrightarrow{d^0} K(\Gamma_1||\mathcal{B}) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} K(\Gamma_n||\mathcal{B}) \xrightarrow{d^n} \dots$$

donde

$$d^{2n}(\gamma', \alpha) = \sum_{\gamma=b\gamma' \in \Gamma_{2n+1}} \chi_{\mathcal{B}}(b\alpha)(\gamma, b\alpha) - \sum_{\gamma=\gamma'a \in \Gamma_{2n+1}} \chi_{\mathcal{B}}(\alpha a)(\gamma, \alpha a),$$

$$d^{2n+1}(\gamma', \alpha) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{2(n+1)}} \chi_{\mathcal{B}}(\gamma^{(\gamma', \alpha)}) (\gamma, \gamma^{(\gamma', \alpha)}).$$

Si $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil e I el ideal generado por el conjunto de relaciones R , entonces cada conjunto Γ_n con $n > 1$ es

$$\Gamma_n = \{a_n \cdots a_1 \mid a_{i+1}a_i \in R, a_i \in Q_1, 1 \leq i < n-1\}.$$

4.1. Identificando n -cociclos

En esta sección se identifican los n -cociclos para $n > 1$. La siguiente proposición es una generalización de la Proposición 2.1.9.

Proposición 4.1.1. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, $n \geq 2$, (γ, α) y (γ', α') dos pares paralelos en $\Gamma_{n-1}||\mathcal{B}$, y $\rho \in \Gamma_n$ con $\rho^{(\gamma, \alpha)} \neq 0$. Vale la igualdad $\rho^{(\gamma, \alpha)} = \rho^{(\gamma', \alpha')}$ si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $(\gamma, \alpha) = (\gamma', \alpha')$.
2. $\alpha \in Q_0$, $\gamma = \delta a$, $\gamma' = a\delta$, $\rho = a\delta a$, $\alpha = s(a)$, $\alpha' = t(a)$ donde $\delta \in \Gamma_{n-2}$ y $a \in Q_1$.
3. $\alpha \notin Q_0$, $\gamma = \delta a$, $\gamma' = b\delta$, $\rho = b\delta a$, $\alpha = \xi a$, $\alpha' = b\xi$ donde $\delta \in \Gamma_{n-2}$, $a, b \in Q_1$ y $\xi \in \mathcal{B}$.

Demostración. Supóngase que $\rho^{(\gamma, \alpha)} = \rho^{(\gamma', \alpha')}$ con $\rho = a_n \dots a_1$. Por la longitud de γ resulta que $\rho = \gamma a_1$ o $\rho = a_n \gamma$ y de forma similar $\rho = \gamma' a_1$ o $\rho = a_n \gamma'$. Si $\rho = \gamma a_1 = a_n \gamma$ entonces $\rho = a_1^n$ y $\gamma = \gamma' = a_1^{n-1}$, de donde $\alpha = s(a_1) = \alpha'$ debido a que $\rho^{(\gamma, \alpha)} \neq 0$.

Si $\gamma' a_1 = \rho = \gamma a_1$ y $\rho \neq a_n \gamma$, entonces $\gamma = \gamma'$ y $\alpha = \alpha'$. Finalmente, si $\rho = a_n \gamma$, $\rho = \gamma' a_1$ y $\rho \neq \gamma a_1$, entonces $a_n \gamma = \gamma' a_1$, de donde $\gamma = \delta a_1$ y $\gamma' = a_n \delta$ con $\delta \in \Gamma_{n-2}$. Hay dos casos para α :

- si $\alpha \in Q_0$ entonces $\alpha' \in Q_0$ y $a_1 = a_n$. Por lo que $\gamma = \delta a_1$, $\gamma' = a_1 \delta$, $\alpha = s(a_1)$ y $\alpha' = t(a_1)$, con $\delta \in \Gamma_{n-2}$ y $a_1 \in Q_1$.
- si $\alpha \notin Q_0$ entonces $\alpha' \notin Q_0$ ya que $a_n \alpha = \alpha' a_1$ con $a_1, a_n \in Q_1$. Así, $\alpha = \xi a_1$ y $\alpha' = a_n \xi$ con $\xi \in \mathcal{B}$.

El recíproco es inmediato. □

Definición 4.1.2. Sea C un ciclo en Γ_m con $m \geq 1$. Se dice que $C = a_m \dots a_1$ es un **ciclo completo** si $a_1 a_m$ está en R , y C es un **ciclo primitivo** si no es una potencia no trivial de otro ciclo.

Proposición 4.1.3. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil y $n \geq 2$. Si $\sum_{i=1}^m \eta_i(\gamma_i, \alpha_i)$ es un elemento no nulo e irreducible de $\ker(d^n)$ con $m > 1$, entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

1. $m = 2$, $\gamma_1 = \delta a$, $\gamma_2 = b\delta$, $\alpha_1 = \xi a$, $\alpha_2 = b\xi$ y $\eta_1 = (-1)^n \eta_2$, donde $\delta \in \Gamma_{n-1}$, $a, b \in Q_1$ y $\xi \in \mathcal{B}$.
2. m es la longitud de C , $\gamma_i = C_i^k$ y $\alpha_i = s(a_i)$, con $C = a_m \dots a_1$ un ciclo primitivo completo, $C_i = a_{i+m-1} \dots a_i$, k es tal que $n = mk$ y $\eta_i = (-1)^n \eta_{i+1}$ con n par o $\text{car}(K) = 2$.

Demostración. Sea $\sum_{i=1}^m \eta_i(\gamma_i, \alpha_i)$ un elemento no nulo e irreducible de $\ker(d^n)$ con $m, n >$

1. Supóngase que $(b_i \gamma_i, b_i \alpha_i)$ es un sumando de $d^n(\gamma_i, \alpha_i)$ y sea $\rho = b_i \gamma_i$. Por la Proposición 4.1.1 existe $j \neq i$ tal que $b_i \alpha_i = \rho^{(\gamma_j, \alpha_j)} = \alpha_j a_j$. Hay dos casos para α_i .

1. Si $\alpha_i \notin Q_0$ entonces $\gamma_i = \delta a_j$, $\gamma_j = b_i \delta$, $\alpha_i = \xi a_j$ y $\alpha_j = b_i \xi$. Así $d^n(\gamma_i, \alpha_i) = (b_i \delta a_j, b_i \xi a_j)$, $d^n(\gamma_j, \alpha_j) = (-1)^{n+1} (b_i \delta a_j, b_i \xi a_j)$, $\eta_i = (-1)^n \eta_j$ y $m = 2$.
2. Si $\alpha_i \in Q_0$ entonces $b_i = a_j$, $\gamma_i = \delta b_i$, $\gamma_j = b_i \delta$, $\alpha_i = s(b_i)$, $\alpha_j = t(b_i)$ y γ_i es un ciclo completo. De donde $\gamma_i = C_i^k$ con C_i un ciclo primitivo completo de longitud m y tal que $n = mk$. Por consiguiente $j = i + 1$,

$$d^n(C_i^k, s(b_i)) = (b_i C_i^k, b_i) + (-1)^{n+1} (C_i^k b_{i-1}, b_{i-1})$$

y

$$d^n(C_{i+1}^k, s(b_{i+1})) = (b_{i+1} C_{i+1}^k, b_{i+1}) + (-1)^{n+1} (b_i C_i^k, b_i).$$

En consecuencia

$$\sum_{i=1}^m \eta_i(\gamma_i, \alpha_i) = \sum_{i=1}^m (\eta_i + (-1)^{n+1} \eta_{i+1}) (b_i C_i^k, b_i) = 0$$

si y solo si $\eta_i + (-1)^{n+1} \eta_{i+1} = 0$ para cada i . Esto último se cumple si y solo si $\eta_i = (-1)^n \eta_{i+1}$ para cada $1 \leq i \leq m$ con n par o la característica de K igual 2.

□

Definición 4.1.4. Sea $\gamma \in \Gamma_n$, se dice que γ es **maximal** si no existe $\gamma' \in \Gamma_{n+1}$ tal que γ es un subcamino de γ' .

Lema 4.1.5. Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con base el conjunto de caminos \mathcal{B} . El par paralelo $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_{n \geq 2} || \mathcal{B}$ es un n -cociclo si y solo si una de las siguientes condiciones se satisface:

1. γ es maximal.
2. γ no es maximal y una de las siguientes se satisface:
 - i. $\gamma = b\delta a$ y $\alpha = b\zeta a$ con $a, b \in Q_1$,
 - ii. $\gamma = \delta a$ y $\alpha = \zeta a$, donde $a \in Q_1$ y no existe una flecha b tal que $b\gamma \in \Gamma_{n+1}$,
 - iii. $\gamma = b\delta$ y $\alpha = b\zeta$, donde $b \in Q_1$, y no existe una flecha a tal que $\gamma a \in \Gamma_{n+1}$,
 - iv. $\gamma = \delta a$ y $\alpha = a$, con δ un ciclo completo y a la última flecha de δ ,
 - v. $\gamma = a^n$ y $\alpha = s(a)$, donde a es un bucle, y o bien n es par o bien la característica de K es 2.

Demostración. Si (γ, α) es un n -cociclo, entonces

$$d^n(\gamma, \alpha) = \sum_{c\gamma \in \Gamma_{n+1}} (c\gamma, c\alpha) + (-1)^{n+1} \sum_{\gamma c \in \Gamma_{n+1}} (\gamma c, \alpha c) = 0.$$

Luego cada sumando se anula por si solo o se anulan entre si. Si cada sumando se anula por si solo entonces $(c\gamma, c\alpha) = 0$ y $(\gamma c, \alpha c) = 0$ para cada flecha c . Entonces, o bien γ es maximal y se obtiene el primer ítem o γ no es maximal.

Si γ no es maximal, existe solo una flecha c tal que $\gamma c \in \Gamma_{n+1}$ o solo una flecha c' tal que $c'\gamma \in \Gamma_{n+1}$ por ser Λ gentil. Si solo ocurre el primer caso entonces $\alpha c = 0$, lo que implica que $\alpha \notin Q_0$ y así, si $\alpha = \zeta a$ con $\zeta \in \mathcal{B}$, se cumple $ac \in R$. Una vez más usando que Λ es gentil se obtiene que $\gamma = \delta a$, lo que prueba el ítem *ii*. De forma similar, si solo ocurre la segunda opción resulta el ítem *iii*. Si ocurren las dos, por el mismo razonamiento de los casos anteriores se obtiene $\gamma = b\delta' = \delta''a$, $\alpha = b\zeta' = \zeta''a$ con $cb, ac' \in R$ y $\alpha \notin Q_0$. Hay dos casos para α :

- si $\alpha \notin Q_1$ entonces $\gamma = b\delta a$ y $\alpha = b\zeta a$ con $a, b \in Q_1$, como en el ítem *i*,
- si $\alpha \in Q_1$ entonces $\gamma = \delta a$, $\alpha = a$ y δ es un ciclo completo y a es la última flecha de δ , como en el ítem *iv*.

Por último, si los sumandos no se anulan por si solos, entonces existe solo una flecha c tal que $(c\gamma, c\alpha) + (-1)^{n+1}(\gamma c', \alpha c') = 0$, por consiguiente c es la última flecha de γ y c' es la primera de γ . Esto dice que $c = c'$ y $\gamma = c^n$. Usando el hecho de que Λ es gentil, α es $s(c)$ o es c . Si $\alpha = c$, entonces cada sumando es nulo, que no puede pasar por hipótesis. Así, $\alpha = s(c)$ y n es par o la característica de K es 2.

El recíproco se obtiene debido a que los elementos son n -cociclos. □

Observación 4.1.6. Nótese que en el caso de los 1-cociclos de la forma (a, α) con a una flecha que no aparece en las relaciones, es lo mismo que decir que a es maximal.

4.2. Una base de $HH^n(\Lambda)$ con $n \geq 2$

Recuérdese que $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_{n \geq 2} || (\mathcal{B} \setminus Q_0)$ con $\gamma \neq \alpha$ es un atajo si γ y α no tienen flechas en común, mientras que si tienen flechas en común se denomina desviación.

Proposición 4.2.1. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con base de caminos \mathcal{B} y $n \geq 2$. Si $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_n || \mathcal{B}$ es un atajo con γ maximal, entonces la clase de (γ, α) es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$.*

Demostración. Sea (γ, α) un atajo con γ maximal, entonces (γ, α) no es un n -coborde ya que no aparece como sumando de $d^{n-1}(\gamma', \alpha')$ para cada $(\gamma', \alpha') \in \Gamma_{n-1} || \mathcal{B}$. Esto se sigue de la definición de d^{n-1} ya que los sumandos de $d^{n-1}(\gamma', \alpha')$ son desviaciones. Luego (γ, α) no es un n -coborde, y por el Lema 4.1.5 el atajo (γ, α) es un n -cociclo con $n \geq 2$. \square

Observación 4.2.2. *La proposición anterior también es cierta cuando $n = 1$.*

Proposición 4.2.3. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con base de caminos \mathcal{B} y $n \geq 1$. Si $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_n || \mathcal{B}$ es una desviación con γ maximal, $\gamma_1 = \alpha_1$ o $\gamma_n = \alpha_t$ donde $\text{long}(\alpha) = t$, entonces (γ, α) es un n -coborde.*

Demostración. Supóngase que (γ, α) es una desviación con γ maximal y $\gamma_1 = \alpha_1$ o $\gamma_n = \alpha_t$. Nótese que γ no es un ciclo pues de lo contrario $\alpha = s(\gamma)$ y (γ, α) no es una desviación o $\alpha = \gamma_1$ y γ es un ciclo completo (por lo tanto no maximal). Ahora, si $\gamma = \delta\gamma_1$ y $\alpha = \zeta\gamma_1$ con $\delta \in \Gamma_{n-1}$ y $\zeta \in \mathcal{B}$, entonces $d^{n-1}(\delta, \zeta) = (-1)^n(\delta\gamma_1, \zeta\gamma_1)$. De forma similar si $\gamma = \gamma_n\delta$ y $\alpha = \gamma_n\zeta$ con $\delta \in \Gamma_{n-1}$ y $\zeta \in \mathcal{B}$. \square

Proposición 4.2.4. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con base de caminos \mathcal{B} y $n \geq 2$. Si $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_n || \mathcal{B}$ es una desviación con γ maximal, $\gamma_1 \neq \alpha_1$ y $\gamma_n \neq \alpha_t$ donde $\text{long}(\alpha) = t$, entonces la clase de (γ, α) es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$.*

Demostración. Sea (γ, α) una desviación con γ maximal, $\gamma_1 \neq \alpha_1$ y $\gamma_n \neq \alpha_t$. Entonces (γ, α) no aparece en ningún sumando de $d^{n-1}(\gamma', \alpha')$ para cada $(\gamma', \alpha') \in \Gamma_{n-1} || \mathcal{B}$, ya que si (γ'', α'') es un sumando de $d^{n-1}(\gamma', \alpha')$ entonces γ'' y α'' tienen la primera y la última flecha igual. Ahora, por Lema 4.1.5 el par paralelo (γ, α) es un n -cociclo con $n \geq 2$. \square

Observación 4.2.5. *El enunciado de la proposición anterior es válido si $n = 1$, es la Proposición 2.1.16.*

Proposición 4.2.6. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con base el conjunto de caminos \mathcal{B} . Los elementos en los ítems 2-i, 2-ii y 2-iii del Lema 4.1.5 son n -cobordes.*

Demostración. Para el ítem 2-i considérese $d^{n-1}(\delta a, \zeta a)$, mientras que para los ítems 2-ii y 2-iii considérese $d^{n-1}(\delta, \zeta)$. \square

Definición 4.2.7. *En el conjunto de ciclos dirigidos del carcaj Q considérese la relación de equivalencia mas pequeña que contiene a la relación*

$$a_n \dots a_1 \sim a_{n-1} \dots a_1 a_n.$$

*La clase de un ciclo se denomina **circuito** y si el ciclo es completo (o primitivo) se dice que el circuito es **completo** (o **primitivo**).*

Teorema 4.2.8. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con base el conjunto de caminos \mathcal{B} y $n \geq 2$. Las clases de los siguientes elementos en $K(\Gamma_n || \mathcal{B})$ dan una base de $HH^n(\Lambda)$.

1. (γ, α) con γ es maximal y, o bien $\alpha \in Q_0$ o bien $\alpha \in \mathcal{B}_{m>0}$ es tal que $\alpha_1 \neq \gamma_1$ y $\alpha_m \neq \gamma_n$.
2. Por cada circuito completo primitivo con representante el ciclo $C = a_m \dots a_1$ en Γ_m ,
 - i. el elemento $\sum_{i=1}^m (C_i^k, s(a_i))$ con n par, k tal que $mk = n$ y $C_i = a_{i+m-1} \dots a_i$.
 - ii. el par paralelo $(a_1 C_1^k, a_1)$ con n impar, k tal que $km = n - 1$ y donde $C_1 = a_m \dots a_1$.
3. Además de los elementos anteriores, si $\text{car}(K) = 2$ para cada circuito completo primitivo con representante el ciclo $C = a_m \dots a_1$ en Γ_m ,
 - i. el elemento $\sum_{i=1}^m (C_i^k, s(a_i))$ donde n es impar, k es tal que $mk = n$ y $C_i = a_{i+m-1} \dots a_i$.
 - ii. el par paralelo $(a_1 C_1^k, a_1)$ con n par, k tal que $mk = n - 1$ y donde $C_1 = a_m \dots a_1$.

Demostración. Si $\alpha \in Q_0$ en el ítem 1, por ser γ maximal la pareja (γ, α) es un n -cociclo, y por ser α un vértice (γ, α) no es un n -coborde. Por otro lado, si $\alpha \notin Q_0$ en el ítem 1, son los atajos y las desviaciones de las Proposiciones 4.2.1 y 4.2.4, respectivamente.

Los ítems 2- i y 3- i son una consecuencia directa de la Proposición 4.1.3 si C no es una potencia de un bucle, ya que $\sum_{i=1}^m (C_i^k, s(a_i))$ no es un n -coborde por definición del diferencial d . Mientras que si C es una potencia de un bucle se obtiene por el ítem 2- v del Lema 4.1.5. Para los ítems 2- ii y 3- ii considérese $d^{m-1}(C_i^k, s(a_i)) = (a_i C_i^k, a_i) + (-1)^n (a_{i-1} C_{i-1}^k, a_{i-1})$:

- si C es un bucle, entonces $d^{n-1}(a^{n-1}, s(a)) = (1 + (-1)^n)(a^n, a)$, por lo que si n es impar la clase de (a^n, a) es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$. De forma similar si n es par y $\text{car}(K) = 2$.
- si C no es un bucle, entonces en $HH^n(\Lambda)$ está la relación

$$(a_i C_i^k, a_i) + (-1)^n (a_{i-1} C_{i-1}^k, a_{i-1}) = 0,$$

que da elementos no nulos en $HH^n(\Lambda)$ siempre que n es impar, o n es par pero con $\text{car}(K) = 2$.

Finalmente, nótese que no hay más elementos en la base de $HH^n(\Lambda)$ por las Proposiciones 4.1.3 y 4.2.6, y Lema 4.1.5. \square

Observación 4.2.9. Si $\alpha \in Q_0$ en el ítem 1, entonces $\text{val}_Q(\alpha) = 2$ por ser Λ un álgebra gentil.

Observación 4.2.10. Si $n = 1$ en el teorema anterior, solo hay una parte de los elementos de la base de la cohomología, pues faltan los elementos diagonales (ver Teorema 2.1.34).

4.3. Codificación de $HH^n(\Lambda)$ en el grafo de ribbon de Λ

Al igual que en la Sección 2.4 del Capítulo 2 se muestra como se codifica la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles en el grafo de ribbon.

4.3.1. Atajos, ciclos y circuitos

Si (γ, α) es un atajo con γ maximal, por ser Λ un álgebra gentil el camino α es un camino maximal en Λ , por lo tanto hay un vértice en el grafo de ribbon con etiqueta α . Por otro lado, como $\gamma \in \Gamma_n$, hay un camino descrito por γ en el grafo de ribbon que cambia de orden ciclico cada vez que llega a una arista, por lo que resulta la siguiente configuración local:

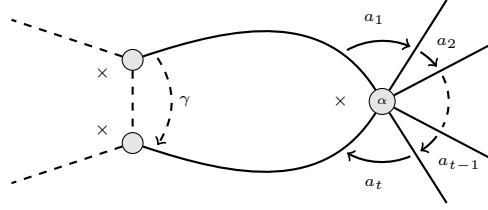


Figura 4.1. Configuración local en el grafo de ribbon marcado de un atajo (γ, α) que determina un elemento en la base de $HH^n(\Lambda)$, donde $\gamma \in \Gamma_n$ y $\alpha = a_t \dots a_1 \in \mathcal{B}$. Las \times de la parte izquierda pueden estar entre los bordes, pero no pueden estar dentro del ciclo.

Sea $\gamma = a_n \dots a_1$ un ciclo tal que $val_Q(s(a_1)) = 2$, $a_{i+1}a_i \in R$ para cada $1 \leq i < n$ y $a_1a_n \in \mathcal{B}$, lo que dice que la clase de $(\gamma, s(\gamma))$ es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ (ver ítem 1 del Teorema 4.2.8). Si $1 < i < n$, entonces cada flecha a_i es una flecha de un orden cíclico diferente y a_1a_2 aparecen en un camino maximal de \mathcal{B} , localmente el grafo de ribbon marcado tiene un ciclo como el siguiente:

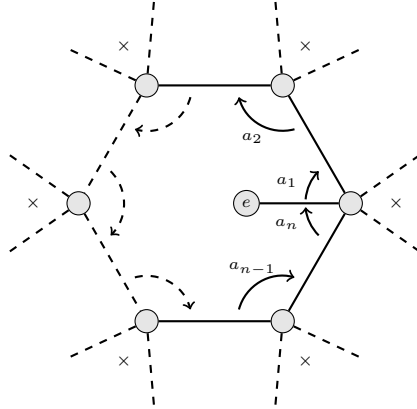


Figura 4.2. Esto corresponde a un ciclo $\gamma = a_n \dots a_1 \in \Gamma_n$ con $a_1a_n \in \mathcal{B}$, $val_Q(e) = 2$ y $e = s(\alpha)$. Esta clase de ciclos da elementos en la base de $HH^n(\Lambda)$ como en el Teorema 4.2.8, donde las marcas \times deben estar todas en el mismo sector.

Si $C = a_m \dots a_1$ es un ciclo completo primitivo, entonces $a_i a_{i-1} \in R$ para cada i , lo que dice que cada flecha a_i es una flecha de un orden cíclico diferente, localmente el grafo de ribbon marcado tiene un ciclo como el siguiente:

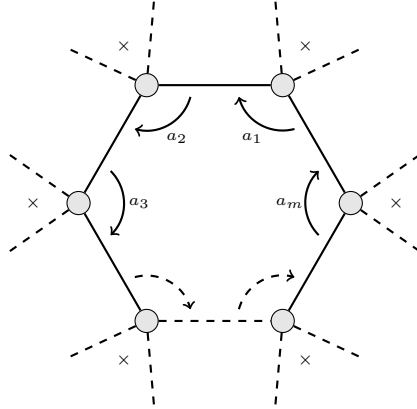
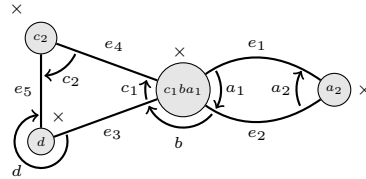


Figura 4.3. Esto corresponde a un ciclo completo minimal $\alpha = a_m \dots a_1$, esta clase de ciclos da elementos en la base como en el Teorema 4.2.8 donde las marcas \times deben estar todas en el mismo sector.

Ejemplo 4.3.1. Sea Λ el álgebra gentil determinada por el siguiente grafo de ribbon marcado:



la configuración de la Figura 4.1 aparece en la parte izquierda, de donde el par paralelo (c_2c_1, d) es un elemento de la base de $HH^2(\Lambda)$; la parte derecha corresponde a la configuración de la Figura 4.3 con $m = 2$, por lo que $((a_2a_1)^k, e_1) + ((a_1a_2)^k, e_2)$ aparece en la base de $HH^{2k}(\Lambda)$ con $k \geq 1$, y $(a_1(a_2a_1)^k, a_1)$ es el elemento que genera a $HH^{2k+1}(\Lambda)$ con $k \geq 1$. De lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} HH^2(\Lambda) &= K(c_2c_1, d) \oplus K(((a_2a_1)^k, e_1) + ((a_1a_2)^k, e_2)), \\ HH^{2k+1}(\Lambda) &= K((a_1(a_2a_1)^k, a_1)) \text{ si } k \geq 1, \\ HH^{2k}(\Lambda) &= K(((a_2a_1)^k, e_1) + ((a_1a_2)^k, e_2)) \text{ si } k \geq 2. \end{aligned}$$

Nótese también que $HH^0(\Lambda) \cong K$ y $HH^1(\Lambda) = K(a_1, a_1) \oplus K(c_1, c_1)$.

Lo anterior se puede corroborar con el carcaj Q_Λ del álgebra Λ .

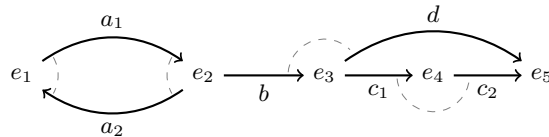
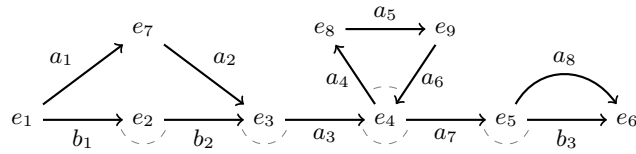


Figura 4.4. Carcaj Q_Λ .

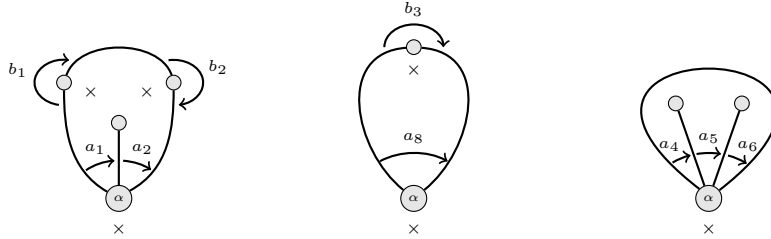
4.3.2. Desviaciones

Ejemplo 4.3.2. Considérese el álgebra $\Lambda = KQ/I$ dado por el siguiente carcaj

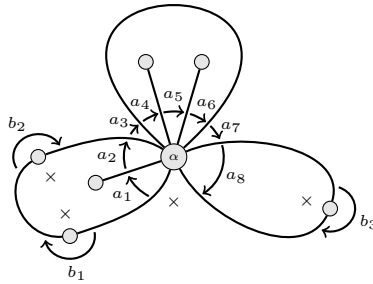


con I el ideal generado por el conjunto $R = \{b_2b_1, a_3b_2, a_7a_3, b_3a_7, a_4a_6\}$. El par paralelo $(b_3a_7a_3b_2b_1, a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1)$ es una desviación con $a_1 \neq b_1$ y $a_8 \neq b_3$. Así, la clase de esa desviación en $HH^5(\Lambda)$ es no nula por la Proposición 4.2.4. Además nótese que $b_3a_7a_3b_2b_1$ es un camino maximal en I y que hay tres ciclos no dirigidos en el grafo, estos están determinados por los atajos (b_2b_1, a_2a_1) , (b_3, a_8) y el ciclo $(a_6a_5a_4, e_4)$.

El camino $\alpha = a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1$ es un camino maximal en \mathcal{B} , por lo que en el grafo de ribbon existe un vértice con etiqueta α . Ahora, los dos atajos y el ciclo anterior se corresponden con las siguientes configuraciones locales:



Ahora, los atajos se conectan por medio de las flechas a_3 y a_7 , lo que da lugar al siguiente grafo de ribbon marcado pegando de forma correcta los grafos anteriores sobre el vértice α :



En general, si $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_n || \mathcal{B}$ es una desviación con $\gamma = b_n \dots b_1$, $\alpha = a_t \dots a_1$, $b_1 \neq a_1$ y $c_n \neq a_t$. Por las condiciones, γ es un camino maximal en I , α es un camino maximal en \mathcal{B} y $val_Q(s(a_1)), val_Q(t(a_1)) \leq 3$, además los caminos γ y α se pueden escribir como $\gamma_k \dots \gamma_1$ y $\alpha_k \dots \alpha_1$, donde (γ_i, α_i) es o bien un atajo, o bien un par paralelo con α_i un ciclo en \mathcal{B} o bien un elemento diagonal. Finalmente, (γ_1, α_1) y (γ_k, α_k) no son elementos diagonales, y si (γ_i, α_i) es un atajo o α_i es un ciclo, entonces $(\gamma_{i+1}, \alpha_{i+1})$ es un elemento diagonal para $i < k - 1$. De lo anterior resulta que localmente el grafo de ribbon marcado tiene la siguiente forma:

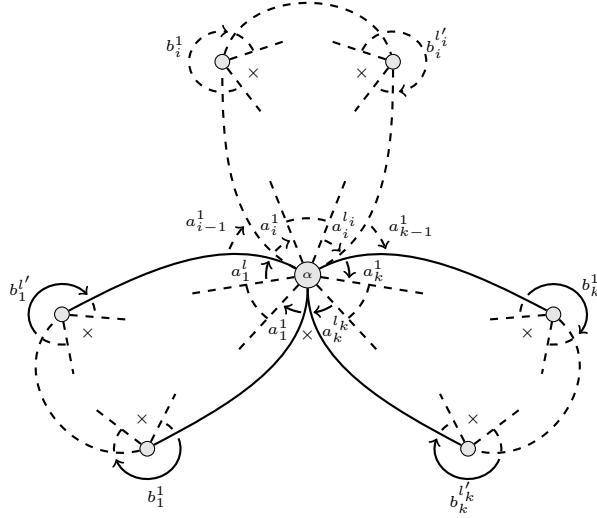


Figura 4.5. Configuración local correspondiente a una desviación (γ, α) , con $\gamma = \gamma_k \dots \gamma_1$, $\alpha = \alpha_k \dots \alpha_1$, $\gamma_i = b_i^{l_i} \dots b_i^1$ y $\alpha_i = a_i^{l_i} \dots a_i^1$. Cada par paralelo (γ_i, α_i) es tal que: o bien es un atajo, o bien α_i es un ciclo, o bien es un elemento diagonal. Cada ciclo en el grafo puede tener o no vértices sobre el borde dependiendo de si está determinado por un atajo o un ciclo, además, hay tantos ciclos como ciclos (no dirigidos) en la desviación.

4.4. Corchete de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras gentiles

Del Capítulo 3 se sabe cual es la descripción de los corchetes $[HH^0(\Lambda), HH^1(\Lambda)]$ y $[HH^1(\Lambda), HH^1(\Lambda)]$. En esta sección se calcula $[HH^0(\Lambda), HH^n(\Lambda)]$, $[HH^1(\Lambda), HH^n(\Lambda)]$ y $[HH^n(\Lambda), HH^m(\Lambda)]$ con $n, m > 1$. Se usa el producto cup y una versión del corchete de Gerstenhaber dada por Negron y Witherspoon en [30].

4.4.1. Producto cup

Para calcular el producto cup se usan los morfismos de comparación entre la resolución de Bardzell \mathcal{R} y la resolución Bar \mathbb{B} dados por María Julia Redondo y Lucrecia Román en [32]. Se definen los morfismos de comparación para álgebras monomiales cuadráticas de la siguiente manera:

$$\mathbf{G} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathcal{R} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{B}$$

donde

$$\mathbf{G}_n : \begin{array}{ccc} A^{\otimes n+2} & \longrightarrow & A | K\Gamma_n | A \\ 1 \otimes \alpha_n \otimes \dots \otimes \alpha_1 \otimes 1 & \longmapsto & \begin{cases} \sum_{i \in Q_0} 1 | e_i | 1 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{i=1}^n a_m \dots a_{i+1} \otimes a_i \otimes a_{i-1} \dots a_1 & \text{si } n = 1. \end{cases} \end{array}$$

Si $\alpha_1 = a_{m_1}^1 \dots a_1^1$, $\alpha_n = a_{m_n}^n \dots a_1^n$, $\alpha_i = a_i$ para $1 < i < n - 1$ y $a_1^n a_{n-1} \dots a_2 a_{m_1}^1 \in \Gamma_n$ y $n > 1$, entonces

$$\mathbf{G}_n(1 \otimes \alpha_n \otimes \dots \otimes \alpha_1 \otimes 1) = a_{m_n}^n \dots a_2^n \otimes a_1^n a_{n-1} \dots a_2 a_{m_1}^1 \otimes a_{m_1-1}^1 \dots a_1^1,$$

de lo contrario $\mathbf{G}_n(1 \otimes \alpha_n \otimes \cdots \otimes \alpha_1 \otimes 1) = 0$.

$$\mathbf{F}_n : A | K\Gamma_n | A \longrightarrow A^{\otimes n+2}$$

$$1 | \alpha | 1 \longmapsto \begin{cases} e \otimes 1 & \text{si } n = 0 \text{ y } \alpha = e \\ 1 \otimes a_n \otimes \cdots \otimes a_1 \otimes 1 & \text{si } \alpha = a_n \cdots a_1 \text{ y } n > 0. \end{cases}$$

Los morfismos de comparación inducen los siguientes morfismos lineales:

- Si $n = 1$,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}_1 : \text{Hom}_K(A, A) &\longrightarrow K(Q_1 || \mathcal{B}) \\ f : A \longrightarrow A &\longmapsto \sum_{(a, \alpha) \in Q_1 || \mathcal{B}} \lambda_{a, \alpha}(a, \alpha) \\ \varepsilon &\longmapsto \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \lambda_{\varepsilon, \alpha} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_1 : K(Q_1 || \mathcal{B}) &\longrightarrow \text{Hom}_K(A, A) \\ (a, \alpha) &\longmapsto f_{(a, \alpha)} : A \longrightarrow A \\ \varepsilon &\longmapsto \varepsilon(a, \alpha) \end{aligned}$$

- Si $n > 1$,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}_n : \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A) &\longrightarrow K(\Gamma_n || \mathcal{B}) \\ f : A^{\otimes n} \longrightarrow A &\longmapsto \sum_{(\gamma, \alpha) \in \Gamma_n || \mathcal{B}} \lambda_{a_n \otimes \cdots \otimes a_1, \alpha}(\gamma, \alpha) \\ \varepsilon &\longmapsto \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \lambda_{\varepsilon, \alpha} \alpha \end{aligned}$$

donde $\gamma = a_n \dots a_1$.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_n : K(\Gamma_n || \mathcal{B}) &\longrightarrow \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A) \\ (\gamma, \alpha) &\longmapsto f_{(\gamma, \alpha)} \end{aligned}$$

donde

$$f_{(\gamma, \alpha)}(\alpha_n \otimes \cdots \otimes \alpha_1) = \begin{cases} \alpha'_n \delta^{(\gamma, \alpha)} \alpha'_1 & \text{si } \delta = a_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2 a_1 \in \Gamma_n, \\ & \alpha_n = \alpha'_n a_n \text{ y } \alpha_1 = a_1 \alpha'_1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, si $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_m || \mathcal{B}$ y $(\gamma', \alpha') \in \Gamma_n || \mathcal{B}$, de la definición de los morfismos lineales $\overline{\mathbf{F}}$ y $\overline{\mathbf{G}}$ resulta

$$\overline{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{G}}(\gamma, \alpha) \smile \overline{\mathbf{G}}(\gamma', \alpha')) = (\gamma\gamma', \alpha\alpha').$$

Por lo que el producto cup entre (γ, α) y (γ', α') está definido por

$$(\gamma, \alpha) \smile (\gamma', \alpha') = (\gamma\gamma', \alpha\alpha')$$

siempre que $\gamma\gamma' \in \Gamma_{m+n}$ y $\alpha\alpha' \in A$, en otro caso es cero.

4.4.2. Estructura de Gerstenhaber

Recuérdese que la resolución proyectiva minimal \mathcal{R} de Λ como Λ -bimódulo dada por Bardzell es

$$\mathcal{R} : \cdots \rightarrow \Lambda | K\Gamma_n | \Lambda \xrightarrow{\mathbf{b}_n} \Lambda | K\Gamma_{n-1} | \Lambda \rightarrow \cdots \rightarrow \Lambda | K\Gamma_1 | \Lambda \xrightarrow{\mathbf{b}_1} \Lambda | K\Gamma_0 | \Lambda.$$

De la aumentación $\mathbf{b}_0 : \mathcal{R} \rightarrow \Lambda$ de la resolución \mathcal{R} se construyen

$$\mathbf{b}_0 \otimes_{\Lambda} id_{\Lambda} : \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \mathcal{R} \rightarrow \Lambda \otimes_{\Lambda} \mathcal{R}, \quad id_{\Lambda} \otimes_{\Lambda} \mathbf{b}_0 : \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \Lambda$$

donde $\mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \Lambda$ y $\Lambda \otimes_{\Lambda} \mathcal{R}$ se definen de forma usual. Por los isomorfismos naturales $\Lambda \otimes_{\Lambda} \mathcal{R} \cong \mathcal{R} \cong \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \Lambda$ se ve a $\mathbf{b}_0 \otimes_{\Lambda} id_{\Lambda}$ y a $id_{\Lambda} \otimes_{\Lambda} \mathbf{b}_0$ de $\mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \mathcal{R}$ en \mathcal{R} . Además, por ser $\mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \mathcal{R}$ y \mathcal{R} resoluciones Λ^e -proyectivas de Λ y ya que las dos funciones conmutan con la aumentación, las dos funciones son homotópicas.

Lema 4.4.1. *Existe una homotopía de contracción Λ^e -lineal $\phi : \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ de $\mathbf{b}_0 \otimes_{\Lambda} id_{\Lambda}$ a $id_{\Lambda} \otimes_{\Lambda} \mathbf{b}_0$ tal que para u, v caminos en I , $\alpha = a_l \dots a_1 \in \mathcal{B}$ un camino de longitud l y tal que $u\alpha v$ es un camino, entonces*

$$\begin{aligned} \phi_0 : 1|\alpha \otimes_{\Lambda} 1|1 &\longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^l a_l \dots a_{i+1} |a_i| a_{i-1} \dots a_1 & \text{si } 0 < l, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ \phi_n : 1|u|\alpha \otimes_{\Lambda} 1|v|1 &\longrightarrow \begin{cases} a_l \dots a_2 |a_1 v| 1 & \text{si } a_1 v \in \Gamma_{n+1} \text{ y } u \in Q_0, \\ (-1)^{|u|} 1|u\alpha v| 1 & \text{si } u\alpha v \in \Gamma_{n+1} \text{ y } u, v \notin Q_0, \\ (-1)^{|u|} 1|ua_l| a_{l-1} \dots a_1 & \text{si } ua_l \in \Gamma_{n+1} \text{ y } v \in Q_0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Con esta homotopía y el resultado de C. Negron y S. Witherspoon en [30] se calcula el corchete de Gerstenhaber en $HH^{\bullet}(\Lambda)$ para álgebras gentiles. El operador bilineal

$$[f, g]_{\phi} = f \circ_{\phi} g - (-1)^{(|f|-1)(|g|-1)} g \circ_{\phi} f$$

en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}, \Lambda)$ es sobre $HH^{\bullet}(\Lambda)$ el corchete de Gerstenhaber [30, Theorem 3.2.5], donde el producto $f \circ_{\phi} g$ se define por

$$(f \circ_{\phi} g)(\omega) = \sum (-1)^{|\omega_1||g|} f(\phi(\omega_1 \otimes_{\Lambda} g(\omega_2) \otimes_{\Lambda} \omega_3)),$$

con ω_1, ω_2 y ω_3 dados por la evaluación de ω en la función $(\Delta \otimes_{\Lambda} id) \circ \Delta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \mathcal{R}$ y Δ la aplicación diagonal definida por

$$\Delta(1|a_n \dots a_1|1) = \sum_{i=1}^n (1|a_n \dots a_{i+1}|1) \otimes_{\Lambda} (1|a_i \dots a_1|1).$$

En lo que queda de este capítulo se identifican los pares paralelos $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_n || \mathcal{B}$ con $f_{(\gamma, \alpha)} \in \text{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda|K\Gamma_n|\Lambda, \Lambda) \cong \text{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda|K\Gamma_n|\Lambda, \Lambda)$ donde $f_{(\gamma, \alpha)}(1|\gamma'|1) = \alpha$ siempre que $\gamma' = \gamma$, y cero en cualquier otro caso. Además, se denota por \mathcal{R}_n a $\Lambda|K\Gamma_n|\Lambda$.

Corchete entre $HH^0(\Lambda)$ y $HH^n(\Lambda)$ con $n > 1$

Proposición 4.4.2. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Si x es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con $n \geq 2$, entonces*

$$\left[\sum_{e \in Q_0} (e, e), x \right] = 0.$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{\sum_{e \in Q_0}(e, e)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_0, \Lambda)$ y $f_2 = f_x$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$. Es claro que $f_1 \circ_\phi f_2$ y $f_2 \circ_\phi f_1$ tienen dominio $\Lambda|K\Gamma_{n-1}|\Lambda$, el dominio de f_1 es $\Lambda|K\Gamma_0|\Lambda$ y el de f_2 es $\Lambda|K\Gamma_n|\Lambda$, luego $f_1 \circ_\phi f_2 = f_2 \circ_\phi f_1 = 0$. \square

Observación 4.4.3. *La proposición anterior se puede probar sin usar morfismos de comparación, a partir de que el termino de la izquierda representa el 1 del álgebra de cohomología, y usando que el corchete es una derivación graduada en cada variable.*

Proposición 4.4.4. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, α un ciclo en \mathcal{B} con $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$ y (γ', α') en la base de $HH^n(\Lambda)$ con $n \geq 2$. Si $\gamma' \in \Gamma_n$ es maximal en el sentido de la Definición 4.1.4, entonces*

$$[(s(\alpha), \alpha), (\gamma', \alpha')] = 0.$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(s(\alpha), \alpha)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_0, \Lambda)$ y $f_2 = f_{(\gamma', \alpha')}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$. Si α es una potencia de un bucle, por la igualdad $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$ y por ser γ' maximal, se obtiene $f_1 \circ_\phi f_2 = f_2 \circ_\phi f_1 = 0$. Si α no es una potencia de un bucle, entonces $f_1 \circ_\phi f_2 = 0$ debido a que el dominio de f_2 es $\Lambda|K\Gamma_n|\Lambda$. Por otro lado, si $\gamma \in \Gamma_{n-1}$ es tal que $s(\alpha)$ es un vértice en γ y $\alpha = a_l \dots a_1$, entonces $\gamma = \gamma_2 s(\alpha) \gamma_1$ y

$$\begin{aligned} \phi(1|\gamma_2|1 \otimes_\Lambda f_1(1|s(\alpha)|1) \otimes_\Lambda 1|\gamma_1|1) &= \phi(1|\gamma_2|1 \otimes_\Lambda \alpha \otimes_\Lambda 1|\gamma_1|1) \\ &= \begin{cases} a_l \dots a_2 |a_1 \gamma_1|1 & \text{si } a_1 \gamma_1 \in \Gamma_n \text{ y } \gamma_2 = t(\alpha) \\ (-1)^{n-1} 1|\gamma_2 a_l |a_{l-1} \dots a_1 & \text{si } \gamma_2 a_l \in \Gamma_n \text{ y } \gamma_1 = s(\alpha) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

De la igualdad anterior se obtiene que $f_2 \circ_\phi f_1 = 0$ ya que $l \geq 2$ y α' es un camino maximal en \mathcal{B} . \square

Proposición 4.4.5. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil y α un ciclo en \mathcal{B} con $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$. Si la clase de $\sum(C_i^k, e_i)$ es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con $n > 1$, C un circuito completo primitivo y $k \geq 1$, entonces*

$$\left[(s(\alpha), \alpha), \sum(C_i^k, e_i) \right] = \begin{cases} (\alpha^{n-1}, s(\alpha)) & \text{si } \alpha = C \text{ es un bucle y } n \text{ es impar (car}(K) = 2), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(s(\alpha), \alpha)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_0, \Lambda)$ y $f_2 = f_{\sum(C_i^k, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$. Es claro que $f_1 \circ_\phi f_2 = 0$ debido al grado del dominio de f_2 . Ahora, si α es un bucle y $C = \alpha$, entonces

$$\begin{aligned} f_2(\phi(1|\alpha^{n-i-1}|1 \otimes_\Lambda f_1(1|s(\alpha)|1) \otimes_\Lambda 1|\alpha^i|1)) &= f_2(\phi(1|\alpha^{(n-i-1)}|1 \otimes_\Lambda \alpha \otimes_\Lambda 1|\alpha^i|1)) \\ &= (-1)^{(n-1-i)} f_2(1|\alpha^n|1) \\ &= (-1)^{(n-1-i)} s(\alpha) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (f_2 \circ_\phi f_1)(1|\alpha^{n-1}|1) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n-1-i)(n+1)} s(\alpha) \\ &= \begin{cases} ns(\alpha) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego

$$[(s(\alpha), \alpha), (\alpha^n, s(\alpha))] = \begin{cases} (\alpha^{n-1}, s(\alpha)) & \text{si } \alpha \text{ es un bucle, } n \text{ es impar y } \text{car}(K)=2, \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Finalmente, si α no es un bucle, sea $\gamma \in \Gamma_{n-1}$ tal que $s(\alpha)$ aparece en γ , entonces $\alpha = a_l \dots a_1$ con $l \geq 2$, $\gamma = \gamma_2 s(\alpha) \gamma_1$ y

$$\begin{aligned} \phi(1|\gamma_2|1 \otimes_{\Lambda} f_1(1|s(\alpha)|1) \otimes_{\Lambda} 1|\gamma_1|1) &= \phi(1|\gamma_2|1 \otimes_{\Lambda} \alpha \otimes_{\Lambda} 1|\gamma_1|1) \\ &= \begin{cases} a_l \dots a_2 |a_1 \gamma_1| 1 & \text{si } a_1 \gamma_1 \in \Gamma_n \text{ y } \gamma_2 = t(\alpha), \\ (-1)^{n-1} 1|\gamma_2 a_l |a_{l-1} \dots a_1 & \text{si } \gamma_2 a_l \in \Gamma_n \text{ y } \gamma_1 = s(\alpha), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora, si $C_i^k = \gamma a_l$ para algún i , entonces la primera flecha de C_i es a_l y la segunda es a_1 debido a que Λ es un álgebra gentil. Si se escribe C_i^k como $\delta_{a_1 a_l}$, se obtiene

$$f_2 \circ_{\phi} f_1 = f_{(a_l \delta, a_l \dots a_2)} + (-1)^{n-1} f_{(\delta_{a_1, a_{l-1} \dots a_1})},$$

que es un $(n-1)$ -coborde por la Proposición 4.1.3. De lo anterior resulta que $[f_1, f_2] = 0$ si α no es un bucle. \square

Corolario 4.4.6. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil y α un ciclo en \mathcal{B} con $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$. Si la clase de (aC^k, a) es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con $n > 1$, C un circuito completo primitivo y $k \geq 1$, entonces

$$[(s(\alpha), \alpha), (aC^k, a)] = \begin{cases} -(\alpha^{n-1}, \alpha) & \text{si } C = \alpha = a \text{ es un bucle y } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f = f_{(s(a), a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_0, \Lambda)$, $g_1 = f_{(a^n, a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$, $g_1 = f_{(a, a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$, $g_2 = f_{(a^{n-1}, s(a))}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_{n-1}, \Lambda)$ y con a un bucle. Usando la identidad de Poisson se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [f, g] &= [f, g_1 \smile g_2] \\ &= -(-1)^{(|f|-1)(|g_1 \smile g_2|-1)} [g_1 \smile g_2, f] \\ &= -(-1)^{(n-1)} ([g_1, f] \smile g_2 + (-1)^{|g_1|(|f|-1)} g_1 \smile [g_2, f]) \\ &= (-1)^n ([g_1, f] \smile g_2 - g_1 \smile [g_2, f]). \end{aligned}$$

Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned} [f, g] &= -([g_1, f] \smile g_2 - g_1 \smile [g_2, f]) \\ &= -[g_1, f] \smile g_2 \\ &= -f \smile g_2 \\ &= -f_{(a^{n-1}, a)}. \end{aligned}$$

Si n es par, entonces $\text{car}(K) = 2$ y

$$\begin{aligned} [f, g] &= [g_1, f] \smile g_2 + g_1 \smile [g_2, f] \\ &= f \smile g_2 + g_1 \smile f_{(a^{n-2}, s(a))} \\ &= f_{(a^{n-1}, a)} + f_{(a^{n-1}, a)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

\square

En resumen, el corchete entre $HH^0(\Lambda)$ y $HH^n(\Lambda)$ con $n > 1$ es el siguiente

[-, -]		HH ⁿ (Λ)			
		(γ', α'), γ' maximal	∑(C _j ^k , e _j)	(a'C ^k , a')	
HH ⁰ (Λ)	(e _i , α)	0	(α ⁿ⁻¹ , s(α)) 0	si α = C es un bucle n es impar y car(K) = 2, en otro caso. -(α ⁿ⁻¹ , α) 0	si α = C es un bucle y n es impar, si n es par.
	∑ _{e∈Q₀} (e, e)	0	0	0	0

Cuadro 4.1. Corchete entre HH⁰(Λ) y HHⁿ(Λ).

Corchete entre HH¹(Λ) y HHⁿ(Λ) con n > 1

Proposición 4.4.7. Sean Λ = KQ/I un álgebra gentil, (a, α) un elemento de la base de HH¹(Λ) y (γ', α') en la base de HHⁿ(Λ) con n ≥ 2. Si a y γ' son maximales en el sentido de la Definición 4.1.4 y a ≠ α entonces

$$[(a, \alpha), (\gamma', \alpha')] = 0.$$

Demostración. Sean f₁ = f_(a,α) en Hom_{Λ^e}(ℛ₁, Λ) y f₂ = f_(γ',α') en Hom_{Λ^e}(ℛ_n, Λ). Por ser a maximal resulta f₂ ∘_φ f₁ = 0, ya que f₂ ∘_φ f₁ tiene grado mayor que 1 y a es maximal. Por otro lado, si α' = a_l...a₁ entonces

$$(f_1 \circ_{\phi} f_2)(1|\gamma'|1) = f_1(\phi(1|1 \otimes_{\Lambda} \alpha' \otimes_{\Lambda} 1|1)) = f_1 \left(\sum_{i=1}^l a_l \dots a_{i+1} |a_i| a_{i-1} \dots a_1 \right).$$

Si a aparece en α' y l > 1 entonces α'^(a,α) = 0 por ser Λ un álgebra gentil, mientras que si l = 1 y a = α' entonces (f₁ ∘_φ f₂)(1|γ'|1) = f_(γ',α) y en este caso la primera flecha (y última) de α es igual a la primera (y última resp.) de γ'. Como la clase de (γ', α) es cero en HHⁿ(Λ) obtenemos que [(a, α), (γ', α')] = 0. □

Proposición 4.4.8. Sea Λ = KQ/I un álgebra gentil. Si la clase de (a, α) es un elemento de la base de HH¹(Λ) con a ≠ α y a maximal en el sentido de la Definición 4.1.4, y si ∑(C_i^k, e_i) es un elemento de la base de HHⁿ(Λ) con n > 1, C un circuito completo primitivo y k ≥ 1, entonces

$$\left[(a, \alpha), \sum (C_i^k, e_i) \right] = 0.$$

Demostración. Consideremos f_(a,α) en Hom_{Λ^e}(ℛ₁, Λ) y f_{∑(C_i^k, e_i)} en Hom_{Λ^e}(ℛ_n, Λ). De forma similar a la proposición anterior se obtiene que f_{∑(C_i^k, e_i)} ∘_φ f_(a,α) = 0. Por otro lado, debido a que f_{∑(C_i^k, e_i)}(1|C_i^k|1) = e_i, resulta f_(a,α) ∘_φ f_{∑(C_i^k, e_i)} = 0. □

Corolario 4.4.9. Sea Λ = KQ/I un álgebra gentil. Si la clase de (a, α) es un elemento de la base de HH¹(Λ) con a ≠ α y a maximal en el sentido de la Definición 4.1.4, y si (a'C^k, a') es un elemento de la base de HHⁿ(Λ) con n > 1, C un ciclo completo primitivo y k ≥ 1, entonces

$$\left[(a, \alpha), (a'C^k, a') \right] = 0.$$

Demostración. Sean f = f_(a,α) en Hom_{Λ^e}(ℛ₁, Λ), g = f_(a'C^k, a') en Hom_{Λ^e}(ℛ_n, Λ), g₁ = f_(a', a') en Hom_{Λ^e}(ℛ₁, Λ) y g₂ = f_{∑(C_i^k, e_i)} en Hom_{Λ^e}(ℛ_{n-1}, Λ). Usando la identidad de

Poisson se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
[f, g] &= [f, g_1 \smile g_2] \\
&= -(-1)^{(|f|-1)(|g_1 \smile g_2|-1)} [g_1 \smile g_2, f] \\
&= -[g_1 \smile g_2, f] \\
&= -([g_1, f] \smile g_2 + (-1)^{|g_1|(|f|-1)} g_1 \smile [g_2, f]) \\
&= -([g_1, f] \smile g_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

La última igualdad es debido a que $(\gamma, \beta) \smile (C_i, e_i) \neq 0$ si y solo si $(\gamma, \beta) = (C_i^j, e_i)$ o $(\gamma, \beta) = (c_i C_i^j, c_i)$ donde c_i es la primera flecha de C_i y $j \in \mathbb{N}_0$. \square

Proposición 4.4.10. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, $(a, a) \in HH^1(\Lambda)$ dado por un ciclo simple minimal, (γ, α) en $HH^n(A)$ con γ maximal en el sentido de la Definición 4.1.4 y $n \geq 2$. Entonces,

$$[(a, a), (\gamma, \alpha)] = \text{deg}_a(\gamma, \alpha) \cdot (\gamma, \alpha),$$

donde $\text{deg}_a(\gamma, \alpha)$ es el número de veces que aparece a en α menos el número de veces que aparece a en γ .

Demostración. Sean $f_1 = f_{(a,a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $f_2 = f_{(\gamma, \alpha)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$. Recuerdese que $[f_1, f_2] = f_1 \circ_\phi f_2 - f_2 \circ_\phi f_1$. Es claro que $f_1 \circ_\phi f_2$ y $f_2 \circ_\phi f_1$ son cero si a no aparece en γ o α . Ahora, si a aparece en α entonces $f_1 \circ_\phi f_2 = f_2$, mientras que si a aparece en γ se obtiene $f_2 \circ_\phi f_1 = f_2$. De lo anterior se concluye que

$$[(a, a), (\gamma, \alpha)] = \text{deg}_a(\gamma, \alpha) \cdot (\gamma, \alpha).$$

\square

Proposición 4.4.11. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, $(a, a) \in HH^1(\Lambda)$ dado por un ciclo simple minimal, $\sum (C_i^r, e_i)$ en $HH^n(A)$ con C un circuito completo primitivo, $n \geq 2$ y $r \in \{1, 2\}$ dependiendo de $\text{car}(K)$ y de la paridad de n . Entonces,

$$[(a, a), \sum (C_i^r, e_i)] = \begin{cases} -r \sum (C_i^r, e_i) & \text{si } a \text{ aparece en } C \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(a,a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $f_2 = f_{\sum (C_i^r, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$, entonces $f_1 \circ_\phi f_2$ es cero ya que $f_2(\omega)$ o es cero o es un vértice. Por otro lado, si a es una flecha de C_j entonces $(f_2 \circ_\phi f_1)(C_j^r) = r e_j$ para cada j , mientras que si a no es una flecha en C entonces $f_2 \circ_\phi f_1 = 0$, de ahí, por ser f_1 de grado uno, resulta

$$[f_1, f_2] = \begin{cases} -r f_2 & \text{si } a \text{ aparece en } C \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

\square

Corolario 4.4.12. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, $(a, a) \in HH^1(\Lambda)$ dado por un ciclo simple minimal y $\sum (C_i^k, e_i)$ en $HH^n(\Lambda)$ con C un circuito completo primitivo, $k \geq 1$ y $n \geq 2$. Entonces,

$$[(a, a), \sum (C_i^k, e_i)] = \begin{cases} -k \sum (C_i^k, e_i) & \text{si } a \text{ aparece en } C \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f = f_{(a,a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $g_j = f_{\sum(C_i^{jr}, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}, \Lambda)$ con $r \in \{1, 2\}$ dependiendo de $\text{car}(K)$ y de la paridad de n , y $jr \leq k$. Si a no es una flecha de C se obtiene que el corchete es cero. Por otro lado, usando inducción sobre j y la identidad de Poisson se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
[f, g_j] &= -(-1)^{(|f|-1)(|g_j|-1)}[g_j, f] \\
&= -[g_1 \smile g_{j-1}, f] \\
&= -\left([g_1, f] \smile g_{j-1} + (-1)^{|g_1|(|f|-1)}g_1 \smile [g_{j-1}, f]\right) \\
&= -\left(-(-1)^{(|g_1|-1)(|f|-1)}[f, g_1] \smile g_{j-1} - (-1)^{(|g_{j-1}|-1)(|f|-1)}g_1 \smile [f, g_{j-1}]\right) \\
&= [f, g_1] \smile g_{j-1} + g_1 \smile [f, g_{j-1}] \\
&= -rg_1 \smile g_{j-1} + g_1 \smile (-r(j-1)g_{j-1}) \\
&= -rg_j - (j-1)rg_j \\
&= -jr g_j.
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.4.13. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, $(a, a) \in HH^1(\Lambda)$ dado por un ciclo simple minimal y (bC^k, b) en $HH^n(\Lambda)$ con C un ciclo completo primitivo, $k \geq 1$ y $n \geq 2$. Entonces,

$$\left[(a, a), (bC^k, b)\right] = \begin{cases} -k(bC^k, b) & \text{si } a \text{ aparece en } C \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f = f_{(a,a)}$ y $g_1 = f_{(b,b)}$ morfismos en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$, y $g_2 = f_{\sum(C_i^k, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_{n-1}, \Lambda)$. Si a no aparece en C el corchete $[f, g \smile h] = 0$. Por el contrario, si a aparece en C , supóngase que $a = b$, entonces

$$\begin{aligned}
[f, g_1 \smile g_2] &= -(-1)^{(|f|-1)(|g_1 \smile g_2|-1)}[g_1 \smile g_2, f] \\
&= -[g_1 \smile g_2, f] \\
&= -\left([g_1, f] \smile g_2 + (-1)^{|g_1|(|f|-1)}g_1 \smile [g_2, f]\right) \\
&= -\left(0 \smile g_2 - (-1)^{(|g_2|-1)(|f|-1)}g_1 \smile [f, g_2]\right) \\
&= g_1 \smile [f, g_2] \\
&= g_1 \smile (-k g_2) \\
&= -k(g_1 \smile g_2)
\end{aligned}$$

$$\text{y } (a, a) \smile \sum(C_i^k, e_i) = (aC^k, a).$$

□

Proposición 4.4.14. Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con $\text{car}(K) = 2$. Si a es un bucle y la clase de (γ, α) es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con γ maximal en el sentido de la Definición 4.1.4 y $n \geq 2$. Entonces,

$$[(a, s(a)), (\gamma, \alpha)] = 0.$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(a, s(a))}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $f_2 = f_{(\gamma, \alpha)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$. Se cumple $\alpha^{(a, s(a))} = 0$ por ser Λ gentil, luego $f_1 \circ_\phi f_2 = 0$. Mientras que $f_2 \circ_\phi f_1 = 0$ debido a que f_1 cambia la flecha a por un vértice. □

Proposición 4.4.15. Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con $\text{car}(K) = 2$. Si a es un bucle y la clase de $\sum(C_i^k, e_i)$ es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con C un circuito completo primitivo, $k \geq 1$ y $n \geq 2$. Entonces

$$\left[(a, s(a)), \sum(C_i^k, e_i)\right] = 0.$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(a,s(a))}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $f_2 = f_{\sum(C_i^k, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$. Se verifica que $f_1 \circ_\phi f_2$ y $f_2 \circ_\phi f_1$ son cero ya que la imagen de f_1 y f_2 está en \mathcal{Q}_0 . \square

Corolario 4.4.16. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil con $\text{car}(K) = 2$. Si a es un bucle y la clase de $\sum(bC^k, b)$ es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con C un circuito completo primitivo, $k \geq 1$ y $n \geq 2$. Entonces*

$$\left[(a, s(a)), (bC^k, b) \right] = \begin{cases} (a^n, s(a)) & \text{si } a = C \text{ (} a = b \text{)}. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f = f_{(a,s(a))}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$, $g = f_{(bC^k, b)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$, $g_1 = f_{(b,b)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $g_2 = f_{\sum(C_i^k, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_{n-1}, \Lambda)$. Si a no aparece en C el corchete $[f, g \smile h] = 0$. Por el contrario, si a aparece en C , entonces $C = a$ y $a = b$, de donde

$$\begin{aligned} [f, g] &= [f, g_1 \smile g_2] \\ &= -(-1)^{(|f|-1)(|g_1 \smile g_2|-1)} [g_1 \smile g_2, f] \\ &= -[g_1 \smile g_2, f] \\ &= -([g_1, f] \smile g_2 + (-1)^{|g_1|(|f|-1)} g_1 \smile [g_2, f]) \\ &= -(-f \smile g_2) \\ &= f_{(a^n, s(a))}. \end{aligned}$$

\square

A continuación la tabla del corchete entre $HH^1(\Lambda)$ y $HH^n(\Lambda)$ con $n > 1$:

[-, -]		$HH^n(\Lambda)$		
		(γ', α') , γ' maximal	$\sum(C_j^k, e_j)$	$(a'C^k, a')$
$HH^1(\Lambda)$	(a, α) atajo	0	0	0
	(a, α) desviación vía a	0	0	0
	(a, a) , a en un ciclo simple minimal	$\text{deg}_a(\gamma', \alpha') \cdot (\gamma', \alpha')$	$-k \sum(C_j^k, e_j)$ si a aparece en C , 0 otro caso.	$-k(a'C^k, a')$ si a aparece en C , 0 otro caso.
	(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	0	0	(a^n, e_i) si $a = a' = C$, 0 otro caso.

Cuadro 4.2. Corchete entre $[HH^1(\Lambda), HH^n(\Lambda)]$.

Corchete entre $HH^n(\Lambda)$ y $HH^m(\Lambda)$ con $n, m > 1$

Proposición 4.4.17. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, (γ, α) y (γ', α') pares paralelos con γ y γ' maximales en el sentido de la Definición 4.1.4 y tales que sus clases son elementos de la base de $HH^n(\Lambda)$ y $HH^m(\Lambda)$ respectivamente, con $n, m > 1$. Entonces*

$$[(\gamma, \alpha), (\gamma', \alpha')] = 0.$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(\gamma, \alpha)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$, $f_2 = f_{(\gamma', \alpha')}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_m, \Lambda)$. Ya que γ y γ' son maximales, y los grados de $f_1 \circ_\phi f_2$ y $f_2 \circ_\phi f_1$ son iguales a $n + m - 1$, que es mayor que n y m , entonces $[f_1, f_2] = 0$. \square

Proposición 4.4.18. *Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, (γ, α) un par paralelo con γ maximal y tal que su clase es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con $n > 1$, y $\sum(C_i^k, e_i)$*

con C un circuito completo primitivo, $k \geq 1$ y tal que su clase es un elemento de la base de $HH^m(\Lambda)$ con $m > 1$. Entonces

$$\left[(\gamma, \alpha), \sum (C_i^k, e_i) \right] = 0$$

Demostración. La demostración es similar a la anterior, se obtiene por la maximalidad de γ y del hecho de que n y m son mayores que 1. \square

Corolario 4.4.19. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, (γ, α) un par paralelo con γ maximal en el sentido de la Definición 4.1.4 y tal que su clase es un elemento de la base de $HH^n(\Lambda)$ con $n > 1$, y (aC^k, a) con C un ciclo completo primitivo, $k \geq 1$ y tal que su clase es un elemento de la base de $HH^m(\Lambda)$ con $m > 1$. Entonces

$$[(\gamma, \alpha), (aC^k, a)] = 0$$

Demostración. Sean $f = f_{(\gamma, \alpha)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_n, \Lambda)$, $g_1 = f_{(a, a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $g_2 = f_{\sum (C_i^k, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_{m-1}, \Lambda)$. Ya que $f \smile g_2 = 0$ por ser γ maximal, y $[f, g_2] = 0$ por la proposición anterior, se obtiene lo deseado. \square

Proposición 4.4.20. Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil. Si las clases de los elementos $\sum (C_i^k, e_i)$ y $\sum (D_j^{k'}, e_j)$ están en la base $HH^n(\Lambda)$ y $HH^m(\Lambda)$ respectivamente, con $n, m > 1$, donde C y D son circuitos completos primitivos, entonces

$$\left[\sum (C_i^k, e_i), \sum (D_j^{k'}, e_j) \right] = 0.$$

Demostración. Si $C \neq D$ el corchete es 0 ya que no hay un camino entre C y D en I . Así, considere $C = D$. Por la identidad de Poisson es suficiente calcular $[\sum (C_i^r, e_i), \sum (C_i^r, e_i)]$ con $r \in \{1, 2\}$ dependiendo de $\text{car}(K)$ y de la paridad de n . El producto $f_{\sum (C_i^r, e_i)} \circ_\phi f_{\sum (C_i^r, e_i)}$ es cero ya que $f_{\sum (C_i^r, e_i)}(1|C_j^r|1) = e_j \in Q_0$. \square

Corolario 4.4.21. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, (aC^k, a) y $\sum (D_i^{k'}, e_i)$ elementos de la base de $HH^n(\Lambda)$ y $HH^m(\Lambda)$ respectivamente, con $n, m > 1$, donde C y D son ciclos completos primitivos. Entonces

$$\left[(aC^k, a), \sum (D_i^{k'}, e_i) \right] = \begin{cases} -k' \cdot \sum (C_i^{k+k'}, e_i) & \text{si } C = D, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(a, a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$, $f_2 = f_{\sum (C_i^k, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_{n-1}, \Lambda)$ y $g = f_{\sum (D_j^{k'}, e_j)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_m, \Lambda)$ con a una flecha en C . Si $C \neq D$ el corchete $[f_1 \smile f_2, g]$ es cero. De lo contrario, si $C = D$ entonces

$$\begin{aligned} [f_1 \smile f_2, g] &= [f_1, g] \smile f_2 + (-1)^{|f_1| \cdot (|g|-1)} f_1 \smile [f_2, g] \\ &= [f_1, g] \smile f_2 \\ &= -k' \cdot g \smile f_2 \end{aligned}$$

$$y \sum (C_i^k, e_i) \smile \sum (D_i^{k'}, e_i) = \sum (C_i^{k+k'}, e_i). \quad \square$$

Corolario 4.4.22. Sean $\Lambda = KQ/I$ un álgebra gentil, (aC^k, a) y $(bD^{k'}, b)$ elementos de la base de $HH^n(\Lambda)$ y $HH^m(\Lambda)$ respectivamente, con $n, m > 1$ y donde C y D son ciclos completos primitivos. Entonces

$$\left[(aC^k, a), (bD^{k'}, b) \right] = \begin{cases} \left((-1)^{(k+k')m} k - k' \right) (aC^{k+k'}, a) & \text{si } C = D, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $f_1 = f_{(a,a)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$, $f_2 = f_{\sum(C_i^k, e_i)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_{n-1}, \Lambda)$, $g_1 = f_{(b,b)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_1, \Lambda)$ y $g_2 = f_{\sum(D_j^{k'}, e_j)}$ en $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{R}_{m-1}, \Lambda)$. Si $C \neq D$ entonces $[f_1 \smile f_2, g_1 \smile g_2] = 0$. Ahora, si $C = D \in \Gamma_m$, entonces

$$\begin{aligned} [f_1 \smile f_2, g_1 \smile g_2] &= [f_1, g_1 \smile g_2] \smile f_2 + (-1)^{|f_1| \cdot (|g_1 \smile g_2| - 1)} f_1 \smile [f_2, g_1 \smile g_2] \\ &= -k' \cdot g_1 \smile g_2 \smile f_2 \\ &\quad + (-1)^{(|g_1 \smile g_2| - 1)} f_1 \smile \left(-(-1)^{(|g_1 \smile g_2| - 1)(|f_2| - 1)} [g_1 \smile g_2, f_2] \right) \\ &= -k' \cdot g_1 \smile g_2 \smile f_2 - (-1)^{(|g_1 \smile g_2| - 1)|f_2|} (-k) \cdot f_1 \smile f_2 \smile g_2 \\ &= -k' \cdot f_1 \smile f_2 \smile g_2 + (-1)^{(k+k')m} k \cdot f_1 \smile f_2 \smile g_2 \\ &= \left((-1)^{(k+k')m} k - k' \right) f_1 \smile f_2 \smile g_2. \end{aligned}$$

$$\text{y } (a, a) \smile \sum(C_i^k, e_i) \smile \sum(C_i^{k'}, e_i) = (aC^{k+k'}, a). \quad \square$$

Lo anterior se resume en la siguiente tabla.

[-, -]		$HH^m(\Lambda)$		
		$(\gamma', \alpha'), \gamma'$ maximal	$\sum(D_j^{k'}, e_j)$	$(a'D^{k'}, a')$
$HH^n(\Lambda)$	(aC^k, a)	0	$-k' \cdot \sum(C_i^{k+k'}, e_i)$ si $C = D$, 0 en otro caso.	$\left((-1)^{(k+k')m} k - k' \right) (aC^{k+k'}, a)$ si $C = D$, 0 en otro caso.
	$\sum(C_i^k, e_i)$	0	0	
	$(\alpha, \gamma), \gamma$ maximal	0		

Cuadro 4.3. Corchete entre $HH^n(\Lambda)$ y $HH^m(\Lambda)$ con $n, m > 1$.

Capítulo 5

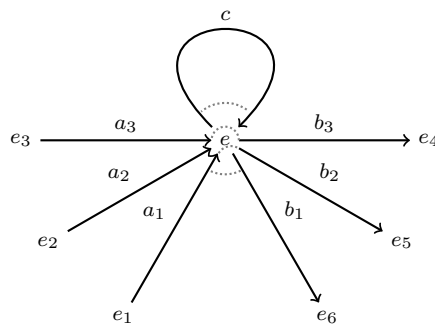
Primer espacio de la cohomología de Hochschild de la extensión trivial de álgebras monomiales cuadráticas

5.1. Cohomología de Hochschild de álgebras monomiales cuadráticas en grados 0 y 1

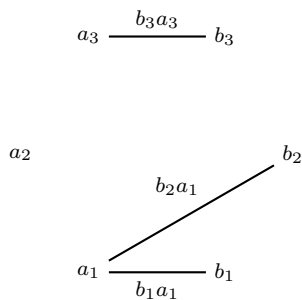
Se generalizan los resultados obtenidos en los Capítulos 2 y 3 para álgebras monomiales cuadráticas de dimensión finita, para esto se define un grafo auxiliar.

Definición 5.1.1. Sea $\xi \in \mathcal{B} \setminus Q_0$ un ciclo fijo. Se define el conjunto V_ξ como la unión de los conjuntos $V_\xi^s = \{a \in Q_1 : \xi a \neq 0\}$ y $V_\xi^t = \{b \in Q_1 : b\xi \neq 0\}$. Si $V_\xi \neq \emptyset$, sea G el grafo no dirigido determinado por el conjunto de vértices V_ξ y las aristas $R' \subseteq R$, donde R' es el conjunto de relaciones de R restringido al conjunto de flechas V_ξ , es decir, r es una arista entre los vértices a y b si $r = ba$ con $a \in V_\xi^s$ y $b \in V_\xi^t$.

Ejemplo 5.1.2. Considérese el siguiente carcaj



con las relaciones $R = \{b_1a_1, b_2a_1, b_3a_3, c^2\}$. Entonces el grafo G es



donde $V_c^s = \{a_1, a_2, a_3\}$, $V_c^t = \{b_1, b_2, b_3\}$ y $R' = \{b_1a_1, b_2a_1, b_3a_3\}$.

5.1.1. HH^0 de álgebras monomiales cuadráticas

Como se vio en el Teorema 2.1.6, puede hallarse una base para la cohomología de Hochschild en grado cero de álgebras gentiles formada por dos tipos de elementos, uno es el elemento unitario del álgebra y el otro está dado por ciclos α en el álgebra tal que $val_Q(s(\alpha)) = 2$. Este resultado se extiende de forma natural para álgebras monomiales cuadráticas cambiando un detalle, las ideas de las pruebas son similares.

Teorema 5.1.3. *Sea $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática de dimensión finita, el conjunto formado por los siguientes elementos es una base de $HH^0(A)$:*

- $(e, \alpha) \in Q_0 || \mathcal{B}_n$ con $n \geq 1$ y $V_\alpha = \emptyset$,
- $\sum_{e \in Q_0} (e, e)$.

Demostración. Por definición del diferencial d^0 , un elemento de la forma $(e, \alpha) \in Q_0 || \mathcal{B}_n$ con $n \geq 1$ y $V_\alpha = \emptyset$ es un 0-cociclo.

Sean (e, α) y (e', α') dos pares paralelos diferentes en $Q_0 || \mathcal{B}_n$ tales que V_α y $V_{\alpha'}$ no son conjuntos vacíos. El propósito es ver que los sumandos de $d^0(e, \alpha)$ no aparecen en los sumandos de $d^0(e', \alpha')$. Si existen b_1 y b'_1 tales que $(b_1, b_1\alpha) = (b'_1, b'_1\alpha')$, entonces $b_1 = b'_1$ y $\alpha = \alpha'$, por lo que $e = s(\alpha) = s(\alpha') = e'$, que es una contradicción. Ahora, si existen b_1 y b'_2 tales que $(b_1, b_1\alpha) = (b'_2, \alpha'b'_2)$, entonces $b_1 = b'_2$ y por lo tanto $b_1\alpha = \alpha'b_1$, de donde $\alpha' = b_1\xi$ y $\alpha = \xi'b_1$ para ciertos $\xi, \xi' \in \mathcal{B}_{n-1}$, de donde $b_1\xi b_1 = b_1\xi'b_1$, pero $b_1\xi b_1 = 0 = b_1\xi'b_1$, contradiciendo que $b_1\alpha, \alpha'b'_2 \in \mathcal{B}$, por consiguiente $(b_1, b_1\alpha) \neq (b'_2, \alpha'b'_2)$.

Por otro lado, nótese que $d^0(e, e) = \sum_{a \in Q_1 e} (a, a) - \sum_{a \in e Q_1} (a, a) = 0$ si y sólo si $val_Q(e) = 2m$, donde e es el vértice de incidencia de m bucles. Como Q es un carcaj conexo se obtiene que la clase de (e, e) es un elemento de la base de $HH^0(\Lambda)$. Ahora, si Q tiene mas de un vértice, al igual que en la demostración del Teorema 2.1.6, la matriz asociada a la restricción de d^0 a $K(Q_0 || Q_0)$ en las bases $Q_0 || Q_0$ del dominio y $Q_1 || \mathcal{B}$ del codominio, tiene como filas a vectores con dos entradas no nulas con valores 1 y -1 , o el vector nulo, este último siempre que la fila corresponda a un bucle, además, el rango de dicha matriz es $|Q_0| - 1$, por lo que el núcleo tiene dimensión 1, esto último es debido a que una flecha que no es bucle aparece en dos vértices y

$$\sum_{e \in Q_0} d^0(e, e) = \sum_{e \in Q_0} \left(\sum_{a \in Q_1 e} (a, a) - \sum_{a \in e Q_1} (a, a) \right) = 0.$$

□

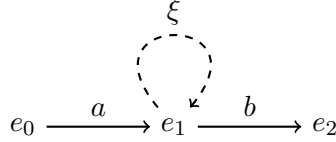
5.1.2. HH^1 de álgebras monomiales cuadráticas

Algunos resultados de esta subsección tienen pruebas iguales a los desarrollados en la Subsección 2.1.2. Se recuerda la Proposición 2.1.9 la cual es fundamental para determinar los cociclos.

Proposición 2.1.9. Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática, (a, α) y (b, β) pares paralelos en $Q_1 \parallel \mathcal{B}$, y $\gamma \in R$ tal que $\gamma^{(a, \alpha)} \neq 0$. La igualdad $\gamma^{(a, \alpha)} = \gamma^{(b, \beta)}$ es equivalente a que alguna de las siguientes condiciones se cumpla:

1. $(a, \alpha) = (b, \beta)$,
2. $\gamma = ba$, $\alpha = \xi a$ y $\beta = b\xi$, donde ξ es un ciclo no trivial en \mathcal{B} .

Localmente el carcaj para la segunda condición es



Observación 5.1.4. Si a es un atajo de α y $\gamma^{(a, \alpha)} \neq 0$ con $\gamma \in R$, por la Proposición 2.1.9 no existe un 1-cociclo para el cual (a, α) sea sumando; en efecto, $(\gamma, \gamma^{(a, \alpha)})$ es un sumando de $d^1(a, \alpha)$ y no existe $(a', \alpha') \in Q_1 \parallel \mathcal{B}$ diferente de (a, α) tal que $(\gamma, \gamma^{(a, \alpha)}) = (\gamma, \gamma^{(a', \alpha')})$.

Proposición 5.1.5. Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática y (a, α) un atajo. La clase de (a, α) es un elemento de la base de $HH^1(A)$ si y sólo si $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$.

Demostración. Dado un par $(e, \xi) \in Q_0 \parallel \mathcal{B}$, por definición $d^0(e, \xi) = \sum_{b \in Q_1 e} \chi_B(b\xi)(b, b\xi) - \sum_{b \in e Q_1} \chi_B(\xi b)(b, \xi b)$. Como por hipótesis a no aparece en α , el par (a, α) no aparece en ninguno de los sumandos anteriores y por lo tanto no aparece en $\text{Im}(d^0)$. Ahora, $d^1(a, \alpha) = \sum_{\gamma \in R} (\gamma, \gamma^{(a, \alpha)})$ y $\sum_{\gamma \in R} (\gamma, \gamma^{(a, \alpha)}) = 0$ si y sólo si $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$. \square

Observación 5.1.6. Nótese que si $\gamma = b_m \dots b_1$ y $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$, es equivalente a que o bien a no aparece en las relaciones, o si $ab \in R$ entonces $b_1 b = 0$, o de forma similar si $ba \in R$ entonces $bb_m = 0$.

Definición 5.1.7. Sea $(a, \alpha) \in Q_1 \parallel (\mathcal{B} \setminus Q_0)$ una **desviación**.

- (a, α) es de **tipo 1** si $\alpha = a\xi$ o $\alpha = \xi a$, donde ξ es un ciclo en $\mathcal{B} \setminus Q_0$,
- (a, α) es de **tipo 2** si $\alpha = \xi_2 a \xi_1$, donde ξ_1, ξ_2 son ciclos en $\mathcal{B} \setminus Q_0$.

Proposición 5.1.8. Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática y (a, α) una desviación de tipo 2. La clase de (a, α) es un elemento de la base $HH^1(A)$ si y sólo si $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$.

Demostración. Sean $\alpha = \xi_2 a \xi_1$ con ξ_1 y ξ_2 ciclos no triviales en \mathcal{B} , y $\gamma^{(a,\alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$, entonces (a, α) es un 1-cociclo y no un 1-coborde por definición de d^0 , por lo tanto la clase de (a, α) en $HH^1(A)$ es no nula.

Si $\gamma^{(a,\alpha)} \neq 0$ para algún $\gamma \in R$, entonces por la Proposición 2.1.9 no existe cociclo para el cual (a, α) sea sumando. \square

Proposición 5.1.9. *Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática y $\xi \in \mathcal{B} \setminus Q_0$ un ciclo. Si V_ξ es no vacío, cada componente conexa X del grafo G determina un 1-cociclo irreducible, además, cada 1-cociclo irreducible con por lo menos dos sumandos está determinado por una componente conexa de algún ciclo no trivial ξ en \mathcal{B} .*

Demostración. Sean X una componente conexa de G y $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_l\}$ el conjunto de vértices de X con $t(a_i) = s(\xi)$ y $s(b_j) = s(\xi)$ en Q , entonces $x = \sum_{i=1}^l (b_i, b_i \xi) - \sum_{i=1}^m (a_i, \xi a_i)$ es un 1-cociclo, en efecto,

$$\begin{aligned}
d^1(x) &= d^1 \left(\sum_{i=1}^l (b_i, b_i \xi) - \sum_{i=1}^m (a_i, \xi a_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^l \sum_{\gamma \in R} (\gamma, \gamma^{(b_i, b_i \xi)}) - \sum_{i=1}^m \sum_{\gamma \in R} (\gamma, \gamma^{(a_i, \xi a_i)}) \\
&= \sum_{i=1}^l \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ b_i a_j \in R}} (b_i a_j, b_i \xi a_j) - \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, l\} \\ b_i a_j \in R}} (b_j a_i, b_j \xi a_i) \\
&= \sum_{i=1}^l \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ b_i a_j \in R}} (b_i a_j, b_i \xi a_j) - (b_i a_j, b_i \xi a_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, la Proposición 2.1.9 asegura que x es irreducible y además que cada 1-cociclo irreducible con por lo menos dos sumandos está determinado por una componente conexa del grafo asociado G de un ciclo no trivial ξ . \square

Proposición 5.1.10. *Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial, (a, α) una desviación de tipo 1 que pasa por el ciclo ξ y G el grafo asociado como en la Definición 5.1.1. Si m es el número de componentes conexas de G , entonces ξ aporta exactamente $m - 1$ elementos a la base de $HH^1(A)$.*

Demostración. Sean $e = s(\xi)$, X_i la i -ésima componente conexa de G con $1 \leq i \leq m$ y $x_i = \sum_{j=1}^{l_{X_i}} (b_j^i, b_j^i \xi) - \sum_{j=1}^{m_{X_i}} (a_j^i, \xi a_j^i)$ el elemento determinado por X_i para cada i . Por definición de d^0 se obtiene

$$\begin{aligned}
d^0(e, \xi) &= \sum_{a \in Q_1 e} \chi_B(a\xi)(a, a\xi) - \sum_{a \in e Q_1} \chi_B(\xi a)(a, \xi a) \\
&= \sum_{i=1}^m x_i.
\end{aligned}$$

Así, en $HH^1(A)$ vale la igualdad $\sum_{i=1}^m x_i = 0$. De la Proposición 2.1.9 y de la definición de d^0 resulta que sólo se pueden obtener sumandos de la forma $(b, b\xi)$ o $(a, \xi a)$ de (e, ξ) , por lo cual ξ aporta exactamente $m - 1$ elementos en la base de $HH^1(A)$. \square

Ejemplo 5.1.11. En el Ejemplo 5.1.2 los 1-cociclos son $x_1 = (b_1, b_1c) + (b_2, b_2c) - (a_1, ca_1)$, $x_2 = -(a_2, ca_2)$, $x_3 = (b_3, b_3c) - (a_3, ca_3)$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en $HH^1(A)$.

Al igual que en el Capítulo 2, falta describir las clases de los elementos $(a, s(a))$ y (a, a) . Para las clases de los primeros vale lo siguiente.

Proposición 5.1.12. Sea $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática. Si $\text{car}(K) \neq 2$ entonces $K(Q_1||Q_0) \cap \ker(d^1) = 0$.

Demostración. Si Q no tiene bucles no hay nada que demostrar. Si existe un bucle a , por ser A un álgebra monomial cuadrática y de dimensión finita la relación a^2 está en R . Así, $2(a^2, a)$ es un sumando de $d^1(a, s(a))$ y por la Proposición 2.1.9 se obtiene que $K(Q_1||Q_0) \cap \ker(d^1) = 0$. \square

Proposición 5.1.13. Sea $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática. Si $\text{car}(K) = 2$ y a es un bucle que solo aparece en la relación a^2 , entonces $(a, s(a))$ es un elemento de la base de $HH^1(A)$.

Demostración. La demostración es idéntica a la demostración de la Proposición 2.1.18 y es la siguiente: por la definición del diferencial d^1 resulta que $d^1(a, s(a)) = 2(a^2, a) = 0$, mientras que por la definición del diferencial d^0 la pareja $(a, s(a))$ no puede aparecer como sumando de un 1-coborde. \square

Finalmente, para los elementos diagonales de álgebras monomiales cuadráticas valen las Proposiciones 2.1.19, 2.1.24, 2.1.25 y 2.1.32. Las pruebas son similares, pero se escriben las pruebas de aquellas para las cuales hace falta hacer algún cambio.

Proposición 5.1.14. Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática y $a \in Q_1$. Valen las siguientes afirmaciones.

1. (a, a) es un 1-cociclo para cada $a \in Q_1$.
2. Si $\text{val}_Q(s(a)) = 1$ o $\text{val}_Q(t(a)) = 1$, entonces la clase de (a, a) es nula en $HH^1(A)$.
3. Si a es un bucle, entonces (a, a) no es un 1-coborde.

Demostración. La demostración de los ítems 1 y 2 es idéntica a la de la Proposición 2.1.19. Para el ítem 3 considérese $e = s(a)$, entonces

$$d^0(e, e) = \sum_{b \in Q_1 e} (b, b) - \sum_{b \in e Q_1} (b, b)$$

y

$$d^0(e, a) = \sum_{b \in Q_1 e} \chi_B(ba)(b, ba) - \sum_{b \in e Q_1} \chi_B(ab)(b, ab).$$

Luego, (a, a) no aparece en los sumandos de $d^0(e, e)$ y tampoco en los de $d^0(e, a)$. \square

Proposición 5.1.15. Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática, γ_0 una rama de Q y a una flecha de γ_0 . Entonces la clase de (a, a) es nula en $HH^1(A)$.

Demostración. La demostración es similar a la de la Proposición 2.1.24, a menos de un detalle. Defínase el conjunto

$$P_0 := \{a \in Q_1; a \text{ es una flecha de } \gamma_0, \text{val}_Q(s(a)) = 1 \text{ o } \text{val}_Q(t(a)) = 1\},$$

por la Proposición 5.1.14 se sabe que la clase de (a, a) es nula en $HH^1(A)$ para cada flecha a en P_0 . Sea γ_1 el subcarcaj conexo resultante de quitar en γ_0 las flechas de P_0 , si γ_1 es vacío se ha terminado, de lo contrario se define

$$P_1 := \{a \in Q_1; a \text{ es una flecha de } \gamma_1, \text{val}_{Q_1 \setminus P_0}(s(a)) = 1 \text{ o } \text{val}_{Q_1 \setminus P_0}(t(a)) = 1\},$$

luego, cada $a \in P_1$ tiene o bien su origen o su término conectado con por lo menos una flecha $b \in P_0$, si se llama e dicho vértice, entonces

$$d^0(e, e) = \pm(a, a) + \sum_{i=1}^n \text{sg}(b_i)(b_i, b_i),$$

donde b_1, \dots, b_n son las flechas en P_0 que conectan por medio de e y $\text{sg}(b_i)$ es el signo correspondiente de la flecha b_i . Así, la clase (a, a) se escribe como suma de clases nulas en $HH^1(A)$. Ahora, como Q es finito se puede repetir el proceso y para algún natural m se obtiene $\gamma_m = \emptyset$. Por lo tanto, la clase de (a, a) es nula en $HH^1(A)$ para cada $a \in \gamma_0$. \square

Proposición 5.1.16. Sean $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática y a una flecha en el esqueleto S , la clase de (a, a) es nula en $HH^1(A)$.

Demostración. La demostración es igual a la de la Proposición 2.1.25. \square

Proposición 5.1.17. Sea A un álgebra monomial cuadrática con $Q = D$ un corazón, por cada ciclo simple C en \mathcal{C}_D hay un representante no nulo (a, a) en $HH^1(A)$, además toda pareja no nula (a, a) en $HH^1(A)$ es de esta forma.

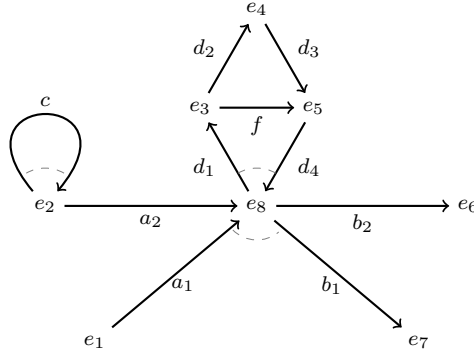
Demostración. Es idéntica a la demostración de la Proposición 2.1.32. \square

Teorema 5.1.18. Sea $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática de dimensión finita, una base de $HH^1(A)$ está dada por las clases de los siguientes elementos:

- (a, α) donde a es un atajo de α y $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$,
- (a, α) donde (a, α) es una desviación de tipo 2 y $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$,
- $m_\xi - 1$ elementos x_i por cada ciclo ξ , como en la Proposición 5.1.10.
- (a, a) por cada ciclo simple minimal en Q donde a es una flecha del complemento de un árbol maximal de Q ,
- si $\text{car}(K) = 2$, adicional a los elementos anteriores, las parejas $(a, s(a))$ siempre que a sea un bucle que aparece solamente en la relación a^2 .

Demostración. La demostración se sigue de las proposiciones 5.1.5, 5.1.8, 5.1.10, 5.1.17 y 5.1.13. \square

Ejemplo 5.1.19. *Considérese el carcaj Q como sigue:*



Si I es el ideal admisible generado por $R = \{b_1a_1, c^2, d_1d_4\}$ y $\text{car}(K) \neq 2$, entonces

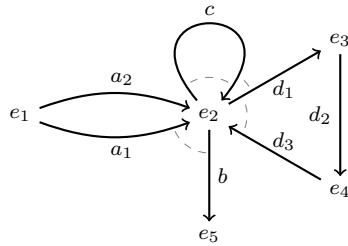
$$\begin{aligned} HH^1(A) = & K(c, c) \oplus K(d_1, d_1) \oplus K(d_2, d_2) \oplus K(f, d_3d_2) \oplus K(a_2, d_4d_3d_2d_1a_2c) \\ & \oplus K(a_2, d_4fd_1a_2c) \oplus K(b_2, b_2d_4fd_1) \oplus K(a_2, d_4fd_1a_2) \\ & \oplus K(b_2, b_2d_4d_3d_2d_1) \oplus K(a_2, d_4d_3d_2d_1a_2). \end{aligned}$$

Nótese que por la Proposición 5.1.10 en $HH^1(A)$ valen las igualdades

- $(b_2, b_2d_4fd_1) - (a_2, d_4fd_1a_2) = (b_1, b_1d_4fd_1) - (a_1, d_4fd_1a_1)$,
- $(b_2, b_2d_4d_3d_2d_1) - (a_2, d_4d_3d_2d_1a_2) = (b_1, b_1d_4d_3d_2d_1) - (a_1, d_4d_3d_2d_1a_1)$.

Además, si $\text{char}(K) = 2$ aparece el sumando (c, e_2) en $HH^1(A)$.

Ejemplo 5.1.20. *Sea Q el carcaj:*



Si I es el ideal admisible generado por $R = \{ba_1, c^2, d_1d_3, d_1c\}$, entonces

$$\begin{aligned} HH^1(A) = & K(a_1, a_1) \oplus K(c, c) \oplus K(d_1, d_1) \oplus K(a_2, a_1) \oplus K(c, cd_3d_2d_1) \\ & \oplus K(a_2, d_3d_2d_1a_2) \oplus K(d_3, cd_3) \oplus K(a_2, ca_2). \end{aligned}$$

Por la Proposición 5.1.10 en $HH^1(A)$ valen las igualdades

- $(c, cd_3d_2d_1) - (a_2, d_3d_2d_1a_2) = (b, bd_3d_2d_1) - (a_1, d_3d_2d_1a_1)$,
- $-(d_3, cd_3) - (a_2, ca_2) = (b, bc) - (a_1, ca_1)$.

5.2. $HH_1(A)^*$ y $Alt_A(DA)$ de álgebras monomiales cuadráticas

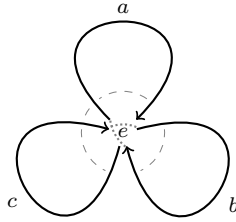
Los resultados del Teorema 2.2.4 son ciertos para álgebras monomiales cuadráticas debido a que el diferencial solo ve lo que aparece en el par cíclico, es decir, solo tiene en cuenta las flechas que aparecen en el ciclo que determina el par cíclico.

Teorema 5.2.1. *Sea $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática de dimensión finita. El conjunto formado por los siguientes pares cíclicos es una base para $HH_1(A)^*$:*

1. $a \odot b^* - b \odot a^* \in Q_1 \odot Q_1^*$ con $ba = 0 = ab$,
2. $a \odot s(a)^* \in Q_1 \odot Q_0^*$,
3. si $\text{car}(K) = 2$, además de los elementos anteriores se tienen los elementos de la forma $a \odot a^* \in Q_1 \odot Q_1^*$.

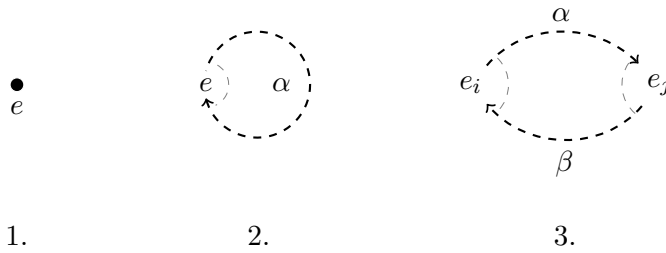
Demostración. Es igual que en el caso de álgebras gentiles. □

Ejemplo 5.2.2. Sean $\text{car}(K) \neq 2$ y Q el carcaj



y $R = \{a^2, b^2, c^2, ab, ac, bc\}$, entonces $HH_1(A)^* = K(a \odot e^*) \oplus K(b \odot e^*) \oplus K(c \odot e^*)$.

Ahora, para la base de $Alt_A(DA)$ solo hay que determinar cuándo un par cíclico es limpio. Al igual que en el caso gentil, para los ciclos se tienen los siguientes casos.



1. Para obtener la clase $\overline{e \odot e} = \{e \odot e\}$ no deben incidir flechas en e , y dado que esta clase es simétrica respecto al flip se obtiene $\psi_{\overline{e \odot e}} \in Alt_A(DA)$ si y sólo si $\text{car}(K) = 2$.
2. Sea $\alpha = a_n \dots a_1 \in \mathcal{B}_n$ con $a_i \in Q_1$ para todo i . A partir de α se puede obtener dos clases limpias:
 - $\overline{\alpha \odot \alpha} = \{\alpha \odot \alpha\}$ siempre que $V_\alpha = \emptyset$.

- $\overline{e \odot \alpha} = \{e \odot \alpha, a_i \dots a_1 \odot a_n \dots a_{i+1}, \alpha \odot e, a_n \dots a_{i+1} \odot a_i \dots a_1; i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ siempre que:
 - a) $ba_i = 0$ si y sólo si $b \neq a_{i+1}$ para cada $1 \leq i \leq n-1$,
 - b) $a_i b = 0$ si y sólo si $b \neq a_{i-1}$ para cada $2 \leq i \leq n$,
 - c) $val_Q(e) = 2$.

Las dos clases son simétricas respecto al flip, por lo tanto $\psi_{\overline{\alpha \odot \alpha}}, \psi_{\overline{e \odot \alpha}} \in Alt_A(DA)$ si y sólo si $car(K) = 2$. Por otro lado, nótese que no necesariamente aparecen las dos clases, pero si aparece $\overline{e \odot \alpha}$ entonces $\overline{\alpha \odot \alpha}$ aparece también.

3. Si $\alpha = a_n \dots a_1$ y $\beta = b_m \dots b_1$ con $a_i, b_j \in Q_1$ para cada i, j . Las clases limpias son $\overline{\alpha \odot \beta}$ y $\overline{\beta \odot \alpha}$ que son unitarias y deben cumplir lo siguiente:
 - a) $ca_n = 0 = cb_m$ para toda flecha c ,
 - b) $a_1 c = 0 = b_1 c$ para toda flecha c .

Como $\overline{\alpha \odot \beta}$ es el flip de $\overline{\beta \odot \alpha}$, entonces $\psi_{\overline{\alpha \odot \beta}} - \psi_{\overline{\beta \odot \alpha}} \in Alt_A(DA)$. Es importante notar que la característica de K no se tomó en cuenta y que las condiciones para tener las clases limpias significan que no hay caminos que entren al ciclo o salgan de él por los vértices e_i y e_j .

Se ha probado el siguiente teorema.

Teorema 5.2.3. *Sea $A = KQ/I$ un álgebra monomial cuadrática de dimensión finita y con $Q \neq \bullet$.*

1. *Sea $\alpha \odot \beta$ un par cíclico en $\mathcal{B} \odot \mathcal{B}$ con $\alpha \neq \beta$ y tal que $a\alpha, a\beta, \beta a, \alpha a \in I$ para cada flecha a . Si $car(K) \neq 2$ entonces $\psi_{\overline{\alpha \odot \beta}} - \psi_{\overline{\beta \odot \alpha}}$ es un elemento de la base de $Alt_A(DA)$ y todos los elementos de la base de $Alt_A(DA)$ son de esa forma.*
2. *Si $car(K) = 2$, sean γ y γ' ciclos no triviales en \mathcal{B} con $V_{\gamma'} = \emptyset$, $\gamma = a_n \dots a_1$ donde $a_i \in Q_1$ para cada $1 \leq i \leq n$ y tal que:*
 - $val_Q(s(\gamma)) = 2$,
 - $ba_i = 0$ si y solo si $b \neq a_{i+1}$ para cada $b \in Q_1$ y cada $1 \leq i \leq n-1$,
 - $a_{i+1}b = 0$ si y solo si $b \neq a_i$ para cada $b \in Q_1$ y cada $1 \leq i \leq n-1$.

El conjunto de todos los morfismos $\psi_{\overline{\gamma' \odot \gamma}}, \psi_{\overline{e \odot \gamma}}$ y $\psi_{\overline{\alpha \odot \beta}} + \psi_{\overline{\beta \odot \alpha}}$ con α y β como en el ítem 1 es una base de $Alt_A(DA)$.

Si $Q = \bullet$ entonces $Alt_A(DA) = \langle \psi_{\overline{e \odot e}} \rangle$ siempre que $car(K) = 2$, de lo contrario $Alt_A(DA) = 0$.

5.3. Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(TA)$

Al igual que en el Capítulo 3 se usará el Teorema 3.0.1 y algunas ecuaciones resultantes de este capítulo, esto debido a que se hicieron para el caso monomial cuadrático. Algunos corchetes tienen el mismo resultado que para álgebras gentiles pero se escriben las pruebas por completitud.

(1) Corchete entre $Z(A)$ y $HH^1(A)$: si $z \in Z(A)$ y f_x es un elemento de la base de $HH^1(A)$ con $x \in K(Q_1 \parallel \mathcal{B})$, por el Teorema 3.0.1 resulta que $[z, f_x] = -z^x$. Así,

- si $z = 1_A = \sum_{e \in Q_0} e$, entonces $\left[\sum_{e \in Q_0} (e, e), x \right] = 0$ para cada $x \in HH^1(A)$.
- si α es un ciclo no trivial en A con $V_\alpha = \emptyset$ y $e_i = s(\alpha)$, entonces $[(e_i, \alpha), x] = -(e_i, \alpha^x)$.

[-, -]	$HH^1(A)$					
	(a', e_j) si $\text{car}(K) = 2$	(a', a') a' en un ciclo simple minimal	x	(a', α') desviación tipo 2	(a', α') atajo	
$Z(A)$	(e_i, α)	$-(e_i, \alpha^{(a', e_j)})$	$-(e_i, \alpha^{(a', a')})$	$-(e_i, \alpha^x)$	$-(e_i, \alpha^{(a', \alpha')})$	$-(e_i, \alpha^{(a', \alpha')})$
	$\sum_{e \in Q_0} (e, e)$	0	0	0	0	0

Cuadro 5.1. Corchete entre $Z(A)$ y $HH^1(A)$.

(2) Corchete entre $Z(A)$ y $HH_1(A)^*$: si $z \in Z(A)$ y $g \in H^1(A, DA)$, entonces el corchete entre z y g evaluado en ε es $[z, g](\varepsilon) = zg(\varepsilon)$ donde $\varepsilon = a_n \dots a_1$ y cada $a_i \in Q_1$, de ahí, si $g_{b \odot \beta^*}$ es un sumando de g vale que

$$zg_{b \odot \beta^*}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n b^*(a_i) z a_n \dots a_{i+1} \beta^* a_{i-1} \dots a_1$$

y

$$[z, b \odot \beta^*]_g = \sum_{\{\gamma \mid b \odot \gamma \in Q_1 \odot \mathcal{B}\}} \beta^*(\gamma z)(b \odot \gamma^*),$$

donde $[z, b \odot \beta^*]_g$ es el sumando correspondiente en $[z, \mathbf{F}_1(g)]$.

Si α es un ciclo no trivial en A con $V_\alpha = \emptyset$ y $e_i = s(\alpha)$, usando los Teoremas 5.1.3 y 5.2.1 se obtiene:

- Sea $g = g_{a \odot b^*} - g_{b \odot a^*}$, entonces

$$[(e_i, \alpha), a \odot b^*]_g = \sum_{a \odot \gamma \in a \odot \mathcal{B}} b^*(\gamma \alpha)(a \odot \gamma^*) = \begin{cases} a \odot e_i^* & \text{si } \alpha = b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\text{Así, } [(e_i, \alpha), a \odot b^* - b \odot a^*] = \begin{cases} a \odot e_i^* & \text{si } \alpha = b, \\ -b \odot e_i^* & \text{si } \alpha = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $[(e_i, \alpha), a \odot e_j^*] = \sum_{a \odot \gamma \in a \odot \mathcal{B}} e_j^*(\gamma \alpha)(a \odot \gamma^*) = 0$, pues $\gamma \alpha \neq e_j$.
- Como $a = \gamma \alpha$ si y solo si $\gamma = e_i$ y $\alpha = a$, entonces

$$[(e_i, \alpha), a \odot a^*] = \begin{cases} a \odot e_i^* & \text{si } \alpha = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $[\sum_{e \in Q_0} (e, e), b \odot \beta^*]_g = \sum_{b \odot \gamma \in b \odot \mathcal{B}} \beta^*(\gamma)(b \odot \gamma^*) = b \odot \beta^*$.

$$[1_A, g] = g, \text{ para cada } g \in HH_1(A)^*.$$

El Cuadro 5.2 resume lo anterior.

(3) Corchete entre $HH^1(A)$ y $HH_1(A)^*$: Sea $f_x \in HH^1(A)$ y $g \in H^1(A, DA)$ con $g_{b \odot \beta^*}$ y $[-, -]_g$ como en el ítem 2. Entonces, si (a, α) es un sumando de x se obtiene

$$[f_{(a, \alpha)}, g_{b \odot \beta^*}]_g(\varepsilon)(\gamma) = -g_{b \odot \beta^*}(\varepsilon)(\gamma^{(a, \alpha)}) - \left(g_{b \odot \beta^*} \left(\varepsilon^{(a, \alpha)} \right) \right) (\gamma).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} [(a, \alpha), b \odot \beta^*]_g = & \\ - \sum_{b \odot \gamma \in b \odot \mathcal{B}} \beta^*(\gamma^{(a, \alpha)})(b \odot \gamma^*) - \sum_{a \odot \gamma \in a \odot \mathcal{B}} \sum_{i=1}^n b^*(a_i) \beta^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1})(a \odot \gamma^*) \end{aligned}$$

donde $\alpha = a_n \dots a_1$.

Para los elementos de las bases según los Teoremas 5.1.18 y 5.2.1 se obtiene:

- sean (a, α) un atajo con $\rho^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\rho \in R$, $\alpha = a_n \dots a_1$ y $a_i \in Q_0$,

•

$$[(a, \alpha), a' \odot b'^*]_g = \begin{cases} -a' \odot a^* & \text{si } \alpha = b' \text{ y } aa' = 0 = a'a, \\ -a \odot b'^* & \text{si } \alpha = a' \text{ y } ab' = 0 = b'a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En efecto, en el primer sumando se cumple que $b'^*(\gamma^{(a, \alpha)}) = 1$ si y sólo si $\gamma = a$ y $b' = \alpha$, y en el segundo sumando $a'^*(a_i) = 1$ y $b'^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1}) = 1$ si y sólo si $b' = \gamma$ y $a' = \alpha$ (por la longitud de b' y por ser $\alpha \neq 0$).

Ahora, puesto que $a' \neq b'$ hay dos casos para los cuales el corchete puede ser no nulo; el primero es cuando $a'a = 0 = aa'$ y el segundo cuando $ab' = 0 = b'a$. Por lo que

$$[(a, \alpha), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = \begin{cases} -a' \odot a^* + a \odot a'^* & \text{si } \alpha = b' \text{ y } aa' = 0 = a'a, \\ -a \odot b'^* + b' \odot a^* & \text{si } \alpha = a' \text{ y } ab' = 0 = b'a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Sea $g = g_{a' \odot e_j^*}$, como $e_j^*(\gamma^{(a, \alpha)}) = 0$ por ser $long(\alpha) \geq 1$ para cada $\gamma \in \mathcal{B}$, entonces el primer sumando es nulo, mientras que $e_j^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1}) = 1$ y $a'^*(a_i) = 1$ si y solo si $e_j = \gamma$ y $a' = a_i$, entonces $long(\alpha) = 1$ y

$$[(a, \alpha), a' \odot e_j^*] = \begin{cases} -a \odot e_j^* & \text{si } \alpha = a', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $g = g_{a' \odot a'^*}$, entonces

$$[(a, \alpha), a' \odot a'^*] = \begin{cases} a' \odot a^* - a \odot a'^* & \text{si } \alpha = a' \text{ y } a'a = 0 = aa', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En efecto, $a'^*(a_{i-1} \dots a_1 \gamma a_n \dots a_{i+1}) = 1$ y $a'^*(a_i) = 1$ si y solo si $a' = \alpha = \gamma$, y $a'^*(\gamma^{(a, \alpha)}) = 1$ si y solo si $a' = \alpha$ y $\gamma = a$, por lo cual resulta que el corchete puede ser no nulo si $\alpha = a'$, $[(a, \alpha), a' \odot a'^*] = -a' \odot a^* - a \odot a'^*$ siempre que $aa' = 0 = a'a$, luego $[(a, \alpha), a' \odot a'^*] = a' \odot a^* - a \odot a'^*$ si $\alpha = a'$ con $\text{car}(K) = 2$.

- Sea (a, α) una desviación de tipo 2, como $long(\alpha) \geq 3$ vale que

- $[(a, \alpha), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = 0$,
 - $[(a, \alpha), (a' \odot e_j^*)] = 0$,
 - $[(a, \alpha), (a' \odot a'^*)] = 0$.
- Si $x = \sum_{i=1}^{l_X} (b_i, b_i \xi) - \sum_{i=1}^{m_X} (a_i, \xi a_i)$, donde X es la componente conexa de G y $2 \leq \text{long}(b_i \xi), \text{long}(\xi a_i)$, entonces
- $[x, a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = 0$, ya que $b_i \xi, \xi a_i \neq 0$ y $ab = ba = 0$,
 - $[x, a' \odot e_j^*] = 0$, por longitud de $b_i \xi$ y ξa_i ,
 - $[x, a' \odot a'^*] = 0$.
- Sea a una flecha de un ciclo simple minimal y considérese la clase de la pareja paralela (a, a) , entonces
- sea $g = g_{a' \odot b'^*} - g_{b' \odot a'^*}$, puesto que $a^*(a) = 1$ y $b^*(\gamma) = 1$ si y solo si $a' = a$ y $b' = \gamma$, y $b^*(\gamma^{(a,a)}) = 1$ si y solo si $\gamma = b' = a$, y como $a' \neq b'$ entonces

$$[(a, a), a' \odot b'^*]_g = \begin{cases} -a' \odot b'^* & \text{si } a = a' \text{ o } a = b', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$[(a, a), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = \begin{cases} -a' \odot b'^* + b' \odot a'^* & \text{si } a = a' \text{ o } a = b', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Como $e_j \neq \gamma^{(a,a)}$ y $a^*(a) = 1$ si y solo si $a' = a$ entonces
- $$[(a, a), a' \odot e_j^*] = \begin{cases} -a' \odot e_j^* & \text{si } a' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
- Obsérvese que $a^*(a) = 1$ si y solo si $a' = a$, y $a' = \gamma^{(a,a)}$ si y solo si $a' = a = \gamma$, entonces $[(a, a), a \odot a^*] = -a \odot a^* - a \odot a^* = 0$ ya que $a \odot a^*$ aparece con $\text{car}(K) = 2$. Así, $[(a, a), a' \odot a'^*] = 0$.
- Sean a un bucle, $s(a) = e_i$ y $\text{car}(K) = 2$.

- Sea $g = g_{a' \odot b'^*} - g_{b' \odot a'^*}$, como $a^*(e_i) = 0$ entonces $[(a, e_i), a' \odot b'^*]_g = -\sum b'^*(\gamma^{(a,e_i)})(a' \odot \gamma^*)$, y $b' = \gamma^{(a,e_i)}$ si y solo si $\gamma = ab'$ o $\gamma = b'a$. Si $ab' \neq 0$, entonces $a'a \neq 0$ (a solo aparece en la relación a^2) y

$$[(a, e_i), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = -a' \odot (ab')^* + b' \odot (a'a)^*.$$

Pero la clase de $a' \odot (ab')^* - b' \odot (a'a)^*$ es nula en $HH^1(A)$. De forma similar si $b'a \neq 0$. Por lo tanto

$$[(a, e_i), a' \odot b'^* - b' \odot a'^*] = 0.$$

- Como $a^*(e_i) = 0$, entonces $[(a, e_i), a' \odot e_j^*] = -\sum e_j^*(\gamma^{(a,e_i)})(a' \odot \gamma^*)$, pero $e_j = \gamma^{(a,e_i)}$ si y solo si $\gamma = a$ y $e_j = e_i$. Así, como a solo aparece en la relación a^2 , entonces

$$[(a, e_i), a' \odot e_j^*] = \begin{cases} -a \odot a^* & \text{si } e_i = e_j \text{ y } a' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Como $a'^*(e_i) = 0$ entonces $[(a, e_i), a' \odot a'^*] = -\sum a'^*(\gamma^{(a, e_i)})(a' \odot \gamma^*)$. Ahora, $a' = \gamma^{(a, e_i)}$ si y solo si $\gamma = aa' \circ \gamma = a'a$, pero no ambas (A es de dimensión finita), y esto dice que a está en dos relaciones, luego $[(a, e_i), a' \odot a'^*] = 0$.

Lo anterior se resume en el siguiente cuadro

[-, -]		$HH_1(A)^*$		
		$a' \odot a'^*$ si $\text{car}(K) = 2$	$a' \odot e_j^*$	$a' \odot b'^* - b' \odot a'^*$
$Z(A)$	(e_i, α)	$\alpha \odot e_i^*$ si $\alpha = a'$, 0 otro caso.	0	$a' \odot e_i^*$ si $\alpha = b'$, $-b' \odot e_i^*$ si $\alpha = a'$, 0 en otro caso.
	$\sum_{e \in Q_0} (e, e)$	$a' \odot a'^*$	$a' \odot e_j^*$	$a' \odot b'^* - b' \odot a'^*$
$HH^1(A)$	(a, α) atajo	$a' \odot a^* - a \odot a'^*$ si $\alpha = a'$ y $a'a = 0 = aa'$, 0 en otro caso.	$-a \odot e_j^*$ si $\alpha = a'$, 0 en otro caso.	$-a' \odot a^* + a \odot a'^*$ si $\alpha = b'$ y $aa' = 0 = a'a$, $-a \odot b'^* + b' \odot a'^*$ si $\alpha = a'$ y $ab' = 0 = b'a$, 0 en otro caso.
	(a, α) desviación tipo 2	0	0	0
	x	0	0	0
	(a, a) a en un ciclo simple minimal	0	$-a \odot e_j^*$ si $a = a'$, 0 otro caso.	$-a' \odot b'^* + b' \odot a'^*$ si $a = a' \circ a = b'$, 0 otro caso.
	(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	0	$-a \odot a^*$ si $i = j$ y $a = a'$, 0 otro caso.	0

Cuadro 5.2. $[Z(A), HH_1(A)^*]$ y $[HH^1(A), HH_1(A)^*]$.

(4) Corchete entre $Z(A)$ y $Alt_A(DA)$:

- sea α un ciclo en A con $V_\alpha = \emptyset$, entonces
 - si $\psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}$ es un elemento de la base de $Alt_A(DA)$, entonces

$$[(e_i, \alpha), \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}] = -\alpha \psi_{\alpha' \odot \beta'} + \alpha \psi_{\beta' \odot \alpha'} = 0,$$

ya que $\alpha' \neq \alpha\delta$ y $\beta' \neq \alpha\delta$ para todo $\delta \in A$ (de lo contrario el par $\alpha' \odot \beta'$ no es limpio) y $V_\alpha = \emptyset$.

- Sean $\psi_{e_j \odot \beta}, \psi_{\beta' \odot \beta'} \in Alt_A(DA)$ como en el Teorema 5.2.3 y $\text{car}(K) = 2$, entonces $[(e_i, \alpha), \psi_{\beta' \odot \beta'}] = 0$, ya que $-\alpha\beta' = 0$ para todo $\alpha \in Z(A) \setminus \{1_A\}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} [\alpha, \psi_{e_j \odot \beta}] (\gamma^*) &= -\alpha \psi_{e_j \odot \beta} (\gamma^*) \\ &= -\alpha \sum_{\gamma \odot \delta \in e_j \odot \beta} \delta \\ &= -\sum_{\gamma \odot \delta \in e_j \odot \beta} \alpha \delta \\ &= \begin{cases} -\alpha & \text{si } \gamma = \beta \text{ y } e_i = e_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

La última igualdad es cierta ya que $V_\alpha = \emptyset$, de donde

$$[(e_i, \alpha), \psi_{e_j \odot \beta}] = \begin{cases} -\psi_{\beta \odot \beta} & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Identificando a $\sum_{e \in Q_0} (e, e)$ con $1_A \in Z(A)$, $[1_A, \psi] = -1_A \psi = -\psi$.

Lo anterior se resume en el Cuadro 5.6.

(5) Corchete entre $HH^1(A)$ y $Alt_A(DA)$: sean f un elemento de la base de $HH^1(A)$ con $f_{(a,\alpha)}$ un sumando de f y $\psi \in Alt_A(DA)$, entonces

$$[f_{(a,\alpha)}, \psi]_f(\gamma^*) = \psi(\gamma^*)^{(a,\alpha)} + \psi(\gamma^* \circ f_{(a,\alpha)}).$$

Al igual que en el Capítulo 3 se escribe ψ como $\psi = \sum \lambda_{(\alpha',\beta')}(\alpha'^* \mapsto \beta')$, donde $\psi(\alpha'^*) = \lambda_{(\alpha',\beta')} \beta'$ y $\lambda_{(\alpha',\beta')} \in K$, entonces

$$((\alpha'^* \mapsto \beta')(\gamma^*))^{(a,\alpha)} = \begin{cases} \beta'^{(a,\alpha)} & \text{si } \gamma = \alpha', \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$(\alpha'^* \mapsto \beta')(\gamma^* \circ f_{(a,\alpha)}) = \begin{cases} \beta' & \text{si } \gamma = \alpha'^{(a,\alpha)}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- sea $\psi = \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}$, entonces

$$[f_{(a,\alpha)}, \psi_{\alpha' \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'}]_f = \begin{cases} \psi_{\alpha' \odot \beta'^{(a,\alpha)}} - \psi_{\beta'^{(a,\alpha)} \odot \alpha'} & \text{si } \beta'^{(a,\alpha)} \neq 0, \\ \psi_{\alpha'^{(a,\alpha)} \odot \beta'} - \psi_{\beta' \odot \alpha'^{(a,\alpha)}} & \text{si } \alpha'^{(a,\alpha)} \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Sean $\psi_{e_j \odot \beta}, \psi_{\beta' \odot \beta'} \in Alt_A(DA)$ como en el Teorema 5.2.3 y $\text{car}(K) = 2$.
 - Si $\psi = \psi_{e_j \odot \beta}$ con $\beta = a_n \dots a_1$ y debido a que $\overline{e_j \odot \beta}$ es una clase limpia, si $k \in \{1, \dots, n\}$, las siguientes igualdades valen:

$$(a_n \dots a_k)^{(a,\alpha)} = \begin{cases} a_n \dots a_k & \text{si } (a, \alpha) = (b, b) \text{ y } b \text{ aparece en } a_n \dots a_k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$(a_k \dots a_1)^{(a,\alpha)} = \begin{cases} a_k \dots a_1 & \text{si } (a, \alpha) = (b, b) \text{ y } b \text{ aparece en } a_k \dots a_1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y ya que $e_j^{(a,\alpha)} = 0$, entonces,

$$[f_{(a,\alpha)}, \psi]_f = \begin{cases} \psi & \text{si } (a, \alpha) = (b, b) \text{ y } b \text{ es una flecha en } \beta, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \psi_{\beta' \odot \beta'}$, entonces

$$[f_{(a,\alpha)}, \psi_{\beta' \odot \beta'}]_f = \begin{cases} \psi_{\beta' \odot \beta'^{(a,\alpha)}} - \psi_{\beta'^{(a,\alpha)} \odot \beta'} & \text{si } \beta'^{(a,\alpha)} \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que si $(a, \alpha) = (a, a)$ y a aparece en β' , se obtiene $[f_{(a,a)}, \psi_{\alpha' \odot \alpha'}] = 0$.

En el Cuadro 5.6 se resume lo anterior.

(6) Corchete entre $HH_1(A)^*$ y $Alt_A(DA)$: sean $g \in H^1(A, DA)$ y $\psi \in Alt_A(DA)$.
 Recuerdese que el corchete entre g y ψ es

$$[g, \psi] = g \circ \psi - D(\psi \circ g) - \psi \circ g,$$

con $\psi \circ g \in H^1(A, DA) \cong HH_1(A)^*$ y $g \circ \psi - D(\psi \circ g) \in \text{Hom}_{A-A}(DA, DA) \cong Z(A)$.

Se escriben los elementos de $\text{Hom}_{A-A}(DA, DA)$ de la forma

$$\phi = \sum_{u, v \in \mathcal{B}} \lambda_{u, v} (u^* \mapsto v^*)$$

donde $\lambda \in K$ y $(u^* \mapsto v^*)(w^*) = v^*$ si y solo si $w = u$.

Usando los Teoremas 5.2.1 y 5.2.3 resulta lo siguiente:

1. Sea $g = g_{a \circ b^*} - g_{b \circ a^*}$ en $HH_1(A)^*$ y considérese $g_{a \circ b^*}$, entonces

$$g_{a \circ b^*}(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo que los sumandos que involucran a $g_{a \circ b^*}$ calculado en el sumando $(u^* \mapsto v)$ de ψ son:

$$(g_{a \circ b^*} \circ (u^* \mapsto v))(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = u \text{ y } v = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((u^* \mapsto v) \circ g_{a \circ b^*})(\gamma) = \begin{cases} v & \text{si } \gamma = a \text{ y } b = u, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((u^* \mapsto v) \circ g_{a \circ b^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = v \text{ y } b = u, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \psi_{\alpha' \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'}$ resulta:

$$(g_{a \circ b^*} \circ \psi_{\alpha' \circ \beta'})(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = \alpha' \text{ y } \beta' = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$(\psi_{\alpha' \circ \beta'} \circ g_{a \circ b^*})(\gamma) = \begin{cases} \beta' & \text{si } \gamma = a \text{ y } \alpha' = b, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D(\psi_{\alpha' \circ \beta'} \circ g_{a \circ b^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \beta' = \gamma \text{ y } \alpha' = b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}_{a \odot b^*}, \overline{\psi_{\alpha' \odot \beta'}} - \overline{\psi_{\beta' \odot \alpha'}}]_{\mathfrak{g}} &= \begin{cases} (b^* \mapsto b^*) - (a^* \mapsto a^*) - (a, a) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' = b, \\ (\alpha'^* \mapsto b^*) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' \neq b, \\ -(a, \beta') - (\beta'^* \mapsto a^*) & \text{si } \beta' \neq a \text{ y } \alpha' = b, \\ -(b^* \mapsto b^*) + (a^* \mapsto a^*) + (a, a) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' = a, \\ -(\beta'^* \mapsto b^*) & \text{si } \beta' \neq b \text{ y } \alpha' = a, \\ (a, \alpha') + (\alpha'^* \mapsto a^*) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' \neq a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -(a, a) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' = b, \\ -(a, \beta') & \text{si } \beta' \neq a \text{ y } \alpha' = b, \\ (a, a) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' = a, \\ (a, \alpha') & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' \neq a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$[a \odot b^* - b \odot a^*, \overline{\psi_{\alpha' \odot \beta'}} - \overline{\psi_{\beta' \odot \alpha'}}] = \begin{cases} -(a, a) - (b, b) & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' = b, \\ -(b, \alpha') & \text{si } \beta' = a \text{ y } \alpha' \neq b, \\ -(a, \beta') & \text{si } \beta' \neq a \text{ y } \alpha' = b, \\ (a, a) + (b, b) & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' = a, \\ (b, \beta') & \text{si } \beta' \neq b \text{ y } \alpha' = a, \\ (a, \alpha') & \text{si } \beta' = b \text{ y } \alpha' \neq a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}}$ entonces

$$(\mathfrak{g}_{a \odot b^*} \circ \overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}})(\gamma^*) = \begin{cases} b^* & \text{si } \gamma = \beta' = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$(\overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}} \circ \mathfrak{g}_{a \odot b^*})(\gamma) = \begin{cases} b & \text{si } \gamma = a \text{ y } b = \beta' \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D(\overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}} \circ \mathfrak{g}_{a \odot b^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = b = \beta' \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
[a \odot b^*, \overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}}]_{\mathfrak{g}} &= \begin{cases} (\beta'^* \mapsto b^*) & \text{si } \beta' = a, \\ -(b^* \mapsto a^*) - (a, b) & \text{si } \beta' = b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -(a, b) & \text{si } \beta' = b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}$$

y así,

$$[a \odot b^* - b \odot a^*, \overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}}] = \begin{cases} -(a, b) & \text{si } \beta' = b, \\ (b, a) & \text{si } \beta' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \overline{\psi_{e_j \odot \beta}}$ con $\beta = a_n \dots a_1$, entonces $[g_{a \odot b^*}, \psi]_g = 0$.

En efecto, para que $g_{a \odot b^*} \circ ((a_n \dots a_{k+1})^* \mapsto a_k \dots a_1)$ sea no nulo, se debe tener $long(a_k \dots a_1) = 1$ y $a_1 = a$, pero por ser $e_j \odot \beta$ limpio $a_1 \neq a$; de forma similar se obtiene que $a_l \neq b$ y por lo tanto $((a_n \dots a_{k+1})^* \mapsto a_k \dots a_1) \circ g_{(a \odot b^*)} = 0$. Por otro lado, $g_{(a \odot b^*)} \circ ((a_k \dots a_1)^* \mapsto a_n \dots a_{k+1}) = 0 = ((a_k \dots a_1)^* \mapsto a_n \dots a_{k+1}) \circ g_{(a \odot b^*)}$ por el mismo argumento. En conclusión

$$[a \odot b^* - b \odot a^*, \overline{\psi_{e_j \odot \beta}}] = 0.$$

2. Sean a un bucle y $g = g_{a \odot e_i^*}$, entonces

$$g_{a \odot e_i^*}(\gamma^*) = \begin{cases} e_i^* & \text{si } \gamma = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo que cada uno de los sumandos del corchete calculado en el sumando $(u^* \mapsto v)$ de ψ es:

$$(g_{a \odot e_i^*} \circ (u^* \mapsto v))(\gamma^*) = \begin{cases} e_i^* & \text{si } \gamma = u \text{ y } v = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma) = \begin{cases} v & \text{si } \gamma = a \text{ y } u = e_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = v \text{ y } u = e_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si $\psi = \overline{\psi_{\alpha' \odot \beta'}} - \overline{\psi_{\beta' \odot \alpha'}}$, entonces

$$\begin{aligned} [g_{a \odot e_i^*}, \overline{\psi_{\alpha' \odot \beta'}} - \overline{\psi_{\beta' \odot \alpha'}}] &= \begin{cases} (\alpha'^* \mapsto e_i^*) & \text{si } \beta' = a, \\ -(\beta'^* \mapsto e_i^*) & \text{si } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (e_i, \alpha') & \text{si } \beta' = a, \\ -(e_i, \beta') & \text{si } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $\psi = \overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}}$ entonces,

$$\begin{aligned} [g_{a \odot e_i^*}, \overline{\psi_{\beta' \odot \beta'}}] &= \begin{cases} (\beta'^* \mapsto e_i^*) & \text{si } \beta' = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (e_i, a) & \text{si } \beta' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $\psi = \overline{\psi_{e_j \odot \beta}}$ con $\beta = a_n \dots a_1$, puesto que $\overline{e_j \odot \beta}$ es limpio con $long(\beta) \geq 1$, los únicos sumandos no nulos son:

$$(g_{a \odot e_i^*} \circ (e_j^* \mapsto \beta))(\gamma^*) = \begin{cases} e_i^* & \text{si } \gamma = e_j = e_i \text{ y } \beta = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((e_j^* \mapsto \beta) \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma) = \begin{cases} \beta & \text{si } \gamma = a = \beta \text{ y } e_j = e_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((e_j^* \mapsto \beta) \circ g_{a \odot e_i^*})(\gamma^*) = \begin{cases} \beta^* & \text{si } \gamma = \beta = a \text{ y } e_j = e_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De donde

$$\begin{aligned} [g_{a \odot e_i^*}, \psi_{\overline{e_j \odot \beta}}] &= \begin{cases} (e_i^* \mapsto e_i^*) - (a^* \mapsto \beta^*) - (a, \beta) & \text{si } a = \beta \text{ y } e_i = e_j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (e_i, e_i) - (a, a) & \text{si } a = \beta \text{ y } e_i = e_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que en el caso no nulo $Q_1 = \{a\}$ con a un bucle.

3. Sean a un bucle y $\text{car}(K) = 2$. Si $g = g_{a \odot a^*}$ entonces

$$g_{a \odot a^*}(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo que cada uno de los sumandos del corchete calculado en el sumando $(u^* \mapsto v)$ de ψ es:

$$(g_{a \odot a^*} \circ (u^* \mapsto v))(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = u \text{ y } v = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot a^*})(\gamma) = \begin{cases} v & \text{si } \gamma = a = u, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((u^* \mapsto v) \circ g_{a \odot a^*})(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = v \text{ y } a = u, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con lo anterior se obtiene:

▪ Si $\psi = \psi_{\overline{\alpha' \odot \beta'}} - \psi_{\overline{\beta' \odot \alpha'}}$, entonces

$$\begin{aligned} [g_{a \odot a^*}, \psi_{\overline{\alpha' \odot \beta'}} - \psi_{\overline{\beta' \odot \alpha'}}] &= \begin{cases} (\alpha'^* \mapsto a^*) + (\alpha'^* \mapsto a^*) + (a, \alpha') & \text{si } \beta' = a, \\ -(\beta'^* \mapsto a^*) - (\beta'^* \mapsto a^*) - (a, \beta') & \text{si } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (a, \alpha') & \text{si } \beta' = a, \\ -(a, \beta') & \text{si } \alpha' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

▪ Si $\psi = \psi_{\overline{\beta' \odot \beta'}}$ entonces,

$$\begin{aligned} [g_{a \odot a^*}, \psi_{\overline{\beta' \odot \beta'}}] &= \begin{cases} (\beta'^* \mapsto a^*) - (\beta'^* \mapsto a^*) - (a, \beta') & \text{si } \beta' = a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (a, a) & \text{si } \beta' = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

▪ Si $\psi = \psi_{\overline{e_j \odot \beta}}$ con $\beta = a_n \dots a_1$ y $\overline{e_j \odot \beta}$ es limpio con $\text{long}(\beta) \geq 1$, entonces los únicos sumandos no nulos son:

$$(g_{a \odot a^*} \circ (e_j^* \mapsto \beta))(\gamma^*) = \begin{cases} a^* & \text{si } \gamma = e_j \text{ y } \beta = a \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$((\beta^* \mapsto e_j) \circ g_{a \circ a^*})(\gamma) = \begin{cases} e_j & \text{si } \gamma = a = \beta \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D((\beta^* \mapsto e_j) \circ g_{a \circ a^*})(\gamma^*) = \begin{cases} \beta^* & \text{si } \gamma = e_j \text{ y } \beta = a \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} [g_{a \circ a^*}, \psi_{e_j \circ \beta}] &= \begin{cases} (e_j^* \mapsto a^*) - (e_j^* \mapsto \beta^*) - (a, e_j) & \text{si } a = \beta \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (a, e_j) & \text{si } a = \beta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que en el caso no nulo Q está dado por un un bucle.

[-, -]		$Alt_A(DA)$		
		$\psi_{\alpha' \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'}$	$\psi_{\beta' \circ \beta'}$ si $\text{car}(K) = 2$	$\psi_{e_j \circ \beta}$ si $\text{car}(K) = 2$
$Z(A)$	(e_i, α)	0	0	$\psi_{\alpha \circ \alpha}$ si $\alpha = \beta$, 0 otro caso.
	$\sum_{e \in Q_0} (e, e)$	$-\psi_{\alpha' \circ \beta'} + \psi_{\beta' \circ \alpha'}$	$\psi_{\beta' \circ \beta'}$	$\psi_{e_j \circ \beta}$
	(a, α) atajo	$\frac{\psi_{\alpha' \circ \beta'(a, \alpha)} - \psi_{\beta'(a, \alpha) \circ \alpha'}}{\psi_{\alpha'(a, \alpha) \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'(a, \alpha)}}$ si $\beta^{(a, \alpha)} \neq 0$, 0 si $\alpha^{(a, \alpha)} \neq 0$, en otro caso.	$\frac{\psi_{\beta' \circ \beta'(a, \alpha)} - \psi_{\beta'(a, \alpha) \circ \beta'}}{0}$ si $\beta^{(a, \alpha)} \neq 0$, 0 en otro caso.	0
	(a, α) desviación tipo 2	$\frac{\psi_{\alpha' \circ \beta'(a, \alpha)} - \psi_{\beta'(a, \alpha) \circ \alpha'}}{\psi_{\alpha'(a, \alpha) \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'(a, \alpha)}}$ si $\beta^{(a, \alpha)} \neq 0$, 0 si $\alpha^{(a, \alpha)} \neq 0$, en otro caso.	$\frac{\psi_{\beta' \circ \beta'(a, \alpha)} - \psi_{\beta'(a, \alpha) \circ \beta'}}{0}$ si $\beta^{(a, \alpha)} \neq 0$, 0 en otro caso.	0
$HH^1(A)$	x	$\frac{\psi_{\alpha' \circ \beta'^x} - \psi_{\beta'^x \circ \alpha'}}{\psi_{\alpha'^x \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'^x}}$ si $\beta'^x \neq 0$, 0 si $\alpha'^x \neq 0$, en otro caso.	$\frac{\psi_{\beta' \circ \beta'^x} - \psi_{\beta'^x \circ \beta'}}{0}$ si $\beta'^x \neq 0$, 0 en otro caso.	0
	(a, a) a en un ciclo simple minimal	$\frac{\psi_{\alpha' \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'}}{0}$ si $\beta^{(a, a)} \neq 0$ o $\alpha^{(a, a)} \neq 0$, en otro caso.	0	$\frac{\psi_{e_j \circ \beta}}{0}$ si a es una flecha de β , 0 otro caso,
	(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	$\frac{\psi_{\alpha' \circ \beta'(a, e_i)} - \psi_{\beta'(a, e_i) \circ \alpha'}}{\psi_{\alpha'(a, e_i) \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'(a, e_i)}}$ si $\beta^{(a, e_i)} \neq 0$, 0 si $\alpha^{(a, e_i)} \neq 0$, en otro caso.	$\frac{\psi_{e_i \circ a}}{0}$ si $a = \beta'$ y $Q_1 = \{a\}$, 0 otro caso.	0
	$a \circ b^* - b \circ a^*$	$-(a, a) - (b, b)$ si $\beta' = a$ y $\alpha' = b$, $-(b, \alpha')$ si $\beta' = a$ y $\alpha' \neq b$, $-(a, \beta')$ si $\beta' \neq a$ y $\alpha' = b$, $(a, a) + (b, b)$ si $\beta' = b$ y $\alpha' = a$, (b, β') si $\beta' \neq b$ y $\alpha' = a$, (a, α') si $\beta' = b$ y $\alpha' \neq a$, 0 en otro caso.	(a, b) si $\beta' = b$, (b, a) si $\beta' = a$, 0 en otro caso.	0
$HH_1(A)^*$	$a \circ e_i^*$	(e_i, α') si $\beta' = a$, $-(e_i, \beta')$ si $\alpha' = a$, 0 en otro caso.	(e_i, a) si $a = \beta'$, 0 otro caso.	$(e_i, e_i) + (a, a)$ si $a = \alpha'$ ($\& j = i$), 0 otro caso.
	$a \circ a^*$ si $\text{car}(K) = 2$	(β', α') si $\beta' = a$, (α', β') si $\alpha' = a$, 0 en otro caso.	(a, a) si $a = \beta'$, 0 otro caso.	(a, e_j) si $a = \beta$, 0 otro caso.

Cuadro 5.3. $[-, Alt_A(DA)]$.

5.4. HH^1 de álgebras de configuración de Brauer con multiplicidad 1

Recuérdese que un álgebra casi gentil $A = KQ/I$ es un álgebra monomial cuadrática con la condición de que para cada $a \in Q_1$ existe a lo sumo un elemento $b \in Q_1$ tal que $ba \notin I$ y existe a lo sumo un elemento $c \in Q_1$ tal que $ac \notin I$. En esta sección se da una descripción de la base de la cohomología de Hochschild de la extensión trivial de un álgebra casi gentil y del primer espacio de cohomología de Hochschild de un álgebra casi gentil.

5.4.1. $HH^1(A)$ y $Alt_A(DA)$ de álgebras casi gentiles.

Como consecuencia del Teorema 5.1.18 que da una base para el primer espacio de cohomología de Hochschild de álgebras monomiales cuadráticas se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.4.1. *Sea $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil. El conjunto formado por las clases de los siguientes elementos es una base de $HH^1(A)$:*

- (a, α) donde a es un atajo de α y $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$,
- (a, α) donde (a, α) es una desviación de tipo 2 y $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$,
- (a, a) por cada ciclo simple minimal en Q donde a es una flecha del complemento de un árbol maximal de Q ,
- si $\text{car}(K) = 2$, adicional a los elementos anteriores, las parejas $(a, s(a))$ siempre que a sea un bucle que aparece solamente en la relación a^2 .

Demostración. Lo único que se debe mostrar es que no hay elementos en la base de $HH^1(A)$ de la forma x_i como en la Proposición 5.1.10. Para esto, supóngase que ξ es un ciclo en \mathcal{B} con $V_\xi \neq \emptyset$. Si $a \in V_\xi^s$, entonces $V_\xi^s = \{a\}$ por ser A casi gentil; de igual forma si $b \in V_\xi^t$, entonces $V_\xi^t = \{b\}$. Esto muestra que el grafo asociado G_ξ tiene solo una componente conexa, por lo que no hay elementos del tipo mencionado en la base de $HH^1(A)$. \square

Observación 5.4.2. *Nótese que si a es un bucle que aparece solamente en la relación a^2 , entonces $\text{val}(s(a)) \leq 4$.*

Por otro lado, la descripción de los elementos de la base de $HH^0(A)$ y $HH_1(A)^*$ no cambia para álgebras casi gentiles, mientras que por la configuración de las álgebras casi gentiles cambian algunos detalles en la base del espacio $Alt_A(DA)$.

Corolario 5.4.3. *Sea $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil con $Q \neq \bullet$.*

1. *Sea $\alpha \odot \beta$ un par cíclico en $\mathcal{B} \odot \mathcal{B}$ con $\alpha \neq \beta$ y tal que $a\alpha, a\beta, \beta a, \alpha a \in I$ para cada flecha a . Si $\text{car}(K) \neq 2$ entonces $\psi_{\alpha \odot \beta} - \psi_{\beta \odot \alpha}$ es un elemento de la base de $Alt_A(DA)$ y todos los elementos de la base de $Alt_A(DA)$ son de esa forma.*
2. *Si $\text{car}(K) = 2$, sean γ y γ' ciclos no triviales en \mathcal{B} con $\text{val}_Q(s(\gamma)) = 2$ y $V_{\gamma'} = \emptyset$. El conjunto de todos los morfismos $\psi_{\gamma' \odot \gamma'}$, $\psi_{e \odot \gamma}$ y $\psi_{\alpha \odot \beta} + \psi_{\beta \odot \alpha}$ con α y β como en el ítem 1 forman una base de $Alt_A(DA)$.*

Si $Q = \bullet$ entonces $Alt_A(DA) = \{\psi_{e \odot e}\}$.

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 5.2.3 y del hecho de que si $\gamma = a_n \dots a_1$ con $a_i \in Q_1$ para cada $1 \leq i \leq n$, entonces

- $ba_i = 0$ para cada $b \in Q_1$ con $b \neq a_{i+1}$ y cada $1 \leq i \leq n-1$,
- $a_{i+1}b = 0$ para cada $b \in Q_1$ con $b \neq a_i$ y cada $1 \leq i \leq n-1$.

\square

5.4.2. Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(A)$ de álgebras casi gentiles.

Recuérdese que si $(a, \alpha), (a', \alpha')$ están en $Q_1 || \mathcal{B}$, el corchete en $HH^1(A)$ está dado por

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = (a', \alpha^{(a, \alpha)}) - (a, \alpha^{(a', \alpha')}).$$

Usando el Corolario 5.4.1 se obtiene lo siguiente.

(1) Sea (a, α) un atajo con $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$.

- Si (a', α') es un atajo con $\gamma^{(a', \alpha')} = 0$ para cada $\gamma \in R$, entonces

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = \begin{cases} (a', \alpha) & \text{si } a = \alpha' \text{ y } a' \neq \alpha, \\ -(a, \alpha') & \text{si } a' = \alpha \text{ y } a \neq \alpha', \\ 2(a, a) & \text{si } a = \alpha' \text{ y } a' = \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En efecto, sea a una flecha en α' , entonces $\alpha^{(a, \alpha)} = 0$ siempre que $\alpha' \neq a$ por ser el álgebra casi gentil. Así, $\alpha^{(a, \alpha)} = \alpha$ siempre que $\alpha' = a$, lo que implica $(a', \alpha^{(a, \alpha)}) = (a', \alpha)$. Este argumento prueba las dos primeras igualdades. Para la tercera, nótese que es como el caso del álgebra de Kronecker, aunque A puede no ser el álgebra de Kronecker.

- Sean (a', α') una desviación de tipo 2 con $\gamma^{(a', \alpha')} = 0$ para todo $\gamma \in R$ y $\alpha' = \delta_2 a' \delta_1$ con δ_1, δ_2 ciclos no triviales, entonces

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = \begin{cases} -(a, \alpha') & \text{si } a' = \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supóngase que a es una flecha de α' , entonces a o bien es una flecha de δ_1 , o bien $a = a'$, o bien es una flecha de δ_2 . Entonces, en cualquiera de los casos $\alpha^{(a, \alpha)} = 0$ por ser A un álgebra casi gentil. Por otro lado, supóngase que a' es una flecha del camino α , entonces $\alpha^{(a', \alpha')} = 0$ siempre que $\alpha \neq a'$ por la configuración del carcaj, luego $\alpha^{(a', \alpha')} = \alpha'$ si y solo si $a' = \alpha$. Esto último termina la prueba de la igualdad.

- Sea (a', α') dado por un ciclo simple minimal, entonces

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = \begin{cases} (a, \alpha) & \text{si } a = a', \\ -(a, \alpha) & \text{si } a' \text{ es una flecha en } \beta, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si a' es un bucle que solo aparece en la relación $(a')^2$ y $e = s(a)$, entonces

$$[(a, \alpha), (a', s(a))] = 0.$$

En efecto, supóngase que a' aparece en α . Si $s(\alpha) \neq e$ y $t(\alpha) \neq e$, entonces, por definición de álgebra casi gentil $\alpha^{(a', e)} = 0$. Ahora, si $s(\alpha) = e$ o $t(\alpha) = e$, entonces a' aparece en más de una relación por ser A un álgebra casi gentil.

(2) Sea (a, α) una desviación de tipo 2 con $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$.

- Si (a', α') es una desviación de tipo 2 con $\gamma^{(a', \alpha')} = 0$ para todo $\gamma \in R$, entonces

$$[(a, \alpha), (a', \alpha')] = 0.$$

Si a es una flecha de α' , entonces $\alpha^{(a, \alpha)} = 0$ por la configuración del álgebra casi gentil. De igual forma se obtiene $\alpha^{(a', \alpha')} = 0$.

- Sea (a', a') dado por un ciclo simple minimal, entonces

$$[(a, \alpha), (a', a')] = \begin{cases} -(a, \alpha) & \text{si } a \neq a' \text{ y } a' \text{ es una flecha en } \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Si a' es un bucle que solo aparece en la relación $(a')^2$ y $e = s(a)$, entonces

$$[(a, \alpha), (a', s(a))] = 0.$$

Con el mismo argumento utilizado para atajos se obtiene lo deseado.

(3) Sea (a, a) un elemento diagonal dado por un ciclo simple minimal.

- Si (a', a') está determinado por un ciclo simple minimal, entonces

$$[(a, a), (a', a')] = 0.$$

- Si a' es un bucle que solo aparece en la relación $(a')^2$ y $e = s(a)$, entonces

$$[(a, a), (a', e_j)] = \begin{cases} -(a', e_j) & \text{si } a = a', \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(4) Si a y a' son bucles que solo aparece en las relaciones a^2 y $(a')^2$, entonces

$$[(a, s(a)), (a', s(a'))] = 0.$$

Lo anterior se resume en la siguiente tabla.

[-, -]		$HH^1(A)$			
		(a', e_j) si $\text{car}(K) = 2$	(a', a') , a' en un ciclo simple minimal	(a', α') , desviación tipo 2	(a', α') atajo
(a, α) atajo	0	(a, α) si $a = a'$, $-(a, \alpha)$ si a' es una flecha en β , 0 en otro caso.	$-(a, \alpha)$ si $a' = \alpha$, 0 en otro caso.	(a', α) si $a = \alpha'$ y $a' \neq \alpha$, $-(a, \alpha')$ si $a' = \alpha$ y $a \neq \alpha'$, $2(a, a)$ si $a = \alpha'$ y $a' = \alpha$, 0 en otro caso.	
$HH^1(A)$ (a, α) desviación tipo 2	0	$-(a, \alpha)$ si $a' \neq \alpha$ y a' aparece en α , 0 en otro caso.	0		
(a, a) , a en un ciclo simple minimal	$-(a, e_i)$ si $a = a'$ ($i = j$), 0 en otro caso.	0			
(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	0				

Cuadro 5.4. Corchete en $HH^1(A)$ para álgebras casi gentiles.

5.4.3. Estructura de álgebra de Lie de $HH^1(TA)$ de la extensión trivial de un álgebra casi gentil.

Por las condiciones sobre las álgebras casi gentiles, alguno de los corchetes se pueden escribir de una forma mas simplificada, los corchetes que no cambian son $[Z(A), HH_1(A)^*]$, $[HH^1(A), HH_1(A)^*]$, $[Z(A), Alt_A(DA)]$, $[HH_1(A)^*, Alt_A(DA)]$, mientras que los corchetes $[Z(A), HH^1(A)]$ y $[HH^1(A), Alt_A(DA)]$ tienen algunas modificaciones.

Corchete entre $Z(A)$ y $HH^1(A)$.

Usando el Cuadro 5.1, el Corolario 5.4.1 y el hecho de que para cada flecha a existe a lo sumo una flecha b tal que $ba \notin I$ y existe a lo sumo una flecha c tal que $ac \notin I$, se obtiene el siguiente cuadro, que es idéntico al Cuadro 3.2 para álgebras gentiles.

[-, -]		$HH^1(A)$			
		(a', e_j) si $\text{car}(K) = 2$	(a', a') a' en un ciclo simple minimal	(a', α') desviación tipo 2	(a', α') atajo
$Z(A)$	(e_i, α)	$-(e_i, \alpha^{(a', e_j)})$	$-(e_i, \alpha^{(a', a')})$	0	0
	$\sum_{e \in Q_0}(e, e)$	0	0	0	0

Cuadro 5.5. Corchete entre $Z(A)$ y $HH^1(A)$ de álgebras casi gentiles.

Corchete entre $HH^1(A)$ y $Alt_A(DA)$.

De forma similar a lo anterior, usando el Cuadro 5.6 y el Corolario 5.4.3, y por la condición sobre el álgebra casi gentil, se obtiene el siguiente cuadro.

[-, -]		$Alt_A(DA)$		
		$\psi_{\alpha' \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'}$	$\psi_{\beta' \circ \alpha}$ si $\text{car}(K) = 2$	$\psi_{e_j \circ \beta}$ si $\text{car}(K) = 2$
$HH^1(A)$	(a, α) atajo	$\psi_{\alpha' \circ \alpha} - \psi_{\alpha \circ \alpha'}$ si $\beta' = a,$ $\psi_{\alpha \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha}$ si $\alpha' = a,$ 0 en otro caso.	$\psi_{\beta' \circ \alpha} - \psi_{\alpha \circ \beta'}$ si $\beta' = a,$ 0 en otro caso.	0
	(a, α) desviación tipo 2	$\psi_{\alpha' \circ \alpha} - \psi_{\alpha \circ \alpha'}$ si $\beta' = a,$ $\psi_{\alpha \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha}$ si $\alpha' = a,$ 0 en otro caso.	0	0
	(a, a) a en un ciclo simple minimal	$\psi_{\alpha' \circ \beta'} - \psi_{\beta' \circ \alpha'}$ si $\beta^{(a, a)} \neq 0$ o $\alpha^{(a, a)} \neq 0,$ 0 en otro caso.	0	$\psi_{e_j \circ \beta}$ si a es una flecha de $\beta,$ 0 otro caso,
	(a, e_i) si $\text{car}(K) = 2$	0	$\psi_{e_i \circ \alpha}$ si $a = \beta'$ y $Q_1 = \{a\},$ 0 otro caso.	0

Cuadro 5.6. $[HH^1(A), Alt_A(DA)]$.

5.4.4. Codificación en el hipergrafo asociado

Teorema 5.4.4. Sean B un álgebra de configuración de Brauer con multiplicidad uno, $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil con base de caminos \mathcal{B} , R un conjunto minimal de relaciones que genera a I y tal que $B \cong TA$. Supóngase que $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$. Si $\text{car}(K) \neq 2$, entonces el conjunto de los siguientes elementos determinan una base de $HH^1(B)$:

1. $\sum_{e \in Q_0}(e, e)$,
2. $(s(\alpha), \alpha) \in Q_0 || \mathcal{B}$ con α un ciclo no trivial con $V_\alpha = \emptyset$,
3. $(a, \alpha) \in Q_1 || \mathcal{B}$ donde a es un atajo de α con $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$,
4. $(a, \alpha) \in Q_1 || \mathcal{B}$ una desviación tipo 2 y tal que $\gamma^{(a, \alpha)} = 0$ para cada $\gamma \in R$,
5. $(a, a) \in Q_1 || \mathcal{B}$ con a una flecha en el complemento de un árbol maximal en Q , se elige una flecha por cada ciclo simple minimal de Q .
6. $a \odot b^* - b \odot a^* \in Q_1 \odot \mathcal{B}^*$ con $ab, ba \in I$,
7. $a \odot s(a)^* \in Q_1 \odot \mathcal{B}^*$ con a un bucle,

8. $\psi_{\{\alpha, \beta\}} \in \text{Hom}_{A-A}(DA, A)$ dada por $\alpha^* \mapsto \beta$, $\beta^* \mapsto -\alpha$ si $\alpha \neq \beta$, $s(\alpha) = t(\beta)$, $s(\beta) = t(\alpha)$, y $a\alpha, a\beta, \beta a, \alpha a \in I$ para cada flecha a , y 0 en cualquier otro caso.

Si $\text{car}(K) = 2$, en adición a los elementos anteriores, los siguientes elementos completan una base de $HH^1(B)$:

9. $(a, s(a)) \in Q_1 || \mathcal{B}$ donde a es un bucle y solo aparece en la relación a^2 .
10. $a \odot a^* \in Q_1 \odot \mathcal{B}^*$ con a un bucle,
11. $\psi_{\{s(\alpha), \alpha\}}, \psi_{\{\beta, \beta\}} \in \text{Hom}_{A-A}(DA, A)$, donde α y β son ciclos no triviales con $V_\beta = \emptyset$, $\text{val}_Q(s(\alpha)) = 2$ y
- i) $\psi_{\{s(\alpha), \alpha\}}(\delta^*) = \gamma$ si $\alpha = \delta\gamma$ o $\alpha = \gamma\delta$ y cero en otro caso,
 - ii) $\psi_{\{\beta, \beta\}}(\beta^*) = \beta$ y cero en otro caso.

Además, si G_B es la realización de la configuración de Brauer correspondiente al álgebra de configuración de Brauer B dada por el hipergrafo de A , entonces las configuraciones locales en las Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 dan los elementos de la base de $HH^1(B)$ que no son diagonales.

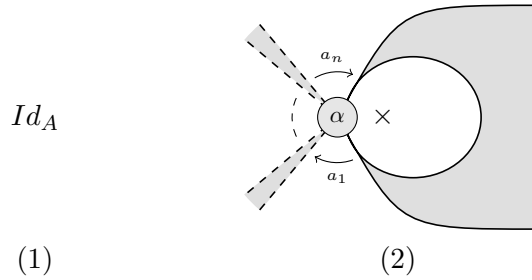


Figura 5.1. Configuración local en el hipergrafo asociado de un álgebra casi gentil A , cada uno da lugar a un elemento de la base de $Z(A)$, donde $\alpha = a_n \dots a_1$.

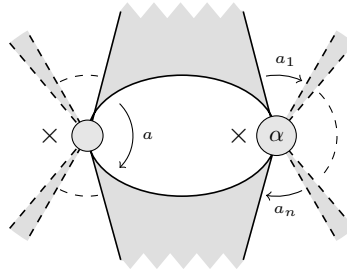


Figura 5.2. La marca \times de la parte izquierda va entre cualquiera de los polígonos, excepto dentro del ciclo. Esto corresponde a un atajo como en el Teorema 5.4.1 con $\alpha = a_n \dots a_1$ y $a_i \in Q_1$ para $1 \leq i \leq n$.

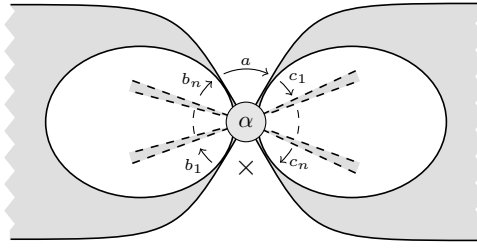


Figura 5.3. Configuración local correspondiente a una desviación $\alpha = c_n \dots c_1 a b_m \dots b_1$ tipo 2 como en el Teorema 5.4.1 y $b_i, c_j \in Q_1$ para $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

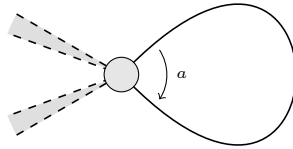


Figura 5.4. Configuración local correspondiente al bucle en el Teorema 5.4.1, aparece en la base de $HH^1(A)$ solamente si a^2 es la única relación y $\text{car}(K) = 2$.

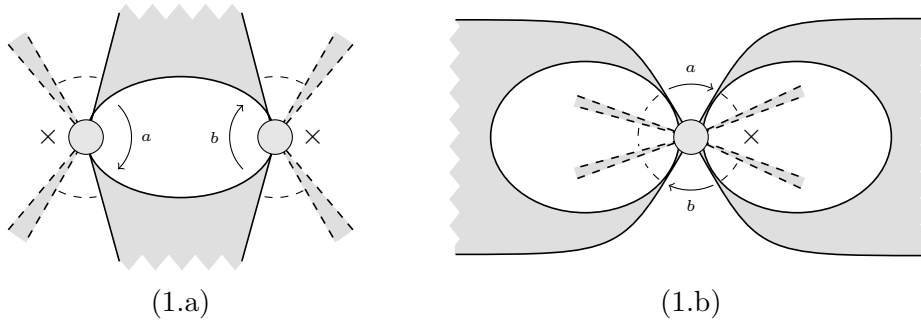


Figura 5.5. Configuraciones locales que dan lugar al elemento $a \odot b^* - b \odot a^*$ de la base de $HH_1(A)^*$ para álgebras casi gentiles.

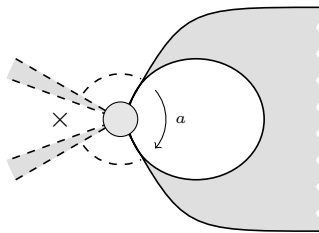


Figura 5.6. Configuración local correspondiente al bucle del Teorema 5.2.1.

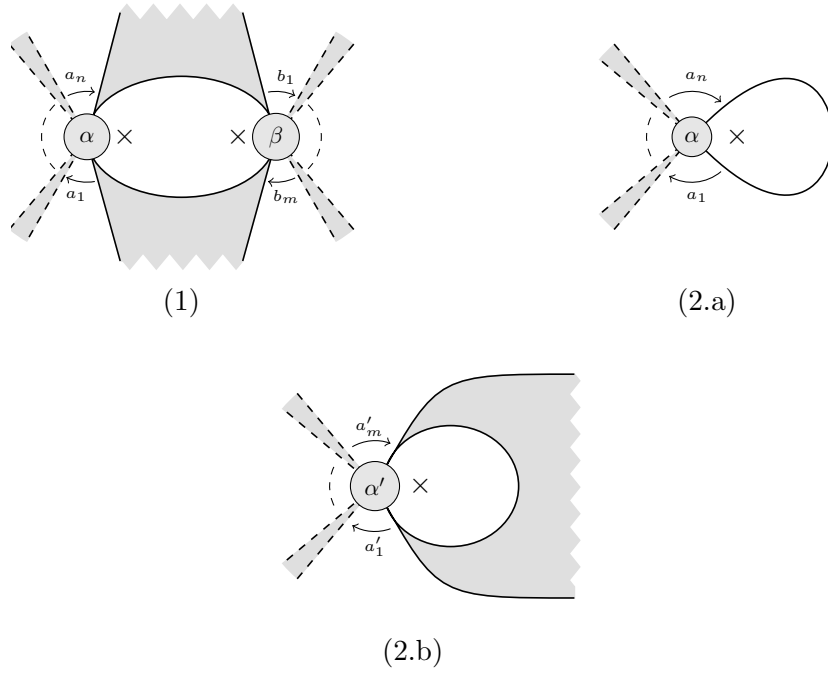


Figura 5.7. Configuraciones locales del hipergrafo asociado a A que aportan un elemento a la base de $\text{Alt}_A(DA)$. En (1), $\alpha = a_n \dots a_1$ y $\beta = b_m \dots b_1$. Las configuraciones (2.a) y (2.b) aparecen en la base de $\text{Alt}_A(DA)$ si $\text{car}(K) = 2$, donde $\alpha = a_n \dots a_1$ y $\alpha' = a'_m \dots a'_1$.

Un resultado de [16] es que dada un álgebra de configuración de Brauer B con multiplicidad uno, existe un álgebra casi gentil A tal que $B = TA$ y A no es única. De forma similar a las extensiones triviales de álgebras gentiles, se prueba que siempre se puede elegir un álgebra casi gentil A tal que $\text{Alt}_A(DA) = 0$. La prueba es idéntica que para álgebras gentiles.

Corolario 5.4.5. *Sea $A = KQ/I$ un álgebra casi gentil. Existe un álgebra casi gentil A' tal que $TA \cong TA'$ y $\text{Alt}_{A'}(DA') = 0$.*

Bibliografía

- [1] Claire Amiot. The derived category of surface algebras: the case of the torus with one boundary component. *Algebras and Representation Theory*, 19(5):1059–1080, 2016.
- [2] Claire Amiot and Yvonne Grimeland. Derived invariants for surface algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(9):3133–3155, 2016.
- [3] Ibrahim Assem, Thomas Brüstle, Gabrielle Charbonneau-Jodoin, and Pierre-Guy Plamondon. Gentle algebras arising from surface triangulations. *Algebra Number Theory*, 4(2):201–229, 2010.
- [4] Ibrahim Assem and Dieter Happel. Generalized tilted algebras of type A_n . *Communications in Algebra*, 9(20):2101–2125, 1981.
- [5] Ibrahim Assem and Dieter Happel. Erratum: “Generalized tilted algebras of type A_n ” [comm. algebra 9 (1981), no. 20, 2101–2125.]. *Communications in Algebra*, 10(13):1475, 1982.
- [6] Ibrahim Assem and Andrzej Skowronski. Iterated tilted algebras of type A_n . *Mathematische Zeitschrift*, 195(2):269–290, 1987.
- [7] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski, and Daniel Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*, volume 65. Cambridge University Press, 2006.
- [8] Michael J. Bardzell. The alternating syzygy behavior of monomial algebras. *Journal of Algebra*, 188(1):69–89, 1997.
- [9] Henry Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*, volume 19. Princeton University Press, 1999.
- [10] Cristian Chaparro, Sibylle Schroll, and Andrea Solotar. On the Lie algebra structure of the first Hochschild cohomology of gentle algebras and Brauer graph algebras. *Journal of Algebra*, 2020.
- [11] Claude Cibils, Eduardo Marcos, María Julia Redondo, and Andrea Solotar. Cohomology of split algebras and of trivial extensions. *Glasgow Mathematical Journal*, 45(1):21–40, 2003.
- [12] Claude Cibils, María Julia Redondo, and Manuel Saorín. The first cohomology group of the trivial extension of a monomial algebra. *Journal of Algebra and its Applications*, 3(2):143–159, 2004.

- [13] Lucas David-Roesler and Ralf Schiffler. Algebras from surfaces without punctures. *Journal of Algebra*, 350:218–244, 2012.
- [14] Peter W. Donovan and Mary R. Freislich. The indecomposable modular representations of certain groups with dihedral Sylow subgroup. *Mathematische Annalen*, 238(3):207–216, 1978.
- [15] Murray Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. *Annals of Mathematics. (2)*, 78:267–288, 1963.
- [16] Edwar L. Green and Sibylle Schroll. Almost gentle algebras and their trivial extensions. *arXiv e-prints: 1603.03587*, March 2016.
- [17] Edward L. Green and Sibylle Schroll. Multiserial and special multiserial algebras and their representations. *Advances in Mathematics*, 302:1111–1136, 2016.
- [18] Edward L. Green and Sibylle Schroll. Brauer configuration algebras: A generalization of Brauer graph algebras. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 141(6):539 – 572, 2017.
- [19] Fabian Haiden, Ludmil Katzarkov, and Maxim Kontsevich. Flat surfaces and stability structures. *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques*, 126:247–318, 2017.
- [20] Michiel Hazewinkel and Murray Gerstenhaber. *Deformation theory of algebras and structures and applications*, volume 247. Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] Gerald J. Janusz. Indecomposable modules for finite groups. *Annals of Mathematics*, pages 209–241, 1969.
- [22] Bernhard Keller. Hochschild cohomology and derived Picard groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 190(1-3):177–196, 2004.
- [23] Daniel Labardini-Fragoso. Quivers with potentials associated to triangulated surfaces. *Proceedings of the London Mathematical Society. (3)*, 98(3):797–839, 2009.
- [24] François Labourie. *Lectures on representations of surface groups*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013.
- [25] Sefi Ladkani. On the Hochschild cohomology of gentle algebras. *Private Communication*, 2016.
- [26] Yanki Lekili and Alexander Polishchuk. Derived equivalences of gentle algebras via Fukaya categories. *arXiv e-prints: 1801.06370*, January 2018.
- [27] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301. Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] Robert J. Marsh and Sibylle Schroll. The geometry of Brauer graph algebras and cluster mutations. *Journal of Algebra*, 419:141 – 166, 2014.
- [29] William S. Massey. Book Review: Homology theory. An introduction to algebraic topology. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(3):333–335, 1964.

- [30] Cris Negron and Sarah Witherspoon. An alternate approach to the Lie bracket on Hochschild cohomology. *Homology Homotopy and Applications*, 18(1):265–285, 2016.
- [31] Sebastian Opper, Plamondon Pierre-Guy, and Sibylle Schroll. A geometric model for the derived category of gentle algebras. *arXiv: 1801.09659*, January 2018.
- [32] Maria Julia Redondo and Lucrecia Román. Comparison morphisms between two projective resolutions of monomial algebras. *arXiv preprint arXiv:1612.02308*, 2016.
- [33] Jeremy Rickard. Derived equivalences as derived functors. *Journal of the London Mathematical Society. (2)*, 43(1):37–48, 1991.
- [34] Klaus W. Roggenkamp. Biserial algebras and graphs. *Algebras and modules*, pages 481–496, 1998.
- [35] Sibylle Schroll. Trivial extensions of gentle algebras and Brauer graph algebras. *Journal of Algebra*, 444:183–200, 2015.
- [36] Sibylle Schroll. Brauer graph algebras. *Homological Methods, Representation Theory, and Cluster Algebras, CRM Short Courses, Springer 2018*, 2018.
- [37] Emil Sköldberg. A contracting homotopy for Bardzell’s resolution. In *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, pages 111–117. JSTOR, 2008.
- [38] Claudia Strametz. *Structure d’algèbre de Lie de la cohomologie de Hochschild en degré un et groupe d’automorphismes extérieurs*. Thèses, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, June 2002.
- [39] Claudia Strametz. The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra. *Journal of Algebra and its Applications*, 5(3):245–270, 2006.
- [40] Charles Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xiv+450 pp.