



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Modelos para juegos evolutivos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en
el área Ciencias Matemáticas

Lic. Mauro Rodriguez Cartabia

Director de tesis: Dr. Juan Pablo Pinasco

Buenos Aires, junio de 2019

Fecha de defensa: 15 de julio de 2019

Lugar de trabajo: Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.

Modelos para juegos evolutivos

En esta tesis modelamos fenómenos inspirados en la teoría de juegos usando ecuaciones diferenciales. Para esto trabajamos con medidas de probabilidad que describen el estado de una población y analizamos su evolución.

En la primera parte usamos un modelo basado en agentes para estudiar el efecto del proceso de aprendizaje de las reglas de un juego en el problema de la distribución de riqueza. Aquí los agentes se enfrentan en un juego de suma cero e intercambian dinero según el resultado y en paralelo modifican su estrategia. Demostramos que la estrategia promedio satisface una ecuación similar a la ecuación del replicador. Además mostramos que, cuando el juego no tiene un equilibrio en estrategias puras, la distribución estacionaria de la riqueza se aproxima a una distribución Gama.

En la segunda parte estudiamos teóricamente el problema de la evolución de las estrategias utilizando ideas de la física estadística. Planteamos una ecuación de tipo Boltzmann para modelar la distribución de agentes en el espacio de estrategias cuando el número de agentes tiende a infinito. Demostramos existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación de Boltzmann y luego demostramos la existencia de soluciones para las ecuaciones límite que se obtienen cuando el efecto de la interacción tiende a cero. Estudiamos la relación entre los estados estacionarios, los equilibrios del juego original y la convergencia o no a estos.

En la última parte de esta tesis planteamos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo donde cada una describe el estado de un agente. Es el paso inicial para modificar la evolución anterior, suponiendo ahora que un agente adapta su estrategia según la historia de interacciones previas. Cuando el número de agentes tiende a infinito obtenemos una ecuación de transporte no lineal para una función con valor en las medidas. Demostramos existencia, unicidad y continuidad respecto del dato inicial y analizamos diferentes situaciones según el tipo de retardo impuesto.

Palabras clave: modelos basados en agentes, teoría evolutiva de juegos, ecuación de Boltzmann, campo medio, retardo.

Kinetic models in evolutionary game theory

In this thesis we study differential equations related to game theory models. We work with measured values functions describing the distribution of a population of players in the space of strategies and we analyze its evolution.

In the first part we consider an agent based model in order to study the wealth distribution problem where the exchange is determined by the result of a symmetric zero sum game. Simultaneously, the agents are learning the optimal way to play, and we derive the associate equations of the evolutive process. We prove that the mean strategy of the population satisfies an equation close to the replicator equation, and we show that the stationary wealth distribution is close to a Gamma distribution whenever the game has no pure strategies equilibria.

In the second part we derive a Boltzmann type equation to model the distribution of agents in the space of strategies, in the limit of infinitely many players, by using some ideas from statistical mechanics. We prove the existence, uniqueness and regularity of the solutions to the Boltzmann equations. We study the Fokker-Planck equations obtained as the grazing limit of the Boltzmann equations when the intensity of the interaction goes to zero. Also, we study the relationship between the stationary states and the equilibria of the original game.

In the last part we study a delayed system of ordinary differential equations, each one modeling the state of an agent. In the limit of infinitely many agents, we obtain an abstract equation and we prove existence and uniqueness of solutions, and continuous dependence of the solutions on the initial data.

Keywords: agent based model, evolutionary game theory, Boltzmann equation, mean field theory, delay.

Agradecimientos

A Juan y Nico por este trabajo. A Cris, Fran, Nahuel, Nico y Pablo por toda la ayuda. A la 2038 y #Mesaza por todos estos años. Y todas las personas por las cuales existe el maravilloso DM.

A Lu, Pablo, Rafa, Vale y Yami por estar siempre.

A mi familia por estar desde siempre.

A la UBA, al Conicet y al pueblo argentino por este doctorado.

Nota: esta tesis está escrita en plena discusión y búsqueda de un lenguaje inclusivo y antipatriarcal. Estos cambios suelen ser tardíamente aceptados por las instituciones académicas. Debido a la formalidad con la que está hecho este trabajo seguimos utilizando el masculino genérico y, sin embargo, queremos dejar constancia y celebrar este proceso.

Índice general

Introducción	9
1. Preliminares	13
1.1. Notación	13
1.2. Nociones de teoría de juegos	15
2. Un modelo evolutivo para finitos jugadores	21
2.1. Descripción del modelo	23
2.2. Aplicación: distribución de riqueza	29
2.3. Simulaciones	31
3. Infinitos jugadores	39
3.1. Descripción del modelo	40
3.2. <i>Grazing limit</i>	42
4. La ecuación de transporte	57
4.1. Unicidad de solución	58
4.2. Estabilidad del modelo	66
4.3. La dinámica del replicador para juegos simétricos	78
4.4. Ejemplo: juegos sin empates	81
5. Una población con memoria	85
5.1. Descripción del modelo	87
5.2. El modelo para una población infinita	91
5.3. Caso general: memoria perfecta	99
Apéndice	105
Bibliografía	113

Introducción

La teoría evolutiva de juegos comenzó a desarrollarse para el estudio de los fenómenos evolutivos en el campo de la biología cuando, en los años '70, J. M. Smith propuso este enfoque para modelar los conflictos en el reino animal [40]. La razón principal es que permite a los jugadores modificar su comportamiento para buscar la mejor forma de jugar ante las estrategias de los demás miembros de la población. Para profundizar en estas reglas ver, por ejemplo, [18, 24, 36]. Con el paso del tiempo y debido a la versatilidad de este enfoque la teoría evolutiva de juegos comenzó también a utilizarse en problemas de economía y diversos conflictos sociales.

El elemento central de esta teoría es el concepto de juego. Consiste en una tríada compuesta por un conjunto de jugadores, un espacio de estrategias y una función de pagos. La estrategia de un jugador es un plan de acción para cada escenario del juego. Si un jugador utiliza una estrategia pura significa que realiza una acción específica en cualquier situación, mientras que una estrategia mixta es un vector de probabilidades que indica con que probabilidad utiliza cada acción del juego. Una estrategia mixta consiste en asignar una probabilidad a cada estrategia pura. Además podemos interpretar a cada estrategia pura s como un caso particular de estrategia mixta donde el jugador utiliza s con probabilidad uno. Notemos que si el juego tiene dos o más estrategias puras entonces hay infinitas estrategias mixtas.

La función de pagos representa el móvil por el cual los jugadores participan del juego. Su definición depende del contexto que quiera estudiarse, puede simplemente tomar tres valores (ganar, empatar o perder como en el clásico juego Piedra, papel o tijera), ser una función que represente dinero (las ganancias o pérdidas al jugar a la ruleta) o la utilidad de tomar diferentes acciones (por ejemplo, si se quiere modelar fenómenos sociales).

En la teoría evolutiva de juegos se agrega la posibilidad de que los jugadores modifiquen sus estrategias en pos de mejorar su desenvolvimiento en futuros juegos. Hay diferentes interpretaciones para estos cambios. Volviendo al campo de la biología podemos interpretar que los animales participan de un juego donde el ganador sobrevive y el perdedor perece. En este contexto no modifican a consciencia su vector de estrategias, sino que mediante la mutación y selección natural logran reproducirse (y transferir su comportamiento levemente modificado) aquellos animales mejor adaptados al entorno.

En esta tesis desarrollamos modelos evolutivos para el estudio de diferentes fenómenos económicos, biológicos y sociales para poblaciones de gran tamaño. La idea en la cual nos inspiramos proviene de la teoría cinética de gases donde las partículas que forman un gas chocan aleatoriamente e intercambian energía en el proceso. Luego, como resultado, el sistema en su conjunto tiende a un estado estacionario cuando el tiempo tiende a infinito. Hacemos una analogía que consiste en pensar a una población formada por muchos agentes que, elegidos aleatoriamente, interactúan mediante un juego. La razón para utilizar estos modelos es que permiten estudiar fenómenos complejos asumiendo un comportamiento sencillo para cada jugador. En otras palabras, mediante reglas sencillas a nivel *micro* podemos descubrir comportamientos interesantes a nivel *macro*.

En los modelos para poblaciones infinitas donde cada jugador queda definido por una estrategia pura aparecen sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta tesis cada jugador queda definido por un vector de estrategias mixtas y cuando trabajamos con infinitos usamos funciones de densidad de la forma $u(p, t)$ que representa la distribución de la población a tiempo t sobre las estrategias p . En este enfoque surge la necesidad de trabajar con ecuaciones en derivadas parciales.

En [3] A. Boccabella, R. Natalini y L. Pareschi estudian una ecuación íntegro diferencial para describir el comportamiento de una población que utiliza estrategias mixtas. Prueban existencia y unicidad de solución y analizan la estabilidad y el comportamiento asintótico de la solución para juegos con dos estrategias. Al final presentan resultados numéricos para el caso de dos y tres estrategias. Como señalamos antes, en la teoría evolutiva de juegos se formulan los problemas estudiando funciones de densidad. Por esto en [12] J. Cleveland y A. S. Ackleh extienden el resultado anterior ampliando el espacio de soluciones a medidas que no son absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue (y, por lo tanto, no tienen una función de densidad asociada). Muestran que en muchos casos es necesario incluir a la Delta de Dirac como solución del problema para estudiar los equilibrios asintóticos de los modelos. Luego, prueban la buena definición y existencia de solución para modelos no lineales de teoría evolutiva de juegos.

Señalamos que en ambos trabajos se considera la dinámica del replicador, donde la población en una estrategia muere o se reproduce como consecuencia del pago que recibe comparando contra qué ocurre en promedio en la población. Así la distribución inicial de estrategias en la población evoluciona con una mecánica exógena a las intenciones de los jugadores, que no tienen chance de cambiarse de estrategias. En cuanto a la ecuación integrodiferencial que obtienen, la consideran como una ecuación diferencial ordinaria abstracta en un espacio de Banach.

En [35] F. Salvarani y D. Tonon estudian la distribución de riqueza de una población que interactúa mediante un juego de suma cero de dos estrategias cuyos pagos dependen de la riqueza de cada jugador. Aquí, los agentes no aprenden cómo jugar, sino que por

un argumento de campo medio (qué riqueza tienen comparada con la riqueza promedio) eligen su estrategia. Brevemente, el juego siempre beneficia al jugador con menos riqueza, con lo cual si el jugador tiene menos riqueza que el promedio, elige arriesgar, mientras que si tiene más, no lo hace; luego de cada interacción se recalcula la riqueza promedio y todos reciben este dato. Para esta dinámica deducen una ecuación cinética, prueban existencia y unicidad de solución y realizan simulaciones.

Si bien estos trabajos representan un importante aporte a la teoría evolutiva de juegos no consideran la posibilidad de un movimiento de la población en el espacio de estrategias como consecuencia de las interacciones. Podemos pensarlos como una fluctuación de la cantidad de jugadores en cada estrategia según la ganancia que reciben comparada con la ganancia promedio. Por otra parte, los agentes racionales buscan aprender y dominar el juego, con lo cual la experiencia los lleva a abandonar estrategias perdedoras y a repetir aquellas que les resultaron exitosas. Esta dinámica podemos pensarla como un flujo en el espacio de estrategias mixtas, con jugadores moviéndose en las direcciones sugeridas por el resultado de cada juego. Señalemos, por último, que en el caso de finitas estrategias, una dinámica similar se define mediante una cadena de Markov y la transición para cada par de estrategias se define en términos del resultado del juego (ver [2]). Para este modelo se demuestra que existe una medida invariante y es un equilibrio de Nash, pero desde el punto de vista de los jugadores, estos continúan saltando de una estrategia a otra aún cuando el sistema converge al equilibrio. El trabajo de esta tesis pretende hacer un aporte significativo para cubrir este faltante.

En el capítulo 1 presentamos la notación que usamos a lo largo de todo el trabajo. También describimos las ideas básicas de la teoría de juegos: qué entendemos por juego, por equilibrio de Nash puro y mixto y describimos la ecuación del replicador, además de otros conceptos que usamos en esta tesis.

En el capítulo 2 desarrollamos un modelo basado en agentes para una población con finitos individuos que se enfrentan en un juego simétrico, de suma cero, de dos participantes y donde cada jugador tiene asociado un vector de estrategias mixtas. Luego de cada interacción, y si no hay empate, ambos jugadores tratan de mejorar sus futuras interacciones al aumentar la probabilidad de utilizar la estrategia que resultó ganadora. La repetición continua de este proceso genera una dinámica en la población. Para esto utilizamos un parámetro positivo δ que define la intensidad con la cual los jugadores modifican su vector de estrategias después de cada interacción.

Luego aplicamos el modelo al estudio de la distribución de riqueza en una población sin consumo ni producción. Trabajamos con un juego de dos estrategias puras donde una domina a la otra y con el clásico juego Piedra, papel o tijera. Para este segundo ejemplo mostramos mediante simulaciones que cuando la población se encuentra en un equilibrio de Nash mixto la distribución estacionaria de la riqueza es muy similar a una distribución Gamma con varianza en función de los coeficientes de la matriz de pagos del juego. En las simulaciones este equilibrio para la distribución de riqueza se alcanza

incluso cuando los agentes no llegan al equilibrio de Nash.

En el capítulo 3 extendemos el modelo a una población con infinitos jugadores. Utilizamos una ecuación de tipo Boltzmann para modelar el problema y probamos la unicidad y existencia de solución. Como este proceso depende del parámetro δ estudiamos el límite de la ecuación de Boltzmann cuando δ tiende a cero. Esto se conoce como *grazing limit* y así obtenemos una función límite que satisface en sentido débil una ecuación en derivadas parciales. Esta tiene un término de transporte donde el campo depende de la propia solución y un segundo término de difusión.

En el capítulo 4 nos centramos en el estudio de la ecuación de transporte que obtuvimos. Primero probamos la unicidad de existencia de solución. Luego estudiamos la estabilidad y demostramos que, para un punto q en el interior del espacio de estrategias, son equivalente que la Delta de Dirac δ_q es de equilibrio, q es un equilibrio de Nash del juego, la trayectoria constantemente q es de equilibrio para la dinámica del replicador y q es un autovector asociado al autovalor cero de la matriz del juego.

También estudiamos la estabilidad del sistema y probamos que si al linealizar el sistema del replicador en el punto de equilibrio su matriz jacobiana tiene todos los autovalores con parte real negativa entonces la dinámica de este modelo converge. Además si la dinámica del modelo converge entonces también converge la dinámica del replicador. El desarrollo de esta teoría nos permite presentar una forma sencilla de analizar la convergencia de la dinámica del replicador para juegos simétricos mirando la matriz del modelo. Por último estudiamos un caso particular de juegos sin empates donde las entradas de la matriz del juego solo toman los valores -1 o 1 fuera de la diagonal.

En el capítulo 5 extendemos el estudio a un nuevo modelo en el cual no importa solo el último instante, sino un lapso de tiempo. Para ampliar el problema al estudio de jugadores con memoria necesitamos trabajar con ecuaciones diferenciales con retardo (o *delay*). Planteamos un modelo abstracto donde la posición de los agentes es un vector en el espacio \mathbb{R}^d . Las interacciones siguen siendo de a pares y ahora el problema consiste en buscar una función que a cada tiempo devuelva una medida de probabilidad sobre el espacio \mathbb{R}^d para describir la distribución de la población. Esta función satisface una ecuación de transporte donde, como en el modelo anterior, el campo depende de la propia solución. El resultado principal de este capítulo consiste en probar que existe una única solución del problema y que depende continuamente del dato inicial.

1

Preliminares

En la primera sección de este capítulo presentamos la notación que usamos a lo largo de toda la tesis. Y en la sección 1.2 introducimos las ideas básicas de la teoría de juegos que necesitamos para este trabajo. Aquella persona que esté familiarizada con estos conceptos puede omitirla sin perjuicio alguno.

1.1. Notación

Sobre teoría de juegos y vectores

Trabajamos con juegos que tienen el mismo conjunto S de acciones o estrategias puras para todos los jugadores. Suponemos que es finito de tamaño d y llamamos s_1, \dots, s_d a cada elemento de S . Usamos las letras p y q para referirnos a vectores columna de estrategias mixtas dentro del simplex de dimensión $(d - 1)$ que notamos

$$\Delta := \left\{ p \in [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d \text{ tales que } \sum_{l=1}^d p_l = 1 \right\}.$$

Para los vértices del simplex usaremos la escritura e_i que representa el vector de \mathbb{R}^d con ceros en todas las coordenadas salvo en la i -ésima donde vale uno. Además $\vec{1}$ representa al vector con entradas uno en cada coordenada.

Si tenemos un vector $v \in \mathbb{R}^d$ y nos interesa distinguir las primeras $(d-1)$ coordenadas de la última notamos con $v' \in \mathbb{R}^{d-1}$ y $v_d \in \mathbb{R}$ de forma que

$$v = \begin{pmatrix} v' \\ v_d \end{pmatrix}.$$

Dada un población finita usamos la letra N para notar la cantidad de individuos totales (que también llamamos indistintamente agentes o jugadores). Para asignar un

vector a un jugador usamos un superíndice, de esta forma $p_l^{(i)}$ se corresponde con la coordenada l del vector $p^{(i)}$ del jugador i que indica la probabilidad de usar la estrategia s_l . La estrategia promedio de una población finita es

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p^{(i)}.$$

A partir del capítulo 3 generalizamos el modelo a poblaciones infinitas, en este caso el vector promedio a tiempo t está dado por

$$\bar{p}(t) = \int_{\Delta} p \, du(p, t)$$

donde $u(\cdot, t)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio Δ .

Dado un jugador cualquiera, cuando queremos diferenciarlo de otro usamos un tilde. Así el vector de probabilidad es simplemente $p = (p_1, \dots, p_d)$ y uno distinto lo marcamos con $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d)$.

Cuando trabajamos con la riqueza de la población $w^{(i)}$ representa el dinero del jugador i . Para denotar la evolución de una variable tras una interacción utilizamos el símbolo $*$ en el superíndice. Por ejemplo, si la riqueza en un determinado momento es $w^{(i)}$ luego de una interacción que involucra al jugador i queda $w^{(i)*}$.

Sobre medidas y funciones

En los capítulos 2, 3 y 4 usamos las letras u, v para denotar funciones continuas con dominio temporal que para cada $t \geq 0$ son medidas con primer momento finito sobre el espacio Δ , es decir,

$$v, u, \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta)).$$

Además, δ_p es la función que para todo $t \geq 0$ es la Delta de Dirac centrada en p (es decir, la medida concentrada en el punto p). Usamos las letras μ y ν para medidas también con primer momento finito sobre todo el espacio \mathbb{R}^d , $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ (para el último capítulo 5). Observemos que en el caso de las medidas sobre Δ , al ser compacto, resulta $\mathcal{P}_1(\Delta) = \mathcal{P}(\Delta)$.

Utilizamos las letras \mathcal{F}, \mathcal{J} y \mathcal{K} para referirnos a campos vectoriales. En particular si suponemos que el campo depende de una función v , escribimos $\mathcal{F}[v](p, t)$ donde p es una variable espacial y t la variable temporal. El flujo inducido por este campo lo llamamos \mathcal{T}^v pues en lo que sigue solo necesitamos destacar la dependencia respecto de v .

Dado que a lo largo de toda esta tesis trabajamos con funciones cuyo dominio (o parte de él) es temporal usamos dos notaciones dependiendo el contexto: por ejemplo si $Dom(f) = X \times T$ donde $x \in X$ es una variable espacial y $t \in T$ es una temporal

escribimos $f(x, t)$ o $f_t(x)$ indistintamente. Usamos una constante $\tau > 0$ para definir un retardo (*delay*) temporal y para una trayectoria continua $\sigma : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $t \geq 0$ usamos la notación

$$\sigma_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

que se interpreta como $\sigma_t(s) := \sigma(t + s)$.

Sobre distancias y normas

Dadas dos medidas de probabilidad u y v sobre Δ trabajamos con la distancia W_1 de Wassertein (o Kantorovich-Rubinstein) donde

$$W_1(u, v) := \sup \left\{ \left| \int_{\Delta} \varphi(p) du(p) - \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p) \right| \text{ tal que } \varphi \in C(\Delta, \mathbb{R}) \text{ y } Lip(\varphi) \leq 1 \right\}$$

donde $Lip(\varphi)$ es la constante Lipschitz de φ . Se sabe que W_1 es una distancia sobre $\mathcal{P}_1(\Delta)$ que metriza la convergencia débil [44].

Usamos la notación $|\cdot|$ para referirnos a la norma usual tanto en \mathbb{R} como en \mathbb{R}^d . Y para funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ donde X es compacto usamos la norma

$$\|f\| := \|f\|_{\infty} = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

En el espacio $C^3(\Delta, \mathbb{R})$ trabajamos con la norma

$$\|\varphi\|_3 := \sum_{|\alpha| \leq 3} \left\| \frac{\partial^{\alpha}}{\partial p^{\alpha}} \varphi(p) \right\|$$

que nos permite definir otra norma para una medida $u \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ como

$$\|u\|_{sup} := \sup \left\{ \left| \int_{\Delta} \varphi(p) du(p) \right|, \text{ tal que } \varphi \in C^3(\Delta, \mathbb{R}) \text{ y } \|\varphi\|_3 \leq 1 \right\}.$$

Esta norma metriza la convergencia débil en $\mathcal{P}_1(\Delta)$, ver, por ejemplo, [19].

Por último, dada una medida $u \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ trabajamos con la norma de variación total donde

$$\|u\| = \sup \left\{ \left| \int_{\Delta} \varphi(p) du(p) \right| \text{ tal que } \|\varphi\| \leq 1 \right\}.$$

1.2. Nociones de teoría de juegos

Para definir un juego necesitamos tres elementos.

- Un conjunto J de jugadores.

- Un conjunto de estrategias puras $S^{(i)}$ para cada jugador $i \in J$.
- Funciones de utilidad $U^{(i)}$ para cada jugador $i \in J$ donde

$$U^{(i)} : \prod_{j \in J} S^{(j)} \rightarrow \mathbb{R}$$

determina el beneficio o pago que obtiene el jugador i .

Observación 1.2.1. *Si bien presentamos una definición general y la teoría está desarrollada para juegos con infinitas estrategias, en este trabajo solo usamos juegos de dos participantes en los cuales el conjunto de estrategias es el mismo para ambos jugadores. Asumimos siempre que la cantidad es finita, es decir, $\#S^{(i)} < \infty$ para todo jugador i .*

Simbolizamos $s = (s^{(i)}, s^{(-i)}) \in \prod_{j \in J} S^{(j)}$ cuando separamos la estrategia utilizada por el jugador i de las utilizadas por los demás jugadores: $s^{(i)} \in S^{(i)}$ y $s^{(-i)} \in \prod_{j \neq i} S^{(j)}$. Con esta notación podemos definir un *equilibrio de Nash*, noción fundamental de la teoría de juegos y que fue introducida por J. F. Nash.

Definición 1.2.1. *Un equilibrio de Nash puro es un conjunto de estrategias puras $s \in \prod_{j \in J} S^{(j)}$ tal que para cada jugador $i \in J$ se tiene que*

$$U^{(i)}(s^{(i)}, s^{(-i)}) \geq U^{(i)}(t^{(i)}, s^{(-i)}) \quad \text{para cualquier } t^{(i)} \in S^{(i)}.$$

Intuitivamente s es un equilibrio de Nash si ningún jugador i tiene incentivos a desviarse: asumiendo que los demás usan las estrategias $s^{(-i)}$ el jugador i no tiene interés en cambiar a una estrategia $t^{(i)}$ pues no aumenta su pago.

Pero no siempre existe un equilibrio de Nash puro. Para ejemplificar este hecho veamos un juego que usamos mucho en esta tesis.

1.2.1. El juego Piedra, papel o tijera

Trabajemos con este popular juego de dos participantes que tienen el mismo conjunto de estrategias $S^{(1)} = S^{(2)} = \{R, P, S\}$ (debido a $R=Rock$, $P=Paper$, $S=Scissor$). Podemos asociar $R = e_1$, $P = e_2$ y $S = e_3$ (los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3). Sucede que lo que gana un jugador es porque lo pierde el otro, es decir,

$$U^{(1)}(s, \tilde{s}) + U^{(2)}(s, \tilde{s}) = 0$$

cualquier sean las estrategias puras $s, \tilde{s} \in \{e_1, e_2, e_3\}$. Esto se denomina *juego de suma cero* y escribimos la definición más adelante. Luego alcanza con definir los pagos del jugador 1. Hacemos esto mediante la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ b & 0 & -a \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

donde $a, b > 0$. Si $s, \tilde{s} \in \{e_1, e_2, e_3\}$ son las estrategia del jugador 1 y 2, respectivamente, definimos los pagos como

$$\begin{aligned} U^{(1)}(s, \tilde{s}) &= s^T G \tilde{s}, \\ U^{(2)}(s, \tilde{s}) &= \tilde{s}^T G s. \end{aligned}$$

El caso clásico se obtiene al considerar $a = b = 1$. Además es fácil ver (o sabemos por experiencia) que no existe un equilibrio de Nash puro: si fijamos una estrategia para cada jugador entonces aquel que no gana tiene incentivos a cambiar.

1.2.2. Estrategias mixtas

Para extender el concepto de equilibrio de Nash permitamos que un jugador no elija una única estrategia pura, sino que asigne una *probabilidad* a cada una de ellas. Esto nos lleva a la noción de estrategias mixtas.

Definición 1.2.2. Una estrategia mixta $p^{(i)}$ para el jugador i es una medida de probabilidad sobre su conjunto de estrategias $S^{(i)}$.

Hagamos en este punto una aclaración importante para lo que resta de esta tesis.

Observación 1.2.2. Trabajamos con el mismo conjunto S de estrategias para todos los jugadores, es decir, $S = S^{(i)} = \{s_1, \dots, s_d\}$ para todo i . Asociamos la estrategia pura s_i con el i -ésimo vector e_i de la base canónica de \mathbb{R}^d . Entonces una estrategia mixta p es un vector $p = (p_1, \dots, p_d)$ donde p_i es la probabilidad de jugar s_i . De forma equivalente, una estrategia mixta es un elemento del simplex $\Delta \subset \mathbb{R}^{(d-1)}$.

Por lo tanto a partir de este punto ya no trabajamos con conjuntos de estrategias $S^{(i)}$ muy generales, sino con un conjunto de estrategias s_1, \dots, s_d idéntico para cada jugador. Sea $N = \#J$ la cantidad de jugadores. Entonces extendemos las funciones de pagos $U^{(i)}$ a $\underbrace{\Delta \times \dots \times \Delta}_{N \text{ veces}}$ de forma natural como el pago esperado:

$$U^{(i)}(p^{(1)}, \dots, p^{(N)}) = \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^d p_{i_1}^{(1)} \times \dots \times p_{i_d}^{(N)} \times U^{(i)}(s_{i_1}, \dots, s_{i_d}).$$

Definición 1.2.3. Un equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias $(p^{(1)}, \dots, p^{(N)}) \in \Delta^N$ tal que para cada jugador $i \in J$ se tiene que

$$U^{(i)}(p^{(i)}, p^{(-i)}) \geq U^{(i)}(q^{(i)}, p^{(-i)}) \quad \text{para cualquier } q^{(i)} \in \Delta.$$

Observación 1.2.3. Cuando nos referimos a equilibrio de Nash hacemos referencia a esta definición. Además un resultado central en la teoría de juegos es que todo juego con finitas estrategias, hipótesis adecuadas de convexidad de los pagos y finitos jugadores tiene, al menos, un equilibrio de Nash. Para una prueba simple de este resultado ver [20].

1.2.3. Juegos simétricos de suma cero

Necesitamos dos definiciones más.

Definición 1.2.4. *Un juego es simétrico si todos los jugadores tienen el mismo espacio de estrategias y los pagos solo dependen de las estrategias: para todo i y j resulta que*

$$U^{(i)}(p^{(i)}, p^{(-i)}) = U^{(j)}(p^{(j)}, p^{(-j)})$$

si $p^{(i)} = p^{(j)} \in \Delta$ y $p^{(-i)} = p^{(-j)}$ para todo i, j .

La idea es que no importa el rol de cada jugador, si es el primer o segundo jugador, sino solo qué estrategia usa.

Definición 1.2.5. *Un juego es de suma cero si la suma de todos los pagos es nula: para todo $P \in \Delta^N$ vale que*

$$\sum_{i=1}^N U^{(i)}(P) = 0.$$

Para terminar este capítulo supongamos que tenemos un juego de dos jugadores. Notamos a_{ij} (respectivamente b_{ij}) el pago del primer jugador (segundo jugador) cuando juega s_i y el segundo s_j . Considerando las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ obtenemos los pagos en estrategia mixta

$$\begin{aligned} U^{(1)}(p, \tilde{p}) &= p^T A \tilde{p}, \\ U^{(2)}(p, \tilde{p}) &= p^T B \tilde{p}, \end{aligned}$$

donde p es la estrategia del primer jugador y \tilde{p} del segundo. Entonces el juego es simétrico si $B = A^T$ (como sucede con Piedra, papel o tijera). Si además es de suma cero la matriz A resulta antisimétrica (se corresponde con el caso $a = b$ en el mismo juego) pues

$$a_{lm} + a_{ml} = a_{lm} + b_{lm} = 0$$

y entonces

$$A + A^T = A + B = 0.$$

Este resultado es muy importante pues es una propiedad que usamos repetidamente.

Observación 1.2.4. *Sea A la matriz de pagos de un juego simétrico de suma cero, entonces $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $i, j = 1, \dots, d$.*

En particular $a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \dots, d$.

1.2.4. La ecuación del replicador

Dada una población de d clases de jugadores esta ecuación diferencial ordinaria (o sistema de ecuaciones) describe un proceso de selección donde las estrategias más exitosas proliferan en detrimento de las demás. Fue introducida P. D. Taylor y L. B. Jonker [42] y denominada así en [37].

Si p_i es el porcentaje de la población de clase i y $p = (p_1, \dots, p_d) \in \Delta$ entonces la ecuación del replicador define una regla de evolución para $p(t)$. Asumimos que cada p_i es una función diferenciable en el tiempo, que los jugadores interactúan aleatoriamente y participan de un juego simétrico con matriz de pagos A . Así $(Ap)_i$ representa el pago esperado para un jugador de clase i al jugar con un jugador elegido al azar en la población y $p^T Ap$ es el pago promedio para la población en estado p . Además asumimos que la tasa de crecimiento para un jugador de clase i está determinada por la diferencia entre su pago esperado y el pago promedio esperado de toda la población, por lo cual, para cada $i = 1, \dots, d$, se tiene

$$\frac{d}{dt}p_i = p_i((Ap)_i - p^T Ap),$$

que es el sistema del replicador. Para profundizar en esta teoría ver [25].

2

Un modelo evolutivo para finitos jugadores

En este capítulo presentamos un modelo basado en agentes para estudiar el comportamiento de una población con finitos individuos que intentan mejorar su desempeño en un juego. Luego usamos el modelo para estudiar en forma teórica la distribución de riqueza de una población de tamaño constante y finalmente contrastamos estos resultados con simulaciones. Gran parte de este capítulo está basado en el trabajo [33].

Los avances computacionales permitieron el estudio de problemas de la economía y diversos conflictos sociales usando modelos basados en agentes. La idea principal es considerar una población en la cual los individuos participan repetidamente de un juego y obtienen un pago. Este hecho puede relacionarse con la teoría cinética de gases donde las partículas que componen un gas interactúan aleatoriamente de a pares e intercambian energía en cada interacción. Como resultado de este proceso el sistema tiende a un estado estacionario con el paso del tiempo.

Dos críticas pueden hacerse a estos modelos. Dado que se basan en mecanismos estáticos los agentes son considerados como partículas idénticas y simples por lo cual no actúan racionalmente tratando de aumentar su pago. Además interactúan siempre de igual forma por lo cual no pueden modificar ni adaptar su comportamiento. Este hecho contrasta con los modelos económicos donde la teoría de juegos es una herramienta poderosa.

En este capítulo proponemos un modelo donde usamos las ventajas de la simplicidad de los modelos de la física estadística y la flexibilidad de la teoría evolutiva de juegos. En la sección 2.1 desarrollamos un modelo para una población finita donde los agentes interactúan de a pares mediante un juego simétrico de suma cero. Asumimos que cada jugador tiene un vector de estrategias mixtas y que modifica la probabilidad de jugar determinadas estrategias según el resultado del último juego en el que haya participado. Si no hay empate, una de estas dos estrategias es *ganadora* y ambos jugadores modifi-

can su vector de estrategias para aumentar la probabilidad de jugarla en el futuro. A cambio reducen la probabilidad de utilizar la acción que resultó perdedora. Este es un tipo de agente Pavloviano que tiene una visión del juego limitada y un comportamiento miope para elegir su estrategia. Este concepto fue introducido por D. y K. Kraines en [26] y aunque este tipo de comportamiento ha sido utilizado en muchos trabajos, especialmente en simulaciones (ver [5, 38, 41]), falta un análisis teórico. Nuestro trabajo cubre este vacío ya que desarrollamos de forma teórica una dinámica que permite estudiar una población finita de cualquier tamaño. Mostramos que la estrategia promedio obedece una ecuación muy similar a la ecuación del replicador introducida por P. D. Taylor y L. B. Jonker [42] (también puede verse [23, 45]).

En la sección 2.2 utilizamos el modelo para estudiar teóricamente la distribución de riqueza en una sociedad. La estabilidad en la distribución de la riqueza a lo largo del tiempo y para diferentes sociedades ha sido un motivo de estudio desde el trabajo fundacional de V. Pareto [29]. Diferentes estudios empíricos muestran que en muchas economías la distribución de riqueza sigue una distribución Pareto (una ley de potencias) para el rango de la sociedad con más altos ingresos y una distribución de Gibbs, Gama o log-normal para el resto de la población. Remitimos al lector al capítulo 2 en [9] para un análisis más profundo de este tema.

Si la regla de interacción del modelo es apropiada esperamos que la distribución de riqueza alcance un estado estacionario que se asemeje al observado empíricamente. Hay muchos trabajos empíricos y teóricos que muestran que estos modelos pueden reproducir la curva de distribución observada en las sociedades y, en particular, la cola de Pareto y la distribución exponencial o Gamma en el grueso de la población. Se puede ver el capítulo 4 de [9] para más detalles de estos modelos. En el modelo que desarrollamos los agentes interactúan de a pares, utilizan un juego simétrico de suma cero y el resultado define un intercambio de dinero entre ellos. Si queremos estudiar un modelo más general donde la cantidad de dinero de toda la población no es constante en el tiempo debemos normalizar el juego como se hace en [27]. Luego, los agentes adaptan sus estrategias basados en el resultado de este juego.

En la última sección 2.3 presentamos resultados computacionales que confirman que este modelo reproduce las principales características que se observan en la distribución de riqueza de una población. Si bien hay modelos previos que utilizan un juego para estudiar el intercambio de dinero, ver [22, 31, 34], en estos el resultado aleatorio del juego es determinado de forma externa y, por lo tanto, el valor esperado de cada jugador es siempre el mismo impidiendo que los jugadores adapten su estrategia.

En las simulaciones que mostramos todos los jugadores comienzan con una unidad de dinero. Primero trabajamos con un juego de dos estrategias puras donde una domina a la otra. Aquí el interés está en saber la ventaja que tienen aquellos jugadores que comienzan con una alta probabilidad de utilizar la estrategia pura *correcta*. El segundo juego con el que trabajamos es Piedra, papel o tijera. Dado que no hay ninguna

estrategia pura que domine estudiamos la dinámica del vector de estrategias promedio y cómo la afecta que los jugadores traten de ir modificando su estrategia en base al comportamiento de la mayoría. Por ejemplo, si resulta muy probable que la mayoría elija la acción *piedra*, la propia dinámica genera que la estrategia promedio tienda a aproximarse a la acción *papel* (donde, como es de esperar, *papel* envuelve a *piedra*). Por [25] sabemos que la dinámica dada por la ecuación del replicador linealizada nunca converge y la estrategia promedio permanece en una órbita alrededor del equilibrio de Nash. En las simulaciones vemos que el comportamiento es distinto y la estrategia promedio tiende al punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a infinito.

2.1. Descripción del modelo

Planteamos un modelo de tiempo discreto con interacciones sucesivas en donde dos miembros de la población participan de un juego entre ellos y obtienen un pago.

2.1.1. Un juego de dos participantes

Supongamos que tenemos una población con N individuos y seleccionemos dos de forma aleatoria para que participen de un juego. Cada uno tiene un conjunto de d posibles acciones que denotamos s_1, \dots, s_d . El pago del juego está definido por una matriz $A = (a_{lm}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ donde $a_{lm} \in [-1, 1]$. A lo largo de todo este trabajo (y salvo cuando aclaremos lo contrario) asumimos que el juego es simétrico y de suma cero. Como mencionamos en la sección 1.2.3 esto implica que $A = -A^T$.

Un jugador i genérico tiene asociada una estrategia mixta, un vector de probabilidades que notamos $p^{(i)} = (p_1^{(i)}, \dots, p_d^{(i)})^T \in \Delta$ donde Δ es el simplex de dimensión $(d - 1)$, y $p_l^{(i)}$ indica la probabilidad de que el jugador i elija la estrategia pura s_l y, por lo tanto, $0 \leq p_l^{(i)} \leq 1$ para todo $l = 1, \dots, d$. Como es un vector de probabilidades resulta

$$\sum_{l=1}^d p_l^{(i)} = 1.$$

Sea δ un parámetro *pequeño*, $0 < \delta \ll 1$, que mantendremos constante el resto de este capítulo.¹ Asumimos que cada jugador, luego de participar del juego, intenta adaptar su estrategia en pos de aumentar la probabilidad de ganar en futuras interacciones. Como en cada una participan dos jugadores hay dos estrategias (puras) involucradas. El proceso que siguen los jugadores es el siguiente: luego de jugar aumentan δ veces el pago de la estrategia ganadora (la que usaron ellos mismos o la que utilizó el otro) y

¹Ahora trabajamos con un δ fijo cualquiera y el motivo principal del capítulo 3 es estudiar el problema cuando este tiende a cero.

disminuyen en el mismo valor la estrategia perdedora. Además en caso de un empate no hay modificaciones.

Por último, debemos asegurarnos que los nuevos vectores sean de probabilidad y, por ello, que tengan todas las entradas no negativas. Definimos la regla del proceso de adaptación de la siguiente forma. Primero fijemos dos jugadores i y j cualesquiera con sus respectivos vectores de estrategias $p^{(i)}$ y $p^{(j)}$. Supongamos que utilizan las estrategias puras s_l y s_m , respectivamente. Entonces modifican su vector de estrategias a nuevos vectores $p^{(i)*}$ y $p^{(j)*}$ siguiendo la regla

$$\begin{cases} p_l^{(i)*} = p_l^{(i)} + a_{lm}\delta \\ p_m^{(i)*} = p_m^{(i)} - a_{lm}\delta \end{cases} \quad \text{si } (p_l^{(i)} + a_{lm}\delta) \geq 0 \text{ y } (p_m^{(i)} - a_{lm}\delta) \geq 0;$$

$$\begin{cases} p_l^{(j)*} = p_l^{(j)} + a_{lm}\delta \\ p_m^{(j)*} = p_m^{(j)} - a_{lm}\delta \end{cases} \quad \text{si } (p_l^{(j)} + a_{lm}\delta) \geq 0 \text{ y } (p_m^{(j)} - a_{lm}\delta) \geq 0.$$
(2.1)

2.1.2. El proceso de evolución

Fijemos un jugador i para poder analizar la evolución de su vector de estrategias mixtas $p^{(i)}(t)$.

Introducimos la estrategia promedio de la población con N jugadores,

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p^{(i)}(t).$$

Asumamos que el juego sucede con una probabilidad dada por una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 1$. Entonces la probabilidad de que la interacción ocurra en un intervalo temporal $(t, t + \Delta t)$ es $(1 - e^{-\Delta t})$. Queremos calcular el valor esperado del cambio en $p_l^{(i)}$ para cada estrategia pura s_l del jugador i . Este participa de un juego con probabilidad $2/N$ (puede ser elegido como primer o segundo jugador) y a tiempo t utiliza una estrategia cualquiera s_m con probabilidad $p_m^{(i)}(t)$. Como nos interesa ver el cambio de $p_l^{(i)}$ tenemos que considerar el caso en que $m = l$ o que el oponente use s_l . Cualquier otro jugador j distinto tiene $1/(N - 1)$ probabilidades de jugar contra i y utiliza la estrategia s_m con probabilidad $p_m^{(j)}(t)$. Dado que δ es muy pequeño asumimos que estamos por lo menos a una distancia δ del borde, es decir, $p_m^{(i)} \geq \delta$ para todo m . Entonces la variación si el jugador i elige s_l y j , s_m es

$$\Delta t \delta p_l^{(i)}(t) a_{lm} p_m^{(j)}(t)$$

y en caso de que elijan al revés

$$\Delta t \delta p_l^{(j)}(t) a_{lm} p_m^{(i)}(t) = -\Delta t \delta p_m^{(i)}(t) a_{ml} p_l^{(j)}(t).$$

Como marcamos, en caso de que ambos usen la misma estrategia s_l no hay variaciones, ya que tenemos un empate y se corresponde con $a_{ll} = 0$ (ver la observación 1.2.4).

Calculamos el pago esperado sumando sobre todos los jugadores posibles, por la probabilidad de elegir a cada uno, y

$$\begin{aligned} p_l^{(i)}(t + \Delta t) - p_l^{(i)}(t) &= \frac{2\Delta t\delta}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} \sum_{m \neq l} \left(p_l^{(i)}(t) a_{lm} p_m^{(j)}(t) - p_m^{(i)}(t) a_{ml} p_l^{(j)}(t) \right) \\ &= \frac{2\Delta t\delta}{N-1} \left(p_l^{(i)}(t) e_l^T A \sum_{j \neq i} \frac{p^{(j)}(t)}{N} - p^{(i)T}(t) A e_l \sum_{j \neq i} \frac{p_l^{(j)}(t)}{N} \right) \end{aligned}$$

ya que $a_{ll} = 0$.

Si tomamos límite cuando Δt tiende a cero por derecha y cambiamos la escala temporal (que seguimos llamando t) tal que cancele el término $2\delta/(N-1)$ llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_l^{(i)} &= p_l^{(i)} e_l^T A \left(\bar{p} - \frac{1}{N} p^{(i)} \right) - p^{(i)T} A e_l \left(\bar{p}_l - \frac{1}{N} p_l^{(i)} \right) \\ &= p_l^{(i)} e_l^T A \bar{p} - p^{(i)T} A e_l \bar{p}_l - \frac{2}{N} p_l^{(i)} e_l^T A p^{(i)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde estamos usando que

$$\sum_{j \neq i} \frac{p_l^{(j)}(t)}{N} = \bar{p}_l - \frac{1}{N} p_l^{(i)}$$

y que

$$p^{(i)T} A e_l p_l^{(i)} = \sum_{m=1}^d p_m^{(i)} a_{ml} p_l^{(i)} = - \sum_{m=1}^d p_l^{(i)} a_{lm} p_m^{(i)} = - p_l^{(i)} e_l^T A p^{(i)}.$$

Esto nos proporciona un sistema de $(d-1) \times N$ ecuaciones diferenciales ordinarias.

Observación 2.1.1. Si $N \rightarrow \infty$, formalmente resulta

$$\frac{d}{dt} p_l^{(i)} = p_l^{(i)} e_l^T A \bar{p} - p^{(i)T} A e_l \bar{p}_l. \quad (2.3)$$

Podemos observar que en esta ecuación aparecen dos términos bien diferenciados, uno cuando el jugador i es el que elige la estrategia l y otro cuando la elección de esta estrategia la hace el rival.

Este resultado motiva el estudio del problema para una población con infinitos jugadores y es el tema al cual nos abocamos a partir del próximo capítulo.

Observamos que la evolución de un jugador se puede expresar utilizando la estrategia promedio de la población.

Proposición 2.1.1. *Sea $\bar{p}(t)$ la estrategia promedio de la población. Entonces satisface el sistema*

$$\frac{d}{dt}\bar{p}_l = 2\bar{p}_l e_l^T A \bar{p} - 2\bar{p}^T A \bar{p} - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^N p_l^{(i)} e_l^T A p^{(i)}.$$

Demostración. Como $\bar{p} = N^{-1} \sum_{i=1}^N p^{(i)}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{p}_l &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^d \frac{d}{dt} p_l^{(i)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^d \left(p_l^{(i)} e_l^T A \bar{p} - p^{(i)T} A e_l \bar{p}_l - \frac{2}{N} p_l^{(i)} e_l^T A p^{(i)} \right) \\ &= \bar{p}_l e_l^T A \bar{p} - \bar{p}^T A e_l \bar{p}_l - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^d p_l^{(i)} e_l^T A p^{(i)}. \end{aligned}$$

Usando que $A^T = -A$ resulta que

$$\bar{p}_l e_l^T A \bar{p} = -\bar{p}^T A e_l \bar{p}_l$$

y obtenemos

$$\frac{d}{dt}\bar{p}_l = 2\bar{p}_l e_l^T A \bar{p} - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^d p_l^{(i)} e_l^T A p^{(i)}.$$

Además como $\bar{p}^T A \bar{p} = \sum_l \sum_{m=1}^d \bar{p}_l \bar{p}_m a_{lm} = 0$ ya que $a_{lm} = -a_{ml}$ podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{d}{dt}\bar{p}_l = 2\bar{p}_l e_l^T A \bar{p} - 2\bar{p}^T A \bar{p} - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^d p_l^{(i)} e_l^T A p^{(i)},$$

y terminamos la prueba. □

Resulta interesante que esta ecuación es *casi* el replicador (ver 1.2.4).

Observación 2.1.2. *Formalmente, si hacemos tender N a infinito y escalamos el tiempo al doble de velocidad obtenemos que la estrategia promedio $\bar{p}(t)$ satisface la ecuación del replicador*

$$\frac{d}{dt}\bar{p}_l = \bar{p}_l (e_l^T A \bar{p} - \bar{p}^T A \bar{p}).$$

Para el límite de infinitos jugadores vemos en el próximo capítulo la relación entre esta dinámica y la del replicador. Pero los efectos espaciales introducen diferencias y los jugadores no necesariamente convergen a la estrategia mixta de equilibrio. Con

la teoría existente para el replicador podemos caracterizar la convergencia de \bar{p} a un vector que se corresponde con un equilibrio de Nash en una gran cantidad de casos. Sin embargo existen puntos de equilibrio de la ecuación que no son equilibrios de Nash y no todo equilibrio de Nash se corresponde con un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación del replicador. Para profundizar el tema se puede ver [13] y la literatura sobre el Folk Theorem.

2.1.3. El efecto de finitos jugadores

Juegos de dos estrategias

Supongamos que tenemos un juego con dos estrategias. Si no es trivial y lo normalizamos entonces solo tenemos dos posibles matrices A ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

el otro caso se corresponde con $-A$, para el cual el análisis y los resultados se adaptan fácilmente. Debido a la matriz de cualquier otro juego de dos estrategias es múltiplo de alguna de estas dos matrices la dinámica que presentan es exactamente la misma.

Usando la ecuación (2.3) tenemos

$$\frac{d}{dt}p_1^{(i)} = p_1^{(i)}(t) \left(1 - \bar{p}_1(t)\right) + \left(1 - p_1^{(i)}(t)\right)\bar{p}_1(t).$$

Notemos que la ecuación para $p_2^{(i)}$ no es necesaria debido a que $p_2^{(i)} = 1 - p_1^{(i)}$.

Este problema tiene solo dos equilibrios: $p^{(i)} = e_1$ o $p^{(i)} = e_2$ para cualquier jugador i . Además, solamente $p^{(i)} = e_1$ es estable. De hecho, cerca del equilibrio $\bar{p} = e_2$ y si hacemos $p_1^{(i)} \approx \varepsilon_i$ resulta que

$$\frac{d}{dt}p_1^{(i)} \geq \varepsilon_i(1 - a) + (1 - \varepsilon_i)a > 0$$

para $a = N^{-1} \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \approx 0$ y entonces $p_1^{(i)}$ crece.

Cantidad finita de jugadores ($N > 3$)

Ahora consideremos el efecto de trabajar con finitos jugadores. La ecuación (2.2) indica que

$$\frac{d}{dt}p_1^{(i)} = p_1^{(i)}(1 - \bar{p}_1) + (1 - p_1^{(i)})\bar{p}_1 - \frac{2}{N}p_1^{(i)}(1 - p_1^{(i)}). \quad (2.4)$$

Nuevamente los equilibrios son como antes, pero el análisis de la estabilidad es un poco distinto. Si notamos $P = (p_1^{(1)}, \dots, p_1^{(N)})$, resulta que

$$\frac{d}{dt}P = \mathcal{F}(P)$$

donde $\mathcal{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ y cada componente está dada por el término de la derecha de la ecuación (2.4).

Para ver que el equilibrio $P = \vec{0}$ es inestable tenemos que linearizar el sistema en este punto y probar que al menos un autovalor de la matriz $D\mathcal{F}(0)$ tiene parte real estrictamente positiva. Dado que $(d/dp_1^{(i)})\bar{p}_1 = 1/N$ resulta que los coeficientes de la diagonal están dados por

$$D\mathcal{F}(P)_{ii} = \frac{d}{dp_1^{(i)}} \frac{d}{dt} p_1^{(i)} = 1 - 2\bar{p}_1 - \frac{1}{N} + \frac{2p_1^{(i)}}{N}$$

y entonces

$$D\mathcal{F}(\vec{0})_{ii} = 1 - \frac{1}{N}$$

mientras que los demás coeficientes son $D\mathcal{F}(\vec{0})_{ij} = 1/N$ si $i \neq j$ donde $\vec{0}$ es el vector de \mathbb{R}^d con todas las entradas igual a 0.

Como la matriz es simétrica sabemos que los autovalores son reales. Para ver que no pueden ser negativos usamos que

$$D\mathcal{F}(\vec{0}) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) Id + \frac{1}{N} M1$$

donde Id es la matriz identidad y $M1$ la matriz con todas las entradas iguales a uno.

Lema 2.1.1. *El menor autovalor de la matriz $D\mathcal{F}(\vec{0})$ está acotado inferiormente por $1 - 2/N$.*

Demostración. Notemos con λ_1 al menor autovalor de $D\mathcal{F}(\vec{0})$. Lo podemos caracterizar como

$$\lambda_1 = \inf_{\{v \in \mathbb{R}^N : |v|=1\}} v^T D\mathcal{F}(\vec{0})v.$$

Como Id es estrictamente positiva y $M1$ es semidefinida positiva tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_{\{v \in \mathbb{R}^N : |v|=1\}} v^T D\mathcal{F}(\vec{0})v \\ &\geq \left(1 - \frac{2}{N}\right) \inf_{\{v \in \mathbb{R}^N : |v|=1\}} v^T Idv + \frac{1}{N} \inf_{\{v \in \mathbb{R}^N : |v|=1\}} v^T M1v \\ &\geq \left(1 - \frac{2}{N}\right) \end{aligned}$$

y obtenemos lo que queríamos ver. □

Si linealizamos en $P = \vec{1}$, usando un argumento similar vemos que este equilibrio es estable. Por lo tanto, los jugadores aprenden la estrategia óptima.

2.2. Aplicación: distribución de riqueza

Aplicamos el modelo al estudio de la distribución de riqueza en una población constante sin producción ni consumo. Como no permitimos deudas trabajamos en el espacio $I = [0, \infty)$ y necesitamos una regla de actualización de las riquezas.

Sea $G = (g_{lm}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, donde $g_{lm} \in [-1, 1]$, una matriz antisimétrica que define los intercambios de dinero entre los jugadores. Supongamos que el jugador i utiliza la estrategia s_i mientras que el jugador j la estrategia s_j . Entonces el jugador i recibe la fracción g_{lm} de la riqueza de j si $g_{lm} \geq 0$ y, en caso contrario, paga la fracción g_{ml} de su riqueza a j .

Si la riqueza de los jugadores la notamos $w^{(i)}$ y $w^{(j)}$, respectivamente, el nuevo valor luego de la interacción es $w^{(i)*}$ y $w^{(j)*}$ con la regla

$$\begin{aligned} w^{(i)*} &= w^{(i)} + \mathcal{I}; \\ w^{(j)*} &= w^{(j)} - \mathcal{I} \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde definimos

$$\mathcal{I} := g_{lm}^+ w^{(j)} - g_{lm}^- w^{(i)}$$

y usamos $x^+ := \max\{x, 0\}$ y $x^- := \max\{-x, 0\}$.

Debido a que los valores de la matriz están entre -1 y 1 el porcentaje de transferencia es menor a 100% y ningún jugador queda con riqueza negativa. Notemos que si ambos jugadores eligen la misma estrategia entonces no hay intercambio alguno.

Un modelo más real debe introducir un grado de aversión al riesgo. Un enfoque usual [10, 11, 30] es asignar una propensión a ahorrar $\lambda^{(i)} \in [0, 1]$ para cada jugador, usualmente el mismo para todos. Teniendo en cuenta esto, reescalamos el juego mediante un parámetro $\varepsilon \in [0, 1]$ de manera tal que

$$\begin{aligned} w^{(i)*} &= w^{(i)} + \mathcal{I}_\varepsilon, \\ w^{(j)*} &= w^{(j)} - \mathcal{I}_\varepsilon \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde

$$\mathcal{I}_\varepsilon := \varepsilon(g_{lm}^+ w^{(j)} - g_{lm}^- w^{(i)}).$$

Hay dos posibles interpretaciones para esta regla: podemos verla como el intercambio que definimos en (2.5) para la matriz $G_\varepsilon := \varepsilon G$ donde el intercambio es menos peligroso para los jugadores ya que involucra una fracción menor de sus riquezas. La segunda opción es interpretar que cada jugador arriesga una fracción εw de su riqueza.

Notemos $\{\mu_t(w)\}_{t \geq 0}$ a la densidad de la medida de probabilidad para cada tiempo. La probabilidad de hallar un jugador cuya riqueza está en un intervalo de la forma (a, b) a tiempo t está dada por

$$\int_a^b 1 d\mu_t(w).$$

Queremos calcular la varianza de $\mu_t(w)$ para compararla con los resultados computacionales. Usando ideas similares a las de [8, 39] tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Sea G la matriz de un juego simétrico de suma cero y consideremos el proceso de evolución de riqueza dado por la regla de (2.5). Supongamos todos están jugando con un vector de estrategias mixtas p que, además, es un equilibrio de Nash. Entonces para ε suficientemente pequeño,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(w^2) = \frac{\langle G^+ \rangle}{-\varepsilon \langle G^{+2} \rangle + \langle G^+ \rangle},$$

donde

$$\begin{aligned} \langle G^+ \rangle &= \varepsilon^{-1} \iint pG_\varepsilon^+ \tilde{p} d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}), & \langle G^- \rangle &= \varepsilon^{-1} \iint pG_\varepsilon^- \tilde{p} d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}), \\ \langle G^{+2} \rangle &= \varepsilon^{-2} \iint (pG_\varepsilon^+ \tilde{p})^2 d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}), & \langle G^{-2} \rangle &= \varepsilon^{-2} \iint (pG_\varepsilon^- \tilde{p})^2 d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}). \end{aligned}$$

Demostración. Usando la regla de interacción y la distribución de la población tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}(w^2) &= \frac{d}{dt} \int w^2 \mu_t(w) dw \\ &= \iint [(w + pG_\varepsilon^+ \tilde{p} \tilde{w} - pG_\varepsilon^- \tilde{p} w)^2 - w^2] d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}) \\ &= \iint [(pG_\varepsilon^+ \tilde{p})^2 (\tilde{w})^2 + 2w\tilde{w}(pG_\varepsilon^+ \tilde{p})] d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}) \\ &\quad + \iint [(pG_\varepsilon^- \tilde{p})^2 - 2(pG_\varepsilon^- \tilde{p})] (w)^2 d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}) \\ &\quad - \iint (pG_\varepsilon^+ \tilde{p})(pG_\varepsilon^- \tilde{p}) w \tilde{w} d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}). \end{aligned}$$

Luego debido a que $\mathbb{E}(w^2) = \mathbb{E}(\tilde{w}^2)$, $\mathbb{E}(w) = \mathbb{E}(\tilde{w}) = 1$ y que

$$\iint (pG_\varepsilon^+ \tilde{p})(pG_\varepsilon^- \tilde{p}) w \tilde{w} d\mu_t(w) d\mu_t(\tilde{w}) = 0,$$

para cada estrategia pura pues para cada p y \tilde{p} sucede que o bien $(pG_\varepsilon^+ \tilde{p}) = 0$ o bien $(pG_\varepsilon^- \tilde{p}) = 0$. Con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}(w^2) &= \varepsilon^2 \langle G^{+2} \rangle \mathbb{E}(w^2) + 2\varepsilon \langle G^+ \rangle \\ &\quad + \varepsilon^2 \langle G^{-2} \rangle \mathbb{E}(w^2) - 2\varepsilon \langle G^- \rangle \mathbb{E}(w^2). \end{aligned}$$

Observemos que $u(t) = \mathbb{E}(w^2)$ es una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dt}u(t) = mu(t) + b,$$

para $m = \varepsilon^2\langle G^{+2} \rangle + \varepsilon^2\langle G^{-2} \rangle - 2\varepsilon\langle G^- \rangle$ y $b = 2\varepsilon\langle G^+ \rangle$, con condición inicial $u_0 = \mathbb{E}(w_0^2)$ que depende de la distribución inicial de riqueza. La solución explícita es

$$\mathbb{E}(w^2) = C(m, u_0)e^{mt} - m^{-1}b$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(w^2) = \frac{-2\langle G^+ \rangle}{\varepsilon\langle G^{+2} \rangle + \varepsilon\langle G^{-2} \rangle - 2\langle G^- \rangle}$$

para ε suficientemente pequeño.

El resultado se sigue de que $\langle G^+ \rangle = \langle G^- \rangle$ and $\langle G^{+2} \rangle = \langle G^{-2} \rangle$ debido a la simetría del juego. \square

Notemos que el resultado anterior no depende de la cantidad de jugadores.

2.3. Simulaciones

Dada la matriz del intercambio de riqueza G definimos la matriz $A = (a_{lk})_{1 \leq l, m \leq d}$ como

$$a_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{si } g_{lm} > 0; \\ 0 & \text{si } g_{lm} = 0; \\ -1 & \text{si } g_{lm} < 0; \end{cases}$$

que usamos para el proceso de evolución como definimos (2.1).

Para simular el modelo en la computadora usamos GNU Octave [15]. En el pseudo-algoritmo 1 que usamos para las simulaciones fijamos una variable positiva $M \in \mathbb{N}$ y elegimos $\delta = 1/M$.

En lo que sigue estudiamos computacionalmente dos ejemplos. Empezamos con el juego de dos estrategias que presentamos en 2.1.3 y donde nos interesa la distribución de riqueza de la población. En segundo lugar trabajamos con el clásico juego Piedra, papel o tijera (ver 1.2.1) y miramos tanto la distribución de riqueza como la evolución de las estrategias.

2.3.1. Simulaciones para juegos de dos estrategias

Consideremos un juego simétrico de dos estrategias y suma cero, la matriz G_ε de pagos del juego es de la forma

$$G_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithm 1: pseudocódigo

Data: $d \in \mathbb{N}$ es la cantidad de acciones (estrategias puras). $G \in \mathbb{R}^{K \times K}$ es una matriz antisimétrica con coeficientes en $[-1, 1]$. $N \in \mathbb{N}$ es la cantidad de jugadores. $T \in \mathbb{N}$ es la cantidad de intercambios (juegos) que se llevan a cabo en una corrida. $\delta > 0$ pequeño (para usar en (2.1))**Start:** para cada jugador $i = 1, \dots, N$ tenemos una riqueza $w^{(i)} \geq 0$ y un vector de estrategias mixtas $p^{(i)}$.**for** $t = 1, \dots, T$ **do**

1. Elegimos de forma aleatoria con distribución uniforme dos agentes i y j .
2. Para el jugador elegimos aleatoriamente una estrategia pura según los pesos dados por $p_1^{(i)}, \dots, p_d^{(i)}$.
3. Repetimos lo anterior para el jugador j .
4. Redefinimos las riquezas de estos dos jugadores siguiendo la regla (2.5).
5. Redefinimos las estrategias mixtas siguiendo la regla (2.1).

end**Result:** tenemos una riqueza final y un vector de estrategias mixtas final para cada jugador $1 \leq i \leq N$.

donde $\varepsilon \in (0, 1)$.

Como vimos en 2.1.3 todos los jugadores convergen a utilizar una estrategia pura (pues es la óptima). Por la simetría del juego, una vez que aprendieron la estrategia pura, el pago es cero. Por lo tanto, a partir de un momento la distribución de riqueza no varía en el tiempo y estudiamos la ventaja que representa comenzar jugando *cerca* de la estrategia óptima.

Resulta importante el valor del paso δ . Corrimos el algoritmo para 10^4 jugadores donde cada uno comenzó con 1 de riqueza, usamos $\varepsilon = 0,1$ y promediamos 100 simulaciones donde usamos siempre el mismo vector inicial de estrategias. En la figura 2.1 observamos la distribución estacionaria para $\delta = 0,1$ (izquierda), $\delta = 0,01$ (centro) y $\delta = 0,001$ (derecha).

En la figura 2.2 mostramos la riqueza final promedio en función de la probabilidad inicial de jugar la estrategia óptima. Como es de esperar, aquellos que comienzan más propensos a usarla terminan con mayor riqueza. Aquí el valor de δ (que es el parámetro que usamos para la regla de actualización (2.1)) es la velocidad con la que se mueve el sistema y utilizamos $\delta = 0,1$ (izquierda), $\delta = 0,01$ (centro) y $\delta = 0,001$ (derecha).

Figura 2.1: distribución estacionaria de la riqueza (*wealth*) para $\delta = 0,1$ (izquierda); $0,01$ (centro); $0,001$ (derecha). Se promedian cien simulaciones con la misma distribución inicial de estrategias y riqueza, para $N = 10^4$ y $\varepsilon = 0,1$;

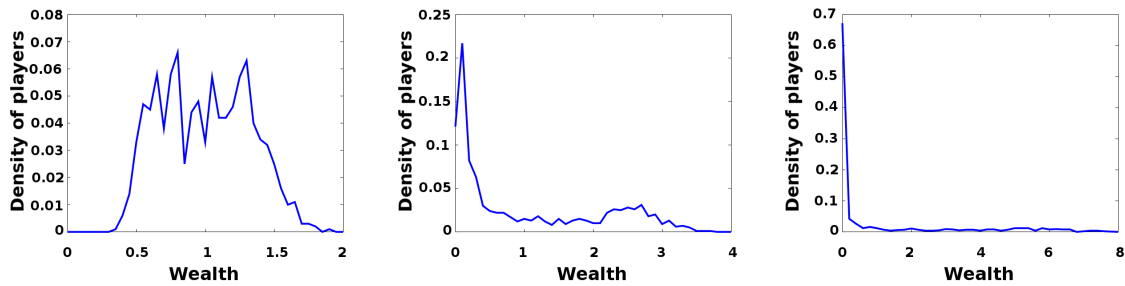
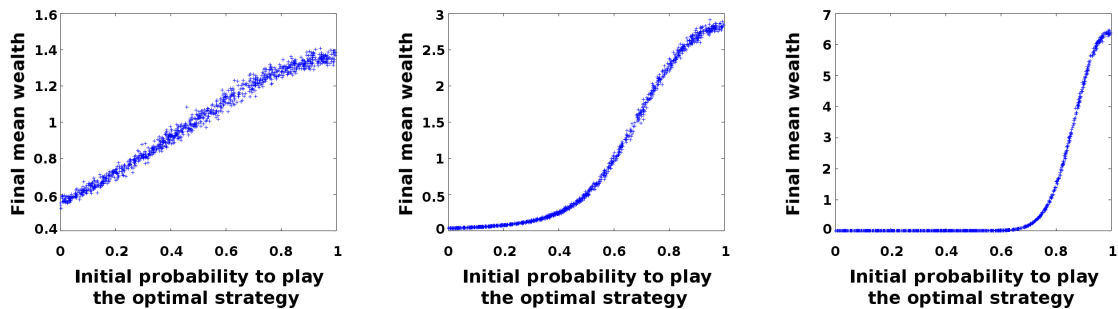


Figura 2.2: riqueza final promedio en función de la probabilidad inicial de jugar la estrategia óptima, para $\delta = 0,1$ (izquierda); $0,01$ (centro); $0,001$ (derecha). Se promedian cien simulaciones con la misma distribución inicial de estrategias y riqueza, para $N = 10^4$ y $\varepsilon = 0,1$.



2.3.2. Simulaciones para Piedra, papel o tijera

Este juego es tan popular como interesante para la teoría evolutiva de juegos. La matriz que define el juego es de la forma

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ b & 0 & -a \\ -a & b & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a, b > 0$ y el único equilibrio de Nash es $(1/3, 1/3, 1/3)$. Además las soluciones de la ecuación del replicador convergen, divergen o rotan dependiendo de los valores de a y b (ver [24]).

Fijemos $a = b = 1$ y reescalamos para diferentes valores de $\varepsilon \in (0, 1)$. Si calculamos la matriz A que define el comportamiento evolutivo de los jugadores obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que si $\varepsilon = 1$ entonces $G = A$ pero presevamos la notación ya que A es la matriz del proceso de evolución de las estrategias mixtas y G la matriz de intercambio de riqueza. Además, a diferencia del anterior juego, no hay equilibrios puros y el único equilibrio de Nash es mixto, $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Proceso evolutivo

Para analizar la evolución usamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_1^{(i)} &= p_1^{(i)} e_1 A \bar{p} - p^{(i)} A e_1 \bar{p}_1 = p_1^{(i)} (1 - \bar{p}_1 - 2\bar{p}_2) + \bar{p}_1 (1 - p_1^{(i)} - 2p_2^{(i)}), \\ \frac{d}{dt} p_2^{(i)} &= p_2^{(i)} e_2 A \bar{p} - p^{(i)} A e_2 \bar{p}_2 = -p_2^{(i)} (1 - 2\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - \bar{p}_2 (1 - 2p_1^{(i)} - p_2^{(i)}). \end{aligned}$$

Promediando y escalando el tiempo nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{p}_1 &= \bar{p}_1 (1 - \bar{p}_1 - 2\bar{p}_2), \\ \frac{d}{dt} \bar{p}_2 &= -\bar{p}_2 (1 - 2\bar{p}_1 - \bar{p}_2). \end{aligned}$$

Linealizamos el sistema en el punto de equilibrio $(1/3, 1/3, 1/3)$ y obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son puramente imaginarios. Por lo tanto sus soluciones describen órbitas periódicas cerca del punto de equilibrio y la estrategia promedio no converge. Esto no es lo que observamos en las simulaciones donde en la figura 2.3 se observa que

$$\bar{p} \rightarrow (1/3, 1/3, 1/3)$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Debemos tener en cuenta que al trabajar con finitos jugadores aparecen nuevos términos en la ecuación, de orden $O(1/N^2)$ y que la ecuación linealizada descarta términos que podrían determinar la convergencia.

Distribución de riqueza

En la figura 2.4 mostramos varios histogramas de la distribución de riqueza para diferentes valores de ε y siempre con $N = 10^4$ jugadores. Promediamos diez corridas donde empezamos siempre con el mismo estado de distribución de estrategias y la riqueza inicial es 1 para cada jugador. Notemos que tenemos una distribución menos equitativa cuando ε crece. De hecho, si $\varepsilon = 1$ toda la riqueza es absorbida por el jugador ganador de cada juego y, a largo plazo, la riqueza se acumula en un solo agente (si bien continúa circulando de uno a otro).

Las líneas sólidas en la figura 2.4 corresponden a una función Gamma

$$\Gamma(x) = \frac{v^v e^{-vx}}{\Gamma(v) x^{1-v}},$$

donde $v = v(\varepsilon)$ es la varianza de los datos en cada caso.

El valor $v(\varepsilon) = \varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1}$ podemos calcularlo con la proposición 2.2.1 o usando directamente la regla de interacción (2.6)

$$w^{(i)*} = w^{(i)} + \varepsilon(g_{lm}^+ w^{(j)} - g_{lm}^- w^{(i)}).$$

Notemos $V = \mathbb{E}(w^{(i)2})$, la linealidad del valor esperado implica que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([w^{(i)*}]^2) &= \mathbb{E}([w^{(i)} + \varepsilon g_{lm}^+ w^{(j)} - \varepsilon g_{lm}^- w^{(i)}]^2) \\ &= \mathbb{E}([w^{(i)}]^2) + \mathbb{E}([\varepsilon g_{lm}^+ w^{(j)}]^2) + \mathbb{E}([\varepsilon g_{lm}^- w^{(i)}]^2) + 2\mathbb{E}(\varepsilon g_{lm}^+ w^{(j)} w^{(i)}) \\ &\quad - 2\mathbb{E}(\varepsilon g_{lm}^- w^{(i)2}) - 2\mathbb{E}(\varepsilon^2 g_{lm}^+ g_{lm}^- w^{(j)} w^{(i)}). \end{aligned}$$

Con lo cual

$$V = V + \varepsilon^2 \mathbb{E}([g_{lm}^+]^2) V + \varepsilon^2 \mathbb{E}([g_{lm}^-]^2) V + \varepsilon 2\mathbb{E}(g_{lm}^+) - 2\varepsilon \mathbb{E}(g_{lm}^-) V - \varepsilon^2 2\mathbb{E}(g_{lm}^+ g_{lm}^-)$$

y obtenemos

$$V = \frac{2\mathbb{E}(g_{lm}^+) - \varepsilon 2\mathbb{E}(g_{lm}^+ g_{lm}^-)}{2\mathbb{E}(g_{lm}^-) - \varepsilon \mathbb{E}([g_{lm}^+]^2) - \varepsilon \mathbb{E}([g_{lm}^-]^2)}.$$

Cuadro 2.1: valores de la varianza dependiendo del valor de ε .

Valores de ε	Varianza muestral	Valor teórico	Error relativo
0,1	0,1114	0,1111	0,0030
0,3	0,4365	0,4286	0,0185
0,5	1,0098	1,0000	0,0098
0,7	2,3635	2,3333	0,0129
0,9	9,0967	9,0000	0,0107

Luego usando que

$$\mathbb{E}(g_{lm}^+) = \mathbb{E}(g_{lm}^-) = \mathbb{E}([g_{lm}^-]^2) = \mathbb{E}([g_{lm}^+]^2) = \frac{1}{3}$$

y que $\mathbb{E}(g_{lm}^+ g_{lm}^-) = 0$ debido a que alguno debe valer cero, llegamos a

$$V = \frac{2/3}{2/3 - 2\varepsilon/3} = \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

En el cuadro 2.1 vemos que la varianza de la muestra y el valor teórico $\varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1}$ están muy próximos.

Figura 2.3: difusión de $N = 10^4$ jugadores en el simplex. De arriba hacia abajo, y de izquierda a derecha, ubicación de los jugadores tras $T = 0, 5, 10, 45, 100$ y 1000 pasos temporales. La estrategia promedio aparece en rojo.

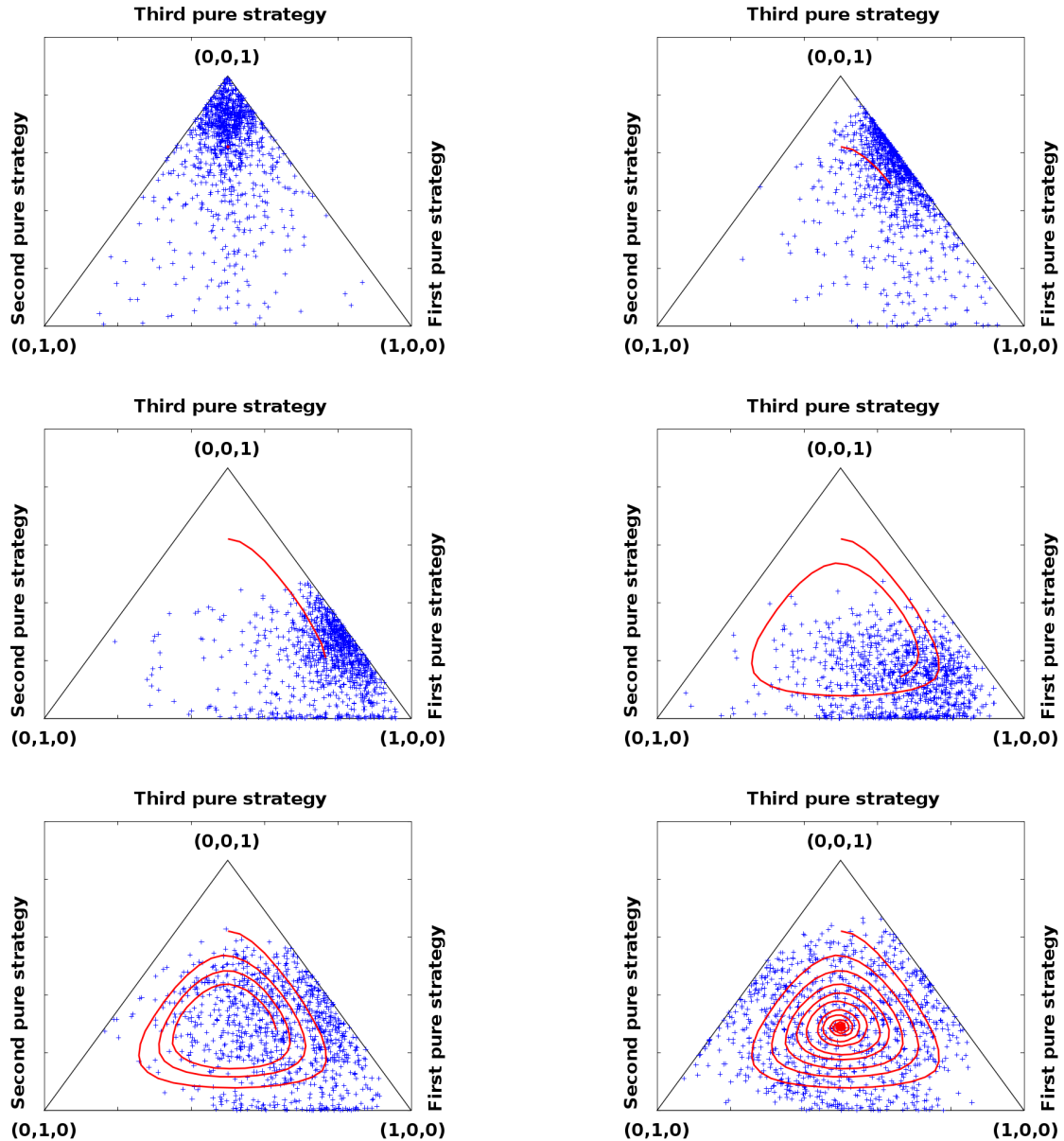
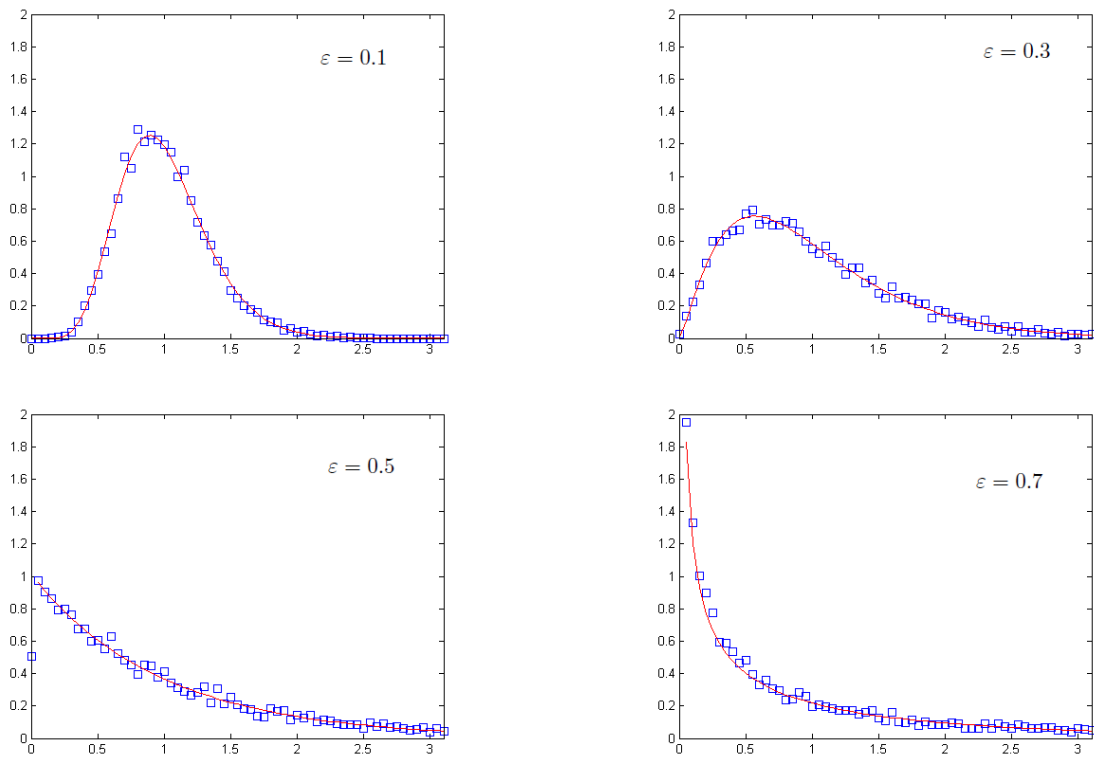


Figura 2.4: histograma de la distribución de riqueza para 10^4 jugadores, promediamos sobre 10 corridas donde todos comenzaron con 1 de riqueza. La línea sólida representa la función Gamma con parámetro $v = v(\varepsilon)$.



3

Infinitos jugadores

En este capítulo estudiamos la evolución de las estrategias para una población con infinitos jugadores. Planteamos una ecuación de tipo Boltzmann para modelar el problema y probamos la existencia y unicidad de solución. Luego mediante el método de *grazing limit* estudiamos el modelo cuando la interacción entre los jugadores (representada por el parámetro δ) tiende a cero.

En el capítulo anterior llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe el comportamiento de cada jugador cuando trabajamos con una población finita. Aún si no podemos resolverlo siempre está la posibilidad de aproximar la solución numéricamente. Sin embargo, si el número de jugadores de la población es considerablemente grande, debemos abandonar la idea de aproximar la solución computacionalmente. Ante este problema la técnica usual es pensar a la población como un conjunto de infinitos jugadores y no resolver el comportamiento de cada uno, sino considerar a la población como una distribución en el espacio de estrategias. Por esta razón trabajamos con funciones que a cada tiempo devuelven una medida de probabilidad sobre el espacio de estrategias mixtas.

Para modelar la evolución planteamos una ecuación de tipo Boltzmann que proviene de la teoría cinética de gases. En [28] L. Pareschi y G. Toscani utilizan esta ecuación para modelar distintos sistemas sociales y económicos con interacciones entre agentes. Tomamos esta idea y la aplicamos al modelo donde la interacción está determinada por un juego simétrico de suma cero.

En la sección 3.1 extendemos el modelo que planteamos en el capítulo anterior para adaptarlo a una población con infinitos jugadores. Al proceso evolutivo de los jugadores le agregamos un *ruido* cada vez que modifican su vector de estrategias mixtas. Luego planteamos la ecuación de Boltzmann para el modelo y siguiendo el trabajo [32] probamos que existe una única solución.

Recordemos que $\delta > 0$ es el parámetro que define la variación del vector de estrategias mixtas en el proceso evolutivo como aparece en 2.1. En la sección 3.2 estudiamos

la dinámica del proceso cuando δ tiende a cero. Reducir este parámetro genera que el proceso sea más lento y para *compensar* la disminución aumentamos el tiempo total a fin de equilibrar los efectos de forma apropiada; hacemos el desarrollo de Taylor en la función test evaluada tras la interacción, tomamos límite en δ , escalamos el tiempo y obtenemos la formulación débil de una ecuación diferencial para la densidad de agentes. Este método se denomina *grazing limit*.

La ecuación que se obtiene posee un término de transporte que proviene del proceso evolutivo donde el campo depende de la propia solución y un término de difusión que se origina por el ruido que introducimos en el modelo. Los argumentos de esta demostración están basados en los trabajos [43, 32]. En el siguiente capítulo 4 nos centramos en estudiar la ecuación de transporte sin difusión.

3.1. Descripción del modelo

Para cada tiempo $t \geq 0$ trabajamos con una medida de probabilidad $u_t \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ sobre el simplex de dimensión $d - 1$, es decir,

$$\Delta = \left\{ p = (p_1, \dots, p_d) \in [0, 1]^d \text{ tal que } \sum_{i=1}^d p_i = 1 \right\}.$$

Cada jugador se mueve en el espacio de estrategias mixtas Δ y luego de interactuar con otro actualiza su posición. Dada una estrategia mixta $p \in \Delta$ debemos definir la nueva ubicación p^* de forma tal que pertenezca a Δ .

Fijemos un jugador y su vector de estrategias mixtas p y veamos cómo definimos p^* . Buscamos una variable aleatoria que asigne probabilidad p_i a usar (solo) la estrategia s_i . Llamamos f a la densidad de esta variable aleatoria y definimos $f : [0, 1] \times \Delta \rightarrow \{0, 1\}^d$ dependiente del vector p tal que para cada $i = 1, \dots, d$

$$f_i(\zeta; p) := \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j < i} p_j \leq \zeta < \sum_{j \leq i} p_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Aquí, si ζ es una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$ entonces $f_i(\zeta, p)$ vale 1 con probabilidad p_i . Luego el vector aleatorio $f(\zeta, p)$ modela la elección de la estrategia pura a jugar por un jugador con estrategia mixta p .

Observación 3.1.1. *Para simplificar notación obviamos escribir la dependencia de f respecto de p . En todo el capítulo usamos $f_i(\zeta)$ en vez de $f_i(\zeta; p)$. De igual $f(\tilde{\zeta})$ depende del vector \tilde{p} .*

Como en el capítulo anterior, tenemos un parámetro δ , positivo y pequeño, que representa la *intensidad* con la cual los jugadores modifican su estrategia luego de cada interacción.

Por otro lado, debemos asegurar que cada nuevo vector de estrategias p^* permanezca en el simplex Δ teniendo especial cuidado en los casos en que queremos reducir la probabilidad de jugar una estrategia que, de por sí, ya es muy chica. Para esto definimos la función

$$h(p) := \text{mín} \left\{ \prod_{i=1}^d p_i, c \right\} \quad (3.2)$$

donde $c > 0$ es una constante. La razón de esta definición es que respetamos la idea del capítulo anterior en el cual la actualización de la estrategia es constante lejos del borde (se corresponde con $h \equiv c$). Además notemos que esta función es continua y tiende a cero cuando nos acercamos al borde, es decir, $h(p) \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \text{Borde}(\Delta)$.

Buscamos un proceso de adaptación que satisfaga que si s_i varía entonces el valor esperado de ese cambio valga $\delta h(p)$. Una vez que el jugador elige una estrategia pura (con la probabilidad dada por su vector p) entonces $f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \in [-1, 1]$ donde A es la matriz antisimétrica de pagos del juego y un valor negativo significa que el primer jugador perdió, cero que empató y positivo que ganó.

Para terminar esta construcción introducimos un ruido *pequeño* que afecta a cada jugador independientemente de la estrategia que haya usado. Definimos un parámetro $0 < r \ll 1$ de forma que $(\delta + r) < 1$ y un vector aleatorio $q \in \Delta$ con distribución θ uniforme en el simplex.

Juntando todo lo anterior definimos la nueva estrategia como

$$p_i^* = \begin{cases} p_i + \delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) + r(q_i - 1/d)G(p) & \text{si } f_i(\zeta) = 1 \text{ y } f_i(\tilde{\zeta}) = 0, \\ p_i - \delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) + r(q_i - 1/d)G(p) & \text{si } f_i(\zeta) = 0 \text{ y } f_i(\tilde{\zeta}) = 1, \\ p_i + r(q_i - 1/d)G(p) & \text{otro} \end{cases}$$

donde G es una función suave tal que $G(p) < p_i$ para todo i . Como ejemplo podemos considerar $G(p) = h(p)$ dada por (3.2).

Estamos en condiciones de escribir la regla general de actualización que usamos en este capítulo.

Definición 3.1.1. Sean δ, f, r, q, h y G con las hipótesis pedidas anteriormente. Dados dos vectores $p, \tilde{p} \in \Delta$ definimos los nuevos vectores de probabilidad tras el juego

$$\begin{aligned} p^* &= p + \delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f(\zeta) - f(\tilde{\zeta}) \right) + r(q - \vec{1}/d)G(p), \\ \tilde{p}^* &= \tilde{p} + \delta h(\tilde{p}) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f(\zeta) - f(\tilde{\zeta}) \right) + r(\tilde{q} - \vec{1}/d)G(\tilde{p}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $\vec{1}$ es el vector de \mathbb{R}^d con todas las entradas igual a 1.

En esta definición p es la estrategia del jugador uno y \tilde{p} la del segundo jugador y p^* es la estrategia del primer jugador luego de la interacción (respectivamente \tilde{p}^* para el segundo). Además ζ y $\tilde{\zeta}$ son variables uniformes en $[0, 1]$ y la función G debe asegurar que el nuevo vector p^* pertenezca a Δ . Veamos que efectivamente la definición devuelve un p^* en el simplex (salvo en el caso que $\zeta = 1$ o $\tilde{\zeta} = 1$ pero que tienen medida nula para la medida Lebesgue en $[0, 1]$). Tanto $f(\zeta)$ como $f(\tilde{\zeta})$ toman una y solo una vez el valor 1 por lo que $\sum_{i=1}^d f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) = 0$ en casi todo punto (podemos suponer que en esos casos no hay cambios). Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d p_i^* &= \sum_{i=1}^d p_i + \delta h f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) + r (q_i - 1/d) G(p) \\ &= 1 + \delta h f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(\sum_{i=1}^d f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) + r \left(\sum_{i=1}^d q_i - 1/d \right) G(p) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Falta ver que $p_i^* \geq 0$ para todo i . Para cualquier estrategia s_i tenemos

$$p_i^* \geq p_i - \delta h(p) - r G(p) \geq p_i (1 - \delta - r) \geq 0,$$

y por lo tanto la actualización está bien definida.

3.2. Grazing limit

Primero planteamos una ecuación de tipo Boltzmann que describe la evolución de la distribución de las estrategias mixtas en la población para cualquier regla de interacción en el simplex Δ . Probamos la existencia y unicidad de solución, luego tomamos límite $\delta \rightarrow 0$, reescalando apropiadamente el tiempo, y obtenemos que la solución de esta ecuación converge cuando $\delta \rightarrow 0$ a una función solución débil de una ecuación de difusión de segundo orden.

3.2.1. La ecuación de Boltzmann

Sea $u(p, t) = u_t(p)$ la distribución de jugadores con estrategia p a tiempo $t \geq 0$, es decir, $u_t(\cdot)$ es una medida de probabilidad en el espacio Δ y consideremos el núcleo de transición $\beta_{(p, \tilde{p}) \rightarrow (p^*, \tilde{p}^*)}$ que define la probabilidad de que el par (p, \tilde{p}) se convierta en (p^*, \tilde{p}^*) luego de la interacción.

Dada una función test arbitraria $\varphi \in C^\infty(\Delta, \mathbb{R})$,

$$\int_{\Delta} \varphi(p) du_t(p)$$

describe el valor promedio de φ a tiempo t . La evolución temporal de este promedio está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Delta} \varphi(p) du_t(p) &= \int_{[0,1]^2 \times \Delta^4} \varphi(p^*) \beta_{(p,\tilde{p}) \rightarrow (p^*,\tilde{p}^*)} d\zeta d\tilde{\zeta} du_t(p) du_t(\tilde{p}) dq d\tilde{q} \\ &\quad - \int_{[0,1]^2 \times \Delta^4} \varphi(p) \beta_{(p,\tilde{p}) \rightarrow (p^*,\tilde{p}^*)} du_t(p) du_t(\tilde{p}) dq d\tilde{q} \end{aligned}$$

(ver, por ejemplo, [7]).

Definimos el núcleo $\beta_{(p,\tilde{p}) \rightarrow (p^*,\tilde{p}^*)} = \theta(q)\theta(\tilde{q})$ y obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta} \varphi(p) du_t(p) = \int_{[0,1]^2 \times \Delta^4} \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_t(p) du_t(\tilde{p}) d\theta(q) d\theta(\tilde{q}).$$

Dado que tanto p^* como p no dependen de \tilde{q} y que la distribución θ integra 1 llegamos definimos la evolución temporal como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta} \varphi(p) du_t(p) = \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_t(p) du_t(\tilde{p}) d\theta(q). \quad (3.4)$$

El siguiente resultado muestra que existe una única función que satisface esta ecuación para toda función test.

Teorema 3.2.1. *Para cada dato inicial $u_0 \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ existe una única*

$$u \in C^1([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$$

tal que

$$\int_{\Delta} \varphi(p) du_t(p) = \int_{\Delta} \varphi(p) du_0(p) + \int_0^t \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_s(p) du_s(\tilde{p}) d\theta(q) ds$$

para toda función test $\varphi \in C(\Delta)$.

El Teorema del punto fijo de Banach es la herramienta principal de la demostración de este resultado y puede encontrarse en [32]. La demostración de este teorema es clásica y la omitimos. De todas formas escribimos la demostración en A.1 en el apéndice que se encuentra al final de este trabajo.

3.2.2. El grazing limit

Una vez que probamos la existencia de una única solución para todo $\delta > 0$ suficientemente chico nos interesa estudiar qué sucede cuando tomamos el límite $\delta \rightarrow 0$. Si solo

hiciéramos que δ se achique el proceso se aletargaría hasta que, en el límite, resultaría inmóvil. Entonces para *compensar* este comportamiento incrementamos la cantidad de interacciones aumentando el tiempo que dejamos evolucionar el sistema. En otras palabras si para un δ_0 fijo el sistema se movía hasta el tiempo T_0 y ahora trabajamos con $\delta = \delta_0/2$ entonces dejamos evolucionar hasta un tiempo $2T_0$, el doble del anterior.

Definición 3.2.1. *Dado un campo $\mathcal{K} : \Delta \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ y una función medible y acotada $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que una función $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ satisface en sentido débil la ecuación diferencial*

$$\frac{d}{d\tau} v + \operatorname{div}(\mathcal{K}v) = \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij}(Hv)$$

si para cualquier $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \varphi(p) dv_t(p) &= \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, 0) \\ &+ \int_0^t \int_{\Delta} \nabla \varphi(p) \cdot \mathcal{K}(p, s) dv(p, s) + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Delta} \partial_{ij} \varphi(p) H(p) dv(p, s) ds. \end{aligned}$$

En esta sección probamos que cuando $\delta \rightarrow 0$ y rescalamos el tiempo apropiadamente existe una función límite

$$v : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$$

que verifica en sentido débil la ecuación

$$\frac{d}{d\tau} v + \operatorname{div}(\mathcal{F}[v]v) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij}(G^2 v)$$

donde λ es una constante que depende de δ y el parámetro r y $\mathcal{F}[v] : \Delta \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un campo de la forma

$$\mathcal{F}_i[v](p, \tau) = \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k(\tau) + p_k \bar{p}_i(\tau)). \quad (3.5)$$

Aquí \bar{p} sigue siendo la estrategia promedio

$$\bar{p}_i(\tau) = \int_{\Delta} p_i dv(p, \tau)$$

que depende de la propia solución v y h es la función que definimos en (3.2). La constante Q_{ij} es la covarianza de la distribución θ , es decir,

$$Q_{ij} := \int_{\Delta} (q_i - 1/d)(q_j - 1/d) d\theta(q). \quad (3.6)$$

Enunciemos el teorema principal de esta sección que nos proporciona esta ecuación diferencial.

Teorema 3.2.2. Sean $u_0 \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ y u_δ la única solución de la ecuación de Boltzmann dada por el teorema 3.2.1 con condición inicial u_0 .

Si la regla de interacción (3.3) satisface $\lambda = r^2/\delta$ para algún $\lambda \geq 0$ y definimos

$$u_\delta(p, \tau) := u(p, t) \quad (3.7)$$

con escala temporal $\tau = \delta t$ entonces existe $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ tal que u_δ tiende a v en $C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta))$ para todo $T > 0$ cuando δ tiende a cero. Además:

- si λ es una constante positiva entonces v satisface en sentido débil la ecuación

$$\frac{d}{d\tau}v + \operatorname{div}(\mathcal{F}[v]v) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij}(G^2 v);$$

- si λ tiende a cero cuando δ tiende a cero entonces v satisface en sentido débil la ecuación anterior sin el término de difusión, es decir,

$$\frac{d}{d\tau}v + \operatorname{div}(\mathcal{F}[v]v) = 0; \quad (3.8)$$

- si $\lambda = r^2/\delta^\alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$ y reescalamos el tiempo de forma $\tau = \delta^\alpha t$ entonces, nuevamente, existe una nueva medida $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ tal que u_δ tiende a v cuando δ tiende a cero. Y satisface en sentido débil la ecuación

$$\frac{d}{d\tau}v = \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij}(G^2 v).$$

En todos los casos $\mathcal{F}[v]$ está definido por (3.5) y Q_{ij} es la covarianza dada en (3.6).

Lo que resta del capítulo lo destinamos a probar este resultado.

3.2.3. Preliminares de la demostración

Por comodidad definimos la probabilidad acumulada $P_0 := 0$, $P_k := \sum_{h=1}^k p_h$ para $k = 1, \dots, d$ (y lo mismo para \tilde{P}_k) entonces podemos escribir $f_i(\zeta) = f_i(\zeta, p) = 1$ si

$\zeta \in [P_{i-1}, P_i)$ y cero en cualquier otro caso. Así para cualquier i y cualquier medida u sobre Δ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \int_0^1 f_i(\zeta, p) d\zeta du(p) &= \int_{\Delta} \sum_{l=1}^d \int_{P_{l-1}}^{P_l} f_i(\zeta, p) d\zeta du(p) \\ &= \int_{\Delta} \int_{P_{i-1}}^{P_i} 1 d\zeta du(p) = \int_{\Delta} P_i - P_{i-1} du(p) \\ &= \int_{\Delta} p_i du(p). \end{aligned}$$

Con esta idea y antes de demostrar el teorema principal veamos el siguiente lema que resulta ilustrativo y necesario.

Lema 3.2.1. *Consideremos $i, j = 1, \dots, d$ y $p, \tilde{p} \in \Delta$. Entonces*

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\zeta, p)^T A f(\tilde{\zeta}, \tilde{p}) \left(f_i(\zeta, p) - f_i(\tilde{\zeta}, \tilde{p}) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} = \sum_{k=1}^d a_{ik} (p_i \tilde{p}_k + p_k \tilde{p}_i). \quad (3.9)$$

Además definamos la función $\chi_{(i=j)}$ tal que toma el valor uno si $i = j$ y cero en cualquier otro caso. Luego tenemos una segunda igualdad de forma

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left(f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \right)^2 \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) \left(f_j(\zeta) - f_j(\tilde{\zeta}) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} \\ = \chi_{(i=j)} \left[\sum_{k=1}^d a_{ik}^2 (p_i \tilde{p}_k + p_k \tilde{p}_i) \right] - a_{ij}^2 (p_i \tilde{p}_j + p_j \tilde{p}_i). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Demostración. Fijemos i y recordemos de la definición (3.1) que $f_i(\zeta)$ vale 1 si

$$\zeta \in [P_{i-1}, P_i)$$

y 0 en cualquier otro caso. Por lo tanto

$$\sum_{l,m=1}^d \int_{P_{l-1}}^{P_l} f_m(\zeta) \times f_i(\zeta) d\zeta = \int_{P_{i-1}}^{P_i} f_m(\zeta) \times f_i(\zeta) d\zeta = \begin{cases} \zeta \Big|_{P_{i-1}}^{P_i} = p_i & \text{si } m = i; \\ 0 & \text{si } m \neq i. \end{cases}$$

Luego la primera igualdad es

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} \\
&= \sum_{k,l=1}^d \int_{\tilde{P}_{k-1}}^{\tilde{P}_k} \int_{P_{l-1}}^{P_l} \sum_{m,n=1}^d f_m(\zeta) a_{mn} f_n(\tilde{\zeta}) \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} \\
&= \sum_{k=1}^d \int_{\tilde{P}_{k-1}}^{\tilde{P}_k} \sum_{n=1}^d p_i a_{in} f_n(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta} - \sum_{l=1}^d \int_{P_{l-1}}^{P_l} \sum_{m=1}^d f_m(\zeta) \tilde{p}_i a_{mi} d\zeta \\
&= \sum_{k=1}^d p_i \tilde{p}_k a_{ik} - \sum_{l=1}^d p_l \tilde{p}_i a_{li} \\
&= \sum_{k=1}^d (p_i \tilde{p}_k a_{ik} - p_k \tilde{p}_i a_{ki}) \\
&= \sum_{k=1}^d a_{ik} (p_i \tilde{p}_k + p_k \tilde{p}_i)
\end{aligned}$$

donde estamos usando que la matriz A es antisimétrica.

Para la segunda igualdad notemos que es similar, solo que en este caso $[f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta})]^2$ puede tomar solo dos valores: 0 o 1. Entonces

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \left(f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \right)^2 \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) \left(f_j(\zeta) - f_j(\tilde{\zeta}) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \right)^2 \left(f_i(\zeta) f_j(\zeta) - f_i(\zeta) f_j(\tilde{\zeta}) - f_i(\tilde{\zeta}) f_j(\zeta) + f_i(\tilde{\zeta}) f_j(\tilde{\zeta}) \right) d\zeta d\tilde{\zeta}.
\end{aligned}$$

Si $i \neq j$ entonces $f_i(\zeta) f_j(\zeta) = f_i(\tilde{\zeta}) f_j(\tilde{\zeta}) = 0$. Y si $i = j$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \left(f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \right)^2 f_i(\zeta) f_i(\zeta) d\zeta d\tilde{\zeta} \\
&= \sum_{k,l=1}^d \int_{\tilde{P}_{k-1}}^{\tilde{P}_k} \int_{P_{l-1}}^{P_l} \sum_{m,n=1}^d \left(f_m(\zeta) a_{mn} f_n(\tilde{\zeta}) \right)^2 f_i(\zeta)^2 d\zeta d\tilde{\zeta} \\
&= \sum_{k=1}^d p_i \int_{\tilde{P}_{k-1}}^{\tilde{P}_k} \sum_{n=1}^d \left(a_{in} f_n(\tilde{\zeta}) \right)^2 d\tilde{\zeta} \\
&= \sum_{k=1}^d p_i \tilde{p}_k a_{ik}^2.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left(f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \right)^2 f_i(\zeta) f_j(\tilde{\zeta}) d\zeta d\tilde{\zeta} &= \int_{\tilde{P}_{j-1}}^{\tilde{P}_j} \int_{P_{i-1}}^{P_i} \sum_{m,n=1}^d \left(f_m(\zeta) a_{mn} f_n(\tilde{\zeta}) \right)^2 d\zeta d\tilde{\zeta} \\ &= \int_{\tilde{P}_{j-1}}^{\tilde{P}_j} \int_{P_{i-1}}^{P_i} a_{ij}^2 d\zeta d\tilde{\zeta} \\ &= p_i \tilde{p}_j a_{ij}^2 \end{aligned}$$

Los otros casos salen de la misma forma y el lema queda demostrado. \square

En el teorema principal usamos la norma

$$\|u\|_{sup} := \sup \left\{ \int_{\Delta} \varphi(p) du(p) \text{ tal que } \varphi \in C^3(\Delta, \mathbb{R}) \text{ y } \|\varphi\|_3 \leq 1 \right\} \quad (3.11)$$

en el espacio $C^3(\Delta, \mathbb{R})$, donde

$$\|\varphi\|_3 := \sum_{|\alpha| \leq 3} \left\| \frac{\partial^\alpha \varphi(p)}{\partial p^\alpha} \right\| \quad (3.12)$$

para que nos garantice la convergencia uniforme de la función y sus derivadas hasta orden 3.

Observación 3.2.1. *Esta norma induce la topología débil en $\mathcal{P}_1(\Delta)$. Esta también está generada por la distancia W_1 de Wasserstein [19].*

3.2.4. Demostración del teorema de *grazing limit*

Finalizamos esta sección con la demostración del teorema 3.2.2. La idea es aproximar la diferencia $\varphi(p^*) - \varphi(p)$ usando el desarrollo de Taylor de φ en p por lo cual resulta fundamental tener una norma apropiada en el espacio $C^3(\Delta, \mathbb{R})$ como la definida en (3.12). Luego, para cualquier $T > 0$ fijo usamos el teorema de Arzelà-Ascoli sobre las funciones

$$u_\delta : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$$

para obtener un límite v cuando δ tiende a cero.

Demostración. Dividamos la demostración en cuatro partes para facilitar su lectura.

Primer paso. Para empezar queremos calcular $d/d\tau \int \varphi du_\delta$. Con la nueva escala temporal $\tau = \delta t$, usando (3.7) y por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Delta} \varphi(p) du_\delta(p, \tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{\Delta} \varphi(p) du(p, \tau/\delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Delta} \varphi(p) du(p, t) \right) \Big|_{t=\tau/\delta}.$$

Recordemos que por (3.4) resulta

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta} \varphi(p) du_t(p) = \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du(p, t) du(\tilde{p}, t) d\theta(q)$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Delta} \varphi(p) du_{\delta}(p, \tau) &= \frac{1}{\delta} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du(p, \tau/\delta) du(\tilde{p}, \tau/\delta) d\theta(q) \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, \tau) du_{\delta}(\tilde{p}, \tau) d\theta(q). \end{aligned}$$

Para una función suave φ escribimos su polinomio de Taylor de orden 2, es decir,

$$\varphi(p^*) - \varphi(p) = \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi(p) (p_i^* - p_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) (p_i^* - p_i) (p_j^* - p_j) + R(p^*, p)$$

donde $|R(p^*, p)| \leq \|D^3 \varphi\| |p^* - p|^3$. Luego tenemos que

$$\int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, \tau) du_{\delta}(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \quad (3.13)$$

$$= \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi(p) (p_i^* - p_i) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, \tau) du_{\delta}(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \quad (3.14)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) (p_i^* - p_i) (p_j^* - p_j) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, \tau) du_{\delta}(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \quad (3.15)$$

$$+ \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} R(p^*, p) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, \tau) du_{\delta}(\tilde{p}, \tau) d\theta(q). \quad (3.16)$$

Segundo paso. Estudiemos cada integral del miembro derecho de la última igualdad; la idea es ver que la primera aporta el término de transporte, la segunda es un término de difusión (aparecen las derivadas segundas) y la tercera un resto que tiende a cero cuando tomamos límite en δ .

Recordemos que θ es la medida uniforme sobre el simplex Δ , por lo cual $\int_{\Delta} d\theta(q) = 1$, $\int_{\Delta} q_i d\theta(q) = 1/d$ y

$$\int_{\Delta} r(q_i - 1/d) G(p) d\theta(q) = rG(p)(1/d - 1/d) = 0. \quad (3.17)$$

Para calcular el término de transporte (3.14) reemplacemos $(p^* - p)$ usando la regla de interacción (3.3) con lo cual

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^d \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \partial_i \varphi(p) \left[\delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) \right. \\
& \quad \left. + r(q_i - 1/d) G(p) \right] d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{\Delta^2} \partial_i \varphi(p) \sum_{k=1}^d \delta h(p) a_{ik} (p_i \tilde{p}_k + p_k \tilde{p}_i) du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{\Delta} \partial_i \varphi(p) \sum_{k=1}^d \delta h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) du_\delta(p, \tau)
\end{aligned}$$

donde estamos usando la igualdad (3.9) del lema anterior.

Para el término de difusión (3.15) empezamos estudiando

$$\begin{aligned}
(p_i^* - p_i)(p_j^* - p_j) &= \left[\delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) + r(q_i - 1/d) G(p) \right] \\
& \quad \times \left[\delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_j(\zeta) - f_j(\tilde{\zeta}) \right) + r(q_j - 1/d) G(p) \right] \\
&= \left(\delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \right)^2 \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) \left(f_j(\zeta) - f_j(\tilde{\zeta}) \right) \\
& \quad + \delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) r(q_j - 1/d) G(p) \\
& \quad + \delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_j(\zeta) - f_j(\tilde{\zeta}) \right) r(q_i - 1/d) G(p) \\
& \quad + r^2 (q_i - 1/d) (q_j - 1/d) G(p)^2.
\end{aligned}$$

Nuevamente notemos que

$$\int_{\Delta} h f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) r(q_j - 1/d) G(p) d\theta(q) = 0$$

pues el único término que depende de q es $(q_j - 1/d)$ y ya vimos en (3.17) que integra cero. Lo mismo para

$$\int_{\Delta} h f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \left(f_j(\zeta) - f_j(\tilde{\zeta}) \right) r(q_i - 1/d) G(p) d\theta(q) = 0.$$

Además la covarianza $Q_{ij} \in \mathbb{R}$ (como definimos en (3.6)) no varía en el tiempo. Así estamos en condiciones de calcular el segundo término de la integral. Usando la segunda

igualdad (3.10) del lema anterior llegamos a que (3.15) es igual a

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) (p_i^* - p_i)(p_j^* - p_j) d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \\
&= \int_{\Delta^3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) \left(\delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) \right)^2 \\
&\quad \times \left(f_i(\zeta) - f_i(\tilde{\zeta}) \right) \left(f_j(\zeta) - f_j(\tilde{\zeta}) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \\
&+ \int_{[0,1]^2 \times \Delta^2} \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) r^2 (q_i - 1/d)(q_j - 1/d) G(p)^2 d\theta(q) d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) \\
&= \int_{\Delta^2} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) \delta^2 h(p)^2 \left[\chi_{(i=j)} \left(\sum_{k=1}^d a_{ik}^2 (p_i \tilde{p}_k + p_k \tilde{p}_i) \right) \right. \\
&\quad \left. - a_{ij}^2 (p_i \tilde{p}_j + p_j \tilde{p}_i) \right] du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) + r^2 \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} \varphi(p) G(p)^2 du_\delta(p, \tau) \\
&= \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) \delta^2 h(p)^2 \left[\chi_{(i=j)} \left(\sum_{k=1}^d a_{ik}^2 (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) \right) \right. \\
&\quad \left. - a_{ij}^2 (p_i \bar{p}_j + p_j \bar{p}_i) \right] du_\delta(p, \tau) + r^2 \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} \varphi(p) G(p)^2 du_\delta(p, \tau).
\end{aligned}$$

Resta acotar el término del error (3.16). Como $|(q - \bar{1}/d)G(p)|$ y $|h(p)f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta})|$ son menores a uno para cualquier p y q tenemos que

$$|p^* - p|^3 \leq |\delta h(p) f(\zeta)^T A f(\tilde{\zeta}) (f(\zeta) - f(\tilde{\zeta})) + r(q - \bar{1}/d)G(p)|^3 \leq 4(\delta^3 + r^3)$$

lo cual implica que podemos acotar el módulo del término (3.16) por

$$\begin{aligned}
& \int \|D^3 \varphi\| |p^* - p|^3 d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \\
&\leq 4 \int \|D^3 \varphi\| (\delta^3 + r^3) du_\delta(p, \tau) du_\delta(\tilde{p}, \tau) d\theta(q) \\
&\leq 4 \|D^3 \varphi\| (\delta^3 + r^3).
\end{aligned}$$

Tercer paso. Dado un $T > 0$ queremos usar el teorema de Arzelà-Ascoli para la sucesión de funciones $(u_\delta)_{\{\delta > 0\}} : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$ cuando $\delta \rightarrow 0$ con la norma $\|\cdot\|_{sup}$ definida en 3.11. Debemos verificar dos hipótesis: acotación uniforme y equicontinuidad.

Para la acotación uniforme tenemos que

$$\|u_\delta(\cdot, \tau)\|_{sup} = \sup_{\|\psi\|_3 \leq 1} \int_{\Delta} \psi(p) du_\delta(p, \tau) \leq \sup_{\|\psi\|_3 \leq 1} \int_{\Delta} \|\psi(p)\|_3 du_\delta(p, \tau) = 1$$

donde estamos obviando explicitar que las funciones ψ están en el espacio $C^3(\Delta, \mathbb{R})$ y usamos que $u_\delta(\cdot, \tau)$ es una medida de probabilidad.

Para ver la equicontinuidad retomamos la ecuación (3.13) y reemplazamos los términos (3.14) y (3.15) para obtener

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} \varphi(p) du_\delta(p, \tau) - \int_{\Delta} \varphi(p) du_\delta(p, \tau') \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \frac{d}{d\tau} \int_{\Delta} \varphi(p) du_\delta(p, s) ds \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \frac{1}{\delta} \int \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, s) du_\delta(\tilde{p}, s) d\theta(s) ds \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \frac{1}{\delta} \int \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, s) du_\delta(\tilde{p}, s) d\theta(s) ds \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \sum_{i=1}^d \int_{\Delta} \partial_i \varphi(p) \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) du_\delta(p, s) \\ & \quad + \frac{\delta}{2} \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) h(p)^2 \left[\chi_{(i=j)} \left(\sum_{k=1}^d a_{ik}^2 (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) \right) \right. \\ & \quad \quad \left. - a_{ij}^2 (p_i \bar{p}_j + p_j \bar{p}_i) \right] du_\delta(p, s) \\ & \quad + \frac{r^2}{2\delta} \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} \varphi(p) G(p)^2 du_\delta(p, s) \\ & \quad + \frac{1}{\delta} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} R(p^*, p) d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, s) du_\delta(\tilde{p}, s) d\theta(q) ds. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Necesitamos dos cotas más. La primera,

$$\sum_{k=1}^d |h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i)| \leq h(p) (p_i + \bar{p}_i) \leq 2c,$$

la usamos para acotar el término de transporte (3.14) y donde la constante c está dada en la definición de h en (3.2). La segunda,

$$h(p)^2 \left[\chi_{(i=j)} \left(\sum_{k=1}^d a_{ik}^2 (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) \right) - a_{ij}^2 (p_i \bar{p}_j + p_j \bar{p}_i) \right] \leq h(p)^2 \times 2 \leq 2c^2,$$

para acotar el término de difusión (3.15).

Con estas cotas más la del término del resto (3.16) nos queda

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Delta} \varphi(p) du_{\delta}(p, \tau) - \int_{\Delta} \varphi(p) du_{\delta}(p, \tau') \right| \\
& \leq \int_{\tau'}^{\tau} \sum_{i=1}^d \int_{\Delta} |\partial_i \varphi(p)| 2c du_{\delta}(p, s) \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^d \delta \int_{\Delta} |\partial_{ij} \varphi(p)| c^2 du_{\delta}(p, s) \\
& \quad + \frac{r^2}{2\delta} \sum_{i,j=1}^d \int_{\Delta} |\partial_{ij} \varphi(p)| \|G\| du_{\delta}(p, s) du_{\delta}(\tilde{p}, s) \\
& \quad + \left| \frac{4}{\delta} \|D^3 \varphi\|_{\infty} (\delta^3 + r^3) \right| ds \\
& \leq \left[2c \sum_{i=1}^d \|\partial_i \varphi\| + \delta 2c^2 \sum_{i,j=1}^d \|\partial_{ij} \varphi\| + \frac{r^2 \|G\|}{2\delta} \sum_{i,j=1}^d \|\partial_{ij} \varphi\| \right. \\
& \quad \left. + 4 \|D^3 \varphi\| \left(\delta^2 + \frac{r^3}{\delta} \right) \right] |\tau - \tau'| \\
& \leq \|\varphi\|_3 \left[2c + \delta c^2 + \frac{\lambda \|G\|}{2} + 4(\delta^2 + \lambda r) \right] |\tau - \tau'| \\
& \leq \|\varphi\|_3 K |\tau - \tau'|
\end{aligned}$$

donde K es una constante que no depende de δ ni r . Usando la norma que definimos en (3.11) resulta que

$$\|u_{\delta}(\cdot, \tau) - u_{\delta}(\cdot, \tau')\|_{sup} \leq K |\tau - \tau'|$$

por lo cual probamos la equicontinuidad.

Como se cumplen las hipótesis del teorema de Arzelà-Ascoli existe una subsucesión $(\delta_n)_n^1$ convergente a cero y tal que u_{δ_n} converge a una función $v^1 \in C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta))$. A su vez, existe una (sub) subsucesión $(\delta_n)_n^2$ de la sucesión $(\delta_n)_n^1$ tal que u_{δ_n} converge a una función $v^2 \in C([0, 2 \times T], \mathcal{P}_1(\Delta))$. Siguiendo este argumento encontramos una subsucesión $(\delta_n)_n^{\infty}$ convergente a cero tal que u_{δ_n} converge uniformemente a una función $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ en $[0, T]$ para cualquier $T > 0$.

Como notamos en la observación 3.2.1 esta convergencia es también para la distancia de Wasserstein, es decir,

$$\int_{\Delta} \psi(p) du_{\delta_n}(p, \tau) \rightarrow \int_{\Delta} \psi(p) dv(p, \tau) \quad (3.19)$$

cuando δ tiende a cero para cada $\tau \in [0, T]$ y ψ cualquier función Lipschitz. De hecho la convergencia es uniforme en $\tau \in [0, T]$ y en ψ con $Lip(\psi) \leq 1$.

Cuarto paso. Para terminar la demostración debemos ver la ecuación que satisface v dependiendo del comportamiento de $\lambda = r^2/\delta$. Queremos tomar límite en la igualdad (3.18). Retomando la cota que usamos tenemos

$$\left| \frac{\delta}{2} \int_{\Delta^2} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) h(p)^2 \left[\chi_{(i=j)} \left(\sum_{k=1}^d a_{ik}^2 (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) \right) - a_{ij}^2 (p_i \bar{p}_j + p_j \bar{p}_i) \right] du_\delta(p, s) \right| \leq \delta \|\varphi\|_3$$

y tiende a cero cuando δ tiende a cero. De igual forma

$$\left| \frac{1}{\delta} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} R(p^*, p) d\zeta d\tilde{\zeta} du_\delta(p, s) du_\delta(\tilde{p}, s) d\theta(q) \right| \leq 4(\delta^2 + \lambda r) \|\varphi\|_3$$

tiende a cero cuando tomamos límite.

Entonces recordando que $r^2/\delta = \lambda$ y tomando límite en (3.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, \tau) &= \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, \tau') \\ &+ \int_{\tau'}^{\tau} \sum_{i=1}^d \int_{\Delta} \partial_i \varphi(p) \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) dv(p, s) \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} \varphi(p) G(p)^2 dv(p, s) ds \end{aligned}$$

que es la formulación débil de la ecuación

$$\frac{d}{d\tau} v + \operatorname{div}(\mathcal{F}[v] v) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} (G^2 v).$$

Si λ tiende a cero cuando δ tiende a cero resulta que

$$\left| \frac{\lambda}{2} \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} \varphi(p) G(p)^2 du_\delta(p, s) \right| \leq \varphi \|_3 \frac{\lambda \|G\|}{2}$$

y, nuevamente tomando límite en (3.18), llegamos a

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, \tau) &= \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, \tau') \\ &+ \int_{\tau'}^{\tau} \sum_{i=1}^d \int_{\Delta} \partial_i \varphi(p) \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) dv(p, s) ds \end{aligned}$$

que es la formulación débil de la ecuación

$$\frac{d}{d\tau}v + \operatorname{div}(\mathcal{F}[v]v) = 0.$$

Finalmente debemos estudiar el tercer caso cuando $\tau = \delta^\alpha t$ donde $\alpha \in (0, 1)$. Repitiendo lo hecho llegamos a

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} \varphi(p) du_{\delta}(p, \tau) - \int_{\Delta} \varphi(p) du_{\delta}(p, \tau') \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \frac{d}{d\tau} \int_{\Delta} \varphi(p) du_{\delta}(p, s) ds \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \frac{1}{\delta} \int \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, s) du_{\delta}(\tilde{p}, s) d\theta(s) ds \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \frac{1}{\delta} \int \left(\varphi(p^*) - \varphi(p) \right) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, s) du_{\delta}(\tilde{p}, s) d\theta(s) ds \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} \delta^{1-\alpha} \sum_{i=1}^d \int_{\Delta} \partial_i \varphi(p) \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) du_{\delta}(p, s) \\ &\quad + \frac{\delta^{2-\alpha}}{2} \int_{\Delta^2} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} \varphi(p) h(p)^2 \left[\chi_{(i=j)} \left(\sum_{k=1}^d a_{ik}^2 (p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i) \right) \right. \\ &\quad \quad \left. - a_{ij}^2 (p_i \bar{p}_j + p_j \bar{p}_i) \right] du_{\delta}(p, s) \\ &\quad + \frac{r^2}{2\delta^\alpha} \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} \varphi(p) G(p)^2 du_{\delta}(p, s) \\ &\quad + \frac{1}{\delta^\alpha} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} R(p^*, p) d\zeta d\tilde{\zeta} du_{\delta}(p, s) du_{\delta}(\tilde{p}, s) d\theta(q) ds \end{aligned} \tag{3.20}$$

por lo cual

$$\|u_{\delta}(\cdot, \tau) - u_{\delta}(\cdot, \tau')\|_{sup} \leq \left[\delta^{1-\alpha} 2c + \delta^{2-\alpha} c^2 + \frac{\lambda \|G\|}{2} + 4(\delta^{3-\delta} + \lambda r) \right] |\tau - \tau'|$$

e, igual que antes, tenemos la equicontinuidad de las funciones u_{δ} . Por el teorema de Arzelà-Ascoli existe una función $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ con las mismas propiedades que antes. Tomando límite en (3.20) resulta que

$$\int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, \tau) = \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, \tau') + \int_{\tau'}^{\tau} \frac{\lambda}{2} \int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij} \varphi(p) G(p)^2 dv(p, s) ds$$

que es la formulación débil de la ecuación

$$\frac{d}{d\tau}v = \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^d Q_{ij} \partial_{ij}(G^2 v)$$

y entonces el teorema queda demostrado. □

Observación 3.2.2. *Observemos que de la demostración anterior deducimos que el campo es de la forma*

$$\mathcal{F}_i[v](p, t) = \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k(t) + p_k \bar{p}_i(t)).$$

4

La ecuación de transporte

En este capítulo nos centramos en el estudio de la ecuación de transporte obtenida en el teorema 3.2.2 del capítulo anterior. Primero probamos la unicidad de existencia de solución y luego analizamos la estabilidad y demostramos que los puntos de equilibrio son Deltas de Dirac centradas en los equilibrios de Nash. Además estudiamos la estabilidad de los puntos de equilibrio y su relación con la estabilidad de la dinámica del replicador.

Nos interesa estudiar el modelo con el efecto de transporte dado por el proceso evolutivo y sin ruido (que se corresponde con la función $G \equiv 0$ o para un parámetro r suficientemente chico tal que su efecto se pierde). En la sección 4.1 adaptamos las ideas de [6] para probar continuidad respecto del dato inicial y la unicidad de la solución límite del proceso. Este resultado mejora lo que obtuvimos en el capítulo anterior para el caso general en el cual, al tener una subsucesión convergente, nada impedía que hubiera otra solución distinta que no fuese límite de soluciones de la ecuación de Boltzmann.

En la sección 4.2 nos concentramos en el estudio de la estabilidad del problema en el interior del simplex Δ que representa el espacio de estrategias de la población. Solo nos interesa el interior pues el borde resulta invariante en este modelo. Para esto definimos los conceptos de punto de equilibrio, estable y asintóticamente estable siguiendo las definiciones dadas en [25] para la dinámica generada por el sistema del replicador. Como mencionamos en la sección preliminar de esta tesis, los equilibrios de Nash son puntos donde los jugadores no tienen incentivos al cambio. Dado un punto q en el interior del simplex Δ probamos que son equivalentes que la Delta de Dirac δ_q es de equilibrio, q es un equilibrio de Nash del juego, la trayectoria constantemente q es de equilibrio para la dinámica del replicador y q es un autovector asociado al autovalor cero de la matriz A .

Luego estudiamos la estabilidad del sistema. Primero demostramos que si la medida inicial tiene soporte lejos del borde entonces la dinámica de la estrategia promedio es, exactamente, la dinámica del replicador para el juego de matriz A . Probamos que

si al linealizar el sistema del replicador en el punto de equilibrio su matriz jacobiana tiene todos los autovalores con parte real negativa entonces la dinámica de este modelo converge. Además, dado que la estrategia promedio sigue la dinámica del replicador, resulta que si la dinámica del modelo converge entonces también converge la dinámica del replicador.

Con el desarrollo del modelo observamos una forma más sencilla de analizar la convergencia de la dinámica del replicador. En la sección 4.3 probamos cómo comparar la matriz jacobiana del replicador linealizado con la matriz A .

Para terminar el capítulo en la sección 4.4 estudiamos el equilibrio para un caso particular de juegos sin empates donde las entradas de la matriz A toman los valores -1 o 1 fuera de la diagonal (por la antisimetría las entradas en la diagonal principal siempre valen cero). Resulta que existe, a lo sumo, un único punto de equilibrio. Además si la cantidad de estrategias puras es par y hay una estrategia estrictamente dominante o una estrategia estrictamente dominada entonces no hay puntos de equilibrio interiores.

4.1. Unicidad de solución

Recordemos que en el capítulo anterior vimos que la ecuación de transporte

$$\frac{d}{dt}v + \operatorname{div}(\mathcal{F}[v]v) = 0 \quad (4.1)$$

tiene solución en sentido débil (según la definición 3.2.1). El siguiente resultado establece la continuidad de la solución con respecto a la condición inicial lo que implica, en particular, la unicidad de la solución.

Teorema 4.1.1. *Con las hipótesis del teorema 3.2.2 sean $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ soluciones débiles de la ecuación (4.1) con condiciones iniciales u_0^1 y u_0^2 , respectivamente. Entonces existe una función continua $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ con $r(0) = 1$ tal que*

$$W_1(v^{(1)}(\cdot, t), v^{(2)}(\cdot, t)) \leq r(t)W_1(u_0^1, u_0^2).$$

Aquí, nuevamente, W_1 es la distancia de Wasserstein.

Corolario 4.1.1. *Existe una única solución v para la ecuación de transporte (4.1) para cada dato inicial v_0 .*

Este corolario no solo se deduce inmediatamente del teorema anterior, sino que aparece en la propia demostración del teorema cuando usamos el Teorema del punto fijo de Banach.

Para la demostración del teorema 4.1.1 usamos las ideas de J. A. Canizo, J. A. Carrillo y J. Rosado en [6]. Antes de probarlo comentamos la idea desarrollada en el

trabajo de estos autores. Primero fijamos una función v_1 cualquiera y definimos el campo $\mathcal{K} := \mathcal{F}[v_1]$ como hicimos en el capítulo anterior en (3.5). Claramente no esperamos que v_1 sea solución de la ecuación de transporte original (4.1), pero por la teoría clásica (ver por ejemplo [21]) existe una única solución v_2 de la ecuación

$$\frac{d}{dt}v + \operatorname{div}(\mathcal{K}v) = 0 \quad (4.2)$$

donde no necesariamente $v_1 = v_2$. Luego repetimos este proceso: buscamos una solución v_3 a la ecuación de transporte (4.2) con el campo dado por $\mathcal{K} := \mathcal{F}[v_2]$. Nuevamente no tiene por qué suceder que $v_2 = v_3$, pero haciendo este proceso recursivo y mediante el teorema del punto fijo de Banach encontramos una medida v solución de la ecuación para un campo generado por ella misma, es decir, solución de (4.2) con $\mathcal{K} = \mathcal{F}[v]$ que es exactamente lo mismo que ser solución de la ecuación original (4.1).

4.1.1. Preliminares de la demostración

En esta sección usamos frecuentemente el lema de Grönwall en su forma integral que se encuentra enunciado al final de este trabajo en A.1.

Fijamos una medida $\bar{v} \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ y consideramos el campo vectorial $\mathcal{F}[\bar{v}]$ dado en (3.5) que, recordemos, es

$$\mathcal{F}_i[\bar{v}](p, t) = \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik}(p_i \bar{p}_k(t) + p_k \bar{p}_i(t))$$

donde

$$\bar{p}_k = \int_{\Delta} p_k d\bar{v}_t(p),$$

para cada k , depende únicamente de \bar{v} . Por el teorema de Picard-Lindelöf existe un flujo $\mathcal{T}^{\bar{v}} : \Delta \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ que cumple

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{T}_t^{\bar{v}}(p) &= \mathcal{F}[\bar{v}](\mathcal{T}_t^{\bar{v}}(p), t) \text{ si } t > 0, \\ \mathcal{T}_0^{\bar{v}}(p) &= p. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para que tenga sentido este flujo debe permanecer dentro del simplex Δ cualquiera sea el punto de partida (dentro del dominio que es el propio simplex).

Proposición 4.1.1. *El flujo $\mathcal{T}^{\bar{v}}$ que cumple las igualdades (4.3) permanece dentro del simplex Δ , esto es, $\operatorname{Im}(\mathcal{T}_t^{\bar{v}}) \subseteq \Delta$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Para probar el resultado debemos ver que $\mathcal{T}^{\bar{v}}(p, t) \in \Delta$. Primero debe ocurrir que

$$\vec{1} \cdot \mathcal{T}^{\bar{v}}(p, t) = \sum_{i=1}^d \mathcal{T}_i^{\bar{v}}(p, t) = 1 \quad (4.4)$$

y segundo que $0 \leq \mathcal{T}_i^{\bar{v}}(p, t) \leq 1$ para todo $i = 1, \dots, d$ donde $\vec{1}$ es el vector de \mathbb{R}^d con todas las entradas igual a 1.

Empecemos por el primer punto. Recordemos que $a_{ik} = -a_{ki}$ (por la observación 1.2.4). Luego resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^d \mathcal{T}_i^{\bar{v}}(p, t) &= \sum_{i=1}^d \mathcal{F}_i[\bar{v}](\mathcal{T}^{\bar{v}}(p, t), t) \\ &= \sum_{i,k=1}^d h(\mathcal{T}^{\bar{v}}(p, t)) a_{ik} (\mathcal{T}_i^{\bar{v}} \bar{p}_k + \mathcal{T}_k^{\bar{v}} \bar{p}_i) \\ &= - \sum_{i,k=1}^d h(\mathcal{T}^{\bar{v}}(p, t)) a_{ki} (\mathcal{T}_k^{\bar{v}} \bar{p}_i + \mathcal{T}_i^{\bar{v}} \bar{p}_k) \\ &= - \sum_{k=1}^d \mathcal{F}_k[\bar{v}](\mathcal{T}^{\bar{v}}(p, t), t) \\ &= - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^d \mathcal{T}_k^{\bar{v}}(p, t), \end{aligned}$$

es decir,

$$2 \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^d \mathcal{T}_i^{\bar{v}}(p, t) = 0,$$

ya que trabajamos en característica cero. Luego, $\vec{1} \cdot \mathcal{T}^{\bar{v}}(p, t)$ es constante en el tiempo. Además dado que

$$\sum_{i=1}^d \mathcal{T}_i^{\bar{v}}(p, 0) = \sum_{i=1}^d p_i = 1$$

obtenemos que se cumple (4.4).

Para el segundo punto sabemos que el campo se anula en el borde de Δ pues $h \equiv 0$ en el borde. Entonces, por el teorema de unicidad de ecuaciones ordinarias, si una trayectoria toca un punto del borde, debe ser constantemente igual a este punto. Con lo cual ninguna trayectoria interna puede atravesar el borde y deber permanecer dentro del simplex.

Por lo tanto queda demostrado el lema. \square

Usando el método de las características la solución a la ecuación

$$\frac{d}{dt}v + \operatorname{div}(\mathcal{F}[\bar{v}]v) = 0$$

con condición inicial u_0 viene dada por el *push-forward* $v(\cdot, t) = \mathcal{T}_t^{\bar{v}}\#u_0$ que es una medida sobre Δ dada por

$$\mathcal{T}_t^{\bar{v}}\#u_0(A) = u_0\left((\mathcal{T}_t^{\bar{v}})^{-1}(A)\right)$$

para cualquier $A \subseteq \Delta$ medible (ver teorema 5.34 de [44]).

De hecho, para toda φ suficientemente suave, vale que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Delta} \varphi(p) d\mathcal{T}_t^{\bar{v}}\#u_0(p) &= \frac{d}{dt} \int_{\Delta} \varphi(\mathcal{T}_t^{\bar{v}}(z)) du_0(z) \\ &= \int_{\Delta} \nabla\varphi(\mathcal{T}_t^{\bar{v}}(z)) \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{T}_t^{\bar{v}}(z) du_0(z) \\ &= \int_{\Delta} \nabla\varphi(\mathcal{T}_t^{\bar{v}}(z)) \cdot \mathcal{F}[\bar{v}](\mathcal{T}_t^{\bar{v}}(z), t) du_0(z) \\ &= \int_{\Delta} \nabla\varphi(p) \cdot \mathcal{F}[\bar{v}](p, t) d\mathcal{T}_t^{\bar{v}}\#u_0(p) \end{aligned} \tag{4.5}$$

y como satisface la ecuación del transporte en sentido débil es solución del problema.

Recordemos que para $T > 0$ y cualquier $u, v : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$ continuas notamos

$$\mathcal{W}_1(u, v) = \max_{0 \leq t \leq T} W_1(u_t, v_t).$$

Antes de probar el teorema necesitamos dos lemas.

Lema 4.1.1. *Dadas dos funciones $v^{(1)}, v^{(2)} \in C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta))$ y un dato inicial $u_0 \in \mathcal{P}_1(\Delta)$, valen las siguientes dos desigualdades*

$$W_1(\mathcal{T}_t^{v^{(1)}}\#u_0, \mathcal{T}_t^{v^{(2)}}\#u_0) \leq \int_0^t W_1(v^{(1)}(\cdot, s), v^{(2)}(\cdot, s)) e^{t-s} ds; \tag{4.6}$$

$$W_1(\mathcal{T}_t^{v^{(1)}}\#u_0, \mathcal{T}_t^{v^{(2)}}\#u_0) \leq (e^t - 1)W_1(v^{(1)}, v^{(2)}). \tag{4.7}$$

Demostración. Primero buscamos acotar $|\mathcal{F}[v^{(1)}](p, t) - \mathcal{F}[v^{(2)}](p, t)|$. Definamos

$$\bar{p}_k(t) = \int_{\Delta} z_k dv^{(1)}(z, t), \quad \bar{q}_k(t) = \int_{\Delta} z_k dv^{(2)}(z, t)$$

luego si consideramos $\varphi(z) = z_k$, usamos la definición de W_1 ya que $Lip(\varphi) \leq 1$, entonces

$$|\bar{p}_k(t) - \bar{q}_k(t)| = \left| \int_{\Delta} \varphi(z) (dv^{(1)}(z, t) - dv^{(2)}(z, t)) \right| \leq W_1(v^{(1)}(\cdot, t), v^{(2)}(\cdot, t)).$$

Notemos que para todo $p \in \Delta$ resulta que $h(p) \leq 1/d^d$, con lo cual si miramos la coordenada i -ésima del campo

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_i[v^{(1)}](p, t) - \mathcal{F}_i[v^{(2)}](p, t)| &\leq h(p) \sum_{k=1}^d |a_{ik}| |p_i \bar{p}_k + p_k \bar{p}_i - (p_i \bar{q}_k + p_k \bar{q}_i)| \\ &\leq \frac{1}{d^d} 2(d-1) W_1(v^{(1)}(\cdot, t), v^{(2)}(\cdot, t)) \end{aligned}$$

ya que $a_{ii} = 0$. Luego

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[v^{(1)}](p, t) - \mathcal{F}[v^{(2)}](p, t)| &\leq \frac{1}{d^d} 2(d-1) W_1(v^{(1)}(\cdot, t), v^{(2)}(\cdot, t)) \times d^{\frac{1}{2}} \\ &\leq W_1(v^{(1)}(\cdot, t), v^{(2)}(\cdot, t)) \end{aligned}$$

pues $d \geq 2$. De forma similar

$$|\mathcal{F}[v^{(2)}](p, t) - \mathcal{F}[v^{(2)}](q, t)| \leq |p - q|. \quad (4.8)$$

Si juntamos estas deducciones llegamos a que

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_t^{v^{(1)}}(p) - \mathcal{T}_t^{v^{(2)}}(p)| &\leq \int_0^t |\mathcal{F}[v^{(1)}](\mathcal{T}_s^{v^{(1)}}(p), s) - \mathcal{F}[v^{(2)}](\mathcal{T}_s^{v^{(2)}}(p), s)| ds \\ &\leq \int_0^t |\mathcal{F}[v^{(1)}](\mathcal{T}_s^{v^{(1)}}(p), s) - \mathcal{F}[v^{(2)}](\mathcal{T}_s^{v^{(1)}}(p), s)| \\ &\quad + |\mathcal{F}[v^{(2)}](\mathcal{T}_s^{v^{(1)}}(p), s) - \mathcal{F}[v^{(2)}](\mathcal{T}_s^{v^{(2)}}(p), s)| ds \\ &\leq \int_0^t W_1(v^{(1)}(\cdot, s), v^{(2)}(\cdot, s)) + |\mathcal{T}_s^{v^{(1)}}(p) - \mathcal{T}_s^{v^{(2)}}(p)| ds \end{aligned}$$

y usando el lema de Grönwall tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_t^{v^{(1)}}(p) - \mathcal{T}_t^{v^{(2)}}(p)| &\leq \int_0^t W_1(v^{(1)}(\cdot, s), v^{(2)}(\cdot, s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s W_1(v^{(1)}(\cdot, r), v^{(2)}(\cdot, r)) dr e^{t-s} ds = \\ &\quad \int_0^t W_1(v^{(1)}(\cdot, s), v^{(2)}(\cdot, s)) e^{t-s} ds. \end{aligned}$$

Ahora definimos la medida $\pi := (\mathcal{T}_t^{v^{(1)}} \times \mathcal{T}_t^{v^{(2)}}) \# u_0 \in \mathcal{P}_1(\Delta^2)$. Recordando que la distancia $W_1(\mathcal{T}_t^{v^{(1)}} \# u_0, \mathcal{T}_t^{v^{(2)}} \# u_0)$ es el ínfimo entre todas las medidas en Δ^2 con

marginales $\mathcal{T}_t^{v^{(1)}} \# u_0$ y $\mathcal{T}_t^{v^{(2)}} \# u_0$ y que π verifica esto, podemos calcular

$$\begin{aligned}
W_1(\mathcal{T}_t^{v^{(1)}} \# u_0, \mathcal{T}_t^{v^{(2)}} \# u_0) &\leq \int_{\Delta^2} |x - y| d\pi(x, y) \\
&= \int_{\Delta} |\mathcal{T}_t^{v^{(1)}}(p) - \mathcal{T}_t^{v^{(2)}}(p)| du_0(p) \\
&\leq \int_{\Delta} \int_0^t W_1(v^{(1)}(\cdot, s), v^{(2)}(\cdot, s)) e^{t-s} ds du_0(p) \\
&= \int_0^t W_1(v^{(1)}(\cdot, s), v^{(2)}(\cdot, s)) e^{t-s} ds \\
&\leq \mathcal{W}_1(v^{(1)}, v^{(2)}) (-1) e^{t-s} \Big|_0^t \\
&\leq \mathcal{W}_1(v^{(1)}, v^{(2)}) (e^t - 1)
\end{aligned}$$

que muestran la primera y segunda desigualdad del lema. \square

Veamos el otro resultado que necesitamos.

Lema 4.1.2. *Dadas dos medidas $u_0^1, u_0^2 \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ y $v \in C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta))$ se tiene*

$$W_1(\mathcal{T}_t^v \# u_0^1, \mathcal{T}_t^v \# u_0^2) \leq e^t W_1(u_0^1, u_0^2). \quad (4.9)$$

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_t^v(p) - \mathcal{T}_t^v(q)| &\leq |p - q| + \int_0^t |\mathcal{F}[v](\mathcal{T}_s^v(p), s) - \mathcal{F}[v](\mathcal{T}_s^v(q), s)| ds \\
&\leq |p - q| + \int_0^t |\mathcal{T}_s^v(p) - \mathcal{T}_s^v(q)| ds
\end{aligned}$$

donde estamos usando la desigualdad (4.8) del lema anterior. Luego por el lema de Grönwall tenemos que

$$|\mathcal{T}_t^v(p) - \mathcal{T}_t^v(q)| \leq |p - q| + \int_0^t |p - q| e^{t-s} ds \leq |p - q| e^t. \quad (4.10)$$

Ahora sea $\pi \in \mathcal{P}_1(\Delta^2)$ una medida con marginales u_0^1 y u_0^2 , respectivamente. Definamos $\gamma := (\mathcal{T}_t^v \times \mathcal{T}_t^v) \# \pi$. Notemos que para $A \subseteq \Delta$ medible resulta

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}_t^v \times \mathcal{T}_t^v)^{-1}(A \times \Delta) &= \{(p, q) / (\mathcal{T}_t^v \times \mathcal{T}_t^v)(p, q) \in A \times \Delta\} \\
&= \{(p, q) / \mathcal{T}_t^v(p) \in A, \mathcal{T}_t^v(q) \in \Delta\} = \mathcal{T}_t^{v^{-1}}(A) \times \Delta
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\gamma(A \times \Delta) = \pi((\mathcal{T}_t^v \times \mathcal{T}_t^{v^{-1}})(A \times \Delta)) = \pi(\mathcal{T}_t^{v^{-1}}(A) \times \Delta) = u_0^1(\mathcal{T}_t^{v^{-1}}(A)) = \mathcal{T}_t^v \# u_0^1(A)$$

y γ tiene marginal $\mathcal{T}_t^v \# u_0^1$ en la primera variable. Lo mismo vale para $\mathcal{T}_t^v \# u_0^2$ en la segunda. Por lo tanto γ es una cota superior para la norma W_1 , es decir,

$$\begin{aligned} W_1(\mathcal{T}_t^v \# u_0^1, \mathcal{T}_t^v \# u_0^2) &\leq \int_{\Delta^2} |x - y| d\gamma(x, y) \\ &= \int_{\Delta^2} |\mathcal{T}_t^v(p) - \mathcal{T}_t^v(q)| d\pi(p, q) \\ &= \int_{\Delta^2} |p - q| e^t d\pi(p, q). \end{aligned}$$

Dado que π es cualquiera con marginales u_0^1 y u_0^2 , resulta

$$W_1(\mathcal{T}_t^v \# u_0^1, \mathcal{T}_t^v \# u_0^2) \leq e^t W_1(u_0^1, u_0^2)$$

como queríamos ver. □

Ahora necesitamos definir una aplicación contractiva.

Lema 4.1.3. *Dado un dato inicial u_0 , el siguiente operador es contractivo:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma : C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta)) & \rightarrow & C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta)) \\ v & \mapsto & \mathcal{T}^v \# u_0. \end{array}$$

Demostración. Veamos que el operador está bien definido. Para la continuidad consideremos primero que

$$|\mathcal{T}_t^v(z) - \mathcal{T}_s^v(z)| = \left| \int_s^t \mathcal{F}[v](\mathcal{T}_r^v(p), r) dr \right| \leq |t - s| \|\mathcal{F}[v]\| \leq |t - s|$$

ya que

$$|\mathcal{F}_i[v](p, t)| \leq \sum_{k=1}^d h(p)(p_i \bar{p}_k(t) + p_k \bar{p}_i(t)) \leq \frac{2}{d}.$$

Luego definimos la medida $\pi := (\mathcal{T}_t^v \times \mathcal{T}_s^v) \# u_0 \in \mathcal{P}_1(\Delta^2)$ que tiene marginales $\mathcal{T}_t^v \# u_0$ y $\mathcal{T}_s^v \# u_0$ (notemos que esta medida no depende del tiempo, tanto t como s están fijos). Esta asignación es continua en el tiempo pues

$$\begin{aligned} W_1(\mathcal{T}_t^v \# u_0, \mathcal{T}_s^v \# u_0) &\leq \int_{\Delta^2} |p - q| d\pi(p, q) \\ &= \int_{\Delta^2} |\mathcal{T}_t^v(z) - \mathcal{T}_s^v(z)| du_0(z) \\ &\leq \int_{\Delta^2} |t - s| du_0(z) \leq |t - s|. \end{aligned}$$

Para ver que preserva la masa basta tomar $\varphi \equiv 1$ en (4.5) para ver que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta} 1 d\mathcal{T}_t^{\bar{v}} \# u_0(p) = 0,$$

y como

$$\int_{\Delta} 1 d\mathcal{T}_0^{\bar{v}} \# u_0(p) = \int_{\Delta} 1 du_0(p) = 1$$

tenemos que es una medida de probabilidad.

Para ver que está contenida en Δ basta notar, como antes, que el flujo es invariante en los bordes de Δ pues el campo se anula y como los flujos no se intersecan por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones ordinarias, cada vez que empieza en el interior de Δ permanece allí.

Ahora veamos que Γ resulta una contracción. Usando la desigualdad (4.7) del lema 4.1.1 llegamos a que

$$W_1(\Gamma(v^{(1)}), \Gamma(v^{(2)})) = \max_{0 \leq t \leq T} W_1(\Gamma(v^{(1)})(\cdot, t), \Gamma(v^{(2)})(\cdot, t)) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \{e^t - 1\} W_1(v^{(1)}, v^{(2)})$$

por lo que basta considerar $T < \ln(2)$ y resulta que Γ es una contracción. \square

4.1.2. Demostración del teorema de continuidad respecto del dato inicial

Finalmente estamos en condiciones de probar el teorema 4.1.1.

Demostración. Usando el resultado del lema 4.1.3 sea v la única solución a la ecuación de transporte que cumple $v = \mathcal{T}^v \# u_0$. Notemos en la demostración del lema que basta $T < \ln(2)$ por lo cual fijado T podemos repetir el argumento para los intervalos $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$ y así sucesivamente. Obtenemos que existe una única v solución débil de la ecuación de transporte y por lo probado en el teorema 4.1.1 sabemos que es continua.

Dadas dos medidas $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ con condiciones iniciales u_0^1 y u_0^2 tenemos que

$$\begin{aligned} W_1(v^{(1)}(\cdot, t), v^{(2)}(\cdot, t)) &= W_1(\mathcal{T}_t^{v^{(1)}} \# u_0^1, \mathcal{T}_t^{v^{(2)}} \# u_0^2) \\ &\leq W_1(\mathcal{T}_t^{v^{(1)}} \# u_0^1, \mathcal{T}_t^{v^{(2)}} \# u_0^1) + W_1(\mathcal{T}_t^{v^{(2)}} \# u_0^1, \mathcal{T}_t^{v^{(2)}} \# u_0^2) \\ &\leq \int_0^t W_1(v^{(1)}(\cdot, s), v^{(2)}(\cdot, s)) e^{t-s} ds \\ &\quad + e^t W_1(u_0^1, u_0^2) \end{aligned}$$

donde primero usamos la desigualdad (4.6) del lema 4.1.1 y luego el lema 4.1.2. Nuevamente por el lema de Grönwall resulta que

$$W_1(v^{(1)}(\cdot, t), v^{(2)}(\cdot, t)) \leq W_1(u_0^1, u_0^2) e^t \left[1 + \int_0^t \exp \left(\int_s^t e^{t-r} dr \right) ds \right].$$

Finalmente basta definir

$$r(t) := e^t \left[1 + \int_0^t \exp(e^{t-s} - 1) ds \right]$$

para llegar al resultado buscado. \square

Observación 4.1.1. *Dado un dato inicial u_0 y v la solución débil de la ecuación de transporte cumple que es el push-forward del dato inicial por la propia solución v , es decir,*

$$v(\cdot, t) = \mathcal{T}_t^v \# u_0$$

para todo $t \geq 0$.

4.2. Estabilidad del modelo

Comenzamos la sección definiendo los equilibrios del modelos. Dado que la dinámica es invariante en los bordes solo estudiamos el interior de Δ .

En la siguiente definición llamamos δ_q a la función en $C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ que a cada tiempo es la Delta de Dirac del punto $q \in \Delta$.

Definición 4.2.1. *Sea q un punto en el interior de Δ . Decimos que la función δ_q*

- *es de equilibrio para la ecuación de transporte si es solución débil de la ecuación de transporte;*
- *es estable si es de equilibrio y para todo entorno U de q existe un entorno V de q tal que para toda función $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ solución de la ecuación de transporte con dato inicial $v(\cdot, 0)$ donde $\text{supp}[v(\cdot, 0)] \subseteq V$, resulta que $\text{supp}[v(\cdot, t)] \subseteq U$ para todo $t \geq 0$;*
- *es asintóticamente estable (o atractor) si es de equilibrio y existe un entorno U de q tal que para toda función $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ solución de la ecuación de transporte donde $\text{supp}[v(\cdot, 0)] \subseteq U$ resulta que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_1(v(\cdot, t), \delta_q) = 0.$$

Es importante notar que dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se- guimos usando la palabra *equilibrio* para referirnos a un punto donde todas la derivadas temporales se anulan. Para no incluir nomenclatura innecesaria elegimos usar la misma palabra y en cada caso queda claro por contexto la definición apropiada.

4.2.1. Teorema de los equilibrios

Teorema 4.2.1. *Sea q un punto en el interior del simplex Δ . Entonces son equivalentes:*

1. q es un equilibrio de la dinámica del replicador (ver 1.2.4);
2. δ_q es equilibrio para la ecuación de transporte;
3. q es un autovector de la matriz A asociado al autovalor cero;
4. q es un equilibrio de Nash.

Demostración. Sea q un punto interior de Δ . Empecemos suponiendo que vale (1) y veamos que implica (2). Necesitamos ver que δ_q es solución débil de la ecuación de transporte (4.1). Notemos que si la estrategia promedio depende de δ_q entonces $\bar{p}_i(t) = q_i$ para todo i . Miremos el campo para cualquier i y tiempo $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_i[\delta_q](q, t) &= \sum_{k=1}^d h(q) a_{ik} (q_i q_k + q_k q_i) \\
 &= 2h(q) \sum_{k=1}^d a_{ik} q_i q_k \\
 &= 2h(q) q_i e_i^T A q \\
 &= 2h(q) q_i (e_i^T A q - q^T A q)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde estamos usando que por la antisimetría de A vale que $q^T A q = 0$.

Como q es un punto de equilibrio para la dinámica del replicador (ver 1.2.4) para todo $i = 1, \dots, d$ resulta que

$$q_i \left((Aq)_i - q^T A q \right) = 0,$$

es decir,

$$(Aq)_i - q^T A q = 0$$

ya que $q_i > 0$ por ser un punto interior de Δ . Luego

$$F_i[\delta_q](q, t) = 0$$

para todo $i = 1, \dots, d$.

Estamos en condiciones de ver que δ_q es solución débil de la ecuación según la definición que dimos en 3.2.1. Sea $\varphi \in C(\Delta, \mathbb{R})$, debemos ver que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta} \varphi(p) d\delta_q(p, t) &= \int_{\Delta} \varphi(p) d\delta_q(p, 0) \\
 &+ \int_0^t \int_{\Delta} \nabla \varphi(p) \cdot \mathcal{F}[\delta_q](p, s) d\delta_q(p, s) ds.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Usando (4.11) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Delta} \nabla \varphi(p) \cdot \mathcal{F}[\delta_q](p, s) d\delta_q(p, s) ds &= \int_0^t \nabla \varphi(q) \cdot \mathcal{F}[\delta_q](q, s) ds \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi(q) \mathcal{F}_i[\delta_q](q, s) ds = 0 \end{aligned}$$

y dado que δ_q es constante en el tiempo se cumple (4.12) y es equilibrio del modelo.

Ahora supongamos δ_q es equilibrio del modelo (2) y probemos que q es un autovector asociado al autovalor cero (3). Fijemos i y consideremos la función $\varphi(p) = p_i$. Por hipótesis

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_{\Delta} \nabla \varphi(p) \cdot \mathcal{F}[\delta_q](p, s) d\delta_q(p, s) ds \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi(q) \mathcal{F}_i[\delta_q](q, s) ds \\ &= \int_0^t \mathcal{F}_i[\delta_q](q, s) ds \\ &= \int_0^t 2h(q) q_i e_i^t A q ds \\ &= t \times 2h(q) q_i e_i^t A q \end{aligned}$$

y dado que tanto $h(q) \neq 0$ como $q_i \neq 0$ resulta que $e_i^t A q = (Aq)_i = 0$. Como $i = 1, \dots, d$ era cualquiera obtenemos que $Aq = \vec{0}$ y probamos (3).

Para continuar veamos que si q es autovector asociado al autovalor cero (3) si y solo si es un equilibrio de Nash (4) (que definimos en 1.2.3). Si tenemos la primera hipótesis queremos ver que jugar $p \in \Delta$ contra q no aporta mejor pago que jugar la propia q . Esto sucede pues

$$p^T A q = p \cdot \vec{0} = 0 = q^T A q$$

por lo que q es un equilibrio de Nash. Ahora supongamos que q es un equilibrio de Nash, fijemos i y estudiemos $(Aq)_i$. Si sucede que $(Aq)_i > 0$ entonces

$$e_i^T A q > 0 = q^T A q$$

y llegamos a un absurdo pues supusimos que q es un equilibrio de Nash. Si suponemos que $(Aq)_i < 0$, dada la antisimetría de A , resulta

$$0 = q^T A q = \sum_{k=1}^d q_k (Aq)_k = q_i (Aq)_i + \sum_{k \neq i} q_k (Aq)_k$$

y como $q_k > 0$ para todo k debe existir l tal que $(Aq)_l > 0$. Por lo tanto

$$e_l^T Aq > 0 = q^T Aq$$

y obtenemos nuevamente un absurdo. Debido a esto $(Ap)_i = 0$ para todo i y obtenemos $Aq = \vec{0}$.

Resta probar que si $Aq = \vec{0}$ (3) entonces vale (1). Tenemos que probar que la trayectoria constantemente q es solución del replicador, es decir, queremos ver

$$\frac{d}{dt}q_i(t) = q_i(e_i^T Aq - q^T Aq) = 0$$

para todo i . Como $Aq = \vec{0}$ resulta que

$$q_i(e_i^T Aq - q^T Aq) = q_i(e_i^T - q^T)Aq = q_i(e_i - q) \cdot \vec{0} = 0,$$

q es equilibrio en la dinámica del replicador y el teorema queda demostrado. \square

4.2.2. Teorema de la estabilidad

Recordemos la definición

$$h(p) := \min \left\{ \prod_{i=1}^d p_i, c \right\}$$

dada en (3.2) y sea γ la menor distancia al borde tal que $h \equiv c$,

$$\gamma := \inf \left\{ \varepsilon \text{ tal que } \prod_{i=1}^d p_i \geq c \text{ para todo } p \in \Delta \text{ con } \text{dist}(p, \text{Borde}\Delta) > \varepsilon \right\}. \quad (4.13)$$

Para empezar el estudio de la estabilidad del modelo hagamos una observación sobre el comportamiento de la estrategia promedio.

Proposición 4.2.1. *Supongamos que el soporte de una función $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ está suficientemente lejos del borde*

$$\text{dist}\left(\text{supp}(v(\cdot, t)), \text{Borde}\Delta\right) > \gamma$$

para todo $t \geq 0$. Entonces la estrategia promedio sigue la dinámica del replicador.

Demostración. Por la sección anterior sabemos que una función v solución débil de la ecuación de transporte está dada por el *push-forward* del dato inicial (ver observación 4.1.1). Calculamos la ecuación de la estrategia promedio:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{p}_i &= \frac{d}{dt} \int_{\Delta} p_i dv(p, t) \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Delta} p_i d\mathcal{T}_t^v \# u_0(p) \\
&= \int_{\Delta} \frac{d}{dt} \mathcal{T}_i^{[v]}(p, t) du_0(p) \\
&= \int_{\Delta} \mathcal{F}_i^{[v]}(\mathcal{T}^{[v]}(p, t), t) du_0(p) \\
&= \int_{\Delta} \sum_{k=1}^d h(\mathcal{T}^{[v]}(p, t)) a_{ik} \left(\mathcal{T}_i^{[v]}(p, t) \bar{p}_k(t) + \mathcal{T}_k^{[v]}(p, t) \bar{p}_i(t) \right) du_0(p) \\
&= \int_{\Delta} \sum_{k=1}^d h(p) a_{ik} (p_i \bar{p}_k(t) + p_k \bar{p}_i(t)) dv(p, t) \\
&= \int_{\Delta} \sum_{k=1}^d c a_{ik} (p_i \bar{p}_k(t) + p_k \bar{p}_i(t)) dv(p, t) \\
&= \sum_{k=1}^d c a_{ik} (\bar{p}_i \bar{p}_k + \bar{p}_k \bar{p}_i) \\
&= 2c \bar{p}_i e_i^T A \bar{p} \\
&= 2c \bar{p}_i (e_i^T A \bar{p} - \bar{p}^T A \bar{p})
\end{aligned}$$

pues $\bar{p}^T A \bar{p} = 0$. Como $2c > 0$ la dinámica es exactamente la misma que la del replicador. \square

Enunciamos ahora el resultado principal que relaciona la dinámica del modelo con la dinámica del replicador.

Teorema 4.2.2. *Sea q un punto tal que $\text{dist}(q, \text{Borde}\Delta) > \gamma$ (como definimos en 4.13) y supongamos que la matriz diferencial (en $(d-1)$ dimensiones) de la dinámica del replicador en el punto q tiene todos los autovalores con parte real negativa. Entonces δ_q es un atractor de la ecuación de transporte. Además, si δ_q es atractor entonces la dinámica del replicador converge a q .*

4.2.3. Preliminares de la demostración

Dado un vector $v \in \mathbb{R}^d$ notamos con $v' \in \mathbb{R}^{(d-1)}$ a las primeras $(d-1)$ coordenadas, es decir,

$$v = \begin{pmatrix} v' \\ v_d \end{pmatrix}.$$

Hasta ahora siempre estudiamos al simplex Δ con $(d-1)$ dimensiones inmerso en el espacio \mathbb{R}^d . En la siguiente proposición calculamos las matrices diferenciales que obtenemos proyectando en $(d-1)$ dimensiones.

Proposición 4.2.2. Sean $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ una matriz antisimétrica y $q \in \Delta$ tal que $Aq = \vec{0}$. Definamos el campo $\mathcal{J} : \mathbb{R}^{(d-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{(d-1)}$

$$\mathcal{J}_i(p') := p_i(e_i^T A p - p^T A p)$$

para $1 \leq i \leq (d-1)$ y donde

$$p_d := 1 - \sum_{k=1}^{d-1} p_k$$

que genera la dinámica del replicador.

Sea $M' \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ la matriz diferencial de la dinámica del replicador en el punto q' . Entonces $M' =$

$$\begin{pmatrix} -a_{1d}q_1 & (a_{12} - a_{1d})q_1 & \dots & (a_{1(d-1)} - a_{1d})q_1 \\ (a_{21} - a_{2d})q_2 & -a_{2d}q_2 & \dots & (a_{2(d-1)} - a_{2d})q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{(d-1)1} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & (a_{(d-1)2} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & \dots & -a_{(d-1)d}q_{d-1} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Además definamos el campo $\mathcal{K} : \mathbb{R}^{2(d-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{2(d-1)}$ dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(p', s') &:= p_i e_i^T A s + s_i e_i^T A p & \text{para } 1 \leq i \leq d-1; \\ \mathcal{K}_{(d-1+i)}(p', s') &:= 2s_i e_i^T A s & \text{para } 1 \leq i \leq d-1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde

$$p_d := 1 - \sum_{k=1}^{d-1} p_k \quad \text{y} \quad s_d := 1 - \sum_{k=1}^{d-1} s_k.$$

Entonces $\mathcal{K}(q', q') = 0$ y la matriz diferencial es

$$D\mathcal{K}(q', q') = \begin{pmatrix} M' & M' \\ M0 & 2M' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(d-1) \times 2(d-1)} \quad (4.16)$$

donde $M0 \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ es la matriz con todas las entradas iguales a cero.

Demostración. Empecemos probando el resultado para el campo \mathcal{K} . Debido a que $Aq = \vec{0}$ resulta $q_i e_i^T Aq + q_i e_i^T Aq = 0$ y $2q_i e_i^T Aq = 0$ por lo cual, efectivamente, $\mathcal{K}(q', q') = 0$. Además

$$a_{id}q_d = - \sum_{k=1}^{d-1} a_{ik}q_k$$

y entonces como $q \in \Delta$ obtenemos

$$a_{id} = a_{id}(1 - q_d) + a_{id}q_d = a_{id} \sum_{k=1}^{d-1} q_k - \sum_{k=1}^{d-1} a_{ik}q_k = - \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})q_k. \quad (4.17)$$

Para encontrar la matriz diferencial en el punto (q', q') fijamos i tal que $1 \leq i \leq (d-1)$ y comenzamos analizando las primeras $(d-1)$ coordenadas del campo. Resulta

$$\begin{aligned} a_{id}(p_i s_d + p_d s_i) &= a_{id} \left(p_i \left(1 - \sum_{k=1}^{d-1} s_k \right) + \left(1 - \sum_{k=1}^{d-1} p_k \right) s_i \right) \\ &= a_{id} \left(p_i + s_i - \sum_{k=1}^{d-1} (p_i s_k + p_k s_i) \right) \end{aligned}$$

por lo cual la coordenada i -ésima del campo es

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(p', s') &= \sum_{k=1}^d a_{ik}(p_i s_k + p_k s_i) = \sum_{k=1}^{d-1} a_{ik}(p_i s_k + p_k s_i) + a_{id}(p_i s_d + p_d s_i) \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} a_{ik}(p_i s_k + p_k s_i) + a_{id} + a_{id} \left(p_i + s_i - \sum_{k=1}^{d-1} (p_i s_k + p_k s_i) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})(p_i s_k + p_k s_i) + a_{id}(p_i + s_i). \end{aligned}$$

Derivamos y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{K}_i(p', s') &= \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})(p_i s_k + p_k s_i) + a_{id}(p_i + s_i) \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})(p_i s_k + p_k s_i) + a_{id}(p_i + s_i) \\ &= \sum_{k \neq i}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})s_k + (a_{ii} - a_{id})2s_i + a_{id} \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})s_k + a_{id}(1 - s_i). \end{aligned}$$

Luego por la igualdad (4.17)

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{K}_i(q', q') = \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})q_k + a_{id}(1 - q_i) = -a_{id} + a_{id}(1 - q_i) = -a_{id}q_i. \quad (4.18)$$

Para las derivadas en caso que $j \neq i$ tenemos

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{K}_i(p', s') = \frac{\partial}{\partial p_j} \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})(p_i s_k + p_k s_i) + a_{id}(p_i + s_i) = (a_{ij} - a_{id})s_i,$$

evaluamos en (q', q') y resulta

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{K}_i(q', q') = (a_{ik} - a_{id})q_i. \quad (4.19)$$

Observemos que los casos en lo cuales aplicamos $\partial/\partial s_i$ y $\partial/\partial s_j$ salen por simetría intercambiando los roles de p' y s' .

Resta estudiar las últimas $(d - 1)$ coordenadas del campo. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{(d-1+i)}(p', s') &= 2s_i e_i^T A s = 2 \sum_{k=1}^{d-1} a_{ik} s_i s_k + 2a_{id} s_i s_d \\ &= 2 \sum_{k=1}^{d-1} a_{ik} s_i s_k + 2a_{id} s_i \left(1 - \sum_{k=1}^{d-1} s_k\right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id}) s_i s_k + 2a_{id} s_i. \end{aligned}$$

Ahora derivamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_i} \mathcal{K}_{(d-1+i)}(p', s') &= \frac{\partial}{\partial s_i} \mathcal{K}_{(d-1+i)} 2 \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id}) s_i s_k + 2a_{id} s_i \\ &= 2 \sum_{k \neq i}^{d-1} (a_{ik} - a_{id}) s_k + 2(a_{ii} - a_{id}) 2s_i + 2a_{id} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id}) s_k + 2a_{id}(1 - s_i) \end{aligned}$$

y si evaluamos en (q', q') y usamos nuevamente la igualdad (4.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_i} \mathcal{K}_{(d-1+i)}(q', q') &= 2 \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id})q_k + 2a_{id}(1 - q_i) \\ &= -2a_{id} + 2a_{id}(1 - q_i) = -2a_{id}q_i. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Y si $j \neq i$

$$\frac{\partial}{\partial s_j} \mathcal{K}_{(d-1+i)}(p', s') = \frac{\partial}{\partial s_j} 2 \sum_{k=1}^{d-1} (a_{ik} - a_{id}) s_i s_k + 2a_{id} s_i = 2(a_{ij} - a_{id}) s_i$$

evaluando

$$\frac{\partial}{\partial s_j} \mathcal{K}_{(d-1+i)}(q', q') = 2(a_{ij} - a_{id}) q_i. \quad (4.21)$$

Observemos que los casos para $\partial/\partial p_i$ y $\partial/\partial p_j$ dan cero pues $\mathcal{K}_{(d-1+i)}(p', s')$ no depende de p' .

Definimos $\partial_{(d-1+j)} := \partial/\partial s_j$, reordenamos la información de las ecuaciones (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21) y tenemos

$$\partial_j \mathcal{K}_i(q', q') = \begin{cases} -a_{id} q_i & \text{si } j = i, \\ (a_{ij} - a_{id}) q_i & \text{si } (d-1) \geq j \neq i, \\ -a_{id} q_i & \text{si } j = d-1+i, \\ (a_{ij} - a_{id}) q_i & \text{si } d \leq j \neq d-1+i, \end{cases}$$

$$\partial_j \mathcal{K}_{(d-1+i)}(q', q') = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq (d-1), \\ -2a_{id} q_i & \text{si } d \leq j = i+d, \\ 2(a_{ij} - a_{id}) q_i & \text{si } d \leq j \neq d-1+i. \end{cases}$$

que es, exactamente, la matriz (4.16).

Resta probar el resultado para la dinámica del replicador. Por la antisimetría de A resulta $p^T A p = 0$ y entonces

$$\frac{d}{dt} p_i = p_i (e_i^T A p - p^t A p) = p_i e_i^T A p$$

para $i = 1, 2, \dots, (d-1)$. El campo \mathcal{J} de la dinámica coincide con las últimas $(d-1)$ coordenadas del campo $(1/2) \times \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}_i(p, s)$ es independiente de p si $i \geq d$ podemos evaluar en (q', s') y resulta

$$J_i(s') = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{(d-1+i)}(q', s')$$

para $i = 1, \dots, (d-1)$. Retomamos las igualdades (4.20) y (4.21) y evaluamos en (q', q') para obtener la matriz diferencial en el punto q'

$$\partial_j \mathcal{J}_i(q') = \frac{1}{2} \partial_{(d-1+j)} \mathcal{K}_{(d-1+i)}(q', q') = \begin{cases} -a_{id} q_i & \text{si } j = i, \\ (a_{ij} - a_{id}) q_i & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

que es la matriz (4.14) y la proposición queda probada. \square

Lema 4.2.1. Sean q un punto atractor para la dinámica del replicador, V un entorno de q tal que toda trayectoria que comienza en V converge a q y U un entorno de q tal que su clausura está contenida en V . Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo dato inicial $p(0) \in U$ se tiene $|p(t) - q| < \varepsilon$ si $t \geq t_0$.

Demostración. Hagamos la prueba por el absurdo. Fijemos $\varepsilon > 0$ y supongamos que no existe tal t_0 . Es decir, suponemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $p^{(i)}$ tal que $|p^{(i)}(t) - q| \geq \varepsilon$ si $t \leq i$.

Tenemos una sucesión de puntos $p^{(i)}(0)$ y dado que la clausura de U es un compacto existe una subsucesión convergente a un punto p^∞ . Consideremos la trayectoria que empieza en este punto, es decir, $p^\infty(0) = p^\infty$ y hagamos dos observaciones: dado que esta trayectoria comienza en V existe t_1 tal que si $t \geq t_1$ entonces

$$|p^\infty(t) - q| < \varepsilon/3.$$

Además como es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sabemos que vale la continuidad respecto del dato inicial, es decir, existe $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (independiente de las trayectorias) tal que para toda $p(t)$ y $\tilde{p}(t)$ resulta

$$|p(t) - \tilde{p}(t)| \leq f(t)|p(0) - \tilde{p}(0)|.$$

Como tenemos una subsucesión de $p^{(i)}(0)$ que converge a p^∞ existe j (suficientemente grande) tal que $j > t_1$ y $|p^{(j)}(0) - p^\infty| < \varepsilon/(3f(t_1))$, luego

$$\begin{aligned} \varepsilon < |p^{(j)}(t_1) - q| &\leq |p^{(j)}(t_1) - p^\infty(t_1)| + |p^\infty(t_1) - q| \\ &\leq f(t_1)|p^{(j)}(0) - p^\infty(0)| + |p^\infty(t_1) - q| \\ &\leq f(t_1)\frac{\varepsilon}{3f(t_1)} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

un absurdo que proviene de suponer que no existe t_0 . Por lo tanto queda demostrado el lema. \square

4.2.4. Demostración del teorema de estabilidad

Veamos la prueba del teorema [4.2.2](#).

Demostración. Nuevamente usamos que una función v solución débil de la ecuación de transporte está dada por el *push-forward* del dato inicial (ver observación [4.1.1](#)). Debemos estudiar, al mismo tiempo, la dinámica de \mathcal{T}^v y la de la estrategia promedio ya que, si estamos suficientemente cerca de q , entonces $h \equiv c$ y la dinámica de (\mathcal{T}^v, \bar{p})

está determinada por el campo $c\mathcal{K}$. Aquí \mathcal{K} es el campo definido en (4.15), es decir,

$$\frac{d}{dt}p_i = c \left(p_i e_i^T A s + s_i e_i^T A p \right); \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt}s_i = 2c s_i e_i^T A s \quad (4.23)$$

para $i = 1, \dots, (d-1)$ y, como siempre, la coordenada d depende de las $(d-1)$ anteriores.

Sea q un punto tal que $\text{dist}(q, \text{Borde}\Delta) > \gamma$ y $Aq = \vec{0}$. Entonces q es un punto de equilibrio para la dinámica del replicador con matriz de pagos A (ver teorema 4.2.1), por la proposición 4.2.2 la matriz diferencial en el punto q' está dada por

$$M' = \begin{pmatrix} -a_{1d}q_1 & (a_{12} - a_{1d})q_1 & \dots & (a_{1(d-1)} - a_{1d})q_1 \\ (a_{21} - a_{2d})q_2 & -a_{2d}q_2 & \dots & (a_{2(d-1)} - a_{2d})q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{(d-1)1} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & (a_{(d-1)2} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & \dots & -a_{(d-1)d}q_{d-1} \end{pmatrix}$$

y por hipótesis todos los autovalores tienen parte real negativa.

Consideremos la dinámica $(p(t), s(t)) \in \Delta^2$ para $t \geq 0$ dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p' \\ s' \end{pmatrix} = c\mathcal{K}(p', s')$$

Nuevamente usamos la proposición 4.2.2 y sabemos que la matriz diferencial del campo en el punto (q', q') es

$$D(c\mathcal{K})(q', q') = \begin{pmatrix} cM' & cM' \\ M0 & 2cM' \end{pmatrix}$$

donde $M0$ es la matriz con todas las entradas iguales a 0. Como el bloque inferior izquierdo son todos ceros para los autovalores de la matriz basta considerar el bloque superior izquierdo y el inferior derecho. Con lo cual los autovalores de la matriz diferencial $D(c\mathcal{K})$ son los mismos que de la matriz M' (pues $c > 0$) y, por hipótesis, tienen parte real negativa. Entonces existe un entorno U de q tal que si $(p(0), s(0)) \in \Delta^2 \cap U^2$ entonces la dinámica $(p'(t), s'(t))$ con dato inicial $(p'(0), s'(0))$ converge a (q', q') cuando $t \rightarrow \infty$.

Podemos considerar a U suficientemente pequeño de forma que exista un entorno V de q tal que $\bar{U} \subset V$ y $h \equiv c$ en V . Este entorno U basta para probar que δ_q es asintóticamente estable (según la definición 4.2.1).

Consideremos una función v solución débil de la ecuación del transporte cuyo dato inicial $v(\cdot, 0) = u_0$ cumple $\text{supp}[u_0] \subset U$. Entonces v está determinada por el *push-forward* $\mathcal{T}^v \# u_0$. Veamos que $\mathcal{T}^v(p)$ y \bar{p} permanecen en U para todo tiempo si $p \in$

$\text{supp}[u_0]$. Razonemos por el absurdo y supongamos que no se cumple. Como $\bar{U} \subset V$ existen t_0 y $p^{(0)} \in \text{supp}[u_0]$ tales que $(\mathcal{T}^v(p), \bar{p}(t)) \in V^2$ para todo $t \leq t_0$ y $p \in \text{supp}[u_0]$ y $(\mathcal{T}^v(p^{(0)}, t_0), \bar{p}(t_0)) \notin U^2$. Por la definición del flujo (4.3) y la definición del campo \mathcal{F} (3.5) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{T}_i^v(p, t) &= \mathcal{F}_i[v](\mathcal{T}_t^v(p), t) = \sum_{k=1}^d h(\mathcal{T}^v) a_{ik} (\mathcal{T}_i^v \bar{p}_k + \mathcal{T}_k^v \bar{p}_i); \\ \mathcal{T}_t^v(p) &= p \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, d, t \geq 0$. Si $t \leq t_0$ y $p \in U$ vale que $\mathcal{T}^v t(p) \in V$ y entonces $h(\mathcal{T}_t^v(p)) \equiv c$. Además implica que $\text{supp}[v(\cdot, t)] \subset V$ para todo $t \leq t_0$ pues el flujo que empieza en U no sale de V . Se cumple la hipótesis de la proposición 4.2.1 por lo cual

$$\frac{d}{dt} \bar{p}_i = 2c \bar{p}_i (e_i^T A \bar{p} - \bar{p}^T A \bar{p}).$$

Si comparamos estas dos derivadas temporales con la ecuación (4.22) deducimos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{T}^{v'} \\ \bar{p}' \end{pmatrix} = c\mathcal{K}(\mathcal{T}^{v'}, \bar{p}').$$

Luego tanto $p^{(0)} \in U$ como $\bar{p}(0) \in U$ (pues $\text{supp}[u_0] \subset U$) y por construcción de U resulta que es un entorno atrayente a (q', q') para la dinámica generada por el campo $c\mathcal{K}$. Entonces $(\mathcal{T}^v(p, t), \bar{p}(t)) \in U^2$ para todo $t \leq t_0$ y llegamos a un absurdo. Probamos que la dinámica (\mathcal{T}^v, \bar{p}) permanece siempre en U^2 por lo cual $h(\mathcal{T}^v) \equiv h(\bar{p}) \equiv c$ para todo tiempo y, efectivamente, la dinámica $(\mathcal{T}^{v'}, \bar{p}')$ está generada por el campo $c\mathcal{K}$.

Resta ver que $v \rightarrow \delta_q$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por el lema 4.2.1 dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que si $t \geq t_0$ y $p(0) \in U$ entonces

$$|p(t) - q| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varphi \in C(\Delta, \mathbb{R})$ tal que $Lip(\varphi) \leq 1$, luego

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta} \varphi(p) dv(p, t) - \int_{\Delta} \varphi(p) d\delta_q(p, t) \right| &= \left| \int_{\Delta} \varphi(\mathcal{T}_t^v(z)) du_0(z) - \varphi(q) \right| \\ &\leq \int_{\Delta} |\varphi(\mathcal{T}_t^v(z)) - \varphi(q)| du_0(z) \\ &\leq \int_{\Delta} |\mathcal{T}_t^v(z) - q| du_0(z) \\ &\leq \int_{\Delta} \varepsilon du_0(z) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

donde $|\mathcal{T}_t^v(z) - q| < \varepsilon$ pues $\text{supp}[u_0] \subset U$. La distancia W_1 de Wassertein consiste es tomar supremo sobre las funciones φ por lo cual

$$W_1(v(\cdot, t), \delta_q) \leq \varepsilon$$

e implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_1(v(\cdot, t), \delta_q) = 0,$$

es decir, δ_q es asintóticamente estable.

Para probar la segunda implicación supongamos que la dinámica del modelo converge. Dado que $\text{dist}(q, \text{Borde}\Delta) > \gamma$ podemos considerar un entorno U del punto q donde $h \equiv c$. Por hipótesis existe una función $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ con soporte en U para todo tiempo. Además por la proposición 4.2.1 sabemos que la estrategia promedio sigue la dinámica del replicador y como la dinámica del modelo converge, en particular, converge la estrategia promedio.

Así queda demostrado el teorema. \square

4.3. La dinámica del replicador para juegos simétricos

En la demostración anterior para analizar la dinámica del replicador trabajamos con la matriz diferencial M' de tamaño $(d-1) \times (d-1)$. Miremos la matriz diferencial de la dinámica del replicador en d coordenadas.

Observación 4.3.1. *Sea nuevamente \mathcal{J} el campo de la dinámica del replicador*

$$\mathcal{J}_i(p) = p_i(e_i^T Ap - p^T Ap) = \sum_{k=1}^d a_{ik} p_i p_k$$

donde $i = 1, 2, \dots, d$ y A es antisimétrica.

Si q es un punto de equilibrio entonces $\mathcal{J}(q) = \vec{0}$ y dado que $a_{ii} = 0$ resulta

$$\partial_j \mathcal{J}_i(p) = \begin{cases} \sum_{k=1}^d a_{ik} s_k & \text{si } j = i, \\ a_{ij} s_i & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Entonces la matriz diferencial en q es

$$M := D\mathcal{J}(q) = \begin{pmatrix} 0 & ca_{12}q_1 & \dots & ca_{1d}q_1 \\ ca_{21}q_2 & 0 & \dots & ca_{2d}q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{d1}q_d & ca_{d2}q_d & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

que es mucho más simple de estudiar que la matriz $M' \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$.

Con esta observación y por el hecho que el simplex Δ tiene dimensión $(d - 1)$ la siguiente proposición establece la relación entre analizar $(d - 1)$ o d coordenadas. La ventaja es que la matriz (4.24) resulta mucho más sencilla.

Proposición 4.3.1. *Sean $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ una matriz antisimétrica, $q \in \Delta$ tal que $Aq = \vec{0}$. Entonces la matriz*

$$M' = \begin{pmatrix} -a_{1d}q_1 & (a_{12} - a_{1d})q_1 & \dots & (a_{1(d-1)} - a_{1d})q_1 \\ (a_{21} - a_{2d})q_2 & -a_{2d}q_2 & \dots & (a_{2(d-1)} - a_{2d})q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{(d-1)1} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & (a_{(d-1)2} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & \dots & -a_{(d-1)d}q_{d-1} \end{pmatrix}$$

en $\mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ definida en (4.14) tiene los mismos autovalores que la matriz M dada en (4.24) con la misma dimensión de los autoespacios exceptuando al cero que siempre es autovalor de la matriz M y el autoespacio asociado tiene una dimensión más en el caso de la matriz M .

Por lo tanto para estudiar los autovalores de la matriz $M' \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ basta calcular los autovalores de la matriz $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$. En particular, M' tiene todos los autovalores con parte real negativa (y el punto es asintóticamente estable) si y solo si M tiene al cero como autovalor con autoespacio asociado de dimensión uno (con autovector q) y todos los demás con parte real negativa. En caso de que suceda esto el punto q es asintóticamente estable en la dinámica del replicador dada por el juego de matriz de pagos A .

Demostración. Sea $q \in \Delta$ tal que $Aq = \vec{0}$ y observemos que para cualquier $v \in \mathbb{R}^d$ resulta que Mv es ortogonal al vector $\vec{1}$ pues

$$\vec{1} \cdot (Mv) = \vec{1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d a_{1j}q_1v_j \\ \sum_{j=1}^d a_{2j}q_2v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d a_{dj}q_dv_j \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}q_iv_j = \sum_{j=1}^d v_j \sum_{i=1}^d a_{ij}q_i = \sum_{j=1}^d v_j 0 = 0. \quad (4.25)$$

Recordemos que dado $v \in \mathbb{R}^d$ notamos con $v' \in \mathbb{R}^{(d-1)}$ a las primeras $(d - 1)$ coordenadas. Luego definimos las funciones

$$\begin{array}{llll} H := \{v \in \mathbb{R}^d \text{ tales que } \vec{1} \cdot v = 0\} & \rightarrow & \mathbb{R}^{(d-1)} & \rightarrow & H \\ v & \mapsto & v' & \mapsto & \begin{pmatrix} v' \\ -\sum_{k=1}^{d-1} v_k \end{pmatrix} \end{array}$$

que son una inversa de la otra. Además vale que $(Mv)' = M'v'$ pues

$$Mv = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}q_1 & \dots & a_{1d}q_1 \\ a_{21}q_2 & 0 & \dots & a_{2d}q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}q_d & a_{d2}q_d & \dots & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d a_{1k}q_1v_k \\ \sum_{k=1}^d a_{2k}q_2v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d a_{dk}q_dv_k \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\begin{aligned} M'v' &= \begin{pmatrix} -a_{1d}q_1 & (a_{12} - a_{1d})q_1 & \dots & (a_{1(d-1)} - a_{1d})q_1 \\ (a_{21} - a_{2d})q_2 & -a_{2d}q_2 & \dots & (a_{2(d-1)} - a_{2d})q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{(d-1)1} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & (a_{(d-1)2} - a_{(d-1)d})q_{d-1} & \dots & -a_{(d-1)d}q_{d-1} \end{pmatrix} v' \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{d-1} (a_{1k} - a_{1d})q_1v_k \\ \sum_{k=1}^{d-1} (a_{2k} - a_{2d})q_2v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{d-1} (a_{(d-1)k} - a_{(d-1)d})q_{d-1}v_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{d-1} a_{1k}q_1v_k + a_{1d}q_1 \sum_{k=1}^{d-1} (-v_k) \\ \sum_{k=1}^{d-1} a_{2k}q_2v_k + a_{2d}q_2 \sum_{k=1}^{d-1} (-v_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{d-1} a_{(d-1)k}q_{(d-1)}v_k + a_{(d-1)d}q_{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} (-v_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{d-1} a_{1k}q_1v_k + a_{1d}q_1v_d \\ \sum_{k=1}^{d-1} a_{2k}q_2v_k + a_{2d}q_2v_d \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{d-1} a_{(d-1)k}q_{(d-1)}v_k + a_{(d-1)d}q_{d-1}v_d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d a_{1k}q_1v_k \\ \sum_{k=1}^d a_{2k}q_2v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d a_{(d-1)k}q_{(d-1)}v_k \end{pmatrix} \\ &= (Mv)'. \end{aligned}$$

Fijemos $v \in H$ y probemos que es autovector de M si y solo si v' es autovector de M' . Supongamos que $v \in H$ es autovalor de M asociado a λ , luego

$$M'v' = (Mv)' = (\lambda v)' = \lambda v'$$

y v' es autovector. Ahora supongamos que v' es autovector asociado a λ . Como $(Mv)' = M'v'$ entonces $(M'v')_i = (Mv)_i$ para $i = 1, \dots, (d-1)$ y debido a la igualdad (4.25) resulta

$$(Mv)_d = - \sum_{k=1}^{d-1} (Mv)_k = - \sum_{k=1}^{d-1} (M'v')_k = - \sum_{k=1}^{d-1} \lambda v_k = \lambda \sum_{k=1}^{d-1} (-v_k) = \lambda v_d$$

entonces probamos que

$$Mv = \begin{pmatrix} M'v' \\ (Mv)_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v' \\ \lambda v_d \end{pmatrix} = \lambda v$$

y v es autovector.

Veamos que el autoespacio asociado al autovalor 0 tiene una dimensión mayor para la matriz M : q es autovector asociado al autovalor 0 de la matriz M pues

$$Mq = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d a_{1j} q_1 q_j \\ \sum_{j=1}^d a_{2j} q_2 q_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d a_{dj} q_d q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 0 \\ q_2 0 \\ \vdots \\ q_d 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Además q no es combinación lineal de vectores de H pues $\vec{1} \cdot q = 1$ ya que $q \in \Delta$ y H es un espacio lineal. Entonces el autoespacio de M asociado al 0 tiene una dimensión más que el autoespacio de M' asociado al 0. Finalmente notemos que dados $v, w \in H$ resultan linealmente independientes si y solo si v' y w' lo son. Por lo cual las dimensiones de los autoespacios son las mismas con la excepción del autovalor 0.

Por último, por la proposición 4.2.2 resulta que M' es la matriz diferencial en el punto q' de la dinámica del replicador. Así la proposición queda probada. \square

4.4. Ejemplo: juegos sin empates

Para cerrar este capítulo estudiemos los puntos de equilibrio para una clase particular de juegos donde la matriz A es antisimétrica y tiene entradas con valores en $\{-1, 1\}$ fuera de la diagonal y $a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \dots, d$. Estos son juegos donde no existe el empate cuando los jugadores eligen distintas estrategias puras. Notemos que por simetría siempre debe ser empate la elección de la misma estrategia pura.

Proposición 4.4.1. *Supongamos que A es antisimétrica, tiene entradas en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ y no existen empates para dos estrategias cualesquiera y distintas. Entonces hay, a lo sumo, un único punto de equilibrio. Además si d es par, o hay una estrategia estrictamente dominante o una estrategia estrictamente dominada, entonces no hay puntos de equilibrio en el interior de Δ .*

Observación 4.4.1. *Analizamos el caso de d impar y ninguna estrategia dominante o dominada. Entonces puede o no haber equilibrio en el interior de Δ . En el caso de Piedra, papel o tijera sabemos que $(1/3, 1/3, 1/3)$ lo es. En cambio, si*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

el autoespacio (de dimensión uno) asociado al autovalor cero está dado por $(1, 1, 1, 1, -1)$ por lo que no tenemos equilibrios en el interior del simplex Δ .

Entonces la proposición anterior es la mejor clasificación que podemos hacer para esta clase de juegos sin empates.

Probemos la proposición 4.4.1.

Demostración. Primero veamos los casos donde no hay equilibrios. Sin pérdida de generalidad supongamos que la primera estrategia es dominante, luego $a_{1j} = 1$ para todo $j > 1$ y no puede suceder que

$$\sum_{j=1}^d a_{1j} q_j = 0$$

si q está en el interior de Δ . Si existe una estrategia dominada es similar.

Ahora supongamos d par. Para ver este resultado probaremos que $\det(A) \neq 0$ y no tenemos autovalores asociados al cero más allá del trivial. Por la fórmula de Leibniz

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_d} \text{sig}(\sigma) \prod_{i=1}^d a_{i\sigma(i)}$$

donde P_d es el grupo de permutaciones de d elementos. Como por hipótesis las únicas entradas de A que valen cero están en la diagonal principal resulta que $\prod_{i=1}^d a_{i\sigma(i)} = 0$ si y solo si existe i tal que $\sigma(i) = i$, es decir que σ deja al menos un elemento fijo. Nos interesa la cantidad de permutaciones que no dejan fijo ningún elemento. Para d elementos existen $!d$ (el subfactorial de d) permutaciones con esta propiedad. Veamos

que si d es par entonces $!d$ resulta impar y que si d es impar entonces $!d$ es par. Hagamos inducción. Empecemos notando que $!0 = 1$ y $!1 = 0$. Luego si d es impar tenemos que

$$!d = (d - 1) \left(!(d - 1) + !(d - 2) \right)$$

resulta par (sobre esta propiedad del subfactorial ver A.1). Luego si d es par, usando la hipótesis inductiva llegamos a que

$$!d = (d - 1) \left(!(d - 1) + !(d - 2) \right) = \text{impar} \times (\text{par} + \text{impar})$$

es impar como queríamos ver.

Entonces si notamos con D_d a las permutaciones de P_d que no dejan puntos fijos tenemos que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in D_d} \text{sig}(\sigma) \prod_{i=1}^d a_{i\sigma(i)}$$

y estamos sumando una cantidad impar de 1 o -1 y necesariamente el determinante no es cero.

Resta ver que si d es impar tenemos, a lo sumo, un único equilibrio. Supongamos que d es impar, que $q, z \in \Delta$ son equilibrios. Como están en el interior de Δ resulta que $q_d, z_d \neq 0$. Definamos los vectores $\tilde{q}, \tilde{z} \in \mathbb{R}^{d-1}$ como $\tilde{q}_i = q_i/q_d, \tilde{z}_1 = z_i/z_d$ y la matriz $B \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ de forma que $b_{ij} = a_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq (d - 1)$. Luego para cada i

$$\sum_{j=1}^{d-1} b_{ij} \tilde{q}_j = \sum_{j=1}^{d-1} a_{ij} \frac{q_j}{q_d} = -a_{id} = \sum_{j=1}^{d-1} b_{ij} \tilde{z}_j$$

con lo que $B\tilde{q} = B\tilde{z}$ y, por lo tanto, $q = z$ ya que por el punto anterior $\det(B) \neq 0$ y la proposición queda demostrada. \square

5

Una población con memoria

En los capítulos anteriores suponemos que los jugadores a tiempo t modifican su comportamiento considerando la información de ese instante de tiempo y sin ningún tipo de memoria. Una pregunta que surge es qué sucede si extendemos la memoria, es decir, no solo importa el último juego, sino un lapso de tiempo. Para ampliar el problema al estudio de jugadores con memoria necesitamos utilizar ecuaciones diferenciales con retardo (o *delay*). En este capítulo final trabajamos con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo temporal y probamos la existencia de solución.

Planteamos un modelo abstracto donde la posición de los agentes es un vector en el espacio \mathbb{R}^d . Las interacciones siguen siendo de a pares, definidas por un núcleo que notamos $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Para cada instante de tiempo el comportamiento de cada jugador queda determinado al considerar su pasado reciente. Además los jugadores valúan distinto cada interacción en función del tiempo que haya transcurrido. Así, por ejemplo, si un jugador recuerda lo sucedido en t y en $(t - 2)$ puede dar mayor peso al dato más reciente e igual verse afectado (aunque con menor peso) por la información que conserva de dos tiempos anteriores.

En la sección 5.1 los agentes recuerdan el comportamiento pasado de los demás pero no es posible identificar a dos agentes que hayan tenido el mismo comportamiento en un instante. En otras palabras, si las trayectorias de dos jugadores se cruzan, el resto de la población solo retiene la traza de sus recorridos, pero es incapaz de diferenciar qué recorrido realizó cada uno. Para ejemplificar esta situación observar la figura 5.1. Esta situación se ha presentado en otros problemas de ecuaciones en derivadas parciales y fue observado para materiales con memoria por Dafermos [14]. Como se observa en [16], estos problemas no obedecen una propiedad de minimalidad: *datos iniciales diferentes generan soluciones diferentes* y es posible estudiarlos en un espacio de estados abstracto, cocientando las trayectorias que se definen como equivalentes.

En nuestro contexto la situación es más compleja aún ya que la solución es una distribución de probabilidad sobre los caminos y a diferentes tiempos podría estar asig-

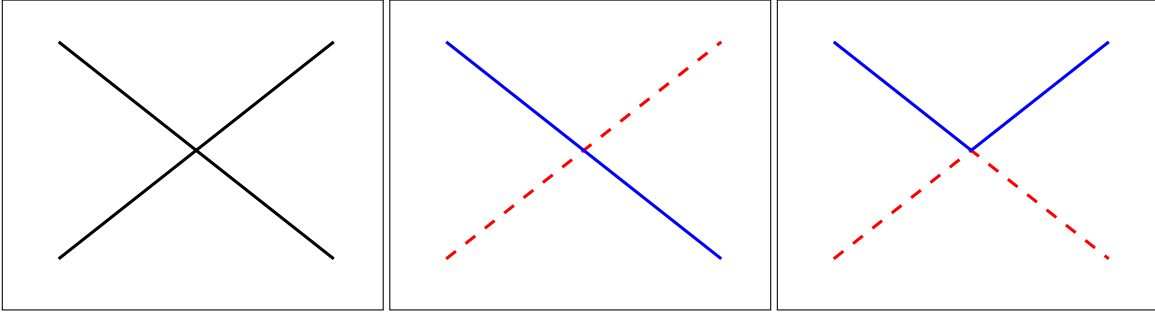


Figura 5.1: En el primer modelo un jugador que recibe la información de la primera imagen no puede distinguir si se trata de dos jugadores que se cruzaron (como en la segunda imagen) o de dos que se tocaron y rebotaron (tercera imagen).

nando probabilidades a diferentes caminos. Cuando se restringe a las trazas de estos caminos, sin importar quién es el que los recorrió, se recupera la idea de estudiarlos en un espacio de estados abstracto.

Nuestro modelo consta de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que define el comportamiento de cada jugador en base al de los demás. Puede pensarse como una extensión del trabajo hecho por F. Golse en [21] agregando un retardo temporal para permitir que los jugadores tengan en cuenta el comportamiento de la población en el pasado. Si asumimos que el núcleo es Lipschitz y con los resultados expuestos en [1] podemos ver que existe solución única para este problema.

Este nuevo modelo puede adaptarse fácilmente al que estudiamos en los capítulos anteriores. Para ver esto bastan tres supuestos. Primero hay que limitar el dominio e imagen del núcleo K tal que $K : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$. Segundo, interpretar el valor $K(x, y)$ como el resultado de la regla de interacción (3.3). Por último, pesar el tiempo reciente de forma que los jugadores solo consideren los datos del instante actual y no se vean influidos por la información anterior.

Además la extensión que hacemos permite adaptarlo al estudio de diferentes fenómenos. Por ejemplo, un problema importante en la matemática aplicada a la biología es modelar la comunicación y organización de una población cuyos individuos pueden desarrollar un comportamiento coordinado sin un organizador centralizado. Podemos entenderlo como un modelo alternativo al del trabajo de M. A. Fontelos y A. Friedman [17] donde se modela el comportamiento de las hormigas. Mientras avanzan van dejando rastros de feromonas que sirven de información a las demás (ver también [4]). Este rastro químico dura un tiempo finito por lo que las ecuaciones con retardo temporal son una herramienta matemática apropiada para el estudio de este fenómeno.

En la sección 5.2 adaptamos el modelo a una población infinita con la misma idea que usamos a partir del capítulo 3: el problema consiste en buscar una función que a cada tiempo devuelva una medida de probabilidad sobre el espacio \mathbb{R}^d para describir la

distribución de la población. Esta función satisface una ecuación de transporte donde, como en el modelo anterior, el campo depende de la propia solución. El resultado principal de este capítulo consiste en probar que existe una única solución del problema y que depende continuamente del dato inicial. Para esta demostración adaptamos la técnica desarrollada en [6]. La solución está determinada por el *push-forward* del flujo (definido por la propia solución) con el dato inicial. La forma de probar la existencia de una solución consiste en hallar el punto fijo de una aplicación Γ apropiada. Para una función μ , que a cada tiempo devuelve una medida de probabilidad en el espacio \mathbb{R}^d , construimos $\Gamma(\mu)$ de forma que satisfaga la ecuación de transporte donde el campo está determinado por la propia función μ .

Para cerrar esta tesis en la sección 5.3 estudiamos el modelo cuando los agentes tienen memoria perfecta en el sentido que no solo recuerdan el comportamiento de toda la población, sino también el de cada jugador específicamente. Planteamos el problema como en el caso anterior. Sin embargo, dado el espacio donde tomamos el dato inicial, no podemos encontrar una ecuación en derivadas parciales cuya solución sea la del problema en el límite de infinitos jugadores. En cambio podemos plantear un flujo en el espacio de estados abstracto y demostrar que, si definimos la aplicación Γ de forma similar, entonces encontramos una única función que a cada tiempo devuelve una medida de probabilidad sobre el espacio \mathbb{R}^d y que es punto fijo de Γ .

5.1. Descripción del modelo

Consideremos una población de N individuos. Cada agente está representado por una función que depende de un tiempo positivo y con codominio \mathbb{R}^d . Podemos pensarla como un *camino* que describe un agente y que notamos con $\sigma(t)$ para $t \geq 0$. Es decir, para cada jugador i tenemos un vector $\sigma^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^d$. Por ejemplo, en el trabajo de F. Golse [21] se modela la interacción entre los agentes usando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{d}{dt}\sigma^{(i)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(\sigma^{(i)}(t), \sigma^{(j)}(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

donde $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una función Lipschitz que representa el núcleo de la interacción. Como caso particular, aplicado a la teoría de juegos este núcleo representa el pago esperado del juego entre los jugadores i y j con estrategias $\sigma^{(i)}(t)$, $\sigma^{(j)}(t)$ en el simplex Δ .

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^d$ usamos la notación δ_x para referirnos a la medida que aplicada a una función φ la evalúa en x , es decir, $(\varphi, \delta_x) = \varphi(x)$. Así la medida empírica $\mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\sigma^{(i)}(t)} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ satisface en sentido débil la ecuación de transporte

$$\frac{d}{dt}\mu_t + \operatorname{div}(\mathcal{K}[\mu_t]\mu_t) = 0 \quad (5.2)$$

donde dada una medida de probabilidad $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{K}[\nu]$ es un campo vectorial dado por

$$\mathcal{K}[\nu](x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) d\nu(y).$$

Esta cuenta la hacemos en la proposición 5.2.1 en un caso más general. Aquí $\mathcal{K}[\nu](x)$ puede pensarse como el resultado de un juego entre x por la población distribuida según ν . Cuando el número de agentes tiende a infinito y la población está descripta por una medida de probabilidad $\mu_t \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ entonces es razonable esperar que μ_t satisfaga la ecuación (5.2), esta ecuación tiene una solución única

$$\mu \in C([0, +\infty), \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$$

que depende de forma continua de los datos iniciales. En particular, si tenemos una medida inicial μ_0 que es aproximada por μ_0^N entonces μ_t^N aproxima correctamente a μ_t .

Para el modelo con retardo podemos considerar

$$\frac{d}{dt}\sigma^{(i)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[K(\sigma^{(i)}(t), \sigma^{(j)}(t)) + K(\sigma^{(i)}(t), \sigma^{(j)}(t - \tau)) \right], \quad t \geq 0. \quad (5.3)$$

Para definir el término de la derecha de la igualdad usamos la siguiente notación: dada una función continua $\sigma : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $t \geq 0$ consideramos $\sigma_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ donde $\sigma_t(s) := \sigma(t + s)$.

Como nos interesa trabajar con el problema de forma más abstracta definimos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt}\sigma^{(i)}(t) = \frac{d}{dt}\sigma_t^{(i)}(0) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{-\tau}^0 K(\sigma_t^{(i)}(0), \sigma_t^{(j)}(s)) d\rho(s) \quad t \geq 0; \quad (5.4)$$

$$\sigma^{(i)}(s) = \sigma_0^{(i)}(s) \quad s \in [-\tau, 0] \quad (5.5)$$

para $i = 1, \dots, N$, funciones $\sigma_0^{(1)}, \dots, \sigma_0^{(N)} \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d)$ y donde ρ es una medida de probabilidad sobre $[-\tau, 0]$. Notemos que si

$$\rho(s) = \chi_{-\tau}(s) + \chi_0(s)$$

entonces tenemos el caso particular dado por la ecuación (5.3).

Observación 5.1.1. *Supongamos que tenemos las funciones*

$$\sigma^{(1)}(s) = \tau + s;$$

$$\sigma^{(2)}(s) = -s;$$

$$\tilde{\sigma}^{(1)}(s) = \begin{cases} \tau + s & \text{si } s \leq -\tau/2; \\ -s & \text{si } s > -\tau/2; \end{cases} \quad \tilde{\sigma}^{(2)}(s) = \begin{cases} -s & \text{si } s \leq -\tau/2; \\ \tau + s & \text{si } s > -\tau/2 \end{cases}$$

entonces

$$\int_{-\tau}^0 \left(K(x, \sigma^{(1)}(s)) + K(x, \sigma^{(2)}(s)) \right) d\rho(s) = \int_{-\tau}^0 \left(K(x, \tilde{\sigma}^{(1)}(s)) + K(x, \tilde{\sigma}^{(2)}(s)) \right) d\rho(s).$$

Esto muestra que aquí los agentes recuerdan los lugares por lo cuales pasaron los otros, pero no depende de quien pasó por cada punto.

Aún más en general, si tenemos para algún $h \in [-\tau, 0]$, $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)} \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d)$ y $\sigma^{(1)}(h) = \sigma^{(2)}(h)$ entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{(1)} &= \sigma^{(1)} \chi_{[-\tau, h]} + \sigma^{(2)} \chi_{[h, 0]}, \\ \tilde{\sigma}^{(2)} &= \sigma^{(2)} \chi_{[-\tau, h]} + \sigma^{(1)} \chi_{[h, 0]}, \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} &\int_{-\tau}^0 K(x, \sigma^{(1)}(s)) d\rho(s) + \int_{-\tau}^0 K(x, \sigma^{(2)}(s)) d\rho(s) \\ &= \int_{-\tau}^0 \left(K(x, \sigma^{(1)}(s)) + K(x, \sigma^{(2)}(s)) \right) d\rho(s) \\ &= \int_{-\tau}^h \left(K(x, \sigma^{(1)}(s)) + K(x, \sigma^{(2)}(s)) \right) d\rho(s) \\ &\quad + \int_h^0 \left(K(x, \sigma^{(1)}(s)) + K(x, \sigma^{(2)}(s)) \right) d\rho(s) \\ &= \int_{-\tau}^h \left(K(x, \tilde{\sigma}^{(1)}(s)) + K(x, \tilde{\sigma}^{(2)}(s)) \right) d\rho(s) \\ &\quad + \int_h^0 \left(K(x, \tilde{\sigma}^{(2)}(s)) + K(x, \tilde{\sigma}^{(1)}(s)) \right) d\rho(s). \end{aligned}$$

Observación 5.1.2. Sea $\mu_t^N \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ donde

$$\mu_t^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\sigma^{(j)}(t)} \tag{5.6}$$

y retomando la ecuación (5.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_t^{(i)}(0) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{-\tau}^0 K(\sigma_t^{(i)}(0), \sigma_t^{(j)}(s)) d\rho(s) \\ &= \int_{-\tau}^0 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(\sigma_t^{(i)}(0), \sigma_t^{(j)}(s)) d\rho(s) \\ &= \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}^d} K(\sigma_t^{(i)}(0), x) d\mu_{t+s}^N(x) d\rho(s). \end{aligned}$$

Así, para una función $\mu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d) \times [-\tau, T]$ dada tenemos un operador

$$\mathcal{K}^\mu := \mathcal{K}[\mu] : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

de la forma

$$\mathcal{K}[\mu](x, t) := \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) d\mu_{t+s}(y) d\rho(s). \quad (5.7)$$

5.1.1. Un sistema con retardo

Empecemos con los resultados sabidos para ecuaciones ordinarias con retardo. Consideremos el sistema de la forma

$$\frac{d}{dt}P(t) = F(P_t) \quad t \geq 0, \quad (5.8)$$

donde $P \in C^1((0, +\infty), \mathbb{R}^{Nd})$, $P_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd})$ y $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd}) \rightarrow \mathbb{R}^{Nd}$ con condición inicial $P_0 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd})$.

El siguiente teorema sirve para probar la existencia de solución del sistema (5.4) con finitos agentes. La demostración se puede encontrar en el trabajo de P. Amster [1] (teoremas 7.1 y 7.3).

Teorema 5.1.1. *Supongamos que $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd}) \rightarrow \mathbb{R}^{Nd}$ es localmente Lipchitz en el sentido que para toda $M > 0$ existe L tal que*

$$|F(P) - F(Q)| \leq L\|P - Q\|$$

para $P, Q \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd})$ s.t. $\|P\|, \|Q\| \leq M$. Además si F crece a lo sumo linealmente, es decir,

$$|F(Q)| \leq C(1 + \|Q\|)$$

para cualquier $Q \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd})$, donde C es una constante, entonces dada $P_0 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd})$ existe una única solución $P(t)$ para (5.8) definida en $[-\tau, +\infty)$.

Observación 5.1.3. *Dado un sistema (5.4) de N ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo en \mathbb{R}^d suponemos que K es globalmente Lipschitz:*

$$|K(x^1, y^1) - K(x^2, y^2)| \leq |x^1 - x^2| + |y^1 - y^2| \quad (5.9)$$

para todo $x^1, x^2, y^1, y^2 \in \mathbb{R}^d$. En particular

$$|K(x, y)| \leq C_K(1 + |x| + |y|) \quad (5.10)$$

para una constante C_K y todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Asumimos que K es 1-Lipschitz y podemos extender los resultados al caso general de manera sencilla.

Con lo cual podemos enunciar el resultado de existencia y unicidad de solución.

Proposición 5.1.1. *Bajo las hipótesis (5.9) el sistema (5.4) con condiciones iniciales (5.5) tiene una única solución continua $\sigma \in C([-\tau, \infty), \mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Podemos escribir el sistema (5.4) como

$$\frac{d}{dt}P(t) = \mathcal{F}(P_t)$$

donde $P(t) = (\sigma^{(1)}(t), \dots, \sigma^{(N)}(t))$ y $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^N)$ de forma que

$$\mathcal{F}^i : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd}) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

está definida por $\mathcal{F}^i(P_t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(\sigma^{(i)}(0), \sigma^{(j)})$.

Entonces para $P, Q \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{Nd})$ con $Q(t) = (\tilde{\sigma}^{(1)}(t), \dots, \tilde{\sigma}^{(N)}(t))$ usamos (5.9) y obtenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^1(P) - \mathcal{F}^1(Q)| &\leq \int_{-\tau}^0 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| K(\sigma^{(1)}(0), \sigma^{(j)}(s)) - K(\tilde{\sigma}^{(1)}(0), \tilde{\sigma}^{(j)}(s)) \right| d\rho(s) \\ &\leq \|\sigma^{(1)} - \tilde{\sigma}^{(1)}\| + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|\sigma^{(j)} - \tilde{\sigma}^{(j)}\| \\ &\leq 2\|P - Q\|. \end{aligned}$$

\mathcal{F} resulta globalmente Lipschitz y por (5.10) tiene crecimiento lineal con lo cual cumple las hipótesis del teorema 5.1.1 y existe una única solución del sistema. \square

5.2. El modelo para una población infinita

En esta sección queremos estudiar nuestro problema cuando la cantidad de jugadores con los que trabajamos tiende a infinito. Necesitamos una ecuación que lo exprese y usamos el modelo de finitos jugadores para obtener la *correcta* ecuación que describe el comportamiento de una población infinita. Como la solución es una medida de probabilidad (para cada tiempo t) empezamos estudiando la medida empírica $\mu_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\sigma^{(i)}(t)}$ que describe el problema para finitos jugadores que ya definimos en (5.6).

Proposición 5.2.1. *Si $(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(N)})$ es solución de (5.4) entonces la medida empírica $\mu_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\sigma^{(i)}} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ es solución débil de la ecuación*

$$\frac{d}{dt}\mu(x, t) + \operatorname{div}(\mathcal{K}[\mu](\cdot, t)\mu(\cdot, t))(x) = 0 \quad t > 0. \quad (5.11)$$

Demostración. Para una función test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ y para $t > 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_t^N(x) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\sigma^{(i)}(t)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla \varphi(\sigma^{(i)}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \sigma^{(i)}(t) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla \varphi(\sigma^{(i)}(t)) \cdot \mathcal{K}_t^{\mu^N}(\sigma^{(i)}(t)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \varphi(x) \cdot \mathcal{K}_t^{\mu^N}(x) d\mu_t^N(x)
\end{aligned}$$

donde $\nabla \varphi$ denota $(\nabla \varphi^1, \dots, \nabla \varphi^d)$ y la proposición queda demostrada. \square

Dado este resultado es lógico considerar a la ecuación de transporte (5.11) cuando $N \rightarrow +\infty$ para modelar el sistema (5.4). Entonces podemos enunciar el teorema principal de este capítulo que asegura la existencia y unicidad de solución para el problema planteado.

Teorema 5.2.1. *Dada una condición inicial $\nu \in C([-\tau, 0], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ con soporte compacto existe una única $\mu \in C([-\tau, +\infty), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ solución débil de la ecuación*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mu_t + \operatorname{div}(\mathcal{K}_t^\mu \mu_t) &= 0 & t \geq 0, \\
\mu_s &= \nu_s & -\tau \leq s \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Además μ_t tiene soporte compacto para todo $t \geq 0$.

La solución depende continuamente del dato inicial en el sentido de que si

$$\nu^1, \nu^2 \in C([-\tau, 0], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$$

son dos medidas iniciales con soporte compacto y notamos con μ_t^1 y μ_t^2 sus respectivas soluciones, entonces existe una función continua $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ donde $r(0) = 1$ y tal que

$$W_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq r(t) W_1(\nu_0^1, \nu_0^2).$$

El resto de la sección está dedicado a probar este resultado. La idea de la demostración es escribir (5.12) como un problema de punto fijo para una función que llamamos Γ y probamos que existe μ tal que $\Gamma(\mu) = \mu$.

5.2.1. Preliminares de la demostración

Por el resto de esta sección fijamos una condición inicial $\nu \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^d)$ con soporte en una bola $B_0(R_0) \subset \mathbb{R}^d$. Notamos $C_\nu([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ al conjunto de medidas $\mu \in C([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ tales que $\mu_s = \nu_s$ para todo $- \tau \leq s \leq 0$. Ahora dado un $T > 0$ (que fijamos luego a conveniencia para que podamos usar el teorema del punto fijo) y una función $\mu \in C_\nu([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ notamos $\mathcal{T}^\mu(x)$ al flujo asociado al campo vectorial \mathcal{K} definido en la ecuación (5.7) con condicional inicial $x \in \mathbb{R}^d$, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{T}_t^\mu(x) &= \mathcal{K}_t^\mu(\mathcal{T}_t^\mu(x)) \quad t \geq 0, \\ \mathcal{T}_0^\mu(x) &= x. \end{aligned}$$

Para comprender el efecto del dato inicial, observemos que

$$\mathcal{K}_t^\mu(z) = \begin{cases} \int_{- \tau}^{-t} \int_{\mathbb{R}^d} K(z, x) d\nu_{t+s}(x) d\rho(s) \\ \quad + \int_{-t}^0 \int_{\mathbb{R}^d} K(z, x) d\mu_{t+s}(x) d\rho(s) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau; \\ \int_{- \tau}^0 \int_{\mathbb{R}^d} K(z, x) d\mu_{t+s}(x) d\rho(s) & \text{si } t > \tau. \end{cases}$$

Notemos que el campo vectorial es continuo en el tiempo y Lipschitz en \mathbb{R}^d .

Definamos el subconjunto \mathcal{A} de $C([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ sobre el que buscaremos el punto fijo:

$$\mathcal{A} := \left\{ \mu \in C_\nu([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)) \text{ tal que } \text{sop}(\mu_t) \subset B_0(2R_0) \text{ para } 0 \leq t \leq T \right\}. \quad (5.13)$$

Necesitamos ver que este conjunto con la distancia inducida es un espacio métrico completo. Dado que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ es completo con la distancia W_1 resulta que $C_\nu([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ también lo es. Basta ver, entonces, que \mathcal{A} es cerrado. Para esto consideramos una sucesión de Cauchy $\{\mu^n\}_n$ y por lo tanto convergente a cierta μ_t , fijamos un t tal que $\text{supp}(\mu_t^n) \subset B_0(2R_0)$ y tomamos $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ con $\text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^d \setminus B_0(2R_0)$. Entonces

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t$$

y vemos que \mathcal{A} es cerrado.

La siguiente proposición es clave en la demostración del teorema.

Proposición 5.2.2. *La función Γ definida de forma*

$$\begin{aligned} \Gamma : C_\nu([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)) &\rightarrow C_\nu([- \tau, T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)) \\ \mu &\mapsto \begin{cases} \nu_t & \text{si } t \leq 0 \\ \mathcal{T}_t^\mu \# \nu_0 & \text{si } t > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

cumple que

$$\Gamma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$$

para un determinado T (suficientemente pequeño y que solo depende de K). Además es una contracción sobre \mathcal{A} en el sentido que existe $C \in [0, 1)$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} W_1(\Gamma(\mu^1)_t, \Gamma(\mu^2)_t) \leq C \max_{0 \leq t \leq T} W_1(\mu_t^1, \mu_t^2).$$

Para la demostración usamos una serie de resultados. Nuevamente usamos el lema de Grönwall que se encuentra enunciado en A.1. Además el siguiente lema es fundamental para establecer las desigualdades en la demostración del teorema.

Lema 5.2.1. 1. Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y toda $\mu \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$|\mathcal{T}_t^\mu(x)| \leq |x|e^{C_K t} + (e^{C_K t} - 1)(1 + 2R_0) \quad t \in [0, T]. \quad (5.14)$$

2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ y toda $\mu \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$|\mathcal{T}_t^\mu(x) - \mathcal{T}_t^\mu(y)| \leq e^t |x - y|. \quad (5.15)$$

3. Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, todo $t \in [0, T]$ y toda $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_t^{\mu^1}(x) - \mathcal{T}_t^{\mu^2}(x)| &\leq \int_0^t \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{h+s}^1, \mu_{h+s}^2) dh \\ &\quad + \int_0^t \int_0^h \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{r+s}^1, \mu_{r+s}^2) dr e^{t-h} dh \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde consideramos $W_1(\mu_s^1, \mu_s^2) = 0$ para todo $s \leq 0$.

Demostración. 1. Para cualquier $y \in \mathbb{R}^d$ y todo $t \in [0, T]$, por (5.10) tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_t^\mu(x)| &\leq \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}^d} |K(x, y)| d\mu_{t+s}(y) d\rho(s) \\ &\leq C_K \int_{-\tau}^0 \int_{B_0(2R_0)} (1 + |x| + |y|) d\mu_{t+s}(y) d\rho(s) \\ &\leq C_K(1 + |x| + 2R_0). \end{aligned}$$

De esto obtenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_t^\mu(x)| &\leq |x| + \int_0^t |\mathcal{K}_h^\mu(\mathcal{T}_h^\mu(x))| dh \\ &\leq |x| + C_K(1 + 2R_0)t + C_K \int_0^t |\mathcal{T}_h^\mu(x)| dh \end{aligned}$$

y el resultado se sigue de aplicar el lema de Grönwall.

2. Para esta parte aplicamos el mismo lema a la desigualdad

$$|\mathcal{T}_t^\mu(x) - \mathcal{T}_t^\mu(y)| \leq |x - y| + \int_0^t |\mathcal{T}_h^\mu(x) - \mathcal{T}_h^\mu(y)| dh.$$

3. Para ver el tercer punto y terminar el lema notamos primero que

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_t^{\mu_1}(x) - \mathcal{K}_t^{\mu_2}(y)| &\leq |\mathcal{K}_t^{\mu_1}(x) - \mathcal{K}_t^{\mu_2}(x)| + |\mathcal{K}_t^{\mu_2}(x) - \mathcal{K}_t^{\mu_2}(y)| \\ &\leq \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}^d} |K(x, z) - K(x, z)| d(\mu_{t+s}^1 - \mu_{t+s}^2)(z) d\rho(s) \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}^d} |K(x, z) - K(y, z)| d\mu_{t+s}^2(z) d\rho(s) \\ &\leq \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{t+s}^1, \mu_{t+s}^2) + |x - y| \end{aligned}$$

pues $Lip(K) = 1$. De esto se sigue que

$$\begin{aligned} &|\mathcal{T}_t^{\mu_1}(x) - \mathcal{T}_t^{\mu_2}(x)| \\ &\leq \int_0^t |\mathcal{K}_h^{\mu_1}(\mathcal{T}_h^{\mu_1}(x)) - \mathcal{K}_h^{\mu_2}(\mathcal{T}_h^{\mu_2}(x))| dh \\ &\leq \int_0^t \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{h+s}^1, \mu_{h+s}^2) dh + \int_0^t |\mathcal{T}_h^{\mu_1}(x) - \mathcal{T}_h^{\mu_2}(x)| dh \end{aligned}$$

y, finalmente, volvemos a aplicar el lema de Grönwall.

El lema queda demostrado. \square

Con el lema anterior estamos en condiciones de probar la proposición 5.2.2.

Demostración. Empecemos fijando una $\mu \in \mathcal{A}$. Dado que ν_0 es una medida de probabilidad se sigue de la definición de *push-forward* que $\Gamma(\mu)_t$ es una medida de probabilidad sobre \mathbb{R}^d para todo tiempo t . Además, dado que \mathcal{T}_0^μ es la identidad en \mathbb{R}^d , tenemos que $\Gamma(\mu)_0 = \nu_0$.

Debemos verificar que $\Gamma(\mu)_t$ es continua en t y que su soporte está en la bola $B_0(2R_0)$. Para el soporte notemos que si $x \in B_0(R_0) \subset \mathbb{R}^d$ entonces usando la desigualdad (5.14) del Lema 5.2.1 tenemos que

$$|\mathcal{T}_t^\mu(x)| \leq R_0 e^{C_K T} + (e^{C_K T} - 1)(1 + 2R_0) \leq 2R_0 \quad (5.17)$$

para $t \in [0, T]$ si $T \leq T_0$ donde T_0 depende únicamente de C_K . Deducimos de esto que $\text{supp}(\Gamma(\mu)_t) \subset \overline{B}_{2R_0}$ para todo $t \in [0, T]$: si $\varphi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ con soporte fuera de la bola $\overline{B}_0(2R_0)$ entonces $\varphi(\mathcal{S}_t^\mu(x)) = 0$ para todo $|x| \leq R_0$ y todo $t \in [0, T]$ y como $\text{supp}(\nu_0) \subset \overline{B}_0(R_0)$ se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\Gamma(\mu)_t)(x) = \int_{\overline{B}_0(R_0)} \varphi(\mathcal{T}_t^\mu(x)) d\nu_0(x) = 0$$

como queríamos ver.

Veamos la continuidad de $\Gamma(\mu)_t$ en el tiempo respecto de la distancia W_1 . Usando el Teorema 7.12 de [44] basta ver que para cada $t \in [0, T]$ y $\varphi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ con crecimiento a lo sumo lineal, es decir, $\varphi(x) \leq C(1 + |x|)$, sucede que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\Gamma(\mu)_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\Gamma(\mu)_{t_0})(x), \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\overline{B_0(R_0)}} \varphi(\mathcal{T}_t^\mu(x)) d\nu_0(x) &= \int_{\overline{B_0(R_0)}} \varphi(\mathcal{T}_{t_0}^\mu(x)) d\nu_0(x). \end{aligned}$$

Este hecho es consecuencia del teorema de la convergencia dominada y que

$$|\varphi(\mathcal{T}_t^\mu(x))| \leq C(1 + |\mathcal{T}_t^\mu(x)|) \leq C(1 + 2R_0)$$

donde estamos usando (5.17).

Finalmente resta probar que Γ es una contracción. Fijamos μ^1 y μ^2 en \mathcal{A} , luego para todo $t \in [0, T]$ y toda $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 1-Lipschitz tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\Gamma(\mu^1)_t - \Gamma(\mu^2)_t)(x) \right| &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu^1}(x)) - \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu^2}(x)) \right| d\nu_0(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathcal{T}_t^{\mu^1}(x) - \mathcal{T}_t^{\mu^2}(x) \right| d\nu_0(x). \end{aligned}$$

Podemos acotar el integrando usando la desigualdad (5.16) del Lema 5.2.1,

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{T}_t^{\mu^1}(x) - \mathcal{T}_t^{\mu^2}(x) \right| \\ &\leq \int_0^t \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{h+s}^1, \mu_{h+s}^2) dh + \int_0^t \int_0^h \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{r+s}^1, \mu_{r+s}^2) dr e^{t-h} dh \\ &\leq t \max_{0 \leq h \leq t} W_1(\mu_h^1, \mu_h^2) + (e^t - t - 1) \max_{0 \leq h \leq t} W_1(\mu_h^1, \mu_h^2) \end{aligned}$$

y la integral se acota ya que ν_0 es una medida de probabilidad.

Tomamos supremo sobre todas las φ y llegamos a que

$$W_1(\Gamma(\mu^1)_t, \Gamma(\mu^2)_t) \leq (e^t - 1) \max_{0 \leq h \leq t} W_1(\mu_h^1, \mu_h^2).$$

Con lo cual deducimos que

$$\begin{aligned} W_1(\Gamma(\mu^1), \Gamma(\mu^2)) &= \max_{0 \leq t \leq T} W_1(\Gamma(\mu^1)_t, \Gamma(\mu^2)_t) \\ &\leq (e^T - 1) \max_{0 \leq h \leq T} W_1(\mu_h^1, \mu_h^2) \\ &\leq (e^T - 1) W_1(\mu^1, \mu^2) \end{aligned}$$

y tenemos la contracción si tomamos T suficientemente pequeño. \square

Con lo demostrado hasta ahora más el siguiente lema (también de Grönwall) estamos en condiciones de probar el resultado principal de este capítulo. Veamos entonces este nuevo lema (ver apéndice A.2 para una demostración del lema).

Lema 5.2.2 (Grönwall 2). *Sea A una constante no negativa, $u : [0, b] \rightarrow [0, +\infty)$ continua y tal que*

$$u(t) \leq e^t A + e^t \int_0^t u(h) dh + e^t \int_0^t \int_0^h u(r) dr dh$$

para todo $t \in [0, b]$ entonces

$$u(t) \leq e^t A \left(1 + e^{t+\exp(t)} \int_0^t e^{-\exp(h)} dh \right).$$

5.2.2. Demostración del teorema de existencia

Terminemos esta sección viendo la demostración del teorema 5.2.1 de existencia, unicidad de solución y continuidad respecto del dato inicial del problema para infinitos agentes.

Demostración. Usando la proposición 5.2.2 sabemos que hay existencia local de la solución. Si usamos nuevamente la ecuación (5.14) entonces $\mathcal{T}_t(x)$ está acotada para cada x en una bola. Dado que ν_0 tiene soporte acotado, μ_t también tiene su soporte acotado. En la demostración de la proposición el tiempo solo depende de K por lo cual para un $T > 0$ fijo podemos repetir el argumento para los intervalos $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$ y así sucesivamente obtenemos una solución global para todo tiempo $[0, \infty)$.

Tenemos que concentrarnos en probar la unicidad de solución. Para esto queremos ver que esta debe ser solución de un problema de punto fijo. La idea de la demostración es trabajar con un campo vectorial fijo sin preocuparnos que depende de la solución. Con esta idea en la cabeza supongamos que tenemos una función μ y fijamos un campo vectorial $\mathcal{F} := \mathcal{K}^\mu$. Veamos el problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mu}_t + \operatorname{div}(\mathcal{F} \tilde{\mu}_t) &= 0 & t > 0, \\ \tilde{\mu}_0 &= \tilde{\nu}_0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\nu}_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto. Como el problema es lineal con un campo Lipschitz sabemos que existe una única solución al problema $\tilde{\mu} \in C([0, +\infty), P_1(\mathbb{R}^d))$. Con la misma idea de antes, esta aplicación $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ resulta una contracción y por lo tanto existe una única solución.

Para terminar debemos probar que la solución depende continuamente del dato inicial. Para cualquier $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 1-Lipschitz tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\mu_t^1 - \mu_t^2)(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu_1}(x)) d\nu_0^1(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu_2}(x)) d\nu_0^2(x) \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu_1}(x)) d\nu_0^1(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu_1}(x)) d\nu_0^2(x) \right| \\
&\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu_1}(x)) d\nu_0^2(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathcal{T}_t^{\mu_2}(x)) d\nu_0^2(x) \right| \\
&\leq e^t W_1(\nu_0^1, \nu_0^2) + \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathcal{T}_t^{\mu_1}(x) - \mathcal{T}_t^{\mu_2}(x) \right| d\nu_0^2(x) \\
&\leq e^t W_1(\nu_0^1, \nu_0^2) + \int_0^t \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{h+s}^1, \mu_{h+s}^2) dh \\
&\quad + \int_0^t \int_0^h \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{r+s}^1, \mu_{r+s}^2) dr e^{t-h} dh
\end{aligned}$$

donde usamos que $Lip(\mathcal{T}_t^{\mu_1}(\cdot)) = e^t$ y la desigualdad (5.16) del lema 5.2.1. Dado que $e^t > 1$ tomamos el supremo sobre φ y

$$\begin{aligned}
W_1(\mu_t^1, \mu_t^2) &\leq e^t W_1(\nu_0^1, \nu_0^2) + e^t \int_0^t \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{h+s}^1, \mu_{h+s}^2) dh \\
&\quad + e^t \int_0^t \int_0^h \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{r+s}^1, \mu_{r+s}^2) dr dh.
\end{aligned}$$

Como el término de la derecha crece con t vemos que

$$\begin{aligned}
\max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{t+s}^1, \mu_{t+s}^2) &\leq e^t W_1(\nu_0^1, \nu_0^2) + e^t \int_0^t \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{h+s}^1, \mu_{h+s}^2) dh \\
&\quad + e^t \int_0^t \int_0^h \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{r+s}^1, \mu_{r+s}^2) dr dh.
\end{aligned}$$

Así, basta usar el lema 5.2.2 con $u(t) = \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{t+s}^1, \mu_{t+s}^2)$ para obtener que

$$\begin{aligned}
W_1(\mu_t^1, \mu_t^2) &\leq \max_{-\tau \leq s \leq 0} W_1(\mu_{t+s}^1, \mu_{t+s}^2) \\
&\leq e^t \left(1 + e^{t+exp(t)} \int_0^t e^{-exp(h)} dh \right) W_1(\nu_0^1, \nu_0^2).
\end{aligned}$$

El teorema queda demostrado. □

5.3. Caso general: memoria perfecta

En esta última sección de la tesis modificamos el enfoque del problema y la información que tienen los jugadores del pasado reciente. Ahora no solo miran la posición anterior del resto de la población, sino que recuerdan por dónde pasó cada agente. Por ejemplo si dos agentes se cruzaron en un pasado reciente, todos los demás son capaces de distinguir qué trayecto recorrió uno y cuál el otro. Ahora en vez de mirar soluciones en el espacio $C([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$ debemos considerar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt}\sigma^{(i)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(\sigma^{(i)}(t), \sigma_t^{(j)}) \quad t \geq 0, \quad (5.18)$$

$$\sigma^{(i)}(s) = \sigma_0^{(i)}(s) \quad s \in [-\tau, 0] \quad (5.19)$$

para $i = 1, \dots, N$, funciones $\sigma_0^{(1)}, \dots, \sigma_0^{(N)} \in E$ y redefinimos $K : \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ donde notamos al espacio de Banach

$$E := C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d).$$

Entonces dada una medida ν en E tenemos el operador \mathcal{K} para medidas con primer momento finito

$$\mathcal{K}^\nu(p(t)) := \int_E K(p(t), q) d\nu(q).$$

Igual que como hicimos en (5.9), asumimos que K es globalmente Lipschitz:

$$|K(x^1, \sigma^{(1)}) - K(x^2, \sigma^{(2)})| \leq |x^1 - x^2| + \|p^1 - p^2\| \quad (5.20)$$

para cualesquiera $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^d$ y $p^1, p^2 \in E$. En particular

$$|K(x, p)| \leq C_K(1 + |x| + \|p\|)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $p \in E$.

Proposición 5.3.1. *Con las hipótesis de (5.20) el sistema (5.18) con condición inicial (5.19) tiene una única solución $P(t)$ y la aplicación $t \mapsto P_t \in E$ resulta continua.*

La demostración de este resultado es igual que la de la proposición 5.1.1.

Para un $T > 0$, una medida $\mu \in C([0, T], \mathcal{P}_1(E))$ y un punto $x \in \mathbb{R}^d$ notamos $\mathcal{T}_t^\mu(x)$ al flujo asociado al campo vectorial \mathcal{K}^{μ_t} que comienza en x , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{T}_t^\mu(x) &= \mathcal{K}^{\mu_t}(\mathcal{T}_t^\mu(x)) \quad t \geq 0, \\ \mathcal{T}_0^\mu(x) &= x. \end{aligned}$$

Necesitamos una función de restricción para $t \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} res_t : C([-\tau, T], \mathbb{R}^d) &\rightarrow E \\ p &\mapsto p_t. \end{aligned}$$

Notamos con $\mathcal{T}^\mu(x) \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$ a toda la trayectoria de x ,

$$\mathcal{T}^\mu(x) : t \in [0, T] \rightarrow \mathcal{T}_t^\mu(x) \in \mathbb{R}^d.$$

Luego consideramos la función que extiende la trayectoria (continua) inicial de $[-\tau, 0]$ a una nueva trayectoria continua de $[-\tau, T]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\mu : E &\rightarrow C([-\tau, T], \mathbb{R}^d) \\ p &\mapsto \begin{cases} p(t) & \text{si } t \leq 0 \\ \mathcal{T}_t^\mu(p(0)) & \text{si } t > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 5.3.2. Si $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(N)}$ es solución de (5.18) entonces la medida empírica $\mu_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\sigma_t^{(i)}} \in \mathcal{P}_1(E)$ satisface la ecuación de punto fijo

$$\mu_t = (res_t \circ \mathcal{S}^\mu) \# \mu_0.$$

Demostración. Debemos ver que para cualquier función test $\varphi \in C(E, \mathbb{R}^d)$ resulta que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\sigma_t^{(i)}) = \int_E \varphi(res_t \circ \mathcal{S}_{\mu^N}(q)) d\mu_0^N(q) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(res_t \circ \mathcal{S}_{\mu^N}(q^i)).$$

Basta probar que $\sigma^{(i)}(t) = \mathcal{S}^{\mu^N}(q^i)(t)$.

Si $t \leq 0$ entonces $\mathcal{S}^{\mu^N}(q^i)(t) = q^i(t)$ y si $t > 0$, tenemos que $\mathcal{S}^{\mu^N}(q^i)(t) = \mathcal{T}_t^{\mu^N}(q^i(0))$ que es $\sigma^{(i)}(t)$ dado que $\frac{d}{dt}\sigma^{(i)}(t) = \mathcal{K}_t^{\mu^N}(\sigma^{(i)}(t))$ y la demostración queda terminada. \square

Queremos generalizar el caso de finitos agentes y estudiar la evolución de una densidad de agentes. Fijamos una condición inicial $\nu \in \mathcal{P}_1(E)$ con soporte en una bola $B_0(R_0) \subset E$. Notemos que la operación de *push-forward* induce una función

$$\begin{aligned} C([0, T], \mathcal{P}_1(E)) &\rightarrow C([0, T], \mathcal{P}_1(E)) \\ \mu &\mapsto res_t \# (\mathcal{S}^\mu \# \nu) = (res_t \circ \mathcal{S}^\mu) \# \nu. \end{aligned}$$

Llamamos $C_\nu([0, T], \mathcal{P}_1(E))$ al conjunto de medidas continuas $\mu \in C([0, T], \mathcal{P}_1(E))$ tales que $\mu|_{t=0} = \nu$ y consideramos el subconjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ \mu \in C_\nu([0, T], \mathcal{P}_1(E)) \text{ tal que } \text{sop}(\mu_t) \subset B_0(2R_0) \text{ para } t \in [0, T] \right\}.$$

Exactamente igual que como probamos en (5.13) (y repetimos el nombre para simplificar notación) \mathcal{A} es un espacio métrico completo.

Los siguientes resultados generalizan la proposición anterior y describen la evolución para una medida arbitraria en $\mathcal{P}(E)$.

Proposición 5.3.3. *La función $\Gamma : C([0, T], \mathcal{P}_1(E)) \rightarrow C([0, T], \mathcal{P}_1(E))$ definida por*

$$\Gamma(\mu) := (\text{res}_t \circ \mathcal{S}^\mu) \# \nu, \quad \mu \in C([0, T], \mathcal{P}_1(E))$$

satisface $\Gamma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ para T (suficientemente pequeño que solo depende de K). Además es una contracción en \mathcal{A} , es decir, existe $C \in [0, 1)$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} W_1(\Gamma(\mu^1)_t, \Gamma(\mu^2)_t) \leq C \max_{0 \leq t \leq T} W_1(\mu_t^1, \mu_t^2).$$

Teorema 5.3.1. *La función Γ tiene un único punto fijo. Además, la solución depende continuamente del dato inicial: existe una función continua $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ con $r(0) = 1$ tal que*

$$W_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq r(t)W_1(\nu^1, \nu^2).$$

Nuevamente necesitamos un lema similar al que enunciamos en 5.2.1. La demostración requiere cotas para el flujo asociado a K como las obtenidas allí. Omitimos la demostración de los dos primeros puntos del lema siguiente pues son (casi) idénticas a las anteriores.

Lema 5.3.1. 1. *Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $\mu \in \mathcal{A}$,*

$$|\mathcal{T}_t^\mu(x)| \leq |x|e^{C\kappa t} + (e^{C\kappa t} - 1)(1 + 2R_0), \quad t \in [0, T].$$

2. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $\mu \in C([0, T], \mathcal{P}(E))$,*

$$|\mathcal{T}_t^\mu(x) - \mathcal{T}_t^\mu(y)| \leq e^t |x - y|. \quad (5.21)$$

3. *Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$ y $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{A}$,*

$$|\mathcal{T}_t^{\mu^1}(x) - \mathcal{T}_t^{\mu^2}(x)| \leq \int_0^t W_1(\mu_h^1, \mu_h^2) dh + \int_0^t \int_0^h W_1(\mu_r^1, \mu_r^2) dr e^{t-h} dh. \quad (5.22)$$

Demostración. 3. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_t^{\mu^1}(x) - \mathcal{K}_t^{\mu^2}(y)| &\leq |\mathcal{K}_t^{\mu^1}(x) - \mathcal{K}_t^{\mu^2}(x)| + |\mathcal{K}_t^{\mu^2}(x) - \mathcal{K}_t^{\mu^2}(y)| \\ &\leq \int_E |K(x, p) - K(x, p)| d(\mu_t^1 - \mu_t^2)(p) \\ &\quad + \int_E |K(x, p) - K(y, p)| d\mu_t^2(p) \\ &\leq W_1(\mu_t^1, \mu_t^2) + |x - y| \end{aligned}$$

porque (nuevamente) $Lip(K) = 1$ y el resto de la prueba es como antes. \square

Podemos probar ahora la proposición 5.3.3.

Demostración. Primero fijemos una medida $\mu \in \mathcal{A}$. Como ν es una medida de probabilidad se sigue de la definición de *push-forward* que $\Gamma(\mu)_t$ es una medida de probabilidad para todo t . Además debido a que $res_0 \circ \mathcal{S}^\mu$ es la identidad en E , por definición de \mathcal{S}^μ tenemos que $\Gamma(\mu)|_{t=0} = \nu$.

Entonces para $x \in B_0(R_0) \subset E$

$$\begin{aligned} \|res_t \circ \mathcal{S}^\mu(x)\| &\leq \max_{h \in [-\tau, T]} |\mathcal{S}^\mu(x)(h)| \\ &\leq \max_{h \in [0, T]} \{|\mathcal{T}_h^\mu(x(0)), \|x\|\} \\ &\leq \max_{h \in [0, T]} \{|x(0)|e^{C_K h} + (e_K^C h - 1)(1 + 2R_0), R_0\} \\ &\leq 2R_0 \end{aligned}$$

para T suficientemente pequeño.

Si $\varphi \in C(E)$ tiene soporte fuera de la bola $\bar{B}_0(2R_0)$ entonces $\varphi(res_t \circ \mathcal{S}^\mu(x)) = 0$ para todo $\|x\| \leq R_0$. Dado que $\text{supp}(\nu) \subset \bar{B}_0(R_0)$ esto implica que

$$\int_E \varphi d(\Gamma(\mu)_t) = \int_{\bar{B}_0(R_0)} (\varphi \circ res_t \circ \mathcal{S}^\mu)(x) d\nu(x) = 0.$$

El resto de la demostración es igual que en 5.2.2. □

Estamos en condiciones de probar el teorema 5.3.1.

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} \left\| res_t \circ \mathcal{S}^\mu(p) - res_t \circ \mathcal{S}^\mu(q) \right\| &\leq \max \left\{ \max_{0 \leq h \leq t} |\mathcal{T}_h^\mu(p(0)) - \mathcal{T}_h^\mu(q(0))|, \|p - q\| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{0 \leq h \leq t} e^h |p(0) - q(0)|, \|p - q\| \right\} \\ &\leq e^t \|p - q\|, \end{aligned}$$

donde estamos usando la ecuación (5.21) y, por lo tanto, $res_t \circ \mathcal{S}^\mu$ es e^t -Lipschitz.

Definamos $\tau_0 = \min\{\tau, t\}$ y usando (5.22) resulta que

$$\begin{aligned} \|res_t \circ \mathcal{S}^{\mu_1}(p) - res_t \circ \mathcal{S}^{\mu_2}(p)\| &= \max_{-\tau_0 \leq s \leq 0} |\mathcal{T}_{t+s}^{\mu_1}(p(0)) - \mathcal{T}_{t+s}^{\mu_2}(p(0))| \\ &\leq \max_{-\tau_0 \leq s \leq 0} \left| \int_0^{t+s} W_1(\mu_h^1, \mu_h^2) dh + \int_0^{t+s} \int_0^h W_1(\mu_r^1, \mu_r^2) dr e^{t+s-h} dh \right| \\ &\leq \int_0^t W_1(\mu_h^1, \mu_h^2) dh + \int_0^t \int_0^h W_1(\mu_r^1, \mu_r^2) dr e^{t-h} dh. \end{aligned}$$

Para cualquier $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ 1-Lipschitz tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_E \varphi(p) d(\mu_t^1 - \mu_t^2)(p) \right| &= \left| \int_E \varphi(\text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_1}(p)) d\nu^1(p) - \int_E \varphi(\text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_2}(p)) d\nu^2(p) \right| \\
&\leq \left| \int_E \varphi(\text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_1}(p)) d\nu^1(p) - \int_E \varphi(\text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_1}(p)) d\nu^2(p) \right| \\
&\quad + \left| \int_E \varphi(\text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_1}(p)) d\nu^2(p) - \int_E \varphi(\text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_2}(p)) d\nu^2(p) \right| \\
&\leq e^t W_1(\nu^1, \nu^2) + \int_E \|\text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_1}(p) - \text{res}_t \circ \mathcal{S}^{\mu_2}(p)\| d\nu^2(p) \\
&\leq e^t W_1(\nu^1, \nu^2) + \int_0^t W_1(\mu_h^1, \mu_h^2) dh \\
&\quad + \int_0^t \int_0^h W_1(\mu_r^1, \mu_r^2) dr e^{t-h} dh.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando supremo sobre φ y usando el lema 5.2.2 resulta

$$W_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq e^t \left(1 + e^{t+ext(t)} \int_0^t e^{-exp(h)} dh \right) W_1(\nu^1, \nu^2)$$

y el teorema queda demostrado. □

Apéndice

Recordemos y demostremos el teorema 3.2.1 del capítulo 3 sobre la existencia y unicidad de solución para la ecuación de Boltzmann.

Teorema A.1. *Para todo dato inicial $u_0 \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ existe una única $u \in C^1([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \varphi(p) du_t(p) &= \int_{\Delta} \varphi(p) du_0(p) \\ &+ \int_0^t \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} (\varphi(p^*) - \varphi(p)) d\zeta d\tilde{\zeta} du_s(p) du_s(\tilde{p}) d\theta(q) ds \end{aligned} \quad (23)$$

para cualquier función test $\varphi \in C(\Delta)$.

Dada una medida $u \in \mathcal{P}_1(\Delta)$ trabajamos con la norma de variación total donde

$$\|u\| = \sup \left\{ \left| \int_{\Delta} \varphi(p) du(p) \right| \text{ tal que } \|\varphi\| \leq 1 \right\}.$$

Demostración. Dividimos la prueba en tres partes. Primero probamos usando el Teorema del punto fijo de Banach que tenemos una medida que satisface la ecuación. Luego vemos que es C^1 respecto de la variable temporal. Y por último que es una medida de probabilidad.

Primer paso. Para $u, v \in M(\Delta)$ definimos una nueva medida:

$$\begin{aligned} \langle Q(u, v), \varphi \rangle &:= \frac{1}{2} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} (\varphi(p^*) - \varphi(p)) d\zeta d\tilde{\zeta} du(p) dv(\tilde{p}) d\theta(q) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{[0,1]^2 \times \Delta^3} (\varphi(p^*) - \varphi(p)) d\zeta d\tilde{\zeta} dv(p) du(\tilde{p}) d\theta(q) \end{aligned}$$

para cada $\varphi \in C(\Delta)$ y notamos $Q(u) := Q(u, u)$.

Por simplicidad, a partir solo notamos el dominio de integración cuando integramos respecto del tiempo o cuando integramos solo respecto de la variable p . En los demás casos se puede deducir por contexto.

Para calcular la norma tenemos que si $\|\varphi\| := \|\varphi\|_\infty \leq 1$ entonces

$$|\langle Q(u, v), \varphi \rangle| \leq 2\|\varphi\|\|u\|\|v\| \leq 2\|u\|\|v\|$$

por lo cual

$$\|Q(u)\| \leq 2\|u\|^2. \quad (24)$$

Además dado que

$$\begin{aligned} du(p)du(\tilde{p}) - dv(p)dv(\tilde{p}) &= \frac{1}{2} \left[du(p) + dv(p) \right] \left[du(\tilde{p}) - dv(\tilde{p}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[du(p) - dv(p) \right] \left[du(\tilde{p}) + dv(\tilde{p}) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

resulta

$$\begin{aligned} |\langle Q(u) - Q(v), \varphi \rangle| &\leq \frac{1}{2} \left| \int (\varphi(p^*) - \varphi(p)) d\zeta d\tilde{\zeta} \left[du(p) + dv(p) \right] \left[du(\tilde{p}) - dv(\tilde{p}) \right] d\theta(q) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \int (\varphi(p^*) - \varphi(p)) d\zeta d\tilde{\zeta} \left[du(p) - dv(p) \right] \left[du(\tilde{p}) + dv(\tilde{p}) \right] d\theta(q) \right| \\ &= \langle Q(u + v, u - v), \varphi \rangle \\ &\leq 2\|\varphi\|\|u + v\|\|u - v\|. \end{aligned}$$

Entonces

$$\|Q(u) - Q(v)\| \leq 2\|u + v\|\|u - v\| \quad (26)$$

que es la desigualdad que nos permite mostrar la contracción. Sea

$$\mathcal{A} := \{u \in C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta)) \text{ tal que } u_{(t=0)} = u_0 \text{ y } \max_{0 \leq s \leq T} \|u_s\| \leq 2\}.$$

Para $u \in \mathcal{A}$ y $\varphi \in C(\Delta)$ definimos

$$\langle J(u, t), \varphi \rangle := \langle u_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle Q(u_s), \varphi \rangle ds.$$

Necesitamos probar que $J(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Para esto notemos que

$$\|J(u, t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|Q(v_s)\| ds \leq 1 + T \times 2 \max_{0 \leq s \leq T} \|v_s\|^2 \leq 1 + \frac{1}{8} \times 8 = 2$$

y usando la desigualdad (26) obtenemos

$$\begin{aligned} \|J(u, t) - J(v, t)\| &\leq \int_0^t \|Q(u_s) - Q(v_s)\| ds \\ &\leq \int_0^t 2\|u_s + v_s\|\|u_s - v_s\| ds \\ &\leq T \times 8\|u - v\|, \end{aligned}$$

con lo cual si $T < 1/8$, mediante el Teorema del punto fijo de Bancach, resulta que u satisface la ecuación (23) del teorema.

Segundo paso. Ahora vemos la regularidad C^1 en la variable temporal.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_{t+h} - u_t}{h} - Q(u_t) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} Q(u_s) ds - Q(u_t) \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\| Q(u_s) - Q(u_t) \right\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} 2\|u_s + u_t\| \|u_s - u_t\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} 8 \int_t^{t+h} \|u_s - u_t\| ds \end{aligned}$$

donde nuevamente estamos usando (26). Como u_t es continua tenemos

$$\left\| \frac{u_{t+h} - u_t}{h} - Q(u_t) \right\| \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow 0$. Definimos $\partial_t u_t := Q(u_t)$ y tenemos la suavidad respecto del tiempo.

Tercer paso. Probemos que es una medida positiva: si $\varphi \in C(\Delta)$ y $\varphi \geq 0$ entonces debemos ver

$$\langle u_t, \varphi \rangle \geq 0.$$

Definamos la medida

$$\langle Q_+(u, v), \varphi \rangle := \frac{1}{2} \int \varphi(p^*) d\zeta d\tilde{\zeta} \left[(du(p)dv(\tilde{p}) + dv(p)du(\tilde{p})) \right] d\theta(q)$$

y $Q_+(v) := Q_+(v, v)$. Notemos que $Q_+(u, v)$ es no negativa si v y w son no negativas y también

$$\begin{aligned} \langle Q(u), \varphi \rangle &= \langle Q_+(u), \varphi \rangle - \int \varphi(p) d\zeta d\tilde{\zeta} du(p)du(\tilde{p})d\theta(q) \\ &= \langle Q_+(u), \varphi \rangle - \int_{\Delta} \varphi(p) du(p). \end{aligned} \tag{27}$$

Además

$$Q_+(u) \geq Q_+(v) \geq 0 \tag{28}$$

si $u \geq v \geq 0$ pues

$$Q_+(u) - Q_+(v) = Q_+(u + v, u - v) \geq 0$$

donde la igualdad se ve de la misma forma que (25).

Fijado el dato inicial u_0 supongamos que probamos que existe una única $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ tal que $\int_{\Delta} 1 dv_t(p) = 1$ para todo $t \geq 0$ y

$$v_t = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{s-t}Q_+(v_s) ds. \quad (29)$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_t &= -e^{-t}u_0 - \int_0^t e^{s-t}Q_+(v_s) ds + Q_+(v_t) \\ &= Q_+(v_t) - v_t \\ &= Q(v_t) \end{aligned}$$

debido a la ecuación (27), es decir, v_t es la única que cumple la ecuación (23) del teorema y es una medida de probabilidad. Entonces solo resta encontrar v .

Definamos las medidas $v^{(0)} := 0$ y

$$v^{(n)} := e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{s-t}Q_+(v_s^{(n-1)}) ds.$$

Veamos que $v_t^{(n)} \geq v_t^{(n-1)}$. Como u_0 es una medida positiva entonces $v_t^{(1)}$ es positiva. Luego basta hacer inducción

$$\langle v_t^{(n)} - v_t^{(n-1)}, \varphi \rangle = \int_0^t \int_{\Delta} \varphi(p) e^{s-t} d\left(Q_+(v_s^{(n-1)}) - Q_+(v_s^{(n-2)})\right)(p) ds \geq 0$$

si $\varphi \geq 0$ debido a la ecuación (28). Con lo cual tenemos una sucesión de medidas positivas.

Veamos que integran uno. Por el dato inicial es claro que $\int_{\Delta} 1 dv^{(n)}(p, 0) = 1$ para todo n . Además

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Delta} 1 dv_t^{(n)}(p) &= \int_{\Delta} 1 dQ_+(v_t^{(n-1)})(p) - \int_{\Delta} 1 dv_t^{(n-1)}(p) \\ &= \langle Q_+(v_t^{(n-1)}) - v_t^{(n-1)}, 1 \rangle \\ &= \langle Q(v_t^{(n-1)}), 1 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como cada $v_t^{(n)}$ es de probabilidad, está acotada y podemos definir el límite

$$\langle v_t, \varphi \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_t^{(n)}, \varphi \rangle.$$

Dado $T > 0$ queremos ver que la función límite está efectivamente en $C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta))$. Para esto usamos el Teorema de Arzelà-Ascoli: como son medidas de probabilidad resta

ver la equicontinuidad para tener las hipótesis de este teorema. Por la desigualdad (24) resulta

$$\begin{aligned}
\|\langle v_t^{(n)} - v_{t+h}^{(n)}, \varphi \rangle\| &= \left\| \int_t^{t+h} \int_{\Delta} \varphi(p) e^{s-t} dQ_+(v_s^{(n-1)})(p) ds \right\| \\
&\leq \|\varphi\| \int_t^{t+h} \|Q_+(v_s^{(n-1)})\| ds \\
&\leq \|\varphi\| \int_t^{t+h} 2\|v_s^{(n-1)}\|^2 ds \\
&= \|\varphi\| 2h
\end{aligned}$$

y tomando supremo sobre las funciones test tales que $\|\varphi\| \leq 1$ resulta

$$\|v_t^{(n)} - v_{t+h}^{(n)}\| \leq 2h.$$

Como se cumplen las hipótesis del Teorema de Arzelà-Ascoli existe una subsucesión $v^{(n)} \rightarrow v$ y $v \in C([0, T], \mathcal{P}_1(\Delta))$. Como $T > 0$ es cualquiera llegamos a una función límite $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$.

Solo resta ver la unicidad. Si tenemos dos soluciones u_t y v_t que cumplen (29) entonces

$$\begin{aligned}
\|u_t - v_t\| &\leq \int_0^t e^{s-t} \|Q_+(u_s) - Q_+(v_s)\| ds \leq \int_0^t e^{s-t} \|Q_+(u_s) - Q_+(v_s)\| ds \\
&\leq \int_0^t e^{s-t} 2\|u_s + v_s\| \|u_s - v_s\| ds \\
&\leq \int_0^t e^{s-t} 4\|u_s - v_s\| ds
\end{aligned}$$

y, por el lema de Grönwall,

$$\|u_t - v_t\| = 0$$

como queríamos. Por lo tanto encontramos una única $v \in C([0, \infty), \mathcal{P}_1(\Delta))$ que cumple la ecuación (29). \square

Probemos la propiedad del subfactorial que utilizamos en la demostración de la proposición 4.4.1 del capítulo 4.1.

Proposición A.1. *Definamos $!d$ como la función que mide la cantidad de permutaciones que no dejan ningún elemento invariante en un conjunto de d elementos. Entonces vale que*

$$!d = (d-1) \left(!(d-1) + !(d-2) \right). \quad (30)$$

Demostración. En esta prueba siempre que hablamos de permutaciones hacemos referencia a permutaciones que no dejan ningún elemento invariante.

Como los d elementos son distinguibles podemos numerarlos de forma x_1, x_2, \dots, x_d y luego de la permutación son $x_1^{**}, x_2^{**}, \dots, x_d^{**}$ donde $x_k \neq x_k^{**}$ para todo $k = 1, \dots, d$.

Fijemos un número $i < d$ y busquemos todas las permutaciones en las cuales el elemento x_d termina en la posición i . Empezamos con la permutación de los primeros $(d-1)$ elementos y los llamamos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{d-1}^*$ donde $x_k \neq x_k^*$ para todo $k < d$. Luego intercambiamos el elemento x_i^* con el x_d . Tenemos un total de $!(n-1)$ permutaciones. Notemos que así en la posición d nunca queda el elemento x_i . Entonces resta considerar las permutaciones donde x_d termina en la posición i y x_i en la d . Ahora debemos trabajar con $(n-2)$ elementos por lo que este caso aporta $!(n-2)$ permutaciones.

Finalmente la posición i era cualquiera que cumpliera $i < d$; por lo que las permutaciones totales son las dadas en (30). \square

Por último, necesitamos los siguientes lemas de Grönwall:

Lema A.1 (Grönwall). *Sea $u, \alpha, \beta : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ continuas y tal que*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(h)u(h) dh,$$

$t \in [a, b]$ y β es no negativa. Entonces

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(h)\beta(h)e^{\int_h^t \beta} dh.$$

En particular, si β es una constante positiva, α es lineal ($\alpha(t) = A + Bt$) y $a = 0$, entonces

$$u(t) \leq Ae^{\beta t} + (e^{\beta t} - 1)\frac{B}{\beta}.$$

Lema A.2 (Grönwall 2). *Sea A una constante no negativa, $u : [0, b] \rightarrow [0, +\infty)$ continua y tal que*

$$u(t) \leq e^t A + e^t \int_0^t u(h) dh + e^t \int_0^t \int_0^h u(r) dr dh$$

para toda $t \in [0, b]$ entonces

$$u(t) \leq e^t A \left(1 + e^{t+exp(t)} \int_0^t e^{-exp(h)} dh \right).$$

Demostración. Definamos

$$v(t) := e^{-t-exp(t)} \left(\int_0^t u(h) dh + \int_0^t \int_0^h u(r) dr dh \right).$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(t) &= (-1 - e^t)e^{-t-\exp(t)} \left(\int_0^t u(h) dh + \int_0^t \int_0^h u(r) dr dh \right) \\
&\quad + e^{-t-\exp(t)} \left(u(t) + \int_0^t u(r) dr \right) \\
&= e^{-t-\exp(t)} \left(u(t) - e^t \int_0^t u(h) dh - (e^t + 1) \int_0^t \int_0^h u(r) dr dh \right) \\
&\leq e^{-t-\exp(t)} \left(u(t) - e^t \int_0^t u(h) dh - e^t \int_0^t \int_0^h u(r) dr dh \right) \\
&\leq e^{-t-\exp(t)} e^t A = Ae^{-\exp(t)}
\end{aligned}$$

y dado que $v(0) = 0$ obtenemos que

$$v(t) \leq A \int_0^t e^{-\exp(h)} dh.$$

Con lo cual tenemos que

$$u(t) \leq e^t \left(A + e^{t+\exp(t)} v(t) \right) \leq e^t \left(A + e^{t+\exp(t)} A \int_0^t e^{-\exp(h)} dh \right)$$

como queríamos probar. □

Bibliografía

- [1] Pablo Amster. Ecuaciones diferenciales con retardo. 2017. [86](#), [90](#)
- [2] Michel Benaïm and Jörgen W Weibull. Deterministic approximation of stochastic evolution in games. *Econometrica*, 71(3):873–903, 2003. [11](#)
- [3] Astridh Boccabella, Roberto Natalini, and Lorenzo Pareschi. On a continuous mixed strategies model for evolutionary game theory. *arXiv preprint arXiv:1112.3663*, 2011. [10](#)
- [4] Emmanuel Boissard, Pierre Degond, and Sebastien Motsch. Trail formation based on directed pheromone deposition. *Journal of mathematical biology*, 66(6):1267–1301, 2013. [86](#)
- [5] Olivier Bournez, Jérémie Chalopin, Johanne Cohen, Xavier Koegler, and Mikaël Rabie. Computing with pavlovian populations. In *International Conference On Principles Of Distributed Systems*, pages 409–420. Springer, 2011. [22](#)
- [6] José A Canizo, José A Carrillo, and Jesús Rosado. A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(03):515–539, 2011. [57](#), [58](#), [87](#)
- [7] Carlo Cercignani, Reinhard Illner, and Mario Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases*, volume 106. Springer Science & Business Media, 2013. [43](#)
- [8] Anindya S Chakrabarti and Bikas K Chakrabarti. Microeconomics of the ideal gas like market models. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 388(19):4151–4158, 2009. [30](#)
- [9] Bikas K Chakrabarti, Anirban Chakraborti, Satya R Chakravarty, and Arnab Chatterjee. *Econophysics of income and wealth distributions*. Cambridge University Press, 2013. [22](#)
- [10] Anirban Chakraborti and Bikas K Chakrabarti. Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 17(1):167–170, 2000. [29](#)

- [11] Arnab Chatterjee, Bikas K Chakrabarti, and SS Manna. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 335(1-2):155–163, 2004. [29](#)
- [12] John Cleveland and Azmy S Ackleh. Evolutionary game theory on measure spaces: well-posedness. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14(1):785–797, 2013. [10](#)
- [13] Ross Cressman and Yi Tao. The replicator equation and other game dynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(Supplement 3):10810–10817, 2014. [27](#)
- [14] Constantine M Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Archive for rational mechanics and analysis*, 37(4):297–308, 1970. [85](#)
- [15] J.W. Eaton. Gnu octave, <https://www.gnu.org/software/octave/>. [31](#)
- [16] Mauro Fabrizio, Claudio Giorgi, and Vittorino Pata. A new approach to equations with memory. *Archive for rational mechanics and analysis*, 198(1):189–232, 2010. [85](#)
- [17] Marco A Fontelos and Avner Friedman. A pde model for the dynamics of trail formation by ants. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 425(1):1–19, 2015. [86](#)
- [18] Daniel Friedman. On economic applications of evolutionary game theory. *Journal of Evolutionary Economics*, 8(1):15–43, 1998. [9](#)
- [19] G Gabetta, Guiseppe Toscani, and Bernt Wennberg. Metrics for probability distributions and the trend to equilibrium for solutions of the boltzmann equation. *Journal of statistical physics*, 81(5-6):901–934, 1995. [15](#), [48](#)
- [20] John Geanakoplos. Nash and walras equilibrium via brouwer. *Economic Theory*, 21(2-3):585–603, 2003. [17](#)
- [21] François Golse. On the dynamics of large particle systems in the mean field limit. In *Macroscopic and large scale phenomena: coarse graining, mean field limits and ergodicity*, volume 3 of *Lect. Notes Appl. Math. Mech.*, pages 1–144. Springer, [Cham], 2016. [59](#), [86](#), [87](#)
- [22] Abhijit Kar Gupta. Money exchange model and a general outlook. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 359:634–640, 2006. [22](#)
- [23] Josef Hofbauer, Peter Schuster, Karl Sigmund, et al. A note on evolutionary stable strategies and game dynamics. Technical report, David K. Levine, 2010. [22](#)

- [24] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998. [9](#), [34](#)
- [25] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. Evolutionary game dynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(4):479–519, 2003. [19](#), [23](#), [57](#)
- [26] David Kraines and Vivian Kraines. Pavlov and the prisoner’s dilemma. *Theory and decision*, 26(1):47–79, 1989. [22](#)
- [27] Lorenzo Pareschi and Giuseppe Toscani. Self-similarity and power-like tails in nonconservative kinetic models. *Journal of statistical physics*, 124(2-4):747–779, 2006. [22](#)
- [28] Lorenzo Pareschi and Giuseppe Toscani. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013. [39](#)
- [29] Vilfredo Pareto and Cours dEconomie Politique. Vol. 2. *Rouge, Lausanne*, 1897. [22](#)
- [30] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Guido Germano. Influence of saving propensity on the power-law tail of the wealth distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 369(2):723–736, 2006. [29](#)
- [31] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski. Statistical model with a standard γ distribution. *Physical Review E*, 70(1):016104, 2004. [22](#)
- [32] Mayte Pérez-Llanos, Juan Pablo Pinasco, Nicolas Saintier, and Analía Silva. Opinion formation models with heterogeneous persuasion and zealotry. *arXiv preprint arXiv:1803.10114*, 2018. [39](#), [40](#), [43](#)
- [33] Juan Pablo Pinasco, Mauro Rodriguez Cartabia, and Nicolas Saintier. A game theoretic model of wealth distribution. *Dynamic Games and Applications*, pages 1–17, 2017. [21](#)
- [34] Przemysław Repetowicz, Stefan Hutzler, and Peter Richmond. Dynamics of money and income distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 356(2-4):641–654, 2005. [22](#)
- [35] Francesco Salvarani and Daniela Tonon. Kinetic description of strategic binary games. 2019. [10](#)
- [36] William H Sandholm. *Population games and evolutionary dynamics*. MIT press, 2010. [9](#)
- [37] Peter Schuster and Karl Sigmund. Replicator dynamics. *Journal of theoretical biology*, 100(3):533–538, 1983. [19](#)

- [38] Carla Silva, Welma Pereira, Jan Knotek, and Pedro Campos. Evolutionary dynamics of the spatial prisoners dilemma with single and multi-behaviors: A multi-agent application. In *Dynamics, Games and Science II*, pages 651–688. Springer, 2011. [22](#)
- [39] Jonathan Silver, Eric Slud, and Keiji Takamoto. Statistical equilibrium wealth distributions in an exchange economy with stochastic preferences. *Journal of Economic Theory*, 106(2):417–435, 2002. [30](#)
- [40] J Maynard Smith and George R Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246(5427):15, 1973. [9](#)
- [41] Miklos N Szilagyi. A general n-person game solver for pavlovian agents. *Complex Systems*, 24(3):261–274, 2015. [22](#)
- [42] Peter D Taylor and Leo B Jonker. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical biosciences*, 40(1-2):145–156, 1978. [19](#), [22](#)
- [43] Giuseppe Toscani. Kinetic models of opinion formation. *Communications in mathematical sciences*, 4(3):481–496, 2006. [40](#)
- [44] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*. Number 58. American Mathematical Soc., 2003. [15](#), [61](#), [96](#)
- [45] E Christopher Zeeman. Population dynamics from game theory. In *Global theory of dynamical systems*, pages 471–497. Springer, 1980. [22](#)