UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Espacios métricos homogéneos de Lie-Banach

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

María Eugenia Di Iorio y Lucero

Director de tesis: Esteban Andruchow
Consejero de estudios: Esteban Andruchow

Lugar de trabajo: Instituto Argentino de Matemática. "Alberto Calderón".
CONICET.

Buenos Aires, 2013.

Espacios Métricos Homogéneos de Lie-Banach

Resumen: El presente trabajo se desarrolla en torno al estudio de los aspectos métricos y geométricos de los espacios homogéneos de ciertos grupos de Lie-Banach.

Consideraremos dos grupos de Lie-Banach particulares. El primero de ellos actúa sobre un operador autoadjunto A y el segundo grupo lo hace sobre un operador de compresión P, dando lugar a dos órbitas, $\mathcal{O}_A$ y $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$, respectivamente.

Entre los resultados obtenidos, se destacan los que caracterizan la estructura diferenciable de estas órbitas. Desde un punto de vista métrico introduciremos una métrica de Finsler cociente en ambos espacios y mostraremos que ambas órbitas son un espacio métrico completo con la distancia rectificable inducida. En el caso de $\mathcal{O}_A$, también se introduce una métrica de Finsler ambiente llegando a la misma conclusión sobre la completitud. Para finalizar, se muestra que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es un espacio recubridor de otra órbita natural de P.

La mayoría de los resultados que exponemos en esta tesis han sido publicados en [Di 13] y [CD13].

Palabras claves: Subvariedad, métrica de Finsler, métrica Riemanniana, revestimiento, representación a izquierda, operadores autoadjuntos, operadores de compresión, ideales simétricamente normados.

Lie-Banach Homogeneous Metric Spaces

Abstract: This thesis deals with metrical and geometrical aspects of Lie-Banach homogeneous spaces.

We consider two Lie-Banach groups. The first one acts on a selfadjoint operator A and the second group on a pinching operator P. These actions induce two orbits: $\mathcal{O}_A$ and $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$, respectively.

Among the results obtained, we emphasize the ones that characterize the differential structure of these orbits. From a metric point of view we endow both spaces with a quotient Finsler metric and we prove that both orbits are complete metric spaces with the rectifiable distance induced by this metric. We also endow $\mathcal{O}_A$ with a ambient Finsler metric, obtaining the same conclusion about completeness. Finally, we show that $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ is a covering space of another orbit of pinching operators.

Most of the results exposed in this thesis have been published in [Di 13] and [CD13].

Keywords: Submanifold, Finsler metric, Riemannian metric, covering map, left representation, selfadjoint operators, pinching operator, symmetrically-normed ideal.

Agradecimientos

A mis Abuelos, por su amor infinito, por confiar en mí y enseñarme a confiar en mí, por su guía y apoyo. A mis padres, por "hacerme venir grande" y ayudarme a forjar este carácter jodido; los amo. A An, la hermana que la vida me regaló.

A Esteban Andruchow, por haber sido mi director, por su paciencia y comprensión, por su humildad y el compromiso con el que trabaja. Esteban ya te lo dije, pero es pertinente repetirlo, te admiro.

A mis amigos de toda la vida:
Gabita, Joha, Lore, Natalia J., Sole, Soli, Marunga, Rodrigo y Ari.

A mis amigos del IAM:

A Arias y Conde por, además de la compañía en estos años, haberme empujado incansablemente en este último tramo.

A Gustavo Corach y Alejandra Maestripieri por haberme dado la posibilidad de trabajar en el Instituto Argentino de Matemática, lugar donde pude conocer toda esta gente hermosa y me sentí tan feliz.

A Edu por haber sido mi hermano de doctorado. Edu, sigamos brindando por nuestro paper!

A Alejandro, Cele, Demetrio, Elona, Francisco, Gabriel, Guille, Jorge, Juan, Juliana, Mariano, Pedro Arini, Pedro Massey, Rocío, Román, Tammy, Alice, Ceci y Vero, por todos los hermosos momentos compartidos y por haber tenido siempre una palabra de aliento.

A mis amigos de la carrera: Ani, Lore, Martín, Pedro (por haber estado cerca a pesar de la distancia y por haberme ayudado a mi manera), Meli, Marcelo, María del Carmen (por iniciarme en la geometría y por toda la paciencia que me tuvo a la hora de trabajar con ella en UCA), Fabio y Susana.

A medida que pasa el tiempo me siento más y más convencida de que somos parte de un todo, no somos islas flotando en el mar, somos UNO.

Es debido a esta apreciación, que siento que todo lo que soy y todo lo que logré se lo debo, en parte, a toda la gente que está (o que estuvo) cerca mío. A todos ustedes, simplemente puedo decirles:

Gracias, Gracias, Gracias.

The goal ever recedes from us.
The greater the progress, the greater the recognition of our unworthiness.
Satisfaction lies in the effort, not in the attainment.
Full effort is full victory.
(Whatever you do will be insignificant,
but it is very important that you do it.)

— Mahatma Gandhi

A mis Abuelos.

Índice general

Introducción

Un espacio homogéneo es un conjunto en el cual un grupo actúa transitivamente. Dicho de una manera más simple, los espacios homogéneos son órbitas generadas a partir de la acción de un grupo; siendo esta la manera en la que estos espacios son considerados en la teoría de operadores. Por ejemplo, las órbitas de operadores, funcionales, representaciones, etc. son espacios homogéneos de los grupos unitarios considerados. Lo que hace más atrayente aún el análisis de estos espacios homogéneos es que suelen ser variedades diferenciables y examinar la estructura geométrica que poseen conlleva a estudiar las propiedades de los operadores que los componen.

Una clase particularmente interesante de espacios homógenos son los que el grupo en consideración es de Lie-Banach. Los grupos de Lie-Banach son generalizaciones de los grupos de Lie clásicos al contexto infinito dimensional, es decir, actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita (ver [dlH72]). Entre estos podemos mencionar el grupo unitario de Fredholm, es decir, el de los operadores unitarios de $\mathcal{H}$ que son perturbaciones compactas de la identidad; como así también al grupo de los unitarios p-Schatten ($1 \leq p < \infty$), el cual está formado por los operadores unitarios que son perturbaciones p-Schatten de la identidad. También existen análogos del grupo lineal, de los grupos simplécticos reales y complejos, entre otros.

El objeto de estudio de esta tesis son los espacios homogéneos de estos grupos, más precisamente, estudiaremos acciones de estos grupos sobre operadores particulares. Consideraremos en primer lugar el problema de la estructura diferenciable de las órbitas, la cual no está garantizada en dimensión infinita. Luego analizaremos problemas métricos, induciendo en los espacios homogéneos métricas a partir del grupo y la acción. Cada uno de estos grupos posee una métrica natural (por ejemplo, la norma-p del grupo de los unitarios p-Schatten). Dedicaremos también nuestra atención al estudio de la métrica de Finsler en el grupo, y luego las propiedades que se transfieren al espacio homogéneo.

Antecedentes en geometría de operadores

Como antecedentes en el estudio de la teoría de operadores desde un punto de vista geométrico podemos citar en primer lugar el aporte que hizo de G. D. Mostow en 1955 [Mos55]. En este trabajo, el autor introdujo una estructura Riemanniana en el conjunto de las matrices cuadradas positivas e inversibles definiendo la métrica a partir de la traza de matrices. Años más tarde, G. Corach, H. Porta y L. Recht en sus trabajos [PR87b, PR87a, CPR90, CPR93a] comenzaron el análisis de la estructura diferencial de diversas clases de operadores.

Puntualizando en el análisis de las órbitas unitarias, es propio volver a mencionar el trabajo de G. Corach, H. Porta y L. Recht [CPR93b]. En el mismo se puede encontrar un estudio exhaustivo de la estructura geométrica del espacio Q de elementos idempotentes de una C^*-álgebra. Los autores estudiaron, entre otras cosas, las órbitas unitarias inducidas por el automorfismo interno del grupo de elementos que son unitarios para una forma no-degenerada, conjugada-bilineal y simétrica determinada por un elemento autoadjunto de Q, en el espacio de los elementos autoadjuntos de Q. Otro aporte importante en este ámbito fue el de E. Andruchow y D. Stojanoff. Entre sus trabajos, se destaca [AS91], en donde estudiaron la geometría de la órbita $\{ubu^* : u \in U\}$ donde b es un elemento fijo de una C^*-álgebra compleja y unital y U es el grupo unitario de esta C^*-álgebra. G. Larotonda en [Lar06] estudió la geometría de las órbitas unitarias en una variedad Riemanniana, infinito dimensional la cual está modelada sobre el ideal de los operadores de Hilbert-Schmidt.

Volviendo nuestra mirada a la teoría de operadores, en particular, a los operadores de compresión, hacemos mención al aporte hecho por C. Davis [Dav58, Dav59] a fines de los años 50. El autor introdujo estos operadores, generalizando la noción de los pinching de matrices desarrollados en análisis matricial. Siguiendo esta línea, cabe citar el trabajo de Bathia [Bha00] a principios de la década pasada. Por su parte Gohberg y Krein [GK69] y Simon [Sim79] han estudiado estos operadores. En el contexto de ideales simétricamente normados. En la mecánica clásica el operador de compresión es empleado cuando $\mathcal{I}$ es el ideal de los operadores traza, gracias al conocido postulado de von Neumann sobre operadores de densidad [vN55]. Más recientemente, Odzijewicz y Ratiu [OR03] mostraron que los operadores de compresión son ejemplos de "quantum reduction maps".

En lo que respecta al estudio de los grupos clásicos, a mediados de la década del 80, Carey en [Car85] dedicó su atención a obtener propiedades que surgen de restringir una acción al grupo de los unitarios que son perturbaciones Hilbert-Schmidt de la identidad. Más recientemente, Bóna en [Bón04] y Beltiţă en [BRT07] hicieron un importante aporte en este campo. Un problema interesante de abordar es el que surge cuando en el espacio homógeneo se inducen métricas a partir del grupo y la acción. En este ámbito, Durán, Mata-Lorenzo y Recht en [DMLR04] trataron dicho problema para la norma espectral.

Resultados obtenidos

El objetivo principal de la esta tesis es estudiar dos espacios homogéneos particulares.

Para introducir al primero, consideremos un operador acotado, autoadjunto y lineal A de un espacio de Hilbert de dimensión infinita $\mathcal{H}$. Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al álgebra de operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ a la clase de p-Schatten de $\mathcal{H}$ y por $U_p(\mathcal{H})$ al grupo de los unitarios p-Schatten. Si $A \notin \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, entonces A y $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ son linealmente independientes. Sea $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ el espacio afín:

$$\{A + X : X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})\}.$$

Debido a que cada elemento $S \in A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ tiene una única descomposición $S = A+X, X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, es natural dotar a este espacio afín con la métrica inducida por la norma-p : si $S_1 = A+X_1$ y $S_2 = A+X_2$, entonces $\|S_1 - S_2\| := \|X_1 - X_2\|_p$.

La primera órbita que vamos a analizar está definida como:

$$\mathcal{O}_A := \{UA : U \in U_p(\mathcal{H})\}.$$

Debido a que cualquier operador $U \in U_p(\mathcal{H})$ puede descomponerse como $U = I + X$, con $X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, se tiene que la órbita $\mathcal{O}_A$ está contenida en $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Es por esto que se va a considerar a $\mathcal{O}_A$ con la topología inducida por la norma-p de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Primeramente vamos a mostrar que $\mathcal{O}_A$ que es una subvariedad suave si y sólo si la imagen de A es cerrada. En el caso de que la imagen de A sea cerrada, es natural estudiar a esta órbita como a un espacio métrico. Con tal fin, la vamos a dotar de dos métricas naturales, obtenidas como el ínfimo de longitudes de curvas contenidas en $\mathcal{O}_A$. Gran parte de las propiedades de $\mathcal{O}_A$ que mostraremos han sido publicadas en [Di 13].

Para definir al segundo espacio homogéneo, consideremos Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$ el correspondiente ideal simétricamente normado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dotado con la norma $\| \, . \, \|_{\mathcal{I}}$. Denotemos por $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ al grupo de los operadores unitarios que son perturbaciones de la identidad por un operador en $\mathcal{I}$, i.e.

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \{ \, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \, : \, u - I \in \mathcal{I} \, \},$$

donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el conjunto de los operadores unitarios actuando en $\mathcal{H}$. $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ es un grupo de Lie-Banach real con la topología definida por la métrica $d(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{I}}$, cuya álgebra de Lie es

$$\mathcal{I}_{ah} = \{ \, x \in \mathcal{I} \, : \, x^* = -x \, \},$$

que coincide con el espacio de Banach real de los operadores antihermíticos en $\mathcal{I}$ (ver [Bel06]).

Sea $\{ \, p_i \, \}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$ una familia de proyecciones hermitianas mutuamente ortogonales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Debido a que no se hacen suposiciones sobre la suma de todas las proyecciones de la familia, puede darse el caso que la proyección $p_0 := 1 - \sum_{i=1}^w p_i$ sea no nula. El *operador de compresión* asociado con $\{ \, p_i \, \}_1^w$ está definido por

$$P : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}, \qquad P(x) = \sum_{i=1}^{w} p_i x p_i,$$

donde en caso que $w = \infty$ la serie es convergente en la norma uniforme.

Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ al álgebra de Banach de los operadores lineales actuando en $\mathcal{I}$ que son acotados para la norma $\| \cdot \|_{\mathcal{I}}$. La multiplicación a izquierda define al operador lineal acotado $L_x : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$, $L_x(y) = xy$, para $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $y \in \mathcal{I}$. La representación a izquierda de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$, esto es, $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{I})$, $u \mapsto L_u$, permite introducir la siguiente órbita:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) := \{ \, L_u P L_{u^*} \, : \, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \, \} \, .$$

$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es la segunda órbita que será estudiada en esta tesis. El estudio, como se ha mencionado con anterioridad, está enfocado en las propiedades geométricas de dicha órbita. Cabe mencionar que la mayoría de los resultados que expondremos sobre esta órbita pueden encotrarse en [CD13].

Como cada operador de compresión es una proyección continua, el estudio que haremos podría considerarse como una contribución a la vasta literatura sobre la geometría diferencial y métrica de las órbitas unitarias de proyecciones en distintos conjuntos (ver, por ejemplo, [AL08, AS94, BRT07, CPR90, CPR93b, Upm85]).

Más allá de algunas propiedades geométricas que ya han sido estudiadas en los trabajos antes mencionados, y que también valen en ésta particular órbita, exhibiremos nuevas características de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$, especialmente relacionadas con su estructura de subvariedad (ver Teorema 3.2.7 y Teorema 3.3.7). Además profundizaremos en la estructura topológica de esta órbita probando que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es un espacio recubridor de una órbita de operadores de compresión que contiene a P (ver Teorema 3.5.5). Este resultado topológico es otra motivación para el estudio de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ y tiene su equivalente en álgebras de Von Neumann con las órbitas unitarias de una esperanza condicional [AS94].

Organización de la tesis

Esta tesis está basada principalmente en los artículos [Di 13] y [CD13]. Los Capítulos 2 y 3 contienen algunos de los resultados que estimamos son originales y que han sido publicados en dichos trabajos. A continuación expondremos un breve resumen de cada capítulo.

Capítulo 1

Dedicaremos este capítulo a fijar notaciones y exponer los preliminares necesarios acerca de operadores en espacios de Hilbert, geometría diferencial en dimensión infinita y espacios homogéneos.

Capítulo 2

Este capítulo está centrado en el estudio de la órbita $\mathcal{O}_A$. En la Sección 2.1 vamos a probar que la condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{O}_A$ sea una subvariedad de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ es que el operador autoadjunto A tenga rango cerrado. En la Sección 2.2 estudiaremos el grupo de isotropía en $\mathcal{O}_A$. En la Sección 2.3 vamos a dotar a $\mathcal{O}_A$ de una métrica de Finsler dada por la norma cociente del álgebra de Lie de $U_p(\mathcal{H})$ por el álgebra de Lie del grupo de isotropía de la acción y vamos a analizar el caso particular $p = 2$. También mostraremos que para dicho valor de p, la métrica de Finsler introducida es una métrica Riemanniana. En la Sección 2.4 dotaremos a $\mathcal{O}_A$ de la métrica de Finsler provista por la norma ambiente de $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y además mostraremos que con esta norma es un espacio métrico completo. En la Sección 2.5 vamos a considerar la métrica de Finsler cociente introducida en la Sección 2.3 y caracterizaremos la distancia rectificable inducida por esta métrica. Mostraremos que esta distancia rectificable coincide con la métrica inducida por la topología cociente de $U_p(\mathcal{H})/G_A$, donde G_A es el grupo de isotropía. También veremos que $\mathcal{O}_A$ es un espacio métrico completo con la distancia rectificable dada por la métrica cociente.

Capítulo 3

El Capítulo 3 está dedicado al análisis de la órbita $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$. Las secciones 3.1, 3.2, 3.3 están dedicadas al estudio de la estructura diferencial de $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$. Para un ideal simétricamente normado $\mathcal{I}$ (distinto del ideal de los operadores compactos), en el Teorema 3.2.7 exhibiremos condiciones equivalentes a que $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ sea una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Para el ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de los operadores compactos (también denotado por $\mathcal{K}$), algunas de estas condiciones no siguen valiendo. De hecho, $\mathcal{U}_\mathcal{K}(P)$ es siempre una quasi subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$, las cuales raramente tienen espacios tangentes complementados en $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ (ver Teorema 3.3.7).

En la Sección 3.4 daremos una aplicación de los resultados obtenidos en las secciones anteriores. Más precisamente, estudiaremos la topología de las órbitas $\mathcal{U}_\mathcal{I}$-unitarias de un operador normal y compacto. Este tipo de órbitas pueden ser dotadas con la topología cociente, como así también con la topología definida por la norma del ideal $\mathcal{I}$. Probaremos que ambas topologías coinciden si y sólo sí el operador compacto tiene rango finito. Es interesante destacar que en [AL10, ALR10, BR05, Bón04], a pesar de no estar bajo las mismas hipótesis, la condición de rango finito también resulta ser suficiente.

En la Sección 3.5, continuaremos estudiando la estructura topológica de $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$. Veremos que $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ es un espacio recubridor de otra órbita natural de P. Los métodos de esta sección son utilizados en [AS94], donde se dan situaciones similares en relación con la órbita unitaria de una esperanza condicional en un álgebra de

Von Neumann.

La Sección 3.6 está enfocada a la estructura métrica de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$. Motivados por [AL10, Chi10] estudiaremos la distancia rectificable inducida por la métrica cociente de Finsler en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$. Bajo la hipótesis de que la topología cociente en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ coincide con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$, probaremos que la distancia rectificable define esta topología. Como consecuencia, se tiene que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es completo con dicha distancia rectificable.

Capítulo 1

Preliminares

El análisis funcional y la geometría diferencial usualmente van de la mano. Este hecho tiene lugar en numerosos campos como el análisis complejo, la teoría de las ecuaciones diferenciales, o en la teoría de Grupos de Lie.

En esta sección exhibiremos una breve recolección de definiciones y resultados conocidos sobre teoría de operadores en espacios de Hilbert y geometría diferencial que serán utilizados a lo largo del trabajo. Entre las muchas referencias destacamos las siguientes [Con90, GK69, Bel06, Pen55, Gro77, dlH72, Upm85]

1.1 Operadores en espacios de Hilbert

Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. $\| \, . \, \|_{\mathcal{H}}$ y $\| \, . \, \|_{\mathcal{H}'}$ denotarán la norma de los elementos en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$, respectivamente. En caso de que no haya lugar a confusión, con $\| \, . \, \|$ denotaremos la norma de un elemento ya sea en $\mathcal{H}$ como en $\mathcal{H}'$.

Dada una transformación lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, $\|T\|$ denotará la **norma uniforme** de T, es decir

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathcal{H}'} : \ x \in \mathcal{H}, \ \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$$

Sea $\mathcal{B}\left(\mathcal{H}, \mathcal{H}^{'}\right)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}^{'}$. En el caso que $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$, $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en este caso, $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotará al operador identidad.

De ahora en más, $\ker(T)$ and $\mathrm{R}(T)$ denotarán al núcleo y al rango de T, respectivamente, para cualquier operador $T \in \mathcal{B}\left(\mathcal{H}, \mathcal{H}^{'}\right)$.

Si $\mathcal{H}_0$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^{\perp}$. Si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces X puede ser escrito como una matriz de 2×2 con entradas dadas por operadores,

$$X = \begin{pmatrix} X^{11} & X^{12} \\ X^{21} & X^{22} \end{pmatrix}$$

donde $X^{11} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, $X^{12} \in \mathcal{B}\left(\mathcal{H}_0^{\perp}, \mathcal{H}_0\right)$, $X^{21} \in \mathcal{B}\left(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0^{\perp}\right)$, $X^{22} \in \mathcal{B}\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right)$.

A lo largo de este trabajo denotaremos por $Gl(\mathcal{H})$ al grupo de operadores inversibles de $\mathcal{H}$ y por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al grupo de los operadores unitarios de $\mathcal{H}$. $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ denotará al conjunto de los operadores de rango finito de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir, los operadores T tales que $\dim(\mathrm{R}(T))$ (la cual será denotada por $\mathrm{rg}(T)$) es finita. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ denotarán al conjunto de los operadores compactos, en el caso de que no presente confusión y con el fin de simplificar la notación, este conjunto también será denotado por $\mathcal{K}$.

Notación 1.1.1 Dado $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, los operadores autoadjuntos

$$\mathrm{Re}(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad y \quad \mathrm{Im}(A) = \frac{A - A^*}{2i}$$

denotarán la parte real e imaginaria respectivamente del operador A.

En lo sucesivo, el subíndice h (respectivamente ah) denotará el conjunto de los operadores hermíticos (respectivamente antihermíticos).

Recordemos la definición de dos topologías definidas en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, las cuales son más débiles que la dada por la norma de operadores [Con90].

La *topología débil de operadores (WOT)* sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la topología localmente convexa definida por las seminormas $\{p_{h,k} : h, k \in \mathcal{H}\}$ donde $p_{h,k}(A) = |\langle Ah, k\rangle|$. La *topología fuerte de operadores (SOT)* es la topología definida sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ por la familia de seminormas $\{p_h : h \in \mathcal{H}\}$, donde $p_h(A) = \|A_h\|$.

La topología dada por la norma es más fuerte que la topología SOT y ésta es a su vez más fuerte que la topología (WOT).

Además, dada una sucesión $(A_n)_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se tiene que:

1. $A_n \to A$ (WOT) si y sólo sí $\langle A_n h, k\rangle \to \langle Ah, k\rangle$ para todo $h, k \in \mathcal{H}$.

2. $A_n \to A$ (SOT) si y sólo sí $\|A_n h - Ah\| \to 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

1.1.1 El operador $x \otimes y$

Dados dos elementos x e y en $\mathcal{H}$, definamos el operador $x \otimes y$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como:

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y\rangle\, x.$$

para todo $z \in \mathcal{H}$.

Este operador cumple con una serie de propiedades cuyas demostraciones se siguen de la definición.

Proposición 1.1.2 *Sean x, y, x' e y' elementos en $\mathcal{H}$ y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces tenemos que:*

1. $\|x \otimes y\| = \|x\|\,\|y\|$.

2. $(x \otimes x')\,(y \otimes y') = \langle y, x'\rangle\,(x \otimes y')$.

3. $(x \otimes y)^* = y \otimes x$.

4. $T(x \otimes y) = T(x) \otimes y$; $(x \otimes y)T = x \otimes T^*(y)$.

5. *Si $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador de rango uno, entonces U es de la forma $x \otimes y$, donde x es un elemento no nulo de su imagen e $y \in \mathcal{H}$.*

6. *El operador $x \otimes x$ es una proyección de rango uno si y sólo si $\|x\| = 1$; Más aún, toda proyección de rango uno es de la forma $x \otimes x$ para algún vector de norma uno.*

1.1.2 Isometrías parciales

Una *isometría parcial* es un operador W tal que para cada $h \in (\ker(W))^{\perp}$ cumple que $\|Wh\| = \|h\|$. El espacio $(\ker(W))^{\perp}$ es denominado *espacio inicial* y $\mathrm{R}(W)$ es denominado *espacio final*.

Recordar que dado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe una isometría parcial W con $(\ker(A))^{\perp}$ como espacio inicial y $\overline{\mathrm{R}(A)}$ como su espacio final tal que $A = W\,|A|$ (donde

$|A| = \sqrt{A^*A}$). Más aún, si $A = UP$ donde $P \geq 0$ y U es una isometría parcial con $\ker(U) = \ker(P)$, entonces $P = |A|$ y $U = W$. Esto es lo que se conococe como la *descomposición polar de A*.

Dado $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, son equivalentes:

- W es una isometría parcial.
- W^* es una isometría parcial.
- WW^* es una proyección.
- W^*W es una proyección.
- $WW^*W = W$.
- $W^*WW^* = W^*$.

Más aún, Si W es una isometría parcial, se tiene que W^*W es la proyección sobre el espacio inicial de W y WW^* es la proyección sobre el espacio final de W.

1.1.3 La pseudoinversa de Moore-Penrose

Sea $T \in \mathcal{B}\left(\mathcal{H}, \mathcal{H}'\right)$ un operador de rango cerrado. $T^\dagger$ denotará a la *pseudoinversa de Moore-Penrose* de T, i.e., al único operador en $\mathcal{B}\left(\mathcal{H}', \mathcal{H}\right)$ tal que:

1. $TT^\dagger = \left(TT^\dagger\right)^*$,
2. $T^\dagger T = \left(T^\dagger T\right)^*$,
3. $TT^\dagger T = T$,
4. $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$.

Esto es equivalente a que el operador esté definido por $T^\dagger(Tx) = x$ si $x \in \ker(T)^\perp$ y $T^\dagger(y) = 0$ si $y \in \mathrm{R}(T)^\perp$.

Notar que $T^\dagger T$ coincide con la proyección ortogonal sobre $\ker(T)^\perp$ y $TT^\dagger$ con la proyección ortogonal sobre $\mathrm{R}(T)$.

Más aún, si A es un operador autoadjunto con $\mathrm{R}(A)$ cerrado, entonces

$$AA^\dagger = A^\dagger A. \tag{1.1}$$

Y además, la descomposición en términos de $\mathcal{H} = \mathrm{R}\,(A) \oplus \mathrm{R}\,(A)^{\perp} = \mathrm{R}\,(A) \oplus \ker\,(A)$ es

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $A_0 = A|_{\mathrm{R}(A)} : \mathrm{R}\,(A) \to \mathrm{R}\,(A)$.

Más información sobre la pseudoinversa de Moore-Penrose se puede encontrar en el paper de Penrose [Pen55] o en libro de Groetsch [Gro77].

1.1.4 La expansión de Schmidt de un operador compacto

Sea T un operador compacto. Los autovalores de $|T|$ serán denotados por s_k y son lo que usualmente se denominan *valores singulares de* T. Serán ordenados en forma decreciente, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Notar que $s_1(T) = \|T\|$.

T admite una expansión, que suele denominarse *expansión de Schmidt* del operador T ([GK69, p. 28])

$$T = \sum_{k=1}^{\mathrm{rg}(T)} s_k(T) \, \langle \cdot, \eta_k \rangle \, \psi_k$$

o lo que es lo mismo,

$$T = \sum_{k=1}^{\mathrm{rg}(T)} s_k(T) \psi_k \otimes \eta_k \tag{1.2}$$

donde $\{\eta_k\}$ y $\{\psi_k\}$ son sistemas ortonormales de vectores. Cabe hacer mención que la serie (1.2) converge en norma uniforme.

1.2 Ideales simétricamente normados.

A continuación se expondrán resultados básicos sobre ideales simétricamente normados. Para un enfoque más profundo sobre el tema, se recomienda leer [GK69] o [Sim79].

Dado un conjunto $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}\,(\mathcal{H})$, vamos a decir que $\mathcal{I}$ es un *ideal bilátero* del anillo $\mathcal{B}\,(\mathcal{H})$ si es un ideal desde el punto de vista algebraico de la definición.

Observemos que por la descomposición polar, todo ideal bilátero es autoadjunto.

Además de ser evidente que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son ideales biláteros, tenemos el siguiente resultado de J. Calkin [Cal41].

Teorema 1.2.1 *Cualquier ideal bilátero $\mathcal{I}$ del anillo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ está contenido en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ y contiene a $\mathcal{F}(\mathcal{H})$:*

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Una consecuencia de este teorema es que, en caso de ser $\mathcal{H}$ separable, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es el único ideal bilátero cerrado del anillo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Para definir a los ideales simétricamente normados del anillo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, se va a necesitar el concepto de norma simétrica.

Definición 1.2.2 Un funcional $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ definido en un ideal bilátero $\mathcal{I}$ del anillo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, se dice que es una **norma simétrica** si tiene las propiedades usuales de la norma:

1. $\|X\|_{\mathcal{I}} > 0$ para todo $X \in \mathcal{I}, X \neq 0$;
2. $\|\lambda X\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \|X\|_{\mathcal{I}}$, donde λ es un número complejo y $X \in \mathcal{I}$;
3. $\|X + Y\|_{\mathcal{I}} \leq \|X\|_{\mathcal{I}} + \|Y\|_{\mathcal{I}}$, donde X e Y están en $\mathcal{I}$;

y si, además,

4. $\|AXB\|_{\mathcal{I}} \leq \|A\| \|X\|_{\mathcal{I}} \|B\|$ donde $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $X \in \mathcal{I}$;
5. para cualquier operador X de rango uno se tiene que

$$\|X\|_{\mathcal{I}} = \|X\|.$$

Observación 1.2.3 *Notar que la condición 4. implica que $\|X\|_{\mathcal{I}} = a\|X\|$ para cualquier operador X de rango uno, donde a es una constante positiva que no depende de X. Por lo tanto 5. se puede interpretar como una hipótesis de "normalización".*

Definición 1.2.4 Si en la definición de norma simétrica la condición 4. es reemplazada por

$$\|UX\|_{\mathcal{I}} = \|XU\|_{\mathcal{I}} = \|X\|_{\mathcal{I}}$$

donde U es un operador unitario, se tiene la definición de **norma unitariamente invariante**.

Observación 1.2.5 *Toda norma simétrica es unitariamente invariante.*

Un *ideal simétricamente normado* es un ideal bilátero $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dotado con una norma $\| \,.\, \|_{\mathcal{I}}$ que satisface

- $(\mathcal{I}, \| \,.\, \|_{\mathcal{I}})$ es un espacio de Banach.
- $\|XYZ\|_{\mathcal{I}} \leq \|X\|\|Y\|_{\mathcal{I}}\|Z\|$, para $x, z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $y \in \mathcal{I}$.
- $\|\xi \otimes \eta\|_{\mathcal{I}} = \|\xi\| \, \|\eta\|$, para $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Notar que por el Teorema 1.2.1, cualquier ideal simétricamente normado está contenido en el ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de los operadores compactos.

A continuación mostraremos que los ideales simétricamente normados están estrechamente relacionados con las funciones de gauge simétricas. Sean c_0 el espacio de todas las sucesiones de número reales que tienden a cero y c_{00} el subconjunto de c_0 de todas las sucesiones con un número finito de términos no nulos.

Una *función gauge simétrica* es una norma $\Phi : c_{00} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\Phi((1, 0, 0, \ldots)) = 1$.
2. $\Phi((a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)) = \Phi((|a_{j_1}|, |a_{j_2}|, \ldots, |a_{j_n}|, 0, 0, \ldots))$,

   donde $(a_n)_n \in c_{00}$, y $j_1, \ldots, j_n$ es una permutación de los enteros $1, \ldots, n$.

La relación que hay entre este tipo de ideales y funciones es que cualquier función gauge simétrica Φ da lugar a dos ideales simétricamente normados. De hecho, para cualquier operador compacto X consideremos la sucesión $(s_n)_n$ de los valores singulares ordenados de manera decreciente, y definamos

$$\|X\|_\Phi := \sup_{k\geq 1} \Phi(s_1, s_2, \ldots, s_k, 0, 0, \ldots) \in [0, \infty].$$

Entonces tenemos que

$$\mathcal{S}_\Phi := \{\, X \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \,:\, \|X\|_\Phi < \infty \,\}$$

y

$$\mathcal{S}_\Phi^{(0)} := \overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|_\Phi},$$

son ideales simétricamente normados.

No es difícil ver que $\mathcal{S}_\Phi^{(0)}$ es un ideal simétricamente normado separable. Más aún, cualquier ideal simétricamente normado separable coincide con algún $\mathcal{S}_\Phi^{(0)}$ [GK69, Theorem 6.2, p. 89].

Sea $\hat{k}$ el cono de todas las sucesiones decrecientes de c_{00}, cuyos términos son no negativos. Entonces para cualquier función gauge simétrica Φ tenemos la siguiente relación:

$$\sup_{(a_n)_n \in \hat{k}} \frac{\Phi((a_n)_n)}{a_1} = \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots). \tag{1.3}$$

Observemos que un simple ejemplo de ideal simétricamente normado separable es el de los operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. En efecto, la función de gauge simétrica está dada por:

$$\Phi((a_n)_n) = \max_{n\geq 1} |a_n|\,,$$

donde, $(a_n)_n \in c_{00}$. Además tenemos el siguiente lema (ver [GK69, Lemma 5.2, p.85])

Lema 1.2.6 *Sea Φ una función gauge simétrica. Entonces $\mathcal{S}_\Phi$ y $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ coinciden si y sólo sí,*

$$\sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) < \infty.$$

1.2.1 Ideales $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$

Fijemos $1 \le p < \infty$, notemos que la función gauge simétrica

$$\Phi_p(a_1, a_2, \ldots) = (\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p)^{1/p}$$

da lugar a un ideal simétricamente normado separable conocido, este es el de los ideales p-Schatten.

Denotemos por $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ a la clase de estos operadores, esto es

$$\mathcal{B}_p(\mathcal{H}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \operatorname{tr}(|A|^p) < \infty\}.$$

donde tr denota denota al funcional traza usual. Para un operador $A \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, la norma-$p$ de este operador está definida por:

$$\|A\|_p := \operatorname{tr}(|A|^p)^{1/p} = (\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p)^{1/p}.$$

donde $\{s_n\}_n$ son los valores singulares de A.

Para el caso $p = 2$, se tiene que $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ es un espacio de Hilbert, conocido como el el *espacio de Hilbert de los operadores de Hilbert-Schmidt*, con el producto interno

$$\langle A, B\rangle_2 := \operatorname{tr}(B^* A).$$

Observemos que la norma inducida por este producto interno coincide con la norma $\|\cdot\|_2$ previamente definida, es decir,

$$\|A\|_2 = \operatorname{tr}(A^* A)^{1/2}.$$

En particular, si $\{e_n : n \ge 1\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $\|A\|_2^2 = \sum_{n\ge 1} \|Ae_n\|^2$.

Notemos que un ejemplo simple de un operador que esté en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ es $x \otimes y$, donde $x, y \in \mathcal{H}$. Más aún, tenemos que

$$\|x \otimes y\|_p = \|x\|\|y\| = \|x \otimes y\|. \tag{1.4}$$

Consideremos el siguiente grupo de operadores

$$U_p(\mathcal{H}) := \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : U - I \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})\}.$$

Este grupo es un ejemplo de lo que en la literatura [dlH72] se conoce como grupo de Lie-Banach clásico. Notar que debido a que $U_1 - U_2 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ si $U_1, U_2 \in U_p(\mathcal{H})$, es natural dotar a $U_p(\mathcal{H})$ con la métrica $\|U_1 - U_2\|_p$. Con esta métrica, este grupo de operadores tiene estructura diferenciable. El álgebra de Lie-Banach de $U_p(\mathcal{H})$ es el espacio de Banach (real) $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah} := \{X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) : X^* = -X\}$.

Los siguientes resultados referidos a la estructura métrica de $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y $U_p(\mathcal{H})$ han sido recapitulados de [AL08] y de [ALR10].

L_p denotará al funcional que mide la longitud de curvas suaves a trozos en $U_p(\mathcal{H})$, es decir:

$$L_p(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_p \, dt$$

donde α es una curva suave. d_p denotará la distancia rectificable en $U_p(\mathcal{H})$:

$$d_p(u_1, u_2) = \text{ínf}\{L_p(\gamma) : \ \gamma \subset U_p(\mathcal{H}),\ \gamma(0) = u_1,\ \gamma(1) = u_2\}$$

El *mapa exponencial* está definido como:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah} & \xrightarrow{\exp} & U_p(\mathcal{H}) \\ A & \longmapsto & e^A \end{array}$$

Observación 1.2.7 *El mapa mapa exponencial tiene las siguientes propiedades:*

1. *La exponencial* exp *es sobreyectiva.*

2. *La exponencial es una biyección entre*

$$\left\{z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah} : \ \|z\| < \pi\right\} \longrightarrow \{u \in U_p(\mathcal{H}) : \ \|1 - u\| < 2\}.$$

3. *Más aún,*

$$\exp : \ \left\{z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah} : \ \|z\| \leq \pi\right\} \longrightarrow U_p(\mathcal{H})$$

es sobreyectiva.

Estas propiedades pueden deducirse de que si $u \in U_p(\mathcal{H})$, entonces tiene una descomposición espectral

$$u = p_0 + \sum_{k\geq 1} (1 + \alpha_k) p_k,$$

donde α_k son los autovalores no nulos de $u - 1 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y p_k son proyecciones dos a dos ortogonales. Existe un $t_k \in \mathbb{R}$ con $|t_k| \leq \pi$ tal que $e^{it_k} = 1 + \alpha_k$. La estimación

$$|t_k|^p \left(1 - \frac{|t_k|^2}{12}\right)^{p/2} \leq \left|e^{it_k} - 1\right|^p = |\alpha_k|^p$$

implica que $z = \sum_{k\geq 1} it_k p_k$, cuya exponencial es u, está en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$.

El siguiente resultado establece que los grupos uniparamétricos de los unitarios en $U_p(\mathcal{H})$ tienen longitud mínima hasta cierto valor de t.

Teorema 1.2.8 *Si $u, v \in U_p(\mathcal{H})$ y $x \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ con $\|x\| \leq \pi$ entonces la curva $\mu(t) = ue^{tx}$, $t \in [0,1]$, es más corta que cualquier otra curva en $U_p(\mathcal{H})$ que sea suave a trozos y que una los mismos extremos. Más aún, si $\|x\| < \pi$, μ es la única con esta propiedad.*

Además,

$$\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{12}} d_p(u,v) \leq \|u - v\|_p \leq d_p(u,v)$$

En particular, el espacio métrico $(U_p(\mathcal{H}), d_p)$ es completo.

1.3 Operadores de compresión

Sea $\{p_i\}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$ una familia de proyecciones hermitianas mutuamente ortogonales, i.e.

$$p_i = p_i^*, \qquad p_i p_j = \delta_{ij}.$$

Entonces a cada operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uno puede asociarle un operador

$$\widehat{A} = \sum_{i=1}^{w} p_i A p_i, \tag{1.5}$$

el cual también pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Notar que esto sólo habría que verificarlo para el caso $w = \infty$. Con este fin recordemos el siguiente teorema, cuya demostración podemos encontrar en [GK69, Theorem 6.3, p.90].

Teorema 1.3.1 *Sea X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión de operadores autoadjuntos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que converge SOT a un operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{I}$ es un ideal simétricamente normado separable y $T \in \mathcal{I}$, entonces las sucesiones $\{X_nA\}_1^\infty$, $\{AX_n\}_1^\infty$, $\{X_nAX_n\}_1^\infty$ convergen en la norma del ideal $\mathcal{I}$ a los operadores XA, AX, XAX, respectivamente.*

Continuando con el caso $w = \infty$, la igualdad (1.5) es en el sentido de la topología fuerte de operadores. Es decir, en el sentido de que para cualquier $h \in \mathcal{H}$

$$\widehat{A}h = \sum_{i=1}^{w} p_i A p_i h.$$

La convergencia, para cualquier $h \in \mathcal{H}$, de la serie se sigue del hecho que los elementos $g_k = p_k A p_k$ forman un sistema ortogonal y que

$$\|g_k\| \leq \|A\| \|p_k h\|,$$

con lo que

$$\|\sum_{k=m}^{n} g_k\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|g_k\|^2 \leq \|A\|^2 \sum_{k=m}^{n} \|p_k h\|^2.$$

Si A es un operador compacto, entonces $\widehat{A}$ también es compacto, y cuando $w = \infty$ la serie (1.5) converge en la norma uniforme.

En efecto, suponer que $w = \infty$ y considerar $\epsilon > 0$. Por el Teorema 1.3.1 existe $N = N_\epsilon$ tal que

$$\|Ah\| \leq \epsilon \|h\| \qquad \text{para } h \in \mathrm{R}(\sum_{i>N}^{w} p_i);$$

luego

$$\|p_k A p_k h\| \leq \epsilon \|p_k h\| \qquad \text{para } k > N.$$

Si $m, n > N$

$$\left\| \sum_{j=m}^{n} p_j A p_j h \right\| = \left(\sum_{j=m}^{n} \|g_j\|^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon \left(\sum_{j=m}^{n} \|p_j h\|^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon \|h\|,$$

lo que prueba la convergencia uniforme de la serie (1.5) y, al mismo tiempo, que el operador $\widehat{A}$ es compacto.

Teorema 1.3.2 *Sea A un operador compacto. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(\widehat{A}) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A) \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Para que

$$s_j(\widehat{A}) = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

es necesario y suficiente que $A = \widehat{A}$.

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3.3 *Sean Φ una función gauge simétrica, $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$ y $A \in \mathcal{I}$. Entonces el operador $\widehat{A}$ también está en $\mathcal{I}$ y además,*

$$\|\widehat{A}\|_\Phi \leq \|A\|_\Phi.$$

De la misma manera que trabajamos con el operador $\widehat{A}$ en el ideal de los operadores compactos, podemos trabajar en cualquier ideal simétricamente normado. Es decir, sean Φ una función gauge simétrica, $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$ y $\{\, p_i \,\}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$ una familia de proyecciones hermitianas mutuamente ortogonales se define el **operador de compresión asociado con esa familia** de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{P} & \mathcal{I} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{w} p_i A p_i, \end{array}$$

Por lo dicho anteriormente, como A es compacto las series las cuales en principio convergen en la topología fuerte de operadores, también resultan ser convergentes en la norma uniforme. Notar también que por el Teorema 1.3.3 P está bien definido, en el sentido que $P(A) = \widehat{A} \in \mathcal{I}$ si $A \in \mathcal{I}$.

Consideremos el álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ de todos los operadores lineales y acotados en $\mathcal{I}$ con la norma usual de operadores: para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{I})$,

$$\|X\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} = \sup_{\|A\|_{\mathcal{I}}=1} \|X(A)\|_{\mathcal{I}}.$$

A continuación se darán algunas propiedades básicas de los operadores de compresión.

Proposición 1.3.4 *Sean Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Sea P el operador de compresión asociado a la famillia $\{ p_i \}_1^w$. Entonces:*

i) $P^2 = P$.

ii) $P(ABC) = AP(B)C$, *donde* $A, C \in \mathrm{R}(P)$ *e* $B \in \mathcal{I}$.

iii) $P(X)^* = P(X^*)$.

iv) P *es continuo. De hecho,* $\|P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} = 1$.

Demostración. Las demostraciones $i) - iii)$ son triviales. Para una demostración de $iv)$ basta con aplicar el Teorema 1.3.3.

$\square$

1.4 Variedades modeladas en espacios de Banach

En esta sección haremos un breve repaso sobre algunos conceptos de geometría diferencial en dimensión infinita. Para un enfoque más detallado sobre estos temas, sugerimos consultar [Bel06, Gal06, Lan95, Rae77, Upm85]. Además, cabe también hacer referencia al trabajo [MLR92] en donde se hace un análisis exhaustivo sobre la teoría de espacios homogéneos reductivos de dimensión infinita.

Sea E un espacio de Banach real y M un espacio topológico. Decimos que M es una variedad de Banach de clase C^k $(0 \leq k \leq \infty)$ o simplemente *variedad de Banach suave* si existe una colección de cartas (U, ϕ) donde U son abiertos que cubren M, $\phi : U \to \phi(U) \subset E$ es un homeomorfismo con $\phi(U)$ abierto y además, si (ψ, V) es otra carta de M, entonces $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq E \to E$ es de clase C^k.

Antes de seguir adelante con las definiciones de subvariedad y quasi subvariedad, recordemos que un subespacio F de un espacio de Banach E se dice que es *complementado* si F es cerrado y existe un subespacio cerrado F_1 tal que $F \oplus F_1 = E$.

Sea M una variedad y N un espacio topológico contenido en M. Decimos que:

• N es una *subvariedad* de M si para cada punto $x \in N$ existe un espacio de

Banach E y una carta $(\mathcal{W}, \phi)$ en x, $\phi : \mathcal{W} \subseteq M \longrightarrow E$, tal que $\phi(\mathcal{W} \cap N)$ es un entorno de 0 en un subespacio complementado de E.

• N es una *quasi subvariedad* de M si para cada punto $x \in N$ existe un espacio de Banach E y una carta $(\mathcal{W}, \phi)$ en x, $\phi : \mathcal{W} \subseteq M \longrightarrow E$, tal que $\phi(\mathcal{W} \cap N)$ es un entorno de 0 en un subespacio cerrado de E.

Será útil tener en mente el siguiente criterio a la hora de determinar cuándo un espacio topológico es una subvariedad (ver [Bou67]).

Proposición 1.4.1 *Sea M una variedad, N un espacio topológico y $N \subseteq M$. Entonces, N es una subvariedad (resp. quasi subvariedad) de M si y sólo si la topología de N coincide con la topología heredada de M y el mapa diferencial de la inclusión $N \hookrightarrow M$ tiene rango complementado (resp. cerrado) en cada $x \in N$.*

Sean M, N variedades de Banach. Una función $f : M \to N$ de clase C^k $(k \geq 1)$ es una *sumersión* si, para cada $x \in M$, la aplicación tangente a f en x, f_{*x}, es sobreyectiva y su núcleo está complementado en T_xM.

Proposición 1.4.2 *Sea M, N variedades de Banach y $f : M \to N$ una función de clase C^k $(k \geq 1)$. Entonces f es una sumersión en $x \in M$ si y sólo si f admite secciones locales, es decir, existe un entorno U de $f(x) \in N$ y una función $\sigma : U \to M$ de clase C^k tal que $f \circ \sigma = I_U$.*

Observemos que si f admite secciones locales continuas en todo punto, entonces es abierta.

También notemos que en variedades de dimensión infinita, el núcleo de f_{*x} está siempre complementado.

Proposición 1.4.3 *Sea $f : M \to N$ una sumersión entre variedades de Banach. Dado $y \in N$, $f^{-1}(y)$ es una subvariedad cerrada de M, con espacio tangente dado por $T_x(f^{-1}(y)) = \ker(f_{*x})$, para cada $x \in M$.*

1.4.1 Grupos de Lie-Banach

Un grupo topológico G es un *grupo de Lie-Banach*, si es una variedad de Banach, tal que las estructuras de grupo y de variedad son compatibles, es decir, que los mapas

$$\begin{array}{rcl} G\times G & \longrightarrow & G \\ (g_1,g_2) & \longmapsto & g_1g_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

son suaves.

El espacio tangente T_eG en la identidad e de G se denomina *álgebra de Lie* de G y lo denotaremos por $\mathcal{G}$.

Dado un grupo de Lie-Banach G, un subgrupo H de G es un *subgrupo de Lie-Banach* si es un grupo de Lie-Banach con la topología heredada de G y si el espacio tangete T_eH es un subespacio cerrado y complementado de T_eG.

1.4.2 Espacios homogéneos

Sea G un grupo de Lie-Banach y M una variedad suave. Una *acción suave* de G sobre M es una función suave

$$\begin{array}{rcl} G\times \mathsf{M} & \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} & \mathsf{M} \\ (g,m) & \longmapsto & g\cdot m \end{array}$$

que satisface $(g_1,g_2)\cdot m = g_1\cdot(g_2\cdot m)$ para $g_1,g_2\in G$ y $m\in\mathsf{M}$.

Dada una acción, la *órbita* de $m\in\mathsf{M}$ es $\mathcal{O}(m)=\{g\cdot m : g\in G\}$.

Dado G un grupo de Lie-Banach y M una variedad suave, si $m\in\mathsf{M}$ se va a denotar con π_m al mapa

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\pi_m} & \mathsf{M} \\ g & \longmapsto & g\cdot m \end{array}$$

El subgrupo de G dado por $G_m=\{g\in G : \pi_m(g)=m\}$ es el *grupo de isotropía* en $m\in\mathsf{M}$.

Observemos que $\mathcal{O}(m)$ y G/G_m son conjuntos biyectivos para todo $m\in\mathsf{M}$.

Una acción se dice *transitiva* si para todos $m_0,m_1\in\mathsf{M}$, existe $g\in G$ tal que $g\cdot m_0=m_1$. Es decir, la acción es transitiva cuando M es una órbita.

Sea $G\times\mathsf{M}\stackrel{\cdot}{\longrightarrow}\mathsf{M}$ una acción suave transitiva. Se dice que M es un *espacio homogéneo suave* si existe $m\in\mathsf{M}$ tal que π_m es una sumersión suave en $e\in G$.

Notar que si π_m es una sumersión en $e\in G$ para algún $m\in\mathsf{M}$, entonces es una sumersión en e para todo $m\in\mathsf{M}$.

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [Bel06, Teorema 4.19].

Teorema 1.4.4 *Sea G un grupo de Lie-Banach, H un subgrupo de Lie-Banach de G y $P : G \to G/H$ la proyección natural. Dotar a G/H con la topología cociente y considerar la acción transitiva natural*

$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \xrightarrow{\alpha} & G/H \\ (g, kH) & \longmapsto & \alpha_g(kH) := gkH. \end{array}$$

Entonces G/H tiene estructura de subvariedad real y analítica tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. *El mapa P es real y analítico y tiene secciones locales reales y analíticas alrededor de cada punto de G/H.*

2. *Para cada $g \in G$ el mapa*

$$\alpha_g : G/H \longrightarrow G/H$$

es real analítica.

Observación 1.4.5 *Los espacios homogéneos pueden presentarse como espacios cocientes provistos con la topología cociente. Es decir, si la órbita $\mathcal{O}(m)$ es un espacio homogéneo, entonces el grupo de isotropía G_m es un subgrupo de Lie-Banach de G y el espacio cociente G/G_m con su topología es un espacio homogéneo difeomorfo a $\mathcal{O}(m)$. Recíprocamente, todo cociente de un grupo de Lie-Banach por un subgrupo de Lie-Banach es un espacio homogéneo con la topología cociente (Teorema 1.4.4). Además, cuando $\mathcal{O}$ es un espacio homogéneo, para cada $x \in \mathcal{O}$, la función $\pi_x : G \to \mathcal{O}$ resulta ser un fibrado principal.*

Notemos también que si $\mathcal{O}$ es un espacio homogéneo entonces los mapas π_x tienen secciones locales suaves en todo punto.

El siguiente resultado general sobre espacios homogéneos, es una consecuencia del teorema de la función implícita para espacios de Banach. Es pertinente citarlo ya que será de gran utilidad a la hora de decidir si una órbita es un espacio homogéneo. Dicho Lema y su demostración se pueden encontrar en el apéndice del artículo de I. Raeburn [Rae77].

Lema 1.4.6 *Sea G un grupo de Lie-Banach actuando de manera suave en un espacio de Banach X. Para un $x_0 \in X$ fijo, denotar por $\pi_{x_0} : G \to X$ al mapa suave $\pi_{x_0}(g) := g \cdot x_0$. Si:*

1. *π_{x_0} es un mapa abierto, cuando se lo considera como un mapa de G sobre la órbita $\{g \cdot x_0 : g \in G\}$ de x_0 (con la topología relativa de X).*

2. *El diferencial $d(\pi_{x_0})_1 : (TG)_1 \to X$ satisface que su núcleo y su imagen son subespacios cerrados y complementados.*

Entonces la órbita $\{g \cdot x_0 : g \in G\}$ es una subvariedad suave de X, y el mapa $\pi_{x_0} : G \to \{g \cdot x_0 : g \in G\}$ es una submersión suave.

Cabe hacer la aclaración que este lema puede extenderse al caso en el que X sea un espacio afín y completo.

A continuación nos focalizaremos en los espacios homogéneos que están dotados de una estructura reductiva.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach con una involución. El grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ se define igual que cuando $\mathcal{B}$ es una C^*-álgebra. Supongamos $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ es un grupo de Lie-Banach con la topología de la norma de $\mathcal{B}$. Denotemos por $\mathcal{B}_{ah}$ al álgebra de Lie de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, es decir, los elementos $b \in \mathcal{B}$ tales que $b^* = -b$.

Sea $\mathcal{O}$ un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$. Diremos que $\mathcal{O}$ es un *espacio homogéneo reductivo* si para todo $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ existe un subespacio cerrado $\mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{B}_{ah}$ tal que:

- Existe $\mathcal{V}_u$ subespacio cerrado de $\mathcal{B}_{ah}$ que cumple $\mathcal{F}_u \oplus \mathcal{V}_u = \mathcal{B}_{ah}$.
- $v\mathcal{F}_u v^* = \mathcal{F}_u$, para todo $v \in G_u$, siendo G_u el grupo de isotropía en $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$.
- el mapa $u \mapsto \mathcal{F}_u$ es suave. Es decir, si $p_u : \mathcal{B}_{ah} \to \mathcal{F}_u$ es la proyección sobre $\mathcal{F}_u$, la función definida de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ en los operadores acotados sobre $\mathcal{B}$, dada por $u \mapsto p_u$ resulta ser suave.

La correspondencia $u \mapsto \mathcal{F}_u$ define una **conexión** en $\mathcal{O}$ (ver [KN96]). En consecuencia, es posible introducir las nociones de levantamiento y desplazamiento horizontal, torsión, curvatura, geodésicas, etc. Los espacios $\mathcal{F}_u$ consisten de los vectores horizontales de $\mathcal{B}_{ah}$ y los espacios $\mathcal{V}_u$ son los vectores verticales de $\mathcal{B}_{ah}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_u$ puede pensarse como el álgebra de Lie del grupo G_{x_0} si $\pi_x(u) = x_0$. De esta manera, la idea de una conexión es levantar en $\pi_x : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{O}$ los espacios tangentes en $x_0 \in \mathcal{O}$ mediante un isomorfismo a espacios horizontales que varían suavemente.

Observemos que se puede definir una conexión a partir de una 1-fórmula equivariante $x \mapsto s_x : T_x\mathcal{O} \to \mathcal{B}_{ah}$ donde s_x es el inverso a derecha de la diferencial de π_x en la identidad e, es decir, $d_e\pi_x$. De esta manera, los espacios horizontales se obtienen como $\mathcal{F}_u = s_{u\cdot x}(T_{u\cdot x}\mathcal{O})$, $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$.

Cabe aclarar que a fines prácticos hemos introducido esta estructura reductiva restringiéndonos a espacios homogéneos de grupos unitarios, claramente, uno podría dar una definición para espacios homogéneos cualesquiera.

Capítulo 2

La acción a izquierda de los grupos de Schatten

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto. El objetivo de este capítulo es estudiar a la órbita

$$\mathcal{O}_A := \{UA : U \in U_p(\mathcal{H})\}$$

Como primer resultado, veremos que $\mathcal{O}_A$ es una subvariedad suave del espacio afín $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ si y sólo si A tiene rango cerrado. Más aún, es un espacio homogéneo reductivo de $U_p(\mathcal{H})$. Introduciremos dos métricas: una vía la métrica de Finsler ambiente inducida como una subvariedad de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y la otra en términos de la métrica de Finsler cociente provista de la estructura de espacio homogéneo. $\mathcal{O}_A$ resultará ser un espacio métrico completo con la distancia rectificable de éstas dos métricas.

2.1 Estructura diferencial de $\mathcal{O}_A$

En esta sección, dado un operador autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que no pertenezca al ideal de los operadores de p-Schatten, estudiaremos bajo qué condiciones el conjunto

$$\mathcal{O}_A = \{UA : U \in U_p(\mathcal{H})\} \subseteq A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$$

es una subvariedad diferenciable (real analítica) del espacio afín $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Notemos que el grupo de Lie-Banach $U_p(\mathcal{H})$ actúa en $\mathcal{O}_A$ a la izquierda, por medio de

$$U \times VA \mapsto UVA$$

para cualquier $U \in U_p(\mathcal{H})$ and $VA \in \mathcal{O}_A$.

Esta acción induce un mapa:

$$\begin{array}{ccc} U_p(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi_A} & \mathcal{O}_A \\ U & \longmapsto & UA \end{array}$$

Si consideramos a π_A como un mapa a valores en $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, este resulta ser real analítico y su diferencial en la identidad está dado por:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah} & \xrightarrow{\delta_A} & \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \\ X & \longmapsto & XA \end{array}$$

En efecto, identificando al álgebra de Lie-Banach algebra de $U_p(\mathcal{H})$ con el espacio $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ de los elementos antihermíticos en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, consideremos $X \in T_I(U_p(\mathcal{H})) = \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$. Sea $\alpha : [0,1] \to U_p(\mathcal{H})$, dada por $\alpha(t) = e^{tX}$. Notar que $\alpha(t)\alpha(t)^* = e^{tX}e^{-tX} = I$ y $\alpha(t) - I = \sum_{n\geq 1} \frac{X^n}{n!} \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, con lo cual $\alpha(t)$ está efectivamente en $U_p(\mathcal{H})$. Además α cumple que $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = X$ y que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\pi_A(\alpha(h)) - \pi(\alpha(0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{hX}A - A}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{hX} - I}{h} A = XA.$$

Con lo que $d(\pi_A)_I(X) = XA$.

Una desventaja que tiene δ_A es que está definida sólo sobre el conjunto de los operadores antihermíticos de $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, es por esto que vamos a trabajar con el siguiente mapa:

Notación 2.1.1 Dado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, a lo largo del capítulo vamos a denotar por R_A al mapa:

$$R_A(X) = XA.$$

Notar que como $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero, $R_A : \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Nuestro objetivo es poder encontrar características del operador A que puedan vincularse con características del mapa δ_A. Con esa meta en mente, empecemos relacionando características de A con características de R_A.

Lema 2.1.2 *Para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{R}(A)$ *es cerrado en $\mathcal{H}$.*

2. $\mathrm{R}(R_A)$ *es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.*

Demostración. Supangamos primero que $\mathrm{R}(A)$ es cerrado y consideremos una sucesión (X_n) en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ tal que $R_A(X_n) \to Y$ en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Al ser $\mathrm{R}(A)$ cerrado, $A^\dagger$ está bien definida. Ahora, sabiendo que $Y|_{\ker(A)} = 0$ (ya que la convergencia en $\|\cdot\|_p$ implica la convergencia en $\|\cdot\|$) y que $AA^\dagger = A^\dagger A$ (1.1), si tomamos $X := YA^\dagger$ tenemos que $R_A(X) = YA^\dagger A = Y$.

Recíprocamente, si (x_n) es una sucesión en $\mathcal{H}$ tal que $Ax_n \to y$, consideremos $X_n = y \otimes x_n \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Entonces $R_A(X_n) = X_n A = y \otimes Ax_n \to y \otimes y$ en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ ya que $\|a \otimes b\|_p = \|a \otimes b\|$ (ver (1.4)). Como $\mathrm{R}(R_A)$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, existe $X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ tal que $y \otimes y = R_A(X) = XA$. Adjuntando esta igualdad y recordando que A es autoadjunto, vemos que $y \otimes y = A^* X^*$. Finalmente, si evaluamos ambos miembros de esta última igualdad en $\frac{y}{\|y\|^2}$, podemos concluir que $y \in \mathrm{R}(A)$.

$\square$

El siguiente ejemplo muestra que dada $(X_n) \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ con $\delta_A(X_n) = X_n A \to ZA$ en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, no necesariamente se tiene que $Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$.

Ejemplo 2.1.3 Sea

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}\, e_n \otimes e_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n}\, e_n \otimes e_n$$

Observemos que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \notin \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$, $\ker(A) = \langle e_1 \rangle$ y que $\mathrm{R}(A) = \langle e_1 \rangle^\perp$.

Definamos $X_n \in Bdos$ de la siguiente manera

$$X_n = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} e_k \otimes e_k.$$

$X_n \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ya que es de rango finito y además, X_n es autoadjunto; es decir, $X_n \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_h$.

Sea

$$X = e_1 \otimes e_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} e_k \otimes e_k.$$

Luego, $X \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ya que $\|X\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Xe_n\|^2 = 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, pero X no es autoadjunto. Sin embargo, $X_n A \to XA$ en $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ya que

$$\begin{aligned}
\|XA - X_n A\|_2^2 &= \sum_{k \geq 1} \|(X - X_n)Ae_k\|^2 = \sum_{k \geq n+1} \left\| \frac{k-1}{k^2} e_k \right\|^2 \\
&= \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{k-1}{k^2} \right)^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Es decir, $\delta_A(X_n) \longrightarrow XA$ pero $X \notin \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_h$.

Sin embargo, si consideramos:

$$\widetilde{X} = X + e_2 \otimes e_1 = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} e_k \otimes e_k,$$

obtenemos que $\widetilde{X} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_h$ y $\widetilde{X}A = XA$, con lo cual, $\delta_A(X_n) \to \delta_A(\widetilde{X})$.

Del siguiente lema se deduce que la condición de que la imagen de A sea cerrada en $\mathcal{H}$ es equivalente a que la imagen de δ_A sea cerrada en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Lema 2.1.4 *Para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $\mathrm{R}(R_A)$ *es cerrado en* $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.
2. $\mathrm{R}(\delta_A)$ *es cerrado en* $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Demostración. Consideremos una sucesión (X_n) en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ tal que $\delta_A(X_n) = X_n A \to Y$ en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y supongamos que $\mathrm{R}(R_A)$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Luego existe un $Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ tal que $Y = ZA$.

Sea $\mathcal{H}_0 = (\ker(A))^\perp = \overline{\mathrm{R}(A)} = \mathrm{R}(A)$. Si representamos a Y como una matriz de operadores de 2×2 relativa a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$, entonces

$$Y = \begin{pmatrix} Z^{11}A_0 & 0 \\ Z^{21}A_0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $A_0 = A|_{\mathcal{H}_0} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$. Notar que Z^{11} es antihermítico, ya que es el límite de operadores antihermíticos. En efecto, teniendo en cuenta que $AA^\dagger$ es la proyección sobre $\mathrm{R}(A)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|X_n^{11} - Z^{11}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)} &\leq \|AA^\dagger X_n AA^\dagger - AA^\dagger Z AA^\dagger\| \\ &\leq \|AA^\dagger\|\|X_n A - ZA\|\|A^\dagger\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Si definimos

$$X := \begin{pmatrix} Z^{11} & -(Z^{21})^* \\ Z^{21} & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que $X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ y que $Y = XA = \delta_A(X)$, lo que prueba que $\mathrm{R}(\delta_A)$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Recíprocamente, considerar nuevamente la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$, donde $\mathcal{H}_0 = (\ker(A))^\perp = \overline{\mathrm{R}(A)}$ y $A_0 = A|_{\mathcal{H}_0} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$. Debido a que $\mathrm{R}(\delta_A)$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, el conjunto

$$\{X_0 A_0 : X_0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h\}$$

es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)$.

En efecto, supongamos que $X_n^0 A_0 \to Y_0$ en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)$, con $X_n^0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h$. Si consideramos

$$X_n = \begin{pmatrix} X_n^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $X_n A \to Y$ en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Ahora si llamamos $Z_n = iX_n$, como X_n es autoadjunto, tenemos que $Z_n \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ y que $\delta_A(Z_n) = Z_n A = iX_n A \to iY \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Al ser $\mathrm{R}(\delta_A)$ cerrado existe $Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ tal que $iY = \delta_A(Z) = ZA$. Luego $X := -iZ$, cumple que $X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_h$ e $Y = XA$. Sea X_0

$$X_0 = \begin{pmatrix} X^{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como X es autoadjunto y $X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, $X_0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h$ y además cumple que $Y_0 = X_0 A_0$, por lo tanto $\{X_0 A_0 : X_0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h\}$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)$.

Sea

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h & \xrightarrow{\delta_{A_0}} & \{X_0 A_0 : X_0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h\} \\ X_0 & \longmapsto & X_0 A_0 \end{array}$$

Para simplificar la notación, llamemos δ_0 a δ_{A_0}.

Como $\mathrm{R}(\delta_0) = \{X_0 A_0 : X_0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h\}$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)$ y δ_0 es inyectiva, por el teorema de la aplicación inversa, existe una constante C tal que

$$\|X_0\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)} = \left\|\delta_0^{-1}(X_0 A_0)\right\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)} \leq C \|X_0 A_0\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)} \tag{2.1}$$

para todo $X_0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h$.

Sea $Y_0 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)$. Reemplazando X_0 por $|Y_0| \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)_h$ en (2.1), y teniendo en cuenta el hecho que $\||Y_0|\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)} = \|Y_0\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)}$ y $\||Y_0|A_0\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)} = \|Y_0 A_0\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)}$, se deduce que

$$\|Y_0\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)} \leq C \|Y_0 A_0\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)}.$$

Es decir, R_{A_0} es acotado inferiormente, con lo cual, $\mathrm{R}(R_{A_0})$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_0)$. Esto, por la Proposición 2.1.2, es equivalente a que $\mathrm{R}(A_0)$ sea cerrado en $\mathcal{H}_0$. Esto último implica que $\mathrm{R}(A)$ es cerrado en $\mathcal{H}$, lo cual es nuevamente equivalente a que $\mathrm{R}(R_A)$ es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

□

Nuestro siguiente objetivo es probar la existencia de secciones locales continuas. Para esto necesitaremos del siguiente Lema, en cuya demostración usaremos el siguiente Teorema de Kato (ver [Kat66, Theorem 6.32, pág. 56]).

Teorema 2.1.5 *Dos proyecciones ortogonales P, Q tales que $\|P - Q\| < 1$ son unitariamente equivalentes, esto es, hay un operador unitario U con la propiedad $Q = UPU^{-1}$.*

Lema 2.1.6 *Sean P una proyección ortogonal, $U \in U_p(\mathcal{H})$ y $Q = UPU^*$. Si $\|Q - P\| < 1$, existe $Z \in U_p(\mathcal{H})$ que depende de manera continua de P y de Q tal que*

$$Q = ZPZ^*.$$

Demostración. En la demostración del Teorema 2.1.5 muestran que el unitario Z es

$$Z = U'\,(1-R)^{-1/2}$$

donde

$$U' = QP + (1-Q)(1-P) = QP + 1 - P - Q + QP$$

y

$$R = (P-Q)^2\,.$$

Luego, sólo habría que probar que $Z - I \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Con este fin, primero notemos que

$$\begin{aligned} U' - I &= 2UPU^*P - 2P + P - UPU^* \\ &= 2\left[UP\,(U^*-I)\,P + (U-I)\,P\right] + P\,(I-U) + UP\,(I-U^*) \end{aligned}$$

y

$$R = (P - UPU^*)^2 = [P\,(I-U) + UP\,(I-U^*)]^2.$$

Por lo tanto, $U' - I \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y $R \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} Z - 1 &= U' \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -1/2 \\ n \end{pmatrix} (-R)^n - 1 \\ &= U' - 1 + U' \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -1/2 \\ n \end{pmatrix} (-R)^n \end{aligned}$$

De lo que se deduce que $Z - I \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

$\square$

De la misma manera que trabajamos con el mapa π_A, podemos trabajar con el mapa:

$$\begin{array}{ccc} U_p(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi_x} & \mathcal{O}_A \\ U & \longmapsto & Ux \end{array}$$

donde $x = U_0 A$.

Al igual que π_A, π_x es real-analítica cuando se la considera como un mapa a valores en $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, y su diferencial en la identidad es el mapa lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah} & \xrightarrow{\delta_x} & \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \\ X & \longmapsto & Xx \end{array}$$

Los resultados obtenidos en la siguiente proposición, además de ser interesantes por sí mismos, serán de utilidad a la hora de caracterizar las condiciones bajo las cuales $\mathcal{O}_A$ es una subvariedad de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Proposición 2.1.7 *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto cuya imagen sea un conjunto cerrado. Entonces π_x tiene secciones locales continuas con radio uniforme. Explícitamente, para cualquier $x = U_0 A \in \mathcal{O}_A$ existe un mapa continuo*

$$\sigma_x : V_x = \left\{ UA \in \mathcal{O}_A : \|UA - U_0 A\|_p < \frac{1}{2\,\|A^\dagger\|} \right\} \longrightarrow U_p(\mathcal{H})$$

tal que $\pi_x \circ \sigma_x = id_{V_x}$.

En particular, π_x es un fibrado localmente trivial.

Demostración. Comencemos notando que como $\mathrm{R}(A)$ es cerrado, $A^\dagger$ está definida y $P_A = AA^\dagger$ es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{R}(A)$.

Al mapa σ_x lo vamos a construir en varios etapas.

Como primer paso, definamos el mapa $\phi : \mathcal{O}_A \to \{UP_A : U \in U_p(\mathcal{H})\} \subseteq P_A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ dado por

$$\phi(UA) = UP_A.$$

ϕ está bien definida ya que si $UA = WA$ entonces $UAA^\dagger = WAA^\dagger$, es decir, $UP_A = WP_A$.

Además, $\|\phi(U_n A) - \phi(UA)\|_p \to 0$ si $\|U_n A - UA\|_p \to 0$, ya que

$$\|\phi(U_n A) - \phi(UA)\|_p = \|U_n P_A - UP_A\|_p \leq \|U_n A - UA\|_p \|A^\dagger\| \longrightarrow 0.$$

Sea $R > 0$. Si llamamos

$$V_{P_A} := \left\{ UP_A : U \in U_p(\mathcal{H}), \|UP_A - P_A\|_p < R \right\},$$

entonces

$$\phi : \left\{ UA \in \mathcal{O}_A : \ \|UA - A\|_p < \frac{R}{\|A^\dagger\|} \right\} \longrightarrow V_{P_A}.$$

En efecto, para $UA \in \left\{ UA \in \mathcal{O}_A : \ \|UA - A\|_p < \frac{R}{\|A^\dagger\|} \right\}$ tenemos que

$$\|\phi(UA) - P_A\|_p = \left\|UAA^\dagger - AA^\dagger\right\|_p \leq \|UA - A\|_p \left\|A^\dagger\right\| < R.$$

Consideremos $U \in V_{P_A}$ y denotemos por Q_0 y Q a las proyecciones $Q_0 = P_A$ y $Q = UP_AU^*$ respectivamente. Como

$$\begin{aligned}\|Q - Q_0\| &= \|UP_AU^* - UP_A + UP_A - P_A\| \\ &= \|UP_A\left(P_AU^* - P_A\right) + UP_A - P_A\| \\ &\leq \|UP_A\| \, \|P_AU^* - P_A\| + \|UP_A - P_A\| \\ &< 2R,\end{aligned}$$

si $R \leq \frac{1}{2}$ podemos concluir que existe $Z \in U_p\left(\mathcal{H}\right)$ tal que $ZQ_0Z^* = Q$, es decir, $ZP_AZ^* = UP_AU^*$ (ver, por ejemplo, Lema 2.1.6).

Sea $W = (U - Z)\, P_A + Z$. Un cálculo sencillo muestra que W es unitario. Además, como $U - Z \in \mathcal{B}_p\left(\mathcal{H}\right)$ y $Z - I \in \mathcal{B}_p\left(\mathcal{H}\right)$, se tiene que $W - I = (U - Z)P_A + Z - I \in \mathcal{B}_p\left(\mathcal{H}\right)$. Por lo tanto $W \in U_p\left(\mathcal{H}\right)$. Notar también que $WP_A = UP_A$.

Definamos ahora σ_{P_A} como el mapa dado por $\sigma_{P_A}(UP_A) = W \in U_p\left(\mathcal{H}\right)$. Entonces σ_{P_A} está bien definida en V_{P_A}, es un mapa continuo y $\sigma_{P_A}(UP_A)P_A = UP_A$.

Como $\phi : \left\{UA \in \mathcal{O}_A : \ \|UA - A\|_p < \frac{R}{\|A^\dagger\|}\right\} \to V_{P_A}$ y σ_{P_A} está definida en V_{P_A}, la composición $\sigma_{P_A} \circ \phi$ está bien definida. es decir, $\sigma := \sigma_{P_A} \circ \phi$. Luego,

$$\sigma : \left\{UA \in \mathcal{O}_A : \|UA - A\|_p < \frac{R}{\|A^\dagger\|}\right\} \longrightarrow U_p\left(\mathcal{H}\right)$$

es un mapa continuo (debido a que es una composición de mapas continuos) y además cumple que

$$\pi_A\left(\sigma\left(UA\right)\right) = \sigma_{P_A}\left(UP_A\right) A = \sigma_{P_A}\left(UP_A\right) P_AA = UP_AA = UA.$$

Por lo tanto, σ es una sección local continua para π_A en un entorno de A.

Finalmente, notar que ya que σ puede ser trasladada por medio de la acción a cualquier $x = U_0A \in \mathcal{O}_A$, uno consigue secciones locales definidas en entornos trasladados con el mismo radio. Es decir, llamando

$$V_x := \left\{UA \in \mathcal{O}_A : \|UA - U_0A\|_p < \frac{R}{\|A^\dagger\|}\right\}$$

y teniendo en cuenta que la norma-p es unitariamente invariante, tenemos la siguiente igualdad

$$\|U_0^*UA - A\|_p = \|U_0^*(UA - U_0A)\|_p = \|UA - U_0A\|_p\,,$$

entonces podemos definir σ_x en cualquier $UA \in V_x$ de la siguiente manera,

$$\sigma_x(UA) := U_0 \sigma \left(U_0^{-1} UA \right) U_0^{-1}.$$

Con esto, la prueba queda concluída.

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.1.8 *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto. La órbita $\mathcal{O}_A$ es una subvariedad real y analítica de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ si y sólo si* $\mathrm{R}(A)$ *es cerrado en $\mathcal{H}$.*

En este caso, el mapa $\pi_x : U_p(\mathcal{H}) \to \mathcal{O}_A$ es una submersión real y analítica y $\mathcal{O}_A$ es un espacio homogéneo de $U_p(\mathcal{H})$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{R}(A)$ es cerrado en $\mathcal{H}$ y consideremos $x = U_0 A \in \mathcal{O}_A$ fijo. Como π_x tiene secciones locales continuas (Proposición 2.1.7), se tiene que π_x es un mapa abierto. En virtud del Lema 1.4.6 aplicado a $G = U_p(\mathcal{H})$ y $X = A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, sólo resta probar que δ_x tiene imagen y núcleo cerrados y complementados.

Con este fin, consideremos el mapa E_x dado por:

$$E_x(Z) = \frac{1}{2} x x^\dagger Z x^\dagger - \frac{1}{2} (x^*)^\dagger Z^* x x^\dagger + \left(1 - x x^\dagger\right) Z x^\dagger - (x^*)^\dagger Z^* \left(1 - x x^\dagger\right)$$

para cualquier $Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Como $\mathrm{R}(A)$ es cerrado, $x^\dagger$ está bien definido. Además se cumple que $E_x(\mathcal{B}_p(\mathcal{H})) \subset \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$. Es decir,

$$E_x : \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}.$$

Sólo habría que verificar que $E_x(Z)$ es antihermítico. Para eso, consideremos $Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y recordemos que $\left(x^\dagger\right)^* = (x^*)^\dagger$, entonces

$$\begin{aligned} -E_x(Z)^* &= \frac{1}{2} x x^\dagger Z x^\dagger - \frac{1}{2} (x^*)^\dagger Z^* x x^\dagger + \left(1 - x x^\dagger\right) Z x^\dagger - (x^*)^\dagger Z^* \left(1 - x x^\dagger\right) \\ &= E_x(Z) \end{aligned}$$

E_x tiene la propiedad que $\delta_x \circ E_x \circ \delta_x = \delta_x$. En efecto, sea $Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$, entonces

$$E_x \circ \delta_x(Z) = \frac{1}{2} x x^\dagger Z x x^\dagger + \frac{1}{2} (x^*)^\dagger x^* Z x x^\dagger + \left(1 - x x^\dagger\right) Z x x^\dagger + (x^*)^\dagger x^* Z \left(1 - x x^\dagger\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\delta_x \circ E_x \circ \delta_x(Z) &= \frac{1}{2}xx^\dagger Zx + \frac{1}{2}\left(x^*\right)^\dagger x^* Zx + \left(1 - xx^\dagger\right) Zx \\ &= Zx = \delta_x(Z)\end{aligned}$$

Esto implica que $\delta_x \circ E_x$ y $E_x \circ \delta_x$ son ambos operadores idempotentes actuando en el espacio de Banach $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Luego, sus respectivas imágenes y núcleos son complementados.

Como la imagen de $\delta_x \circ E_x$ coincide con la imagen de δ_x y el núcleo de $E_x \circ \delta_x$ coincide con el núcleo de δ_x, δ_x tiene imagen y núcleo cerrados y complementados. Entonces, por el Lema 1.4.6 y usando el hecho que en este contexto suave significa real y analítica (el grupo y la acción son reales analíticos), $\mathcal{O}_A$ es una subvariedad real y analítica de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y π_x es una submersión real y analítica, con lo que $\mathcal{O}_A$ es un espacio homogéneo de $U_p(\mathcal{H})$.

Recíprocamente, si $\mathcal{O}_A$ es una subvariedad de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, entonces el espacio tangente

$$T_A(\mathcal{O}_A) = \{XA : X^* = -X \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})\}$$

es cerrado en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

Luego, por los Lemas 2.1.2 y 2.1.4, la imagen de A es cerrada en $\mathcal{H}$.

$\square$

2.2 Grupo de isotropía en $\mathcal{O}_A$

Sean A un operador autoajunto cuya imagen sea un conjunto cerrado y $x = UA$ con $U \in U_p(\mathcal{H})$. De ahora en más, G_x denotará al grupo de isotropía de x, es decir

$$G_x = \{U \in U_p(\mathcal{H}) : Ux = x\}.$$

Parte de lo que haremos en esta sección es caracterizar a G_A y al álgebra de Lie-Banach de G_A, la cual será denotada por $\mathcal{G}_A$.

Proposición 2.2.1 *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto cuya imagen sea un conjunto cerrado. Consideremos la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$, donde $\mathcal{H}_0$ es la* *imagen de A. Si denotamos por I_0 a la identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ entonces*

$$G_A = \left\{ \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} : U_{22} \in U_p\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right) \right\}.$$

Demostración. Sea $U \in G_A$ y sea

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

la descomposición de U en términos de $H = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^{\perp}$.

Denotemos por $P_{\mathcal{H}_0}$ a $AA^{\dagger}$. De la igualdad $UA = A$ se deduce que $P_{\mathcal{H}_0} U P_{\mathcal{H}_0} = P_{\mathcal{H}_0}$, es decir que $U_{11} = I_0$ y que $P_{\mathcal{H}_0^{\perp}} U P_{\mathcal{H}_0} = 0$, es decir que $U_{21} = 0$.

Como $P_{\mathcal{H}_0} I P_{\mathcal{H}_0^{\perp}} = P_{\mathcal{H}_0} U U^* P_{\mathcal{H}_0^{\perp}}$ y la coordenada 1,2 de ese producto es $U_{11}^* U_{12} + U_{21}^* U_{22} = U_{12}$, se tiene que $U_{12} = 0$. Luego U es de la forma antes descrita.

Y recíprocamente, si U es de esa forma, claramente está en el grupo de isotropía de A.

□

En la siguiente proposición, daremos una caracterización del álgebra de Lie-Banach de G_A.

Proposición 2.2.2 *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto cuya imagen sea un conjunto cerrado. Entonces,*

$$\mathcal{G}_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} : x_{22} \in B_p\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right)_{ah} \right\}.$$

Demostración. Comencemos recordando que

$$\mathcal{G}_A \approx T_I(G_A) = \left\{ x \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah} : xA = 0 \right\}.$$

Claramente, si X está en ese conjunto entonces $X \in \mathcal{G}_A$. Para probar el recíproco, continuemos con la notación de la demostración de la Proposición 2.2.1 y consideremos $X \in \mathcal{G}_A$. De la igualdad $0 = XA$ se deduce que $P_{\mathcal{H}_0} X P_{\mathcal{H}_0} = 0$ y que $P_{\mathcal{H}_0^{\perp}} X P_{\mathcal{H}_0} = 0$. Es decir, $X_{11} = 0$ y $X_{21} = 0$. Además, como es X es antihermítico, $X_{12} = 0$ y $X_{22}^* = -X_{22}$. Luego X tiene la forma esperada.

□

Proposición 2.2.3 *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto cuya imagen sea un conjunto cerrado. Entonces el grupo de isotropía de A es exponencial. Es decir, para cualquier $U \in G_A$, existe un $x \in \mathcal{G}_A$ tal que $U = e^x$.*

Demostración. Sean $U \in G_A$ y $\mathcal{H}_0 = \mathrm{R}(A)$. Teniendo en mente la descomposición de U en términos de $H = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^{\perp}$, tenemos que $U_{22} \in U_p\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right)$. Como

$$exp : B_p\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right)_{ah} \to U_p\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right)$$

es sobreyectiva (Observación 1.2.7), existe un $x_{22} \in B_p\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right)_{ah}$ tal que $U_{22} = e^{x_{22}}$. Si llamamos $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}$, entonces x cumple que pertence a $\mathcal{G}_A$ y $U = e^x$. Es decir, hemos probado que G_A es exponencial.

□

Observación 2.2.4 *Si $x, y \in \mathcal{O}_A$, entonces*

1. *x e y son conjugados, es decir, existe un $U \in U_p(\mathcal{H})$ tal que $y = Ux$.*
2. *los grupos de isotropía son conjugados entre sí. Es decir, si $x, y \in \mathcal{O}_A$ con $y = U_x x$, entonces, $G_y = U_x G_x U_x^{-1}$.*
3. *las álgebras de Lie son conjugadas entre sí. Es decir, si $x, y \in \mathcal{O}_A$ con $y = U_x x$ entonces $\mathcal{G}_y = U_x \mathcal{G}_x U_x^{-1}$.*
4. *G_x es exponencial para todo $x \in \mathcal{O}_A$.*

Observación 2.2.5 *Para todo $x \in \mathcal{O}_A$ se tiene que $\mathcal{G}_x$ es complementada.*

Esto ocurre porque dado $x \in \mathcal{O}_A$ el núcleo de δ_x, el cual coincide con $\mathcal{G}_x$, es complementado (ver Teorema 2.1.8).

2.3 Métricas Riemannianas y Finslerianas en $\mathcal{O}_A$

En esta sección comenzaremos el análisis de $\mathcal{O}_A$ desde un punto de vista métrico, donde $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto con $\mathrm{R}(A)$ cerrado. Como $\mathcal{O}_A$ es un espacio homogéneo, es natural dotar a cada espacio tangente con la métrica cociente. Mostraremos que esta métrica en el caso $p = 2$ resulta ser Riemanniana.

Fijemos $x = U_0 A \in \mathcal{O}_A$. Como π_x es una submersión, el espacio tangente de $\mathcal{O}_A$ en x es:

$$T_x(\mathcal{O}_A) = \mathrm{R}(\delta_x) = \left\{Zx : Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}\right\}.$$

Como dijimos anteriormente, es un subespacio lineal y cerrado de $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$.

Sea $X \in T_x(\mathcal{O}_A)$. La **métrica de Finsler cociente** se define (c.f. [AL10]) como:

$$\|X\|_x = \text{ínf}\left\{\|Z + W\|_p : \; Z \in \mathcal{G}_x\right\}. \tag{2.2}$$

donde $W \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ y $\delta_x(W) = X$. Cabe aclarar que dicho W existe ya que π_x es un mapa sobreyectivo. Observemos que es la norma cociente de Z en $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}/\mathcal{G}_x$. Más aún, como $\ker(\delta_x) = \mathcal{G}_x$, se tiene que

$$\|X\|_x = \text{ínf}\left\{\|Y\|_p : \; Y \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}, \delta_x(Y) = X\right\}.$$

Esta métrica es invariante baja lo acción a izquierda del grupo. Es decir, para cada $U \in U_p(\mathcal{H})$ fijo, si consideramos el mapa l_U dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_A & \xrightarrow{l_U} & \mathcal{O}_A \\ x & \longmapsto & Ux \end{array}$$

entonces para $x \in \mathcal{O}_A$, $X \in T_x(\mathcal{O}_A)$ y $U \in U_p(\mathcal{H})$ vale: $\|(l_U)_{*x}(X)\|_{Ux} = \|X\|_x$. O lo que es lo mismo, $\|X\|_x = \|UX\|_{Ux}$.

A continuación analizaremos el caso particular $p = 2$.

Como se mencionó anteriormente, $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle Z, W\rangle_2 = \mathrm{tr}(W^*Z)$.

En la sección anterior, mostramos que $E_x \circ \delta_x$ es un operador idempotente, lineal y real de $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ (en particular, de $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah}$). Llamemos a este operador Q_x. Es decir, $Q_x : \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} \to \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah}$ está definido por

$$Q_x(Z) = Zxx^\dagger + xx^\dagger Z - xx^\dagger Zxx^\dagger.$$

Entonces, Q_x es un operador real, lineal e idempotente de $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah}$ con $\ker(Q_x) = \ker(\delta_x)$. Además, notar que $z \in \mathrm{R}(Q_x)$ si y sólo sí, $z = Zxx^\dagger + xx^\dagger Z - xx^\dagger Zxx^\dagger$, lo cual es equivalente a que $(1-xx^\dagger)Z(1-xx^\dagger) = 0$. Por lo tanto,

$$\mathrm{R}(Q_x) = \left\{Z \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} : (1-xx^\dagger)Z(1-xx^\dagger) = 0\right\}.$$

Más aún, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.3.1 *Q_x es una proyección ortogonal respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$.*

Demostración. La prueba consiste en mostrar que Q_x es simétrica para el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$.

Como $\mathrm{R}(A)$ es cerrado, $x = U_0A$ también tiene rango cerrado. Por lo tanto $x^\dagger$ está definida.

Sean $Z, X \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah}$ y $P = xx^\dagger$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle Q_xZ, X\rangle &= -\operatorname{tr}(XQ_xZ) = -\operatorname{tr}(XZP) - \operatorname{tr}(XPZ) + \operatorname{tr}(XPZP)\\ &= -\operatorname{tr}(PXZ) - \operatorname{tr}(XPZ) + \operatorname{tr}(PXPZ) = -\operatorname{tr}((Q_xX)^*Z)\\ &= \langle Z, Q_xX\rangle.\end{aligned}$$

□

Observación 2.3.2 *De la misma manera que anteriormente trabajamos con $E_x \circ \delta_x$, podemos trabajar con $\delta_x \circ E_x$. $\delta_x \circ E_x$ es un operador real y lineal de $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ Procediendo de manera análoga a lo hecho en la demostración del Teorema 2.1.8, podemos ver que también es idempotente.*

Si llamamos a este operador S_x, tenemos que $S_x : \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ y está definido por

$$S_x(Z) = \frac{1}{2}xx^\dagger Zx^\dagger x - \frac{1}{2}(x^*)^\dagger Z^*x + \left(1-xx^\dagger\right)Zx^\dagger x.$$

S_x es un operador idempotente, real y lineal de $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ con $\mathrm{R}(S_x) = T_x(\mathcal{O}_A)$.

$T_x(\mathcal{O}_A)$ es un subespacio lineal real del espacio de Hilbert $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ con producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{Re}\operatorname{tr}(B^*A)$. La desventaja es que S_x no sería simétrico para este

producto interno. Notar que el término $\frac{1}{2}(x^*)^\dagger Z^* x$ *es el que hace fallar la simetría. En efecto,*

$$\langle S_x(Z), W\rangle = \operatorname{Re}\operatorname{tr}(W^* S_x(Z)) = \operatorname{Re}\operatorname{tr}(W^*(1-\frac{1}{2}xx^\dagger)zx^\dagger x) - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(W^* x^{*\dagger} Z^* x).$$

$$\langle Z, S_x(W)\rangle = \operatorname{Re}\operatorname{tr}((S_x(W))^* Z) = \operatorname{Re}\operatorname{tr}(x^\dagger x W^*(1-\frac{1}{2}xx^\dagger)z) - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(x^* W x^\dagger Z).$$

Es decir,

$$\langle S_x(Z), W\rangle = \langle Z, S_x(W)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}\left(x^* W x^\dagger Z - W^* x^{*\dagger} Z^* x\right).$$

Con lo cual, S_x *no es una proyección ortogonal sobre* $T_x(\mathcal{O}_A)$ *para el producto interno* $\langle A, B\rangle = \operatorname{Re}\operatorname{tr}(B^* A)$.

Notar que si $x \in \mathcal{O}_A$, $X \in T_x(\mathcal{O}_A)$ y $Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ es un levantado para X (i.e., $\delta_x(Z) = X$), entonces

$$\|X\|_x = \|Q_x(Z)\|_2 .$$

Consideremos la descomposición del álgebra de Lie-Banach $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah}$ de $U_2(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} = \mathcal{G}_x \oplus \mathrm{R}(Q_x) \tag{2.3}$$

es decir,

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} = \{Z \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} : ZP = 0\} \oplus \{Z \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} : (1-P)Z(1-P) = 0\},$$

donde $P = xx^\dagger$.

Observemos que $\mathrm{R}(Q_x)$ es invariante bajo la acción interna del grupo de isotropía. Entonces, esta descomposición es lo que en la Sección 1.4.2 (siguiendo con la denominación usual en geometría diferencial) llamamos una estructura reductiva del espacio homogéneo.

Denotemos por $\overline{\delta_x}$ a la restricción de δ_x al $\mathrm{R}(Q_x)$, es decir,

$$\overline{\delta_x} := \delta_x|_{\mathrm{R}(Q_x)} : \mathrm{R}(Q_x) \longrightarrow T_x\mathcal{O}_A$$

Debido a que $\mathrm{R}(\delta_x) = T_x\mathcal{O}_A$ y a que $\ker(Q_x) = \ker(\delta_x)$ y teniendo en cuenta la descomposición (2.3) y el conjunto de definición de $\overline{\delta_x}$ podemos concluir que $\overline{\delta_x}$ es un isomorfismo lineal.

Si denotamos por η_x a la inversa de $\overline{\delta_x}$, tenemos que $\delta_x \circ \eta_x = I_{T_x\mathcal{O}_A}$ y $\eta_x \circ \delta_x = Q_x$.

El isomorfismo η_x, $x \in \mathcal{O}_A$ induce una métrica Hilbert-Riemanniana natural. Dados $X, Y \in T_x\mathcal{O}_A$ vamos a definir el producto interno

$$\langle X, Y \rangle_x = \operatorname{tr}\left(\eta_x(Y)^*\eta_x(X)\right) = -\operatorname{tr}\left(\eta_x(Y)\eta_x(X)\right). \tag{2.4}$$

Observemos que

$$\langle X, X \rangle_x = \|\eta_x(X)\|_2^2 .$$

Entonces si z es un levantado para X, tenemos que

$$\langle X, X \rangle_x = \|\eta_x(X)\|_2^2 = \|\eta_x(\delta_x(z))\|_2^2 = \|Q_x(Z)\|_2^2 = \|X\|_x^2 .$$

Por lo tanto, la métrica (2.4) coincide con la métrica cociente (2.2), la cual es Riemanniana si $p = 2$.

También notemos que si $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ son campos vectoriales tangentes de $\mathcal{O}_A$, entonces el mapa que a un $x \in \mathcal{O}_A$ le asigna $\langle \mathcal{X}_x, \mathcal{Y}_x \rangle_x$, es suave. Por lo tanto este producto interno define una métrica de Hilbert-Riemann en $\mathcal{O}_A$.

Existen dos conexiones lineales naturales para este tipo de espacios homogéneos reductivos, las cuales fueron definidas en [MLR92]. Éstas son la **conexión reductiva** y la **conexión clasificante**.

Considerar primero la **conexión reductiva** ∇^r. Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ son campos vectoriales tangentes de $\mathcal{O}_A$ entonces el campo $\nabla^r_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}$ evaluado en un $x \in \mathcal{O}_A$ está dado por

$$\eta_x(\nabla^r_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}(x)) = \eta_x(\mathcal{X}_x)(\eta_x(\mathcal{Y}_x)) + [\eta_x(\mathcal{Y}_x), \eta_x(\mathcal{X}_x)] ,$$

donde $X(Y)$ denota la derivada de Y en la dirección de X y $[,]$ el conmutador de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

La conexión reductiva es compatible con la métrica definida ya que la métrica cociente coincide con la métrica (2.4)

La **conexión clasificante** ∇^c está dada por:

$$\eta_x(\nabla^c_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}(x)) = (\eta_x \circ \delta_x)(\eta_x(\mathcal{X}_x)(\eta_x(\mathcal{Y}_x))) = Q_x(\eta_x(\mathcal{X}_x)(\eta_x(\mathcal{Y}_x))),$$

donde $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ son campos vectoriales tangentes de $\mathcal{O}_A$.

Observación 2.3.3 *La conexión de Levi-Civita de la métrica* (2.4) *es*

$$\nabla = \frac{1}{2}\left(\nabla^r + \nabla^c\right).$$

Las geodésicas de ésta conexión fueron calculadas en [MLR92]: $\gamma(t) = e^{t\eta_x(X)}x$ $t \in \mathbb{R}$, *es la geodésica con* $\gamma(0) = x$ *y* $\gamma^{\cdot}(0) = X$.

Observación 2.3.4 *Si* $\gamma(t),\ t \in [0,1]$ *es una curva suave en* $\mathcal{O}_A$ *tal que* $\gamma(0) = x$ *entonces el levantamiento horizontal es una curva* Γ *en* $U_2(\mathcal{H})$ *la cual es la única solución de la ecuación diferencial lineal en* $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$*:*

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \eta_\gamma(\dot{\gamma})\Gamma, \\ \Gamma(0) = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

La existencia y unicidad están garantizadas debido a que γ *es suave y entonces el mapa que a cada* $t \in [0,1]$ *le asigna* $\eta_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah}$ *es suave.*

De la misma manera en la que fue probado en [Sha97] (en el contexto de espacios homogéneos reductivos clásicos) se puede probar que si $\gamma(t),\ t \in [0,1]$ *es una curva suave en* $\mathcal{O}_A$*, entonces la única solución* Γ *de* (2.5) *verifica:*

1. $\Gamma(t) \in U_2(\mathcal{H})$ $t \in [0,1]$.

2. $\pi_\gamma(\Gamma) = \gamma$.

3. $\Gamma^*\dot{\Gamma} \in \mathrm{R}(Q_x)$.

2.4 Completitud de $\mathcal{O}_A$ con la métrica del ambiente

En esta sección vamos a definir la métrica de Finsler ambiente inducida como una subvariedad de $A + \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y vamos a probar que $\mathcal{O}_A$ es un espacio métrico completo con la distancia rectificable dada por ésta métrica.

Sean $x \in \mathcal{O}_A$ y $Zx \in T_x(\mathcal{O}_A) = \left\{Zx : Z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}\right\}$. La **métrica de Finsler ambiente** se define como:

$$F_{amb}(Zx) := \|Zx\|_p .$$

Al igual que en el caso de la métrica de Finsler cociente, esta métrica es invariante bajo la acción a izquierda del grupo.

Si $\gamma(t) \in \mathcal{O}_A$, $t \in [0,1]$ es una curva suave a trozos, su longitud será medida de la siguiente manera:

$$L_{amb}(\gamma) = \int_0^1 F_{amb}(\dot\gamma(t))dt = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_p \, dt.$$

Este funcional induce una distancia dada por:

$$d_{amb}(b_0, b_1) = \text{ínf}\left\{L_{amb}(\gamma) : \ \gamma \text{ es una curva suave a trozos, } \gamma(0) = b_0,\ \gamma(1) = b_1\right\},$$

para $b_0, b_1 \in \mathcal{O}_A$.

Es fácil ver que d_{amb} verifica la desigualdad triangular y la simetría. Luego, sólo resta verificar que si $d_{amb}(b_0, b_1) = 0$ entonces $b_0 = b_1$.

Con ese fin, consideremos una curva suave γ en $\mathcal{O}_A$ que una b_0 con b_1 entonces

$$\|b_0 - b_1\|_p \leq \int_0^1 F_{amb}(\dot\gamma(t))dt$$

debido a que la recta es la curva de menor longitud en cualquier espacio vectorial normado. Esta desigualdad implica que

$$\|b_0 - b_1\|_p \leq d_{amb}(b_0, b_1). \tag{2.6}$$

En la Proposición 2.1.7 hemos visto que π_x tiene secciones locales continuas. Combinando este hecho, junto con la propiedad de que $\mathcal{O}_A$ es un espacio homogéneo de $U_p(\mathcal{H})$ (Teorema 2.1.8), se obtiene por [Rae77] la siguiente observación que garantiza la existencia de secciones locales suaves.

Observación 2.4.1 *Existe $r > 0$ y un entorno U_I de la identidad en $U_p(\mathcal{H})$ tal que para $x = U_0 A \in \mathcal{O}_A$ dado, existe un mapa suave σ_x tal que*

$$\sigma_x : V_x = \left\{ UA \in \mathcal{O}_A : \|UA - x\|_p < r \right\} \to U_I \subset U_p(\mathcal{H})$$

y $\pi_x \circ \sigma_b|_{V_x} = id|_{V_x}$.

El resultado principal de esta sección establece que $\mathcal{O}_A$ es un espacio métrico completo cuando se lo considera con la distacia rectificable d_{amb}.

Con este fin vamos a probar que cuando a $\mathcal{O}_A$ se lo dota de la topología inducida por la norma-p, toda sucesión en $\mathcal{O}_A$ que sea de Cauchy para dicha norma, converge a un elemento de $\mathcal{O}_A$. Es decir, que $\mathcal{O}_A$ es completa con la norma-p.

Lema 2.4.2 *Sea $(x_n)_n$ una sucesión contenida en $\mathcal{O}_A$ tal que $\|x_n - x_m\|_p \to 0$. Entonces existe $x \in \mathcal{O}_A$ tal que $\|x_n - x\|_p \to 0$.*

Demostración. Consideremos el $r > 0$ dado en la Observación 2.4.1 y elijamos $n_0 = n(r) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_{n_0}\|_p < r$ for all $n \geq n_0$.

Sea $w = x_{n_0}$. Por la Proposición 2.1.7, σ_w tiene secciones locales continuas. Siguiendo con la notación de dicha proposición, sea

$$V_w = \left\{ UA \in \mathcal{O}_A : \|UA - w\|_p < r \right\}.$$

Luego tenemos que $x_n \in V_w$ para todo $n \geq n_0$ y que $(\sigma_w(x_n))_{n \geq n_0} \subset U_p(\mathcal{H})$ es una sucesión de Cauchy, ya que σ_w es localmente Lipschitz.

Como $U_p(\mathcal{H})$ es completo, existe un $U \in U_p(\mathcal{H})$ tal que $\|\sigma_w(x_n) - U\|_p \to 0$. Veamos que $\|x_n - Uw\|_p \to 0$. Con este fin, consideremos $\epsilon > 0$ existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$\|\sigma_w(x_n) - U\|_p < \frac{\epsilon}{\|w\|}.$$

Si $n \geq n_1$ entonces

$$\begin{aligned} \|x_n - Uw\|_p &= \|\pi_w(\sigma_w(x_n)) - Uw\|_p \\ &= \|\sigma_w(x_n)w - Uw\|_p \\ &\leq \|\sigma_w(x_n) - U\|_p \|w\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $\|x_n - Uw\|_p \to 0$.

$\square$

Ahora sí estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección:

Proposición 2.4.3 *$\mathcal{O}_A$ es un espacio métrico completo con la distancia rectificable d_{amb}.*

Demostración. Sea x_n una sucesión de Cauchy en $\mathcal{O}_A$ para la distancia d_{amb}.

Como $\|x_n - x_m\|_p \le d_{amb}(x_n, x_m)$, (x_n) es una sucesión de Cauchy para $\|\cdot\|_p$. Luego, por el Lema 2.4.2, existe un $x \in \mathcal{O}_A$ tal que $\|x_n - x\|_p \to 0$. Luego, restaría ver que $d_{amb}(x_n, x) \to 0$.

Por la Proposición 2.1.7, π_x tiene secciones locales continuas. Como $\|x_n - x\|_p$ converge a 0, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que x_n está en el dominio de definición de σ_x para todo $n \ge n_0$. Más aún, como σ_x es continua y $\sigma_x(x) = I$, tenemos que $\|\sigma_x(x_n) - I\|_p \to 0$.

Observemos que existe un $Z_n \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ tal que $\sigma_x(x_n) = e^{Z_n}$. Esto sucede porque $U_p(\mathcal{H})$ es un grupo de Lie-Banach y entonces el mapa exponencial es un difeomorfismo local. Por este motivo y por el hecho que $\left\|e^{Z_n} - I\right\|_p = \|\sigma_x(x_n) - I\|_p \to 0$, también se tiene que $\|Z_n\|_p \to 0$.

Sea $\gamma_n(t) = e^{tZ_n}x \in \mathcal{O}_A$. Observemos que $\gamma_n(0) = x$ y $\gamma_n(1) = e^{Z_n}x = \sigma_x(x_n)x = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$L_{amb}(\gamma_n) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_n(t)\|_p \, dt \le \|Z_n\|_p \|x\|$$

es decir,

$$d_{amb}(x_n, x) \le L_{amb}(\gamma_n) \le \|Z_n\|_p \|x\| .$$

Luego, $d_{amb}(x_n, x) \to 0$ y $\mathcal{O}_A$ es un espacio métrico completo con la distancia rectificable d_{amb}.

$\square$

2.5 Completitud de $\mathcal{O}_A$ con la métrica cociente

En esta sección probaremos la completitud de $\mathcal{O}_A$ como un espacio métrico con la distancia rectificable dada por la métrica de Finsler cociente que fue introducida en la Sección 2.3. Con el fin de probar ésto, vamos a caracterizar la distancia rectificable inducida por esta métrica como la distancia cociente de grupos, más aún, vamos a mostrar que coincide con la métrica para la topología cociente de $U_p(\mathcal{H})/G_A$.

Sea $\Gamma(t)$ con $t \in [0,1]$ una curva C^1 a trozos en $U_p(\mathcal{H})$. La longitud de Γ la vamos a medir como

$$L_p(\Gamma) = \int_0^1 \left\|\dot{\Gamma}(t)\right\|_p dt.$$

Observemos que como para cualquier $U \in U_p(\mathcal{H})$ el espacio tangente de $U_p(\mathcal{H})$ en U puede ser identificado con $U\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$, como así también con $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}U$, este funcional de longitud está bien definido.

Entonces, la distancia rectificable en $U_p(\mathcal{H})$ está dada por:

$$d_p(U_0, U_1) = \text{ínf}\left\{L_p(\Gamma) : \ \Gamma \subset U_p(\mathcal{H}), \ \Gamma(0) = U_0, \ \Gamma(1) = U_1\right\}.$$

La métrica cociente (2.2), antes definida en $\mathcal{O}_A$, induce otro funcional de longitud:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_\gamma \, dt,$$

donde $\gamma(t)$ con $t \in [0,1]$ es una curva continua y suave a trozos en $\mathcal{O}_A$.

Análogamente, la distancia rectificable en $\mathcal{O}_A$ está dada por:

$$d(x_0, x_1) = \text{ínf}\left\{L(\gamma) : \ \gamma \subset \mathcal{O}_A, \ \gamma(0) = x_0, \ \gamma(1) = x_1\right\}$$

donde las curvas γ consideradas son continuas y suaves a trozos.

El siguiente resultado (cuya prueba está adaptada de [AL10]) muestra que la distancia rectificable en $\mathcal{O}_A$ puede ser aproximada levantando curvas al grupo $U_p(\mathcal{H})$.

Lema 2.5.1 *Sean x_0 y $x_1 \in \mathcal{O}_A$. Entonces*

$$d(x_0, x_1) = \text{ínf}\left\{L_p(\Gamma) : \ \Gamma \subseteq U_p(\mathcal{H}), \ \pi_{x_0}(\Gamma(0)) = x_0, \ \pi_{x_0}(\Gamma(1)) = x_1\right\},$$

donde las curvas Γ consideradas son continuas y suaves a trozos.

Demostración. Sea $\Gamma(t)$ una curva suave a trozos en $U_p(\mathcal{H})$ tal que $\pi_{x_0}(\Gamma(0)) = x_0$ y $\pi_{x_0}(\Gamma(1)) = x_1$. Observemos que el hecho que π_{x_0} sea una sumersión real y analítica (Lema 1.4.6), garantiza la existencia de curvas que verifican $\pi_{x_0}(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ con $t \in [0, 1]$.

Por la definición de la métrica cociente (2.2), el diferencial de π_{x_0} en la identidad, es decir δ_{x_0}, es contractivo. Más aún, es contractivo en cualquier $U \in U_p(\mathcal{H})$. Entonces

$$d(x_0, x_1) \leq L(\pi_{x_0}(\Gamma)) \leq L_p(\Gamma).$$

Resta probar que $L(\gamma)$ puede ser aproximada por longitudes de curvas que están en $U_p(\mathcal{H})$ las cuales unen las fibras de x_0 y x_1.

Sea $\epsilon > 0$ fijo y sea $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ una partición equidistribuida de $[0, 1]$ la cual satisface:

1. $\|\dot\gamma(s) - \dot\gamma(s')\|_p < \epsilon/4$, si s, $s' \in [t_{i-1}, t_i]$.
2. $\left|L(\gamma) - \sum_{i=0}^{n-1} \|\dot\gamma(t_i)\|_{\gamma(t_i)} \Delta t_i\right| < \epsilon/2.$

donde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Sea i fijo con $0 \leq i \leq n-1$. Como $\dot\gamma(t_i) \in T_{\gamma(t_i)}(\mathcal{O}_A)$ y

$$\|\dot\gamma(t_i)\|_{\gamma(t_i)} = \text{ínf}\left\{\|Y\|_p : \ Y \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}, \delta_{\gamma(t_i)}(Y) = \dot\gamma(t_i)\right\},$$

se tiene que para $i = 0, \ldots, n-1$, existe $Z_i \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ tal que

$$\delta_{\gamma(t_i)}(Z_i) = \dot\gamma(t_i) \quad \text{ y } \quad \|Z_i\|_p \leq \|\dot\gamma(t_i)\|_{\gamma(t_i)} + \epsilon/2.$$

Consideremos la siguiente curva:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} e^{tZ_0} & t \in [0, t_1), \\ e^{(t-t_1)Z_1} e^{t_1 Z_0} & t \in [t_1, t_2), \\ e^{(t-t_2)Z_2} e^{(t_2-t_1)Z_1} e^{t_1 Z_0} & t \in [t_2, t_3), \\ \ldots & \ldots \\ e^{(t-t_{n-1})Z_{n-1}} \ldots e^{(t_2-t_1)Z_1} e^{t_1 Z_0} & t \in [t_{n-1}, 1]. \end{cases}$$

Γ es una curva continua y suave a trozos en $U_p(\mathcal{H})$ que satisface $\Gamma(0) = 1$ y además, llamando Γ_i a cada fragmento de curva se tiene que:

$$\begin{aligned} L_p(\Gamma) &= \sum_{i=0}^{n-1} L_p(\Gamma_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|Z_i\|_p \Delta t_i \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|\dot{\gamma}(t_i)\|_{\gamma(t_i)} + \epsilon/2 \right) \Delta t_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\|\dot{\gamma}(t_i)\|_{\gamma(t_i)} \Delta t_i + \epsilon/2\Delta t_i \right) \\ &< \epsilon/2 + L(\gamma) + n\epsilon/2(1/n) = L(\gamma) + \epsilon. \end{aligned}$$

Además se cumple que $\pi_{x_0}(\Gamma(1))$ está cerca de x_1.

En efecto, apliquemos el Teorema del Valor Medio en espacios de Banach [Die69] al mapa $\alpha(t) = \pi_{x_0}\left(e^{tZ_0}\right) - \gamma(t)$. Como $\alpha(0) = 0$ entonces para algún $s_1 \in [0, t_1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|\pi_{x_0}\left(e^{t_1 Z_0}\right) - \gamma(t_1)\right\|_p &= \|\alpha(t_1) - \alpha(0)\|_p \leq \|\dot{\alpha}(s_1)\|_p \Delta t_1 \\ &= \left\|e^{s_1 Z_0}\delta_{x_0}(Z_0) - \dot{\gamma}(s_1)\right\|_p \Delta t_1 \\ &= \left\|e^{s_1 Z_0}\dot{\gamma}(0) - \dot{\gamma}(s_1)\right\|_p \Delta t_1 \\ &\leq \left(\left\|e^{s_1 Z_0}\dot{\gamma}(0) - \dot{\gamma}(0)\right\|_p + \|\dot{\gamma}(0) - \dot{\gamma}(s_1)\|_p \right) \Delta t_1 \\ &< \left(\left\|e^{s_1 Z_0}\dot{\gamma}(0) - \dot{\gamma}(0)\right\|_p + \epsilon/4 \right) \Delta t_1. \end{aligned}$$

El primer sumando es acotado por

$$\begin{aligned} \left\|e^{s_1 Z_0}\dot{\gamma}(0) - \dot{\gamma}(0)\right\|_p &= \left\|\left(e^{s_1 Z_0} - I\right)\dot{\gamma}(0)\right\|_p \\ &\leq \|\dot{\gamma}(0)\|_p \left\|e^{s_1 Z_0} - I\right\|_p \leq M\Delta t_1, \end{aligned}$$

donde $M = \max\limits_{t \in [0,1]} \|\dot{\gamma}(t)\|_p$. Luego,

$$\|\pi_{x_0}(\Gamma(t_1)) - \gamma(t_1)\|_p \leq (M\Delta t_1 + \epsilon/4)\Delta t_1.$$

Ahora notemos que $\|\pi_{x_0}(\Gamma(t_2)) - \gamma(t_2)\|_p = \left\|\pi_{x_0}\left(e^{(t_2-t_1)Z_1}e^{t_1 Z_0}\right) - \gamma(t_2)\right\|_p$. Y por la desigualdad triangular, es menor o igual que

$$\left\|e^{(t_2-t_1)Z_1}e^{t_1 Z_0}x_0 - e^{(t_2-t_1)Z_1}\gamma(t_1)\right\|_p + \left\|e^{(t_2-t_1)Z_1}\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\right\|_p.$$

También notemos que

$$\begin{aligned}\left\|e^{(t_2-t_1)Z_1}e^{t_1Z_0}x_0-e^{(t_2-t_1)Z_1}\gamma\left(t_1\right)\right\|_p&=\left\|e^{(t_2-t_1)Z_1}\left(e^{t_1Z_0}x_0-\gamma(t_1)\right)\right\|_p\\&\leq\left\|e^{(t_2-t_1)Z_1}\right\|\left\|e^{t_1Z_0}x_0-\gamma(t_1)\right\|_p\\&\leq(M\Delta t_1+\epsilon/4)\Delta t_1.\end{aligned}$$

Además, procediendo de la misma manera que antes, el segundo sumando puede ser acotado por:

$$\left\|e^{(t_2-t_1)Z_1}\gamma\left(t_1\right)-\gamma\left(t_2\right)\right\|_p\leq\left(M\Delta t_2+\epsilon/4\right)\Delta t_2.$$

Luego,

$$\left\|\pi_{x_0}\left(\Gamma(t_2)\right)-\gamma(t_2)\right\|_p=\left\|\pi_{x_0}\left(e^{(t_2-t_1)Z_1}e^{t_1Z_0}\right)-\gamma\left(t_2\right)\right\|_p\leq\frac{2}{n}\left(\frac{M}{n}+\frac{\epsilon}{4}\right).$$

Inductivamente, llegamos a

$$\left\|\pi_{x_0}\left(\Gamma\left(1\right)\right)-\gamma\left(1\right)\right\|_p\leq\frac{M}{n}+\frac{\epsilon}{4}<\epsilon/2.$$

Finalmente, debido a que el mapa π tiene secciones locales continuas (Proposición 2.1.7), uno puede conectar $\Gamma(t_n)$ con la fibra de x_1 con una curva de longitud arbitrariamente pequeña.

$\square$

Consideremos un espacio homogéneos de la forma H/G, donde H es un grupo topológico metrizable y G un subgrupo de H. Este tipo de espacios poseen una métrica natural, que es la métrica cociente inducida por la distancia entre clases de equivalencias hG, $h\in H$.

En el próximo teorema que expondremos vamos a caracterizar la distancia rectificable como la distancia cociente de grupos, identificando $\mathcal{O}_A\cong U_p\left(\mathcal{H}\right)/G_A$. De esta caracterización vamos a deducir la completitud de $\mathcal{O}_A$ con la distancia rectificable. Para demostrar dicho teorema vamos a necesitar el siguiente lema de Takesaki (c.f. [Tak03] página 109).

Lema 2.5.2 *Sea H un grupo topológico metrizable, y G un subgrupo cerrado. Si d es una distancia en H que induce la topología de H y que hace que H sea completo con esta distancia y si además d es invariante bajo la traslación a derecha en G, i.e., $d(xg, yg) = d(x, y)$ para cualquier x, $y \in H$ y $g \in G$, entonces el espacio cociente a izquierda $H/G = \{xG : x \in H\}$ es un espacio métrico completo bajo la métrica $\dot{d}$ dada por*

$$\dot{d}(xG, yG) = \text{ínf}\{d(xg_1, yg_2) : g_1, g_2 \in G\}.$$

Más aún, la distancia $\dot{d}$ es una métrica para la topología cociente.

En nuestro contexto, consideraremos $H = U_p(\mathcal{H})$ (recordar que por el Teorema 1.2.8, $U_p(\mathcal{H})$ es completo), $G = G_A$ y $d = d_p$.

Sólo habría que verificar que $d(ug, vg) = d(u, v)$ para $u, v \in U_p(\mathcal{H})$ y $g \in G_A$. Con ese fin consideremos α una curva que une u con v y definamos $\gamma(t) := \alpha(t)g$. Como γ une ug con vg tenemos que

$$L_p(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)g\|_p \, dt \leq \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\|_p \, dt = L_p(\alpha)$$

Con lo cual, $d_p(ug, vg) \leq L_p(\alpha)$ $\forall \alpha$. Esto implica que

$$d_p(ug, vg) \leq d_p(u, v).$$

De manera análoga, podemos ver que $d_p(u, v) \leq d_p(ug, vg)$, y con ésto obtener la igualdad deseada.

Teorema 2.5.3 *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto cuya imagen sea un conjunto cerrado. Sea $U_0, U_1 \in U_p(\mathcal{H})$ y*

$$\dot{d}_p(U_0A, U_1A) = \text{ínf}\{d_p(U_0, U_1U) : U \in G_A\}.$$

Entonces $\dot{d}_p = d$, donde d es la distancia rectificable en $\mathcal{O}_A$, antes definida.

En particular, $(\mathcal{O}_A, d)$ es un espacio métrico completo y d metriza la topología cociente.

Demostración. Se sabe que $(U_p(\mathcal{H}), d_p)$ es un espacio métrico completo (Teorema 1.2.8) y que G_A es d_p-cerrada en $U_p(\mathcal{H})$, entonces la distancia cociente $\dot{d}_p$ está bien definida y puede ser calculada como

$$\dot{d}_p(U_0A, U_1A) = \text{ínf}\{d_p(U_0, U_1U) : U \in G_A\}.$$

Con el fin de probar la igualdad entre las distancias, observemos que dado $\epsilon > 0$ fijo, el Lema 2.5.1 garantiza la existencia de una curva Γ en $U_p(\mathcal{H})$ que satisface:

1. $\Gamma(0) = U_0$; $\Gamma(1) = U_1 U$, $U \in G_A$.

2. $L_p(\Gamma) < d(U_0 A, U_1 A) + \epsilon$.

Entonces

$$\dot{d}_p(U_0 A, U_1 A) \leq d_p(U_0, U_1 U) \leq L_p(\Gamma) < d(U_0 A, U_1 A) + \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, obtenemos la primera desigualdad.

Para probar la otra desigualdad, notemos que dado $\epsilon > 0$, existe $U \in G_A$ tal que

$$d_p(U_0, U_1 U) < \dot{d}_p(U_0 A, U_1 A) + \epsilon.$$

Entonces existe una curva Γ en $U_p(\mathcal{H})$ tal que $\Gamma(0) = U_0$, $\Gamma(1) = U_1 U$ y

$$L_p(\Gamma) < d_p(U_0, U_1 U) + \epsilon.$$

Luego, tenemos

$$d(U_0 A, U_1 A) \leq L_p(\Gamma) < d_p(U_0, U_1 U) + \epsilon < \dot{d}_p(U_0 A, U_1 A) + 2\epsilon,$$

por lo tanto, vale la igualdad.

La completitud de $(\mathcal{O}_A, d)$ y el hecho que d metriza la topología cociente, se deducen del Lema 2.5.2.

$\square$

Capítulo 3

Órbitas unitarias de los operadores de compresión

Sea $\mathcal{I}$ un ideal simétricamente normado del espacio de los operadores acotados actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea $\{\, p_i \,\}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$ una familia de proyecciones mutuamente ortogonales sobre $\mathcal{H}$. El operador de compresión asociado a dicha familia de proyecciones está dado por:

$$P : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}, \qquad P(x) = \sum_{i=1}^{w} p_i x p_i.$$

En el presente capítulo estudiaremos las propiedades geométricas de la órbita

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) = \{\, L_u P L_{u^*} \ : \ u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,\},$$

donde $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ denota al grupo de Lie-Banach de los operadores unitarios cuya diferencia con la identidad pertenece a $\mathcal{I}$ y L_u a la representación a izquierda de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ de los operadores acotados que actúan en $\mathcal{I}$. Los resultados que expondremos incluyen condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ sea un subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Estudiaremos el caso particular en el que $\mathcal{I} = \mathcal{K}$ el ideal de los operadores compactos. Debido a que en general, $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ es una subvariedad no complementada de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$, estudiaremos condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ tenga espacios tangentes complementados en $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. También mostraremos una aplicación de los resultados obtenidos para $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ a la topología de la órbita $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$-unitaria de un operador normal y compacto. Además, probaremos que

$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es un espacio recubridor de otra órbita natural de P. Una métrica de Finsler cociente será introducida, y la distancia rectificable inducida será estudiada.

3.1 El espacio homogéneo $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$

A lo largo de esta sección, Φ denotará a una función gauge simétrica, $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$ al correspondiente ideal simétricamente normado y P el operador de compresión asociado con una familia de proyecciones mutuamente ortogonales $\{p_i\}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$. En primer lugar mostraremos que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ tiene estructura de variedad suave cuando se lo dota con la topología cociente.

El siguiente lema será utilizado cuando demostremos que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$.

Lema 3.1.1 *Sea $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces $L_xP = PL_x$ si y sólo si $x = \sum_{i=0}^{w} p_ixp_i$.*

Demostración. Supongamos que $L_xP = PL_x$, es decir

$$\sum_{i=1}^{w}(p_ix - xp_i)yp_i = 0, \tag{3.1}$$

para todo $y \in \mathcal{I}$ y veamos que $p_ixp_j = 0$ para $i \neq j$, $j, i \geq 0$. Sean $i \geq 0$ y $(e_{i,n})_n$ una sucesión de proyecciones de rango finito tales que $e_{i,n} \leq p_i$ y $e_{i,n} \nearrow p_i$ en la topología fuerte de operadores.

Estudiaremos los casos $j \geq 1$ y $j = 0$ por separado. Empecemos analizando el caso $j \geq 1$. Reemplazando en (3.1) y por $e_{j,n}$ obtenemos que $\sum_{i=1}^{w}(p_ix - xp_i)e_{j,n}p_i = 0$. Es decir, $0 = (p_jx - xp_j)e_{j,n}p_j = (p_jx - xp_j)e_{j,n}$ para todo $n \geq 1$. Luego $p_jxp_j = xp_j$. Finalmente, multiplicando por p_i para $i \neq j$, se tiene que

$$p_ixp_j = 0$$

para $j \geq 1$, $i \geq 0$, $i \neq j$.

Supongamos ahora que $j = 0$, y veamos que $p_ixp_0 = 0$, $i \geq 1$, reemplazar en (3.1) y por $e_{0,n}x^*$. Entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{w}(p_ix - xp_i)e_{0,n}x^*p_i = \sum_{i=1}^{w} p_ixe_{0,n}x^*p_i.$$

Multiplicando por p_j con $j \geq 1$, se deduce que $p_j x e_{0,n} x^* p_j = 0$ para todo $n \geq 1$, es decir, $0 = p_j x p_0 x^* p_j = (p_j x p_0)(p_j x p_0)^*$.

Por lo tanto, $p_i x p_j = 0$ para $i \geq 0$, $j \geq 0$ y $i \neq j$. Es decir, x es de la forma deseada.

Notar que el recíproco se sigue trivialmente.

□

Observación 3.1.2 *Un cálculo sencillo muestra que el espacio tangente de* $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ *en* Q*, es decir las derivadas en* Q *de curvas suaves contenidas en* $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$*, está dado por*

$$(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_Q = \{\, L_z Q - Q L_z \,:\, z \in \mathcal{I}_{ah} \,\}. \tag{3.2}$$

Denotaremos a los vectores tangentes por $[L_z, Q]$.

Si trabajamos con la acción natural, el grupo de isotropía en P *de* $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ *es*

$$G = \{\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,:\, L_u P = P L_u \,\}.$$

G *es un subgrupo cerrado de* $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ *y su álgebra de Lie puede ser identificada con*

$$\mathcal{G} = \{\, z \in \mathcal{I}_{ah} \,:\, L_z P = P L_z \,\}.$$

El siguiente teorema nos será de utilidad para mostrar que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$. Una demostración del mismo puede encontrar en [Upm85].

Teorema 3.1.3 *Sea* K *un subgrupo de Lie-Banach del grupo de Lie-Banach* G *con álgebra de Lie* $\mathcal{G}$*. Entonces el espacio cociente* $M := G/K$ *tiene estructura de variedad de Banach tal que la proyección* $\pi : G \to M$ *es una submersión analítica.* G *actúa analíticamente sobre* M *via* $r(g, hK) := ghK$ *para* $g, h \in G$*. Sea* $\rho : \mathcal{G} \to aut(M)$ *la diferencial de* r*. Entonces el mapa* $\rho_0 : \mathcal{G} \to T_0(M)$ *en* $0 := K \in M$ *es suryectivo y tiene núcleo:*

$$\ker(\rho_0) = \{X \in \mathcal{G} : \exp(tX) \in K \text{para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposición 3.1.4 *Sean Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Entonces $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ es un espacio homogéneo, real y analítico de $\mathcal{U}_\mathcal{I}$.*

Demostración. La prueba consistirá en demostrar que G es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_\mathcal{I}$.

Sea $u = e^z \in G$, con $z \in \mathcal{I}_{ah}$ y $\|z\|_\mathcal{I} < \pi$. Por la hipótesis sobre la norma de z, se tiene que

$$z = log(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}(u-1)^{n+1}.$$

Observemos que $L_u P = PL_u$, o $L_{u-1}P = PL_{u-1}$, implica que $L_{r(u-1)}P = PL_{r(u-1)}$ para cualquier polinomio $r \in \mathbb{R}[X]$, y por la continuidad obtenemos que $L_z P = PL_z$.

Denotemos por $\exp_{\mathcal{U}_\mathcal{I}}$ a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{ah} & \xrightarrow{\exp_{\mathcal{U}_\mathcal{I}}} & \mathcal{U}_\mathcal{I} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

el mapa exponencial del grupo de Lie-Banach $\mathcal{U}_\mathcal{I}$.

Luego $\exp_{\mathcal{U}_\mathcal{I}}(\mathcal{G} \cap V) = G \cap \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{I}}(V)$, para cualquier entorno V lo suficientemente pequeño del origen en $\mathcal{I}_{ah}$.

Por otro lado, por el Lema 3.1.1 se puede reescribir el álgebra de Lie como

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_{i=0}^{w} p_i z p_i \;:\; z \in \mathcal{I}_{ah} \right\},$$

el cual es un subespacio real y cerrado de $\mathcal{I}_{ah}$. Más aún, el siguiente subespacio

$$\mathcal{M} = \{\, z \in \mathcal{I}_{ah} \;:\; p_i z p_i = 0,\, \forall\, i \geq 0 \,\} = \left\{ \sum_{i \neq j} p_i z p_j \;:\; z \in \mathcal{I}_{ah} \right\}$$

es un suplemento cerrado para $\mathcal{G}$ en $\mathcal{I}_{ah}$. Entonces, G es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_\mathcal{I}$, y por el Teorema 3.1.3 se tiene que $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ es un espacio homogéneo real y analítico de $\mathcal{U}_\mathcal{I}$.

□

3.2 Estructura diferencial de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$, $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$.

En esta sección, analizaremos la estructura diferencial de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ bajo la hipótesis de que $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$.

Recordemos que dado un operador de compresión P asociado a una familia de proyecciones mutuamente ortogonales $\{ p_i \}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$, se puede considerar una familia aún más grande $\{ p_i \}_0^w$, donde $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^w p_i$. Sin embargo, nosotros asociaremos al operador de compresión P con la primera familia $\{ p_i \}_1^w$.

Comenzaremos con unas estimaciones que vamos a utilizar a lo largo del capítulo.

Lema 3.2.1 *Sean Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Entonces*

$$\|L_x P - P L_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} \geq \|p_i x p_j\|,$$

para $x \in \mathcal{I}$, $i \geq 1$, $j \geq 0$ e $i \neq j$.

Demostración. Sea

$$p_i x p_j = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \, \psi_k \otimes \eta_k,$$

la expansión de Schmidt expresión del operador compacto $p_i x p_j$, donde s_k son los valores singulares de $p_i x p_j$ ordenados de manera no creciente y $(\psi_k)_k$, $(\eta_k)_k$ son sistemas ortonormales de vectores (ver (1.2)).

Como $p_i x p_j \eta_1 = s_1 \psi_1$, $\psi_1 \in \mathrm{R}(p_i)$. Adjuntando el desarrollo de $p_i x p_j$ y evaluando dicha expresión en ψ_1 obtenemos que $\eta_1 \in \mathrm{R}(p_j)$.

Por un lado, como $i \neq j$, ocurre que

$$P(\eta_1 \otimes \psi_1) = \sum_m p_m \eta_1 \otimes \psi_1 p_m = 0.$$

Y además

$$P L_x(\eta_1 \otimes \psi_1) = \sum_m p_m (x \eta_1 \otimes \psi_1) p_m = p_i x(\eta_1 \otimes \psi_1)$$

no se anula porque $i \geq 1$. Se sigue que

$$(L_x P - P L_x)(\eta_1 \otimes \psi_1) = -p_i x(\eta_1 \otimes \psi_1) = -p_i x p_j(\eta_1 \otimes \psi_1) = -s_1(\psi_1 \otimes \psi_1).$$

Luego

$$\begin{aligned}\|L_xP - PL_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} &\geq \|(L_xP - PL_x)(\eta_1 \otimes \xi_1)\|_{\mathcal{I}} \\ &= s_1\|\psi_1 \otimes \psi_1\|_{\mathcal{I}} = s_1 = \|p_i x p_j\|.\end{aligned}$$

□

La primera obstrucción para que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ sea una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ radica en el hecho que sus espacios tangentes pueden no ser cerrados.

En el siguiente lema caracterizaremos cuándo los espacios tangentes de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ son cerrados. Cuestiones similares, aunque en un contexto diferente, fueron tratadas en [Nee04]. (en particular, en el capítulo VII, lema VII.3).

Lema 3.2.2 *Si $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$, los espacios tangentes de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ son cerrados en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ si y sólo si $w < \infty$ y hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$.*

Demostración. Observemos que alcanza con probar que la afirmación es cierta para el espacio tangente en P. En efecto, si $Q = L_uPL_{u^*}$ para algún $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, entonces

$$\begin{aligned}[L_z, Q] &= L_zL_uPL_{u^*} - L_uPL_{u^*}L_z \\ &= L_uL_{u^*}(L_zL_uPL_{u^*} - L_uPL_{u^*}L_z)L_uL_{u^*} \\ &= L_u[L_{u^*zu}, P]L_{u^*}.\end{aligned}$$

Luego $(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_Q$ es cerrado en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ si y sólo si $(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_P$ es cerrado en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.

Supongamos primero que $(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_P$ es cerrado en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Sean $x \notin \mathcal{I}$ un operador compacto y $(e_n)_n$ una sucesión de proyecciones de rango finito tal que $e_n \nearrow 1$ en la topología fuerte de operadores. Como x es compacto, la sucesión de operadores de rango finito $z_n = e_nxe_n$ satisface $\|x - z_n\| \to 0$.

Teniendo en cuenta la caracterización del espacio tangente dada en (3.2), los vectores tangentes tienen la expresión $[L_z, P]$, donde z es un operador antihermítico, es por esto que en el siguiente cálculo vamos a necesitar considerar la parte real e imaginaria de un operador. Dado $n \geq 1$, los operadores $[L_{i\,\mathrm{Re}(z_n)}, P]$ y $[L_{i\,\mathrm{Im}(z_n)}, P]$ pertenecen al espacio tangente en P. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \|\, [L_{i\,\mathrm{Re}(z_n)}, P] - [L_{i\,\mathrm{Re}(x)}, P]\, \|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} &\leq 2\|L_{i\,\mathrm{Re}(z_n)} - L_{i\,\mathrm{Re}(x)}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} \\ &= 2\|\,\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(x)\| \\ &\leq 2\|z_n - x\| \to 0. \end{aligned}$$

Como supusimos que $(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_P$ es cerrado, existe $z_0 \in \mathcal{I}_{ah}$ tal que $[L_{z_0}, P] = [L_{i\,\mathrm{Re}(x)}, P]$. Procediendo de la misma manera con la parte imaginaria, probamos que existe que un operador $z_1 \in \mathcal{I}_{ah}$ tal que $[L_{z_1}, P] = [L_{i\,\mathrm{Im}(x)}, P]$. Luego obtenemos que $[L_x, P] = [L_z, P]$ para $z = -iz_0 + z_1 \in \mathcal{I}$. Por Lema 3.1.1 lo último se puede reformular como

$$x - z = \sum_{i=0}^{w} p_i(x-z)p_i.$$

En particular,

$$x - \sum_{i=0}^{w} p_i x p_i \in \mathcal{I}. \tag{3.3}$$

Recordemos que $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$ para alguna función gauge simétrica Φ. Como $\mathcal{I}$ no es el ideal de los operadores compactos existe una sucesión de números positivos $(a_n)_n$ tal que $a_n \to 0$ y $\Phi((a_n)_n) = \infty$.

Supongamos que la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$ tiene dos proyecciones p_i, p_j, $i \neq j$, tales que ambas tienen rango infinito. Sea $(\xi_n)_n$ una base ortonormal para $\mathrm{R}(p_i)$ y $(\eta_n)_n$ una base ortonormal para $\mathrm{R}(p_j)$. Consideremos el siguiente operador compacto:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \xi_n \otimes \eta_n.$$

Por las propiedades de la sucesión $(a_n)_n$ se sigue que $x \notin \mathcal{I}$. Luego, tenemos que $x = p_i x p_j = x - \sum_{i=0}^{w} p_i x p_i \notin \mathcal{I}$, lo que contradice a la ecuación (3.3). Por lo tanto, es imposible tener dos proyecciones distintas ambas con rango infinito en la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$.

Resta probar que $w < \infty$. Supongamos que hay un número infinito de proyecciones $p_1, p_2, \ldots$. Entonces podemos construir un sistema de vectores ortonormales $(\xi_i)_i$ tales que $\xi_i \in \mathrm{R}(p_i)$. Consideremos el siguiente operador compacto:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \xi_{n+1} \otimes \xi_n.$$

Es fácil ver que $x = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} x p_n = x - \sum_{i=0}^{\infty} p_i x p_i \notin \mathcal{I}$. Lo cual conduce nuevamente a una contradicción con la ecuación (3.3).

Con el fin de probar el recíproco, asumiremos que la familia $\{ p_i \}_0^w$ satisface $w < \infty$ y tiene sólo una proyección p_{i_0} con rango infinito.

Sea $(z_k)_k$ una sucesión en $\mathcal{I}_{ah}$ tal que $\| \, [L_{z_k}, P] - X \|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} \to 0$, donde $X \in \mathcal{B}(\mathcal{I})$. Por el Lema 3.1.1, la sucesión $(z_k)_k$ puede ser elegida de manera tal que $p_i z_k p_i = 0$ para todo k y $i = 0, \ldots, w$. Como $(\, [L_{z_k}, P] \,)_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$, el Lema 3.2.1 implica que

$$\|p_i(z_k - z_r)p_j\| \underset{k,r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para $i = 1, \ldots, w$, $j = 0, \ldots, w$ e $i \neq j$.

Notar que el rango del operador $p_i(z_k - z_r)p_j$ está uniformemente acotado en el subíndice k y r para $C := \text{máx}\{ \operatorname{rank}(p_j) \ : \ j = 0, \ldots, w, \ j \neq i_0 \}$. Entonces, se tiene que

$$\|p_j(z_k - z_r)p_i\|_{\mathcal{I}} \leq C \|p_j(z_r - z_k)p_i\| \underset{k,r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto cada $(p_j z_k p_i)_k$ converge en la norma del ideal a algún $z_{ij} \in \mathcal{I}$. Luego podemos construir un operador z definiendo sus bloques matriciales con respecto a las proyecciones $p_0, p_1, \ldots, p_w$ de la siguiente manera:

$$p_i z p_j := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i = j, \\ z_{ij} & \text{if} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Entonces z es un operador antihermítico en $\mathcal{I}$ que satisface

$$\|z - z_k\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{i \neq j} \|p_j z p_i - p_j z_k p_i\|_{\mathcal{I}} = \sum_{i \neq j} \|z_{ij} - p_j z_k p_i\|_{\mathcal{I}} \to 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \| \, [L_{z_k}, P] - [L_z, P] \, \|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} &\leq 2\|L_{z_k} - L_z\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} = 2\|z_k - z\| \\ &\leq 2\|z_k - z\|_{\mathcal{I}} \to 0. \end{aligned}$$

De esto se deduce que $X = [L_z, P]$, con lo que el lema queda probado.

□

Podemos dotar a $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ de dos topologías. De acuerdo a la Proposición 3.1.4 se tiene que $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P) \simeq \mathcal{U}_\mathcal{I}/G$ tiene estructura de variedad real y analítica en la topología cociente de manera que el mapa $\pi : \mathcal{U}_\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$, $\pi(u) = L_u P L_{u^*}$ es una submersión real y analítica. Por otro lado, se puede pensar a $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ como un subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ con la topología heredada. En este caso, denotaremos al mapa de proyección por $\tilde{\pi} : \mathcal{U}_\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$, $\tilde{\pi}(u) = L_u P L_{u^*}$.

Observemos que $\tilde{\pi}$ es continua, y que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_\mathcal{I} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & \mathcal{U}_\mathcal{I}(P) \simeq \mathcal{U}_\mathcal{I}/G \arrow[d, "I"] \\ & \mathcal{U}_\mathcal{I}(P) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{I}) \end{tikzcd}$$

En el diagrama I denota al mapa identidad. A pesar de que I es siempre continua, puede no ser un homeomorfismo. De hecho, mostraremos que las dos topologías definidas en $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ coinciden si y sólo si los espacios tangentes son cerrados. La prueba de este resultado depende de la existencia de secciones locales continuas para la acción.

Observación 3.2.3 *Sea P el operador de compresión asociado a la familia $\{\, p_i\}_1^w$. Consideremos la órbita unitaria para cada proyección p_i, i.e.*

$$\mathcal{O}_i := \{\, u p_i u^* \ : \ u \in \mathcal{U}_\mathcal{I} \,\}.$$

Si $\mathcal{I}$ es el ideal de los operadores Hilbert-Schmidt y la imagen de p_i es de dimensión infinita, las órbitas antes definidas son lo que se conoce como las componentes conexas de p_i en la Grasmanniana restringida (ver e.g. [PS86]). Notar que $\mathcal{O}_i \subseteq p_i + \mathcal{I}$, luego se puede dotar cada órbita con la topología del subespacio definida por la métrica $(u p_i u^*, v p_i v^*) \mapsto \| u p_i u^* - v p_i v^* \|_\mathcal{I}$.

Lema 3.2.4 *Si $w < \infty$ y hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i\}_0^w$. Entonces el mapa*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\mathcal{I}(P) & \xrightarrow{F_i} & \mathcal{O}_i \\ L_u P L_{u^*} & \longmapsto & u p_i u^* \end{array}$$

es continuo para $i = 0, 1, \ldots w$, cuando $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ es dotado de la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.

Demostración. En primer lugar mostraremos que la función F_i está bien definida para $i = 0, 1, \ldots, w$. Supongamos que $L_u P L_{u^*} = L_v P L_{v^*}$, o equivalentemente que $PL_{u^*v} = L_{u^*v}P$. El Lema 3.1.1 establece que entonces $u^*v = \sum_{m=0}^{w} p_m u^* v p_m$. Luego tenemos que $v^*up_i = p_i v^* u p_i = p_i v^* u$, lo que implica que $up_i u^* = vp_i v^*$.

Para probar la continuidad de F_i mostraremos que F_i es Lipschitz. Como la acción es isométrica, basta estimar la distancia de $F_i(L_u P L_{u^*}) = up_i u^*$ a $F_i(P) = p_i$. Con ese fin, para $u \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$, definamos

$$a(u) := \|L_u P L_{u^*} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} = \| \, [L_u, P] \, \|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})}.$$

El Lema 3.2.1 establece que

$$\|L_{(u-1)}P - PL_{(u-1)}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} \geq \|p_i(u - I)p_j\|,$$

para $j = 0, 1, \ldots, w$, $i = 1, \ldots, w$ y $i \neq j$. De lo que se deduce que

$$\|p_i u p_j\| = \|p_i(u - 1)p_j\| \leq a(u),$$

para $j = 0, 1, \ldots, w$, $i = 1, \ldots, w$ y $i \neq j$. La misma estimación puede ser extendida para todo $i \neq j$. Para ser más precisos, se tiene

$$\|p_j u p_i\| = \|p_i u^* p_j\| \leq a(u^*) = a(u).$$

Sea p_{i_0} la única proyección de rango infinito en la familia $\{ \, p_i \, \}_0^w$. Para $u \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$, notemos que

$$\operatorname{rank}(p_i u p_j) \leq \text{mín}\{ \operatorname{rank}(p_i) \, , \, \operatorname{rank}(p_j) \, \},$$

y entonces

$$\text{máx}\{ \operatorname{rank}(p_j u p_i) \, : \, i, j = 0, 1, \ldots, w, \, i \neq j \, \} \leq \text{máx}\{ \operatorname{rank}(p_j) \, : \, j = 0, 1, \ldots, w, \, j \neq i_0 \, \}.$$

Llamando

$$C = \text{máx}\{ \operatorname{rank}(p_j) \, : \, j = 0, 1, \ldots, w, \, j \neq i_0 \, \},$$

la desigualdad anterior implica que

$$\|p_i u p_j\|_\mathcal{I} \leq C \|p_i u p_j\|$$

para $i \neq j$. Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|F_i(L_u P L_{u^*}) - F_i(P)\|_{\mathcal{I}} &= \|up_i - p_i u\|_{\mathcal{I}} \\
&\leq \|\sum_{j=0}^{w} p_j u p_i - \sum_{k=0}^{w} p_i u p_k\|_{\mathcal{I}} \\
&= \|\sum_{j:j\neq i} p_j u p_i - \sum_{k:k\neq i} p_i u p_k\|_{\mathcal{I}} \\
&\leq \sum_{j:j\neq i} \|p_j u p_i\|_{\mathcal{I}} + \sum_{k:k\neq i} \|p_i u p_k\|_{\mathcal{I}} \\
&\leq C\Big(\sum_{j:j\neq i} \|p_j u p_i\| + \sum_{k:k\neq i} \|p_i u p_k\|\Big) \\
&\leq 2wC\|L_u P L_{u^*} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})}, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

lo que muestra que F es Lipschitz.

□

Lema 3.2.5 *Sea $\mathcal{M}$ el suplemento para el álgebra de Lie definida en la Proposición 3.1.4. Suponer que $w = \infty$ o que existen dos proyecciones distintas de rango infinito en la familia $\{p_i\}_0^w$. Si $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$ entonces existe una sucesión $(z_k)_k$ en $\mathcal{M}$ que satisface $\|z_k\| \to 0$ y $\|z_k\|_{\mathcal{I}} = 1$.*

Demostración. Definamos

$$a_k := \Phi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}, 0, 0, \ldots),$$

donde Φ es una función gauge simétrica tal que $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Como $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$, se sigue que Φ no es equivalente a la norma uniforme de ℓ^∞, de modo que $a_k \to \infty$ (ver Lema 1.2.6). En el caso en el que $w = \infty$, consideremos $(\xi_i)_i$ un sistema ortonormal tal que $\xi_i \in \mathrm{R}(p_i)$ para todo $i \geq 1$. No es difícil ver que la sucesión definida por

$$z_k := a_{2k}^{-1} \sum_{i=1}^{k} \xi_{2i-1} \otimes \xi_{2i} - \xi_{2i} \otimes \xi_{2i-1}$$

satisface las propiedades requeridas. En el caso en el que existan dos proyecciones distintas de rango infinito p_i y p_j, sea $(\xi_i)_i$ un sistema ortonormal tal que $\xi_{2k-1} \in$

$\mathrm{R}(p_i)$ y $\xi_{2k} \in \mathrm{R}(p_j)$ para todo $k \geq 1$. Entonces se puede definir la sucesión $(z_k)_k$ de la misma manera que antes.

$\square$

Lema 3.2.6 *Si $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$, son equivalentes:*

1. *La topología cociente de $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ coincide con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.*

2. *$w < \infty$ y hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i\}_0^w$.*

Demostración. Supongamos que la topología cociente de $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P) \simeq \mathcal{U}_\mathcal{I}/G$ coincide con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ y sea $\mathcal{M}$ el suplemento del álgebra de Lie de G definida en la Proposición 3.1.4. Recordemos que un atlas real y analítico de $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ compatible con la topología cociente puede ser construído trasladando el homeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} \subseteq \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \psi(\mathcal{W}) \\ z & \longmapsto & L_{e^z} P L_{e^{-z}} \end{array}$$

es decir, $\psi(z) = (\pi \circ \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{I}})(z) = L_{e^z} P L_{e^{-z}}$, donde $\mathcal{W}$ es un entorno abierto de $0 \in \mathcal{M}$ y $\psi(\mathcal{W})$ es un entorno abierto de P(ver Teorema 1.4.4). Asumamos que la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$ no satisface las propiedades. Hay dos posibilidades, la primera es que $w = \infty$ y la segunda es que existan dos proyecciones distintas de rango infinito en $\{\, p_i \,\}_0^w$. Por el Lema 3.2.5, en ambas posibilidades se puede encontrar una sucesión $(z_k)_k$ en $\mathcal{M}$ tal que $\|z_k\| \to 0$ y $\|z_k\|_\mathcal{I} = 1$. Observemos que

$$\|L_{e^{z_k}} P L_{e^{-z_k}} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} = \|\, [L_{e^{z_k}-1}, P]\, \|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} \leq 2\|e^{z_k} - 1\| \to 0,$$

y usando que la topología cociente de de $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$ coincide con la topología del subespacio, se llega a una contradicción:

$$\|z_k\|_\mathcal{I} = \|\psi^{-1}(L_{e^{z_k}} P L_{e^{-z_k}})\|_\mathcal{I} \to 0.$$

Para probar el recíproco, asumamos que $w < \infty$ y que hay una sóla proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i\}_0^w$. Claramente, la afirmación sobre la topología de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ estará probada si podemos mostrar que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{\mathcal{I}} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) \\ u & \longmapsto & L_u P L_{u^*} \end{array}$$

tiene secciones locales continuas, cuando $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es considerado con la topología relativa de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Con este fin, para $i = 0, 1, \ldots, w$, considerar las órbitas

$$\mathcal{O}_i := \{\, u p_i u^* \;:\; u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,\}.$$

En [AL08, Proposition 2.2] los autores mostraron que los mapas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{\mathcal{I}} & \xrightarrow{\pi_i} & \mathcal{O}_i \\ u & \longmapsto & u p_i u^*, \end{array}$$

tiene secciones locales continuas, cuando $\mathcal{I}$ es el ideal de los operadores Hilbert-Schmidt. La misma prueba sirve para cualquier ideal $\mathcal{I}$ simétricamente normado, luego tenemos garantizada la existencia un mapa continuo

$$\psi_i : \{\, q \in \mathcal{O}_i \;:\; \|q - p_i\|_{\mathcal{I}} < 1 \,\} \subseteq p_i + \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$$

tal que

$$\psi_i(u p_i u^*) p_i \psi_i(u p_i u^*)^* = u p_i u^*$$

para cualquier $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ que cumpla que $\|u p_i u^* - p_i\|_{\mathcal{I}} < 1$.

Con todo esto se puede definir explícitamente la sección para $\tilde{\pi}$. Dicha sección, σ está definida en el conjunto

$$V_P := \left\{ Q \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) : \|Q - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} < \frac{1}{2wC} \right\},$$

$\sigma : V_P \to \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ y está dada por la fórmula:

$$\sigma(L_u P L_{u^*}) = \sum_{i=0}^{w} \psi_i(u p_i u^*) p_i.$$

Si $Q = L_u P L_{u^*}$ está en el dominio de σ, por la estimación (3.4) en el Lema 3.2.4, los operadores $u p_i u^*$ están en el dominio de cada ψ_i. La tarea que resta por hacer es mostrar que $\sigma = \sigma(L_u P L_{u^*}) \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$.

En primer lugar,

$$\begin{aligned}
\sigma\sigma^* &= \left(\sum_{i=0}^{w}\psi_i(up_iu^*)p_i\right)\left(\sum_{i=0}^{w}p_i\psi_i(up_iu^*)^*\right)\\
&= \sum_{i=0}^{w}\psi_i(up_iu^*)p_i\psi(up_iu^*)^*\\
&= \sum_{i=0}^{w}up_iu^*\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Observemos que como

$$p_j\psi_j(up_ju^*)^*\psi_i(up_iu^*)p_i = \psi_j(up_ju^*)^*up_jp_iu^*\psi_i(up_iu^*) = \delta_{ij},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sigma^*\sigma &= \left(\sum_{i=0}^{w}p_i\psi_i(up_iu^*)^*\right)\left(\sum_{i=0}^{w}\psi_i(up_iu^*)p_i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{w}p_i\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Además se puede ver fácilmente que

$$\sigma - 1 = \sum_{i=0}^{w}(\psi_i(up_iu^*) - 1)p_i.$$

lo que implica que $\sigma - 1 \in \mathcal{I}$.

Por otro lado, el mapa σ es una sección para π. En efecto, para cualquier $y \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}
L_{\sigma(L_uPL_{u^*})}PL_{\sigma(L_uPL_{u^*})^*}(y) &= \sum_{i=0}^{w}\sigma(L_uPL_{u^*})p_i\sigma(L_uPL_{u^*})^*yp_i\\
&= \sum_{i=0}^{w}\psi_i(up_iu^*)p_i\psi_i(up_iu^*)^*yp_i\\
&= \sum_{i=0}^{w}up_iu^*yp_i\\
&= L_uPL_{u^*}(y).
\end{aligned}$$

Finalmente, para probar la continuidad de σ, alcanza con notar que

$$\sigma(L_u P L_{u^*}) = \sum_{i=0}^{w} \psi_i(F_i(L_u P L_{u^*}))p_i$$

y usar la continuidad de cada F_i, la cual fue probada en el Lema 3.2.4.

$\square$

A continuación probaremos el resultado principal de capítulo sobre la estructura diferencial de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$.

Teorema 3.2.7 *Sean Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Asumir que $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$. Sea P el operador de compresión asociado a la familia $\{p_i\}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La topología cociente en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ coincide con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.*
2. *Los espacios tangentes de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ son cerrados en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.*
3. *$w < \infty$ y hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{ p_i \}_0^w$.*
4. *$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Por la Proposición 1.4.1, los espacios tangentes de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ tienen que ser cerrados en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Del Lema 3.2.2 se sigue que la familia $\{ p_i \}_0^w$ satisface las propiedades enunciadas.

Ahora asumamos que $w < \infty$ y que existe una sóla proyección de rango infinito en la familia $\{ p_i \}_0^w$. De acuerdo con los Lemas 3.2.2 y 3.2.6, lo que resta probar es que los espacios tangentes son complementados en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Notar que alcanza con probar que $(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_P$ es complementado en $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.

La prueba de este hecho será divida en dos casos dependiendo si el rango de p_0 es infinito o finito.

Asumamos primero que $\operatorname{rank}(p_0) = \infty$, de modo que $\operatorname{rank}(p_i) < \infty$ para todo $i = 1, \dots, w$. Entonces $X(p_i)$ está bien definido para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{I})$, $i = 1, \dots, w$, y podemos definir

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{I}) & \xrightarrow{\hat{z}} & \mathcal{I}_{ah} \\ X & \longmapsto & 2i\,\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{w}\sum_{j=0}^{i-1} p_j X(p_i)\right) \end{array}$$

Notar que $\hat{z}$ es un operador lineal y continuo, entonces podemos definir una proyección lineal y acotada sobre el espacio tangente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{I}) & \xrightarrow{E} & (T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_P \\ X & \longmapsto & [L_{\hat{z}(X)}, P]. \end{array}$$

Con el fin de probar que E es una proyección consideremos $X = [L_z, P]$ para algún $z \in \mathcal{I}_{ah}$. Notar que $X(p_i) = zp_i - p_i z p_i = (1 - p_i)zp_i$, para todo $i = 1, \ldots, w$, entonces tenemos

$$\hat{z}(X) = 2i\,\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^{w}\sum_{j=0}^{i-1} p_j z p_i\right) = z - \sum_{i=0}^{w} p_i z p_i.$$

Del Lema 3.1.1 podemos deducir que $E(X) = [L_{\hat{z}(X)}, P] = X$, lo que prueba que E es una proyección. Finalmente, la continuidad de $\hat{z}$ implica la continuidad de E.

Ahora estudiemos el caso en el que la proyección de rango infinito no es p_0. Suponer sin pérdida de generalidad que $\mathrm{rank}(p_1) = \infty$. Notar que la definición antes dada del operador $\hat{z}(X)$ no funciona en este caso por dos motivos: en primer lugar, como $p_1 \notin \mathcal{I}$ no se puede evaluar cualquier $X \in \mathcal{B}(\mathcal{I})$ en p_1, y en segundo lugar, cada vector tangente $[L_z, P]$ se anula en p_0.

Por lo tanto, es necesario modificar la definición del operador $\hat{z}$. Se sabe que como $\mathrm{rank}(p_1) = \infty$ entonces $\mathrm{rank}(p_0) < \infty$. Sean $\eta_1, \ldots, \eta_m$ una base ortonormal de $\mathrm{R}(p_0)$ y $\xi \in \mathrm{R}(p_1)$ un vector unitario. Definamos $\hat{z} : \mathcal{B}(\mathcal{I}) \to \mathcal{I}_{ah}$ de la siguiente manera:

$$\hat{z}(X) := 2i\,\mathrm{Im}\left(\sum_{i=2}^{w}\sum_{j=0}^{i-1} p_j X(p_i) - \sum_{k=1}^{m} X(\eta_k \otimes \xi)\xi \otimes \eta_k\right),$$

para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{I})$. La proyección sobre el espacio tangente es

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{I}) & \xrightarrow{E} & (T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_P \\ X & \longmapsto & [L_{\hat{z}(X)}, P]. \end{array}$$

Notar que E es continua, con lo cual, sólo resta probar que E es una proyección. Para ésto, considerar $X = [L_z, P]$ para algún $z \in \mathcal{I}_{ah}$. Notar que como $L_z P(\eta_k \otimes \xi) = 0$ se tiene que

$$X(\eta_k \otimes \xi) = -PL_z(\eta_k \otimes \xi) = \sum_{i=1}^{w} p_i z \eta_k \otimes p_i \xi = -p_1 z \eta_k \otimes \xi,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} X(\eta_k \otimes \xi)\xi \otimes \eta_k &= -\sum_{k=1}^{m} p_1 z(\eta_k \otimes \xi)(\xi \otimes \eta_k) \\ &= -\sum_{k=1}^{m} p_1 z(\eta_k \otimes \eta_k) \\ &= -p_1 z p_0. \end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\hat{z}(X) = 2i \operatorname{Im}\left(\sum_{i=2}^{w} \sum_{j=0}^{i-1} p_j z p_i + p_1 z p_0 \right) = z - \sum_{i=0}^{w} p_i z p_i.$$

De esta igualdad se deduce que $E([L_z, P]) = [L_z, P]$, con lo que la demostración queda terminada.

$\square$

3.3 Estructura diferencial de $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$.

En esta sección estudiaremos el caso $\mathcal{I} = \mathcal{K}$. Comenzaremos mostrando una estimación similar a la dada en el Lema 3.2.1.

Lema 3.3.1 *Sean P el operador de compresión asociado con una familia de proyecciones mutuamente ortogonales $\{ p_i \}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$ y $x \in \mathcal{K}$ tal que $p_i x p_i = 0$ para todo $i \geq 1$. Entonces*

$$\|L_x P - PL_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} \geq \|x(1 - p_0)\|.$$

Demostración. Dado $i \geq 1$ (fijo) vamos a construir una sucesión de proyecciones que dependerá del rango de p_i. Si $\text{rank}(p_i) = \infty$, definamos $(p_{i,k})_k$ como la sucesión de proyecciones de rango finito que satisfacen $p_{i,k} \leq p_i$ y $p_{i,kk} \nearrow p_i$. Si $\text{rank}(p_i) < \infty$, definimos $p_{i,k} = p_i$ para todo $k \geq 1$.

Asumamos primero que $w < \infty$. Entonces la proyección dada por $e_k = \sum_{i=1}^{w} p_{i,k}$ tiene rango finito. Notar que

$$(L_x P - P L_x)(e_k) = \sum_{i=1}^{w} (1 - p_i) x p_{i,k} = x \sum_{i=1}^{w} p_{i,k}$$

donde en la última igualdad se usa que $p_i x p_i = 0$. Luego se tiene que

$$\|L_x P - P L_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} \geq \|(L_x P - P L_x)(e_k)\| = \left\| x \sum_{i=1}^{w} p_{i,k} \right\|,$$

Teniendo en cuenta que $x \in \mathcal{K}$ y $p_{i,k} \nearrow p_i$, tenemos que

$$\|L_x P - P L_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} \geq \|x(1 - p_0)\|.$$

En el caso en que $w = \infty$, definamos $e_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De la misma manera que antes, concluímos que

$$\|L_x P - P L_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} \geq \left\| x \sum_{i=1}^{n} p_{i,k} \right\|.$$

Si $k \to \infty$, se tiene que

$$\|L_x P - P L_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} \geq \left\| x \sum_{i=1}^{n} p_i \right\|,$$

para todo $n \geq 1$. Si $n \to \infty$, se llega a la estimación deseada.

$\square$

Proposición 3.3.2 *Los espacios tangentes de $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ son cerrados en $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.*

Demostración. Notemos que por la observación hecha al comienzo de la demostración del Lema 3.2.2, alcanza con probar, sin pérdida de generalidad, que el espacio tangente en P es cerrado.

Sea $(z_k)_k$ una sucesión en $\mathcal{K}_{ah}$ tal que $p_i z_k p_i = 0$ para todo $i \geq 0$ y $k \geq 1$. Supongamos que $\| [L_{z_k}, P] - X \|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} \to 0$ para algún $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. De acuerdo con el Lema 3.3.1,

$$\|(z_k - z_r)(1 - p_0)\| \leq \| [L_{z_k - z_r}, P] \|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}.$$

Además, notar que

$$\begin{aligned} \|(z_k - z_r)p_0\| &= \|p_0(z_k - z_r)\| \\ &= \|p_0(z_k - z_r)(1 - p_0)\| \\ &\leq \| [L_{z_k - z_r}, P] \|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(z_k)_k$ es una sucesión de Cauchy y entonces tiene límite $z_0 \in \mathcal{K}_{ah}$. Luego,

$$\| [L_{z_k}, P] - [L_{z_0}, P] \| \leq 2\|z_k - z_0\| \to 0.$$

Por lo tanto, podemos concluir que $X = [L_{z_0}, P]$.

□

A continuación estudiaremos la topología de $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$. Mostraremos que la topología cociente y la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ coinciden, sin tener en cuenta el número o rango de las proyecciones en la familia $\{ p_i \}_0^w$.

Lema 3.3.3 *Sea P el operador de compresión asociado con la familia $\{ p_i \}_1^w$. Consideremos las órbitas unitarias de las proyecciones, las cuales denotaremos por*

$$\mathcal{O}_i = \{ u p_i u^* \, : \, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{K}} \}.$$

para $i = 0, \ldots, w$. Entonces el mapa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{O}_0 \\ L_u P L_{u^*} & \longmapsto & u p_0 u^* \end{array}$$

es Lipschitz.

Demostración. De acuerdo con el Lema 3.3.1 aplicado a

$$x = u - 1 - \sum_{i=0}^{w} p_i(u-1)p_i = u - \sum_{i=0}^{w} p_i u p_i$$

tenemos que

$$\left\| \left(u - \sum_{i=0}^{w} p_i u p_i \right)(1-p_0) \right\| = \|x(1-p_0)\| \leq \|L_x P - P L_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}.$$

Notando que

$$\|L_x P - P L_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} = \|L_u P L_{u^*} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}$$

y

$$\|p_0 u(1-p_0)\| = \left\| p_0 \left(u - \sum_{i=0}^{w} p_i u p_i \right)(1-p_0) \right\| \leq \left\| \left(u - \sum_{i=0}^{w} p_i u p_i \right)(1-p_0) \right\|$$

concluímos que

$$\|p_0 u(1-p_0)\| \leq \|L_u P L_{u^*} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}.$$

Ahora reemplazando u por u^* tenemos que

$$\|(1-p_0)up_0\| = \|p_0 u^*(1-p_0)\| \leq \|L_u P L_{u^*} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}.$$

Luego llegamos a

$$\begin{aligned}
\|F_0(L_u P L_{u^*}) - F_0(P)\| &= \|up_0u^* - p_0\| \\
&\leq \|(1-p_0)up_0\| + \|p_0u(1-p_0)\| \\
&\leq 2\|L_u P L_{u^*} - P\|,
\end{aligned}$$

hecho que prueba la afirmación.

□

Lema 3.3.4 *Sean $u, v \in \mathcal{U}_{\mathcal{K}}$. Entonces*

$$\left\| \sum_{i=0}^{w} up_iu^*p_i - vp_iv^*p_i \right\| \leq 3\|L_u P L_{u^*} - L_v P L_{v^*}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})},$$

donde en el caso en que $w = \infty$ la serie de la izquierda es convergente en la norma uniforme.

Demostración. Empecemos construyendo sucesiones de proyecciones de manera análoga a lo que hicimos en la demostración del Lema 3.3.1.

Dado $i \geq 1$ (fijo), sea $(p_{i,k})_k$ una sucesión de proyecciones de rango finito tal que $p_{i,k} \leq p_i$ y $p_{i,k} \nearrow p_i$. En caso de que p_i tenga rango finito, definamos $p_{i,k} = p_i$ para todo k. Al igual que en la prueba de dicho lema, vamos a asumir primero que $w < \infty$ y vamos a trabajar con las proyecciones ortogonales definidas por $e_k = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}$.

Sea

$$a(u,v) := \|L_u P L_{u^*} - L_v P L_{v^*}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}.$$

Como

$$(L_u P L_{u^*} - L_v P L_{v^*})(e_k) = \sum_{i=1}^{w} (u p_i u^* - v p_i v^*) p_{i,k},$$

entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{w} (u p_i u^* - v p_i v^*) p_{i,k} \right\| = \|(L_u P L_{u^*} - L_v P L_{v^*})(e_k)\| \leq a(u,v).$$

Notar que para cada $i \geq 1$, el operador $u p_i u^* - v p_i v^*$ es compacto. Si $k \to \infty$, se obtiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{w} (u p_i u^* - v p_i v^*) p_i \right\| \leq a(u,v).$$

Notar que por el Lema 3.3.3

$$\begin{aligned} \|(u p_0 i u^* - v p_0 v^*) p_0\| &= \|v(v^* u p_0 u^* v - p_0) v^* p_0\| \\ &\leq 2\|L_{v^* u} P L_{u^* v} - P\| \\ &\leq 2a(u,v). \end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\left\| \sum_{i=0}^{w} (u p_i u^* - v p_i v^*) p_i \right\| \leq 3a(u,v). \tag{3.5}$$

Esto finaliza la demostración para el caso $w < \infty$.

Si $w = \infty$, observemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} u p_i u^* p_i - v p_i v^* p_i = \sum_{i=0}^{\infty} u p_i (u^* - 1) p_i - v p_i (v^* - 1) p_i + (u - v) p_i.$$

Como los operadores $u^* - 1$, $v^* - 1$ y $u - v$ son compactos, la serie converge en la norma uniforme.

De la ecuación (3.5), se tiene que

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} (up_i u^* - vp_i v^*) p_i \xi \right\| \leq 3a(u, v)$$

para cualquier $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$ y $n \geq 1$. Dejando que $n \to \infty$, se tiene la desigualdad deseada

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} (up_i u^* - vp_i v^*) p_i \right\| = \sup_{\|\xi\|=1} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (up_i u^* - vp_i v^*) p_i \xi \right\| \leq 3a(u, v).$$

□

En la siguiente proposición se extiende la técnica desarrollada en [AL08] con el fin de construir secciones locales continuas.

Proposición 3.3.5 *Sea P el operador de compresión asociado a la familia $\{ p_i \}_1^w$ donde $1 \leq w \leq \infty$, entonces el mapa*

$$\pi : \mathcal{U}_\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{U}_\mathcal{K}(P) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{K}), \quad \pi(u) = L_u P L_{u^*},$$

tiene secciones locales continuas, cuando $\mathcal{U}_\mathcal{K}(P)$ es considerado con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Demostración. Primeramente notemos que como la acción de $\mathcal{U}_\mathcal{K}$ es isométrica, alcanzará con encontrar una sección continua σ en un entorno de P.

Demostraremos el caso en que $w = \infty$ ya que para el caso $w < \infty$ la demostración es similar. Para definir la sección local consideremos el siguiente entorno de P:

$$\mathcal{V} := \left\{ Q \in \mathcal{U}_\mathcal{K}(P) \, : \, \|Q - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} < 1/3 \right\}.$$

Dado $Q = L_u P L_{u^*} \in \mathcal{V}$, donde $u \in \mathcal{U}_\mathcal{K}$, sea $q_i = F_i(Q) = up_i u^*$ para $i \geq 0$. De acuerdo a la demostración del Lema 3.2.4 la función F_i está bien definida. Llamamos s a la serie dada por

$$s = s(Q) := \sum_{i=0}^{\infty} q_i p_i \, .$$

Esta serie es convergente en la topología fuerte de operadores. De hecho, se puede reescribir como

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} u p_i (u^* - 1) p_i + (u-1) p_i + p_i,$$

donde el primer y segundo sumando en la derecha son convergentes en la norma uniforme, mientras que el tercero es convergente en la topología fuerte de operadores. Por otro lado, notar que por el Lema 3.3.4, se tiene que

$$\|s - 1\| \leq 3\|Q - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} < 1.$$

Luego, s es inversible. Más aún,

$$s - 1 = u\left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i (u^* - 1) p_i + 1\right) - 1 = u \sum_{i=0}^{\infty} p_i (u^* - 1) p_i + u - 1 \in \mathcal{K},$$

lo cuál se debe al hecho que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i (u^* - 1) p_i \in \mathcal{K}$. A continuación mostraremos que

$$\sigma = \sigma(Q) := s|s|^{-1}$$

es una sección local continua para π. Con este propósito, notar que $sp_i = q_i p_i = q_i s$, de modo que $p_i |s|^2 = s^* q_i s = |s|^2 p_i$. Ahora recordando que si un operador T conmuta con un operador positivo entonces conmuta con la raíz cuadrada del operador positivo, tenemos que $p_i |s| = |s| p_i$. Luego,

$$\sigma p_i \sigma^* = s|s|^{-1} p_i |s|^{-1} s^* = s p_i |s|^{-2} s^* = s p_i s^{-1} = q_i.$$

Esto permite probar que σ es una sección: para cualquier $y \in \mathcal{K}$, se tiene que

$$L_\sigma P L_{\sigma^*}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma p_i \sigma^* y p_i = \sum_{i=1}^{\infty} q_i y p_i = Q(y).$$

Por otro lado, $|s|^2 - 1 \in \mathcal{K}$, además como $|s| \geq 0$ tenemos que $|s| + 1$ es inversible. Consecuentemente, $|s| - 1 = (|s|^2 - 1)(|s| + 1)^{-1} \in \mathcal{K}$. Luego, podemos afirmar que

$$\sigma - 1 = s|s|^{-1} - 1 = (s - |s|)|s|^{-1} = (s-1)|s|^{-1} + (1 - |s|)|s|^{-1} \in \mathcal{K}.$$

Por lo tanto $\sigma \in \mathcal{U}_{\mathcal{K}}$.

Con el fin de probar la continuidad de σ considerar el subgrupo de $Gl(\mathcal{H})$ dado por

$$Gl_{\mathcal{K}} = \{\, g \in Gl(\mathcal{H}) \,:\, g - 1 \in \mathcal{K} \,\}.$$

Este es un grupo de Lie-Banach dotado con la topología definida por $(g_1, g_2) \mapsto \|g_1 - g_2\|$ (ver [Bel06]). Por el Lema 3.3.4, el mapa $s : \mathcal{V} \longrightarrow Gl_{\mathcal{K}}$ es continuo. Además el mapa $Gl_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{K}}$, $s \mapsto s|s|^{-1}$, es real y analítico por las propiedades de regularidad del cálculo funcional de Riesz. Luego σ es continua, por ser composición de mapas continuos.

$\square$

Nuestra siguiente tarea en el estudio de la estructura de subvariedad de $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ es analizar la existencia de un suplemento para $(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_P$ en $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. La existencia de tal suplemento está estrechamente relacionada con el hecho que para un espacio de Hilbert infinito dimensional $\mathcal{H}$, los operadores compactos no son complementados en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Una demostración de este resultado puede ser encontrada en [Con72]. Dicha prueba está basada en el conocido resultado que establece que c_0 no es complementado en el espacio de las funciones acotadas ℓ^∞. Una demostración de esto último puede ser encontrada en [Whi66].

De los resultados recién mencionados podemos deducir dos hechos que vamos a utilizar cuando mostremos bajo qué condiciones $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Los enunciamos en el siguiente lema:

Lema 3.3.6 *Sean q_1, q_2 dos proyecciones ortogonales de rango infinito en $\mathcal{H}$, entonces*

1. *$q_1\mathcal{K}q_2$ no es complementado en $q_1\mathcal{B}(\mathcal{H})q_2$.*

2. *$q_1\mathcal{K}_{ah}q_2$ no es complementado en $q_1\mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah}q_2$.*

Demostración. Supongamos primero que $q_1\mathcal{K}q_2$ es complementado en $q_1\mathcal{B}(\mathcal{H})q_2$. Entonces, se tiene una proyección acotada $E : q_1\mathcal{B}(\mathcal{H})q_2 \longrightarrow q_1\mathcal{K}q_2$. Sea v una isometría parcial en $\mathcal{H}$ tal que $v^*v = q_1$ y $vv^* = q_2$. Luego, se puede definir

$$\widetilde{E} : q_2\mathcal{B}(\mathcal{H})q_2 \longrightarrow q_2\mathcal{K}q_2$$

como $\widetilde{E} = L_v E L_v^*$. Notar que $\widetilde{E}$ es una proyección acotada, lo que es imposible por la observación hecha anteriormente.

Suponer ahora que $q_1\mathcal{K}_{ah}q_2$ es complementado en $q_1\mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah}q_2$. Entonces existiría una proyección acotada $E : q_1\mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah}q_2 \longrightarrow q_1\mathcal{K}_{ah}q_2$. Sea ahora

$$\widetilde{E} : q_1\mathcal{B}(\mathcal{H})q_2 \longrightarrow q_1\mathcal{K}q_2$$

dada por

$$\widetilde{E}(q_1Sq_2) = -iE(q_1 i\,\mathrm{Re}(S)q_2) + E(q_1 i\,\mathrm{Im}(S)q_2)$$

para $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces $\widetilde{E}$ es una proyección acotada, lo cual no es posible por la primera parte de este lema.

$\square$

En el siguiente resultado agrupamos las propiedades de $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ antes demostradas y damos una caracterización completa de la estructura de subvariedad.

Teorema 3.3.7 *Sea P el operador de compresión asociado a la familia $\{p_i\}_1^w$ $(1 \leq w \leq \infty)$. Entonces $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ es una cuasi subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.*

Más aún, $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ si y sólo si $w < \infty$ y hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$.

Demostración. Las Proposiciones 3.3.2 y 3.3.5 garantizan que $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ es una cuasi subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Ahora supongamos que $w < \infty$ y que hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$. La misma demostración del Teorema 3.2.7 puede llevarse a cabo para mostrar que $(T\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P))_P$ es complementado en $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.

A continuación asumamos que $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. De acuerdo con la Proposición 1.4.1, hay una proyección lineal y acotada $E : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \longrightarrow (T\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P))_P$. Vamos a tener en cuenta dos casos: el primero es que haya dos proyecciones de rango infinito en la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$, y el segundo, que $w = \infty$.

Para el primer caso, sean $q_1 \in \{\, p_0, p_1, \dots, p_w \,\}$ y $q_2 \in \{\, p_1, \dots, p_w \,\} \setminus \{\, q_1 \,\}$ las dos proyecciones de rango infinito. Para el segundo caso, definir $q_1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}$ y

$q_2 = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}$. En cualquiera de las dos situaciones, definamos el siguiente mapa lineal y acotado

$$\widetilde{E} : q_1 \mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah} q_2 \longrightarrow q_1 \mathcal{K}_{ah} q_2,$$

dado por

$$\widetilde{E}(q_1 x q_2) = (L_{q_1} E)(\,[L_{q_1 x q_2 + q_2 x q_1}, P]\,)(q_2).$$

Afirmamos que $\widetilde{E}$ es una proyección sobre $q_1 \mathcal{K}_{ah} q_2$. Primeramente, notar que para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah}$ existe $z \in \mathcal{K}_{ah}$ tal que $E(\,[L_{q_1 x q_2 + q_2 x q_1}, P]\,) = [L_z, P]$.

En el caso en el que hay dos proyecciones de rango infinito, notar que

$$\widetilde{E}(q_1 x q_2) = q_1 \sum_{i=1}^{w} (z p_i - p_i z) q_2 p_i = q_1 (z q_2 - q_2 z) q_2 = q_1 z q_2.$$

Por otro lado, cuando $w = \infty$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(q_1 x q_2) &= q_1 \sum_{i=1}^{\infty} (z p_i - p_i z) q_2 p_i \\
&= q_1 \sum_{k=0}^{\infty} (z p_{2k+1} - p_{2k+1} z) p_{2k+1} \\
&= q_1 z \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1} \\
&= q_1 z q_2.
\end{aligned}$$

Esto prueba que en cualquier caso, la imagen de $\widetilde{E}$ está contenida en $p_1 \mathcal{K}_{ah} p_2$.

Además, como $E : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \longrightarrow (T\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P))_P$ es una proyección, para un x en $\mathcal{K}_{ah}$ se verifica que $E(\,[L_{q_1 x q_2 + q_2 x q_1}, P]\,) = [L_{q_1 x q_2 + q_2 x q_1}, P]$. Luego,

$$\widetilde{E}(q_1 x q_2) = q_1 (q_1 x q_2 + q_2 x q_1) q_2 = q_1 x q_2.$$

Por lo tanto, $\widetilde{E}$ es una proyección lineal continua sobre $q_1 \mathcal{K}_{ah} q_2$. Pero esto dice que $q_1 \mathcal{K}_{ah} q_2$ es complementado en $q_1 \mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah} q_2$, lo cual contradice el Lema 3.3.6.

$\square$

3.4 Órbita unitaria de un operador normal y compacto

En esta sección nos dedicaremos a estudiar la topología de las órbitas $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$-unitarias de un operador compacto y normal. Este estudio lo haremos aplicando los resultados obtenidos previamente sobre la topología de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$.

Sea a un operador compacto y normal. La pregunta de cuándo la órbita unitaria de a, i.e.

$$\mathcal{U}(a) = \{\, uau^* \,:\, u \in \mathcal{U} \,\},$$

tiene la propiedad de que la topología cociente coincide con la topología de la norma uniforme fue resuelta por L. A. Fialkow [Fia78]. Ambas topologías coinciden si y sólo si a tiene rango finito.

En esta sección, estudiaremos la misma pregunta, en este caso dirigida a la órbita $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$-unitaria de a, la cual está dada por

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(a) = \{\, uau^* \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,\}.$$

Mostraremos que la topología cociente coincide con la topología inducida por la norma del ideal $\mathcal{I}$ si y sólo si el operador compacto tiene rango finito.

Más allá de que órbita $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$-unitaria está, en general, incluída en la órbita unitaria usual (es decir $\mathcal{U}(a)$), ambas órbitas coinciden si a tiene rango finito (ver, [Lar06, Lemma 2.7]).

Recordar que para $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$,

$$uau^* = a + a(u^* - 1) + (u - 1)au^* \in a + \mathcal{I}.$$

Luego, podemos dotar a $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(a)$ con la topología dada por el espacio de Banach afín $a + \mathcal{I}$. Además de eso, si miramos a $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(a)$ desde el punto de vista de espacio homógeneo, lo podemos dotar de la topología cociente.

Si $\mathcal{I}$ es el ideal de los operadores traza, P. Boná [Bón04] probó que ambas topologías coinciden cuando a tiene rango finito. Este resultado fue extendido a cualquier ideal simétricamente normado por D. Beltiţă and T. Ratiu in [BR05, Theorem 5.10], donde además mostraron que las órbitas $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$-unitarias son espacios homógeneos débilmente Khäler. En esta sección vamos a probar el recíproco de este resultado, como así también, expondremos una nueva demostración a la implicación ya conocida en términos de los resultados sobre los operadores de compresión obtenidos previamente.

Este resultado está relacionado con diferentes trabajos de E. Andruchow, G. Larotonda y L. Recht [AL10, ALR10, Lar06] donde, sin la hipótesis de que a sea compacto, describieron una serie de condiciones equivalentes a la existencia de estructura de subvariedad de las órbitas $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$-unitarias (o las usuales), donde $\mathcal{I}$ es el ideal de los operadores de Hilbert-Schmidt o el ideal de los operadores compactos. En particular, establecieron condiciones suficientes para asegurar que ambas topologías coincidan. Una de estas condiciones establece que el espectro de a debe ser finito. Notar que en nuestro caso, como a es compacto, el espectro de a es finito si y sólo si a tiene rango finito, es decir, volvemos a encontrar la misma condición.

Observación 3.4.1 *La idea principal para relacionar órbitas unitarias de operadores de compresión con las órbitas $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$-unitarias de un operador compacto es la siguiente. Por el teorema espectral podemos reescribir al operador a, el cual es compacto y normal, como una serie que converge en norma uniforme, es decir,*

$$a = \sum_{i=1}^{w} \lambda_i p_i, \tag{3.6}$$

donde $1 \leq w \leq \infty$, λ_i son los autovalores no nulos y distintos de a y $\{\, p_i \,\}_1^w$ es una familia de proyecciones ortogonales mutuamente ortogonales de rango finito dadas por las proyecciones ortogonales sobre $\ker(a - \lambda_i)$. Luego, podemos considerar P el operador de compresión asociado con la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$.

Sea $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ tal que $ua = au$. Si consideramos la descomposicón espectral de a, vemos que u debe ser diagonal de bloques con respecto a la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$. Esto dice que el grupo de isotropía en a coincide con el grupo de isotropía en P, es decir,

$$\{\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,:\, ua = au \,\} = \{\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,:\, L_u P = P L_u \,\} = G.$$

Luego, se tiene que la topología cociente en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(a) \simeq \mathcal{U}_{\mathcal{I}}/G$ es igual a la topología cociente en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$.

Corolario 3.4.2 *Sean Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Sea a un operador compacto y normal. Entonces la topología cociente en $\mathcal{U}_\mathcal{I}(a)$ coincide con la topología heredada de $a + \mathcal{I}$ si y sólo si* $\operatorname{rank}(a) < \infty$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{rank}(a) < \infty$. Esto es equivalente a afirmar que $w < \infty$ en la descomposición espectral de a dada por la ecuación (3.6). Bajo esta suposición la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$ tiene una única proyección de rango infinito, a saber, $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^w p_i$. De hecho, notar que p_0 es la proyección ortogonal sobre $\ker(a)$. De acuerdo con la Proposición 3.2.6 cuando $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$, o la Proposición 3.3.5 cuando $\mathcal{I} = \mathcal{K}$, la topología cociente coincide con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ en $\mathcal{U}_\mathcal{I}(P)$.

Como la topología cociente en $\mathcal{U}_\mathcal{I}(a)$ es más fuerte que la topología heredada de $a + \mathcal{I}$, resta probar que cualquier sucesión $(u_n a u_n^*)_n$ en $\mathcal{U}_\mathcal{I}(a)$ que satisface $\|u_n a u_n^* - a\|_\mathcal{I} \to 0$ convergerá a a en la topología cociente. Con este propósito, observemos que

$$p_i(u_n a - a u_n)p_j = (\lambda_i - \lambda_j)p_i u_n p_j,$$

y entonces

$$\|p_i u_n p_j\|_\mathcal{I} \leq |\lambda_i - \lambda_j|^{-1}\|u_n a - a u_n\|_\mathcal{I} \to 0,$$

para todo $i, j \geq 0$ y $i \neq j$ (donde se define $\lambda_0 = 0$). Sea ahora $x \in \mathcal{I}$ tal que $\|x\|_\mathcal{I} = 1$. Como

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^w (u_n p_i - p_i u_n) x p_i\right\|_\mathcal{I} &\leq \sum_{i=1}^w \|u_n p_i - p_i u_n\|_\mathcal{I} \\ &\leq \sum_{i=1}^w \left(\|p_i u_n p_0\| + \|p_0 u_n p_i\| + \left\|\sum_{j=1}^w (p_j u_n p_i - p_i u_n p_j)\right\|\right) \\ &\leq 2\sum_{i\neq j} \|p_j u_n p_i\|_\mathcal{I},\end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned}\|L_{u_n} P L_{u_n^*} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} &= \|L_{u_n} P - P L_{u_n}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} \\ &\leq 2\sum_{i\neq j} \|p_j u_n p_i\|_\mathcal{I} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Por las observaciones en el primer párrafo de esta demostración y la Observación 3.4.1, lo último es equivalente a decir que $u_n a u_n^* \to a$ en la topología cociente.

Con el fin de probar el recíproco, asumamos que la topología cociente en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(a)$ coincide con la topología heredada de $a+\mathcal{I}$. Necesitaremos considerar dos casos.

En el primer caso suponer que $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$. Sea $\mathcal{M}$ el suplemento del álgebra de Lie de G definida en la Proposición 3.1.4. Si $\operatorname{rank}(a)=\infty$, podemos construir una sucesión $(z_k)_k$ en $\mathcal{M}$ tal que $\|z_k\| \to 0$ y $\|z_k\|_{\mathcal{I}} = 1$ (ver Lema 3.2.5).

Dado $\epsilon > 0$, sea $M \geq 1$ tal que $\| \sum_{i=M+1}^{w} \lambda_i p_i \| \leq \epsilon$. Entonces se sigue que

$$\begin{aligned}
\|e^{z_k} a e^{-z_k} - a\|_{\mathcal{I}} = \|(e^{z_k}-1)a - a(e^{z_k}-1)\|_{\mathcal{I}} \;&\leq\; 2\|e^{-z_k}-1\|\|a\|_{\mathcal{I}} \\
&\leq 2\|e^{-z_k}-1\|_{\mathcal{I}} \left(\left\| \sum_{i=1}^{M} \lambda_i p_i \right\|_{\mathcal{I}} + \left\| \sum_{i=M+1}^{w} \lambda_i p_i \right\| \right) \\
&\leq 2\left(\|e^{z_k}-1\| \left\| \sum_{i=1}^{M} \lambda_i p_i \right\|_{\mathcal{I}} + \|e^{z_k}-1\|_{\mathcal{I}} \left\| \sum_{i=M+1}^{w} \lambda_i p_i \right\| \right) \\
&\leq 2\left(\|e^{z_k}-1\| \left\| \sum_{i=1}^{M} \lambda_i p_i \right\|_{\mathcal{I}} + e\,\epsilon \right).
\end{aligned}$$

Si hacemos que $k \to \infty$, vemos que $e^{z_k} a e^{-z_k} \to a$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, o equivalentemente, en la topología cociente. Por el mismo argumento usado en el principio del Lema 3.2.6 se llega a que $\|z_k\|_{\mathcal{I}} \to 0$, una contradicción con nuestra elección de $(z_k)_k$.

Considerar ahora el caso en que $\mathcal{I} = \mathcal{K}$. Bajo la suposición que ambas topologías coinciden en $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(a)$ afirmamos que el mapa

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(a) & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P) \\
uau^* & \longmapsto & L_u P L_{u^*}
\end{array}$$

es continuo, cuando uno dota $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(a)$ con la topología heredada de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$ con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. De hecho, por la Proposición 3.3.5 la topología cociente y la topología heredada siempre coinciden en $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(P)$. Entonces el mapa Λ resulta ser el mapa identidad de $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}/G$, y por lo tanto, se llega a nuestra afirmación.

Supongamos nuevamente que $\operatorname{rank}(a)=\infty$. Bajo este supuesto, vamos a llegar a una contradicción con el hecho que Λ es continua. Observemos que debe haber un número infinito de proyecciones de rango finito en la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$ y los autovalores de a satisfacen $\lambda_i \to 0$. Sea $(\xi_{i,j(i)})$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ tal que $(\xi_{i,j(i)})_{j(i)=1,\ldots,\operatorname{rank}(p_i)}$ es una base $\mathrm{R}(p_i)$ para todo $i \geq 1$. Consideremos la siguiente sucesión de operadores unitarios:

$$u_n = \xi_{n+2,1} \otimes \xi_{n+1,1} + \xi_{n+1,1} \otimes \xi_{n+2,1} + e_n,$$

donde e_n es una proyección ortogonal sobre $\{\, \xi_{n+1,1}\,,\, \xi_{n+2,1}\,\}^{\perp}$. Como $u_n - 1$ tiene rango finito, $u_n \in \mathcal{U}_{\mathcal{K}}$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n a u_n^* - a\| &= \|u_n a - a u_n\| \\ &= \|(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2})\,(\xi_{n+2,1} \otimes \xi_{n+1,1}) + (\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})(\xi_{n+1,1} \otimes \xi_{n+2,1}\,)\| \\ &\leq 2|\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}| \to 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, notar que

$$\begin{aligned} \|L_{u_n} P L_{u_n^*} - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K})} &\geq \|(L_{u_n} P L_{u_n^*} - P)(\xi_{n+1,1} \otimes \xi_{n+1,1})\| \\ &= \|u_n p_{n+1} u_n^*(\xi_{n+1,1} \otimes \xi_{n+1,1}) - \xi_{n+1,1} \otimes \xi_{n+1,1}\| \\ &= \|\xi_{n+1,1} \otimes \xi_{n+1,1}\| = 1, \end{aligned}$$

aquí hemos usado que

$$u_n p_{n+1} u_n^*(\xi_{n+1,1} \otimes \xi_{n+1,1}) = 0.$$

Pero esto contradice la continuidad de Λ. Luego a tiene que tener rango finito, y el teorema queda demostrado.

□

3.5 Revestimiento

Para $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, consideremos el automorfismo interno definido por:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{Ad_u} & \mathcal{I} \\ x & \longmapsto & uxu^* \end{array}$$

Dado un operador de compresión P asociado con la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$, hay otra órbita de P definida por

$$\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(P) := \{\, Ad_u P Ad_{u^*} \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,\}.$$

Notar que todos los operadores en $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(P)$ son operadores de compresión, mientras que P es el único operador de compresión en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$. El grupo de isotropía de la acción co-adjunta está dado por

$$H = \{\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} \,:\, Ad_u P Ad_{u^*} = P \,\}. \tag{3.7}$$

Con el fin de encontrar una caracterización de los elementos de H, probaremos el siguiente lema.

Lema 3.5.1 *Sea P el operador de compresión asociado con la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$ y Q el operador de compresión asociado con otra familia $\{\, q_i \,\}_1^v$. Entonces $P = Q$ si y sólo si $w = v$ y $p_i = q_{\sigma(i)}$ para alguna permutación σ de $\{\, 0, \ldots, w\}$ tal que $\sigma(0) = 0$.*

Demostración. Supongamos primero que $P = Q$. Esto es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{w} p_i x p_i = \sum_{j=1}^{v} q_j x q_j, \tag{3.8}$$

para todo $x \in \mathcal{I}$. Si $\operatorname{rank}(p_i) < \infty$, $i \geq 1$, tomemos $x = p_i$ para obtener $\sum_{j=1}^{v} q_j p_i q_j = p_i$. Entonces se sigue que $q_j p_i = q_j p_i q_j = p_i q_j$ para todo $j \geq 1$. Si $\operatorname{rank}(p_i) = \infty$, usaremos la misma idea con una sucesión de proyecciones $(e_n)_n$ tales que $e_n \leq p_i$, $e_n \nearrow p_i$, para encontrar que $q_j e_n = e_n q_j$, lo que implica que $q_j p_i = p_i q_j$. Como $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^{w} p_i$ y $q_0 = 1 - \sum_{i=1}^{v} q_j$, se puede concluir que $q_j p_i = p_i q_j$ para todo $i, j \geq 0$.

Ahora afirmamos que para cada $i \geq 0$, podemos encontrar una única $\sigma(i)$ tal que $p_i = q_{\sigma(i)}$. Con este fin, sea $\xi \in \mathrm{R}(p_i)$, $\xi \neq 0$. Observemos que $p_i \xi = \xi = \sum_{j=0}^{v} q_j \xi$. Esto implica que hay algún $j := \sigma(i)$ tal que $q_j \xi \neq 0$. Entonces $q_j \xi = q_j p_i \xi = p_i q_j \xi$. Ahora consideremos $\eta \in \mathrm{R}(p_i)$ y reemplacemos $x = \eta \otimes q_j \xi$ en la ecuación (3.8). En el caso $i > 0$ se tiene que $\eta \otimes q_j \xi = (q_j \eta) \otimes q_j \xi$. Si $j = 0$, entonces $\eta \otimes q_j \xi = 0$. En particular, si tomamos $\eta = q_j \xi \neq 0$, llegamos a una contradicción. Luego, debe ser $j > 0$, con lo que la ecuación $\eta \otimes q_j \xi = (q_j \eta) \otimes q_j \xi$ implica que $q_j \eta = \eta$. Como η es arbitrario, se tiene que $\mathrm{R}(p_i) \subseteq \mathrm{R}(q_j)$. De una manera similar, podemos elegir $\eta \in \mathrm{R}(p_j)$ para obtener $\mathrm{R}(q_j) \subseteq \mathrm{R}(p_i)$. Luego $p_i = q_j$.

En el caso $i = 0$, necesitamos probar que $p_0 = q_0$. Supongamos que existe algún $j > 0$ tal que $q_j \xi \neq 0$. Por el párrafo anterior, sabemos que $q_j \xi \in \mathrm{R}(p_0)$. Entonces reemplazando $x = (q_j\xi) \otimes q_j\xi$ en la ecuación (3.8) se tiene que $0 = (q_j\xi) \otimes q_j\xi$, y luego $q_j\xi = 0$, lo que es una contradicción. Luego obtenemos que $\xi = \sum_{j=0}^{v} q_j\xi = q_0\xi$, y consecuentemente, $\mathrm{R}(p_0) \subseteq \mathrm{R}(q_0)$. Intercambiando p_0 y q_0, concluímos que $p_0 = q_0$. Como$\{\, q_j \,\}_0^v$ es una famillia mutuamente ortogonal, $\sigma(i)$ es única y la afirmación está probada.

En otras palabras, se probó la existencia de un mapa $\sigma : \{\, 0, \ldots, w\} \to \{\, 0, \ldots, v\}$ que satisface $p_i = q_{\sigma(i)}$ y $\sigma(0) = 0$. Repitiendo el argumento anterior con q_j en lugar de p_i, podemos construir otro mapa $\psi : \{\, 0, \ldots, v\} \to \{\, 0, \ldots, w\}$ tal que $q_j = p_{\psi(j)}$ y $\psi(0) = 0$. Pero $p_i = q_{\sigma(i)} = p_{(\psi\sigma)(i)}$ y $q_j = p_{\psi(j)} = q_{(\sigma\psi)(j)}$, luego se tiene que $\sigma\psi = \psi\sigma = 1$. Por lo tanto, σ es una permutación y $w = v$.

Con el fin de probar el recíproco, consideremos P el operador de compresión asociado a la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$, Q el operador de compresión asociado a $\{\, p_{\sigma(i)} \,\}_1^w$ y σ una permutación de $\{\, 0, \ldots, w \,\}$. Como el caso $w < \infty$ es trivial, consideremos $w = \infty$. Definamos $e_k = \sum_{i=0}^{k} p_i$. Para cada $x \in \mathcal{I}$, al ser x compacto, se tiene que $\|(1 - e_k)x\| \to 0$. Observemos que para $k \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{\sigma(i)} e_k x p_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{k} p_i x p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e_k x p_i.$$

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{\infty} p_{\sigma(i)} x p_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{\infty} p_i x p_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} p_{\sigma(i)}(1 - e_k) x p_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{\infty} p_i (1 - e_k) x p_i \right\| \\ &\leq 2\|(1 - e_k)x\| \to 0,\end{aligned}$$

hecho que prueba que $P = Q$.

□

Sea P el operador de compresión asociado a la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$. Sea F el conjunto de todas las permutaciones σ de $\{\, 0, \ldots, w \,\}$ tal que $\sigma(i) = i$ para todo salvo para finitos $i \geq 0$. Notar que esta última restricción en la definición del conjunto F es innecesaria si $w < \infty$. Consideremos permutaciones de un número finito de bloques de dimensión finita que fijen al cero, es decir,:

$$\mathcal{F} := \{\, \sigma \in F \;:\; \sigma(0) = 0,\, \mathrm{rank}(p_i) = \mathrm{rank}(p_{\sigma(i)}) < \infty \text{ if } \sigma(i) \neq i \,\}.$$

Sea $(\xi_{i,j(i)})$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ tal que $(\xi_{i,j(i)})_{j(i)=1,\ldots,\mathrm{rank}(p_i)}$ es una base de $\mathrm{R}(p_i)$, donde $i = 0, \ldots, w$. Para cada $\sigma \in \mathcal{F}$, definamos:

$$r_\sigma(\xi_{i,j(i)}) := \xi_{\sigma(i),j(\sigma(i))}, \quad i = 0, \ldots, w,\ j(i) = 1, \ldots, \mathrm{rank}(p_i).$$

Notar que $\mathrm{rank}(r_\sigma - 1) < \infty$, ya que $\sigma \in \mathcal{F}$. Luego, se sigue que $r_\sigma \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$ para cualquier ideal $\mathcal{I}$ simétricamente normado.

Ejemplo 3.5.2 Un ejemplo simple lo tenemos cuando $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $\mathrm{rank}(p_i) = 1$ y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. El conjunto de todas las matrices de la forma r_σ, $\sigma \in \mathcal{F}$, se reduce a todas las matrices de permutación. De acuerdo con el siguiente resultado, H tiene exactamente $n!$ componentes conexas.

Recordemos que por la demostración de la Proposición 3.1.4 sabemos que el grupo de isotropía G en P correspondiente a la acción dada por la representación a izquierda, puede ser caracterizado como operadores unitarios que son diagonales de bloques, es decir,

$$G = \left\{ u \in \mathcal{U}_\mathcal{I} \,:\, \sum_{i=0}^{w} p_i u p_i = u \right\},$$

donde P es el operador de compresión asociado a la familia $\{ p_i \}_1^w$.

Lema 3.5.3 *Sea H el grupo de isotropía definido en (3.7). Entonces,*

$$H = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{F}} r_\sigma G,$$

donde cada conjunto en la unión es una componente conexa de H.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$ tal que $Ad_u P Ad_{u^*} = P$. De acuerdo con el Lema 3.5.1 se tiene que $up_iu^* = p_{\sigma(i)}$ para alguna σ permutación de $\{ 0, \ldots, w \}$ tal que $\sigma(0) = 0$. En particular, observemos que $p_j u p_i = \delta_{j,\sigma(i)}\, p_{\sigma(i)} u$, lo que dice que u tiene sólo un bloque no nulo en cada fila. Como $u - 1 \in \mathcal{I}$, se tiene que $\sigma \in \mathcal{F}$. Luego, podemos escribir $u = r_\sigma r_{\sigma^{-1}} u$, donde $r_{\sigma^{-1}} u \in G$.

Para probar la otra inclusión, notemos que $r_\sigma u p_i u^* r_{\sigma^{-1}} = r_\sigma p_i r_{\sigma^{-1}} = p_{\sigma(i)}$ para cualquier $u \in G$. Ahora, aplicando nuevamente el Lema 3.5.1 obtenemos que $Ad_u P Ad_{u^*} = P$.

Con el fin de establecer la última afirmación sobre las componentes conexas de H, observemos que

$$\|r_\sigma u - r_{\sigma'} v\|_{\mathcal{I}} \geq \|r_\sigma u - r_{\sigma'} v\| \geq 1,$$

siempre que $\sigma \neq \sigma'$ y $u, v \in G$. Esto implica que la distancia entre cualquier par de conjuntos que aparecen en la unión es mayor o igual que uno. Por otro lado, se sabe que $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ es conexo, entonces también lo es $r_\sigma G$. Con esto, el lema queda probado.

$\square$

Observación 3.5.4 *Una consecuencia del Lema 3.5.3, es que H es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$. De hecho, las componentes conexas de H son difeomorfas al subgrupo de Lie-Banach G de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$.*

Luego, se sigue que $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(P) \simeq \mathcal{U}_{\mathcal{I}}/H$ tiene estructura de variedad dotada con la topología cociente.

Teorema 3.5.5 *Sean Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Sea P el operador de compresión asociado a la familia $\{p_i\}_1^w$. Si $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$ asumiremos también que $w < \infty$ y que hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$. Entonces el mapa*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) & \stackrel{\Pi}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_{\mathcal{I}}(P) \\ L_u P L_{u^*} & \longmapsto & Ad_u P Ad_{u^*} \end{array}$$

es un revestimiento, cuando $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es considerado con la topología heredada de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(P)$ con la topología cociente.

Demostración. En el caso en que $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$, bajo las hipótesis sobre la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$, en el Lema 3.2.6 probamos que la topología cociente coincide con la topología del subespacio en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$. En el caso en que $\mathcal{I} = \mathcal{K}$ ambas topologías coinciden sin hipótesis adicionales por la Proposición 3.3.5. Por otro lado, por el Lema 3.5.3 el cociente H/G es discreto, entonces H/G es homeomorfo a $\mathcal{F}$. Definamos la acción de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ dada por $\sigma \cdot L_u P L_{u^*} = L_{ur_\sigma} P L_{r_{\sigma^{-1}} u^*}$.

Podemos hacer las siguientes identificaciones:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)/\mathcal{F} \simeq \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)/(H/G) \simeq (\mathcal{U}_{\mathcal{I}}/G)/(H/G) \simeq \mathcal{U}_{\mathcal{I}}/H \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{I}}(P).$$

Debido a esto podemos pensar en Π como el mapa cociente $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)/\mathcal{F}$. Luego, para probar que Π es un revestimiento, alcanza con probar que $\mathcal{F}$ actua de manera propiamente discontinua en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ (ver [Gre67]). Esto significa que para cualquier $Q \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$, hay un entorno abierto $\mathcal{W}$ de Q tal que $\mathcal{W} \cap \sigma \cdot \mathcal{W} = \emptyset$ para todo $\sigma \neq 1$. Claramente, no hay pérdida de generalidad si probamos este hecho para $Q = P$. Con este propósito, definamos el entorno abierto como

$$\mathcal{W} := \{\, Q \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P) \,:\, \|Q - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} < 1/2 \,\}.$$

Supongamos que $\mathcal{W} \cap \sigma \cdot \mathcal{W} \neq \emptyset$ para algún $\sigma \neq 1$. Entonces existen $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{W}$ tales que $\tilde{Q} = \sigma \cdot Q$. Si $Q = L_u P L_{u^*}$, tenemos que $\tilde{Q} = L_{ur_\sigma} P L_{r_{\sigma^{-1}} u^*}$. Podemos estimar la distancia entre Q y $\tilde{Q}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|Q - \tilde{Q}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} &= \|P - L_{r_\sigma} P L_{r_{\sigma^{-1}}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} \\ &\geq \left\| \sum_{j=1}^{w} (p_j - p_{\sigma(j)})(\xi \otimes \xi) p_j \right\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|(p_i - p_{\sigma(i)})(\xi \otimes \xi) p_i\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|\xi \otimes \xi\|_{\mathcal{I}} = 1, \end{aligned}$$

donde $\xi \in \mathrm{R}(p_i)$ es tal que $\|\xi\| = 1$ y $\sigma(i) \neq i$ con lo que $p_{\sigma(i)}(\xi) = 0$. Pero como $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{W}$, tenemos que $\|Q - \tilde{Q}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{I})} < 1$, lo cual es una contradicción. Luego la acción es propiamente discontinua, con lo que la demostración está completa.

□

3.6 Una métrica de Finsler completa

En esta sección obtendremos resultados sobre la métrica de Finsler cociente. Estos resultados son similares a los obtenidos en la sección 2.5 y sus demostraciones pueden desarrollarse de manera similar a los de dicha sección.

Comencemos dando definiciones análogas a las dadas en el caso de $\mathcal{O}_A$, adaptadas a $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$.

Dada una curva $\Gamma(t)$, $t \in [0,1]$, C^1 a trozos en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, podemos medir su longitud usando la norma del ideal simétricamente normado, es decir,

$$L_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(\Gamma) = \int_0^1 \|\dot{\Gamma}(t)\|_{\mathcal{I}}\, dt.$$

Como el espacio tangente de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ en u puede ser identificado con $u\mathcal{I}_{ah}$ (o también con $\mathcal{I}_{ah}u$), la longitud antes enunciada está bien definida.

Existe una distancia rectificable en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ definida de manera estandard, a saber

$$d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(u_0, u_1) = \text{ínf}\left\{L_{\mathcal{I}}(\Gamma) : \ \Gamma \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{I}},\ \Gamma(0) = u_0,\ \Gamma(1) = u_1\right\}.$$

Sea P el operador de compresión asociado a la familia $\{\, p_i \,\}_1^w$. Como $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ es un espacio homogéneo, es natural dotar de la métrica cociente a los espacios tangentes. Si $Q = L_u P L_{u^*}$ para algún $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, entonces para $[L_z, Q] \in (T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_Q$ se define

$$\|\, [L_z, Q] \,\|_Q = \text{ínf}\{\, \|z + y\|_{\mathcal{I}} \ : \ y \in \mathcal{I}_{ah},\ Ad_u P Ad_{u^*}(y) = y \,\}.$$

De hecho, la norma en $(T\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P))_Q$ es la norma de Banach cociente de $\mathcal{I}_{ah}$ por el álgebra de Lie del grupo de isotropía en Q. Es fácil ver que esta métrica es invariante bajo la acción. Esta métrica de Finsler cociente ha sido introducida en varios espacios homógeneos, ver por ejemplo [AL10, ALR10] donde son desarrolladas algunas de las características de esta métrica.

La métrica de Finsler cociente en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ permite introducir otro funcional de longitud, a saber

$$L_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma},$$

donde $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, es una curva continua y C^1 a trozos en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$. Luego hay una distancia rectificable asociada dada por

$$d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}(Q_0, Q_1) = \text{ínf}\{\, L_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}(\gamma) \ : \ \gamma \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P),\ \gamma(0) = Q_0,\ \gamma(1) = Q_1 \,\},$$

donde las curvas γ consideradas son continuas y C^1 a trozos.

El siguiente resultado prueba que la distancia rectificable en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ puede ser aproximada levantando curvas a $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$. Omitiremos su demostración ya que con ligeras modificaciones y adaptaciones, se sigue como en el Lema 2.5.1.

Lema 3.6.1 *Sea $Q_0, Q_1 \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$. Bajo las hipótesis del Teorema 3.5.5,*

$$d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}(Q_0, Q_1) = \text{ínf}\left\{L_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(\Gamma) :\ \Gamma \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{I}},\ L_{\Gamma(0)} Q_0 L_{\Gamma(0)^*} = Q_0,\ L_{\Gamma(1)} Q_0 L_{\Gamma(1)^*} = Q_1\right\},$$

donde las curvas Γ consideradas son continuas y C^1 a trozos.

De la misma manera que se hizo en el Teorema 2.5.3, vamos a caracterizar la distancia rectificable como la distancia cociente de grupos. De esta caracterización vamos a deducir la completitud de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)$ con la distancia rectificable. Nuevamente utilizaremos el Lema de Takesaki (lema 2.5.2), en este caso considerando $H = \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ y G el grupo de isotropía en P.

Teorema 3.6.2 *Sean Φ una función gauge simétrica e $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\Phi$. Sea P el operador de compresión asociado con la familia $\{p_i\}_1^w$. Si $\mathcal{I} \neq \mathcal{K}$ asumir además que $w < \infty$ y que hay sólo una proyección de rango infinito en la familia $\{\, p_i \,\}_0^w$. Sean $u, v \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, y*

$$\dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}) = \text{ínf}\left\{d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(uv_1, vv_2) :\ v_1, v_2 \in G\right\}.$$

Entonces, $\dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}} = d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}$. En particular, $(\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P),\ d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)})$ es un espacio métrico completo y $d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}$ metriza la topología cociente.

Demostración. Recordemos que $(\mathcal{U}_{\mathcal{I}}, d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}})$ es un espacio métrico completo y G es $d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}$-cerrado en $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ (ver por ejemplo [Chi10, Lemma 2.4]). Luego, la distancia cociente $\dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}$ está bien definida. Más aún, como la multiplicación por unitarios es isométrica, puede ser calculada como

$$\dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}) = \text{ínf}\left\{d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(u, vv_1) :\ v_1 \in G\right\}.$$

Para probar que $\dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}} \leq d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}$, fijar $\epsilon > 0$. Por el Lema 3.6.1 existe una curva $\Gamma \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ que satisface

1. $\Gamma(0) = u$, $\Gamma(1) = vv_1$, with $v_1 \in G$,
2. $L_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(\Gamma) < d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}\left(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}\right) + \epsilon$.

Entonces se tiene

$$\dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}) \leq d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}\left(u, vv_1\right) \leq L_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}\left(\Gamma\right) < d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}\left(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}\right) + \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, se probó la desigualdad deseada. Para probar la otra, notar que dado $\epsilon > 0$, existe $v_1 \in G$ tal que

$$d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(u, vv_1) < \dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}) + \epsilon$$

Entonces existe una curva $\Gamma \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ tal que $\Gamma(0) = u$, $\Gamma(1) = vv_1$ y $L_{\mathcal{I}}\left(\Gamma\right) < d_{\mathcal{I}}\left(u, vv_1\right) + \epsilon$. Luego, se tiene que

$$d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}) \leq L_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}\left(\Gamma\right) < d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}\left(u, vv_1\right) + \epsilon < \dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}}\left(L_u P L_{u^*}, L_v P L_{v^*}\right) + 2\epsilon.$$

Con lo que $\dot{d}_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}} = d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}$. La completitud de $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{I}}\left(P\right),\ d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}\right)$ y el hecho que $d_{\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(P)}$ defina la topología cociente, se siguen del Lema 2.5.2.

$\square$

Bibliografía

[AL08] Esteban Andruchow y Gabriel Larotonda. Hopf-Rinow theorem in the Sato Grassmannian. *J. Funct. Anal.*, 255(7):1692–1712, 2008.

[AL10] Esteban Andruchow y Gabriel Larotonda. The rectifiable distance in the unitary Fredholm group. *Studia Math.*, 196(2):151–178, 2010.

[ALR10] Esteban Andruchow, Gabriel Larotonda, y Lázaro Recht. Finsler geometry and actions of the p-Schatten unitary groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(1):319–344, 2010.

[AS91] E. Andruchow y D. Stojanoff. Geometry of unitary orbits. *J. Operator Theory*, 26(1):25–41, 1991.

[AS94] Esteban Andruchow y Demetrio Stojanoff. Geometry of conditional expectations and finite index. *Internat. J. Math.*, 5(2):169–178, 1994.

[Bel06] Daniel Beltiţă. *Smooth homogeneous structures in operator theory*, volume 137 of *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[Bha00] Rajendra Bhatia. Pinching, trimming, truncating, and averaging of matrices. *Amer. Math. Monthly*, 107(7):602–608, 2000.

[Bón04] Pavel Bóna. Some considerations on topologies of infinite dimensional unitary coadjoint orbits. *J. Geom. Phys.*, 51(2):256–268, 2004.

[Bou67] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIII. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (Paragraphes 1 à*

7). Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1333. Hermann, Paris, 1967.

[BR05] D. Beltiţă y T. S. Ratiu. Symplectic leaves in real Banach Lie-Poisson spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 15(4):753–779, 2005.

[BRT07] Daniel Beltiţă, Tudor S. Ratiu, y Alice Barbara Tumpach. The restricted Grassmannian, Banach Lie-Poisson spaces, and coadjoint orbits. *J. Funct. Anal.*, 247(1):138–168, 2007.

[Cal41] J. W. Calkin. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. *Ann. of Math. (2)*, 42:839–873, 1941.

[Car85] A. L. Carey. Some homogeneous spaces and representations of the Hilbert Lie group $U_2(\mathcal{H})$. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 30(7):505–520, 1985.

[CD13] E. Chiumiento y M. E. Di Iorio y Lucero. Geometry of unitary orbits of pinching operators. *J. Math. Anal. Appl.*, En Prensa, 2013.

[Chi10] Eduardo Chiumiento. Metric geometry in infinite dimensional Stiefel manifolds. *Differential Geom. Appl.*, 28(4):469–479, 2010.

[Con72] John B. Conway. The compact operators are not complemented in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 32:549–550, 1972.

[Con90] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[CPR90] Gustavo Corach, Horacio Porta, y Lázaro Recht. Differential geometry of systems of projections in Banach algebras. *Pacific J. Math.*, 143(2):209–228, 1990.

[CPR93a] Gustavo Corach, Horacio Porta, y Lázaro Recht. Geodesics and operator means in the space of positive operators. *Internat. J. Math.*, 4(2):193–202, 1993.

[CPR93b] Gustavo Corach, Horacio Porta, y Lázaro Recht. The geometry of spaces of projections in C^*-algebras. *Adv. Math.*, 101(1):59–77, 1993.

[Dav58] Chandler Davis. Compressions to finite-dimensional subspaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:356–359, 1958.

[Dav59] Chandler Davis. Various averaging operations onto subalgebras. *Illinois J. Math.*, 3:538–553, 1959.

[Di 13] M. E. Di Iorio y Lucero. Geometry of the left action of the p-Schatten groups. *Banach J. Math. Anal*, 7(1):73–87, 2013.

[Die69] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis.* Academic Press, New York, 1969. Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.

[dlH72] Pierre de la Harpe. *Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 285. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[DMLR04] Carlos E. Durán, Luis E. Mata-Lorenzo, y Lázaro Recht. Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^*-algebra. I. Minimal curves. *Adv. Math.*, 184(2):342–366, 2004.

[Fia78] Lawrence A. Fialkow. A note on unitary cross sections for operators. *Canad. J. Math.*, 30(6):1215–1227, 1978.

[Gal06] José E. Galé. Geometry of orbits of representations of amenable groups and algebras. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Quím. Nat. Zaragoza (2)*, 61:7–46, 2006.

[GK69] I. C. Gohberg y M. G. Kreĭn. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[Gre67] Marvin J. Greenberg. *Lectures on algebraic topology.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[Gro77] C. W. Groetsch. *Generalized inverses of linear operators: representation and approximation.* Marcel Dekker Inc., New York, 1977. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, No. 37.

[Kat66] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[KN96] Shoshichi Kobayashi y Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Lan95] Serge Lang. *Differential and Riemannian manifolds*, volume 160 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1995.

[Lar06] Gabriel Larotonda. Unitary orbits in a full matrix algebra. *Integral Equations Operator Theory*, 54(4):511–523, 2006.

[MLR92] Luis E. Mata-Lorenzo y Lázaro Recht. Infinite-dimensional homogeneous reductive spaces. *Acta Cient. Venezolana*, 43(2):76–90, 1992.

[Mos55] G. D. Mostow. Some new decomposition theorems for semi-simple groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1955(14):31–54, 1955.

[Nee04] Karl-Hermann Neeb. Infinite-dimensional groups and their representations. In *Lie theory*, volume 228 of *Progr. Math.*, pages 213–328. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[OR03] Anatol Odzijewicz y Tudor S. Ratiu. Banach Lie-Poisson spaces and reduction. *Comm. Math. Phys.*, 243(1):1–54, 2003.

[Pen55] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51:406–413, 1955.

[PR87a] Horacio Porta y Lázaro Recht. Minimality of geodesics in Grassmann manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(3):464–466, 1987.

[PR87b] Horacio Porta y Lázaro Recht. Spaces of projections in a Banach algebra. *Acta Cient. Venezolana*, 38(4):408–426 (1988), 1987.

[PS86] Andrew Pressley y Graeme Segal. *Loop groups*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Science Publications.

[Rae77] Iain Raeburn. The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space. *J. Functional Analysis*, 25(4):366–390, 1977.

[Sha97] R. W. Sharpe. *Differential geometry*, volume 166 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program, With a foreword by S. S. Chern.

[Sim79] Barry Simon. *Trace ideals and their applications*, volume 35 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[Tak03] M. Takesaki. *Theory of operator algebras. III*, volume 127 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 8.

[Upm85] Harald Upmeier. *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras*, volume 104 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 96.

[vN55] John von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1955. Translated by Robert T. Beyer.

[Whi66] Robert Whitley. Mathematical Notes: Projecting m onto c_0. *Amer. Math. Monthly*, 73(3):285–286, 1966.