UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebras de Weyl generalizadas en el caso cuántico: isomorfismos y cohomología

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Quimey Vivas

Director de tesis: Mariano Suárez-Álvarez
Consejero de estudios: Andrea Solotar

Buenos Aires, 2012

Álgebras de Weyl generalizadas en el caso cuántico: isomorfismos y cohomología

Resumen

En este trabajo calculamos el grupo de automorfismos de las álgebras de Weyl generalizadas definidas sobre $\mathbb{k}[h]$, $\mathbb{k}[h_1, h_2]$ y $\mathbb{k}[h^{\pm 1}]$ y las clasificamos salvo isomorfismo. Para aquellas definidas sobre $\mathbb{k}[h]$ también calculamos su homología y cohomología de Hochschild, estudiamos la estructura multiplicativa de la cohomología y describimos algunas de sus deformaciones.

Palabras clave: álgebras de Weyl generalizadas, derivaciones, automorfismos, isomorfismos, cohomología de Hochschild, producto cup.

Generalized Weyl Algebras in the Quantum Case: Isomorphisms and Cohomology

Abstract

In this work, we compute the automophism group of quantum generalized Weyl algebras defined over $\Bbbk[h]$, $\Bbbk[h_1, h_2]$ and $\Bbbk[h^{\pm 1}]$ and we classify them up to isomorphism. For those defined over $\Bbbk[h]$, we also compute their Hochschild homology and cohomology, we study the multiplicative structure of the cohomology and we describe some of their deformations.

Keywords: generalized Weyl algebras, derivations, automorphisms, isomorphisms, Hochschild cohomology, cup product.

Agradecimientos

A Xime porque es la persona más importante en mi vida.

A mi familia porque siempre me apoyaron en lo que intenté.

A Mariano por compartir conmigo toda su sabiduria y por las infinitas horas que pasamos juntos preparando esta tesis.

A Andrea Solotar porque me mostró por dónde empieza el camino que estoy recorriendo y siempre estuvo ahí cuando la necesité.

A todos mis amigos porque siempre me acompañaron ya sea para charlar un poco o para jugar a las cartas en los ratos libres.

A Marco Farinati, Leandro Cagliero y Vyacheslav Futorny por aceptar ser jurados de esta tesis.

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar las álgebras de Weyl generalizadas desde un punto de vista homológico. Estas álgebras se construyen a partir de una $\Bbbk$-álgebra D, un automorfismo $\sigma : D \to D$ y un elemento central $a \in \mathcal{Z}(D)$. Están generadas por D y dos variables x e y sujetas a las relaciones

$$dy = y\sigma(d), \quad xd = \sigma(d)x, \quad yx = a, \quad xy = \sigma(a), \quad \text{para } d \in D.$$

Las álgebras de Weyl generalizadas fueron introducidas por Bavula en el contexto de álgebras de operadores diferenciales y fueron estudiadas, desde el punto de vista de la teoría de anillos y de la teoría de representaciones, por él, algunos colaboradores y otros autores en una serie de trabajos. Por ejemplo [Bav96, Bav92, Bav96, BB00, BJ01, DGO96, Jor95].

Muchos ejemplos interesantes se obtienen en el caso que $D = \Bbbk[h]$, entre ellos el álgebra de Weyl usual, una de sus versiones cuánticas y el plano cuántico. En este caso es posible separar las álgebras de Weyl generalizadas en 3 familias: las conmutativas, las clásicas y las cuánticas. En este trabajo nos vamos a centrar en las cuánticas.

En el Capítulo 1 empezamos describiendo con más detalle a las álgebras de Weyl generalizadas, dando algunos ejemplos y recordando algunos resultados del trabajo de Bavula relacionados con la dimensión global de estas álgebras.

En el Capítulo 2 describimos las derivaciones de las álgebras de Weyl generalizadas para D un álgebra de polinomios en una o dos variables y para D un álgebra de polinomios de Laurent. La descripción de las derivaciones, particularmente de aquellas localmente finitas, nos permite describir el grupo de automorfismos y determinar cuándo dos de estas álgebras son isomorfas. Los contenidos de este capítulo aparecen en el nuestro artículo [SAV] y continúan los trabajos de Bavula-Jordan [BJ01] y Richard-Solotar [RS06].

En el Capítulo 3 calculamos la homología y la cohomología de las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas definidas sobre $\Bbbk[h]$. Para llevar a cabo este cálculo asociamos a cada una de estas álgebras un álgebra de Smith. Construimos una resolución libre para las álgebras de Smith y la usamos, a través de una sucesión espectral, para construir una resolución para las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas. Nuestro cálculo de la (co)homología nos permite dar descripciones precisas de los (co)ciclos cuyas clases forman una base de la (co)homología. Todo este trabajo aparece en nuestro artículo [SSAV].

El Capítulo 4 trata sobre la estructura multiplicativa de la cohomología: usamos los cálculos del Capítulo 3 para describir el producto cup de la cohomología. Presentamos, además, por generadores y relaciones algunas de las deformaciones formales de estas álgebras. Este capítulo es una continuación natural de los anteriores y muestra los temas en los que estamos trabajando actualmente. Es por eso que varios de los resultados son parciales.

Incluimos un apéndice sobre el lema del diamante de Bergman porque este lema lo usamos en el Capítulo 1 para calcular una base de nuestras álgebras y es la herramienta principal en el estudio de las deformaciones.

El trabajo realizado durante mi doctorado dió origen a dos artículos de investigación. A grandes rasgos uno se corresponde con el Capítulo 2 y el otro con el Capítulo 3. Los resultados del Capítulo 4 no aparecen en ninguno de los dos árticulos.

A lo largo de esta tesis hay varias preguntas que quedaron sin contestar. En la última sección del Capítulo 2 hay algunos casos que dejamos afuera porque nuestra técnica no se adaptaba bien. Por ejemplo para el caso de polinomios en dos variables pedimos la condición (2.7) y para el caso de polinomios de Laurent pedimos que a no sea simétrico (2.5.16). En el Capítulo 3, no calculamos la homología cuando $a(0) = 0$ porque las herramientas que introdujimos en la Sección 3.2 no funcionan en ese caso. El Capítulo 4 tiene una continuación natural en el cálculo del corchete de Gerstenhaber. Trabajaremos en el futuro esta línea de investigación.

Índice general

Capítulo 1

Álgebras de Weyl Generalizadas

1.1. Introducción

Las álgebras de Weyl generalizadas fueron introducidas por Bavula en [Bav92]. Para definirlas partimos de un anillo D, un automorfismo $\sigma : D \to D$ y un elemento central $a \in \mathcal{Z}(D)$. El álgebra de Weyl generalizada que corresponde a estos datos y que escribimos $A = A(D, \sigma, a)$ (o $A(\sigma, a)$ cuando D esté sobreentendido) es el álgebra generada por D y dos variables adicionales x e y sujetas a las relaciones

$$\begin{aligned} &dy = y\sigma(d), \quad xd = \sigma(d)x, \text{ para } d \in D; \\ &yx = a, \quad xy = \sigma(a). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Es fácil ver que si $\{d_i\}_{i \in I}$ es un conjunto de generadores de D como $\mathbb{k}$-álgebras, se puede reemplazar la familia de relaciones de conmutación (1.1) por

$$d_i y = y\sigma(d_i), \quad xd_i = \sigma(d_i)x, \text{ para } i \in I.$$

Los ejemplos que más nos interesan se presentan cuando $D = \mathbb{k}[h]$, cuando $D = \mathbb{k}[h^{\pm 1}]$ y cuando $D = \mathbb{k}[h_1, h_2]$. En estos casos D está generada por uno o dos elementos. La mayoría de nuestro trabajo se centra en el caso $D = \mathbb{k}[h]$ por ser el más simple. Cuando sea posible extender nuestros resultados a otros anillos de partida lo haremos explícitamente.

Esta clase de álgebras fue estudiada por Bavula y varios colaboradores desde diferentes puntos de vista: su teoría de representaciones fue estudiada en [Bav92, BB00], su dimensión global en [Bav96, Bav96], sus automorfismos e isomorfismos en [BJ01].

Terminamos esta sección describiendo la notación que vamos a usar durante todo el trabajo. Fijamos un cuerpo $\mathbb{k}$ de característica 0 y cada vez que consideremos un álgebra va a ser una $\mathbb{k}$-álgebra con unidad, los módulos van a ser módulos a izquierda a menos que se especifique lo contrario y $\otimes$ va a denotar $\otimes_{\Bbbk}$.

Para un escalar $\lambda \in \Bbbk$ y un entero $n \geq 0$, escribimos $[n]_\lambda = 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1}$; en particular, si $\lambda = 1$, entonces $[n]_\lambda = n$.

Dados polinomios p, $t \in \Bbbk[h]$, notaremos por (p, t) a su máximo común divisor y p' a la derivada de p. Usaremos la convención de que el grado del polinomio nulo es $-\infty$.

1.2. Ejemplos

Las álgebras de Weyl generalizadas contienen como casos particulares a muchos ejemplos interesantes de álgebras y muchas veces es conveniente, para estudiar el ejemplo particular, trabajar con esta clase más general. En esta sección mostramos algunos de éstos.

El álgebra de Weyl usual

Fijemos $D = \Bbbk[h]$, sea σ el único automorfismo de D que verifica $\sigma(h) = h - 1$, y sea $a = \alpha h + \beta$ un polinomio de grado 1. El álgebra de Weyl generalizada $A(D, \sigma, a)$ que obtenemos tiene relaciones

$$hy = yh - y, \quad xh = hx - x, \quad yx = \alpha h + \beta, \quad xy = \alpha h + \beta - \alpha.$$

En este caso podemos despejar h de la ecuación $yx = \alpha h + \beta$. De esta manera podemos dar una presentación de $A(D, \sigma, a)$ con dos generadores y una sola relación $xy = yx - \alpha$. Concluimos que el álgebra de Weyl generalizada que corresponde a estos datos es isomorfa al álgebra de Weyl clásica

$$\Bbbk\langle y, x \mid yx - xy = 1\rangle.$$

El álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

El álgebra envolvente del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$ se puede presentar como el álgebra generada por e, f y h con relaciones

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Para presentarla como álgebra de Weyl generalizada basta tomar $D = \Bbbk[h_1, h_2]$, σ el automorfismo definido por $\sigma(h_1) = h_1 + 2$, $\sigma(h_2) = h_2 - h_1 - 2$ y $a = h_1 + h_2$. En este caso $\sigma(a) = h_2$ y hay un isomorfismo $\phi : \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2) \to A(D, \sigma, a)$ tal que $\phi(e) = y$, $\phi(f) = x$ y $\phi(h) = h_1$. Además vale que $\phi(fe) = h_2$

Los cocientes primitivos de dimensión infinita de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

Los cocientes primitivos B_λ de dimensión infinita de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ son los cocientes por ideales primitivos de codimensión infinita. Están parametrizadas por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ y están generadas por variables h, e y f sujetas a las relaciones

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h$$

y

$$2ef + 2fe + h^2 = \lambda.$$

Se pueden presentar como álgebras de Weyl generalizadas $A(D, \sigma, a)$ con $D = k[h]$, $\sigma(h) = h + 2$ y

$$a(h) = \frac{\lambda + 2h - h^2}{4}.$$

Hay un isomorfismo $B_\lambda \to A(D, \sigma, a)$ que manda e a y, h a h y f a x.

El plano cuántico

El plano cuántico es el álgebra de polinomios torcidos $\Bbbk\langle y, x \mid xy - qyx = 0\rangle$ para $q \in \Bbbk \setminus \{0, 1\}$. Sus derivaciones y automorfismos fueron estudiados por Alev y Chamarie en [AC92]. Este álgebra se puede realizar como el álgebra de Weyl generalizada correspondiente a $D = \Bbbk[h]$, $\sigma(h) = qh$ y $a = h$.

El álgebra de Weyl cuántica

La versión cuántica del álgebra de Weyl que vamos a considerar es la que fue estudiada por Goodearl en [Goo92] y por Alev y Dumas en [AD96]. Se define como $k\langle y, x \mid xy - qyx = 1\rangle$ y corresponde al álgebra de Weyl generalizada $A(D, \sigma, a)$ con $D = \Bbbk[h]$, $\sigma(h) = qh$ y $a = h + \frac{1}{1-q}$.

El álgebra envolvente cuántica de $\mathfrak{sl}_2$

El álgebra envolvente cuántica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ de $\mathfrak{sl}_2$ correspondiente al parámetro escalar q se puede presentar con generadores E, F y $K^\pm$ sujetos a las relaciones

$$EK = q^{-2}KE, \quad FK = q^2KF, \quad EF - FE = \frac{K^2 - K^{-2}}{q^2 - q^{-2}}.$$

Esta álgebra es isomorfa al álgebra $A(D, \sigma, a)$, de forma similar al caso clásico, pero tomando $D = \Bbbk[h_1^\pm, h_2]$,

$$\sigma(h_1) = q^2h_1, \quad \sigma(h_2) = h_2 - \sigma(\frac{h_1^2 - h_1^{-2}}{q^2 - q^{-2}}), \quad \text{y} \quad a(h_1, h_2) = h_2 + \frac{h_1^2 - h_1^{-2}}{q^2 - q^{-2}}.$$

Es fácil ver que hay un isomorfismo $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \to A(D, \sigma, a)$ que manda E a y, F a x y K a h_1, y bajo este isomorfismo el elemento FE se corresponde con h_2.

Las álgebras down-up (generalizadas)

Las álgebras down-up fueron introducidas Stanley en [Sta88] en el contexto de los *differential posets* y luego fueron estudiadas desde el punto de vista de la teoría de anillos por Benkart y Roby en [BR98]. Son las álgebras con generadores d, u y relaciones

$$d^2u = \alpha dud + \beta ud^2 + \gamma d, \quad du^2 = \alpha udu + \beta u^2 d + \gamma u,$$

para escalares α, β y γ. Esta clase de álgebras fue estudiada y generalizada por Cassidy y Shelton en [CS04], en parte con el objetivo de atacar una conjetura de Andruskiewitsch y Dumas [AD08]. La generalización es análoga a la que se hace para pasar de las álgebras de Weyl a las álgebras de Weyl generalizadas o a la que se hace para pasar de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ al álgebra de Smith. Las álgebras down-up generalizadas se construyen a partir un polinomio $f \in \Bbbk[h]$ y de escalares r, s y γ. Estas álgebras tienen generadores d, u y h y relaciones

$$dh - rhd + \gamma d = 0, \quad hu - ruh + \gamma u = 0, \quad du - sud + f(h) = 0.$$

Un álgebra down-up generalizada es noetheriana si y sólo si $rs \neq 0$, y en ese caso se pueden presentar como un álgebra de Weyl generalizada $A(D, \sigma, a)$ tomando $D = \Bbbk[h, a]$, $\sigma(h) = rh - \gamma$, $\sigma(a) = sa - f(h)$ y $a = ud$.

1.3. Propiedades Básicas

En esta sección vamos a hacer un resumen de las propiedades más importantes que obtiene Bavula sobre las álgebras de Weyl generalizadas. La mayoría de estas propiedades van a ser para el caso en que $D = \Bbbk[h]$. Escribamos $A = A(D, \sigma, a)$.

Si D es un álgebra noetheriana e íntegra entonces el álgebra A es un dominio noetheriano. Hay una $\mathbb{Z}$-graduación en A con todos los elementos de D en grado 0 y x e y en grados -1 y 1 respectivamente; denotamos $|u|$ al grado de un elemento homogéneo $u \in A$, lo llamamos su *peso* y extendemos esta convención a contextos relacionados. Para $r \in \mathbb{Z}$ denotamos $A^{(r)}$ a la componente homogénea de A de peso r; se tiene que $A^{(0)} = \Bbbk[h]$ y, para cada $r \in \mathbb{N}$, $A^{(r)} = y^r \Bbbk[h]$ y $A^{(-r)} = \Bbbk[h]x^r$. Si $u \in A$ no es cero, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$ y, para cada $i \in \{m, \dots, n\}$, elementos homogéneos $u_i \in A^{(i)}$ tales que $u_m \neq 0$, $u_n \neq 0$ y $u = u_m + \cdots + u_n$; vamos a escribir $u_{\mathsf{min}} = u_m$ y $u_{\mathsf{max}} = u_n$, y los llamaremos *componentes de peso minimal y maximal* de u, respectivamente. Diremos además que el *ancho* de u es $\|u\| = n - m$. Como A es un domino, las componentes de peso maximal de un elemento y su ancho son multiplicativas: si $u, v \in A$ no son cero, entonces $(uv)_{\mathsf{max}} = u_{\mathsf{max}} v_{\mathsf{max}}$ y $\|uv\| = \|u\| + \|v\|$.

La descripción de los automorfismos de $\Bbbk[h]$ se puede usar para dar una primera clasificación de las álgebras de Weyl generalizadas a menos de isomorfismo, como en [RS06]:

Proposición 1.3.1. *El álgebra* $A = A(\Bbbk[h], \sigma, a)$ *es isomorfa a una de las álgebras de la siguiente lista:*

1. *El caso conmutativo:* $A(\Bbbk[h], \mathrm{Id}, a)$ *para algún* $a \in \Bbbk[h]$*;*
2. *El caso clásico:* $A(\Bbbk[h], \sigma_{cl}, a)$ *con* $\sigma_{cl}(h) = h - 1$ *y* $a \in \Bbbk[h]$*;*
3. *El caso cuántico:* $A(\Bbbk[h], \sigma_q, a)$ *con* $q \in \Bbbk \setminus \{0, 1\}$, $\sigma_q(h) = qh$ *y* $a \in \Bbbk[h]$.

Dos álgebras pertenecientes a grupos distintos no son isomorfas. □

Para probar la última afirmación se pueden usar los invariantes D y E introducidos por Alev y Dumas en [AD94].

Usando el lema del diamante de Bergman (ver el Apéndice A), es fácil ver que el conjunto de monomios $\{y^i h^j x^k : ik = 0\}$ es una base de A como $\Bbbk$-espacio vectorial.

En el caso cuántico, y con la notación del apéndice, el conjunto S de reglas de transformación es:

$$\begin{aligned} &s_1 : hy \mapsto y\sigma(h) && s_2 : xh \mapsto \sigma(h)x \\ &s_3 : xy \mapsto \sigma(a) && s_{4,l} : yh^l x \mapsto a\sigma^{-1}(h^l) \text{ para todo } l \geq 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver que S satisface las hipótesis del lema del diamante; las ambigüedades que aparecen son:

$$\begin{aligned} &(s_1, s_{4,l}, h, y, h^l x), && (s_2, s_1, x, h, y), \\ &(s_3, s_{4,l}, x, y, h^l x), && (s_{4,l}, s_2, yh^l, x, h), \\ &(s_{4,l}, s_3, yh^l, x, y), \end{aligned}$$

y se puede ver que todas se resuelven y, por lo tanto, que los monomios irreducibles son una base del álgebra. El conjunto de éstos es justamente $\{y^i h^j x^k : ik = 0\}$.

Hay un morfismo de álgebras $\Phi : A(a, q) \to A(\sigma_q(a), q^{-1})$ tal que $\Phi(x) = y$, $\Phi(y) = x$ y $\Phi(h) = h$, que resulta ser un isomorfismo. Es claro que manda la componente homogénea de peso $r \in \mathbb{Z}$ de $A(a, q)$ en la componente homogénea de peso $-r$ de su codominio. Esta propiedad nos permite *copiar* las cuentas y demostraciones de los pesos positivos a los pesos negativos. Vamos a usar esta técnica en la mayoría de los capítulos sin hacer referencia explícita.

Siempre que trabajemos en el caso cuántico vamos a escribir $c = (a, a')$, $N = \deg(a)$ y $M = \deg(c)$. Si q es raíz de la unidad e será su orden; y si no $e = 0$. Diremos que un peso $r \in \mathbb{Z}$ es *singular* si $e \mid r$ y en caso contrario diremos que el peso es *regular*.

La subálgebra de $\Bbbk[h]$ de los elementos invariantes por σ es $S = \ker(\sigma - 1)$, y está generada por h^e; más generalmente, cuando $e > 0$ tenemos $\ker(\sigma - q^l) = h^l \Bbbk[h^e]$ para cada $l \in \{0, \dots, e-1\}$. Decimos que un polinomio $p \in \Bbbk[h]$ es *singular* si $p \in \mathcal{S}$.

Vamos a usar a menudo la notación que sigue: dada una función f de dos argumentos enteros e $i \in \mathbb{N}_0$, vamos a escribir

$$\textstyle\int_i f(s,t) = \sum_{\substack{s+t+1=i\\ 0\leq s,t}} f(s,t).$$

Es importante notar que en esa expresión los indices s y t no son libres. La siguiente fórmula de *integración por partes*

$$\int_i f(s+1,t) - \textstyle\int_i f(s,t+1) = f(i,0) - f(0,i)$$

vale para toda f e i.

1.3.1. Dimensión Global

Si $\mathfrak{b} \subseteq D$ es un ideal a izquierda, consideramos el ideal $I(x,\mathfrak{b}) = Ax + \mathfrak{b} \subseteq A$, y si $b \in D$ denotamos $I(x,b)$ a $I(x,Ab)$. En [Bav96], Bavula prueba los siguientes resultados sobre la dimensión global de las álgebras de Weyl generalizadas:

Teorema 1.3.2. [Bav96, Thm. 2.7] *Si* $\operatorname{gldim} D < \infty$ *y* $\operatorname{gldim} A < \infty$ *entonces*

$$\operatorname{gldim} D \leq \operatorname{gldim} A \leq \operatorname{gldim} D + 1 \qquad \square$$

Teorema 1.3.3. [Bav96, Thm. 3.5] *Si* D *es un dominio noetheriano, conmutativo de dimensión global finita* n *y* $a \neq 0$*, entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

- $\operatorname{gldim} A < \infty$
- $\operatorname{pdim}_A A/I(x,\mathfrak{p}) < \infty$ *para todos los ideales primos* $\mathfrak{p}$ *de* D *tales que* $a \in \mathfrak{p}$. $\square$

Teorema 1.3.4. [Bav96, Thm. 3.7] *Sea* D *un dominio conmutativo noetheriano de dimensión global* $n < \infty$ *y sea* $a \in D$ *regular. Si* $\operatorname{gldim} A < \infty$*, entonces la dimensión global de* A *es* $n+1$ *si y solo si o bien existe un ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* D *de altura* n *tal que* $\{\sigma^i(\mathfrak{m}) : i \in \mathbb{N}\}$ *es finito, o bien existen ideales* p *y* q *de* D *de altura* n *tal que* $\sigma^i(p) = q$ *para algún* $i \neq 0 \in \mathbb{Z}$ *y* $a \in p, q$. $\square$

Las hipótesis de este teorema se satisfacen cuando $D = \Bbbk[h]$ y entonces podemos dar, en ese caso, una caracterización de las álgebras de Weyl generalizadas de dimensión global finita a partir del teorema.

Teorema 1.3.5. *Sea* $D = \Bbbk[h]$, $a \in D$, $\sigma \in \operatorname{Aut}_{\Bbbk}(D)$ *y* $A = A(D, \sigma, a)$. *Entonces*

$$\operatorname{gldim} A < \infty \iff (a, a') = 1.$$

Demostración. La necesidad de la condición $(a, a') = 1$ para tener dimensión global finita fue demostrada por Bavula en [Bav96], así que bastará que probemos solamente la suficiencia.

Sea $p \in D$ un primo tal que $p \mid a$, de manera que existe $b \in D$ con $a = pb$. La sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda

$$0 \to I(x, p) \to A \to A/I(x, p) \to 0 \tag{1.2}$$

nos dice que $\operatorname{pdim}_A A/I(x, p) < \operatorname{pdim}_A I(x, p) + 2$. Para demostrar el resultado vamos a demostrar que si $(a, a') = 1$, entonces $I(x, p)$ es un A-módulo proyectivo.

Vamos a demostrar primero que

$$Ax \cap Ap = I(x, b)p. \tag{1.3}$$

Para eso fijamos $f \in Ax \cap Ap$; podemos suponer que f es homogéneo para el peso y que $|f| = r \geq 0$: el caso en el que el peso de f es negativo es similar. Como $f \in Ax \cap Ap$, existen u, $v \in D$ tales que $f = y^{r+1}ux = y^r vp$. También sabemos que

$$y^{r+1}ux = y^r a\sigma^{-1}(u) = y^r pb\sigma^{-1}(u) = y^r \sigma^{-1}(u)bp$$

y como A es un dominio, $\sigma^{-1}(u)b = v$. En consecuencia, $f \in I(x, b)p$. La otra inclusión de (1.3) es fácil.

Consideremos ahora el diagrama de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow I(x, b) \xrightarrow{\gamma} A \oplus A \xrightarrow{\phi} I(x, p) \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

donde $\phi(\alpha, \beta) = \alpha x - \beta p$ y $\gamma(w) = (wpx^{-1}, w)$; esta última expresión tiene sentido porque para todo $p \in I(x, b)$ se tiene que $wp \in Ax = xA$ y A es un dominio.

Es claro que γ es un monomorfismo, que ϕ es un epimorfismo y que $\operatorname{im}\gamma \subseteq \ker\phi$. La sucesión (1.4) es de hecho exacta: para chequear la otra inclusión supongamos que $(\alpha, \beta) \in A \oplus A$ es tal que $\alpha x = \beta p$. Este elemento pertenece a $Ax \cap Ap = I(x, b)p$, y se sigue que $\alpha = \beta p x^{-1}$. Si $(a, a') = 1$, entonces $(p : b) = 1$ y existen s, $t \in D$ tales que $1 = sp + tb$. Definimos un morfismo $\psi : A \oplus A \to A$ vía $\psi(\alpha, \beta) = \alpha x s + \beta b t$. Es fácil verificar que $\operatorname{im}\psi \subseteq I(x, b)$ y que $\psi \circ \gamma = \mathrm{Id}_{I(x,b)}$. Como consecuencia de esto, la sucesión exacta (1.4) se parte e $I(x, p)$ es un A-módulo proyectivo. Se sigue que (1.2) es una resolución proyectiva finita de $A/I(x, p)$ y por lo tanto podemos usar el Teorema 1.3.3 para concluir que la dimensión global de A es finita como deseábamos. $\square$

En el caso cuántico podemos ser más precisos:

Corolario 1.3.6. *Para todo* $q \in \Bbbk \setminus \{0, 1\}$ *y todo* $a \in \Bbbk[h]$ *vale que*

$$\operatorname{gldim} A(\Bbbk[h], \sigma_q, a) < \infty \implies \operatorname{gldim} A(\Bbbk[h], \sigma_q, a) = 2.$$

Demostración. Se sigue del Teorema 1.3.2 que si la dimensión global de A es finita tiene que valer $\operatorname{gldim} D$ o $\operatorname{gldim} D + 1$. En la situación del corolario se tiene que $\operatorname{gldim} A(\Bbbk[h], \sigma, a) \in \{1, 2, +\infty\}$. Más aun, podemos usar el Teorema 1.3.4, y concluir que $\operatorname{gldim} A(\Bbbk[h], \sigma, a) = 2$ si y solo si *(i)* existe un ideal maximal de $\Bbbk[h]$ de altura 1 cuya órbita bajo σ es finita, o *(ii)* existen ideales maximales $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ de $\Bbbk[h]$ de altura 1 tales que $\sigma^i(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ para algún $i \neq 0$, $i \in \mathbb{Z}$ y además $a \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Como el ideal (h) de $\Bbbk[h]$ queda fijo por σ y es de altura 1 estamos siempre en el caso *(i)*, y el corolario se sigue. □

Las condiciones *(i)* y *(ii)* mencionadas en la prueba de este corolario no son exclusivas. De hecho la mayor parte de las complicaciones encontradas en los cálculos de la homología y la cohomología de Hochschild en el caso cuántico (ver [SSAV]) aparecen en el caso en el que el álgebra A verifica la condición *(ii)* o, en otras palabras, cuando el polinomio a tiene dos raíces en la misma órbita bajo la acción de σ_q.

Capítulo 2

Derivaciones, Automorfismos e Isomorfismos

2.1. Introducción

Los automorfismos e isomorfismos de las álgebras de Weyl generalizadas han sido estudiados en varios trabajos anteriores. La descripción de los isomorfismos y de los automorfismos en el caso clásico fue dada por Bavula y Jordan en [BJ01] y el caso cuántico, pero cuando el parámetro q no es raíz de la unidad, fue resuelto por Richard y Solotar in [RS06]; Bavula y Jordan también consideraron en [BJ01] el caso cuántico con q no raíz de la unidad pero sólo después de *localizar en* h, lo que simplifica bastante la situación.

En [AD94], Alev y Dumas definen, para cada $\Bbbk$-álgebra Λ, un grupo $G(\Lambda) = (\Lambda^\times)' \cap \Bbbk^\times$. En esta definición $(\Lambda^\times)'$ es el grupo derivado del grupo de unidades de Λ. En el mismo trabajo los autores prueban que para el cuerpo de Weyl cuántico $\Bbbk_q(x, y)$, vale que $G(\Bbbk_q(x, y)) = \langle q \rangle$, el subgrupo cíclico de $\Bbbk$ generado por q. En [RS06] Richard y Solotar probaron que el cuerpo de fracciones de un álgebra de Weyl generalizada cuántica $A = \mathcal{A}(q, a)$ es isomorfo a $\Bbbk_q(x, y)$. Esto permite, en el caso en el que q no es una raíz de la unidad, recuperar el parámetro q como uno de los dos generadores de $G(\operatorname{Frac} A)$. Además es fácil ver que $\mathcal{A}(q, a) \cong \mathcal{A}(q^{-1}, a(qh))$, de manera que en este caso el grupo $G(\operatorname{Frac} A)$ da toda la información sobre q que se puede dar.

El caso en el que q es raíz de la unidad es distinto porque el grupo generado por q tiene más generadores y, como probamos en este capítulo, no es cierto que dos álgebras que corresponden a dos raíces de la unidad del mismo orden son isomorfas.

Este tipo de dificultades con los parámetros de orden finito ya han aparecido en la literatura al intentar clasificar otras clases de álgebras, como por ejemplo las álgebras down-up introducidas por G. Benkart y T. Roby en [BR98]; en la última sección de este capítulo intentamos adaptar nuestro método a la clasificación de este tipo de álgebras.

El caso conmutativo fue considerado por varios autores: se trata de determinar los automorfismos de la superficie afín $\operatorname{Spec} \Bbbk[x, y, h]/(xy - a(h))$. Makar-Limanov dio en [ML90] generadores explícitos para esos grupos y recientemente Blanc y Dubouloz demostraron en [BD11] que admiten una estructura de producto amalgamado similar a la de $\operatorname{Aut}(\Bbbk[x, y])$ descripta por los teoremas clásicos de Makar-Limanov, Jung [Jun42] y van der Kulk [vdK53]. Además estas superficies están clasificadas bajo isomorfismo exactamente como en el Teorema 2.4.4.

El trabajo que dio lugar a este Capítulo fue realizado, temporalmente hablando, después del que corresponde al Capítulo 3. Más aún: la idea de estudiar las derivaciones diagonalizables, o localmente finitas, provino del estudio del corchete de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de estas álgebras.

2.2. Preliminares

Sean $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ un espacio vectorial graduado y $d : V \to V$ un endomorfismo no necesariamente homogéneo. Decimos que d es *localmente finito* si para cada $v \in V$ el subespacio cíclico $\langle v \rangle_d$ de V generado por d y v es de dimensión finita; es suficiente comprobar esta condición para elementos homogéneos de V.

Decimos que d es *localmente nilpotente* si para todo elemento $u \in A$, existe un número natural n tal que $d^n(u) = 0$. De nuevo, es suficiente comprobar esta condición para elementos homogéneos.

Lema 2.2.1. *Supongamos que* $d = d_1 + \cdots + d_l$ *con* $d_1, \ldots, d_l : V \to V$ *endomorfismos* homogéneos *de* V *de grados* $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ *tales que* $\alpha_1 < \cdots < \alpha_l$. *Si* d *es localmente finito entonces* d_1 *y* d_l *son localmente finitos.*

Un endomorfismo homogéneo de V de grado no nulo es localmente finito si y solo si es localmente nilpotente. Se sigue que si en el lema tenemos $\alpha_l \neq 0$ entonces de hecho d_l es localmente nilpotente, y similarmente para d_1.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que d_l no es localmente finito, de manera que existe un vector homogéneo $v \in V_j$ tal que $\dim_{\Bbbk} \langle v \rangle_{d_l} = \infty$ y, en particular, $d_l^i(v) \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. El término de cabeza de $d^k(v)$ es $d_l^k(v)$ y se encuentra en grado $k\alpha_l + j$: esto implica que $\{d^i(v) : i \in \mathbb{N}\}$ es una familia linealmente independiente y, entonces, que d no es localmente finito. □

Sea ahora Λ un álgebra graduada. Si $d : \Lambda \to \Lambda$ es una derivación homogénea de grado positivo que además es localmente nilpotente, hay una función $\deg_d : \Lambda \setminus 0 \to \mathbb{N}$ tal que para cada $u \in \Lambda \setminus 0$ tenemos $\deg_d(u) = \max\{r \in \mathbb{N}_0 : d^r(u) \neq 0\}$.

Las siguientes propiedades de $\deg_d$ van a ser útiles más adelante: para todo $u, v \in \Lambda$ vale que

$$\deg_d(u+v) \leq \max \deg_d(u), \deg_d(v),$$
$$\deg_d(uv) = \deg_d(u) + \deg_d(v).$$

La demostración de estos hechos se basa en la siguiente identidad, similar a la fórmula del binomio de Newton, que se prueba fácilmente por inducción:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^i(u) d^{n-i}(v).$$

Se sigue de estas propiedades que la subálgebra $\ker d$ es *factorialmente cerrada*: si $u, v \in \Lambda \setminus 0$ entonces

$$d(uv) = 0 \implies d(u) = d(v) = 0.$$

Un elemento $u \in \Lambda$ es un *slice* de d si $d(u) = 1$. Un *slice local* es un $u \in \Lambda$ tal que $d(u) \in \ker d \setminus \{0\}$.

Observación 2.2.2. Las derivaciones localmente nilpotentes no nulas tienen slices locales. Si $u \in \Lambda$ es tal que $d(u) \neq 0$ podemos generar una sucesión $d^i(u)$ y sabemos que existe i_0 tal que $d^{i_0}(u) \neq 0$ y $d^{i_0+1}(u) = 0$. En este caso $d^{i_0-1}(u)$ es un slice local de d. Además, si suponemos que d es una derivación homogénea, podemos obtener con el mismo procedimiento slices locales homogéneos.

En los contextos en los que tenga sentido, escribiremos $x \doteq y$ para decir que y es un múltiplo escalar no nulo de x.

2.3. Derivaciones

Sea $A = \mathcal{A}(q, a)$ un álgebra de Weyl generalizada cuántica. Si $u_1, u_2, u_3 \in A$, escribimos $u_1|\hat{Y} + u_2|\hat{H} + u_3|\hat{X}$ a la única derivación $A \to A$ cuyos valores en y, h y x son u_1, u_2 y u_3, respectivamente, *suponiendo que haya una*.

Lema 2.3.1. *El álgebra* A *no tiene derivaciones homogéneas localmente nilpotentes no nulas.*

Demostración. Sea $d : A \to A$ una derivación homogénea localmente nilpotente de peso r y supongamos que r es *positivo*; si el peso r de d es *negativo*, el mismo razonamiento se aplica, y si $r = 0$ la situación es similar pero más simple.

Veamos que $d(y) = 0$, de no ser así podemos, usando el procedimiento de la Observación 2.2.2, obtener un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d^{i_0}(y)$ es un slice local. Como d tiene peso positivo, dicho elemento también lo tiene y por lo tanto es de la forma

$y^{i_0 r}p$ para algún $p \in \Bbbk[h]$. Como $\ker d$ es factorialmente cerrado, concluimos que $d(y) = 0$.

Por otro lado, hay un polinomio $p \in \Bbbk[h]$ tal que $d(h) = y^r p$, y de la relación $hy = qyh$ vemos que $y^r py = qy^{r+1}p$, de manera que $\sigma(p) = qp$: se sigue de esto que podemos escribir $p = p_1 h$ para algún $p_1 \in \Bbbk[h]$. Si $k \geq 0$, entonces $d(A_k h) \subseteq A_{k+r}h$: en efecto, si $f \in \Bbbk[h]$ tenemos

$$d(y^k fh) = y^k d(f)h + y^k f d(h) = y^k d(f)h + y^k f y^r p_1 h \in A_{k+r}h$$

porque $d(f) \in A_r$. Esto nos dice que $d^i(h) \in A_{ir}h$ para todo $i \geq 0$. Si $i_0 = \deg_d(h)$, entonces $0 \neq d^{i_0}(h) \in A_{i_0 r}h \cap \ker d$ y, como $\ker d$ es factorialmente cerrado, $d(h) = 0$. Una consecuencia inmediata de esto es que $yd(x) = d(yx) = d(a) = 0$, luego también $d(x) = 0$, y vemos que $d = 0$, como queríamos. $\square$

Corolario 2.3.2. *Las derivaciones localmente finitas de A son homogéneas de peso cero.*

Demostración. Sea $d : A \to A$ una derivación localmente finita. Como A es finitamente generada, existen derivaciones homogéneas no nulas $d_1, \dots, d_l : A \to A$ de pesos estrictamente crecientes tales que $d = d_1 + \cdots + d_l$. El peso de d_l no puede ser positivo, porque en ese caso d_l sería localmente nilpotente —pues d es localmente finita— y el lema implicaría que $d_l = 0$; similarmente, el peso de d_1 no puede ser negativo. Se sigue que d es homogénea de peso cero. $\square$

Proposición 2.3.3. *Sea $d : A \to A$ una derivación localmente finita, y consideremos la derivación $\xi = y|\hat{Y} - x|\hat{X}$.*

(I) *Si a no es un monomio, entonces d es un múltiplo escalar de ξ.*

(II) *Si a es un monomio, entonces d es una combinación lineal de ξ y $\tau = h|\hat{H} + Nx|\hat{X}$.*

Todas las derivaciones localmente finitas son diagonalizables en la base de los monomios estándar y, en particular, conmutan.

Vamos a referirnos a $\xi : A \to A$ en lo que sigue como la *derivación euleriana* de A. Es fácil ver que sus autovalores son exactamente los enteros, y que para cada $r \in \mathbb{Z}$ el autoespacio de ξ correspondiente a r es precisamente $A^{(r)}$, la componente homogénea de A de peso r.

Demostración. De acuerdo al Corolario 2.3.2 la derivación d es homogénea de peso cero, por lo tanto existen polinomios p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$ tales que $d = yp_1|\hat{Y} + p_2|\hat{H} + p_3 x|\hat{X}$ y, de hecho, mirando los coeficientes de y en ambos lados de la igualdad $d(hy) = qd(yh)$, vemos que existe $\bar{p}_2 \in \Bbbk[h]$ tal que $p_2 = h\bar{p}_2$.

Se puede ver por inducción que existe una sucesión $(f_i)_{i \geq 0}$ en $\Bbbk[h]$ tal que $f_0 = 1$, $d^i(h) = hf_i$ y $f_{i+1} = \bar{p}_2(f_i + f_i' h)$ para todo $i \geq 0$. En particular, como el cuerpo $\Bbbk$ tiene característica cero, tenemos que $\deg d^i(h) = 1 + i \deg \bar{p}_2$ y de esto se sigue que $\bar{p}_2 \in \Bbbk$, pues de otra manera el espacio cíclico $\langle h \rangle_d$ no sería de dimensión finita. Similarmente, existe una sucesión $(g_i)_{i \geq 0}$ en $\Bbbk[h]$ tal que $g_0 = 1$,

$d^i(y) = yg_i$ y $g_{i+1} = p_1 g_i + g_i' h\bar{p}_2$ para todo $i \geq 0$, luego $\deg g_i = i \deg p_1$ y el hecho que d sea localmente finita implica que también $p_1 \in \Bbbk$.

Aplicando d a ambos lados de la igualdad $yx = a$, vemos que

$$a\sigma^{-1}(p_1 + p_3) = a' h\bar{p}_2, \tag{2.1}$$

comparando los grados de ambos lados de la igualdad concluimos que $p_3 \in \Bbbk$. Si ahora resolvemos la Ecuación (2.1) en tres parámetros escalares escalares p_1, p_2 y p_3 obtenemos los puntos *(i)* y *(ii)* del enunciado. La observación clave que permite resolver dicha ecuación es que es equivalente que a sea un monomio a que $a'h$ sea un múltiplo escalar de a.

El último punto del enunciado, finalmente, puede ser probado directamente por inspección. □

Como la dimensión del espacio vectorial de derivaciones localmente finitas de un álgebra es invariante bajo isomorfismos, la Proposición 2.3.3 tiene la siguiente consecuencia inmediata:

Corolario 2.3.4. *Si* $A_1 = \mathcal{A}(q_1, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_2, a_2)$ *son dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas isomorfas, entonces o ambos* a_1 *y* a_2 *son monomios o ninguno de los dos lo es.* □

Ahora tenemos todos los elementos necesarios para establecer el hecho clave que nos permitirá describir los isomorfismos y automorfismos de nuestras álgebras en la próxima sección:

Proposición 2.3.5. *Sean* $A_1 = \mathcal{A}(q_1, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_2, a_2)$ *dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas y sean* ξ_1 *y* ξ_2 *sus respectivas derivaciones eulerianas. Si* $\eta : A_1 \to A_2$ *es un isomorfismo, entonces* $\eta \circ \xi_1 \circ \eta^{-1}$ *es un múltiplo escalar de* ξ_2*.*

Demostración. Escribamos $\xi_2' = \eta \circ \xi_1 \circ \eta^{-1}$, que resulta una derivación localmente finita de A_2. Si a_2 no es un monomio, entonces la primera parte de la Proposición 2.3.3 implica inmediatamente que ξ_2' tiene que ser un múltiplo escalar de ξ_2. Sólo nos queda por considerar el caso donde $a_2 = h^{N_2}$ es un monomio en el cual, por la segunda parte de la proposición, sabemos que existen α, $\beta \in \Bbbk$ tales que $\xi_2' = \alpha\xi_2 + \beta\tau_2$; como η es un isomorfismo, el Corolario 2.3.4 implica que $a_1 = h^{N_1}$ es también un monomio. Para llegar a una contradicción, supongamos que $\beta \neq 0$.

El núcleo de ξ_2' tiene dimensión infinita, porque también la tiene $\ker \xi_1 = \Bbbk[h]$, y está generado por monomios estándar. Se sigue que existen i, j, $k \in \mathbb{N}_0$ no todos simultáneamente cero pero con $ik = 0$ tales que

$$\xi_2'(y^i h^j x^k) = \big(\alpha(i-k) + \beta(kN_2 + j)\big) y^i h^j x^k = 0. \tag{2.2}$$

Esto nos dice que podemos suponer que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 0$ y $\gcd(\alpha, \beta) = 1$; en efecto, si este no es el caso podemos reemplazar ξ_2' por uno de sus múltiplos escalares.

Dependiendo de si $\beta > 0$ o $\beta < 0$, ponemos $u = h^{\alpha - N_2\beta}x^\beta$ o $u = y^{-\beta}h^\alpha$; observemos que, en cualquier caso, el peso de u es $-\beta$. Usando (2.2) y el hecho que ξ_2' se diagonaliza en la base de los monomios estándar, es fácil ver que el subálgebra $\ker \xi_2' \subseteq A_2$ es el álgebra libre generada por u. Por ejemplo, se ve de (2.2) que un monomio $y^i h^j x^k$ con $ik = 0$ está en el núcleo si y solo si $\alpha(i-k) + \beta(kN_2 + j) = 0$. Si $\beta > 0$, entonces $i = 0$. Como α y β son coprimos, se sigue que $k = \beta k'$, de manera que $j = (\alpha - \beta N_2)k'$. Ahora vemos que todos los monomios en el núcleo son (a menos de un escalar) potencias de u y se sigue nuestra afirmación.

Como h genera $\ker \xi_1$ y el morfismo η se restringe a un isomorfismo $\ker \xi_1 \to \ker \xi_2'$, hay escalares $\gamma, \delta \in \Bbbk$ tales que $\eta(h) = \gamma u + \delta$.

Como $hy = q_1 yh$ en A_1, tenemos que $(\gamma u + \delta)\eta(y) = q_1\eta(y)(\gamma u + \delta)$ en A_2. Si $\beta > 0$, entonces $((\gamma u + \delta)\eta(y))_{\mathsf{max}} = (q_1\eta(y)(\gamma u + \delta))_{\mathsf{max}} = \delta\eta(y)_{\mathsf{max}}$, y esta relación implica que $\delta = 0$; si $\beta < 0$, podemos llegar a la misma conclusión mirando las componentes de menor peso. Se sigue que $\eta(h) = \gamma u$ es un elemento homogéneo. De la igualdad $\eta(y)\eta(x) = \eta(a) = \eta(h)^{N_1}$ y de la aditividad de los anchos, vemos que $\eta(y)$ y $\eta(x)$ son también elementos homogéneos de A_2 y que $|\eta(y)| + |\eta(x)| = N_1|\eta(h)| = -N_1\beta$. Como $\eta(y)$, $\eta(h)$ y $\eta(x)$ generan A_2, sus pesos no pueden ser ni todos no-positivos ni todos no-negativos. Además los pesos de $\eta(y)$ y de $\eta(x)$ deben ser no nulos de signos opuestos.

Esto nos deja cuatro casos a considerar. Mostraremos que uno de ellos, aquél en el que

$$|\eta(y)| > 0, \qquad |\eta(h)| = -\beta > 0, \qquad |\eta(x)| < 0, \tag{2.3}$$

lleva a una contradicción; los otros tres se pueden manejar de forma similar. Estas desigualdades implican que $\eta(y) = y^r p_1$, $\eta(h) = \gamma y^{-\beta}h^\alpha$ y $\eta(x) = p_2 x^s$ para algunos $r, s \in \mathbb{N}$ y $p_1, p_2 \in \Bbbk[h]$. Como

$$y^r p_1 p_2 x^s = \eta(y)\eta(x) = \eta(yx) = \eta(h^{N_1}) \doteq y^{-N_1\beta}h^{N_1\alpha}$$

y el último miembro de esta cadena de igualdades es un múltiplo escalar de $y^{-N_1\beta}h^{N_1\alpha}$, también lo es el primero: esto nos dice que $r - s = -N_1\beta$ y que p_1 y p_2 son monomios. En particular, η manda monomios estándar de A_1 a múltiplos escalares de monomios estándar de A_2 y, como η es sobreyectivo, hay un monomio estándar u en A_1 tal que $\eta(u) \doteq h$; teniendo en cuenta las desigualdades (2.3), debemos tener $|u| < 0$. De la misma manera vemos que hay un monomio estándar ν en A_1 tal que $\eta(\nu) \doteq y$ y, como $r = s - N_1\beta \geq 2$, necesariamente $|\nu| \leq 0$. Ahora $\eta(\nu^r p_1(u)) \doteq y^r p_1(h) = \eta(y)$, y esto es absurdo porque η es inyectivo y $\nu^r p_1(u)$ e y son diferentes: tienen pesos de distinto signo.

Como las cuatro posibilidades aludidas más arriba llevan a una contradicción, vemos que la hipótesis $\beta \neq 0$ no se sostiene y la proposición queda demostrada. $\square$

2.4. Automorfismos e isomorfismos

Hasta ahora demostramos que los isomorfismos de álgebras de Weyl generalizadas cuánticas preservan, a menos de escalar, sus derivaciones eulerianas. Este hecho pone de manifiesto una rigidez no trivial de estas álgebras que restringe fuertemente la forma de los isomorfismos entre ellas:

Proposición 2.4.1. *Sean* $A_1 = \mathcal{A}(q_1, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_2, a_2)$ *dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas. Si* $\eta : A_1 \to A_2$ *es un isomorfismo de álgebras, entonces existen* γ, μ, $\nu \in \Bbbk \setminus 0$ *tales que* $\eta(h) = \gamma h$ *y*

(♣) o bien $\eta(y) = \mu y$ *y* $\eta(x) = \nu x$

(♠) o $\eta(y) = \mu x$ *y* $\eta(x) = \nu y$.

Demostración. Notemos ξ_1 y ξ_2 a las derivaciones eulerianas de A_1 y A_2 respectivamente. De acuerdo a la Proposición 2.3.5, existe un escalar no nulo $\lambda \in \Bbbk$ tal que

$$\eta \circ \xi_1 = \lambda\, \xi_2 \circ \eta \tag{2.4}$$

y, en particular, $\Bbbk[h] = \ker \xi_2 = \eta(\ker \xi_1) = \eta(\Bbbk[h])$ y η se restringe a un isomorfismo de álgebras $\Bbbk[h] \to \Bbbk[h]$: se sigue que $\eta(h) = \gamma h + \delta$ para algunos $\gamma \in \Bbbk \setminus 0$ y $\delta \in \Bbbk$. Como $hy = q_1 yh$ en A_1, tenemos $(\gamma h + \delta)\eta(y) = q_1\eta(y)(\gamma h + \delta)$ in A_2 y lo mismo vale si reemplazamos $\eta(y)$ por $\eta(y)_{\max}$. Si $\eta(y)_{\max}$ tiene peso $r \in \mathbb{Z}$,

$$\eta(y)_{\max}(q_2^r \gamma h + \delta) = (\gamma h + \delta)\eta(y)_{\max} = q_1 \eta(y)_{\max}(\gamma h + \delta),$$

luego $q_2^r \gamma h + \delta = q_1 \gamma h + q_1 \delta$: considerando los términos constantes en esta igualdad concluimos que $\delta = 0$, lo que prueba la primer parte del lema.

Para cada $r \in \mathbb{Z}$ el subespacio $\eta(A_1^{(r)})$ es el autoespacio de ξ_2 que corresponde al autovalor r/λ y, como ξ_2 tiene autovalores enteros, esto solo es posible si $\lambda \in \{\pm 1\}$. En particular, $\eta(y) \in A_2^{(\lambda)}$ y $\eta(x) \in A_2^{(-\lambda)}$.

Supongamos que $\lambda = 1$ y probemos que entonces vale (♣); la otra posibilidad se puede manejar similarmente y lleva al punto (♠) en el enunciado. Existe $f \in \Bbbk[h]$ tal que $y = \eta(yf) = \eta(y)\eta(f)$: como $\eta(f) \in \Bbbk[h]$, esto implica que $\eta(y)$ genera $A_2^{(1)}$ como $\Bbbk[h]$-módulo a derecha. Este módulo es libre de rango uno e y y $\eta(y)$ son dos generadores: se sigue que hay un escalar no nulo $\mu \in \Bbbk$ tal que $\eta(y) = \mu y$. El mismo argumento aplicado a x muestra que también existe un escalar no nulo $\nu \in \Bbbk$ tal que $\eta(x) = \nu x$. $\square$

En este momento tenemos todo lo necesario para probar los dos teoremas principales de este capítulo. Primero, describimos los grupos de automorfismos:

Teorema 2.4.2. *Sea* $A = \mathcal{A}(q, a)$ *un álgebra de Weyl generalizada cuántica, con* $N = \deg a$ *y* $a = \sum_{i=0}^{N} a_i h^i$*, sean* $g = \gcd\{i - j : a_i a_j \neq 0\}$ *y* $C_g \subseteq \Bbbk^\times$ *el subgrupo de raíces de la unidad de orden* g*; si* a *es un monomio, hacemos la convención de que* $g = 0$ *y que* $C_g = \Bbbk^\times$*. Si* $(\gamma, \mu) \in C_g \times \Bbbk^\times$*, tenemos un automorfismo* $\eta_{\gamma,\mu} : A \to A$ *tal que* $\eta_{\gamma,\mu}(y) = \mu y$*,* $\eta_{\gamma,\mu}(h) = \gamma h$ *y* $\eta_{\gamma,\mu}(x) = \mu^{-1}\gamma^N x$*. El conjunto* $G = \{\eta_{\gamma,\mu} : (\gamma, \mu) \in C_g \times \Bbbk^\times\}$ *es un subgrupo de* $\operatorname{Aut}(A)$ *isomorfo a* $C_g \times \Bbbk^\times$*.*

(I) *Si* $q \neq -1$*, tenemos de hecho* $\operatorname{Aut}(A) = G$*, y*

(II) *si* $q = -1$*, hay una sucesión exacta corta de grupos que se parte a derecha*

$$1 \longrightarrow G \hookrightarrow \operatorname{Aut}(A) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

El grupo cíclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *que aparece aquí está generado por la imagen de la involución* $\Omega : A \to A$ *tal que* $\Omega(y) = x$*,* $\Omega(h) = -h$ *y* $\Omega(x) = y$*.*

La involución Ω claramente generaliza la involución de Cartan clásica del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$.

Demostración. Teniendo en cuenta que un cálculo de rutina permite verificar que G es un subgrupo de $\operatorname{Aut}(A)$, sólo vamos a demostrar *(i)* y *(ii)*. Sea $\eta : A \to A$ un automorfismo. De acuerdo a la Proposición 2.4.1, existen γ, μ, $\nu \in \Bbbk \setminus 0$ tales que $\eta(h) = \gamma h$ y o bien (♣) $\eta(y) = \mu y$ y $\eta(x) = \nu x$, o (♠) $\eta(y) = \mu x$ y $\eta(x) = \nu y$. Si estamos en el caso (♣), aplicamos η a ambos lados de la igualdad $yx = a(h)$ y vemos que

$$a_i \neq 0 \implies \gamma^i = \mu\nu, \tag{2.5}$$

de manera que $\gamma^{i-j} = 1$ si $a_i a_j \neq 0$ y, en consecuencia, $\gamma \in C_g$. Adicionalmente, (2.5) nos dice que $\nu = \mu^{-1}\gamma^N$ y entonces vemos que $\eta = \eta_{\gamma,\mu} \in G$.

Si en cambio estamos en el caso (♠), aplicando η a la igualdad $hy = qyh$ vemos que $q^2 = 1$ y entonces de hecho $q = -1$. Esto significa que cuando $q \neq -1$ la la alternativa (♠) no sucede, y $\operatorname{Aut}(A) = G$. Por otro lado, si $q = -1$ hay efectivamente un automorfismo Ω como en el enunciado, y $\eta \circ \Omega \in G$ porque esta composición cae en el caso (♣) que ya hemos tratado. El subgrupo G junto con Ω genera $\operatorname{Aut}(A)$ en esta situación y todas las afirmaciones de *(ii)* se siguen inmediatamente. □

Observación 2.4.3. Dos casos particulares de este teorema ya fueron estudiados por otros autores. Si tomamos $a(h) = h$ el teorema nos da como corolario la Proposición 1.4.4 de Alev y Chamarie [AC92] que describe el grupo de automorfismos del plano cuántico. De manera similar si tomamos $a(h) = h + \frac{1}{1-q}$ obtenemos la Proposición 1.5 de Alev y Dumas [AD94] que describe el grupo de automorfismos del álgebra de Weyl cuántica.

En segundo lugar, podemos clasificar nuestras álgebras a menos de isomorfismo:

Teorema 2.4.4. *Dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas* $A_1 = \mathcal{A}(q_1, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_2, a_2)$ *son isomorfas si y sólo si* $q_2 \in \{q_1, q_1^{-1}\}$ *y existen escalares no nulos* α, $\beta \in \Bbbk$ *tales que* $a_2(h) = \alpha a_1(\beta h)$.

Demostración. Un cálculo directo, que vamos a omitir, permite verificar que la condición del enunciado es suficiente. Vamos a probar que dicha condición es necesaria. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\deg a_1 \leq \deg a_2$.

Sea $\eta : A_1 \to A_2$ un isomorfismo. De la Proposición 2.4.1 sabemos que existe un escalar no nulo $\gamma \in \Bbbk$ tal que $\eta(h) = \gamma h$. Como $yx = a_1(h)$ in A_1, tenemos que

$$\eta(y)\eta(x) = a_1(\gamma h) \tag{2.6}$$

en A_2 y mirando los pesos y los anchos de ambos miembros de esta igualdad, vemos que $\eta(y)$ y $\eta(x)$ son elementos homogéneos de pesos no nulos y opuestos: entonces existen $r > 0$ y p_y, $p_x \in \Bbbk[h] \setminus 0$ tales que o bien (♣) $\eta(y) = y^r p_y(h)$ y $\eta(x) = p_x(h)x^r$, o (♠) $\eta(y) = p_y(h)x^r$ y $\eta(x) = y^r p_x(h)$. De hecho, podemos suponer que sucede el primer caso (♣): de no ser así podemos reemplazar A_2 por $A_3 = \mathcal{A}(q_2^{-1}, a_3)$ con $a_3(h) = a_2(q_2 h)$, y η por $\omega \circ \eta$ con $\omega : A_2 \to A_3$ el isomorfismo que verifica $\omega(y) = x$, $\omega(h) = h$ y $\omega(x) = y$, pues esto no afecta la conclusión del teorema.

Usando (♣) en la ecuación (2.6) vemos que $\deg a_1 = \deg p_y + \deg p_x + r \deg a_2$, y esto sólo es posible si $r = 1$, p_y, $p_x \in \Bbbk$ y $\deg a_1 = \deg a_2$. Se sigue que

$$0 = \eta\big(yx - a_1(h)\big) = p_y p_x yx - a_1(\gamma h) = p_y p_x a_2(h) - a_1(\gamma h),$$

de manera que $a_2(h) = p_y^{-1} p_x^{-2} a_1(\gamma h)$ y, similarmente,

$$0 = \eta(hy - q_1 yh) = (q_2 - q_1)\gamma p_y yh,$$

por lo tanto $q_2 = q_1$. Esto completa la demostración del teorema. □

2.5. Dos generalizaciones

En las secciones anteriores trabajamos con álgebras de Weyl generalizadas definidas sobre $D = \Bbbk[h]$ y con nuestro trabajo cubrimos todos los *casos borde*. El mismo enfoque se puede usar para trabajar con otras álgebras de Weyl generalizadas. En esta sección vamos a mostrar algunas de las nuevas ideas y los nuevos problemas que aparecen cuando trabajamos con $D = \Bbbk[h_1, h_2]$. Este es un trabajo en progreso y es por eso que no vamos a considerar todos los casos borde. También vamos a mostrar algunas de las modificaciones que se pueden hacer a las pruebas anteriores para que funcionen en el caso en el que $D = \Bbbk[h^{\pm 1}]$.

2.5.1. El caso $D = \Bbbk[h_1, h_2]$

Una parte importante de la estrategia en el caso $D = \Bbbk[h]$ es conocer los automorfismos de D. Eso nos permite diferenciar entre los casos conmutativo, clásico y cuántico en la Proposición 1.3.1. Cuando $D = \Bbbk[h_1, h_2]$ también se conocen los automorfismos de D. Se tiene, por ejemplo, el siguiente teorema de Jung y van der Kulk [Jun42, vdK53].

Teorema 2.5.1. *Todos los automorfismos de* $D = \Bbbk[h_1, h_2]$ *son mansos, es decir, se escriben como producto finito de automorfismos lineales y triangulares.*

Fue conjeturado por Nagata [Nag72] que el análogo a este teorema para polinomios en 3 variables es falso. Esto fue demostrado por Shestakov y Umirbaev [SU04].

La dificultad creciente de la descripción de los automorfismos de los anillos de polinomios hace imposible utilizar dicha descripción en las demostraciones como hicimos en el caso $D = \Bbbk[h]$.

Para poder usar los mismos métodos que usamos para $D = \Bbbk[h]$ vamos a restringirnos a lo más parecido al caso cuántico en este contexto. Vamos a suponer que el automorfismo $\sigma : D \to D$ involucrado en la definición de estas álgebras es *diagonal*, esto es: existen q_1 y $q_2 \in \Bbbk$ tales que $\sigma(h_i) = q_i h_i$. Los ejemplos que más nos interesan suceden en este contexto. El álgebra que vamos a considerar es el álgebra $A = A(q_1, q_2, a)$ generada por cuatro variables y, h_1, h_2 y x sujetas a las relaciones:

$$h_i y = q_i y h_i, \qquad x h_i = q_i h_i x, \qquad h_1 h_2 = h_2 h_1, \qquad yx = a, \qquad xy = \sigma(a).$$

Nuestra motivación para extender los métodos anteriores a este caso es poder aplicar nuestros teoremas a las álgebras down-up generalizadas definidas por Cassidy y Shelton en [CS04]. Para hacer eso podemos usar la presentación como álgebras de Weyl generalizadas cuánticas que dan Carvalho y Lopes en la sección 2 de [CL09]: el álgebra down-up generalizada $L = L(f, r, s, 0)$ con $r \neq 1$ es isomorfa a un álgebra de Weyl generalizada cuántica definida sobre $\Bbbk[h_1, h_2]$ con $\sigma(h_1) = rh_1$, $\sigma(h_2) = sh_2$ y $a(h_1, h_2) = h_2 + g(h_1)$ para un cierto $g \in \Bbbk[h_1]$ que depende de f.

Para probar que no hay derivaciones homogéneas localmente nilpotentes no nulas usando la misma demostración que para el Lema 2.3.1, lo único que necesitamos es mostrar que si d es una derivación localmente nilpotente de peso $r \geq 0$ entonces existen $p_i \in \Bbbk[h_1, h_2]$ tales que $d(h_i) = y^r p_i h_i$. Esto no es cierto en general: por ejemplo, si $q_1 = q_2$, $a = f(h_2)$ entonces

$$d(y) = 0 = d(x), \qquad d(h_2) = 0, \qquad d(h_1) = h_2,$$

define una derivación localmente nilpotente de peso 0 que no satisface la condición.

Una forma de garantizar la condición que necesitamos es suponer que q_1 no pertenece al semigrupo generado por q_2 y viceversa, dicho de otra forma:

$$q_1 \notin \langle q_2 \rangle \qquad \text{y} \qquad q_2 \notin \langle q_1 \rangle. \tag{2.7}$$

En este caso es fácil ver que si $p \in \Bbbk[h_1, h_2]$ satisface $\sigma(p) = q_i p$ para algún $i \in \{1, 2\}$ entonces $h_i \mid p_i$. Esta observación nos permite demostrar el Lema 2.3.1 con exactamente la misma demostración que antes. El análogo del Corolario 2.3.2 también se sigue inmediatamente en este caso:

Corolario 2.5.2. *Supongamos que el álgebra A satisface la condición (2.7), entonces las derivaciones localmente finitas son homogéneas de peso 0.* □

El siguiente punto en el que debemos adaptar nuestra demostración es la Proposición 2.3.3. Las modificaciones para esta parte son un poco más complicadas, es por eso que vamos a enunciar y demostrar el reemplazo para dicha proposición. Vamos a decir que un polinomio $f \in \Bbbk[h_1, h_2]$ es *cuasihomogéneo* si existen n_1 y $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que f es homogéneo para la graduación de $\Bbbk[h_1, h_2]$ inducida por $|h_i| = n_i$ $(i = 1, 2)$. Esta definición es el análogo en dimensión 2 a que un polinomio sea un monomio. La propiedad de ser cuasihomogéneo está relacionada con la dimensión del polítopo de Newton $\mathcal{P}_f$ del polinomio f:

- Si la dimensión de $\mathcal{P}_f$ es 2, entonces f no es cuasihomogéneo.
- Si la dimensión de $\mathcal{P}_f$ es 1, entonces f es cuasihomogéneo con solo una (a menos de escalar) asignación de pesos posible.
- Si la dimensión de $\mathcal{P}_f$ es 0, entonces f es cuasihomogéneo de dos formas no equivalentes.

Si el polinomio a que se usa en la construcción de nuestro álgebra es cuasihomogéneo, entonces hay más derivaciones localmente finitas. Para cada par (n_1, n_2) correspondiente a una graduación de $\Bbbk[h_1, h_2]$ que hace de a un polinomio homogéneo hay una derivación localmente finita

$$\tau_{n_1,n_2} = n_1 h_1 | \hat{H}_1 + n_2 h_2 | \hat{H}_2 + C x | \hat{X},$$

donde C es el grado de a para esta graduación. Notemos que este tipo de derivaciones forman un espacio vectorial que llamaremos T. Su dimensión está relacionada con la del polítopo de Newton de a:

$$\dim \mathcal{P}_a + \dim T = 2.$$

Proposición 2.5.3. *Sea A un álgebra de Weyl generalizada cuántica definida sobre $\Bbbk[h_1, h_2]$ que satisface la condición (2.7). Consideremos $d : A \to A$ una derivación localmente finita, y la derivación $\xi = y|\hat{Y} - x|\hat{X}$.*

(i) *Si a no es cuasihomogéneo, entonces d es un múltiplo escalar de ξ.*

(ii) *Si a es cuasihomogéneo, entonces d es una combinación lineal de ξ y de una derivación $\tau \in T$.*

Todas las derivaciones localmente finitas son diagonalizables en la base de los monomios estándar y, en particular, conmutan.

Demostración. Sea d una derivación localmente finita. En virtud del Corolario 2.3.2, sabemos que d es homogénea de peso 0, de manera que d admite una escritura de la forma

$$d = yf_y|\hat{Y} + h_1 g_1|\hat{H_1} + h_2 g_2|\hat{H_2} + f_x x|\hat{X}, \text{ con } f_y,\ f_x,\ g_1 \text{ y } g_2 \in \Bbbk[h_1, h_2].$$

Consideremos ahora la restricción de d a $\Bbbk[h_1, h_2]$ (que seguiremos llamando d). Esta derivación resulta ser una derivación localmente finita del anillo de polinomios en 2 variables.

Para esta demostración vamos a considerar la graduación de $\Bbbk[h_1, h_2]$ con $|h_i| = 1$. Ahora, descomponemos d como suma de derivaciones homogéneas para esta graduación. Si en esta descomposición aparece algún término de grado positivo, entonces el sumando de mayor grado tiene que ser localmente nilpotente. Llamemos δ a este sumando. Es claro que $h_i \mid \delta(h_i)$ para $i = 1, 2$ y por lo tanto, usando que $\ker d$ es factorialmente cerrado, $\delta = 0$. La única opción que queda es que d sea homogénea de grado 0, que es lo mismo que decir que los polinomios g_1 y g_2 son constantes.

El siguiente paso es probar que tanto f_x como f_y también tienen que ser constantes. Como las demostraciones son análogas vamos a hacerla solamente para f_y. Consideremos la sucesión de polinomios $\{p_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ definida por $d^i(y) = yp_i$. Estos polinomios satisfacen la recurrencia:

$$\begin{cases} p_{i+1} = f_y p_i + g_1 h_1 \frac{\partial p_i}{\partial h_1} + g_2 h_2 \frac{\partial p_i}{\partial h_2}, \\ p_0 = 1. \end{cases}$$

Si f_y no es constante entonces $\deg p_{i+1} = \deg f_y + \deg p_i = i + 1 \deg f_y$ y esto no es posible si d es localmente finita. Concluimos, entonces, que f_y es constante.

La ecuación $yx = a$ implica que $d(y)x + yd(x) = d(a)$. Si desarrollamos esta ecuación obtenemos:

$$(f_y + f_x)a = g_1 h_1 \frac{\partial a}{\partial h_1} + g_2 h_2 \frac{\partial a}{\partial h_2}, \tag{2.8}$$

con f_y, f_x, g_1 y $g_2 \in \Bbbk$. El espacio de soluciones de esta ecuación lineal puede tener dimensión entre 1 y 3, dependiendo de *la forma de* a. En concreto:

- Si a no es cuasihomogéneo, entonces (2.8) es equivalente a $f_x + f_y = 0$, $g_1 = g_2 = 0$ y el espacio de soluciones tiene dimensión 1. Éste es el caso en el $\dim \mathcal{P}_a = 2$.
- Si a es cuasihomogéneo pero no es un monomio, entonces el espacio de soluciones tiene dimensión 2 y (2.8) es equivalente a que g_1 y g_2 sean los pesos que hay que asignarle a h_1 y a h_2 respectivamente para que a se

vuelva homogéneo y a que $f_x + f_y = W$ donde W es el grado de a en esta graduación (notar que g_1 y g_2 están definidos a menos de escalar). Éste es el caso en el $\dim \mathcal{P}_a = 1$.

- Si a es un monomio entonces a es cuasihomogéneo de varias formas no equivalentes y el espacio de soluciones de (2.8) tiene dimensión 3. Éste es el caso en el $\dim \mathcal{P}_a = 0$.

Resolviendo la Ecuación (2.8) en cada uno de estos casos se termina la demostración de esta proposición. □

Observación 2.5.4. La idea de considerar una graduación en el anillo de polinomios en dos variables para poder probar que una cierta derivación no es localmente finita sale de un algoritmo ideado por van den Essen en [vdE92, Prop. 4.1 y 5.1] para identificar derivaciones localmente finitas definidas en los polinomios en dos variables. En nuestro caso usamos solo el primer paso de dicho algoritmo pues (con su notación) $W = \emptyset$.

Ahora podemos enunciar el análogo al Corolario 2.3.4, usando el concepto de polítopo de Newton.

Corolario 2.5.5. *Si* $A_1 = \mathcal{A}(q_{1,1}, q_{1,2}, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_{2,1}, q_{2,2}, a_2)$ *son dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas isomorfas definidas sobre* $\Bbbk[h_1, h_2]$, *entonces la dimensión del polítopo de Newton de* a_1 *coincide con la del de* a_2. *En particular la dimensión del polítopo de Newton de* a *es un invariante para estas álgebras.*

Demostración. La dimensión del polítopo de Newton se lee inmediatamente de la dimensión del espacio de derivaciones localmente finitas, como vimos al final de la última demostración. □

A partir de ahora vamos a restringirnos al caso en el que a no es cuasihomogéneo. En este caso la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 2.5.6. *Sean* $A_1 = \mathcal{A}(q_{1,1}, q_{1,2}, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_{2,1}, q_{2,2}, a_2)$ *dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas isomorfas definidas sobre* $\Bbbk[h_1, h_2]$ *y sean* ξ_1 *y* ξ_2 *sus respectivas derivaciones eulerianas. Supongamos además que* a_1 *no es cuasihomogéneo (y por lo tanto* a_2 *tampoco). Si* $\eta : A_1 \to A_2$ *es un isomorfismo, entonces* $\eta \circ \xi_1 \circ \eta^{-1}$ *es un múltiplo escalar de* ξ_2.

Demostración. Es claro que $\eta \circ \xi_1 \circ \eta^{-1}$ es una derivación localmente finita de A_2 y en virtud de la Proposición 2.5.3 es un múltiplo escalar de ξ_2. □

El paso siguiente es demostrar un reemplazo de la Proposición 2.4.1, pero debido a ciertas dificultades técnicas vamos a suponer además que

$$q_{1,1} = q_{2,1} \qquad \text{y} \qquad q_{1,2} = q_{2,2}. \tag{2.9}$$

Notemos que estas condiciones se satisfacen automáticamente si estamos tratando con un automorfismo.

Proposición 2.5.7. *Sean* $A_1 = \mathcal{A}(q_{1,1}, q_{1,2}, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_{2,1}, q_{2,2}, a_2)$ *dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas donde, ni* a_1*, ni* a_2 *son cuasihomogéneos y además los parámetros* $q_\bullet$ *satisfacen* (2.7) *y* (2.9). *Si* $\eta : A_1 \to A_2$ *es un isomorfismo de álgebras, entonces existen* $\gamma_1, \gamma_2, \mu, \nu \in \mathbb{k} \setminus 0$ *tales que* $\eta(h_i) = \gamma h_i$ *y*

(♣) *o bien* $\eta(y) = \mu y$ *y* $\eta(x) = \nu x$

(♠) *o* $\eta(y) = \mu x$ *y* $\eta(x) = \nu y$.

Demostración. Al igual que en el caso de álgebras definidas sobre $\mathbb{k}[h]$, vemos que η se restringe a un isomorfismo entre $\ker \xi_1$ y $\ker \xi_2$, ambos núcleos se identifican con $\mathbb{k}[h_1, h_2]$ y por lo tanto η induce un automorfismo del anillo de polinomios en dos variables.

De la misma manera que en la Sección 2.4, vemos que hay dos opciones (que se corresponden con los dos puntos del enunciado): que $\eta(y)$ tenga peso 1 y $\eta(x)$ tenga peso -1, o al revés.

Supongamos que estamos en el primer caso; el otro caso se trata de manera similar. Consideremos, para $i = 1, 2$, la ecuación $h_i y = q_{1,i} y h_i$; al aplicar η a ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta que $\eta(y)$ tiene peso 1 y que $\eta(h_i) \in \mathbb{k}[h_1, h_2]$, vemos que $\sigma_2(\eta(h_i)) = q_{1,i}\eta(h_i)$. Usamos ahora la Ecuación (2.9) y reescribimos esta última igualdad como

$$\sigma_2(\eta(h_i)) = q_{2,i}\eta(h_i).$$

Vemos que $h_i \mid \eta(h_i)$. Como η es un isomorfismo, sabemos que η manda elementos irreducibles en elementos irreducibles y por lo tanto $\eta(h_i)$ es irreducible. Se sigue inmediatamente que $\eta(h_i)$ es un múltiplo escalar de h_i.

Para probar (♣), podemos hacer lo mismo que hicimos para $\mathbb{k}[h]$. Existe $f \in \mathbb{k}[h_1, h_2]$ tal que $y = \eta(yf) = \eta(y)\eta(f)$: como $\eta(f) \in \mathbb{k}[h_1, h_2]$, se sigue de esto que $\eta(y)$ genera la componente de A_2 de peso 1 como módulo (a derecha) sobre $\mathbb{k}[h_1, h_2]$. Sabemos que esta componente es un módulo libre de rango 1, y por lo tanto tiene un solo generador a menos de escalar. Podemos concluir, entonces, que $\eta(y)$ tiene que ser un múltiplo escalar de y. El mismo argumento aplicado a x muestra que también $\eta(x)$ es un múltiplo escalar de x. □

Con esta última proposición, la descripción de los automorfismos y de los isomorfismos de estas álgebras es un cálculo sencillo. Vamos a escribir $a = \sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} h_1^i h_2^j$. En esa escritura $a_{i,j} \neq 0$ y por lo tanto I es el *soporte* de a.

Teorema 2.5.8. *Sea* $A = \mathcal{A}(q_1, q_2, a)$ *un álgebra de Weyl generalizada cuántica definida sobre* $\mathbb{k}[h_1, h_2]$*, con* a *no cuasihomogéneo, y sea* $(i_0, j_0) \in I$ *cualquiera. Definimos*

$$C = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k}^\times : \gamma_1^{i-i_0}\gamma_2^{j-j_0} = 1 \text{ para todo } (i,j) \in I\} \subseteq \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k}^\times.$$

Si $(\gamma_1, \gamma_2, \mu) \in C \times \mathbb{k}^\times$*, tenemos un automorfismo* $\eta_{\gamma_1,\gamma_2,\mu} : A \to A$ *tal que*

$$\eta_{\gamma_1,\gamma_2,\mu}(y) = \mu y, \quad \eta_{\gamma_1,\gamma_2,\mu}(h_i) = \gamma_i h_i \quad y \quad \eta_{\gamma_1,\gamma_2,\mu}(x) = \mu^{-1}\gamma_1^{i_0}\gamma_2^{j_0} x.$$

El conjunto

$$G = \{\eta_{\gamma_1,\gamma_2,\mu} : (\gamma_1, \gamma_2, \mu) \in C \times \Bbbk^\times\}$$

es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(A)$ *isomorfo a* $C \times \Bbbk^\times$*. Si se satisface la condición* (2.7)*, entonces,* $q_1 \neq -1$ *o* $q_2 \neq -1$ *y* $\mathrm{Aut}(A) = G$.

Demostración. Es fácil ver que de hecho G es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(A)$ isomorfo a $C \times \Bbbk^\times$ por lo que sólo queda ver que en realidad G coincide con $\mathrm{Aut}(A)$. Sea $\eta : A \to A$ un automorfismo. Teniendo en cuenta la Proposición 2.5.7, vemos que existen γ_1, γ_2, μ, $\nu \in \Bbbk \setminus 0$ tales que $\eta(h_i) = \gamma h_i$ y sucede una de las siguientes opciones:
(♣) $\eta(y) = \mu y$ y $\eta(x) = \nu x$, o
(♠) $\eta(y) = \mu x$ y $\eta(x) = \nu y$.
En el primer caso, aplicando η a ambos lados de la igualdad $yx = a(h)$ se sigue que para todos los pares $(i, j) \in I$ se tiene $\gamma_1^i \gamma_2^j = \mu\nu$, de manera que $\gamma_1^{i-i_0}\gamma_2^{j-j_0} = 1$ para todo $(i, j) \in I$ y, por lo tanto, $(\gamma_1, \gamma_2) \in C$. Por último, de la ecuación $\gamma_1^i \gamma_2^j = \mu\nu$ que habíamos deducido antes, vemos que $\nu = \mu^{-1}\gamma_1^{i_0}\gamma_2^{j_0}$ y concluimos que $\eta = \eta_{\gamma_1,\gamma_2,\mu} \in G$.

Si en cambio estamos en el segundo caso, aplicando η a las igualdades $h_i y = q_i y h_i$ vemos que $q_i^2 = 1$ y entonces $q_1 = q_2 = -1$. De aquí se deduce que cuando para algún $i = 1, 2$ vale que $q_i \neq -1$, la alternativa (♠) no sucede, y por lo tanto $\mathrm{Aut}(A) = G$. □

Este teorema da, como corolario, una demostración alternativa a una parte de un teorema de Carvalho y Lopes que se encuentra en [CL09]: la que cubre el caso *genérico*.

Corolario 2.5.9. *Si* r *y* s *satisfacen las condiciones* (2.7)*, el grupo de automorfismos del álgebra down-up generalizada* $L(f, r, s, 0)$ *es* G

Demostración. Como observamos al principio de esta sección el álgebra $L(f, r, s, 0)$ puede presentarse como un álgebra de Weyl generalizada $A(\Bbbk[h_1, h_2], \sigma, a)$ con $\sigma(h_1) = rh_1$, $\sigma(h_2) = sh_2$ y $a(h_1, h_2) = h_2 + g(h_1)$ para un cierto polinomio g unívocamente determinado por f y tal que $\operatorname{supp} g = \operatorname{supp} f$. En este caso

$$C = \left\{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Bbbk^\times \times \Bbbk^\times : \gamma_1^i = \gamma_2 \text{ para cada } i \in \operatorname{supp} f\right\},$$

y si llamamos $\rho = \gcd\{\deg f - i : i \in \operatorname{supp} f\}$, podemos escribir esto en la forma

$$C = \left\{(\gamma_1, \gamma_1^{\deg f}) \in \Bbbk^\times \times \Bbbk^\times : \gamma_1 \in C_\rho\right\}.$$

Vemos, entonces, que el grupo G del Teorema 2.5.8 coincide con el grupo denotado $\mathcal{H}$ al comienzo de la Sección 2.4 en [CL09] y entonces obtenemos la parte (*f*) del Teorema 2.19 de ese trabajo. □

Teorema 2.5.10. *Sean* a_1, $a_2 \in \mathbb{k}[h_1, h_2]$ *dos polinomios que no son cuasihomogéneos y* q_1, $q_2 \in \mathbb{k} \setminus \{0, 1\}$ *dos parámetros que satisfacen* (2.7) *y* (2.9). *Las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas* $A_1 = \mathcal{A}(q_1, q_2, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_1, q_2, a_2)$ *son isomorfas si y sólo si existen escalares no nulos* α, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{k}$ *tales que* $a_2(h) = \alpha a_1(\beta_1 h_1, \beta_2 h_2)$.

Demostración. Se puede comprobar fácilmente que la condición sobre a_1 y a_2 es suficiente para que A_1 y A_2 sean isomorfas. Vamos a demostrar que esta condición es necesaria. Con las condiciones que agregamos la demostración de este teorema va a ser una versión simplificada de la del Teorema 2.4.4.

Fijemos un isomorfismo $\eta : A_1 \to A_2$. Aplicando la Proposición 2.5.7, vemos que existen escalares γ_1, γ_2, μ, $\nu \in \mathbb{k} \setminus 0$ tales que $\eta(h_i) = \gamma h_i$ y

(♣) o bien $\eta(y) = \mu y$ y $\eta(x) = \nu x$

(♠) o $\eta(y) = \mu x$ y $\eta(x) = \nu y$.

Ahora, de la ecuación $yx = a_1(h)$ in A_1, se sigue que

$$\eta(y)\eta(x) = a_1(\gamma_1 h_1, \gamma_2 h_2) \tag{2.10}$$

En el caso (♣), vemos que $\mu\nu a_2(h_1, h_2) = a_1(\gamma_1 h_1, \gamma_2 h_2)$ y en el caso (♠) vemos que $\mu\nu a_2(q_1 h_1, q_2 h_2) = a_1(\gamma_1 h_1, \gamma_2 h_2)$. En ambos casos concluimos que $a_2(h) = \alpha a_1(\beta_1 h_1, \beta_2 h_2)$ como queríamos. □

2.5.2. El caso $D = \mathbb{k}[h^{\pm 1}]$

Este caso fue considerado por Bavula y Jordan en su artículo [BJ01]. Ellos obtienen el siguiente resultado, suponiendo que q no es raíz de la unidad.

Teorema 2.5.11 (Thm 5.2,[BJ01]). *Sean* $0 \neq a_1$, $a_2 \in \mathbb{k}[h^{\pm 1}]$, $q \in \mathbb{k}^\times$ *de orden infinito y* $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathbb{k}[h^{\pm 1}]$ *tal que* $\sigma(h) = qh$. *Entonces* $\mathbb{k}[h^{\pm 1}](\sigma, a_1) \cong \mathbb{k}[h^{\pm 1}](\sigma, a_2)$ *si y solo si* $a_2(h) = \eta h^m a_1(\mu h^{\pm 1})$ *para algunos* η, $\mu \in \mathbb{k}^\times$ *y algún entero* m.

En esta sección vamos a adaptar los métodos que usamos para $\mathbb{k}[h]$ a este contexto. El álgebras de Weyl generalizada cuántica $A = A(\mathbb{k}[h^{\pm 1}], \sigma, a)$ puede ser presentada por generadores y, h, h^{-1}, x y relaciones

$$\begin{aligned} hy &= qyh, & yx &= a(h), \\ xh &= qhx, & xy &= a(qh), \\ hh^{-1} &= h^{-1}h = 1. \end{aligned}$$

En esta sección también vamos a restringirnos al caso cuántico. Por eso vamos a considerar el automorfismo $\sigma : \mathbb{k}[h^{\pm 1}] \to \mathbb{k}[h^{\pm 1}]$ definido por $\sigma(h) = qh$.

En los trabajos de Bavula y Jordan [BJ01] y Richard y Solotar [RS06] se puede observar que el caso en el que h es inversible es más *fácil* que el caso en el que no lo es. Con nuestro enfoque también se nota esta diferencia. Por ejemplo, vale en este contexto una versión más fuerte del Lema 2.3.1:

Lema 2.5.12. *No hay derivaciones localmente nilpotentes no nulas.*

Demostración. Sea d una derivación localmente nilpotente. Las unidades de A están contenidas en $\ker d$: si u es una unidad $d(uu^{-1}) = d(1) = 0$ y, como $\ker d$ es factorialmente cerrado, se sigue que $u \in \ker d$.

En estas álgebras tanto h como h^{-1} son unidades y por lo tanto $d(h) = 0$, $d(h^{-1}) = 0$ y $d(yx) = d(a) = 0$. Luego $yx \in \ker d$ y entonces concluimos que $d(y) = d(x) = 0$, usando de nuevo que $\ker d$ es factorialmente cerrado. □

De este lema se sigue, como antes, el siguiente corolario:

Corolario 2.5.13. *Las derivaciones localmente finitas son homogéneas de peso* 0.

Proposición 2.5.14. *Sean* $d : A \to A$ *una derivación localmente finita y* $\xi = y|\hat{Y} - x|\hat{X}$ *la derivación euleriana.*

(I) *Si* a *no es un monomio, entonces* d *es un múltiplo escalar de* ξ*.*
(II) *Si* $a = h^N$ *es un monomio, entonces* d *es una combinación lineal de* ξ *y* $\tau = h|\hat{H} + Nx|\hat{X}$*.*

Todas las derivaciones localmente finitas son diagonalizables en la base de los monomios estándar y, en particular, conmutan.

Demostración. Sea d una derivación localmente finita. Por el corolario anterior sabemos que d es homogénea de peso 0 y por lo tanto existen p_1, p_2 y $p_3 \in \Bbbk[h^{\pm 1}]$ tales que $d = yp_1|\hat{Y} + p_2|\hat{H} + p_3 x|\hat{X}$. En particular d se restringe a $\Bbbk[h^{\pm 1}]$ y la restricción sigue siendo localmente finita. Los polinomios de Laurent admiten una graduación tal que $|h| = 1$ y $|h^{-1}| = -1$. Para esta graduación se puede usar la misma idea que usamos en la demostración de la Proposición 2.5.3: es fácil ver que no hay derivaciones localmente nilpotentes no nulas en $\Bbbk[h^{\pm 1}]$ y por lo tanto la restricción de d a $\Bbbk[h^{\pm 1}]$ tiene que ser homogénea de grado 0. Esto es lo mismo que decir que p_2 es un múltiplo escalar de h.

Para probar que p_1 y p_3 tienen que ser constantes vamos a usar un argumento similar al que usamos en la demostración de la Proposición 2.5.3. Consideremos la sucesión de polinomios de Laurent definida por:

$$\begin{cases} f_{i+1} = p_1 f_i + p_2 h f_i' \\ f_0 = 1, \end{cases}$$

es claro que vale $d^i(y) = yf_i$ y por lo tanto el espacio vectorial generado por $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene que ser de dimensión finita. Si p_1 no es constante, entonces o bien el término de menor grado de p_1 tiene grado negativo o bien el término de mayor grado de p_1 tiene grado positivo. Los dos casos se tratan de manera similar. Supongamos que $\deg_{\text{máx}} p_1 > 0$, entonces

$$\deg_{\text{máx}} f_{i+1} = \deg_{\text{máx}} p_1 + \deg_{\text{máx}} f_i > \deg_{\text{máx}} f_i.$$

Esto no puede pasar si el espacio generado por las f_i tiene dimensión finita. En el otro caso la prueba es la misma reemplazando $\deg_{\text{máx}}$ por $\deg_{\text{mín}}$. Así concluimos que p_1 es constante y de manera análoga se puede ver que p_3 es constante. La demostración se termina de la misma manera que la de la Proposición 2.3.3, con la diferencia que en este caso N puede ser negativo. $\square$

Si a es un monomio, entonces el álgebra A es $\mathbb{k}_q[y^{\pm 1}, h^{\pm 1}]$; esto se sigue de que a es una unidad de D y por lo tanto x e y también lo son y podemos despejar x en función de h e y. Este álgebra, llamada el *toro cuántico*, ha sido ampliamente estudiada, por ejemplo por Osborn y Passman en [OP95] donde se describen sus derivaciones y automorfismos. A partir de ahora nos vamos a restringir al caso en que a no es un monomio. En este caso, el análogo de la Proposición 2.3.5 es inmediato porque, a menos de escalar, hay una única derivación localmente finita.

El paso que sigue en nuestra técnica es describir como actúa un isomorfismo sobre los generadores de estas álgebras. Esto lo llevamos a cabo con la siguiente proposición.

Proposición 2.5.15. *Sean* $A_1 = \mathcal{A}(q_1, a_1)$ *y* $A_2 = \mathcal{A}(q_2, a_2)$ *dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas isomorfas definidas sobre* $\mathbb{k}[h^{\pm 1}]$. *Supongamos que* a_1 *no es un monomio (y entonces* a_2 *tampoco). Si* $\eta : A_1 \to A_2$ *es un isomorfismo de álgebras, entonces existen* $\gamma, \mu, \nu \in \mathbb{k} \setminus 0$, $r, s \in \mathbb{Z}$ *y* $\epsilon \in \{\pm 1\}$ *tales que* $\eta(h) = \gamma h^{\epsilon}$ *y*

(♣) *o bien* $\eta(y) = \mu y h^r$ *y* $\eta(x) = \nu h^s x$

(♠) *o* $\eta(y) = \mu h^r x$ *y* $\eta(x) = \nu y h^s$.

Demostración. Sabemos, al igual que en la demostración de la Proposición 2.4.1 que η se restringe a un isomorfismo entre $\mathbb{k}[h^{\pm 1}] \subseteq A_1$ y $\mathbb{k}[h^{\pm 1}] \subseteq A_2$. Como h es una unidad en los polinomios de Laurent se sigue que $\eta(h)$ tiene que ser de la forma γh^m. Como además h genera $\mathbb{k}[h^{\pm 1}]$ se tiene que $m = \pm 1$.

Teniendo en cuenta la estructura de grupo abeliano del conjunto de los pesos, y al igual que antes, vemos que $\eta(y)$ y $\eta(x)$ tienen pesos 1 y -1 en algún orden. Estos dos casos se corresponden con los puntos (♣) y (♠) del enunciado. Ambos casos se tratan de manera similar por lo que vamos a hacer en detalle solo uno de ellos. Supongamos que $\eta(y)$ tiene peso 1 y $\eta(x)$ tiene peso -1. Como $\eta(y)$ genera la componente de peso 1 de A como $\mathbb{k}[h^{\pm 1}]$-módulo, se sigue que existen $r \in \mathbb{Z}$ y $\mu \in \mathbb{k}^{\times}$ tales que $\eta(y) = \mu y h^r$. De la misma manera, existen $s \in \mathbb{Z}$ y $\nu \in \mathbb{k}^{\times}$ tales que $\eta(x) = \nu h^s x$ $\square$

Trabajando sobre los polinomios de Laurent aparece un fenómeno que no habíamos visto antes.

Definición 2.5.16. Decimos que un polinomio de Laurent $a \in \mathbb{k}[h^{\pm 1}]$ es *simétrico* si existen $l \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{k}$ y $\delta \in \mathbb{k}$ tales que

$$\delta a(h) = h^l a(\gamma h^{-1}).$$

Es importante notar que l queda univocamente determinado pero ni δ ni γ son necesariamente únicos.

En este punto ya tenemos todos los elementos para demostrar los dos teoremas principales.

Teorema 2.5.17. *Sea* $A = \mathcal{A}(q, a)$ *un álgebra de Weyl generalizada cuántica definida sobre* $\Bbbk[h^{\pm 1}]$, *con* $a = \sum_{i \in I} a_i h^i$ *y* $a_i \neq 0$ *para todo* $i \neq 0$. *Supongamos que* a *no es simétrico. Sean* $g = \gcd\{i - j : a_i a_j \neq 0\}$, $C_g \subseteq \Bbbk^\times$ *el subgrupo de raíces de la unidad de orden* g *e* $i_0 \in I$ *cualquiera. Si* $(\gamma, \mu, r) \in C_g \times \Bbbk^\times \times \mathbb{Z}$, *tenemos un automorfismo* $\eta_{\gamma,\mu,r} : A \to A$ *tal que*

$$\eta_{\gamma,\mu,r}(y) = \mu y h^r, \quad \eta_{\gamma,\mu,r}(h) = \gamma h, \quad y \quad \eta_{\gamma,\mu,r}(x) = \mu^{-1}\gamma^{i_0} h^{-r} x.$$

El conjunto $G = \{\eta_{\gamma,\mu,r} : (\gamma, \mu, r) \in C_g \times \Bbbk^\times \times \mathbb{Z}\}$ *es un subgrupo de* $\mathrm{Aut}(A)$ *isomorfo a* $C_g \times \Bbbk^\times \times \mathbb{Z}$.

(I) *Si* $q \neq -1$, *tenemos de hecho* $\mathrm{Aut}(A) = G$.

(II) *Si* $q = -1$, *hay una sucesión exacta corta de grupos que se parte a derecha*

$$1 \longrightarrow G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

El grupo cíclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *que aparece aquí está generado por la imagen de la involución* $\Omega : A \to A$ *tal que* $\Omega(y) = x$, $\Omega(h) = -h$ *y* $\Omega(x) = y$.

Demostración. Mediante un cálculo simple se puede verificar que G es un subgrupo de automorfismos de A.

Sea $\eta : A \to A$ un automorfismo. De acuerdo a la Proposición 2.5.15, existen γ, μ, $\nu \in \Bbbk \setminus 0$, r, $s \in \mathbb{Z}$ y $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tales que $\eta(h) = \gamma h^\epsilon$ y o bien (♣) $\eta(y) = \mu y h^r$ y $\eta(x) = \nu h^s x$ o (♠) $\eta(y) = \mu h^r x$ y $\eta(x) = \nu y h^s$. En el primer caso, aplicamos η a ambos lados de la igualdad $yx = a$ y vemos que

$$\mu\nu y h^{r+s} x = a(\gamma h^\epsilon),$$

o escrito de otra forma,

$$\mu\nu q^{-r-s} a(h) h^{r+s} = a(\gamma h^\epsilon).$$

Como a no es simétrico se sigue que $\epsilon = 1$ y que $r + s = 0$. Por lo tanto

$$\mu\nu = \gamma^i,$$

para todo i tal que $a_i \neq 0$. Concluimos, al igual que en la demostración del Teorema 2.4.2, que $\eta \in G$.

En el segundo caso, aplicamos η a la ecuación $yx = a$ y vemos que

$$\mu\nu h^r x y h^s = a(\gamma h^\epsilon).$$

Se sigue que $\epsilon = 1$, pues si este no fuera el caso tendriamos que a es simétrico. Ahora, aplicando η a la ecuación $hy = qyh$, vemos que

$$\gamma\mu h^{r+1}x = q\gamma\mu h^r xh.$$

Esto solo es posible si $q^2 = 1$. Por lo tanto terminamos la demostración de *(i)*. Siguiendo con el caso en el que $q^2 = 1$ consideremos la involución Ω que aparece en el enunciado. Es fácil ver que está bien definida y que $\eta\Omega$ cae en el primer caso y por lo tanto $\eta\Omega \in G$. Esto termina la demostración de *(ii)* y del teorema. □

Observación 2.5.18. Supongamos que a es un polinomio simétrico. Por lo tanto existen $l \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Bbbk$ y $\delta \in \Bbbk$ tales que

$$\delta a(h) = h^l a(\gamma h^{-1}).$$

Sean N y n los grados máximo y mínimo de a. Podemos despejar l y obtener $l = n + N$. Además para todo i vale:

$$\delta a_i = a_{l-i}\gamma^{l-i} \tag{2.11}$$

Si a es un monomio hay infinitos pares (γ, δ) que satisfacen estas ecuaciones. Si no, entonces podemos tomar $i = N, n$ en (2.11) para obtener

$$\delta a_N = a_n\gamma^n \quad \text{y} \quad \delta a_n = a_N\gamma^N.$$

Multiplicando estas dos ecuaciones y cancelando $a_N a_n$ vemos que

$$\delta^2 = \gamma^{N+n}.$$

Reemplazando $\delta = \frac{a_n}{a_N}\gamma^n$ concluimos que

$$\left(\frac{a_n}{a_N}\right)^2 = \gamma^{N-n}.$$

De esta última ecuación se sigue que, en este caso, hay solamente finitos pares (γ, δ) que satisfacen la ecuación (2.11).

Es posible usar estas observaciones para ampliar el Teorema 2.5.17 al caso a simétrico. El enunciado resultante es considerablemente más complicado y vamos a omitir los detalles.

Ahora vamos a demostrar el Teorema 2.5.11 con nuestros métodos. Nuestra versión es más general pues aceptamos dos álgebras *con distintos* q y además no tenemos la restricción de que q no sea raíz de la unidad.

Teorema 2.5.19. *Dos álgebras de Weyl generalizadas cuánticas $A_1 = \mathcal{A}(q_1, a_1)$ y $A_2 = \mathcal{A}(q_2, a_2)$ son isomorfas si y sólo si $q_2 \in \{q_1, q_1^{-1}\}$ y existen escalares no nulos α, $\beta \in \Bbbk$ y un entero m tales que $a_2(h) = \alpha h^m a_1(\beta h^{\pm 1})$.*

Demostración. Es fácil ver que las condiciones del enunciado son suficientes para que las álgebras sean isomorfas. Vamos a demostrar ahora que también son necesarias. Supongamos que $\eta : A_1 \to A_2$ es un isomorfismo. En virtud de la Proposición 2.5.15 sabemos que existen γ, μ, $\nu \in \mathbb{k} \setminus 0$, r, $s \in \mathbb{Z}$ y $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tales que $\eta(h) = \gamma h^{\epsilon}$ y o bien (♣) $\eta(y) = \mu y h^r$ y $\eta(x) = \nu h^s x$ o (♠) $\eta(y) = \mu h^r x$ y $\eta(x) = \nu y h^s$. A raíz de los isomorfismos

$$\omega_1 : A(q, a) \to A(q^{-1}, a) \quad \text{y} \quad \omega_2 A(q, a) \to A(q, a(h^{-1}))$$

definidos por

$$\begin{aligned} \omega_1(y) &= x & \omega_2(y) &= x \\ \omega_1(h) &= q^{-1}h & \omega_2(h) &= q^{-1}h^{-1} \\ \omega_1(x) &= y & \omega_2(x) &= y, \end{aligned}$$

podemos suponer que $\epsilon = 1$ y que estamos en el caso (♣). Es importante notar que ambos isomorfismos respetan las condiciones del enunciado. Aplicando η a ambos lados de la ecuación $yx = a_1$ vemos que

$$\mu\nu y h^{r+s} x = a_1(\gamma h).$$

Conmutando x y h^{r+s} en el lado derecho de la ecuación anterior deducimos que

$$\mu\nu q^{-r-s} a_2(h) h^{r+s} = a_1(\gamma h).$$

De aquí se sigue que a_1 y a_2 están relacionados como en el enunciado. Para terminar debemos demostrar que $q_2 \in \{q_1, q_1^{-1}\}$. Consideremos la ecuación $hy = q_1 y h$ en A_1. Aplicando η concluimos que

$$\gamma\mu h y h^r = \gamma\mu q_2 y h^{r+1} = \gamma\mu q_1 y h^{r+1}.$$

De esta última ecuación concluimos que $q_1 = q_2$. □

Capítulo 3

Homología y Cohomología de Hochschild

3.1. Introducción

El objetivo de este Capítulo es calcular la homología y la cohomología de Hochschild de las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas definidas sobre $\mathbb{k}[h]$. En esta sección vamos a repasar algunos de los conceptos y definiciones más importantes de la teoría. En la Sección 3.2 introducimos una herramienta clave para estudiar el caso q raíz de la unidad y mostramos sus propiedades. Después, en la Sección 3.3 encontramos una resolución proyectiva de bimódulos que nos permite calcular efectivamente la homología y la cohomología en las dos siguientes secciones.

3.1.1. Definiciones

Fijemos A una k-álgebra; se define el álgebra *envolvente* de A como $A \otimes A^{op}$ y se nota A^e. Los módulos (a izquierda) sobre A^e se identifican naturalmente con los A-bimódulos si definimos $a \otimes b.m = amb$.

Para un A-bimódulo M se definen la homología y la cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M como

- $HH_n(A, M) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, M)$ y
- $HH^n(A, M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, M)$,

respectivamente. Esta definición es en termino de funtores derivados. La forma de calcular la homología explícitamente es elegir una resolución proyectiva $P_\bullet$ de A como A-bimódulo, y entonces

$$HH_n(A, M) \cong H_n(P \otimes_{A^e} M).$$

La teoría de funtores derivados garantiza que esta construcción no depende (a menos de isomorfismo canónico) de la resolución elegida. Calculando de esta forma se pone de manifiesto la estructura de $\Bbbk$-espacio vectorial de $HH_n(A, M)$. Muchas veces nos va a interesar solamente su dimensión pero algunas veces vamos a calcular bases explícitas.

La cohomología se calcula de manera similar pero usando el funtor $\hom_{A^e}$ en lugar del funtor $\otimes_{A^e}$. En concreto

$$HH^n(A, M) \cong H_n(\hom_{A^e}(P, M)).$$

3.1.2. La resolución bar

Para calcular la homología y la cohomología de Hochschild de un álgebra A hay una forma estándar de construir una resolución proyectiva. Si llamamos $A^{\otimes n}$ al producto tensorial iterado n veces $A \otimes \cdots \otimes A$, la resolución bar es el complejo de A-bimódulos $\mathcal{B} = (B_\bullet, b_\bullet)$ tal que $B_n = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$. Para describir b consideramos para cada $0 \leq i \leq n$ la aplicación $\Bbbk$-lineal $\delta_{i,n} : B_n \to B_{n-1}$ que verifica

$$\delta_{i,n}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

y ponemos

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_{i,n} \tag{3.1}$$

En general n va a quedar determinado por el contexto: a partir de ahora vamos a omitirlo en la notación. Con esta definición es inmediato verificar que b es A^e-lineal, mientras que que $b^2 = 0$ requiere un poco más de trabajo. La siguiente propiedad de δ_i es fácil de demostrar e implica que

$$b^2 = 0.$$

Lema 3.1.1. *Si* $i \leq j$ *entonces* $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$ *y si* $i > j$ *entonces* $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_{i-1}$. □

Ahora podemos calcular

$$b^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j}\delta_{i,n}\delta_{j,n+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j}\delta_{i,n}\delta_{j,n+1} + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n+1} (-1)^{i+j}\delta_{i,n}\delta_{j,n+1},$$

usando el lema anterior se ve que ambos sumandos son iguales pero de signos contrarios: luego se cancelan y $b^2 = 0$.

El complejo $\mathcal{B}$ es exacto. Hay una homotopía de contracción s definida por

$$s_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}.$$

Comprobar que $bs + sb = 1$ es un cálculo directo. De esta forma terminamos de demostrar que $\mathcal{B}$ es una resolución proyectiva de A como A-bimódulo. Esta resolución se llama resolución *bar*.

Vamos a describir una pequeña modificación de la resolución bar, que será útil más adelante. Para una $\Bbbk$-álgebra A, definimos $\overline{A} = A/\Bbbk$. La resolución bar normalizada $\overline{\mathcal{B}}$ tiene como módulo en el lugar n a $A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A$ y los diferenciales están dados por (3.1). La demostración de que $\overline{\mathcal{B}}$ es una resolución libre de A como A-bimódulo es completamente análoga a la que hicimos antes para $\mathcal{B}$. Un morfismo $\Bbbk$-lineal cualquiera de $\overline{A}$ en A induce de forma natural un morfismo de $\overline{\mathcal{B}}$ en $\mathcal{B}$ que resulta un cuasi-isomorfismo.

3.1.3. Aplicación al cálculo de la homología y la cohomología

La resolución bar se puede usar para calcular la homología y la cohomología de Hochschild de un álgebra, aunque esto a menudo no es conveniente porque la dimensión (como k-espacios vectoriales) de los módulos involucrados crece exponencialmente.

Para calcular la homología de un álgebra A con coeficientes en un A-bimódulo M usando la resolución bar hay que calcular la homología de $M \otimes_{A^e} \mathcal{B}$. Para cada espacio vectorial V, hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_{A^e} (A \otimes V \otimes A) \cong M \otimes V$$

dado por $m \otimes_{A^e} (b \otimes v \otimes c) \mapsto cmb \otimes v$. Este isomorfismo nos permite identificar $M \otimes_{A^e} \mathcal{B}$ con el *complejo bar*:

$$\cdots \xrightarrow{b} M \otimes A^{\otimes 3} \xrightarrow{b} M \otimes A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} M \otimes A \xrightarrow{b} M\otimes$$

cuyo diferencial b satisface

$$\begin{aligned} &b(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \\ &ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + \\ &\qquad (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para la cohomología hay una versión similar de lo anterior basada en el isomorfismo

$$\hom_{A^e}(A \otimes V \otimes A, M) \cong \hom_{\Bbbk}(V, M)$$

dado por $f \mapsto f(1 \otimes - \otimes 1)$. El complejo bar cohomológico es

$$\cdots \longrightarrow \hom_k(A^{\otimes 3}, M) \xrightarrow{d} \hom_k(A^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{d} \hom_k(A^{\otimes 1}, M) \xrightarrow{d} \hom_k(k, M)$$

con el diferencial dado por

$$
\begin{aligned}
&d(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \\
&a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} + \\
&\qquad\qquad (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}. \quad (3.3)
\end{aligned}
$$

Es claro que se pueden hacer cálculos análogos usando la resolución bar normalizada en vez de la resolución bar.

La cohomología de Hochschild codifica mucha información de interés. Para ver esta información es conveniente utilizar la resolución bar. Aplicando la fórmula (3.3) podemos darle una interpretación más concreta a los cociclos en grados bajos. Recomendamos como referencia para esta parte el Capítulo X del libro de Mac Lane [ML63].

- Un 0-*cociclo* es una función lineal $w : \Bbbk \to M$ tal que para todo $a \in A$ vale que $d(w)(a) = aw(1) - w(1)a = 0$, es decir, $w(1)$ es un elemento de M sobre el que la acción de A es *simétrica*. En el caso de $M = A$ esto se corresponde con ser un elemento central de A. Es fácil ver que vale la reciproca: a partir de un elemento simétrico $m \in M$ se puede obtener un 0-cociclo definiendo $w(1) = m$. Como no hay 0-cobordes no nulos concluimos que $HH^0(A, M) = \{m \in M : am = ma \forall a \in A\}$. En particular

$$HH^0(A) = \mathcal{Z}(A).$$

- Un 1-*cociclo* es una función $\Bbbk$-lineal $\delta : A \to M$ tal que $d(\delta)(a \otimes b) = a\delta(b) - \delta(ab) + \delta(a)b = 0$ para todo a, $b \in A$. Despejando vemos que $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$, es decir, que δ es una derivación de A con valores en M. Los 1-cobordes son las derivaciones interiores (las de la forma $\delta(a) = am - ma$ para algún $m \in M$). De esta forma concluimos que $HH^1(A, M)$ es isomorfo al espacio de derivaciones con valores en M módulo derivaciones interiores.
- Un 2-*cociclo* es una función lineal $\mu : A \otimes A \to M$ que verifica

$$d(\mu)(a \otimes b \otimes c) = a\mu(b, c) - \mu(ab, c) + \mu(a, bc) - \mu(a, b)c = 0$$

para a, b y $c \in A$. Decimos que μ es un 2-*cociclo normalizado* si μ está en la imagen de la inclusión de $\overline{\mathcal{B}}$ en $\mathcal{B}$. Esto es equivalente a pedir que $\mu(a \otimes 1) = \mu(1 \otimes a) = 0$ para todo $a \in A$. A partir de un 2-cociclo normalizado podemos dotar a $A \oplus M$ de una estructura de álgebra con la siguiente fórmula

$$(a, m) \star (a', m') = \big(aa', am' + a'm + \mu(a, a')\big).$$

Notemos que con esta estructura el elemento neutro para el producto es $(1, 0)$ y que $M^2 = 0$. Es fácil ver que la asociatividad del producto $\star$ es equivalente a la condición de cociclo para μ. También se puede ver que cociclos equivalentes dan lugar a extensiones isomorfas y viceversa. De esta manera vemos que hay una correspondencia entre las clases de $HH^2(A, M)$ y las clases de isomorfismo de estructuras de álgebra en $A \oplus M$ tales que $M^2 = 0$.

- Veamos, por completitud, como surge naturalmente la condición $M^2 = 0$ cuando uno trata de construir la correspondencia inversa. Consideremos morfismo sobreyectivo de $\Bbbk$-álgebras $\pi : B \to A$ y llamemos M a su núcleo. Claramente M es un ideal bilatero de B, pero nos gustaría dotar a M de una estructura de A-bimódulo. La opción natural es definir $\pi(x).m = xm$, pero es necesario verificar que esta definición no depende de la elección de x en la preimagen de $\pi(x)$. Si $\pi(x) = \pi(y)$ y $m \in M$, entonces $0 = \pi(x)m - \pi(y)m = xm - ym = (x - y)m$. Sabemos que $x - y \in M$ por eso es necesario que $M^2 = 0$ en B para obtener la buena definición de la estructura de M. En este caso M hereda una estructura de A-bimódulo. Veamos como construir el cociclo correspondiente en $HH^2(A, M)$. La sucesión exacta corta de espacios vectoriales
$$0 \to M \to B \to A \to 0 \tag{3.4}$$
se parte, sea $\psi : A \to B$ una sección $\Bbbk$-lineal. Sabemos que ψ no es necesariamente morfismo de álgebras pero $\psi(a, a') = \psi(a)\psi(a') - \psi(aa') \in M$ para a, $a' \in A$. Es un cálculo de rutina comprobar que ψ es un 2-cociclo que, en vista de esta construcción, mide la obstrucción de que (3.4) se parta. En particular si (3.4) se parte podemos elegir ψ un morfismo de álgebras y el cociclo resultante es el cociclo nulo.

3.2. Generalidades

El objetivo de esta sección es desarrollar algunas herramientas que van a ser útiles para el calculo de la (co)homología de Hochschild de A en el caso en el que el parámetro q es una raíz de la unidad. Vamos a suponer en toda esta sección que éste es el caso. Notamos e al orden multiplicativo de q en $\Bbbk^\times$ y recordamos que $\mathcal{S} = \ker(\sigma - \mathrm{id}) = \Bbbk[h^e]$.

Supongamos que $e > 0$ y para cada polinomio $f \in \Bbbk[h]$ tal que $f(0) \neq 0$ definamos
$$\mathcal{N}(f) = \mathrm{mcm}\big(f, \sigma(f), \cdots, \sigma^{e-1}(f)\big) \qquad \text{y} \qquad \bar{f} = \frac{\mathcal{N}(f)}{f}.$$
Claramente $\sigma(\mathcal{N}(f))$ es un múltiplo escalar de $\mathcal{N}(f)$; evaluando ambos en 0 vemos que en realidad son iguales, de manera que $\mathcal{N}(f) \in \mathcal{S}$. Notemos que hay ejemplos

con $f(0) = 0$ donde la conclusión anterior no es válida, por ejemplo para $f = h^N$ se tiene que $\mathcal{N}(f) = h^N$ y entonces $\sigma(\mathcal{N}(f)) \neq \mathcal{N}(f)$ en general.

Nuestro interés en el operador $\mathcal{N}$ viene del siguiente resultado:

Proposición 3.2.1. *Sean* $f, g \in \Bbbk[h]$ *y supongamos que* $f(0) \neq 0$.

(I) *Si* $fg \in \mathcal{S}$*, entonces* $\bar{f} \mid g$.

(II) *Si* $g \in \mathcal{S}$ *y* $f \mid g$*, entonces existe* $s \in \mathcal{S}$ *tal que* $g = \mathcal{N}(f)s$.

Demostración. Como $fg \in \mathcal{S}$, sabemos que $\sigma^i(fg) = fg$ y entonces $\sigma^i(f) \mid fg$ para todo i. El primer punto se sigue ahora de la definición de $\mathcal{N}(f)$. El segundo punto es una consecuencia inmediata del primero. □

Terminamos esta sección con dos lemas técnicos que serán útiles en los cálculos de las secciones 3.4 y 3.5.

Lema 3.2.2. *Sea* $f \in \Bbbk[h]$ *y supongamos que* $f(0) \neq 0$ *y que* q *es una raíz de la unidad de orden* e. *Si* $\pi : \Bbbk[h] \to \Bbbk[h]/(f)$ *denota la proyección canónica, entonces para cada* $l \geq 0$ *tenemos*

$$\dim \pi(h^l\mathcal{S}) = \frac{\deg \mathcal{N}(f)}{e}.$$

Demostración. Como $f(0) \neq 0$, la multiplicación por $\pi(h)$ en $\Bbbk[h]/(f)$ es un isomorfismo. Por lo tanto $\pi(h^l\mathcal{S}) = \pi(h^l)\pi(\mathcal{S}) \cong \pi(\mathcal{S})$ y es suficiente demostrar el lema para $l = 0$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, en el que los morfismos que aparecen son los obvios:

$$\begin{tikzcd} \Bbbk[h] \arrow[r, two heads, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & \Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f)) \arrow[dl, "\rho"] \\ \Bbbk[h]/(f) & \end{tikzcd}$$

Sea G el grupo cíclico de orden e generado por un elemento $g \in G$ y dotemos a $\Bbbk[h]$ con la acción de G tal que g actúa como σ. Como $\mathcal{N}(f)$ es G-invariante hay una acción inducida en $\Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f))$. El morfismo π' es sobreyectivo y, como $\Bbbk$ tiene característica 0, el funtor $(-)^G$ que "toma invariantes" es exacto. Por lo tanto la restricción de π' a los invariantes: $(\pi')^G : \mathcal{S} \to \big(\Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f))\big)^G$ también es sobreyectiva.

La situación es como en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "(\pi')^G"] \arrow[d, "\pi|_{\mathcal{S}}"'] & (\Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f)))^G \arrow[dl, "\rho"] \\ \Bbbk[h]/(f) & \end{tikzcd}$$

Para todo $s \in \mathcal{S}$ tal que $\pi|_{\mathcal{S}}(s) = 0$ existe $b \in \Bbbk[h]$ tal que $fb = s \in \mathcal{S}$. Se sigue de la proposición anterior que $b = \bar{f}s_1$ para algún $s_1 \in \mathcal{S}$: de esta manera vemos que $s = \mathcal{N}(f)s_1$ y que $(\pi')^G(s) = 0$. Como $(\pi')^G$ es sobreyectiva, esto implica que el morfismo ρ es inyectivo y, en consecuencia, que $\dim \pi(S) = \dim(\Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f)))^G$.

El conjunto $\{h^i : 0 \leq i < \deg \mathcal{N}(f)\}$ es una base de $\Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f))$ que diagonaliza la acción de G. Además, el espacio $(\Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f)))^G$ es el autoespacio de g de autovalor 1. Se sigue que este espacio está generado por $\{h^{ie} : ie < \deg \mathcal{N}(f)\}$ y por lo tanto $\dim(\Bbbk[h]/(\mathcal{N}(f)))^G = \frac{1}{e} \deg \mathcal{N}(f)$ como queríamos. □

Lema 3.2.3. *Sean $f \in \Bbbk[h]$ tal que $f(0) \neq 0$, $q \in \Bbbk$ una raíz de la unidad de orden $e > 0$ y $l \geq 0$. Consideremos el morfismo $\mathcal{S}$-lineal $\psi_{f,l} : p \in \Bbbk[h] \mapsto (\sigma - q^l)(fp) \in \Bbbk[h]$. Entonces*

$$\operatorname{coker} \psi_{f,l} \cong h^l \mathcal{S} \oplus \Bbbk^{\eta(f)},$$

donde $\eta(f) = \deg f - \frac{1}{e} \deg \mathcal{N}(f)$.

Demostración. Descomponemos $\Bbbk[h] \cong \mathcal{S} \oplus h\mathcal{S} \cdots \oplus h^{e-1}\mathcal{S}$ como $\mathcal{S}$-módulo. Como $\ker(\sigma - q^l) = h^l\mathcal{S}$, el morfismo $\sigma - q^l$ induce un morfismo inyectivo

$$\Bbbk[h]/h^l\mathcal{S} \to \Bbbk[h],$$

al que vamos a seguir llamando $\sigma - q^l$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[h] \arrow[r, "f"] & \Bbbk[h] \arrow[r, "\sigma - q^l"] \arrow[d, "p"'] & \Bbbk[h] \\
& \Bbbk[h]/h^l\mathcal{S} \arrow[ur, "\sigma - q^l"'] &
\end{tikzcd}$$

Es inmediato comprobar que $\operatorname{coker} \psi_{f,l} \cong h^l\mathcal{S} \oplus \operatorname{coker}(p \circ f)$ pues $\sigma - q^l$ es inyectivo, y, como

$$\operatorname{coker} p \circ f \cong \frac{\Bbbk[h]}{h^l\mathcal{S} + (f)} \cong \frac{\Bbbk[h]}{(f)} \Big/ \pi(h^l S)$$

con π el morfismo definido en el Lema 3.2.2, vemos que $\dim \operatorname{coker} p \circ f = \eta(f)$. □

Remarcamos que el isomorfismo en el enunciado de este lema es en realidad un isomorfismo de $\mathcal{S}$-módulos si identificamos el sumando $\Bbbk^{\eta(f)}$ con el cociente $k[h]/(h^l\mathcal{S} + (f))$ que aparece en la demostración.

3.3. Una resolución proyectiva

El objetivo de esta sección es construir una resolución proyectiva de A. Vamos a hacerlo en dos pasos, usando un álgebra B_l como paso intermedio, como en [FSSÁ03].

3.3.1. Álgebras de Smith

Fijemos un polinomio $l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i H^i \in \Bbbk[H]$, con $m > 0$ y $\lambda_m \neq 0$. Consideramos la $\Bbbk$-álgebra B_l, o simplemente B, con generadores Y, H y X sujetos a las relaciones

$$HY = qYH, \qquad [X, Y] = l, \qquad XH = qHX.$$

Esta álgebra fue considerada por P. Smith en [Smi90], observando que es en muchos aspectos similar al álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$; llamaremos a este álgebra el *álgebra de Smith*.

Se puede probar, de forma similar que para las álgebras de Weyl generalizadas, que el conjunto $\{Y^i H^j X^k : i, j, k \geq 0\}$ es una base de B como $\Bbbk$-espacio vectorial. Sea $V = \Bbbk Y \oplus \Bbbk H \oplus \Bbbk X \subset B$.

Si fijamos $|X| = |Y| = 1$ y $|H| = 0$ obtenemos una graduación en TV que induce una filtración creciente en B. Vamos a escribir $\overline{Y}$, $\overline{H}$ y $\overline{X}$ para los símbolos principales de Y, H y X, respectivamente, en $\overline{B} = \operatorname{gr} B$. Obviamente, $\overline{V} \cong \operatorname{gr} V$ está generado por $\overline{X}$, $\overline{Y}$ y $\overline{H}$, y esos elementos son $\Bbbk$-linealmente independientes. Además $\overline{B}$ es la $\Bbbk$-álgebra generada por $\overline{Y}$, $\overline{H}$ y $\overline{X}$, con relaciones

$$\overline{HY} = q\overline{YH}, \qquad [\overline{X}, \overline{Y}] = 0, \qquad \overline{XH} = q\overline{HX}.$$

Para demostrar esto observamos primero que la capa i-ésima de la filtración de B está generada como $\Bbbk$-espacio vectorial por los monomios de grado menor o igual a i de la base que mostramos más arriba. En segundo lugar, notamos que por lo tanto los monomios de grado i forman una base de $F_iB/F_{i-1}B$ como $\Bbbk$-espacio vectorial. En ultimo lugar, concluimos que el morfismo obvio del álgebra que describimos por generadores y relaciones a $\overline{B}$ es un isomorfismo pues manda una base de la primer álgebra en una base de la segunda.

Consideremos ahora complejo de B^e-módulos proyectivos

$$0 \longrightarrow B|\textstyle\bigwedge^3 V|B \longrightarrow B|\bigwedge^2 V|B \xrightarrow{d} B|V|B \xrightarrow{d} B|B \xrightarrow{\mu} B \tag{3.5}$$

con diferenciales dados por

$$\begin{aligned}
&d(1|v|1) = 1|v - v|1, \qquad \forall v \in V;\\
&d(1|H \wedge X|1) = 1|X|H - qH|X|1 - q|H|X + X|H|1;\\
&d(1|Y \wedge X|1) = 1|X|Y - Y|X|1 - 1|Y|X + X|Y|1 - \textstyle\sum_i \int_i \lambda_i H^s|H|H^t;\\
&d(1|Y \wedge H|1) = 1|H|Y - qY|H|1 - q|Y|H + H|Y|1;\\
&d(1|Y \wedge H \wedge X|1) = 1|H \wedge X|Y - qY|H \wedge X|1 - q|Y \wedge X|H + qH|Y \wedge X|1\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + q|Y \wedge H|X - X|Y \wedge H|1.
\end{aligned}$$

Recordamos que

$$\int_i f(s,t) = \sum_{\substack{s+t+1=i\\ 0\le s,t}} f(s,t).$$

Un cálculo de rutina nos muestra que $d^2 = 0$.

Las filtraciones en B y V determinan una filtración en el complejo (3.5), cuyo complejo graduado asociado es

$$0 \longrightarrow \overline{B}|\bigwedge^3 \overline{V}|\overline{B} \xrightarrow{d} \overline{B}|\bigwedge^2 \overline{V}|\overline{B} \xrightarrow{d} \overline{B}|\overline{V}|\overline{B} \xrightarrow{d} \overline{B}|\overline{B} \xrightarrow{\mu} \overline{B}$$

con diferenciales $\overline{B}^e$-lineales determinados por las condiciones

$$\begin{aligned}
&d(1|v|1) = 1|v - v|1, \qquad \forall v \in \overline{V};\\
&d(1|\overline{H}\wedge\overline{X}|1) = 1|\overline{X}|\overline{H} - q\overline{H}|\overline{X}|1 - q|\overline{H}|\overline{X} + \overline{X}|\overline{H}|1;\\
&d(1|\overline{Y}\wedge\overline{X}|1) = 1|\overline{X}|\overline{Y} - \overline{Y}|\overline{X}|1 - 1|\overline{Y}|\overline{X} + \overline{X}|\overline{Y}|1;\\
&d(1|\overline{Y}\wedge\overline{H}|1) = 1|\overline{H}|\overline{Y} - q\overline{Y}|\overline{H}|1 - q|\overline{Y}|\overline{H} + \overline{H}|\overline{Y}|1;\\
&d(1|\overline{Y}\wedge\overline{H}\wedge\overline{X}|1) = 1|\overline{H}\wedge\overline{X}|\overline{Y} - q\overline{Y}|\overline{H}\wedge\overline{X}|1 - q|\overline{Y}\wedge\overline{X}|\overline{H} + q\overline{H}|\overline{Y}\wedge\overline{X}|1\\
&\qquad\qquad + q|\overline{Y}\wedge\overline{H}|\overline{X} - \overline{X}|\overline{Y}\wedge\overline{H}|1.
\end{aligned}$$

Este complejo es exacto. De hecho, hay una homotopía de contracción $\overline{B}$-lineal a izquierda dada por

$$\begin{aligned}
&s(1) = 1|1;\\
&s(1|\overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^k) = \textstyle\sum_i\int_i \overline{Y}^s|\overline{Y}|\overline{Y}^t\overline{H}^j\overline{X}^k + \sum_i\int_j \overline{Y}^i\overline{H}^s|\overline{H}|\overline{H}^t\overline{X}^k + \sum_i\int_k \overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^s|\overline{X}|\overline{X}^t;\\
&s(1|\overline{Y}|\overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^k) = 0;\\
&s(1|\overline{H}|\overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^k) = \textstyle\sum_i\int_i q^s\overline{Y}^s|\overline{Y}\wedge\overline{H}|\overline{Y}^t\overline{H}^j\overline{X}^k;\\
&s(1|\overline{X}|\overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^k) = \textstyle\sum_i\int_i \overline{Y}^s|\overline{Y}\wedge\overline{X}|\overline{Y}^t\overline{H}^j\overline{X}^k + \sum_i\int_j q^s\overline{Y}^i\overline{H}^s|\overline{H}\wedge\overline{X}|\overline{H}^t\overline{X}^k;\\
&s(1|\overline{H}\wedge\overline{X}|\overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^k) = \textstyle\sum_i\int_i q^s\overline{Y}^s|\overline{Y}\wedge\overline{H}\wedge\overline{X}|\overline{Y}^t\overline{H}^j\overline{X}^k;\\
&s(1|\overline{Y}\wedge\overline{X}|\overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^k) = 0;\\
&s(1|\overline{Y}\wedge\overline{H}|\overline{Y}^i\overline{H}^j\overline{X}^k) = 0.
\end{aligned}$$

Como el complejo graduado asociado del complejo (3.5) es exacto, se sigue que (3.5) también lo es. Por lo tanto el complejo (3.5) resulta una resolución proyectiva de B como B^e-módulo.

3.3.2. El segundo paso

Ahora vamos a construir una resolución de un álgebra de Weyl generalizada cuántica definida sobre $\Bbbk[h]$ como bimódulo sobre si misma. Recordemos que estas álgebras dependen de un polinomio $a \in \Bbbk[h]$ y de un escalar $q \in \Bbbk \setminus \{0, 1\}$ y están generadas por tres variables y, h y x sujetas a las relaciones

$$hy = qyh, \quad xh = qhx, \quad yx = a, \quad xy = \sigma(a).$$

Sea $l = \sigma(a) - a$; entonces $\deg a \geq \deg l$ y $l = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i h^i$ con $\lambda_i = (q^i - 1)\alpha_i$. Consideramos el álgebra de Smith $B = B_l$ que corresponde al polinomio l y el elemento $\Omega = YX - a \in B$. Un cálculo simple nos muestra que $\Omega = XY - \sigma(a)$ y que Ω es central en B. En particular, $B\Omega = \Omega B$ es un ideal bilátero de B y el cociente $B/\Omega B$ es isomorfo al álgebra A vía el isomorfismo que manda las clases de Y, H y X a y, h y x respectivamente. Vamos a identificar A con este cociente.

Sea $\pi : B \to A$ la proyección canónica. Como Ω no es un divisor de cero en B (ya que B es un dominio integro) y Ω es central, el complejo

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\Omega} B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

es una resolución proyectiva de A como B-módulo a izquierda y a derecha; el primer morfismo es la multiplicación por Ω.

La resolución de B como B-bimódulo que obtuvimos en (3.5) es, en particular, una resolución de B como B-módulo a derecha. Por lo tanto, aplicándole el funtor $(-) \otimes_B A$ obtenemos un complejo

$$0 \longrightarrow B|\textstyle\bigwedge^3 V|A \xrightarrow{d} B|\bigwedge^2 V|A \xrightarrow{d} B|V|A \xrightarrow{d} B|A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

con diferenciales $B \otimes A^{op}$-lineales dados por

$$\begin{aligned}
&d(1|v|1) = 1|v - v|1, \qquad \forall v \in V;\\
&d(1|H \wedge X|1) = 1|X|h - qH|X|1 - q|H|x + X|H|1;\\
&d(1|Y \wedge X|1) = 1|X|y - Y|X|1 - 1|Y|x + X|Y|1 - \textstyle\sum_i \int_i \lambda_i H^s|H|h^t;\\
&d(1|Y \wedge H|1) = 1|H|y - qY|H|1 - q|Y|h + H|Y|1;\\
&d(1|Y \wedge H \wedge X|1) = 1|H \wedge X|y - qY|H \wedge X|1 - q|Y \wedge X|h + qH|Y \wedge X|1 +\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q|Y \wedge H|x - X|Y \wedge H|1.
\end{aligned}$$

cuya homología es $\mathrm{Tor}^B_\bullet(B, A)$. Se sigue que este complejo es de hecho acíclico. Esto significa que (3.7) es una resolución proyectiva de A como B-módulo a izquierda

Podemos construir morfismos de comparación entre las dos resoluciones (3.6) y (3.7) de A como B-módulo a izquierda:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\Omega"] \arrow[d, shift left, "f_1"] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, shift left, "f_0"] & A \arrow[d, shift left, "1_A"] \\
\cdots \arrow[r] & B|V|A \arrow[r, "d"] \arrow[u, shift left, "g_1"] & B|A \arrow[r, two heads, "\mu"] \arrow[u, shift left, "g_0"] & A \arrow[u, shift left, "1_A"]
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

dados por

$$\begin{aligned} &f_0(1) = 1|1; && f_1(1) = -Y|X|1 - 1|Y|x + \textstyle\sum_i \int_i \alpha_i H^s|H|h^t;\\ &g_0(1|y^i h^j) = Y^i H^j; && g_0(1|h^j x^k) = H^j X^k;\\ &g_1(1|Y|y^i h^j) = 0; && g_1(1|Y|h^j x^{k+1}) = -q^{-j} H^j X^k\\ &g_1(1|H|y^i h^j) = 0; && g_1(1|H|h^j x^k) = 0;\\ &g_1(1|X|y^{i+1} h^j) = -Y^i H^j; && g_1(1|X|h^j x^k) = 0. \end{aligned}$$

Tenemos dos formas de calcular $\mathrm{Tor}^B_\bullet(A, A)$: usando las dos resoluciones que tenemos.

La primera forma es usando (3.6), el cálculo con esta resolución es inmediato porque el único diferencial relevante se anula, vemos que

$$\mathrm{Tor}^B_p(A, A) = \begin{cases} A \otimes_B B, & p = 0;\\ A \otimes_B B, & p = 1;\\ 0, & p \geq 2. \end{cases} \tag{3.9}$$

La segunda forma es usando el complejo que se obtiene aplicando el funtor $A \otimes_B (-)$ a la resolución (3.7), lo que nos da el complejo

$$0 \longrightarrow A|\textstyle\bigwedge^3 V|A \xrightarrow{d} A|\bigwedge^2 V|A \xrightarrow{d} A|V|A \xrightarrow{d} A|A \tag{3.10}$$

con diferenciales A^e-lineales dados por:

$$\begin{aligned} &d(1|v|1) = 1|\pi(v) - \pi(v)|1, \qquad \forall v \in V;\\ &d(1|H \wedge X|1) = 1|X|h - qh|X|1 - q|H|x + x|H|1;\\ &d(1|Y \wedge X|1) = 1|X|y - y|X|1 - 1|Y|x + x|Y|1 - \textstyle\sum_i \int_i \lambda_i h^s|H|h^t;\\ &d(1|Y \wedge H|1) = 1|H|y - qy|H|1 - q|Y|h + h|Y|1;\\ &d(1|Y \wedge H \wedge X|1) = 1|H \wedge X|y - qy|H \wedge X|1 - q|Y \wedge X|h + qh|Y \wedge X|1+\\ &\qquad\qquad q|Y \wedge H|x - x|Y \wedge H|1. \end{aligned}$$

Sabemos que la homología de este complejo es isomorfa a $\mathrm{Tor}^B_\bullet(A, A)$. El isomorfismo se puede hacer explicito usando los morfismos de comparación $f_\bullet$ y $g_\bullet$ de (3.8) y de esta forma vemos que la homología del complejo (3.10) es un A-módulo libre generado por las clases de los ciclos $1|1 \in A \otimes A$ y

$$y|X|1 + 1|Y|x - \textstyle\sum_i \int_i \alpha_i h^s|H|h^t \in A \otimes V \otimes A,$$

de grados 0 y 1, respectivamente.

3.3.3. La resolución

Ahora consideramos el complejo doble, concentrado en el tercer cuadrante, $X_{\bullet,\bullet}$ que mostramos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] & A|\bigwedge^3 V|A \arrow[r, "d"] & A|\bigwedge^2 V|A \arrow[r, "d"] & A|V|A \arrow[r, "d"] & A|A \\
 & 0 \arrow[r] & A|\bigwedge^3 V|A \arrow[r, "d"] \arrow[u] & A|\bigwedge^2 V|A \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"'] & A|V|A \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"'] & A|A \arrow[u, "\delta"'] & \\
\iddots & \iddots \arrow[u] & \iddots \arrow[u, "\delta"'] & \iddots \arrow[u, "\delta"'] & \iddots \arrow[u, "\delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

de manera que $X_{p,q} = A|\bigwedge^{p-q} V|A$ si $q \geq 0$ y $X_{p,q} = 0$ en cualquier otro caso, con diferenciales horizontales A^e-lineales d, de bigrado $(-1,0)$, dados como en (3.10), y diferenciales verticales δ, de bigrado $(0,1)$, dados por

$$\begin{aligned}
&\delta(1|1) = y|X|1 + 1|Y|x - \textstyle\sum_i \int_i \alpha_i h^s|H|h^t; \\
&\delta(1|Y|1) = -y|Y \wedge X|1 + \textstyle\sum_i \int_i \alpha_i q^t h^s|Y \wedge H|h^t; \\
&\delta(1|H|1) = 1|Y \wedge H|x - y|H \wedge X|1; \\
&\delta(1|X|1) = 1|Y \wedge X|x - \textstyle\sum_i \int_i \alpha_i q^s h^s|H \wedge X|h^t; \\
&\delta(1|Y \wedge H|1) = y|Y \wedge H \wedge X|1; \\
&\delta(1|Y \wedge X|1) = \textstyle\sum_i \int_i \alpha_i q^{i-1} h^s|Y \wedge H \wedge X|h^t; \\
&\delta(1|H \wedge X|1) = 1|Y \wedge H \wedge X|x.
\end{aligned}$$

Un cálculo directo muestra que este es de hecho un complejo doble con diferenciales que anticonmutan.

Para calcular la homología del complejo total $\operatorname{Tot} X_{\bullet,\bullet}$ podemos usar la sucesión espectral E que surge de la filtración por filas. El diferencial en la primera página E^0 de esta sucesión espectral es el diferencial horizontal d de $X_{\bullet,\bullet}$, y además hemos, esencialmente, calculado su homología en (3.9). Por lo tanto la segunda página E^1 de E es, salvo isomorfismo, como en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & 0 & A & A \\
 & & 0 & 0 & A & A \arrow[u, "d^1"'] & \\
 & 0 & 0 & A & A \arrow[u, "d^1"'] & & \\
\iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & &
\end{tikzcd}$$

Las únicas componentes del diferencial d^1 de la segunda página que podrían no ser cero son los morfismos $d^1_{p,p} : E^1_{p,p} \to E^1_{p,p-1}$, con $p \geq 1$. Pero éstos están inducidos por el diferencial vertical δ in $X_{\bullet,\bullet}$. Sabemos que $E^1_{p,p}$ y $E^1_{p,p-1}$ son A-módulos libres generados por las clases de $1|1 \in X_{p,p}$ y $\omega = y|X|1 + 1|Y|x - \sum_i \int_i \alpha_i h^s|H|h^t \in X_{p,p-1}$, respectivamente. En vista de la definición de δ, como $d^1([1|1]) = [\omega]$ y como d^1 es A-lineal concluimos que todas las componentes de d^1 que no son trivialmente cero son isomorfismos.

Se sigue que el complejo total $\operatorname{Tot} X_{\bullet,\bullet}$ es acíclico sobre A con aumentación dada por el morfismo de multiplicación $\mu : X_{0,0} = A \otimes A \to A$ y, como sus componentes son A^e-módulos libres, es una resolución proyectiva de A como A^e-módulo.

La siguiente observación es muy importante porque nos permite simplificar las cuentas de las siguientes dos secciones.

Observación 3.3.1. Consideramos la graduación en V que verifica que Y, H y X son homogéneos de grados 1, 0 y -1, respectivamente. Esta graduación junto con la de A por peso inducen una graduación en el complejo $X_{\bullet,\bullet}$ de manera que los diferenciales son homogéneos. Se sigue que los complejos obtenidos al aplicar los funtores $A \otimes_{A^e} (-)$ y $\hom_{A^e}(-, A)$ que aparecen más abajo también serán graduados por una graduación natural.

3.4. Homología de Hochschild

En esta sección vamos a calcular la homología de Hochschild de A usando la resolución que describimos en la sección anterior y un argumento de sucesiones espectrales.

Si aplicamos el funtor $A \otimes_{A^e} -$ a $X_{\bullet,\bullet}$ e identificamos $A \otimes_{A^e} (A \otimes \wedge^p V \otimes A)$ con $A \otimes \wedge^p V$ de la forma natural, obtenemos un complejo doble tal que la homología de su complejo total es $HH_*(A)$, la homología de Hochschild de A con coeficientes en si misma. El complejo doble que obtenemos es:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & A|\bigwedge^3 V \arrow[r, "d"] & A|\bigwedge^2 V \arrow[r, "d"] & A|V \arrow[r, "d"] & A \\
0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom] & A|\bigwedge^3 V \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & A|\bigwedge^2 V \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & A|V \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & A \arrow[u, "\delta"] & \\
\iddots & \iddots \arrow[u, "\delta"] & \iddots \arrow[u, "\delta"] & \iddots \arrow[u, "\delta"] & \iddots \arrow[u, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

con diferenciales dados por

$$d(u|Y) = [y, u], \tag{3.11a}$$

$$d(u|H) = [h, u], \tag{3.11b}$$

$$d(u|X) = [x, u], \tag{3.11c}$$

$$d(u|Y \wedge H) = [y, u]_q|H + [u, h]_q|Y, \tag{3.11d}$$

$$d(u|Y\wedge X) = [y,u]|X + [u,x]|Y - \textstyle\sum_i \lambda_i \int_i h^t u h^s|H, \tag{3.11e}$$
$$d(u|H\wedge X) = [h,u]_q|X + [u,x]_q|H, \tag{3.11f}$$
$$d(u|Y\wedge H\wedge X) = [y,u]_q|H\wedge X + q[u,h]|Y\wedge X - [u,x]_q|Y\wedge H, \tag{3.11g}$$

y

$$\delta(u) = uy|X + xu|Y - \textstyle\sum_i \alpha_i \int_i h^t u h^s|H, \tag{3.12a}$$
$$\delta(u|Y) = -uy|Y\wedge X + \textstyle\sum_i \alpha_i \int_i q^t h^t u h^s|Y\wedge H, \tag{3.12b}$$
$$\delta(u|H) = xu|Y\wedge H - uy|H\wedge X, \tag{3.12c}$$
$$\delta(u|X) = xu|Y\wedge X - \textstyle\sum_i \alpha_i \int_i q^s h^t u h^s|H\wedge X, \tag{3.12d}$$
$$\delta(u|Y\wedge H) = uy|Y\wedge H\wedge X, \tag{3.12e}$$
$$\delta(u|Y\wedge X) = \textstyle\sum_i \alpha_i \int_i q^{i-1} h^t u h^s|Y\wedge H\wedge X, \tag{3.12f}$$
$$\delta(u|H\wedge X) = xu|Y\wedge H\wedge X. \tag{3.12g}$$

Vamos a llevar a cabo nuestro cálculo usando la sucesión E espectral que surge de la filtración por filas de este complejo. La graduación por pesos de $X_{\bullet,\bullet}$ induce una graduación en E. Vamos a notar $HH_\bullet(A)^{(r)}$ y $E^{(r)}$ a la componente de peso r en $HH_\bullet(A) = H(A\otimes_{A^e} X_{\bullet,\bullet})$ y E.

3.4.1. Primera página

Llamemos $\mathcal{X}$ al complejo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} A|V \xrightarrow{\delta} A|\textstyle\bigwedge^2 V \xrightarrow{\delta} A|\textstyle\bigwedge^3 V \longrightarrow 0 \tag{3.13}$$

graduado de manera que A y $A|\bigwedge^3 V$ estén en grados 0 y 3, respectivamente, con los diferenciales como en (3.12a)–(3.12g). Es claro que $E^1_{p,q} = H_{p-q}(\mathcal{X})$ para todo $q > 0$ y que los espacios vectoriales $E^1_{p,0}$ pueden identificarse con los conúcleos de los diferenciales de $\mathcal{X}$.

Para cada $r \in \mathbb{Z}$, sea $\mathcal{X}^{(r)}$ la componente homogénea de $\mathcal{X}$ de peso r. En esta subsección, vamos a calcular $H_\bullet(\mathcal{X}) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} H_\bullet(\mathcal{X}^{(r)})$.

Proposición 3.4.1. *Si $r \in \mathbb{Z}$ es distinto de 0, entonces el complejo $\mathcal{X}^{(r)}$ es exacto. Por otro lado, hay isomorfismos de S-módulos*

$$H_p(\mathcal{X}^{(0)}) \cong \begin{cases} \Bbbk[h]/(c), & \textit{si } 2 \le p \le 3; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Una forma de hacer los cálculos es como sigue:

- Si $u = p \in \mathcal{X}^{(0)}_0$, con $p \in \Bbbk[h]$, entonces

$$\delta(u) = y\sigma(p)|X + \sigma(p)x|Y - a'p|H. \tag{3.14}$$

  Como A es un dominio, se sigue inmediatamente que δ es un monomorfismo y que $H_0(\mathcal{X}^{(0)}) = 0$.

- Sea $u = p_1x|Y + p_2|H + yp_3|X \in \mathcal{X}_1^{(0)}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$. Sabemos que
$$\begin{aligned}\delta(u) = (p_1\sigma(a') + \sigma(p_2))x|Y \wedge H + \sigma(a)(p_3 - p_1)|Y \wedge X \\ - y(p_3\sigma(a') + \sigma(p_2))|H \wedge X.\end{aligned} \tag{3.15}$$
Como A es un dominio, vemos que $\delta(u) = 0$ si y solo si $p_1 = p_3$ y $p_2 = -\sigma^{-1}(p_1)a'$. Esta descripción de los ciclos junto con la expresión de los bordes que aparece en (3.14) implican que $H_1(\mathcal{X}^{(0)}) = 0$.
- Sea $u = p_1x|Y \wedge H + p_2|Y \wedge X + yp_3|H \wedge X \in \mathcal{X}_2^{(0)}$. Calculando directamente vemos que
$$\delta(u) = (p_1\sigma(a) + p_2\sigma(a') + \sigma(a)p_3)|Y \wedge H \wedge X. \tag{3.16}$$
Supongamos que $u \in \ker\delta$, de manera que $p_1\sigma(a) + p_2\sigma(a') + \sigma(a)p_3 = 0$. Se sigue inmediatamente que $\sigma(\frac{a}{c})(p_1 + p_3) = -\sigma(\frac{a'}{c})p_2$. Como a/c y a'/c son coprimos, existe $g \in \Bbbk[h]$ tal que $p_1 + p_3 = -\sigma(\frac{a'}{c})g$ y $p_2 = \sigma(\frac{a}{c})g$. Si v, $r \in \Bbbk[h]$ son tales que $g = v\sigma(c) + r$ y $\deg r < \deg c$, entonces u es homólogo a
$$u - \delta(\sigma^{-1}(p_1)|H + yv|X) = r\sigma(\tfrac{a}{c})|Y \wedge X - yr\sigma(\tfrac{a'}{c})|H \wedge X.$$
Concluimos que toda clase de grado 2 en la homología de $\mathcal{X}^{(0)}$ puede ser representada por un ciclo de la forma $r\sigma(\frac{a}{c})|Y \wedge X - yr\sigma(\frac{a'}{c})|H \wedge X$ con $r \in \Bbbk[h]$ y $\deg r < \deg c = M$. En vista de la fórmula (3.15), uno de estos ciclos es un borde si y solo si es cero y de esta forma vemos que $H_2(\mathcal{X}^{(0)}) \cong \Bbbk[h]/(\sigma(c)) \cong \Bbbk[h]/(c)$.
- Se sigue inmediatamente de (3.16) que $\delta(\mathcal{X}_2^{(0)}) = \sigma(c)\Bbbk[h]|Y \wedge H \wedge X$, y entonces $H_3(\mathcal{X}^{(0)}) \cong \Bbbk[h]/(c)$.

Fijemos ahora $r > 0$, y demostremos que el complejo $\mathcal{X}^{(r)}$ es exacto.

- Sea $u \in \mathcal{X}_0^{(r)}$, de manera que $u = y^r p$ para algún $p \in \Bbbk[h]$. Entonces
$$\delta(u) = y^{r-1}\sigma^r(a)p|Y - y^r p\textstyle\sum_i \alpha_i [i]_{q^r} h^{i-1}|H + y^{r+1}\sigma(p)|X, \tag{3.17}$$
y vemos inmediatamente que esto es cero si y solo si $p = 0$. Por lo tanto $H_0(\mathcal{X}^{(r)}) = 0$.
- Sea $u = y^{r-1}p_1|Y + y^r p_2|H + y^{r+1}p_3|X \in \mathcal{X}_1^{(r)}$ con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$. Como
$$\begin{aligned}\delta(u) =& y^{r-1}\big(p_1\textstyle\sum_i \alpha_i [i]_{q^r} h^{i-1} + \sigma^r(a)p_2\big)|Y \wedge H + \\ & y^r(-\sigma(p_1) + \sigma^{r+1}(a)p_3)|Y \wedge X - \\ & y^{r+1}\big(\sigma(p_2) + p_3\textstyle\sum_i \alpha_i q^{i-1}[i]_{q^r} h^{i-1}\big)|H \wedge X,\end{aligned}$$
tenemos que u es un ciclo si y solamente si
$$p_1\textstyle\sum_i \alpha_i [i]_{q^r} h^{i-1} + \sigma^r(a)p_2 = 0,$$

$$\sigma^{r+1}(a)p_3 = \sigma(p_1),$$
$$\sigma(p_2) + p_3 \textstyle\sum_i \alpha_i q^{i-1}[i]_{q^r} h^{i-1} = 0.$$

La primer ecuación se sigue de las otras dos y por lo tanto podemos descartarla, y además podemos reemplazar las dos restantes por

$$p_2 = -\sigma^{-1}(p_3) \textstyle\sum_i \alpha_i [i]_{q^r} h^{i-1},$$
$$p_1 = \sigma^r(a)\sigma^{-1}(p_3).$$

De esta manera obtenemos una descripción de todos los 1-ciclos en $\mathcal{X}^{(r)}$ y, comparándola con (3.17), vemos que todos los ciclos son bordes: se sigue que $H_1(\mathcal{X}^{(r)}) = 0$.

- Para $u = y^{r-1}p_1|Y \wedge H + y^r p_2|Y \wedge X + y^{r+1}p_3|H \wedge X \in \mathcal{X}_2^{(r)}$ con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$, tenemos

$$\delta(u) = y^r \big(\sigma(p_1) + p_2 \textstyle\sum_i \alpha_i q^{i-1}[i]_{q^r} h^{i-1} + \sigma^{r+1}(a)p_3\big)|Y \wedge H \wedge X.$$

Si u es un ciclo, entonces $p_1 = -\sigma^{-1}(p_2 \sum_i \alpha_i q^{i-1}[i]_{q^r} h^{i-1} + \sigma^{r+1}(a)p_3)$, de manera que, de hecho

$$u = -\delta(y^{r-1}\sigma^{-1}(p_2)|Y + y^r \sigma^{-1}(p_3)|H).$$

Se sigue que $H_2(\mathcal{X}^{(r)}) = 0$.

- Para cada $p \in \Bbbk[h]$, tenemos que $\delta(y^{r-1}\sigma^{-1}(p)|Y \wedge H) = y^r p|Y \wedge H \wedge X$. Esto significa que $\delta(\mathcal{X}_2^r) = \mathcal{X}_3^r$ y entonces $H_3(\mathcal{X}^{(r)}) = 0$. □

En este punto, conocemos la mayor parte de la segunda página de nuestra sucesión espectral:

Corolario 3.4.2. *Sea $r \in \mathbb{Z}$ un peso. Las dimensiones de los espacios vectoriales que aparecen en las componentes homogéneas de peso r de E^1 son*

$$\begin{array}{cccccc} & & M & ? & ? & ? \\ & M & M & 0 & 0 & \\ M & M & 0 & 0 & & \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \end{array} \qquad o \qquad \begin{array}{cccccc} & & 0 & ? & ? & ? \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \end{array}$$

dependiendo de si $r = 0$ o no. Los signos de pregunta corresponden a espacios vectoriales cuyas dimensiones todavía no conocemos. □

3.4.2. Segunda página

Teniendo en cuenta la forma de E^1, vemos que $E^\infty = E^2$. La proposición que sigue calcula esta página, excepto la primera fila, y en el resto de la sección nos encargaremos de calcular los pocos espacios vectoriales que restan.

Proposición 3.4.3. *Para cada* $p \geq 0$ *, el diferencial* $d^1_{p+3,p} : E^1_{p+3,p} \to E^1_{p+2,p}$ *se anula. En consecuencia, excepto por los espacios vectoriales marcados con signos de interrogación en el Corolario 3.4.2, la página* E^∞ *coincide con la página* E^1*.*

Demostración. Un cálculo simple nos muestra que si $f \in \Bbbk[h]$ entonces

$$\begin{aligned} d(f|Y \wedge H \wedge X) &= y(1 - q\sigma)(f)|H \wedge X - (1 - q\sigma)(f)x|Y \wedge H \\ &= \delta((q - \sigma^{-1})(f)|H). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se sigue que todos los diferenciales $d^2_{p+3,p}$ son cero, como habíamos afirmado, y el cálculo de E^∞ es inmediato excepto por $E^\infty_{0,0}$, $E^\infty_{1,0}$ y $E^\infty_{2,0}$. □

Corolario 3.4.4. *Para todo* $p \geq 3$ *y todo* $r \in \mathbb{Z}$ *hay isomorfismos de S-módulos*

$$HH_p(A)^{(r)} \cong \begin{cases} \Bbbk[h]/(c) & \textit{si } r = 0; \\ 0 & \textit{si } r \neq 0. \end{cases}$$

Es interesante observar que este resultado es independiente de q.

Demostración. De acuerdo con la proposición y en vista de la forma de la página E^1 de la sucesión espectral, este corolario es una consecuencia de la convergencia. □

Para finalizar el cálculo, necesitamos encargarnos de los lugares en la sucesión espectral marcados con signos de interrogación en los diagramas del Corolario 3.4.2. Hacemos esto en las siguientes dos proposiciones, primero para peso cero y luego para los pesos restantes.

Proposición 3.4.5. *Cuando* q *es una raíz de la unidad, tenemos isomorfismos de* $\mathcal{S}$*-módulos*

$$HH_p(A)^{(0)} \cong E^{2(0)}_{p,0} \cong \begin{cases} \Bbbk^{\eta(a)}, & \textit{si } p = 0; \\ \mathcal{S} \oplus \mathcal{S} \oplus \Bbbk^{\eta(c)}, & \textit{si } p = 1; \\ \mathcal{S} \oplus \Bbbk[h]/(c), & \textit{si } p = 2; \end{cases}$$

con $\eta(f) = N - \frac{1}{e} \deg \mathcal{N}(f)$ *para* $f \in \Bbbk[h]$ *como en el Lema 3.2.3. Por otro lado, si* q *tiene orden infinito tenemos isomorfismos*

$$HH_p(A)^{(0)} \cong E^{2(0)}_{p,0} \cong \begin{cases} \Bbbk^N, & \textit{si } p = 0; \\ \Bbbk^M, & \textit{si } p = 1; \\ \Bbbk^M, & \textit{si } p = 2. \end{cases}$$

Demostración. Durante esta demostración vamos a escribir $E^1_{p,0}$ en lugar de $E^{1(0)}_{p,0}$, para aligerar la notación.

Homología en $E^1_{2,0}$. Supongamos que $u = p_1x|Y \wedge H + p_2|Y \wedge X + yp_3|H \wedge X \in E^0_{2,0}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$, vive hasta E^2, de manera que existe $f \in \Bbbk[h]$ tal que $d(u) = \delta(f)$. Esto significa que

$$\begin{aligned}&\sigma(f) = (1-\sigma)(p_2),\\ &-a'f = a\sigma^{-1}(p_1+p_3) - q\sigma(a)(p_1+p_3) - p_2(q\sigma(a') - a').\end{aligned}$$

Como σ es un automorfismo, podemos eliminar f y de esta manera obtenemos la ecuación equivalente

$$a\sigma^{-1}(p_1+p_3) - q\sigma(a)(p_1+p_3) - p_2(q\sigma(a') - a') = -a'\sigma^{-1}((1-\sigma)(p_2)),$$

que podemos reescribir, en una manera más compacta, como

$$(1-q\sigma)(a\sigma^{-1}(p_1+p_3) + a'\sigma^{-1}(p_2)) = 0. \tag{3.19}$$

Vamos a necesitar considerar dos casos separadamente, porque el resultado depende de si q es o no una raíz de la unidad.

- Supongamos primero que q *no es una raíz de* 1. En este caso el morfismo $1 - q\sigma$ es un monomorfismo, de manera que (3.19) es equivalente a

  $$a\sigma^{-1}(p_1+p_3) + a'\sigma^{-1}(p_2) = 0.$$

  Se sigue que existe $g \in \Bbbk[h]$ tal que

  $$p_2 = -\sigma(\tfrac{a}{c})g, \qquad p_1 + p_3 = \sigma(\tfrac{a'}{c})g.$$

  Sean b y $r \in \Bbbk[h]$ tales que $g = b\sigma(c) + r$ con $\deg r < \deg c$. Entonces u es homólogo a

  $$u + \delta\big(yb|X - \sigma^{-1}(p_1)|H\big) = \sigma(\tfrac{a}{c})r|Y \wedge X + y\sigma(\tfrac{a'}{c})r|H \wedge X,$$

  y vemos que todas las clases de la homología en $E^2_{2,0}$ pueden ser representadas por un ciclo de la forma

  $$\sigma(\tfrac{a}{c})r|Y \wedge X + y\sigma(\tfrac{a'}{c})r|H \wedge X \tag{3.20}$$

  con $r \in \Bbbk[h]$ y $\deg r < M = \deg c$. Recíprocamente, cada elemento de esta forma sobrevive hasta E^2.

  Usando (3.18) vemos que la imagen de d contiene a la imagen de δ. Por otro lado, el coeficiente de $Y \wedge X$ en cualquier elemento no nulo de $\delta(\mathcal{X}^{(0)}_1)$ es un múltiplo no nulo de $\sigma(a)$ y, en particular, tiene grado como mínimo N: comparando esto con (3.20) vemos que u no está en la imagen de δ. Podemos concluir que estos elementos no son cero en E^2, de manera que $\dim E^2_{2,0} = M$.

- Supongamos ahora que q *es una raíz de* 1. En este caso la condición (3.19) es equivalente a la existencia de un polinomio singular $s \in \mathcal{S}$ tal que

$$a\sigma^{-1}(p_1 + p_3) + a'\sigma^{-1}(p_2) = h^{e-1}s. \tag{3.21}$$

Como $a(0) \neq 0$, c divide a s y se sigue de la Proposición 3.2.1*(ii)* que existe $s_1 \in \mathcal{S}$ tal que $s = \mathcal{N}(c)s_1$.

Sean α, $\beta \in \Bbbk[h]$ tales que $\frac{a}{c}\alpha + \frac{a'}{c}\beta = 1$; cada solución de la ecuación (3.21) es de la forma

$$p_3 = \sigma\big(h^{e-1}\bar{c}s_1\alpha + \tfrac{a'}{c}g\big) - p_1,$$
$$p_2 = \sigma\big(h^{e-1}\bar{c}s_1\beta - \tfrac{a}{c}g\big)$$

para algún $g \in \Bbbk[h]$. Sean b, $r \in \Bbbk[h]$ tales que $g = bc + r$ y $\deg r < M$. Sin cambiar su clase en E^2, podemos reemplazar u por $u - \delta(\sigma^{-1}(p_1)|H - y\sigma(b)|X)$, y entonces vemos que podemos suponer que

$$u = \sigma(h^{e-1}\bar{c}s_1\beta - \tfrac{a}{c}r)|Y \wedge X + y\sigma(h^{e-1}\bar{c}s_1\alpha + \tfrac{a'}{c}r)|H \wedge X. \tag{3.22}$$

Si u representa a la clase nula en E^1, entonces existen v_1, v_2, $v_3 \in \Bbbk[h]$ tales que

$$\begin{aligned} u &= \delta(v_1x|Y + v_2|H + yv_3|X) \\ &= (v_1\sigma(a') + \sigma(v_2))x|Y \wedge H + \sigma(a)(v_3 - v_1)|Y \wedge X \\ &\qquad - y(v_3\sigma(a') + \sigma(v_2)|H \wedge X. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes y eliminando v_2, vemos que

$$a\sigma^{-1}(v_3 - v_1) = h^{e-1}\bar{c}s_1\beta - \tfrac{a}{c}r,$$
$$-a'\sigma^{-1}(v_3 - v_1) = h^{e-1}\bar{c}s_1\alpha + \tfrac{a'}{c}r.$$

Podemos ahora despejar primero s_1 y después r, vemos que u tiene que ser 0.

Comprobemos ahora que u representa un elemento no nulo de E^2. En efecto, si existe $p \in \Bbbk[h]$ tal que

$$u = d(p|Y \wedge H \wedge X) = y(1 - q\sigma)(p)|H \wedge X - (1 - q\sigma)(p)x|Y \wedge H,$$

entonces necesariamente tenemos que $(1 - q\sigma)(p) = 0$ y que

$$\tfrac{a}{c}r = h^{e-1}\bar{c}s_1\beta,$$
$$\tfrac{a'}{c}r = -h^{e-1}\bar{c}s_1\alpha.$$

Resolviendo estas ecuaciones para despejar s_1 y r, usando la manera en que elegimos α y β y usando por último que $h^{e-1}\bar{c} \neq 0$, vemos que $s_1 = r = 0$.

De esta manera concluimos que cada elemento de $E^2_{2,0}$ puede ser representado de manera única por un ciclo de la forma (3.22). En particular tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales $E^2_{2,0} \cong \mathcal{S} \oplus \Bbbk[h]/(c)$.

Homología en $E^1_{1,0}$. Sea $u = p_1x|Y + p_2|H + yp_3|X \in E^0_{1,0}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$, un elemento que sobrevive hasta E^2. Como u es homólogo a $u - \delta(\sigma^{-1}(p_1)) = (p_2 + a'\sigma^{-1}(p_1))|H + y(p_3 - p_1)|X$, podemos suponer que $p_1 = 0$.

Si u es un borde, de manera que $u = d(f_1x|Y \wedge H + f_2|Y \wedge X + yf_3|H \wedge X) + \delta(f_4)$, para $f_i \in \Bbbk[h]$, podemos mirar el coeficiente de Y en ambos lados de esta igualdad y encontrar que $(1-\sigma)(f_2) + \sigma(p_4) = 0$. Esto implica que $p_3 = 0$ y que $p_2 \in (1 - q\sigma)((c))$. Por otro lado, como

$$d(u) = \sigma(a)p_3 - a\sigma^{-1}(p_3) = (\sigma - 1)(a\sigma^{-1}(p_3)) = 0, \tag{3.23}$$

vemos que $a\sigma^{-1}(p_3) \in \mathcal{S}$.

- Supongamos primero que q *es una raíz* 1. Entonces, de acuerdo con la Proposición 3.2.1, $p_3 = \sigma(\overline{a})s$ para algún $s \in \mathcal{S}$, y por lo tanto tenemos que $u = p_2|H + y\sigma(\overline{a})s|X$. Teniendo en cuenta la descripción de los bordes que dimos más arriba, concluimos que

$$E^2_{1,0} \cong \frac{\Bbbk[h]}{(1-q\sigma)((c))}|H \oplus y\sigma(\bar{a})\mathcal{S}|X.$$

  El Lema 3.2.3 dice que el primer sumando es isomorfo a $\Bbbk^{\eta(c)} \oplus S$.
- Supongamos ahora que q *no es una raíz de* 1. En este caso, como a no es constante, la ecuación (3.23) implica que $p_3 = 0$. Usando de nuevo la descripción de los ciclos vemos que

$$E^2_{1,0} \cong \frac{\Bbbk[h]}{(1-q\sigma)((c))}|H,$$

  un espacio vectorial de dimensión M.

Homología en $E^1_{0,0}$. Tenemos que calcular el conúcleo del morfismo $d : A|V \to A$. Desarrollando explícitamente las fórmulas (3.11a), (3.11b) y (3.11c) vemos que la imagen de d coincide con la imagen del morfismo $\psi_{a,0} : f \in \Bbbk[h] \mapsto (\sigma - 1)(af) \in \Bbbk[h]$ que aparece en el Lema 3.2.3. Si q no es una raíz de la unidad, es claro que las clases de $1, \dots, h^{N-1}$ generan libremente $\operatorname{coker}\psi_{a,0}$, de manera que $\dim E^2_{0,0} = N$. Por otro lado, si q es raíz de la unidad, entonces el Lema 3.2.3 nos dice que la dimensión del conúcleo de $\psi_{a,0}$, que coincide con la de $E^2_{0,0}$, es $\eta(a) = N - \frac{1}{e}\deg\mathcal{N}(a)$. □

Proposición 3.4.6. *Sea $r \neq 0$. Dependiendo de si r es regular o no, hay isomorfismos de $\mathcal{S}$-módulos*

$$HH_p(A)^{(r)} \cong E^{2(r)}_{p,0} \cong \begin{cases} \mathcal{S}, & \text{si } p = 0; \\ \Bbbk, & \text{si } p = 1; \\ 0, & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

o

$$\mathrm{HH}_p(A)^{(r)} \cong E^{2(r)}_{p,0} \cong \begin{cases} \mathcal{S}, & \textit{si } p = 0; \\ \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}, & \textit{si } p = 1; \\ \mathcal{S}, & \textit{si } p = 2. \end{cases}$$

Demostración. Por simetría, podemos considerar solamente el caso donde $r > 0$.

Homología en $E^{1(r)}_{2,0}$. Sea $u \in E^{0(r)}_{2,0}$ un elemento que representa un ciclo en E^1. Se sigue que $u = y^{r-1}p_1|Y \wedge H + y^r p_2|Y \wedge X + y^{r+1}p_3|H \wedge X$ con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $p_2 = p_3 = 0$; en efecto si este no es el caso podemos reemplazar u por

$$u + \delta\Big(y^{r-1}\sigma^{-1}(p_2)|Y + y^r\sigma^{-1}(p_3)|H\Big)$$

sin cambiar la clase de u en E^1. Calculando, vemos que

$$d(u) = y^{r-1}(1 - q^r)p_1 h|Y + y^r(p_1 - q\sigma(p_1))|H. \tag{3.24}$$

Comparando con la ecuación (3.12a) vemos, como $d(u)$ está en la imagen de δ, que $(1 - q^r)p_1 = 0$ y $p_1 - q\sigma(p_1) = 0$. Si r es un peso regular, se sigue que $p_1 = 0$ y luego $E^{2(r)}_{2,0} = 0$. Por otro lado, si r es singular, estas ecuaciones se satisfacen si y solo si $p_1 \in h^{e-1}\mathcal{S}$: en este caso tenemos que $E^{2(r)}_{2,0} \cong h^{e-1}\mathcal{S}$.

Homología en $E^{1(r)}_{1,0}$. Sea $u = y^{r-1}p_1|Y + y^r p_2|H + y^{r+1}p_3|X \in E^{0(r)}_{1,0}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$, un elemento que sobrevive hasta la página E^2. Reemplazando u por $u - \delta(y^r\sigma^{-1}(p_3))$, podemos suponer que $p_3 = 0$, de manera que

$$d(u) = y^r(p_1 - \sigma(p_1) + (q^r - 1)hp_2) = 0. \tag{3.25}$$

Supongamos que r es singular. Se sigue que $p_1 \in \mathcal{S}$; más aún, en vista de la fórmula (3.24), podemos reducir p_2 módulo la imagen de $1 - q\sigma$, de manera que podemos suponer que $p_2 \in h^{e-1}\mathcal{S}$. De las ecuaciones (3.11d), (3.11e), (3.11f) y (3.12a) vemos que u no es un borde y concluimos que $E^{2(r)}_{1,0} \cong \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$ en este caso, generado libremente como $\mathcal{S}$-módulo por las clases de $y^{r-1}|Y$ y $y^r h^{e-1}|H$.

Finalmente, supongamos que r es regular. Usando de nuevo (3.24), vemos que ahora podemos reemplazar u por un elemento homólogo de la misma forma pero ahora con $p_1 \in \Bbbk$ y entonces, por causa de (3.25), debemos tener $p_2 = 0$. De esta manera, vemos que u tiene que ser un múltiplo escalar de $y^{r-1}|Y$. Si un elemento de este tipo es un borde, podemos mirar el termino constante en las fórmulas (3.11d), (3.11e), (3.11f) y (3.12a), para concluir que u es cero, y por lo tanto $E^{2(r)}_{1,0}$ tiene dimensión 1.

Homología en $E^{1(r)}_{0,0}$. Sea $u = y^r p \in E^{0(r)}_{0,0}$. Podemos sumarle a u elementos en la imagen de d sin cambiar su clase en la homología; haciéndolo, podemos suponer que $p \in S$. Más aún, en este caso u no está en la imagen de d: esto significa que $E^{1(r)}_{0,0} \cong S$, generado libremente por la clase de 1. $\square$

El siguiente teorema resume todo lo que demostramos en esta sección.

Teorema 3.4.7. *Sea* $A = A(\sigma_q, a)$ *un álgebra de Weyl generalizada cuántica tal que* $a(0) \neq 0$*. Supongamos primero que* $q \in \Bbbk^\times$ *no es una raíz de* 1*. Entonces*

$$\mathrm{HH}_p(A) = \begin{cases} \Bbbk^N \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}\setminus 0} \Bbbk, & \textit{si } p = 0; \\ \Bbbk^M \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}\setminus 0} \Bbbk, & \textit{si } p = 1; \\ \Bbbk^M, & \textit{si } p \geq 2. \end{cases}$$

Si en cambio q *es raíz de la unidad, entonces*

$$\mathrm{HH}_p(A) = \begin{cases} \Bbbk^{\eta(a)} \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}\setminus 0} \mathcal{S}, & \textit{si } p = 0; \\ \Bbbk^{\eta(c)} \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}\setminus e\mathbb{Z}} \big(\Bbbk[h]/(h)\big) \oplus \bigoplus_{r\in e\mathbb{Z}} \mathcal{S}^2, & \textit{si } p = 1; \\ \Bbbk[h]/(c) \oplus \bigoplus_{r\in e\mathbb{Z}} \mathcal{S}, & \textit{si } p = 2; \\ \Bbbk[h]/(c), & \textit{si } p \geq 3; \end{cases}$$

donde $N = \deg a$*,* $M = \deg(a, a')$ *y para un polinomio* $f \in \Bbbk[h]$*, escribimos* $\eta(f) = \deg f - \frac{1}{e}\deg \mathcal{N}(f)$ *con* $\mathcal{N}$ *el operador definido en la Sección 3.2.*

3.5. Cohomología de Hochschild

En esta sección vamos a calcular la cohomología de Hochschild de A usando, como antes, una sucesión espectral. Escribimos $\hat{V} = \hom_\Bbbk(V, \Bbbk)$, y elegimos $\{\hat{Y}, \hat{H}, \hat{X}\}$ la base de $\hat{V}$ dual a $\{Y, H, X\}$. Identificamos en la forma usual $\hom_\Bbbk(\bigwedge^p V, \Bbbk)$ con $\bigwedge^p \hat{V}$. Aplicando el funtor $\hom_{A^e}(-, A)$ a la resolución que construimos en 3.3.3 obtenemos un complejo doble cuya homología es la cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ de A. Después de identificar $\hom_{A^e}(A|\bigwedge^p V|A, A)$ con $A|\bigwedge^p \hat{V}$ en la forma natural, este complejo doble es

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & A|\bigwedge^3\hat{V} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] & A|\bigwedge^2\hat{V} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] & A|\hat{V} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] & A \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] \\
0 & A|\bigwedge^3\hat{V} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] & A|\bigwedge^2\hat{V} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] & A|\hat{V} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] & A \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"] & \\
\iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots &
\end{tikzcd}$$

con diferenciales dados por

$$d(u) = [u, y]|\hat{Y} + [u, h]|\hat{H} + [u, x]|\hat{X}; \tag{3.26a}$$

$$d(u|\hat{Y}) = [h,u]_q|\hat{Y}\wedge\hat{H} - [u,x]|\hat{Y}\wedge\hat{X}; \tag{3.26b}$$
$$d(u|\hat{H}) = [x,u]_q|\hat{H}\wedge\hat{X} - \textstyle\sum_i \lambda_i \int_i h^s u h^t|\hat{Y}\wedge\hat{X} + [u,y]_q|\hat{Y}\wedge\hat{H}; \tag{3.26c}$$
$$d(u|\hat{X}) = [u,h]_q|\hat{H}\wedge\hat{X} + [u,y]|\hat{Y}\wedge\hat{X}; \tag{3.26d}$$
$$d(u|\hat{Y}\wedge\hat{H}) = -[x,u]_q|\hat{Y}\wedge\hat{H}\wedge\hat{X}; \tag{3.26e}$$
$$d(u|\hat{Y}\wedge\hat{X}) = q[h,u]|\hat{Y}\wedge\hat{H}\wedge\hat{X}; \tag{3.26f}$$
$$d(u|\hat{H}\wedge\hat{X}) = [u,y]_q|\hat{Y}\wedge\hat{H}\wedge\hat{X}; \tag{3.26g}$$

y

$$\delta(u|\hat{Y}) = ux; \tag{3.27a}$$
$$\delta(u|\hat{H}) = -\textstyle\sum_i \alpha_i \int_i h^s u h^t; \tag{3.27b}$$
$$\delta(u|\hat{X}) = yu; \tag{3.27c}$$
$$\delta(u|\hat{Y}\wedge\hat{H}) = \textstyle\sum_i \alpha_i \int_i q^t h^s u h^t|\hat{Y} + ux|\hat{H}; \tag{3.27d}$$
$$\delta(u|\hat{Y}\wedge\hat{X}) = ux|\hat{X} - yu|\hat{Y}; \tag{3.27e}$$
$$\delta(u|\hat{H}\wedge\hat{X}) = -yu|\hat{H} - \textstyle\sum_i \alpha_i \int_i q^s h^s u h^t|\hat{X}; \tag{3.27f}$$
$$\delta(u|\hat{Y}\wedge\hat{H}\wedge\hat{X}) = ux|\hat{H}\wedge\hat{X} + \textstyle\sum_i \alpha_i \int_i q^{i-1} h^s u h^t|\hat{Y}\wedge\hat{X} + yu|\hat{Y}\wedge\hat{H}. \tag{3.27g}$$

Vamos a considerar la sucesión espectral E que surge de la filtración del complejo doble por columnas.

3.5.1. Primera página

En esta sección tratamos con la primera página de la sucesión espectral. Sea $\mathcal{Y}$ el complejo

$$0 \longrightarrow A|\textstyle\bigwedge^3\hat{V} \xrightarrow{\delta} A|\bigwedge^2\hat{V} \xrightarrow{\delta} A|\hat{V} \xrightarrow{\delta} A \tag{3.28}$$

con diferenciales como los de (3.27a)–(3.27g). De la misma manera que antes, tenemos que $E_1^{p,q} \cong H^{p-q}(\mathcal{Y})$ para todo $q > 0$ y los espacios vectoriales $E_1^{p,0}$ son isomorfos a los núcleos de los diferenciales de $\mathcal{Y}$. Para cada $r \in \mathbb{Z}$ denotamos $\mathcal{Y}_{(r)}$ a la componente de peso r de $\mathcal{Y}$, y extendemos esta notación a los objetos relacionados.

Proposición 3.5.1. *Si $r \in \mathbb{Z}$ es no nulo, entonces el complejo $\mathcal{Y}_{(r)}$ es exacto. Por otro lado hay isomorfismos de $\mathcal{S}$-módulos*

$$H^p(\mathcal{Y}_{(0)}) \cong \begin{cases} \Bbbk[h]/(c), & \textit{si } 0 \le p \le 1; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Calculemos los grupos de cohomología relevantes.

- Si $u = p|\hat{Y} \wedge \hat{H} \wedge \hat{X} \in \mathcal{Y}^3_{(0)}$ con $p \in \Bbbk[h]$, entonces

$$\delta(u) = px|\hat{H} \wedge \hat{X} + p\sigma(a')|\hat{Y} \wedge \hat{X} + yp|\hat{Y} \wedge \hat{H}. \tag{3.29}$$

  Es claro que $H^3(\mathcal{Y}_{(0)}) = 0$.
- Sea $u = yp_1|\hat{Y} \wedge \hat{H} + p_2|\hat{Y} \wedge \hat{X} + p_3x|\hat{H} \wedge \hat{X} \in \mathcal{Y}^2_{(0)}$ con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$. Se puede ver que

$$\delta(u) = y(p_1\sigma(a') - p_2)|\hat{Y} + (a\sigma^{-1}(p_1 - p_3))|\hat{H} + (-p_3\sigma(a') + p_2)x|\hat{X}. \tag{3.30}$$

  En particular, si u es un ciclo, $p_2 = \sigma(a')p_1$ y $p_3 = p_1$. Comparando con la expresión (3.29) para 2-bordes en $\mathcal{Y}$, vemos inmediatamente que $H^2(\mathcal{Y}_{(0)}) = 0$.
- Finalmente, sea $u = yp_1|\hat{Y} + p_2|\hat{H} + p_3x|\hat{X} \in \mathcal{Y}^1_{(0)}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$, un 1-ciclo. Como podemos reemplazar u por $u + \delta(p_1|\hat{H})$ sin cambiar la clase de homología que representa, podemos suponer que $p_1 = 0$, y entonces $\delta(u) = a\sigma^{-1}(p_3) - p_2a' = 0$. Se sigue que existe $g \in \Bbbk[h]$ tal que $p_3 = \sigma(\frac{a'}{c}g)$ y $p_2 = \frac{a}{c}g$. Sean b, $r \in \Bbbk[h]$ tales que $g = bc + r$ y $\deg r < M$. Entonces

$$u + \delta(\sigma(b)x|\hat{H} \wedge \hat{X}) = \tfrac{a}{c}r|\hat{H} + \sigma(\tfrac{a'}{c}r)x|\hat{X}.$$

  Esto significa que todas las clases en $H^1(\mathcal{Y}_{(0)})$ pueden ser representadas por un elemento de la forma $\frac{a}{c}r|\hat{H} + \sigma(\frac{a'}{c}r)x|\hat{X}$ con $r \in \Bbbk[h]$ y $\deg r < M$ y, más aún, un elemento de esta forma representa a la clase nula solamente cuando es cero: esto se deduce mirando el grado del coeficiente de $\hat{H}$ que aparece en la fórmula (3.30) para 1-bordes. Recíprocamente, cada elemento de esa forma es un ciclo. Concluimos que $H^1(\mathcal{Y}_{(0)}) \cong \Bbbk[h]/(c)$.
- Si $u = yp_1|\hat{Y} + p_2|\hat{H} + p_3x|\hat{X} \in \mathcal{Y}^1_{(0)}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$, entonces $\delta(u) = a\sigma^{-1}(p_1 + p_3) - p_2a'$, de manera que $H^0(\mathcal{Y}_{(0)}) \cong \Bbbk[h]/(c)$.

Falta comprobar, en estos últimos dos items, que los isomorfismos obtenidos son $\mathcal{S}$-lineales: esto se puede hacer inspeccionando con más detalle los cálculos pero aquí lo omitiremos.

Fijemos ahora un peso $r > 0$.

- Si $u = y^rp|\hat{Y} \wedge \hat{H} \wedge \hat{X} \in \mathcal{Y}^3_{(r)}$, con $p \in \Bbbk[h]$, entonces

$$\delta(u) = y^{r+1}p|\hat{Y} \wedge \hat{H} + y^rp\textstyle\sum_i \alpha_i q^{i-1}[i]_{q^r}h^{i-1}|\hat{Y} \wedge \hat{X} + y^{r-1}a\sigma^{-1}(p)|\hat{H} \wedge \hat{X}. \tag{3.31}$$

  Mirando el coeficiente de $\hat{Y} \wedge \hat{H}$ vemos que u es un ciclo si y solo si u es cero y entonces $H^3(\mathcal{Y}_{(r)}) = 0$.
- Sea $u = y^{r+1}p_1|\hat{Y} \wedge \hat{H} + y^rp_2|\hat{Y} \wedge \hat{X} + y^{r-1}p_3|\hat{H} \wedge \hat{X} \in \mathcal{Y}^2_{(r)}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$. Como

$$\begin{aligned}\delta(u) = y^{r+1}\big(p_1 \textstyle\sum_i \alpha_i q^{i-1}[i]_{q^r} h^{i-1} - p_2\big)|\hat{Y} + y^r\big(a\sigma^{-1}(p_1) - p_3\big)|\hat{H}\\ + y^{r-1}\big(a\sigma^{-1}(p_2) - p_3 \textstyle\sum_i \alpha_i [i]_{q^r} h^{i-1}\big)|\hat{X},\end{aligned}$$

es fácil ver que u es un ciclo si y solo si

$$\begin{aligned}&p_2 = p_1 \sum_i \alpha_i q^{i-1}[i]_{q^r} h^{i-1},\\ &p_3 = a\sigma^{-1}(p_1),\end{aligned}$$

y en este caso, de acuerdo a (3.31), tenemos que $u = \delta(y^r p_1|\hat{Y} \wedge \hat{H} \wedge \hat{X})$. Concluimos que $H^2(\mathcal{Y}_{(r)}) = 0$.

- Sea $u = y^{r+1}p_1|\hat{Y} + y^r p_2|\hat{H} + y^{r-1}p_3|\hat{X} \in \mathcal{Y}^1_{(r)}$, con p_1, p_2, $p_3 \in \mathbb{k}[h]$ un 1-ciclo. Sin cambiar su clase en la homología, podemos reemplazar u por $u + \delta(y^r p_1|\hat{Y} \wedge \hat{X} + y^{r-1}p_2|\hat{H} \wedge \hat{X})$, y luego podemos suponer que $p_1 = p_2 = 0$. En este caso $\delta(u) = y^r p_3$, y vemos que $u = 0$. Se sigue que $H^1(\mathcal{Y}_{(r)}) = 0$.
- Finalmente, para cada $p \in \mathbb{k}[h]$, $\delta(y^{r-1}p|\hat{X}) = y^r p$, de manera que $\delta(\mathcal{Y}^1_{(r)}) = \mathcal{Y}^0_{(r)}$ y $H^0(\mathcal{Y}_{(r)}) = 0$. □

Corolario 3.5.2. *Si $r \in \mathbb{Z}$, las dimensiones de los espacios vectoriales que aparecen en la componente $E_{1(r)}$ de E_1 son, dependiendo de si $r = 0$ o $r \neq 0$,*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & ? & ? & ? \\ & & 0 & 0 & M & M & \\ & 0 & 0 & M & M & & \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & & \end{array} \qquad o \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & ? & ? & ? \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & & \end{array}$$

respectivamente. Los signos de pregunta denotan espacios vectoriales para los cuales no conocemos todavía la dimensión.

Demostración. Se sigue de la proposición y de los isomorfismos $E^{p,q}_{1(r)} \cong H^{p-q}(\mathcal{Y}_{(r)})$. □

3.5.2. Segunda página

Proposición 3.5.3. *Para cada $p \geq 0$, el diferencial $d^{p,p}_1 : E^{p,p}_1 \to E^{p+1,p}_1$ se anula. La página E_∞ entonces coincide con la E_1, excepto con los lugares marcados con signos de pregunta en los diagramas del Corolario 3.5.2, y tenemos*

$$HH^p(A)_{(r)} \cong \begin{cases} \mathbb{k}[h]/(c), & \textit{si } r = 0; \\ 0, & \textit{si } r \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. El conjunto de clases de homología de elementos de la forma $\{h^l : 0 \leq l < M\}$ es una base del espacio $E_1^{p,p}$, y

$$d(h^l) = (q^l - 1)yh^l|\hat{Y} - (q^l - 1)h^l x|\hat{X} = \delta(-(q^l - 1)h^l|\hat{Y} \wedge \hat{X}).$$

Se sigue que $d_1^{p,p}$ es de hecho cero, como afirmamos. El resto de la proposición es consecuencia del hecho de que la sucesión espectral E converge a $HH^\bullet(A)$. □

Proposición 3.5.4. *Si* q *es una raíz de la unidad, entonces*

$$E_{2(0)}^{p,0} \cong \begin{cases} \mathcal{S}, & \textit{si } p = 0; \\ \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}, & \textit{si } p = 1; \\ \mathcal{S} \oplus \Bbbk^{\eta(a/c)}, & \textit{si } p = 2, \end{cases}$$

donde, como en el Lema 3.2.3, $\eta(a/c) = N - M - \deg \mathcal{N}(a/c)/e$*, y si* q *tiene orden infinito,*

$$E_{2(0)}^{p,0} \cong \begin{cases} \Bbbk, & \textit{si } p = 0; \\ \Bbbk, & \textit{si } p = 1; \\ \Bbbk^{N-M}, & \textit{si } p = 2. \end{cases}$$

Demostración. Durante esta prueba vamos a escribir $E_r^{p,q}$ en vez de $E_{r(0)}^{p,q}$ por simplicidad.
Homología en $E_1^{0,0}$. Si $u = p \in E_1^{0,0}$, para $p \in \Bbbk[h]$, tenemos que

$$d(p) = y(\sigma(p) - p)|\hat{Y} - (\sigma(p) - p)x|\hat{X}. \tag{3.32}$$

Se sigue que $E_1^{0,0} = \ker(\sigma - 1) = \mathcal{S}$.
Homología en $E_1^{1,0}$. Si $u \in E_1^{1,0}$, existen p_1, $p_2 \in \Bbbk[h]$ tales que $u = yp_1|\hat{Y} + \frac{a}{d}p_2|\hat{H} + (\sigma(\frac{a'}{d}p_2) - p_1)x|\hat{X}$; esto es una consecuencia de las fórmulas (3.27a), (3.27b) y (3.27c) usando el mismo razonamiento que en el tercer paso de la prueba de la Proposición 3.5.1. Más aún, existen $s_1 \in \mathcal{S}$ y $b \in \Bbbk[h]$ tales que $p_1 = s_1 + (\sigma - 1)(b)$ y podemos reemplazar u por $u - d(b)$ de manera que, al final, podemos suponer que $p_1 = s_1 \in \mathcal{S}$. En este caso, u es un borde si y solo si es cero: esto se sigue de comparar los coeficientes de $\hat{Y}$ en u y en (3.32). Calculando vemos que

$$\begin{aligned} d(u) = (\sigma - q)(\tfrac{a}{c}p_2)x|\hat{H} \wedge \hat{X} + y(\sigma - q)(\tfrac{a}{c}p_2)|\hat{Y} \wedge \hat{H} \\ + \big((\sigma - 1)(\tfrac{aa'}{c}p_2) - \tfrac{a}{c}p_2(q\sigma(a') - a')\big)|\hat{Y} \wedge \hat{X}. \end{aligned}$$

Si $d(u) = 0$, entonces $(\sigma - q)(\frac{a}{c}p_2) = 0$ y $\frac{a}{c}p_2 \in h\mathcal{S}$; recíprocamente, si $\frac{a}{c}p_2 \in h\mathcal{S}$, entonces u es un ciclo. Vamos a considerar dos casos por separado, de acuerdo a si q es una raíz de la unidad o no.

- Supongamos primero que q *no es una raíz de* 1. Como $\frac{a}{c}p_2 \in h\mathcal{S}$ y $\mathcal{S} = \Bbbk$, entonces $p_2 \in \Bbbk$. Evaluando $\frac{a}{c}p_2$ en cero, y usando la hipótesis $a(0) \neq 0$, vemos que $p_2 = 0$. En este caso, entonces, u es un múltiplo escalar de $y|\hat{Y} - x|\hat{X}$. Como todos los múltiplos no nulos son ciclos y no son bordes, concluimos que $E_2^{1,0}$ tiene dimensión uno y está generado por la clase de $y|\hat{Y} - x|\hat{X}$.
- Supongamos ahora que q *es una raíz de* 1. Como $h \nmid a$, debemos tener que $h \mid p_2$ y $\frac{a}{c}\frac{p_2}{h} \in \mathcal{S}$. Entonces existe, por la Proposición 3.2.1*(i)*, $s_2 \in \mathcal{S}$ tal que $p_2 = h s_2\overline{(\frac{a}{c})}$. Esto nos da una descripción de la homología: es el $\mathcal{S}$-módulo libre de rango 2 generado por las clases de $y|\hat{Y} - x|\hat{X}$ y $\mathcal{N}(\frac{a}{c})h|\hat{H} + \sigma(\frac{a'}{c}\overline{\frac{a}{c}}h)x|\hat{X}$.

Homología en $E_1^{2,0}$. Sea $u \in E_1^{2,0}$, de manera que $u \in E_0^{2,0}$ y $\delta(u) = 0$. En vista de (3.30), existe $p \in \Bbbk[h]$ tal que $u = yp|\hat{Y} \wedge \hat{H} + p\sigma(a')|\hat{Y} \wedge \hat{X} + px|\hat{H} \wedge \hat{X}$.

El elemento u es un borde si existen $f_1, f_2 \in \Bbbk[h]$ tales que $u = d(yf_1|\hat{Y} + \frac{a}{c}f_2|\hat{H} + (\sigma(\frac{a'}{c}f_2) - f_1)x|\hat{X})$ o, haciéndolo explicito,

$$
\begin{aligned}
&p = (\sigma - q)(\tfrac{a}{c}f_2),\\
&\sigma(a')p = D_q(\tfrac{aa'}{c}f_2) - \tfrac{a}{c}f_2(q\sigma(a') - a').
\end{aligned}
$$

La segunda ecuación se deduce de la primera, y entonces concluimos que u es un borde si y solo si $p \in \operatorname{im}\psi_{a/c,1}$ con $\psi_{a/c,1}$ definido como en el Lema 3.2.3. En otras palabras hay un isomorfismo $E_2^{2,0} \cong \operatorname{coker}\psi_{a/c,1}$. Tenemos dos casos:

- Supongamos primero que q *no es una raíz de* 1. Si $\deg(\frac{a}{c}) > 1$, entonces $\deg\psi_{a/c,1}(f) = \deg(\frac{a}{c}) + \deg(f)$ para $f \in \Bbbk[h] \setminus 0$. Se sigue entonces que $\operatorname{coker}\psi_{a/c,1}$ es generado por las clases de $1, h, \dots, h^{N-M-1}$, porque $\operatorname{im}\psi_{a/c,1}$ está generada por un conjunto de polinomios de cada grado mayor o igual a $N - M$. Concluimos que $\dim(\operatorname{coker}(\psi_{a/c,1})) = N - M$.

  Por otro lado, si $\deg(\frac{a}{c}) = 1$, tenemos $\deg\psi_{a/c,1}(f) = 1 + \deg(f)$ para todos los $f \in \Bbbk[h]$ no constantes y $\deg\psi_{a/c,1}(f) = 0$ para $f \in \Bbbk \setminus 0$, de manera que el conúcleo está generado por la clase de h. En particular, $\dim\operatorname{coker}(\psi_{a/c,1}) = 1 = N - M$.
- Supongamos ahora que q *es una raíz de* 1. La dimensión de $\operatorname{coker}\psi_{a/c,1}$ la determinamos en el Lema 3.2.3, de manera que la dimensión de $E_{2(0)}^{2,0}$ es $\eta(a/c)$, como afirmamos en el enunciado de esta proposición. □

Corolario 3.5.5. *Si q es una raíz de la unidad, hay isomorfismos de $\mathcal{S}$-módulos*

$$
HH^p(A)_{(0)} \cong \begin{cases} \mathcal{S}, & \text{si } p = 0;\\ \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}, & \text{si } p = 1;\\ \mathcal{S} \oplus \Bbbk^{\eta(a/c)} \oplus \Bbbk[h]/(c), & \text{si } p = 2. \end{cases}
$$

Si, por otro lado, q *tiene orden infinito,*

$$HH^p(A)_{(0)} \cong \begin{cases} \Bbbk, & \textit{si } p = 0; \\ \Bbbk, & \textit{si } p = 1; \\ \Bbbk^{N-M} \oplus \Bbbk^M, & \textit{si } p = 2. \end{cases}$$

Demostración. Se sigue de la proposición y de la convergencia de la sucesión espectral. □

Observación 3.5.6. En el cálculo de la cohomología de Hochschild el hecho que $a(0) \neq 0$ se usa solamente en la demostración de la Proposición 3.5.4. En el caso cuando q no es una raíz de 1, usando un razonamiento análogo se puede probar que si $a(0) = 0$ y $a \neq h^N$ vale el mismo resultado. Si en cambio $a = h^N$ entonces

$$E_{2(0)}^{p,0} \cong \begin{cases} \Bbbk, & \text{si } p = 0; \\ \Bbbk^2, & \text{si } p = 1; \\ \Bbbk^{N-M+1}, & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

Por otro lado, si q es una raíz de 1 entonces

$$E_{2(0)}^{p,0} \cong \begin{cases} \mathcal{S}, & \text{si } p = 0; \\ \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}, & \text{si } p = 1; \\ \mathcal{S} \oplus \Bbbk^{\eta(a/(ch))+1} & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

Esta diferencia es de esperar porque, por ejemplo, cuando $a = h^N$ hay graduaciones en A tales que $\deg h = 1$ y $\deg x + \deg y = N$. La derivación euleriana inducida por alguna de estas graduaciones es una clase no nula en $HH^1(A)$, que no es cohomóloga a la inducida por el peso.

El cálculo de la cohomología en el caso $a(0) = 0$ y q raíz de la unidad se puede llevar a cabo modificando el análisis de la Sección 3.2 teniendo en cuenta que alcanza con tratar el caso de polinomios con raíces simples pues a/c siempre es así.

Proposición 3.5.7. *Sea* $r \neq 0$*. De acuerdo a si* r *es regular o no, hay isomorfismos de* $\mathcal{S}$*-módulos*

$$E_{2(r)}^{p,0} \cong \begin{cases} 0, & \textit{si } p = 0; \\ 0, & \textit{si } p = 1; \\ 0, & \textit{si } p = 2. \end{cases}$$

o

$$E_{2(r)}^{p,0} \cong \begin{cases} \mathcal{S}, & \textit{si } p = 0; \\ \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}, & \textit{si } p = 1; \\ \mathcal{S}, & \textit{si } p = 2. \end{cases}$$

Demostración. **Homología en $E^{0,0}_{1(r)}$.** Sea $u \in E^{0,0}_{0(r)}$, de forma que $u = y^r p$ para algún $p \in \Bbbk[h]$. Como

$$d(u) = y^{r+1}(\sigma(p) - p)|\hat{Y} + (1 - q^r)ph|\hat{H} + y^{r-1}(a\sigma^{-1}(p) - \sigma^r(a)p)|\hat{X}, \quad (3.33)$$

u es un ciclo no nulo si y solo si r es un peso singular y $p \in \mathcal{S}$.

Homología en $E^{1,0}_{1(r)}$. Si $u \in E^{1,0}_{1(r)}$, entonces existen p_1, p_2, $p_3 \in \Bbbk[h]$ tales que $u = y^{r+1}p_1|\hat{Y} + y^r p_2|\hat{H} + y^{r-1}p_3|\hat{X}$ y $\delta(u) = 0$. Esta condición implica inmediatamente, usando (3.27a), (3.27b) y (3.27c), que $p_3 = p_2 \sum_i \alpha_i [i]_{q^r} h^{i-1} - a\sigma^{-1}(p_1)$. Supongamos ahora que $d(u) = 0$.

- Si r *es regular*, podemos reemplazar u por $u - d((1 - q^r)^{-1} y^r (p_2 - p_2(0))/h)$ sin cambiar su clase en la homología, y esto se reduce a suponer inicialmente que $p_2 \in \Bbbk$. En ese caso, es fácil ver que el coeficiente de $\hat{Y} \wedge \hat{H}$ en $d(u)$ es $y^{r+1}(q(q^r - 1)hp_1 + (1 - q)p_2) = 0$ y, entonces, $p_1 = p_2 = 0$. Similarmente, mirando el coeficiente de $\hat{H} \wedge \hat{X}$, se puede concluir que $p_3 = 0$.
- Si r *es singular*, existen $b \in \Bbbk[h]$ y $s_1 \in S$ tales que $p_1 = \sigma(b) - b + s_1$; reemplazando u por $u - d(y^r b)$, lo que podemos hacer sin cambiar la clase de u en la homología, podemos suponer que $p_1 = s_1 \in S$. Calculando, vemos que

$$\begin{aligned} d(u) = y^{r+1}(\sigma - q)(p_2)|\hat{Y} \wedge \hat{H} + y^r \sigma(a')(\sigma - q)(p_2)|\hat{Y} \wedge \hat{X} \\ + y^{r-1} a(\sigma - q)(\sigma^{-1}(p_2))|\hat{H} \wedge \hat{X}, \end{aligned}$$

  y es claro que esta expresión se anula exactamente cuando $p_2 \in h\mathcal{S}$. Vemos que cada elemento de $E^{1,0}_{2(r)}$ se puede representar por un elemento en el $\mathcal{S}$-submódulo generado por los elementos

$$y^{r+1}|\hat{Y} - y^{r-1}a|\hat{X} \qquad\qquad y^r h|\hat{H} + y^{r-1}a' h|\hat{X}.$$

  Comparando con (3.33), es fácil ver que este submódulo no contiene bordes no nulos. Luego $E^{1,0}_{2(r)}$ es libre como $\mathcal{S}$-módulo de rango 2.

Homología en $E^{2,0}_{1(r)}$. Sea $u = y^{r+1}p_1|\hat{Y} \wedge \hat{H} + y^r p_2|\hat{Y} \wedge \hat{X} + y^{r-1}p_3|\hat{H} \wedge \hat{X} \in E^{2,0}_{1(r)}$.

- Si r *es regular*, sea $b_i = (p_i - p_i(0))(q(q^r - 1)h)^{-1}$ para $i \in \{1, 3\}$. Podemos reemplazar u por $u - d(b_1|\hat{Y} + b_3|\hat{X})$, y una cuenta usando (3.26b) y (3.26d) nos muestra que esto significa que podemos suponer que p_1, $p_3 \in \Bbbk$. Usando ahora (3.27d), (3.27e) y (3.27f), vemos fácilmente que $\delta(u) = 0$ si y solo si $u = 0$. Se sigue que en este caso $E^{2,0}_{2(r)} = 0$.
- Para finalizar, supongamos a continuación que r *es singular*. Como

$$\begin{aligned} \delta(u) = y^{r+1}(\sigma(a')p_1 - p_2)|\hat{Y} + y^r(a\sigma^{-1}(p_1) - p_3)|\hat{H} \\ + y^{r-1}(a\sigma^{-1}(p_2) - a' p_3)|\hat{X} = 0, \end{aligned}$$

vemos que $p_3 = a\sigma^{-1}(p_1)$ y $p_2 = \sigma(a')p_1$. Si $b \in \Bbbk[h]$ y $s \in S$ son tales que $p_1 = \sigma(b) - qb + hs$, podemos reemplazar u por $u - d(y^r b|\hat{H} + y^{r-1}ba'|\hat{X})$, que es

$$y^{r+1}hs_1|\hat{Y}\wedge\hat{H} + y^r\sigma(a')hs_1|\hat{Y}\wedge\hat{X} + y^{r-1}q^{-1}ahs_1|\hat{H}\wedge\hat{X}$$

sin cambiar su clase en $E^{2,0}_{2(r)}$. Ningún elemento de esta forma está en la imagen de d, como uno puede ver mirando el coeficiente de $\hat{Y}\wedge\hat{H}$ en (3.26b), (3.26c) y (3.26d) y entonces podemos concluir que $E^{2,0}_{2(r)}$ es un $\mathcal{S}$-módulo libre generado por la clase de $y^{r+1}h|\hat{Y}\wedge\hat{H} + y^r\sigma(a')h|\hat{Y}\wedge\hat{X} + y^{r-1}q^{-1}ah|\hat{H}\wedge\hat{X}$.
□

Podemos resumir todos los resultados de la sección en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.8. *Sea* $A = A(\sigma_q, a)$ *un álgebra de Weyl generalizada cuántica tal que* $a(0) \neq 0$. *Si* q *no es una raíz de la unidad, entonces*

$$HH^p(A) = \begin{cases} \Bbbk & \text{si } p = 0, 1; \\ \Bbbk^N & \text{si } p = 2; \\ \Bbbk^M & \text{si } p \geq 3; \end{cases}$$

Cuando q *es raíz de la unidad, se tiene que*

$$HH^p(A) = \begin{cases} \bigoplus_{r\in e\mathbb{Z}} \mathcal{S} & \text{si } p = 0; \\ \bigoplus_{r\in e\mathbb{Z}} \mathcal{S}^2 & \text{si } p = 1; \\ \Bbbk^{\eta(a/c)} \oplus \Bbbk[h]/(c) \oplus \bigoplus_{r\in e\mathbb{Z}} \mathcal{S} & \text{si } p = 2; \\ \Bbbk[h]/(c) & \text{si } p \geq 3. \end{cases}$$

donde, para un polinomio $f \in \Bbbk[h]$, *escribimos* $\eta(f) = \deg f - \frac{1}{e}\deg\mathcal{N}(f)$. *En este teorema* $\mathcal{N}$ *es el operador definido en la Sección 3.2,* $N = \deg a$, $c = (a, a')$ *y* $M = \deg c$.

Capítulo 4

Estructura de la cohomología y deformaciones

4.1. Introducción

En este capítulo vamos a describir la estructura multiplicativa de la cohomología de Hochschild de las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas definidas sobre $\Bbbk[h]$. Para llevar eso a cabo también calculamos morfismos de comparación entre la resolución que construimos en el Capítulo 3 y la resolución bar normalizada. Además usamos los morfismos de comparación y el lema del diamante de Bergman para describir explícitamente algunas deformaciones de estas álgebras (en el sentido de Gerstenhaber).

Con la técnica que usamos fuimos capaces de describir completamente el producto cup en el caso de dimensión global finita. La complejidad computacional necesaria para calcular los morfismos de comparación hace que este enfoque sea inviable en el caso de dimensión global infinita. Para atacar esta dificultad usamos la sucesión espectral de cambio de anillo como hace Suárez-Álvarez en [SA]. De esta forma podemos reducir el cálculo del producto cup a un cálculo en dimensión finita.

Todas las deformaciones que pudimos describir están definidas sobre $\Bbbk[h]$. Hay algunos cociclos que no pudimos asociar a deformaciones y creemos que dichos cociclos corresponden a deformaciones que no están definidas sobre $\Bbbk[h]$. Para encarar este problema es necesario estudiar la topología t-ádica que aparece. No pudimos estudiarla en esta tesis pero tenemos pensado hacerlo en el futuro.

4.2. El producto cup

En esta sección vamos a empezar a describir la estructura de álgebra de la cohomología de Hochschild de las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas definidas sobre $\mathbb{k}[h]$.

Cuando a tiene raíces simples y q no es raíz de la unidad la estructura es mucho mas simple. Ese es el caso que vamos a tratar en esta sección. Sabemos que $HH^i(A) = 0$, para todo $i \geq 3$. En el Capítulo 3 probamos que:

$$HH^p(A) \cong \begin{cases} \mathbb{k}, & \text{si } p = 0; \\ \mathbb{k}, & \text{si } p = 1; \\ \mathbb{k}^{N-M} \oplus \mathbb{k}^M, & \text{si } p = 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Para calcular el producto cup y para trabajar, más adelante, con las deformaciones necesitamos cociclos cuyas clases formen una base como $\mathbb{k}$-espacio vectorial de la cohomología. Esta información se puede recuperar analizando en detalle las demostraciones del Capítulo 3.

Consideremos para cada $p \in \mathbb{k}[h]$ los cociclos

$$u_p = yp|\hat{Y} \wedge \hat{H} + p\sigma(a')|\hat{Y} \wedge \hat{X} + px|\hat{H} \wedge \hat{X} \tag{4.2}$$

y

$$v_p = p - (\sigma - id)(p)|\hat{Y} \wedge \hat{X}. \tag{4.3}$$

En la siguiente proposición describimos la estructura de espacio vectorial de la cohomología.

Proposición 4.2.1. *Las siguientes clases forman una base como $\mathbb{k}$-espacio vectorial de la cohomología de Hochschild de A en el caso en que a tiene raíces simples y q no es raíz de la unidad.*

- *La clase de $1 \in A$ es una base de $HH^0(A)$.*
- *La clase de la derivación euleriana $\xi = y|\hat{Y} - x|\hat{X}$ es una base de $HH^1(A)$.*
- *Si $N \neq M+1$, las clases de u_p para $p = 1, h, \cdots, h^{N-M-1}$ forman una base del primer sumando directo de $HH^2(A)$. Cuando $N = M+1$, la clase de u_h es una base del primer sumando directo de $HH^2(A)$ en (4.1).*
- *Las clases de v_p para $p = 1, h, \cdots, h^{M-1}$ forman una base del segundo sumando directo de $HH^2(A)$.*

□

Ahora ya tenemos toda la información necesaria para describir la estructura de álgebra de la cohomología.

Teorema 4.2.2. *Sea $A = A(q, a)$ un álgebra de Weyl generalizada cuántica tal que a tiene raíces simples y q no es raíz de la unidad. El producto cup de dos elementos de grado positivo es nulo. El producto cup con elementos de grado cero proviene de la estructura de espacio vectorial de la cohomología.*

Demostración. El producto cup es conmutativo graduado, por lo tanto el producto de elementos de grado dos con elementos de grado uno o dos es nulo pues $HH^3(A) = HH^4(A) = 0$. La acción de los elementos de grado 0 en la cohomología es la que proviene de la estructura de $\Bbbk$-espacio vectorial. Lo único que resta determinar es la clase de $\xi \smile \xi$. Pero la conmutatividad en el contexto graduado implica que

$$\xi \smile \xi = (-1)^{(-1)(-1)} \xi \smile \xi = -\xi \smile \xi,$$

y por lo tanto $\xi \smile \xi = 0$. $\square$

4.3. Morfismos de comparación

El producto cup y el corchete de Lie se definen en el complejo bar de cocadenas. Estas definiciones se adaptan inmedíatamente al complejo bar normalizado. La descripción de la cohomología que conseguimos en el Capítulo 3 está basada en la resolución que construimos en ese capítulo. Para poder compatibilizar ambos enfoques vamos a necesitar morfismos de comparación entre la resolución bar (normalizada) y la nuestra, en ambas direcciones.

Comenzamos calculando morfismos desde nuestra resolución hacia la resolución bar normalizada: queremos un morfismo ι de nuestro complejo al bar.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A|\overline{A}^{\otimes 3}|A \arrow[r, "b'"] & A|\overline{A}|\overline{A}|A \arrow[r, "b'"] & A|\overline{A}|A \arrow[r, "b'"] & A|A \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A|\bigwedge^3 V|A \oplus A|V|A \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\iota_3"] & A|\bigwedge^2 V|A \oplus A|A \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\iota_2"] & A|V|A \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\iota_1"] & A|A \arrow[r, "\mu"] \arrow[u, equal, "\iota_0"] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Usando el hecho de que la resolución bar normalizada se parte vía la homotopía s definida por:

$$s(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

podemos definir $\iota_\bullet$ inductivamente. Definimos primero $\iota_0 = \mathrm{id}$ y para $p \geq 0$ definimos ι_{p+1} como el único morfismo A^e-lineal que verifica

$$\iota_{p+1}(1|\omega|1) = s \circ \iota_p \circ d(1|\omega|1) \tag{4.5}$$

para $\omega \in \bigwedge^\bullet V$. Demostremos por inducción que $\iota_\bullet$ es un morfismo de complejos. El primer paso es inmediato porque ι_0 es la identidad. El paso inductivo es:

$$d \circ \iota_{p+1} = d \circ s \circ \iota_p \circ d = (\mathrm{id} - s \circ d) \circ \iota_p \circ d = \iota_p \circ d - s \circ d \circ \iota_p \circ d = \iota_p \circ d,$$

pues, por hipotesis inductiva,

$$s \circ d \circ \iota_p \circ d = s \circ \iota_p \circ d \circ d = 0.$$

Notemos que la fórmula (4.5) solo vale al ser evaluada en elementos de la forma $1|\omega|1$ para $w \in \bigwedge^\bullet V$. Es posible dar una descripción explicita de estos morfismos, pero la cantidad de términos involucrados crece rápidamente y es por eso que vamos a hacerlo solamente para los grados más bajos:

$$\begin{aligned}
\iota_1(1|v|1) &= -1|v|1,\\
\iota_2(1|\hat{Y} \wedge \hat{H}|1) &= -1|h|y|1 + q|y|h|1,\\
\iota_2(1|\hat{H} \wedge \hat{X}|1) &= -1|x|h|1 + q|h|x|1,\\
\iota_2(1|\hat{Y} \wedge \hat{X}|1) &= 1|y|x|1 - 1|x|y|1 + \sum_i \lambda_i \int_i 1|h^s|h|h^t,\\
\iota_2(1|1) &= -1|y|x|1 + \sum_i \alpha_i \int_i 1|h^s|h|h^t,\\
\iota_3(1|Y|1) &= 1|y|x|y|1 - \sum_i q^i \alpha_i \int_i 1|y|h^s|h|h^t - \sum_i \alpha_i \int_i q^t|h^s|h|y|h^t\\
&\qquad + \sum_i \alpha_i \int_i q^{t+1}|h^s|y|h|h^t,\\
\iota_3(1|X|1) &= 1|x|y|x|1 + \sum_i \alpha_i \int_i q^s|h^s|x|h|h^t - \sum_i \alpha_i \int_i q^{s+1}|h^s|h|x|h^t\\
&\qquad - \sum_i \alpha_i \int_i 1|x|h^s|h|h^t,\\
\iota_3(1|H|1) &= 1|y|x|h|1 - q|y|h|x|1 + 1|h|y|x|1 - \sum_i \alpha_i \int_i 1|h|h^s|h|h^t,\\
\iota_3(1|Y \wedge H \wedge X|1) &= q|y|x|h|1 - q^2|y|h|x|1 + q|h|y|x|1 - q|h|x|y|1\\
&\qquad + 1|x|h|y|1 - q|x|y|h|1 + \sum_i \lambda_i \int_i q|h|h^s|h|h^t.
\end{aligned}$$

El siguiente paso es calcular los morfismos de comparación en la otra dirección. Estos morfismos son considerablemente más complicados, de manera que sólo calcularemos los términos que vamos a necesitar más adelante. El dominio del morfismo s_i es el A^e-módulo libre $A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$. Si $\{v_i\}_i$ es una base de $A^{\otimes n}$ como $\Bbbk$-espacio vectorial entonces $\{1 \otimes v_i \otimes 1\}_i$ es una base de $A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ como A^e-módulo. Las condiciones que tienen que satisfacer los morfismos de comparación son A^e-lineales. Vamos a decir que un morfismo de comparación está *parcialmente definido* si está definido en un subconjunto linealmente independiente (o en un subespacio propio) de $A^{\otimes n}$. Las observaciones anteriores implican que siempre es posible extender los morfismos de comparación parcialmente definidos a todo $A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$.

El diagrama que corresponde a los morfismos s_i es

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A|\overline{A}^{\otimes 3}|A \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "s_3"] & A|\overline{A}|\overline{A}|A \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "s_2"] & A|\overline{A}|A \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "s_1"] & A|A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal, "s_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A|\wedge^3 V|A \oplus A|V|A \arrow[r, "d"] & A|\wedge^2 V|A \oplus A|A \arrow[r, "d"] & A|V|A \arrow[r, "d"] & A|A \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Se puede definir $s_0 = \mathrm{id}$. También podemos dar una expresión para s_1.

$$s_1(1|y^i h^j|1) = -y^i \int_j h^s|H|h^t - \int_i y^s|Y|y^t h^j,$$

$$s_1(1|h^j x^k|1) = -\int_j h^h|H|h^t x^k - h^j \int_i x^s|X|x^t.$$

Para calcular s_2, una herramienta útil es el siguiente lema.

Lema 4.3.1. *Se puede definir* $s_2(1|y^i h^j|h^k|1) = s_2(1|h^i|h^j x^k|1) = 0$.

Demostración. Vamos a hacer la cuenta con $s_2(1|y^i h^j|h^k|1)$, el otro caso es completamente análogo. Por un lado $ds_2(1|y^i h^j|h^k|1) = 0$ y, por el otro,

$$\begin{aligned} s_1 b'(1|y^i h^j|h^k|1) &= s_1(y^i h^j|h^k|1) - s_1(1|y^i h^{j+k}|1) + s_1(1|y^i h^j|h^k) \\ &= -y^i h^j \int_k h^s|H|h^t - \int_i y^s|Y|y^t h^{j+k} - \int_j y^i h^s|H|h^{t+k} - \\ &\qquad s_1(1|y^i h^{j+k}|1). \end{aligned}$$

Reemplazando s_1 en el último término por su definición se comprueba fácilmente que $s_1 b'(1|y^i h^j|h^k|1) = 0$ como queríamos. □

Observación 4.3.2. El lema anterior es un caso particular de una técnica general en la que estamos trabajando. Nuestro objetivo es construir una resolución de A como A-bimódulo a partir de una presentación de A que verifique las hipótesis del lema del diamante de Bergman similar a la que construye Anick en [Ani86].

Corolario 4.3.3. *Podemos definir parcialmente* s_2 *de manera que:*

$$s_2(1|y|h|1) = 0, \qquad s_2(1|h|x|1) = 0,$$
$$s_2(1|h^a|h^b|1) = 0,$$

y

$$s_2(1|h|y|1) = -1|Y \wedge H|1 \qquad s_2(1|x|h|1) = -1|H \wedge X|1,$$
$$s_2(1|y|x|1) = -1|1, \qquad s_2(1|x|y|1) = -1|Y \wedge X|1 - 1|1.$$

Demostración. La primera parte del enunciado se sigue inmediatamente del Lema 4.3.1. Para la segunda es fácil comprobar que s_2 satisface la condición de ser un morfismo de complejos en esa parte. □

4.4. El producto cup, segunda parte

En esta sección vamos a describir la estructura de álgebra de la homología de Hochschild de las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas definidas sobre $\Bbbk[h]$ en el caso en el que la dimensión global no es finita. En esta sección q puede ser una raíz de la unidad. Como vimos en la sección anterior, la dificultad para calcular los morfismos de comparación hacen ese enfoque inviable. Para salvar estas dificultades podemos usar la sucesión espectral de cambio de anillo para obtener información sobre el producto cup. Lo que sigue ahora son aplicaciones a nuestro caso del trabajo [SA].

Recordemos que B denota al álgebra de Smith, que introdujimos en la Sección 3.3, generada por Y, H y X con relaciones

$$HY = qYH, \qquad [X, Y] = \sigma(a) - a, \qquad XH = qHX.$$

Consideremos el elemento $\Omega = XY - \sigma(a)$, que es central en B. Es claro que $A \cong B/(\Omega)$.

Sean $\phi : B \to A$ la proyección al cociente y $M \in {}_A\mathrm{Mod}_A$ un bimódulo cualquiera. La sucesión espectral de cambio de anillo en este caso queda

$$E_2^{p,q} \cong \mathrm{Ext}^p_{A^e}(\mathrm{Tor}^B_q(A, A), M) \Rightarrow H^\bullet(B, M),$$

como fue construida por Cartan y Eilenberg en [CE99, XVI.5, case 3]. Calculamos en (3.9)

$$\mathrm{Tor}^B_q(A, A) = \begin{cases} A \otimes_B B, & q = 0; \\ A \otimes_B B, & q = 1; \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

así que la sucesión espectral tiene solo dos filas y por lo tanto colapsa en la segunda página.

A partir de ahora ponemos $M = A$. Podemos representar segunda página y el límite de la sucesión espectral de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
HH^0(A) \arrow[drr] & HH^1(A) \arrow[drr] & HH^2(A) \arrow[drr] & HH^3(A) \arrow[drr] & HH^4(A) & \cdots \\
HH^0(A) & HH^1(A) & HH^2(A) & HH^3(A) & HH^4(A) & \cdots \\
\hline
H^0(B, A) & H^1(B, A) & H^2(B, A) & H^3(B, A) & H^4(B, A) & \cdots
\end{tikzcd}$$

(4.7)

Para calcular $H^\bullet(B, A)$ podemos usar la resolución libre de B como B^e-módulo que calculamos en la Sección 3.3. El isomorfismo de $\Bbbk$-espacios vectoriales

$$\hom_{B^e}(B|\Lambda^\bullet V|B, A) \cong \hom_{\Bbbk}(\Lambda^\bullet V, A) \cong \hom_{A^e}(A \otimes_B (B|\Lambda^\bullet V|B) \otimes_B A, A)$$

nos permite identificar $H^\bullet(B, A)$ con la homología de la primera fila del complejo doble que usamos para calcular la cohomología de Hochschild de A. No vamos a llevar a cabo este cálculo, aunque destacamos que las cuentas son similares a las que ya hicimos en el Capítulo 3. La diferencia es que en ese capítulo primero calculamos la homología de las columnas y ahora necesitamos la homología de las filas. Además, ya sabemos que $H^i(B, A) = 0$ para todo $i \geq 4$. Luego $d_2^{2,1}$ es un epimorfismo y $d_2^{p,1}$ es un isomorfismo para $p \geq 3$.

Uno de los resultados de [SA] que más nos interesa dice que los diferenciales de la segunda página están dados por tomar producto cup con un elemento $\zeta \in HH^2(A)$. Este elemento es el cociclo que corresponde a la extensión de álgebras

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow B/I^2 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0, \tag{4.8}$$

con $I = (\Omega)$.

Para construir el cociclo explícitamente, consideremos el morfismo $B \to B$ dado por la multiplicación por Ω. La imagen de este morfismo está incluida en I y además el morfismo pasa al cociente por I. De esta manera tenemos un morfismo $\varphi : A \to I/I^2$. Es fácil ver que este morfismo inducido es de hecho un isomorfismo. De esta forma podemos pensar que (4.8) es una extensión de A por A. Es por esto que el cociclo que obtenemos es un elemento de $HH^2(A)$.

Consideremos ahora $u : A \to B/I^2$ la inversa a derecha de π definida por

$$u(y^i h^j) = Y^i H^j \quad \text{y} \quad u(h^j x^k) = H^j X^k.$$

El 2-cociclo que corresponde a la extensión (4.8) mide *cuánto le falta a* u *para ser morfismo de álgebras*. Más precisamente, para $v_1, v_2 \in A$, definimos $\zeta(v_1, v_2) \in A$ tal que $u(v_1)u(v_2) = \varphi\zeta(v_1, v_2) + u(v_1 v_2)$. Es fácil comprobar que ζ es un 2-cociclo normalizado sobre la resolución bar.

Para conseguir un cociclo en nuestro complejo que represente la misma clase en la cohomología tenemos que componer el morfismo anterior que está definido en el complejo bar con el morfismo de comparación correspondiente. Es por eso que el cociclo que buscamos en nuestro complejo es $\zeta \circ \iota_2$. Para describirlo explícitamente calculamos algunos valores de ζ.

$$\varphi\zeta(h, x) = HX - HX = 0 \qquad \zeta(h, x) = 0$$
$$\varphi\zeta(x, h) = XH - qHX = 0 \qquad \zeta(x, h) = 0$$

$$\begin{array}{ll}
\varphi\zeta(h,y) = HY - qYH = 0 & \zeta(h,y) = 0 \\
\varphi\zeta(y,h) = YH - HY = 0 & \zeta(y,h) = 0 \\
\varphi\zeta(y,x) = YX - a(H) = \Omega & \zeta(y,x) = 1 \\
\varphi\zeta(x,y) = XY - a(qH) = \Omega & \zeta(x,y) = 1 \\
\varphi\zeta(h^s,h) = H^{s+1} - H^{s+1} = 0 & \zeta(h^s,h) = 0
\end{array}$$

Hasta ahora construimos un morfismo $\Bbbk$ lineal de $\overline{A}|\overline{A}$ a A. Lo extendemos A^e-linealmente a $A|\overline{A}|\overline{A}|A$ y después lo componemos con ι_2. De esta forma obtenemos un morfismo A^e lineal de $A|\bigwedge^2 V|A \oplus A|A$ a A. Luego, mediante la identificación estándar, conseguimos un elemento de $A|\bigwedge^2 \hat{V} \oplus A$. Todo este proceso es un cálculo directo. Concluimos que el cociclo que representa a ζ en nuestro complejo, con la notación del Capítulo 3, es $\zeta^* = -1 \in \hom_{A^e}(X_{2,2}, A) \cong A$.

Una consecuencia de la sucesión espectral de cambio de anillo es que

$$(-) \smile \zeta : HH^p(A) \to HH^{p+2}(A) \tag{4.9}$$

es un isomorfismo para todo $p \geq 3$. Por lo tanto, como es conmutativo, para describir completamente el producto cup alcanza con describirlo hasta grado 4. Destacamos que el problema ahora es computacional: alcanza con calcular una cantidad finita de productos más y para eso necesitamos algunos morfismos de comparación que todavía no calculamos.

Observación 4.4.1. La cohomología de Hochschild es un álgebra de Gerstenhaber, en particular, admite un corchete que es una derivación para el producto cup. Como de (4.9) se sigue que el álgebra de cohomología está generada en grados 0, 1, 2 y 3 y como la cohomología de Hochschild es un álgebra de Gerstenhaber, es decir que el corchete es una derivación para el producto cup, para describir completamente el corchete de Gerstenhaber alcanza con calcular los corchetes entre los generadores como álgebra de $HH^\bullet(A)$, de nuevo, solo tenemos que calcular finitos corchetes.

4.5. El producto cup, tercera parte

En esta sección vamos a calcular el producto cup en el caso de dimensión global finita y q raíz de la unidad. En este caso el centro de nuestras álgebras es de dimensión infinita y cada componente homogénea de la cohomología es un módulo de rango finito sobre $\mathcal{S}$. Además la cohomología de Hochschild en cada grado es un módulo de rango finito sobre el centro. La cohomología de Hochschild en este caso está calculada en el Teorema 3.5.8: recordamos como queda el resultado en nuestro caso particular.

Teorema 4.5.1. *Sea* $A = A(\sigma_q, a)$ *un álgebra de Weyl generalizada cuántica tal que* $a(0) \neq 0$*. Si* q *es raíz de la unidad de orden* e *y* a *tiene raíces simples, entonces*

$$\mathrm{HH}^p(A) = \begin{cases} \bigoplus_{r \in e\mathbb{Z}} \mathcal{S} & \text{si } p = 0; \\ \bigoplus_{r \in e\mathbb{Z}} \mathcal{S}^2 & \text{si } p = 1; \\ k^{\eta(a)} \oplus \bigoplus_{r \in e\mathbb{Z}} \mathcal{S} & \text{si } p = 2; \end{cases}$$

donde, para un polinomio $f \in \Bbbk[h]$*, escribimos* $\eta(f) = \deg f - \frac{1}{e} \deg \mathcal{N}(f)$*.*

Estudiando en detalle la demostración de ese teorema podemos encontrar bases como $\Bbbk$-espacios vectoriales de cada una de las partes de peso ≥ 0 de los espacios de cohomología. Para obtener bases completas (que incluyan a los pesos negativos) podemos usar el isomorfismo Φ que definimos en la Sección 1.3. Recordemos que $\Phi : A_1 = A(a, q) \to A_2 = A(a(qh), q^{-1}$ es el isomorfismo definido por

$$\Phi(y) = x, \quad \Phi(h) = h \quad \text{y} \quad \Phi(x) = y.$$

La propiedad más importante de Φ es que manda los pesos positivos y negativos de A_1 en los pesos negativos y positivos de A_2, respectivamente. Como Φ es un isomorfismo, induce un isomorfismo en la cohomología $\Phi : \mathrm{HH}^\bullet(A_1) \to \mathrm{HH}^\bullet(A_2)$ y resulta que este isomorfismo también intercambia los pesos. Para obtener una base de la parte de peso negativo de $\mathrm{HH}^p(A_1)$ debemos calcular Φ^{-1} de una base de la parte de peso positivo de $\mathrm{HH}^p(A_2)$ cuya descripción ya obtuvimos en el Capítulo 3.

Es fácil calcular Φ cuando los cociclos están descriptos con la resolución bar: para $f : A_1^{\otimes n} \to A_1$ se tiene que

$$\Phi(f) = \Phi \circ f \circ (\Phi^{-1})^{\otimes n} : A_2^{\otimes n} \to A_2.$$

El problema es que en el Capítulo 3 describimos los cociclos en el complejo que calculamos en ese mismo capítulo. Para poder aplicar Φ tenemos que usar los morfimos de comparación. Si $f : \bigwedge^p V \to A_1$, entonces

$$\Phi(f) = \Phi \circ f \circ s \circ \Phi^{-1} \circ \iota.$$

Aplicando esta fórmula en grados 1 y 2 vemos que

$$\Phi(u|\hat{Y}) = \Phi(u)|\hat{X}, \qquad \Phi(u|\hat{Y} \wedge \hat{H}) = -q\Phi(u)|\hat{H} \wedge \hat{X}, \tag{4.10}$$

$$\Phi(u|\hat{H}) = \Phi(u)|\hat{H}, \qquad \Phi(u|\hat{H} \wedge \hat{X}) = -q\Phi(u)|\hat{Y} \wedge \hat{H}, \tag{4.11}$$

$$\Phi(u|\hat{X}) = \Phi(u)|\hat{Y}, \qquad \Phi(u|\hat{Y} \wedge \hat{X}) = \Phi(u) - \Phi(u)|\hat{Y} \wedge \hat{X}. \tag{4.12}$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.5.2. *La estructura de $\mathcal{S}$-módulo de la cohomología de Hochschild de $A = A(a, q)$, si $a(0) \neq 0$, a tiene raíces simples y q es una raíz de la unidad de orden e, es como sigue.*

- $HH^0(A)$ *es el $\mathcal{S}$-módulo libre con base* $\{y^{ei}x^{ek}$*para* $i, k \in \mathbb{Z}$ *e* $ik = 0\}$.
- $HH^1(A)$ *es el $\mathcal{S}$-módulo libre con base*

$$\Big\{y^{re+1}|\hat{Y} - y^{re-1}a|\hat{X}, \quad y^{re}h|\hat{H} + y^{re-1}a'h|\hat{X} : r > 0 \in \mathbb{Z}\Big\}$$
$$\bigcup\Big\{y|\hat{Y} - x|\hat{X}, \quad \mathcal{N}(a)h|\hat{H} + \sigma(a'\overline{a}h)x|\hat{X}\Big\}$$
$$\bigcup\Big\{x^{re+1}|\hat{X} - ax^{re-1}|\hat{Y}, \quad hx^{re}|\hat{H} + a'hx^{re-1}|\hat{Y} : r > 0 \in \mathbb{Z}\Big\}$$

- $HH^2(A)$ *se descompone como suma directa de un $\mathcal{S}$-módulo isomorfo a*

$$\frac{\Bbbk[h]}{h\mathcal{S} + (a)},$$

via el isomorfismo $\mathcal{S}$-lineal

$$p \in \frac{\Bbbk[h]}{h\mathcal{S} + (a)} \mapsto yph|\hat{Y} \wedge \hat{H} + p\sigma(a')h|\hat{Y} \wedge \hat{X} + phx|\hat{H} \wedge \hat{X} \in HH^2(A),$$

y el $\mathcal{S}$-módulo libre con base

$$\Big\{y^{er+1}h|\hat{Y} \wedge \hat{H} + y^{er}\sigma(a')h|\hat{Y} \wedge \hat{X} + y^{er-1}q^{-1}ah|\hat{H} \wedge \hat{X} : r > 0 \in \mathbb{Z}\Big\}$$
$$\bigcup\Big\{yh|\hat{Y} \wedge \hat{H} + \sigma(a')h|\hat{Y} \wedge \hat{X} + hx|\hat{H} \wedge \hat{X}\Big\}$$
$$\bigcup\Big\{y^{er+1}h|\hat{Y} \wedge \hat{H} + y^{er}\sigma(a')h|\hat{Y} \wedge \hat{X} + y^{er-1}q^{-1}ah|\hat{H} \wedge \hat{X} : r > 0 \in \mathbb{Z}\Big\}$$

Demostración. Los cociclos que generan la parte de grado positivo están descriptos en las demostraciones del Capítulo 3. La parte de grado negativo se deduce usando 4.10. □

Corolario 4.5.3. *Hay un isomorfismo de módulos sobre el centro de A entre $HH^1(A)$ y*

$$\mathcal{Z}(A)\xi \bigoplus \frac{\mathcal{Z}(A)\tau_e \oplus \mathcal{Z}(A)\tau_0 \oplus \mathcal{Z}(A)\tau_{-e}}{\left(x^e\tau_e = \frac{y^e x^e}{\mathcal{N}(a)}\tau_0 = y^e\tau_{-e}\right)},$$

donde

$$\tau_e = y^e h|\hat{H} + y^{e-1}a'h|\hat{X},$$
$$\tau_0 = \mathcal{N}(a)h|\hat{H} + \sigma(a'\overline{a}h)x|\hat{X}$$
$$\tau_{-e} = hx^e|\hat{H} + a'hx^{e-1}|\hat{Y}.$$

El sumando $\mathcal{S}$-libre de $HH^2(A)$ es el $\mathcal{Z}(A)$-módulo libre generado por

$$\theta = yh|\hat{Y} \wedge \hat{H} + \sigma(a')h|\hat{Y} \wedge \hat{X} + hx|\hat{H} \wedge \hat{X}.$$

Para determinar completamente el producto cup debemos calcular el producto de un elemento de $HH^0(A)$ con cualquier elemento de la cohomología y el producto de dos elementos de $HH^1(A)$. Todos los demás son inmediatamente 0 o se deducen de estos por la conmutatividad (en el sentido graduado). Como el producto cup es $\mathcal{Z}(A)$ lineal, es suficiente calcular los productos entre generadores que expusimos en el Corolario 4.5.3.

Proposición 4.5.4. *Vale que*

$$\begin{aligned}
&\xi \smile \tau_e = qy^e\theta,\\
&\xi \smile \tau_0 = q\mathcal{N}(a)\theta\\
&\xi \smile \tau_{-e} = qx^e\theta.
\end{aligned}$$

Demostración. Usando los morfismos de comparación en las dos direcciones y la definición del producto cup en el complejo bar normalizado vemos que:

$$\begin{aligned}
&\xi \smile \tau_0(Y \wedge H) = -\xi(h)\tau_0(y) + q\xi(y)\tau_0(h) = qy\mathcal{N}(a)h,\\
&\xi \smile \tau_0(H \wedge X) = -\xi(x)\tau_0(h) + q\xi(h)\tau_0(x) = q\mathcal{N}(a)hx,\\
&\xi \smile \tau_0(Y \wedge X) = \xi(y)\tau_0(x) - \xi(x)\tau_0(y) = y\sigma(a'\overline{a}h)x = \mathcal{N}(a)a'h,\\
&\xi \smile \tau_0(1) = -\xi(y)\tau_0(x) = -y\sigma(a'\overline{a}h)x = -\mathcal{N}(a)a'h.
\end{aligned}$$

Este cociclo no es ninguno de los que mencionamos en el Teorema 4.5.2. Tenemos que reducirlo módulo cobordes para que lo sea. Con las ideas del Capítulo 3 calculamos

$$\xi \smile \tau = qy\mathcal{N}(a)h|\hat{Y} \wedge \hat{H} + \mathcal{N}(a)a'h|\hat{Y} \wedge \hat{X} + q\mathcal{N}(a)hx|\hat{H} \wedge \hat{X} - \mathcal{N}(a)a'h,$$

y

$$\begin{aligned}
d(y\sigma(\overline{a}a'h)|\hat{Y}) &= y\sigma(\overline{a}a'h)x - \big(y\sigma(\overline{a}a'h)x - xy\sigma(\overline{a}a'h)\big)|\hat{Y} \wedge \hat{X}\\
&= \mathcal{N}(a)a'h - \mathcal{N}(a)a'h|\hat{Y} \wedge \hat{X} + q\mathcal{N}(a)\sigma(a')h|\hat{Y} \wedge \hat{X}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\xi \smile \tau + d(y\sigma(\overline{a}a'h)|\hat{Y}) = q\mathcal{N}(a)\theta.$$

Esto prueba la segunda igualdad del enunciado. Las otras dos son similares. □

Con esta proposición podemos describir completamente el álgebra de cohomología.

Teorema 4.5.5. *Sea* $A = A(q, a)$ *con* $a(0) \neq 0$, $(a, a') = 1$ *y* q *una raíz de la unidad de orden* e. *Hay un isomorfismo de* $\Bbbk$*-álgebras (bi)graduadas conmutativas*

$$HH^\bullet(A) = \frac{\Bbbk[y^e, h^e, x^e, \xi, \tau_e, \tau_0, \tau_{-e}, \theta]}{R} \bigoplus \Bbbk^{\eta(a)},$$

donde

- y^e, h^e *y* x^e *están en grado* 0 *y pesos* e, 0 *y* $-e$;
- ξ *está en grado* 1 *y peso* 0;
- τ_e, τ_0 *y* τ_{-e} *están en grado* 1 *y pesos* e, 0 *y* $-e$;
- θ *está en grado* 2 *y peso* 0;
- *el sumando directo restante está en grado* 2 *y peso* 0.

Además R *es el ideal bilatero generado por*

$$y^e x^e - \prod_{i=0}^{e-1} \sigma^i(a),$$
$$\mathcal{N}(a)\tau_e - y^e\tau_0, \quad \mathcal{N}(a)\tau_{-e} - x^e\tau_0, \quad \xi\tau_0 - q\mathcal{N}(a)\theta,$$

y θf *para todo* $f \in \{y^e, h^e, x^e, \xi, \tau_e, \tau_0, \tau_{-e}, \theta\}$. □

Observación 4.5.6. Notemos que el sumando $\Bbbk^{\eta(a)}$ no tiene ningún rol en la estructura multiplicativa.

4.6. Deformaciones

En esta sección vamos a considerar deformaciones de álgebras en el sentido de Gerstenhaber, usando al trabajo [Ger64] como referencia. Para ver un cálculo de deformaciones hecho en detalle se puede consultar la tesis de licenciatura de S. Chouhy [Cho]. La parte de completaciones está desarrollada en detalle en el libro de C. Kassel [KRT97].

Nuestro objetivo es describir mediante generadores y relaciones a las deformaciones formales de las álgebras de Weyl generalizadas cuánticas. Vamos a suponer que q no es una raíz de la unidad. Para construir estas deformaciones vamos a usar la descripción explicita de los 2-cociclos de Hochschild que calculamos en el Capítulo 3 y que explicitamos en la Proposición 4.2.1.

Consideremos el 2-cociclo u_1 que definimos en la Sección 4.2 y sea $D = \Bbbk[h, t]$. Hay un automorfismo $\tilde{\sigma} : D \to D$ definido por

$$\tilde{\sigma}(t) = t \quad \text{y} \quad \tilde{\sigma}(h) = qh + t,$$

como $a \in \Bbbk[h] \subseteq \Bbbk[t, h]$, podemos construir un álgebra de Weyl generalizada $\tilde{A} = A(D, \tilde{\sigma}, a)$.

Proposición 4.6.1. *La completación* t*-ádica de* $\tilde{A}$ *es la deformación formal de* A *asociada al cociclo* u_1.

Demostración. Usando el lema del diamante de Bergman, al igual que en la Sección 1.3, vemos que $\tilde{A}$ es un $\Bbbk[t]$-módulo libre con base $\{y^i h^j x^k : ik = 0\}$. De esta forma obtenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\tilde{A} \cong A \otimes \Bbbk[t].$$

Lo único que falta ver es que el producto de $\tilde{A}$ extiende al de A usando el cociclo u_1. Es suficiente observar que en $\tilde{A}$ vale

$$hy = y(qh+t) = qyh + ty, \qquad xh = (qh+t)x = qhx + tx,$$
$$yx = a(h), \qquad xy = a(qh+t) = a(qh) + ta'(h) + O(t^2).$$

Usando esto y las fórmulas para el morfismo de comparación ι_2 que obtuvimos en la Sección 4.3 vemos que el cociclo inducido por esta deformación es u_1. □

Una demostración análoga a la de la Proposición 4.6.1 nos permite obtener la siguiente proposición.

Proposición 4.6.2. *Consideremos ahora el cociclo v_p definido en la Sección 4.2 para $p \in \Bbbk[h]$ cualquiera. Tomemos, de nuevo, $D = \Bbbk[t,h]$ y el automorfismo $\tilde{\sigma} : D \to D$ definido ahora por*

$$\tilde{\sigma}(t) = t \quad y \quad \tilde{\sigma}(h) = qh.$$

Sean $\tilde{a} = a + tp(h) \in \Bbbk[t,h]$ y $\tilde{A} = A(D, \tilde{\sigma}, \tilde{a})$. En este caso la completación t-ádica de $\tilde{A}$ es la deformación formal de A asociada al cociclo v_p. □

Observación 4.6.3. Podemos pensar que los cociclos u_p deforman a σ y los cociclos v_p deforman a a.

Los cociclos u_p están definidos para los $p \in \Bbbk[h]$ tales que $\deg p \leq N-1$. Sin embargo, en la Proposición 4.6.1, solo trabajamos con u_1. Esto se debe a que:

Lema 4.6.4. *El morfismo $\tilde{\sigma} : D \to D$ definido por*

$$\tilde{\sigma}(t) = t \quad y \quad \tilde{\sigma}(h) = qh + tp,$$

es un automorfismo si y solo si $p \in \Bbbk$.

Demostración. Supongamos que existe $f \in D$ tal que $\tilde{\sigma}(f) = h$. En este caso tenemos que

$$\tilde{\sigma}(qf + tp(f)) = qh + tp(h) = \tilde{\sigma}(h). \tag{4.13}$$

Como $\tilde{\sigma}$ es inyectivo se sigue que $qf + tp(f) = h$. Si p no es constante, entonces $\deg_t p(f) \geq \deg_t f$. Por lo tanto $\deg_t tp(f) > \deg_t f$. Esto no puede ser porque $\deg_t(qf + tp(f)) = 0$. El absurdo proviene de suponer que $\deg p > 0$. Concluimos que $\deg p = 0$.

Por otro lado es fácil ver que $\tilde{\sigma}$ es un automorfismo cuando p es constante. □

Este problema se soluciona si admitimos series en t, por ejemplo: si $p = h$ de la Ecuación (4.13) despejamos f como

$$f = \frac{h}{q+t} = \frac{h}{q}\sum_n (-t/q)^n.$$

Introducir las series trae otros problemas, el principal es

$$\Bbbk[\![t]\!][h] \not\cong \Bbbk[h][\![t]\!].$$

Las deformaciones que podemos describir son las que aparecen en el siguiente teorema.

Teorema 4.6.5. *Sean $p \in \Bbbk[h]$, $\lambda \in \Bbbk$ y $\mathcal{A}$ la $\Bbbk[t]$-álgebra generada por y, h y x sujetas a las relaciones*

$$\begin{aligned} xh &= (qh+\lambda t)x, & yx &= a + tp, \\ hy &= y(qh+\lambda t), & xy &= a(qh+\lambda t) + tp(qh+\lambda t). \end{aligned}$$

Este álgebra es libre como $\Bbbk[t]$-módulo con base $\mathcal{B} = \{y^i h^j x^k : ik = 0\}$. Más aún $\mathcal{A} \cong A \otimes \Bbbk[t]$ como $\Bbbk[t]$-módulos y la completación t-ádica de $\mathcal{A}$ es la defomación formal de A que corresponde al cociclo $u_\lambda + v_p$.

Demostración. Lo primero que vamos a probar es que $\mathcal{A}$ es un $\Bbbk[t]$-módulo libre. Lo vamos a hacer usando el lema del diamante.

Consideramos la $\Bbbk[t]$-álgebra libre generada por y, h y x. Ordenamos $y < h < x$ y extendemos a los monomios usando el orden lexicografico graduado. El conjunto de transformaciones que vamos a usar es $S = \{s_1, s_2, s_3, s_{4,l}\}$, donde

- $s_1 : hy \mapsto y(qh+\lambda t)$,
- $s_2 : xh \mapsto (qh+\lambda t)x$,
- $s_3 : xy \mapsto a(qh+\lambda t) + tp(qh+\lambda t)$,
- $s_{4,l} : yh^l x \mapsto (q^{-1}(h-\lambda t))^l(a+tp)$.

Es claro que $\Bbbk\langle X\rangle/S \cong \mathcal{A}$ y que este conjunto de transformaciones tiene la propiedad de cadena descendente (DCC). No hay ambigüedades de contención.

Las ambigüedades de superposición se resuelven usando el siguiente lema.

Lema 4.6.6. *Para todo $p \in \Bbbk[h]$, $p(h)y$ se reduce a $yp(qh+t)$ usando solamente s_1.*

Demostración. El lema se demuestra fácilmente por inducción en el grado de p. □

El monomio xhy puede ser reducido usando s_1 o s_2. Ambos caminos llevan a $(qh+t)a(qh+t)$, de manera que esta ambigüedad se resuelve.

Otra ambigüedad viene dada por $hyh^l x$.

$$hyh^l x \mapsto qyh^{l+1}x + tyh^l x$$

$$\begin{aligned} &\mapsto q^{-l}(h-t)^{l+1}a + q^{-l}t(h-t)^l a = (q^{-1}(h-t))^l ha \\ hyh^l x &\mapsto q^{-l}h(h-t)^l a \end{aligned}$$

Como siguiendo los dos caminos llegamos al mismo resultado esta ambigüedad se resuelve. Un cálculo similar resuelve la ambigüedad que generan s_2 y s_4.

Todavía quedan dos ambigüedades entre s_3 y $s_{4,l}$.

- $xyh^l x \mapsto a(qh+t)h^l x$
- $xyh^l x \mapsto x(q^{-1}(h-t))^l a \mapsto (q^{-1}(qh+t-t))^l a(qh+t)x = h^l a(qh+t)x$ (aquí usamos el Lema 4.6.6)

El monomio $yh^l xy$ puede ser resuelto de manera análoga. De esta forma hemos resuelto todas las ambigüedades. Por lo tanto podemos usar el lema del diamante para obtener la base que buscábamos.

Usando la base $\mathcal{B}$ como $\Bbbk[t]$-módulo libre de $\mathcal{A}$ que calculamos recién vemos que $\mathcal{A} \cong A \otimes \Bbbk[t]$ como espacios vectoriales. Se sigue de la teoría de Gerstenhaber que la completación t-ádica de $\mathcal{A}$ es una deformación de A. Tenemos que demostrar que ésta corresponde al cociclo $u_\lambda + v_p$. Para hacer esto, observamos que las siguientes identidades valen en $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} hy &= qyh + \lambda ty, \\ xh &= qhx + \lambda tx, \\ xy &= a(qh+\lambda t) + tp(qh+\lambda t) = a(qh) + t(\lambda a' + p(qh)) + O(t^2), \\ yx &= a + tp. \end{aligned}$$

Vemos que los productos en $\mathcal{A}$ se escriben como los productos en A más t multiplicado por los valores del cociclo $u_\lambda + v_p$ como buscamos. □

Uno de los objetivos pendientes de este trabajo es describir las deformaciones que se obtienen de los cociclos u_p con $p \in \Bbbk[h]$ no constante. La teoría general de Gerstenhaber [Ger64] garantiza que éstas existen si $HH^3(A) = 0$; este es el caso, por ejemplo, cuando a tiene raíces simples. Una aplicación posible de esta descripción es obtener datos sobre la homología de Hochschild de A cuando $a(0) = 0$, que es el caso que no cubrimos en el Capítulo 3: la idea es aproximar una tal álgebra por una familia A_t de deformaciones de $A = A_0$ que tengan $a_t(0) \neq 0$ para $t \neq 0$ y usar argumentos de continuidad.

Apéndice A

El lema del diamante

El lema del diamante es una herramienta desarrollada por Bergman en [Ber78] para encontrar bases (como $\Bbbk$-espacios vectoriales) de álgebras definidas por generadores y relaciones.

Sea X el conjunto de variables a considerar y $\langle X\rangle$ el monoide libre con base X. El álgebra libre en X es el $\Bbbk$-espacio vectorial generado por $\langle X\rangle$ con el producto dado por la concatenación. Vamos a suponer además que las relaciones que consideramos vienen escritas de la forma $W_\sigma = f_\sigma$ donde W_σ es un elemento de $\langle X\rangle$ y $f_\sigma \in \Bbbk\langle X\rangle$ para $\sigma \in S$. Podemos pensar a este tipo de relaciones como un conjunto de reglas de sustitución, cada vez que en una palabra aparezca W_σ como subpalabra la vamos a reemplazar por f_σ.

Esta construcción trae varias preguntas naturales:

- ¿Bajo que condiciones podemos garantizar que el proceso siempre termina?
- Suponiendo que el proceso termina siempre ¿Es cierto que para cualquier forma de reducir un elemento se llega al mismo resultado?

El trabajo de Bergman que citamos al principio de la sección da respuestas a estas y a otras preguntas.

Para llegar a eso necesitamos introducir un poco más de notación y hacer algunas hipótesis sobre los datos con los que trabajamos.

Consideremos S un conjunto de pares $\sigma = (W_\sigma, f_\sigma)$ donde $W_\sigma \in \langle X\rangle$ y $f_\sigma \in \Bbbk\langle X\rangle$. Para cada $\sigma \in S$ y A, $B \in \langle X\rangle$ se define la *reducción elemental* $r_{A\sigma B}$ como el morfismo $\Bbbk$-lineal que queda determinado por $r_{A\sigma B}(AW_\sigma B) = Af_\sigma B$ y $r_{A\sigma B}(C) = C$ para todo $C \in \langle X\rangle$ distinto de $AW_\sigma B$. Una *reducción* es una composición de finitas reducciones elementales.

Decimos que un elemento es *irreducible* si es punto fijo de todas las reducciones y notamos $\Bbbk\langle X\rangle_{irr}$ al subespacio de elementos irreducibles.

Un elemento de $\Bbbk\langle X\rangle$ se dice de *reducción finita* para toda sucesión infinita de reducciones $r_1, r_2, r_3, \cdots$ existe un N tal que $r_N \circ r_{N-1} \circ \cdots \circ r_1(a)$ es irreducible. Es claro que estos elementos forman un subespacio de $\Bbbk\langle X\rangle$.

Vamos a decir que un elemento es de *reducción única* si es de reducción finita y si su imagen bajo todas las sucesiones de reducciones es la misma. Se puede ver que los elementos de reducción única también forman un subespacio de $\Bbbk\langle X\rangle$.

Una ambigüedad por solapamiento es una tupla (σ, τ, A, B, C) donde $\sigma, \tau \in S$, A,B y $C \in \langle X\rangle$ tal que $AB = W_\sigma$ y $BC = W_\tau$. Decimos que una ambigüedad de este tipo se resuelve si existen reducciones r y r' tales que $r(f_\sigma C) = r'(Af_\tau)$.

De manera análoga, una ambigüedad por inclusión es una tupla (σ, τ, A, B, C) donde $\sigma \neq \tau \in S$, A,B y $C \in \langle X\rangle$ tal que $B = W_\sigma$ y $ABC = W_\tau$. Decimos que una ambigüedad de este tipo se resuelve si existen reducciones r y r' tales que $r(Af_\sigma C) = r'(f_\tau)$.

Vamos a considerar un orden parcial $\leq$ en $\langle X\rangle$ que verifique además dos cosas:

- $B < B' \Rightarrow ABC < AB'C$ para todo $A, C \in \langle X\rangle$
- Para todo $\sigma \in S$, W_σ es mayor que todos los monomios que aparecen en f_σ.

En su artículo [Ber78], Bergman demuestra el siguiente teorema.

Teorema A.0.7. *Supongamos que el orden $\leq$ cumple la condición de cadena descendente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Todas las ambigüedades de S se resuelven.*
2. *Todos los elementos de $\Bbbk\langle X\rangle$ son de reducción única.*
3. *El cociente de $\Bbbk\langle X\rangle$ por el ideal bilatero generado por $\{W_\sigma - f_\sigma\}_{\sigma\in S}$ tiene una base como $\Bbbk$-espacio vectorial dada por los monomios de $\langle X\rangle \cap \Bbbk\langle X\rangle_{irr}$.*

Vamos a notar $\Bbbk\langle X\rangle/S$ al cociente de $\Bbbk\langle X\rangle$ por el ideal bilatero generado por $\{W_\sigma - f_\sigma\}_{\sigma\in S}$.

Uno de los principales usos de este teorema es para construir bases como $\Bbbk$-espacio vectorial de álgebras dadas por generadores y relaciones. Por ejemplo es posible demostrar el teorema de Poincaré-Birkoff-Witt usando el lema del diamante (ver la sección 3 de [Ber78]).

Ejemplo A.0.8 (El álgebra de polinomios)**.** *Sean $X = \{x, y, z\}$ y $S = \{\sigma_1 = (yx \mapsto xy), \sigma_2 = (zy \mapsto yz), \sigma_3 = (zx \mapsto xz)\}$. El orden que consideramos en $\langle X\rangle$ es el lexicografico graduado inducido por $x < y < z$. No hay ambigüedades por inclusión y hay exactamente una ambigüedad por solapamiento entre σ_1 y σ_2. Veamos como se resuelve. Por un lado:*

$$zyx \overset{\sigma_1}{\mapsto} zxy \overset{\sigma_3}{\mapsto} xzy \overset{\sigma_2}{\mapsto} xyz,$$

por el otro:

$$zyx \overset{\sigma_2}{\mapsto} yzx \overset{\sigma_3}{\mapsto} yxz \overset{\sigma_1}{\mapsto} xyz.$$

Como por ambos caminos llegamos al mismo elemento la ambigüedad se resuelve y por lo tanto $\Bbbk[x, y, z] \cong \Bbbk\langle X\rangle/S$ tiene como base a los monomios ordenados $x^i y^j z^k$.

Ejemplo A.0.9 (El álgebra envolvente de $\mathfrak{sl}_2$)**.** *Sean* $X = \{e, f, h\}$ *y* $S = \{\sigma_1 = (he \mapsto eh + 2e), \sigma_2 = (fh \mapsto hf + 2f), \sigma_3 = (fe \mapsto ef - h)\}$*. El orden que consideramos en* $\langle X \rangle$ *es el lexicografico graduado inducido por* $e < h < f$*. No hay ambigüedades por inclusión. Hay una ambigüedad por solapamiento entre* σ_2 *y* σ_1*. Veamos como se resuelve. Por un lado:*

$$fhe \overset{\sigma_1}{\mapsto} feh + 2fe \overset{\sigma_3}{\mapsto} efh - h^2 + 2ef - 2h \overset{\sigma_2}{\mapsto} ehf + 2ef - h^2 + 2ef - 2h,$$

por el otro:

$$fhe \overset{\sigma_2}{\mapsto} hfe + 2fe \overset{\sigma_3}{\mapsto} hef - h^2 + 2ef - 2h \overset{\sigma_1}{\mapsto} ehf + 2ef - h^2 + 2ef - 2h.$$

Vemos que la ambigüedad se resuelve y por lo tanto hemos demostrado el Teorema PBW para $\mathfrak{sl}_2$*.*

Referencias

[AC92] J. Alev and M. Chamarie, *Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques*, Comm. Algebra **20** (1992), no. 6, 1787–1802 (French). MR1162608 (93f:16036)

[AD94] J. Alev and F. Dumas, *Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques*, J. Algebra **170** (1994), no. 1, 229–265. MR1302839 (96c:16033)

[AD96] J. Alev and F. Dumas, *Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(\mathrm{sl}(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi*, Nagoya Math. J. **143** (1996), 119–146. MR1413010 (97h:17014)

[AD08] N. Andruskiewitsch and F. Dumas, *On the automorphisms of $U_q^+(\mathfrak{g})$*, Quantum groups, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 12, Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, pp. 107–133. MR2432991 (2009i:17019)

[Ani86] D. J. Anick, *On the homology of associative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), no. 2, 641–659. MR846601 (87i:16046)

[Bav96] V. Bavula, *Tensor homological minimal algebras, global dimension of the tensor product of algebras and of generalized Weyl algebras*, Bull. Sci. Math. **120** (1996), no. 3, 293–335. MR1399845 (97f:16015)

[Bav92] V. V. Bavula, *Generalized Weyl algebras and their representations*, Algebra i Analiz **4** (1992), no. 1, 75–97 (Russian); English transl., St. Petersburg Math. J. **4** (1993), no. 1, 71–92. MR1171955 (93h:16043)

[Bav96] V. Bavula, *Global dimension of generalized Weyl algebras*, Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994), CMS Conf. Proc., vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 81–107. MR1388045 (97e:16018)

[BB00] V. Bavula and V. Bekkert, *Indecomposable representations of generalized Weyl algebras*, Comm. Algebra **28** (2000), no. 11, 5067–5100. MR1785490 (2002f:16059)

[Ber78] G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. in Math. **29** (1978), no. 2, 178–218. MR506890 (81b:16001)

[BD11] J. Blanc and A. Dubouloz, *Automorphisms of $\mathbb{A}^1$-fibered affine surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 11, 5887–5924. MR2817414 (2012h:14150)

[BJ01] V. V. Bavula and D. A. Jordan, *Isomorphism problems and groups of automorphisms for generalized Weyl algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 2, 769–794 (electronic). MR1804517 (2002g:16040)

[BR98] G. Benkart and T. Roby, *Down-up algebras*, J. Algebra **209** (1998), no. 1, 305–344. MR1652138 (2000e:06001a)

[BvO98] V. Bavula and F. van Oystaeyen, *Krull dimension of generalized Weyl algebras and iterated skew polynomial rings: commutative coefficients*, J. Algebra **208** (1998), no. 1, 1–34. MR1643967 (99f:16021)

[Cho] S. Chouhy, *Deformaciones de álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensión 3.*

[CE99] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. With an appendix by David A. Buchsbaum; Reprint of the 1956 original. MR1731415 (2000h:18022)

[CL09] P. A. A. B. Carvalho and S. A. Lopes, *Automorphisms of generalized down-up algebras*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 5, 1622–1646. MR2526326 (2010b:16059)

[CM00] P. A. A. B. Carvalho and I. M. Musson, *Down-up algebras and their representation theory*, J. Algebra **228** (2000), no. 1, 286–310. MR1760966 (2001j:16042)

[CS04] T. Cassidy and B. Shelton, *Basic properties of generalized down-up algebras*, J. Algebra **279** (2004), no. 1, 402–421. MR2078408 (2005f:16051)

[DGO96] Y. A. Drozd, B. L. Guzner, and S. A. Ovsienko, *Weight modules over generalized Weyl algebras*, J. Algebra **184** (1996), no. 2, 491–504. MR1409224 (97g:16040)

[FSSÁ03] M. A. Farinati, A. Solotar, and M. Suárez-Álvarez, *Hochschild homology and cohomology of generalized Weyl algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), no. 2, 465–488 (English, with English and French summaries). MR1990004 (2004d:16014)

[Ger64] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 59–103. MR0171807 (30 #2034)

[Ger63] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 267–288. MR0161898 (28 #5102)

[Goo92] K. R. Goodearl, *Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras*, J. Algebra **150** (1992), no. 2, 324–377. MR1176901 (93h:16051)

[Hod93] T. J. Hodges, *Noncommutative deformations of type-*A *Kleinian singularities*, J. Algebra **161** (1993), no. 2, 271–290. MR1247356 (94i:14038)

[Jor00] D. A. Jordan, *Down-up algebras and ambiskew polynomial rings*, J. Algebra **228** (2000), no. 1, 311–346. MR1760967 (2001c:16057)

[Jor95] D. A. Jordan, *Finite-dimensional simple modules over certain iterated skew polynomial rings*, J. Pure Appl. Algebra **98** (1995), no. 1, 45–55. MR1316996 (96g:16037)

[Jun42] H. W. E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174 (German). MR0008915 (5,74f)

[KRT97] C. Kassel, M. Rosso, and V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 1997 (English, with English, French, German and Russian summaries). MR1470954 (99b:57011)

[ML63] S. Mac Lane, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963. MR0156879 (28 #122)

[ML90] L. Makar-Limanov, *On groups of automorphisms of a class of surfaces*, Israel J. Math. **69** (1990), no. 2, 250–256. MR1045377 (91b:14059)

[Nag72] M. Nagata, *On automorphism group of* $k[x, y]$, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972. Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 5. MR0337962 (49 #2731)

[OP95] J. M. Osborn and D. S. Passman, *Derivations of skew polynomial rings*, J. Algebra **176** (1995), no. 2, 417–448, DOI 10.1006/jabr.1995.1252. MR1351617 (97i:16030)

[RS06] L. Richard and A. Solotar, *Isomorphisms between quantum generalized Weyl algebras*, J. Algebra Appl. **5** (2006), no. 3, 271–285. MR2235811 (2007j:16076)

[SU04] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, *The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 197–227 (electronic). MR2015334 (2004h:13022)

[Smi90] S. P. Smith, *A class of algebras similar to the enveloping algebra of* $\mathrm{sl}(2)$, Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), no. 1, 285–314. MR972706 (91b:17013)

[SSAV] A. Solotar, M. Suarez-Alvarez, and Q. Vivas, *Hochschild homology and cohomology of Generalized Weyl algebras: the quantum case*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), en prensa, available at `http://arxiv.org/abs/1106.5289` (English, with English and French summaries).

[Sta88] R. P. Stanley, *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 4, 919–961. MR941434 (89h:06005)

[SA] M. Suarez-Alvarez, *Applications of the change-of-rings spectral sequence to the computation of Hochschild cohomology*, available at `http://arxiv.org/abs/0707.3210`.

[SAV] M. Suarez-Alvarez and Q. Vivas, *Automorphisms and isomorphism of quantum generalized Weyl algebras*, available at `http://arxiv.org/abs/1206.4417`.

[vdE92] A. van den Essen, *Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), no. 3, 861–871. MR1111440 (93a:13003)

[vdK53] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskunde (3) **1** (1953), 33–41. MR0054574 (14,941f)

[Wei94] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324 (95f:18001)