



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Geometría de variedades de Maurer-Cartan

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el
área Ciencias Matemáticas

César Massri

Director de tesis: Fernando Cukierman
Consejero de estudios: Fernando Cukierman

Buenos Aires, 16 de Diciembre 2011.

Geometría de variedades de Maurer-Cartan

Resumen:

A cada problema de deformación se le asocia un álgebra de Lie diferencial graduada, E . El espacio de módulos asociado al problema de deformación viene dado por la variedad de Maurer-Cartan de E módulo la acción de gauge.

Esta tesis se divide en dos partes. En la primera parte nos concentraremos en comprender la geometría de la variedad de Maurer-Cartan de un álgebra de Lie graduada donde el grupo de gauge es simple. Obtendremos que son variedades proyectivas invariantes por una acción lineal y generadas en grado dos. Hemos demostrado que cuando se toma el ideal de una órbita en grado dos, la variedad de Maurer-Cartan asociada es irreducible. Para esto hemos utilizado, entre otras cosas, el álgebra envolvente y la estructura de pesos de las representaciones. En la última parte de esta tesis hemos necesitado introducir variedades Grassmannianas y determinantes de complejos y de módulos de Lie. El objetivo fue el de analizar la variedad de estructuras de álgebras de Lie diferenciales graduadas. Veremos que cuando el grupo de gauge de las álgebras en cuestión es simple, las variedades de Maurer-Cartan de estas álgebras diferenciales graduadas son las estudiadas en la primera parte de la tesis.

Palabras claves: *Geometría algebraica, Teoría de deformaciones, DGLA, Maurer-Cartan, Álgebras de Lie simples.*

Geometry of Maurer-Cartan varieties

Abstract:

Each deformation problem has associated a differential graded Lie algebra, E . The moduli space of the deformation problem is given by the Maurer-Cartan variety of E modulo the gauge action.

This thesis is divided in two parts. In the first part we will focus on understanding the geometry of the Maurer-Cartan variety on a graded Lie algebra where the gauge group is simple. We obtain that they are projective varieties generated in degree two and invariant under a linear action. We will show that if we take the ideal in degree two of an orbit then the associated Maurer-Cartan variety is irreducible. Proving this we needed, among other things, the enveloping algebra and the structure of weights of representations. In the last part of the thesis we will introduce the Grassmannian and determinantal varieties of complexes and of Lie modules. The aim is to analyze the variety of structures of differential graded Lie algebras. We will see that when the gauge group of the structure is simple, the Maurer-Cartan variety associated to this structure are the varieties studied in the first part of the thesis.

Key words: *Algebraic geometry, Deformation theory, DGLA, Maurer-Cartan, Simple Lie algebras.*

Agradecimientos

Antes de comenzar esta tesis, quisiera detenerme un momento para agradecer a toda la gente que me ayudó durante la realización de la misma. Esta tesis fue realizada durante cinco años, y tuve la suerte de contar con el apoyo de mucha gente. Entre ella, quisiera agradecer en particular a la siguiente:

A mi director *Fernando Cukierman* por su constante apoyo y dedicación sin los cuales esta tesis no hubiese sido posible. Todas las ideas presentadas aquí surgieron gracias a él.

A *Ariel y Federico* por acompañarme en este camino tan interesante, por compartir inquietudes y discusiones acaloradas.

A *Matías* por ser mi referente y brújula, a *Manu* por su grata compañía, apoyo y entusiasmo.

A los *Jurados* de esta tesis, *Eduardo Cattani, Juan Tirao y Gabriel Minian* por tomarse el arduo trabajo de leerla y evaluarla. También por sus comentarios y sugerencias punto fundamental para la presentación de la misma.

Al *Seminario de Geometría Algebraica* porque fue donde aprendí lo vasto y extenso que es la geometría algebraica. Tuve la posibilidad de escuchar y compartir con matemáticos de muy alto nivel sus enseñanzas, apreciaciones y visiones.

Al *CONICET* por haberme sustentado económicamente todos estos años y al *Departamento de Matemáticas* por darme un lugar.

A todos mis amigos, entre ellos a *Emiliando, Marticito, Holik, Fune, Iván, Dieguito, Gustavo*, y también a *Ron y Mr.*. Todos ellos me acompañaron y me dieron su apoyo incondicional.

A mi *Familia*, mis padres y mis hermanos, *Marcos, Ale y Nati*, por apoyarme y también por confiar en mis decisiones. Eso me enorgullece. Les agradezco su comprensión y cariño y sus consejos constantes (algunos mejores que otros).

A *Lau* por amarme tanto, por darme compañía y hacer mi vida mucho mejor. a *La Ani*, mi sobrina favorita, por sus historias y proyectos. Por su juventud.

A *Todos*, muchas gracias.

A los que están, a los que estuvieron y a los que vendrán.

Índice

0. Introducción.	10
1. Preliminares.	18
1.1. Variedad de Maurer-Cartan con $d = 0$.	18
1.2. Estructura local de $M(E)$.	24
1.3. Familia de variedades de Maurer-Cartan.	26
2. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.	30
2.1. Cuádricas que definen $M \subseteq \mathbb{P}^r$.	31
2.2. Propiedades geométricas de $M \subseteq \mathbb{P}^r$.	36
3. \mathfrak{g} simple.	41
3.1. Preliminares.	41
3.2. Sobre la acción exponencial.	48
3.3. Estructura de M_X .	50
3.4. Estructura de M_y .	53
3.5. Aplicación del pletismo geométrico de $S^2(V)$ en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.	62
4. Variedad de estructuras.	67
4.1. Generalidades.	67
4.2. Variedad de subcomplejos de un complejo dado.	70
4.3. Variedad de morfismos entre complejos de rango fijo.	72
4.3.1. Subvariedad de cuasi-isomorfismos.	76
4.4. Variedad de estructuras de complejo.	77
4.4.1. Subvariedad de complejos exactos.	79
5. Variedad de \mathfrak{g}-estructuras.	80
6. Variedad de DGLA.	84
6.1. E general.	85
6.2. E^1 y E^2 módulos triviales.	86
6.3. E^0 semisimple.	87
7. Bibliografía.	92

0. Introducción.

El objetivo de esta tesis doctoral es estudiar la geometría de la variedad de Maurer-Cartan asociada a un álgebra de Lie diferencial graduada (abreviado DGLA). La motivación del tema proviene de la teoría general de deformaciones.

Dado un objeto geométrico o algebraico, ya sea, un esquema, un haz, un morfismo de esquemas, un álgebra asociativa, un álgebra de Lie, un morfismo de álgebras, un módulo, un morfismo de módulos, etc., un problema de deformación consiste en estudiar las familias de objetos tales que la fibra central es el objeto inicial.

Riemann comenzó esta teoría considerando lo que hoy se llaman superficies de Riemann. Más tarde siguieron los trabajos de Kodaira y Spencer sobre las deformaciones de variedades holomorfas. Nijenhuis y Richardson y luego Gerstenhaber con las deformaciones de estructuras algebraicas. Por otro lado, Grothendieck introdujo los esquemas en la teoría de deformaciones. La teoría actual está basada en ideas de Deligne, Drinfeld, Kontsevich y otros.

Cada uno de estos problemas de deformación tiene asociados grupos de cohomología. Típicamente existe un i tal que H^i parametriza las deformaciones de primer orden y H^{i+1} las obstrucciones. Por ejemplo, cuando $H^i = 0$ se tiene rigidez, y cuando $H^{i+1} = 0$ se tiene suavidad del espacio de módulos.

Más formalmente, una DGLA (Differential Graded Lie Algebra) es una terna $(E, d, [-, -])$ donde $E = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^i$ es un espacio vectorial graduado, el corchete $[-, -] : E \times E \rightarrow E$ es bilineal graduado y el morfismo $d : E \rightarrow E$ es lineal graduado, satisfaciendo las siguientes condiciones para a, b y c homogéneos de grado \bar{a}, \bar{b} y \bar{c} respectivamente:

- $[E^i, E^j] \subset E^{i+j}$, $[a, b] = -(-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a]$
- $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]$
- $d(E^i) \subset E^{i+1}$, $d^2 = 0$, $d[a, b] = [da, b] + (-1)^{\bar{a}}[a, db]$

Notar que E^0 es un álgebra de Lie y que $[-, -] : E^1 \times E^1 \rightarrow E^2$ es simétrico.

La variedad de Maurer-Cartan asociada a E es

$$M(E) = M := \{a \in E^1 \mid da + \frac{1}{2}[a, a] = 0\}.$$

Es una variedad algebraica afín definida por ecuaciones de grado dos.

La DGLA tiene asociado un grupo, el grupo de Lie conexo, simplemente conexo de E^0 . Este grupo actúa sobre E^1 preservando la variedad de Maurer-Cartan. A esta acción se la denomina acción de gauge.

El espacio de móduli del problema de deformación en cuestión es la variedad de Maurer-Cartan cocientada por la acción de gauge

$$M(E)/G.$$

La teoría de deformaciones en su forma actual afirma que algunos problemas de deformaciones (de estructuras algebraicas o geométricas) están gobernados por una DGLA en el sentido siguiente:

Para cada álgebra de Artin local (A, m_A) las familias sobre $\text{Spec}(A)$ corresponden biyectivamente con $M(E \otimes m_A)$. Son deformaciones infinitesimales de $0 \in M(E)$. Dos DGLA cuasi-isomorfas gobiernan el mismo problema de deformación y sus correspondientes variedades de Maurer-Cartan son isomorfas, [GM88].

Estudiar y comprender la geometría de $M(E)$ es un tema importante y relevante por resolver; conocer las componentes conexas, las componentes irreducibles, sus dimensiones, sus grados, las componentes rígidas, etc. Más aún, el caso de una DGLA con diferencial nulo (GLA), es fundamental en la teoría ya que corresponde a una DGLA cuasi-isomorfa a su homología. Este tipo de DGLA se denomina formal y ha sido muy estudiada en la literatura (Deligne, Kontsevich, Sullivan).

Demos algunos ejemplos:

Cuando se quiere deformar la estructura algebraica de un álgebra asociativa de dimensión finita, se procede deformando la multiplicación del álgebra original manteniendo la condición de asociatividad. A este problema de deformaciones le corresponde una DGLA E que es el complejo de Hochschild con un corchete definido por Gerstenhaber. En este caso $M(E)$ es la variedad de constantes de estructura de las álgebras asociativas y $0 \in M(E)$ corresponde al álgebra asociativa inicial.

Similarmente, en los trabajos de Nijenhuis-Richardson se le da al complejo de Chevalley-Eilenberg una estructura de DGLA E tal que $M(E)$ son las constantes de estructura de álgebras de Lie.

Utilizaremos la siguiente técnica de incidencia:

Fijado un espacio vectorial graduado $E = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^i$ denotemos \mathcal{DGLA} al conjunto cuyos elementos son pares ordenados $(d, [-, -])$ que satisfacen los axiomas de una estructura de DGLA en E . Observemos que \mathcal{DGLA} posee una estructura natural de variedad algebraica.

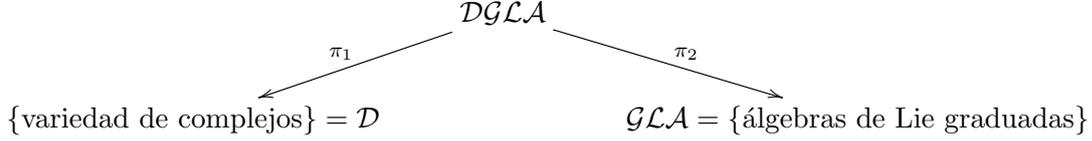
Sea

$$\mathcal{MC} := \{(d, [-, -], a) \mid (d, [-, -]) \in \mathcal{DGLA}, a \in E^1, da + \frac{1}{2}[a, a] = 0\}$$

la variedad de Maurer-Cartan universal. La variedad \mathcal{MC} se proyecta sobre \mathcal{DGLA} ,

$$\pi : \mathcal{MC} \longrightarrow \mathcal{DGLA}, \quad \pi(d, [-, -], a) = (d, [-, -])$$

y sus fibras son los elementos de Maurer-Cartan de la estructura de DGLA $(d, [-, -])$ sobre E . Así también, \mathcal{DGLA} tiene dos proyecciones naturales.



Dentro de \mathcal{DGLA} podemos tomar una recta $(td, [-, -])$, una familia de DGLAs. Veremos que bajo hipótesis de regularidad, la fibra central ($t = 0$) es un límite playo. Muchas de las propiedades de la fibra central (de geometría más sencilla) se trasladan a la fibra genérica. La fibra central es una variedad proyectiva definida por:

$$\{x \in \mathbb{P}E^1 \mid [x, x] = 0\}.$$

Resultados principales:

El trabajo de investigación se divide en dos partes, la primera (capítulos 1, 2, 3) en donde se analiza la variedad de Maurer-Cartan dentro de una GLA E con E^0 simple y la segunda (capítulos 4, 5, 6) donde se estudia la variedad \mathcal{DGLA} . Para analizar las variedades de Maurer-Cartan dentro de una GLA con E^0 simple, fue necesario aplicar la teoría de pesos y de representaciones de álgebras de Lie simples a este contexto. Se usó fuertemente el álgebra envolvente $U\mathfrak{g}$ y la estructura de pesos heredada de \mathfrak{g} . Por otro lado, para estudiar la variedad \mathcal{DGLA} fue necesario comprender en profundidad las variedades de complejos, la Grassmanniana de complejos y la variedad de morfismos entre complejos de rango fijo. Para esto, he necesitado generalizar un trabajo original de mi director de tesis sobre la variedad de complejos exactos, [Cuk11].

Cada capítulo comienza con su resumen y cada subsección con una pequeña guía orientativa de lo que se tratará allí. Se utilizará un formato distinto al texto para distinguirlo.

En el **capítulo 1** daremos una serie de preliminares generales y observaciones originales. Se analizará la diferencia entre trabajar con diferencial d no nulo y con diferencial $d = 0$. Se revisarán trabajos de Nijenhuis-Richardson [NR66] y de Goldman-Milson [GM88] citando los resultados originales. La idea del capítulo fue incluir algunos resultados relevantes y conocidos para esta tesis doctoral. Se llevan a cabo algunas ideas básicas como por ejemplo analizar la variedades de Maurer-Cartan en el límite $t \rightarrow 0$ de la DGLA $(E, td, [-, -])$.

En el **capítulo 2**, nos hemos concentrado en analizar las variedades de Maurer-Cartan donde $E^0 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, E^1, E^2 módulos irreducibles y $d = 0$. Notar que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es el álgebra de Lie simple más sencilla posible. A una DGLA sin diferencial se la llama GLA, Graded Lie Algebra, álgebra de Lie graduada. La variedad de Maurer-Cartan asociada a una GLA es

$$\begin{aligned}
 \{x \in E^1 \mid d^1(x) + \frac{1}{2}[x, x] = 0\} &= \{x \in E^1 \mid [x, x] = 0\} = \\
 \{x \in E^1 \mid f(xx) = 0\} &= \{x \in E^1 \mid xx \in \ker(f)\}, \text{ donde } f : S^2(E^1) \longrightarrow E^2.
 \end{aligned}$$

Notar entonces que la variedad de Maurer-Cartan depende del submódulo

$$S := \ker(f) \subseteq S^2(E^1).$$

Para cada submódulo $S \subseteq S^2(E^1)$ existe una variedad de Maurer-Cartan asociada,

$$M = \{x \in E^1 \mid xx \in S\}.$$

En el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ se tienen caracterizados geoméricamente algunos submódulos muy particulares de $S^2(E^1)$:

$$I(T^p c_r)_2 \subseteq S^2(E^1)$$

donde c_r es la curva de Veronese, $T^p c_r$ es su variedad p -osculante y $I()_2$ es el ideal en grado dos, luego si $T^p c_r$ está generada en grado dos, $M = T^p c_r$.

He obtenido ecuaciones explícitas de las cuádricas que definen la variedad M . Como corolario, he podido explicitar los grados y las ecuaciones de las variedades tangenciales $T^1 c_5$, $T^1 c_6$, $T^1 c_7$ y $T^1 c_8$.

A modo de ejemplo, he calculado las siguientes dos tablas que indican la dimensión y el grado de M para $E^1 = S^r(\mathbb{C}^2)$ y $E^2 = S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$. Dependiendo de E^1 y E^2 he dado una cota para $\dim(M)$ y bajo ciertas hipótesis en E^1 y E^2 se ha demostrado que M es intersección completa.

Dimensión de M :

$m \backslash r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2			3	2	3	2	2	2	2	2	3
3					5	4	3	3	5	3	3
4							7	6	5	4	4
5									9	8	7
6											11

Grado de M :

$m \backslash r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2			2	8	5	12	14	16	18	20	22
3					2	8	32	21	12	27	30
4							2	8	32	128	36
5									2	8	32
6											2

También he calculado una tabla sobre las dimensiones de M donde $E^1 = S^r(\mathbb{C}^2)$ y $E^2 = I(T^p c_r)_2^\vee$ que da el siguiente corolario. El símbolo \vee indica espacio dual y se utilizará durante toda la tesis.

Corolario. *La variedad 4-osculante de la curva de Veronese en \mathbb{P}^{12} no está generada en grado dos.*

Todo el **capítulo 3**, se encarga en estudiar las variedades de Maurer-Cartan asociadas a una GLA en donde E^0 es un álgebra de Lie simple. A cada submódulo de $S^2(E^1)$ le corresponde una variedad de Maurer-Cartan y a cada subvariedad invariante $X \subseteq \mathbb{P}E^1$, le corresponde el submódulo

$$S_X := I(X)_2^\vee \subseteq S^2(E^1).$$

Este submódulo define la variedad de Maurer-Cartan $M_X \subseteq \mathbb{P}E^1$. Hemos obtenido los siguientes resultados

Teorema. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}E^1$ variedad invariante irreducible tal que S_X tiene todos sus submódulos simples distintos, entonces $X \subseteq M_X$ y $M_X = M_{\langle y \rangle}$ con $\langle y \rangle \in X$ genérico.*

Corolario. *Supongamos que $S^2(E^1)$ posee todos sus submódulos simples distintos, entonces una órbita genérica $G.\langle y \rangle \subseteq \mathbb{P}E^1$ no está contenida en ninguna cuádrica.*

Teorema. *Sea $y \in E^1$ entonces $M_{\langle y \rangle}$ es irreducible.*

En la demostración de este teorema se usa fuertemente el álgebra envolvente $U\mathfrak{g}$. Esto nos permite traducir la irreducibilidad de $M_{\langle y \rangle}$ en un problema de geometría algebraica clásica. Más precisamente, he necesitado desarrollar una teoría de multi-matrices y multi-vectores. He necesitado trabajar con multi-matrices catalécticas y sistemas lineales completos sobre productos de \mathbb{P}^1 . Entre otras cosas he necesitado generalizar un resultado muy simple en el caso de matrices y vectores; que puntos distintos de la curva de Veronese son linealmente independientes. Se necesitaron resultados sobre teoría de grupos diagonalizables.

Proposición. *Dados $r, \ell \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}_0^r$ tal que si $\langle c_1 \rangle, \dots, \langle c_\ell \rangle$ son elementos distintos de la curva de Veronese generalizada (esta depende de N , ver capítulo 3), entonces son linealmente independientes.*

Por último, he dado una interpretación geométrica de algunas variedades de Maurer-Cartan. Esta interpretación se basa en el pletismo geométrico sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Llamemos $V := E^1$ y supongamos que V es irreducible de peso máximo ν . Sea $\mu = \nu - \sum a_i \alpha_i$ un peso de V y consideramos la variedad $M_{V \geq \mu}$.

Para cada raíz simple α_i de E^0 , existe una curva de Veronese

$$c_{\alpha_i} \subseteq M_{V \geq \mu}.$$

Proposición. *El submódulo $I(M_{V \geq \mu})_2$ corresponde a las cuádricas que se anulan sobre cada c_{α_i} con orden a_i .*

Estos tres capítulos corresponden al estudio de la variedad de Maurer-Cartan en una GLA con E^0 simple. El objetivo de los siguiente tres capítulos es estudiar la variedad \mathcal{DGLA} . Para esto se ha empezado estudiando variedades más sencillas. En el **capítulo 4** se estudian ciertas variedades de estructuras graduadas. Fijado un complejo, construimos la variedad de subcomplejos. También construimos la variedad de morfismos entre complejos de rango fijo. Todas estas variedades se usaron en el **capítulo 5** donde se estudian variedades de \mathfrak{g} -estructuras, donde \mathfrak{g} es un álgebra de Lie semisimple. Se definió la \mathfrak{g} -Grassmanniana y la variedad de morfismos de \mathfrak{g} -rango fijo.

Resultados obtenidos en el capítulo 4:

- Sea (W, δ) un complejo, $W = \bigoplus_0^n W_i$, $\dim W_i < \infty$ y sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(W)$ la variedad que consiste en todos los subcomplejos de W . Para cada $r, s \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ definimos la Grassmanniana de W , $\mathcal{G}_{r,s} \subseteq \text{Grass}(W^0, r_0) \times \dots \times \text{Grass}(W^n, r_n)$,
 $\mathcal{G}_{r,s} := \{(S^0, S^1, \dots, S^n) \mid S^i \subseteq W^i, \delta^i(S^i) \subseteq S^{i+1}, \dim_{\mathbb{C}}(S^i) = r_i, \dim_{\mathbb{C}}(H^i(S)) = s_i\}$.

Proposición. $\mathcal{G}_{r,s}$ es suave, irreducible y de dimensión

$$\dim(\mathcal{G}_{r,s}) = \sum_{i=0}^n (h_i - s_i)s_i + (\chi_i(w - h) - \chi_i(r - s))\chi_i(r - s)$$

donde $w := \dim W$, $h := \dim H(W)$ y $\chi_i(n) = n_i - n_{i-1} + \dots + (-1)^i n_0$.

- Sean (V, d) y (W, δ) dos complejos y sea $\text{hom}^0(V, W)$ los morfismos de grado cero, para cada $r, s \in \mathbb{N}_0^n$ definimos

$$\mathcal{C}_{r,s} := \{f \in \text{hom}_0(V, W) \mid \text{rk}(f_i) = r_i, \text{rk}([f]_i) = s_i\}.$$

donde $[f] : H(V) \rightarrow H(W)$ es el morfismo inducido en homología.

Proposición. $\mathcal{C}_{r,s}$ es suave, irreducible y de dimensión

$$\dim(\mathcal{C}_{r,s}) = \sum_{i=0}^n (h_i^v + h_i^w - s_i)s_i + (\chi_i(v - h^v) + \chi_i(w - h^w) - \chi_i(r - s))\chi_i(r - s)$$

donde $v := \dim(V)$, $h^v := \dim H(V)$, $w := \dim(W)$ y $h^w := \dim H(W)$.

Con estas variedades, podemos definir la variedad de cuasi-isomorfismos $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(V, W)$, recordemos que un morfismo entre complejos f se dice cuasi-isomorfismo si $[f]$ es un isomorfismo.

Corolario. Si $\dim V = \dim W$ y $\dim H(V) = \dim H(W)$ entonces la variedad de cuasi-isomorfismos es irreducible y de dimensión

$$\dim(\mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^n h_i^2 + \chi_i(v - h)^2.$$

donde $v = \dim V$, $h = \dim H(V)$ y $\chi_i(n) = n_i - n_{i-1} + \dots + (-1)^i n_0$.

- Sea V un espacio vectorial graduado y sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}(V) \subseteq \text{hom}^1(V, V)$ todas las estructuras de complejos admisibles en V .

$$\mathcal{D} := \{d \in \text{hom}^0(V, V[1]) \mid d^2 = 0\}$$

Sea $r \in \mathbb{N}_0^{2+1}$, $v = \dim V$ y $\mathcal{D}_r := \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_{r,r}$.

Proposición. \mathcal{D}_r es suave, irreducible y de dimensión

$$\dim \mathcal{D}_r = \sum_{i=0}^n (v_i + v_{i+1} - r_i - r_{i-1})r_i$$

- Dentro de \mathcal{D} tenemos los diferenciales exactos, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V) \subseteq \mathcal{D}(V)$.

Proposición. Existe $e \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ tal que $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{D}_e}$. En particular es irreducible. Por otro lado, \mathcal{E} también es suave.

Corolario. El diferencial de un complejo exacto es rígido.

Resultados obtenidos en el capítulo 5:

- Para cada V \mathfrak{g} -módulo y S submódulo de V , denotamos $Gr_{\mathfrak{g}}(V, S)$ a la variedad de submódulos isomorfos a S .

Como el álgebra \mathfrak{g} es semisimple, el módulo V tiene asociado una clase de isomorfismo, $V = \sum n_i W_i$ donde W_i son módulos simples. V queda identificado por la sucesión de números (n_1, \dots, n_k) denominada multiplicidades.

Por otro lado, como S es un submódulo de V , las multiplicidades de S , que son menores o iguales, determinan la clase de isomorfismo de S .

Proposición. $Gr_{\mathfrak{g}}(V, S)$ es irreducible, suave y tiene dimensión $\sum_{i=1}^k (n_i - s_i)n_i$ donde los n_i y los s_i son las multiplicidades de V y S .

- Tomemos V y W dos \mathfrak{g} -módulos, para cada clase $s = \sum s_i cl(W_i) \leq cl(W)$ definimos

$$\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s := \{f \mid cl(\text{im} f) = s\}.$$

Proposición. La variedad $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$ es irreducible, suave y de dimensión

$$\dim \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s = \sum (n_i + m_i - s_i)s_i.$$

donde $\{n_i\}$ y $\{m_i\}$ son las multiplicidades de V y W respectivamente.

Finalmente pasamos al último capítulo. En la primer parte del **capítulo 6** se define la variedad de estructuras de DGLA y en la segunda se analiza qué variedades de Maurer-Cartan pueden aparecer. Bajo ciertas hipótesis, son las estudiadas en el capítulo 3.

Lo primero que se hizo fue quitar toda la información irrelevante de una DGLA.

Proposición. Sean E y E' dos DGLA y sea $\phi : E \rightarrow E'$ un morfismo tal que ϕ_0, ϕ_1 son biyectivos y ϕ_2 es inyectivo. Entonces $M(E) \cong M(E')$ donde el isomorfismo es equi-variante.

Corolario. Sea F una DGLA y definimos $E = F^0 \oplus F^1 \oplus \ker(d^2) \hookrightarrow F$, entonces $M(F) = M(E)$. En particular cualquier variedad de Maurer-Cartan aparece en una DGLA $E = E^0 \oplus E^1 \oplus E^2$. Más aún, fijada el álgebra de Lie E^0 y los módulos E^1 y E^2 , la DGLA queda determinada por una terna

$$(d^0, d^1, f) \in \mathcal{DGLA}(E)$$

donde d^0 y d^1 son \mathbb{C} -lineales y $f : S^2(E^1) \rightarrow E^2$ es E^0 -morfismo. Las condiciones de compatibilidad que satisfacen son:

$$d^0([a, b]) = -b.d^0(a) + a.d^0(b), \quad d^1(a.x) = f(d^0a, x) + a.d^1(x), \quad d^1d^0 = 0.$$

Pudimos obtener la siguiente caracterización,

Proposición. Si E^0 es semisimple,

$$\mathcal{DGLA}(E) = \bigcup_v \mathcal{DGLA}(E)_v$$

donde las variedades $\mathcal{DGLA}(E)_v$ son irreducibles, suaves y

$$\dim \mathcal{DGLA}(E)_v = \dim E_v^1 + \dim \text{hom}_{E^0}(E^1/v, E^2) + \dim \text{hom}_{E^0}(S^2(E^1), E^2).$$

La unión se toma sobre todos los caracteres $0 \leq v \leq \text{cl}(E^1)$.

Modificando un poco d^1 y f es posible evitar el diferencial d^0 de la siguiente manera

Lema. Si E^0 es semisimple, sea $e \in \mathcal{DGLA}(E)$, entonces existe $\tilde{e} = (0, d^1, f)$ tal que $M(e) = M(\tilde{e})$. Notar que d^1 resulta un morfismo de E^0 -módulos.

En conclusión para estudiar todas las variedades de Maurer-Cartan podemos reducirnos al caso en que la DGLA $E = E^0 \oplus E^1 \oplus E^2$ tiene dos morfismos de módulos $d^1 : E^1 \rightarrow E^2$ y $f : S^2(E^1) \rightarrow E^2$.

Corolario. Sea E una DGLA con E^0 simple y donde E^1 no comparte submódulos con $S^2(E^1)$. Si M es su variedad de Maurer-Cartan, entonces M es isomorfa a la variedad de Maurer-Cartan afín de una GLA.

1. Preliminares.

Resumen

En este capítulo daremos las primeras definiciones, notaciones y observaciones respecto a las variedades de Maurer-Cartan. En la primer subsección se estudiará la variedad $Q = M(E, d = 0, [-, -])$ en relación a la variedad de Maurer-Cartan $M(E)$. Se definirá la acción de gauge y la acción exponencial ($d = 0$). Como resultado se obtiene que cualquier variedad proyectiva invariante es isomorfa a una variedad de Maurer-Cartan. En la siguiente subsección, *Estructura local de $M(E)$* , se analiza la relación entre la variedad $M(E)$ y $M(H(E)) = Q(H(E))$. Se citan varios resultados conocidos de la teoría. También se estudia la relación entre $M(E)$ y $M(\text{der}(E))$. Por último en *Familia de variedades de Maurer-Cartan* se trabaja con familias de variedades de Maurer-Cartan y se dan condiciones suficientes para que el límite playo de la familia M_t sea $M_0 = Q(E)$ (como esquemas). El objetivo de este capítulo es justificar las hipótesis que se asumirán en el capítulo 2 y 3; trabajar con álgebras de Lie simples y con diferenciales nulos.

1.1. Variedad de Maurer-Cartan con $d = 0$.

Comenzaremos esta subsección con las definiciones básicas necesarias para esta tesis. Dado que nos interesará trabajar con DGLA de diferencial nulo (GLA), hemos definido la variedad

$$Q = \{x \in E^1 \mid [x, x] = 0\}.$$

Cuando se trabaja con una GLA, su variedad de Maurer-Cartan es justamente Q . Haremos algunas pequeñas observaciones sobre la estructura involucrada, 1.1.6, 1.1.9, algunos comentarios sobre los autovalores de la representación 1.1.7, 1.1.8 y finalmente concluiremos que cualquier variedad invariante es isomorfa a una variedad de Maurer-Cartan de una GLA 1.1.12. Este resultado motiva la utilización de hipótesis más restrictivas sobre la DGLA. Por ejemplo en los capítulos 2 y 3 hemos impuesto que E^0 sea simple y $d = 0$.

Sea $E = (E, d, [-, -])$ una \mathbb{C} -DGLA graduada en los enteros no-negativos y con diferencial de grado uno. Definimos

$$M(E) := \{x \in E^1 \mid dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0\}$$

$$Q(E) := \{x \in E^1 \mid [x, x] = 0\}.$$

Trabajaremos con la variedad $Q := Q(E)$. Luego veremos qué consecuencias trae utilizar $Q(E)$ en vez de $M(E)$.

1.1.1 Notación. Dado un cono afín C en un espacio vectorial V , denotaremos $\mathbb{P}C \subseteq \mathbb{P}V$ a la variedad proyectiva asociada.

$$\mathbb{P}C = \{\langle x \rangle \mid x \in C\} = C / \sim, \quad x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

En particular, denotaremos $\mathbb{P}Q = \mathbb{P}Q(E) \subseteq \mathbb{P}E^1$ a la variedad proyectiva que se obtiene de $Q(E)$.

1.1.2 Definición. Dado $x \in Q$ se tiene un diferencial de grado uno,

$$ad_x(y) := [x, y]$$

Llamaremos

$$Z^1(x) := \ker(ad_x|_{E^1}) = \{y \in E^1 \mid [x, y] = 0\}, \quad B^1(x) := \text{im}(ad_x|_{E^1}) = \{[x, a] \mid a \in E^0\}.$$

Notar que si $x \in Q$ se tiene que $B^1(x) \subseteq Z^1(x)$, pues

$$[x, [x, a]] = [[x, x], a] - [x, [x, a]] = -[x, [x, a]] \implies 2[x, [x, a]] = 0 \implies [x, a] \in Z^1(x).$$

De las propiedades de DGLA en E , resulta que E^0 es un álgebra de Lie y el corchete induce estructuras de representaciones en E^1 y E^2 .

$$\rho_1 : E^0 \longrightarrow \text{end}(E^1), \quad \rho_1(a)(x) := [a, x] \in E^1.$$

$$\rho_2 : E^0 \longrightarrow \text{end}(E^2), \quad \rho_2(a)(u) := [a, u] \in E^2.$$

La condición de ser representaciones se obtiene de Jacobi graduado.

1.1.3 Observación. Si bien la estructura de E^0 -módulo de E^1 induce una estructura de G -módulo que preserva $Q(E)$, en general la acción de G que se utiliza es la acción de gauge que preserva $M(E)$, [GM88, p.45]. Si $a \in E^0$ y $x \in E^1$ recordemos que la acción exponencial viene dada por $e^a x = x + [a, x] + \frac{1}{2}[a, [a, x]] + \dots$. La acción de gauge es:

$$\begin{aligned} a \cdot x &:= e^a x - \frac{e^a - 1}{a} d^0 a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k \left(x - \frac{d^0 a}{k+1} \right) = \\ &= x - d^0 a + [a, x - \frac{d^0 a}{2}] + \frac{1}{2}[a, [a, x - \frac{d^0 a}{3}]] + \dots \end{aligned}$$

Notemos que si $d^0 = 0$, la acción es la exponencial, $e^a x$. Dado que trabajaremos mayormente con $d = 0$, la acción que nos va a interesar y que preserva $Q(E)$ es la exponencial.

Caractericemos el espacio tangente en $x \in Q(E)$ y el espacio tangente de la G -órbita dentro de $Q(E)$ mediante la acción del grupo de Lie conexo y simplemente conexo $G = G(E^0)$. Esta proposición puede encontrarse con notaciones similares en [NR66].

1.1.4 Proposición. Llamemos $\mathcal{O} = G.x$ a la órbita de x , luego

$$T_x Q = Z^1(x), \quad T_x \mathcal{O} = B^1(x).$$

En particular, si $H^1(x) = 0$, x es rígido.

Demostración. Como Q viene dado por los ceros de una aplicación cuadrática, su tangente en $x \in Q$ es

$$T_x Q = \ker(E^1 \xrightarrow{2[x, \cdot]} E^2) = Z^1(x).$$

Argumento de geometría diferencial: Un vector v pertenece a $T_x \mathcal{O}$ si existe una curva σ en \mathcal{O} tal que $\sigma(t) = x + tv + O(t^2)$. Como la curva está en la órbita de x y $1.x = x$, existe otra curva $g(t) = 1 + ta + O(t^2)$ en G tal que

$$(1 + ta + O(t^2)).x = x + tv + O(t^2) \implies [a, x] = v.$$

□

1.1.5 Notación. Tomemos una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E^2 y sea π_k la proyección a la k -coordenada, $\pi_k(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) = a_k$, luego

$$x \in Q(E) \iff [x, x] = 0 \in E^2 \iff \pi_k([x, x]) = 0, \quad \forall k = 1 \dots n.$$

Sea $q_k := \pi_k \circ [-, -] : E^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma cuadrática (depende de la base elegida) y sea Q_k la cuádrca que define. Entonces

$$Q(E) = \bigcap_{k=1}^n Q_k.$$

En otras palabras,

$$x \in Q(E) \iff q_k(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

1.1.6 Observación. La antisimetría graduada del corchete, implica que

$$[-, -] : E^1 \times E^1 \longrightarrow E^2$$

es simétrico. Llamemos f al morfismo canónico lineal

$$S^2(E^1) \xrightarrow{f} E^2, \quad f(x.y) = [x, y].$$

Este morfismo es de E^0 -módulos debido a la condición de Jacobi graduado,

$$af(x.y) = f(ax.y) + f(x.ay) \iff [a, [x, y]] = [[a, x], y] + [x, [a, y]].$$

Recordemos la estructura de E^0 -módulo en $S^2(E^1)$ heredada de E^1 ,

$$\tilde{\rho}_1(a)(x.y) := \rho_1(a)x.y + x.\rho_1(a)y.$$

1.1.7 Observación. Supongamos por el momento que el álgebra de Lie E^0 es semisimple. Analicemos los autovalores y autovectores de $\tilde{\rho}_1(a)$. Veremos que todos los autovalores de $\tilde{\rho}_1(a)$ son de la forma $\lambda_i + \lambda_j$ para λ_i, λ_j autovalores de $\rho_1(a)$ con $a \in E^0$ diagonalizable. Sea $\{x_1, \dots, x_r\}$ base de autovectores de $\rho_1(a)$ en E^1 y sea $v := \sum v_{ij}x_i.x_j$ autovector de $\tilde{\rho}_1(a)$ con autovalor λ , entonces

$$\sum \lambda v_{ij}x_i.x_j = \lambda v = \tilde{\rho}_1(a)v = \sum v_{ij}ax_i.x_j + v_{ij}x_i.ax_j = \sum v_{ij}(\lambda_i + \lambda_j)x_i.x_j$$

Luego $\lambda = \lambda_i + \lambda_j$.

La condición de Jacobi graduado en $a \in E^0$ y en $x, y \in E^1$ se traduce

$$f(\rho_1(a)(x.y) + f(x.\rho_1(a)(y))) = \rho_2(a)(f(x.y)).$$

Luego si x e y son autovectores de $\rho_1(a)$ con autovalores λ_x y λ_y , resulta que $f(x.y)$ es autovector de $\rho_2(a)$ de autovalor $\lambda_x + \lambda_y$.

Reescribiendo un poco más la condición de Jacobi, se tiene:

$$f(\tilde{\rho}_1(a)(x.y)) = \rho_2(a)(f(x.y)) \iff f \circ \tilde{\rho}_1(a) = \rho_2(a) \circ f, \quad \forall a \in E^0,$$

o sea, que el cuadrado siguiente conmuta cualquiera sea $a \in E^0$,

$$\begin{array}{ccc} S^2(E^1) & \xrightarrow{\tilde{\rho}_1(a)} & S^2(E^1) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ E^2 & \xrightarrow{\rho_2(a)} & E^2 \end{array}$$

Luego $\tilde{\rho}_1(a)(\ker(f)) \subseteq \ker(f)$ y $\rho_2(a)(\operatorname{im}(f)) \subseteq \operatorname{im}(f)$, en particular, el núcleo y la imagen de f son subrepresentaciones.

Se induce el siguiente diagrama conmutativo donde las flechas verticales son isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} S^2(E^1)/\ker(f) & \xrightarrow{[\tilde{\rho}_1(a)]} & S^2(E^1)/\ker(f) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ \operatorname{im}(f) & \xrightarrow{\rho_2(a)|_{\operatorname{im}(f)}} & \operatorname{im}(f) \end{array}$$

Si f es sobreyectiva,

$$\begin{aligned} \{\text{autovalores de } \rho_2(a)\} &= \{\text{autovalores de } \rho_2(a)|_{\operatorname{im}(f)}\} \cong \{\text{autovalores de } [\tilde{\rho}_1(a)]\} = \\ &= \{\text{autovalores de } \tilde{\rho}_1(a)\} \setminus \{\text{autovalores de } \tilde{\rho}_1(a)|_{\ker(f)}\} = \\ &= \{\lambda_r + \lambda_s \mid \lambda_s, \lambda_r \text{ autovalores de } \rho_1(a)\} \setminus \{\text{autovalores de } \tilde{\rho}_1(a)|_{\ker(f)}\}. \end{aligned}$$

Notar entonces que pueden existir autovalores λ_i, λ_j de $\rho_1(a)$ tal que $\lambda_i + \lambda_j$ no es autovalor de $\rho_2(a)$. Tenemos entonces el siguiente resultado.

1.1.8 Proposición. *Supongamos E^0 es semisimple y que λ es peso de E^1 pero 2λ no lo es de E^2 , entonces el autoespacio asociado a λ está incluido en Q , i.e.*

$$E^{1,\lambda} := \{x \in E^1 \mid [a, x] = \lambda(a)x, \quad \forall a \in \mathfrak{h}\} \subseteq Q.$$

Demostración. Llamemos $\mathfrak{h} \subseteq E^0$ a una subálgebra de Cartan, sea $a \in \mathfrak{h} \subseteq E^0$, $\rho_1(a) := ad_a|_{E^1}$ y $\rho_2(a) := ad_a|_{E^2}$. Notar que $\rho_1(a)$ y $\rho_2(a)$ son diagonalizables pues $a \in \mathfrak{h}$ y las representaciones son de dimensión finita. Por hipótesis, existe $a \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\det(\rho_2 - 2\lambda)(a) \neq 0.$$

Sea $x \in E^{1,\lambda}$, entonces

$$\begin{aligned} \rho_2(a)f(x.x) &= f(\rho_1(a)(x.x)) = 2\lambda(a)f(x.x) \\ \iff (\rho_2(a) - 2\lambda(a))f(x.x) &= 0 \iff f(x.x) = 0 \iff x \in Q. \end{aligned}$$

□

1.1.9 Proposición. *El ideal de Q en grado dos, $I(Q)_2$, es una representación de E^0 .*

Demostración. Dualicemos el morfismo $S^2(E^1) \xrightarrow{f} E^2$,

$$E^{2\vee} \xrightarrow{f^t} S^2(E^1)^\vee.$$

Si f es sobreyectiva (cosa que se puede suponer siempre), f^t es inyectiva, por otro lado, se tiene el isomorfismo de Lie

$$S^2(E^{1\vee}) \cong S^2(E^1)^\vee$$

que es simplemente, pensar $\phi\psi \in S^2(E^{1\vee})$ como aplicación $S^2(E^1) \xrightarrow{\phi\psi} \mathbb{C}$ tal que

$$(\phi\psi)(xy) = \phi(x)\psi(y) + \phi(y)\psi(x).$$

Recordar que la estructura inducida de E^1 en el espacio dual $S^2(E^1)^\vee$ es

$$(a.\phi)(xy) = -\phi(a.xy)$$

y la estructura en $S^2(E^{1\vee})$ es

$$\begin{aligned} (a(\phi\psi))(xy) &= (a\phi.\psi)(xy) + (\phi.a\psi)(xy) = \\ &= (a\phi)(x)\psi(y) + (a\phi)(y)\psi(x) + \phi(x)(a\psi)(y) + \phi(y)(a\psi)(x) = \\ &= -\phi(ax)\psi(y) - \phi(ay)\psi(x) - \phi(x)\psi(ay) - \phi(y)\psi(ax) = \\ &= -(\phi\psi)(a.x.y) - (\phi\psi)(x.a.y) = -(\phi\psi)(a.(xy)) \end{aligned}$$

Luego el isomorfismo es de módulos de Lie.

Fijemos en $E^{2\vee}$ la base $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$, luego $f^t(\pi_k) = \pi_k \circ f = q_k$ son las formas cuadráticas que definen Q . La imagen de f^t son los generadores del ideal de Q ,

$$I(Q)_2 \cong E^{2\vee} \hookrightarrow S^2(E^{1\vee}).$$

En particular, $I(Q)_2$ es una representación de E^0 . □

1.1.10 Proposición. *Cualquier variedad proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}V$ intersección de cuádricas, es una variedad de Maurer-Cartan.*

Demostración. Sean q_0, \dots, q_n las formas cuadráticas que definen X . Las suponemos linealmente independientes. Sea $E = \bigoplus E^i$ la DGLA definida por $E^i = 0$ si $i \neq 1, 2$ y $E^1 = V$, $E^2 = \mathbb{C}^{n+1}$. Los diferenciales de E los defino todos nulos y el único corchete que resta definir es el de $E^1 \times E^1 \rightarrow E^2$. Es una aplicación simétrica $S^2(E^1) \xrightarrow{f} E^2$. Sea $q : E^1 \rightarrow E^2$ tal que $q(x) = (q_0(x), \dots, q_n(x))$, entonces

$$2f(x.y) = q(x+y) - q(x) - q(y).$$

La condición de Jacobi y Leibnitz graduado son triviales y la variedad de Maurer-Cartan asociada a esta DGLA es

$$\begin{aligned} M(E) = Q(E) &= \{a \in E^1 \mid [a, a] = 0\} = \{a \in V \mid f(a.a) = 0\} = \\ &= \{a \in V \mid q(a) = 0\} = \{a \in V \mid q_0(a) = \dots = q_n(a) = 0\} \implies X = \mathbb{P}Q. \end{aligned}$$

□

1.1.11 Corolario. *Toda variedad proyectiva es isomorfa a una variedad de Maurer-Cartan*

Demostración. Esto se debe a que toda variedad proyectiva es isomorfa a una intersección de cuádricas ([Har92, ejercicio 2.9]), luego usando lo anterior, la intersección de cuádricas es una variedad de Maurer-Cartan. \square

1.1.12 Teorema. *Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo que actúa linealmente en un espacio vectorial V . Cualquier variedad $X \subseteq \mathbb{P}V$ invariante por G es G -isomorfa a una variedad de Maurer-Cartan.*

Demostración. En primer lugar podemos suponer que $X \subseteq \mathbb{P}V$ es una intersección de cuádricas ya que mediante la inmersión de Veronese, que es equivariante, podemos llevar a X a un proyectivo más grande (inducido de V) en el cual X es intersección de cuádricas. Luego la variedad X es invariante por G y viene dada por cuádricas. Para demostrar que X es una variedad de Maurer-Cartan, debemos hallar una DGLA E tal que $X = M(E)$.

El ideal en grado dos $I(X)_2 \subseteq S^2(V^\vee)$ es un \mathfrak{g} -módulo. Sea $E^2 := I(X)_2^\vee$, $E^1 := V$ y $E^0 := \mathfrak{g}$. Dualicemos la inclusión del ideal y obtenemos el morfismo de Lie:

$$S^2(E^1) \xrightarrow{f} E^2.$$

Veamos entonces que el espacio vectorial graduado $\mathfrak{g} \oplus E^1 \oplus E^2$ con diferencial nulo y corchete inducido de f cumple Jacobi. Sea $a \in E^0, x, y \in E^1$:

$$(-1)^{\overline{a}y}[a, [x, y]] + (-1)^{\overline{x}a}[x, [y, a]] + (-1)^{\overline{y}x}[y, [a, x]] = 0 \iff$$

$$[a, [x, y]] + [x, [y, a]] - [y, [a, x]] = 0 \iff$$

$$[a, f(x.y)] + f(x.[y, a]) - f(y.[a, x]) = 0 \iff$$

$$af(x.y) - f(x.(ay)) - f(y.(ax)) = 0 \iff$$

$$af(x.y) = f(x.(ay)) + f((ax).y) \iff af(x.y) = f(ax.y + x.ay)$$

Como vale $af(x.y) = f(ax.y + x.ay)$ la condición de Jacobi en este grado se cumple.

Con respecto a los grados $a, b, c \in E^0$ o $a, b \in E^0, x \in E^1$ o $a, b \in E^0, w \in E^2$ se cumplen trivialmente por el hecho que E^0 es un álgebra de Lie y E^1 y E^2 son representaciones. El resto de los grados son todos nulos. Luego es una DGLA cuya variedad de Maurer-Cartan es X . \square

1.2. Estructura local de $M(E)$.

Dada una DGLA, hay dos DGLA canónicas que se pueden construir. La primera es su cohomología, $H(E)$ y la segunda es el espacio de derivaciones $\text{der}(E)$. Cuando la DGLA E gobierna las deformaciones de un objeto $0 \in M(E \otimes m_{\mathbb{C}})$, la cohomología $H(E)$ informa la estructura infinitesimal/local del objeto a deformar. Respecto a esto citaremos tres resultados relevantes a la teoría. Finalmente en 1.2.1 estudiaremos qué sucede con la DGLA $\text{der}(E)$. Veremos que su variedad de Maurer-Cartan parametriza todos las derivaciones admisibles en $(E, [-, -])$. Interpretaremos esto en función de la teoría de deformaciones.

Estudiemos la relación entre $M(E)$ y $M(H(E))$ donde $H(E)$ es la cohomología de E vista como complejo. Hereda una estructura de GLA.

Sea $m \in M(E)$ y consideremos la DGLA

$$E(m) = (E, d + \text{ad}_m, [-, -]).$$

Dado que $m + u \in M(E) \iff u \in M(E(m))$, estudiar las deformaciones de $m \in M(E)$ es equivalente a estudiar las deformaciones de $0 \in M(E(m))$, luego, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que estamos estudiando las deformaciones de $0 \in M(E)$.

Nombremos tres resultados. El primero es un teorema de Mumford. De [Mum76, teorema 1.16], sabemos que si d^1 tiene rango máximo, entonces $M(E) = X \cup Y$ donde $0 \in X \setminus Y$ y 0 es suave en X de dimensión $e^1 - e^2$. En particular, si $m \in M(E)$ y $d^1 + [m, -]$ tiene rango máximo, m es suave.

El segundo resultado se debe a [NR66]. El [NR66, teorema 20.3.b] y la [NR66, proposición 17.1] afirman que existe un abierto analítico conexo \mathcal{K} de $0 \in M(E)$ tal que la acción del grupo sobre \mathcal{K} forma un abierto Zariski, o sea que toda deformación de 0 es equivalente a algún elemento en \mathcal{K} . A \mathcal{K} se lo llama familia Kuranishi asociada a 0 ,

$$\mathcal{K} := \{h + \Phi(h) \mid h \in M(H(E))\}, \quad H^1(E) \xrightarrow{\Phi} C^1.$$

El morfismo analítico Φ está definido entre entornos analíticos del origen donde C^1 es un complemento de $Z^1(E)$, entonces \mathcal{K} está parametrizado por un entorno analítico de $0 \in M(H(E))$. Este teorema relaciona las deformaciones de $0 \in M(E)$ con las deformaciones de $0 \in M(H(E))$ pero no dice nada sobre sus clases.

El último resultado es el Teorema de Equivalencia de Deligne muy relevante en la teoría de deformaciones, ver [DTT09, teorema 2], [GM88, 2.4]. Consideremos el anillo de series formales $\mathbb{C}[[t]]$ con su ideal maximal m y consideremos la DGLA $E \otimes_{\mathbb{C}} m$ con su grupo de Lie (unipotente) asociado $G := G(E^0 \otimes_{\mathbb{C}} m)$. El conjunto de orbitas $M(E \otimes_{\mathbb{C}} m)/G$ representa las clases de deformaciones formales de $0 \in M(E)$. El Teorema de Equivalencia afirma que si E es cuasi-isomorfa a E' , entonces

$$M(E \otimes_{\mathbb{C}} m)/G \cong M(E' \otimes_{\mathbb{C}} m)/G'.$$

En particular si la DGLA E es cuasi-isomorfa a $H(E)$, las clases de deformaciones formales de $0 \in M(E)$ están en biyección con las clases de deformaciones formales de $0 \in M(H(E))$.

Esto es más relevante que el resultado de [NR66]. Una DGLA se dice *formal* si es cuasi-isomorfa a su homología. El estudio de una DGLA formal es muy importante dentro de la teoría general y es por esto, entre otras cosas, la relevancia de suponer en los capítulos 2 y 3 que las DGLA tienen diferencial nulo. Más adelante, 6.0.20, daremos una versión global del Teorema de Equivalencia.

1.2.1. Dada $(E, [-, -])$ un álgebra de Lie graduada, se tiene un morfismo de grado cero natural

$$E \xrightarrow{ad} \text{der}(E) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{der}^i(E)$$

Resulta que $\text{der}(E)$ es un álgebra de Lie graduada donde el corchete para d y e homogéneos de grado \bar{d} y \bar{e} respectivamente es

$$[d, e] = de - (-1)^{\bar{d}\bar{e}} ed.$$

Veremos que su variedad de Maurer-Cartan parametriza los diferenciales admisibles de E .

Cada diferencial en E , induce una estructura de DGLA en $(\text{der}(E), [d, -], [-, -])$. El morfismo ad es de DGLA y se tiene la aplicación (en general no es un isomorfismo):

$$M(E) \xrightarrow{ad_*} M(\text{der}(E)).$$

$$M(\text{der}(E)) = \{\delta \in \text{der}^1(E) \mid [d, \delta] + \frac{1}{2}[\delta, \delta] = 0\} = \{\delta \in \text{der}^1(E) \mid (d + \delta)^2 = 0\}.$$

Son las deformaciones de d tal que son derivaciones admisibles en E .

Dos derivaciones se dirán equivalentes si existe un automorfismo que las conjuga.

Para cada $\delta \in M(\text{der}(E))$ consideramos $H(E(\delta))$ donde $E(\delta) = (E, d + \delta, [-, -])$. Claramente, si $\delta \sim \delta'$ se tiene $H(E(\delta)) = H(E(\delta'))$, en particular si d es rígida, todas sus deformaciones (incluso las de la forma ad_m) darán la misma cohomología $H(E)$.

Si $H^1(\text{der}(E)) = 0$, d es rígida,

$$H^1(\text{der}(E)) = \frac{Z^1(\text{der}(E))}{B^1(\text{der}(E))} = \frac{\{\delta \in \text{der}^1(E) \mid d\delta + \delta d = 0\}}{\{d\phi - \phi d \mid \phi \in \text{der}^0(E)\}}.$$

Tenemos dos maneras de deformar un diferencial d . Una es con diferenciales internos, $d + ad_m$ donde $m \in M(E)$, y la otra es con diferenciales arbitrarios de la GLA $(E, [-, -])$. Son de la forma $d + \delta$.

No confundir, entonces, $M(H(E))$ y $M(H(\text{der}(E)))$. Uno informa sobre las deformaciones internas de d (ya que si $m \in M(E)$, entonces $d + ad_m$ es un diferencial) y el otro sobre las deformaciones de d como diferencial.

1.2.2 Observación. Sea $m \in E^1$ y supongamos que $d + ad_m$ es un diferencial.

$$(d + ad_m)^2 = 0 \iff 0 = d[m, -] + [m, d-] + [m, [m, -]] \iff$$

$$[dm, -] + \frac{1}{2}[[m, m], -] \iff [2dm + [m, m], -] = 0.$$

La última condición, no implica necesariamente que $m \in M(E)$. Para esto hay que pedir hipótesis sobre la DGLA. Por ejemplo si el módulo E^1 tiene sus invariantes nulos,

$$0 = H^0(E^0; E^1) = (E^1)^{E^0} = \{x \in E^1 \mid ax = 0 \quad \forall a \in E^0\},$$

entonces

$$(d + ad_m)^2 = 0 \iff 2m + [m, m] = 0.$$

Esta hipótesis se cumple, por ejemplo, si E^0 es semisimple y E^1 es irreducible de dimensión $2 \leq \dim E^1 < \infty$, [Wei94, 7.8.9].

1.3. Familia de variedades de Maurer-Cartan.

Esta subsección es técnica. Se toma la clausura proyectiva de la variedad de Maurer-Cartan $M(E)$ y se construye una familia de estas variedades perturbando el diferencial d , $M_t := \overline{M(E, td, [-, -])}$. Cuando $t \neq 0$ son todas variedades proyectivas isomorfas a M_1 , pero al hacer el límite playo, $\lim_{t \rightarrow 0} M_t$, obtenemos estructura infinitesimal adicional. Su estructura reducida es la esperable M_0 . Daremos un resultado que afirma que cuando el corchete $[-, -]$ define una sucesión regular, el límite playo es M_0 . En particular, el polinomio de Hilbert de M_1 y de M_0 coinciden, 1.3.3.

Dada una DGLA E , existe una construcción que permite homogeneizar las ecuaciones de la variedad de Maurer-Cartan. Sea F la DGLA tal que $F^i = E^i$ si $i \neq 1$ y $F^1 = E^1 \oplus \langle d \rangle$. Por simplicidad se denota $F = E \oplus \mathbb{C}d$ donde se entiende que d tiene grado uno. El diferencial y el corchete en F son los mismos que en E con la salvedad de que para $d, x \in F^1$ se tiene

$$d^1(d) = 0, \quad [d, x] = d^1(x), \quad [x, d] = -(-1)^{\bar{x}}[d, x].$$

Con estas condiciones F es una DGLA que contiene a E . La inclusión es la identidad salvo en grado 1.

Pasemos a analizar las ecuaciones de $M(E)$ dentro de F . Primero, notar que $\mathbb{P}F^1 = E^1 \amalg \mathbb{P}E^1$ donde los elementos de E^1 son de la forma $(x : 1)$. En general, notaremos $(x : \lambda) \in \mathbb{P}F^1$ a la clase de un elemento $x + \lambda d \in F^1$. Tomemos la clausura de $M(E)$ en $\mathbb{P}F^1$, para esto homogeneizamos el diferencial y el corchete.

$$d(x, \lambda) = dx, \quad [(x, \lambda), (y, \mu)] = [x, y] + \lambda dy + \mu dx.$$

$$\overline{M(E)} = \{(x : \lambda) \in \mathbb{P}(F^1) \mid [(x, \lambda), (x, \lambda)] = 0\} = \mathbb{P}Q(F).$$

El hiperplano del infinito, $\{\lambda = 0\}$, es

$$\{x \in \mathbb{P}(E^1) \mid [x, x] = 0\} = \mathbb{P}Q(E).$$

Notar también que $Q(F)$ es el cono afín de $\overline{M(E)}$, en particular, poseen las mismas componentes irreducibles y las dimensiones difieren en uno.

Respecto a la información local, se tiene

$$Q(H(F)) = Q(H(E)) \times \mathbb{A}^1,$$

ya que $H(F) = H(E) \oplus \mathbb{C}d$ y

$$x + \lambda d \in H^1(F) \implies [x + \lambda d, x + \lambda d] = [x, x] + 2\lambda dx = [x, x].$$

Veremos que sucede algo similar entre $Q(F)$ y $Q(E) \times \mathbb{A}^1$.

1.3.1. Fijada una GLA $(E, [-, -])$, denotamos por $\text{hom}_{\mathbb{C}}^1(E, E)$ a los morfismo de grado uno del espacio vectorial graduado E . Dentro de $\text{hom}_{\mathbb{C}}^1(E, E)$ definimos la siguiente variedad

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(E, [-, -]) := \{d \mid d^2 = 0, d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{\bar{x}}[x, dy]\} \subseteq \text{hom}_{\mathbb{C}}^1(E, E)$$

donde x e y son homogéneos. Esta variedad contiene todos los diferenciales admisibles en $(E, [-, -])$. De 1.2.1, sabemos que $\mathcal{D} = M(\text{der}(E))$ es una variedad de Maurer-Cartan.

Consideremos la siguiente variedad de incidencia,

$$\{((x : \lambda), d) \mid [x + \lambda d, x + \lambda d] = 0\} \subseteq \mathbb{P}(E^1 \times \mathbb{C}) \times \mathcal{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{D}.$$

$$\pi_2^{-1}(d) = \{(x : \lambda) \mid [x + \lambda d, x + \lambda d] = 0\} = \overline{M(E, d, [-, -])}.$$

Las fibras en d y en un múltiplo no-nulo de d son variedades de Maurer-Cartan isomorfas,

$$\pi_2^{-1}(td) = \{(x : \lambda) \mid [x + \lambda td, x + \lambda td] = 0\} = \{(x : \frac{\lambda}{t}) \mid [x + \lambda d, x + \lambda d] = 0\}.$$

$$(x : \lambda) \in \pi_2^{-1}(d) \iff (tx : \lambda) \in \pi_2^{-1}(td).$$

La fibra en el origen, $\pi_2^{-1}(0)$ es

$$\pi_2^{-1}(0) = \mathbb{P}(Q(E) \times \mathbb{A}^1).$$

Veamos las estructuras como esquemas. Consideramos el $\mathbb{C}[t]$ -módulo $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda, t]/I$, donde

$$I := \langle 2t\lambda d_0(x_0, \dots, x_r) + q_0(x_0, \dots, x_r), \dots, 2t\lambda d_n(x_0, \dots, x_r) + q_n(x_0, \dots, x_r) \rangle.$$

Por simplicidad, notaremos $I = \langle 2t\lambda dx + [x, x] \rangle$. Las formas d_0, \dots, d_n son lineales y q_0, \dots, q_n son cuadráticas. Proviene de las coordenadas de dx y de $[x, x]$ respectivamente, r y n son tales que $\dim E^1 = r + 1$ y $\dim E^2 = n + 1$.

La estructura de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda, t]/I$ como $\mathbb{C}[t]$ -módulo es la inducida de π_2 :

$$\{((x : \lambda), t) \mid 2t\lambda dx + [x, x] = 0\} \subseteq \mathbb{P}(E^1 \times \mathbb{C}) \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{A}^1.$$

Para obtener una familia de esquemas necesitamos considerar la saturación de I respecto a t [Eis95, 15.10.6],

$$J := (I : t^\infty) = \bigcup_{k \geq 0} \{f \mid t^k f \in I\}.$$

El ideal J contiene a I y tautológicamente t no es un divisor de cero en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda, t]/J$. Se obtiene entonces que el $\mathbb{C}[t]$ -módulo $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda, t]/J$ es playo, [Bou61, I.2.4, proposición 3(ii)], luego el polinomio de Hilbert se preserva fibra a fibra, [EH00, p.126]. Calculemos la estructura de esquema en las fibras de la familia representada por J . En $t = a$ con $a \neq 0$, queda la siguiente álgebra graduada sobre $\mathbb{C} = \mathbb{C}[t]/\langle t - a \rangle$,

$$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda]/\langle 2a\lambda d(x) + [x, x] \rangle \cong \mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda]/\langle 2\lambda d(x) + [x, x] \rangle.$$

En $t = 0$, el cálculo es más complicado y necesitaremos una caracterización de J . Lo que podemos afirmar es que conocemos su estructura reducida,

$$(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda, t]/J \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C})_{\text{red}} \cong \mathbb{C}[x_0, \dots, x_r]/\langle [x, x] \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\lambda].$$

1.3.2 Teorema. *Sea J la saturación de I respecto a t , entonces*

$$J = I + \langle \sum_{i=0}^n g_i(x) \lambda d_i(x) \mid \sum_{i=0}^n g_i(x) q_i(x) = 0 \rangle.$$

Demostración. Escribamos un elemento cualquiera de I en función de t ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n g_i(x, \lambda, t)(2t\lambda d_i(x) + q_i(x)) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^r g_{ik}(x, \lambda) t^k \right) (2t\lambda d_i(x) + q_i(x)) = \\ &= \sum_{k=0}^r t^{k+1} \left(\sum_{i=0}^n g_{ik}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x) \right) + t^k \left(\sum_{i=0}^n g_{ik}(x, \lambda) q_i(x) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} t^k \left(\sum_{i=0}^n g_{i,k-1}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x) \right) + \sum_{k=1}^r t^k \left(\sum_{i=0}^n g_{ik}(x, \lambda) q_i(x) \right) + \sum_{i=0}^n g_{i,0}(x, \lambda) q_i(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} t^k \left(\sum_{i=0}^n g_{i,k-1}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x) + g_{ik}(x, \lambda) q_i(x) \right) + \sum_{i=0}^n g_{i,0}(x, \lambda) q_i(x). \end{aligned}$$

Por simplicidad en la notación, supusimos $g_{i,r+1} = 0$.

$$tf(x, \lambda, t) = t \sum_{k=0}^r t^k f_k(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{r+1} t^k f_{k-1}(x, \lambda) \in I \implies$$

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^n g_{i,k-1}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x) + g_{ik}(x, \lambda) q_i(x), \quad \sum_{i=0}^n g_{i,0}(x, \lambda) q_i(x) = 0 \implies$$

$$f(x, \lambda, t) = \sum_{k=0}^r t^k f_k(x, \lambda) = \sum_{k=0}^r t^k \sum_{i=0}^n g_{ik}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x) + g_{i,k+1}(x, \lambda) q_i(x) =$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^r t^k \left(\sum_{i=0}^n g_{ik}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x) + g_{i,k+1}(x, \lambda) q_i(x) \right) + \sum_{i=0}^n g_{i0}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x) + g_{i,1}(x, \lambda) q_i(x) = \\
\sum_{i=0}^n \sum_{k=-1}^r t^k g_{i,k+1}(x, \lambda) 2t\lambda d_i(x) + \sum_{k=0}^r t^k g_{i,k+1}(x, \lambda) q_i(x) = \\
\sum_{i=0}^n \tilde{g}_i(x, \lambda, t) (2t\lambda d_i(x) + q_i(x)) + \sum_{i=0}^n g_{i,0}(x, \lambda) 2\lambda d_i(x), \quad \sum_{i=0}^n g_{i,0}(x, \lambda) q_i(x) = 0.
\end{aligned}$$

□

1.3.3 Corolario. Si $\{q_0, \dots, q_n\}$ forman una sucesión regular,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \overline{M(E, td, [-, -])} = \mathbb{P}(Q(E) \times \mathbb{A}^1).$$

En particular el polinomio de Hilbert de $\overline{M(E, d, [-, -])}$ y de $\mathbb{P}(Q(E) \times \mathbb{A}^1)$ coinciden.

Demostración. Las relaciones de una sucesión regular, son las generadas por relaciones triviales. Esto se debe a la exactitud del complejo de Koszul. Luego todo elemento en J módulo t pertenece al ideal $\langle q_0, \dots, q_n \rangle$, entonces

$$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_r, \lambda, t]/J \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[x_0, \dots, x_r]/\langle [x, x] \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\lambda].$$

□

Veremos en el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ejemplos en los que esta condición se cumple y ejemplos en los que no.

2. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Resumen

En este capítulo se estudian las variedades de Maurer-Cartan asociadas a una GLA con $E^0 := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Son las variedades de Maurer-Cartan más sencillas. En la primer subsección explicitaremos las ecuaciones de $M(E) = Q(E)$. Para esto utilizaremos identidades combinatorias. En la otra subsección estudiaremos propiedades geométricas que se obtienen de las ecuaciones. Más precisamente las dimensiones de las variedades. Se relaciona la variedad de Maurer-Cartan con la curva de Veronese y sus osculantes.

La hipótesis $E^0 := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ se aplicará a toda el capítulo. Recordemos que en el problema original se empieza con una DGLA y con la variedad de Maurer-Cartan. Las denotaremos E y $M(E)$ respectivamente. Dado que supondremos diferencial nulo, tenemos $Q(E) = M(E)$. Es por esto, que al hablar de la variedad M estaremos hablando de la variedad proyectiva $M \subseteq \mathbb{P}^r$ y no del cono $M(E) = \{x \in E^1 \mid [x, x] = 0\}$.

Los siguientes ejemplos son ilustrativos de los resultados que demostraremos. Son los primeros ejemplos que se pueden corroborar a mano sin recurrir a ningún resultado por fuera de la teoría general.

2.0.4 Ejemplo. Sean $E^1 = S^3(\mathbb{C}^2)$ y $E^2 = S^6(\mathbb{C}^2)$. Ambos son E^0 -módulos irreducibles. Del libro [FH91] conocemos la siguiente descomposición en submódulos irreducibles (a la descomposición de un módulo en submódulos irreducibles la denominan *pletismo*):

$$S^2(E^1) \cong S^6(\mathbb{C}^2) \oplus S^2(\mathbb{C}^2).$$

Tenemos el siguiente morfismo de E^0 -módulos,

$$S^2(E^1) \xrightarrow{f} E^2.$$

Si f es no nula, por el lema de Schur, es sobreyectiva (si $f = 0$ entonces $M = \mathbb{P}E^1$). Induce un morfismo:

$$S^6(\mathbb{C}^2) \oplus S^2(\mathbb{C}^2) \xrightarrow{\pi} S^6(\mathbb{C}^2)$$

Podemos suponer que E^2 es un sumando directo de $S^2(E^1)$ y que f es la proyección sobre E^2 , en otras palabras, $\ker(f) \cong S^2(\mathbb{C}^2)$. Explicitando el pletismo (se deja al lector) se tiene que $M = \emptyset$. Si elegimos otro E^2 , $E^2 = S^2(\mathbb{C}^2)$, M queda la curva de Veronese,

$$M = \{(a : b : c : d) \in \mathbb{P}E^1 \mid b^2 = ac, ad = bc, c^2 = bd\}$$

Paramétricamente desde \mathbb{P}^1 , queda la curva racional c_3

$$M = \{(x^3 : x^2y : xy^2 : y^3) \mid (x : y) \in \mathbb{P}^1\}$$

2.0.5 Ejemplo. Analicemos otro ejemplo. Sea $E^1 = S^2(\mathbb{C}^2)$ y $E^2 = S^4(\mathbb{C}^2)$, se tiene que $S^2(E^1)$ se descompone como

$$S^2(E^1) = S^4(\mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}.$$

Luego $\ker(f) = \mathbb{C}$ y se deja al lector verificar que $M = \emptyset$. Por otro lado, si $E^2 = \mathbb{C}$,

$$M = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}E^1 \mid b^2 = ac\}.$$

Paramétricamente, es la curva racional c_2 , o sea,

$$M = \{(x^2 : xy : y^2) \mid (x : y) \in \mathbb{P}^1\}$$

2.0.6 Ejemplo. Finalmente sea $E^1 = S^1(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2$, entonces

$$S^2(E^1) = S^2(\mathbb{C}^2).$$

Si $S^2(\mathbb{C}^2) \subseteq E^2$, $\ker(f) = 0$, con lo cual $M = \emptyset$. Por otro lado, si E^2 no tiene ningún submódulo irreducible isomorfo a $S^2(\mathbb{C}^2)$, resultará que f es siempre nula, haciendo que $M = \mathbb{P}E^1 = \mathbb{P}^1$.

2.1. Cuádricas que definen $M \subseteq \mathbb{P}^r$.

En esta subsección aplicaremos el hecho que $S^2(E^1) \xrightarrow{f} E^2$ es un morfismo de módulos para explicitar las formas cuadráticas que definen M . La acción de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en f produce una serie de ecuaciones recursivas que caracterizan las cuádricas que definen M . Para resolver estas recursiones fue necesario utilizar algunas identidades combinatorias, 2.1.5. Daremos algunas caracterizaciones de estas cuádricas que nos servirán para las próximas subsecciones, 2.1.6, 2.1.9. En esta subsección se utiliza tácitamente al álgebra envolvente $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Esta idea germinará en el capítulo 3.

Empecemos analizando el caso general en donde $E^1 := S^r(\mathbb{C}^2)$ y $E^2 := S^n(\mathbb{C}^2)$ son dos representaciones irreducibles arbitrarias de dimensión finita. Recordar que la aplicación $S^2(E^1) \xrightarrow{f} E^2$ es un morfismo entre E^0 -módulos.

Por pletismo¹ se tiene

$$S^2(E^1) \cong \bigoplus_{m \geq 0} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2),$$

luego para que f sea no nula, n debe ser de la forma $n = 2r - 4m \geq 0$ (par).

Tomemos vectores de peso máximo $x_0 \in E^1$ y $w_0 \in E^2$. Estos, mediante la acción de $Y \in E^0$ generan bases $\{x_0, \dots, x_r\}$ de E^1 y $\{w_0, \dots, w_n\}$ de E^2 :

Recordemos que $E^0 = \langle X, H, Y \rangle$, donde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

y que los elementos de la base son $x_i := \frac{1}{i!} Y^i x_0$ y $x_{r+1} = x_{-1} = 0$. Ídem para E^2 .

De esta manera, el morfismo f se escribe $f = \sum_0^n q_k w_k$ donde q_k son las formas cuadráticas que definen M . Veamos qué relación hay entre ellas.

$$Y f(x_i x_j) = f(Y x_i x_j) \iff \sum_{k=0}^n q_k(x_i x_j) Y w_k = \sum_{k=0}^n q_k(Y x_i x_j) w_k \iff$$

¹Pletismo: Descomposición de un módulo en submódulos irreducibles, ver [FH91]

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_k(x_i x_j)(k+1)w_{k+1} = \sum_{k=0}^n q_k((i+1)x_{i+1}x_j + (j+1)x_i x_{j+1})w_k \iff$$

$$kq_{k-1}(x_i x_j) = (i+1)q_k(x_{i+1}x_j) + (j+1)q_k(x_i x_{j+1}), \quad 0 \leq k \leq n, 0 \leq i, j \leq r.$$

Notar que todas las cuádricas dependen de q_n , en particular, si $q_n = 0$ el resto de las formas cuadráticas q_k son cero.

Haciendo la misma cuenta pero con X se tiene la siguiente recursión:

$$(n-k)q_{k+1}(x_i x_j) = (r-i+1)q_k(x_{i-1}x_j) + (r-j+1)q_k(x_i x_{j-1}), \quad 0 \leq k \leq n, 0 \leq i, j \leq r.$$

En este caso todas las formas cuadráticas dependen de q_0 .

Con H quedan condiciones para cada cuádrica por separado, más precisamente:

$$Hf(x_i x_j) = f(Hx_i x_j) \iff \sum_{k=0}^n q_k(x_i x_j)Hw_k = \sum_{k=0}^n q_k(Hx_i x_j) \iff$$

$$\sum_{k=0}^n q_k(x_i x_j)(n-2k)w_k = \sum_{k=0}^n q_k((r-2i)x_i x_j + (r-2j)x_i x_j)w_k \iff$$

$$(n-2k)q_k(x_i x_j) = (2r-2(i+j))q_k(x_i x_j) \iff (n-2k-2r+2i+2j)q_k(x_i x_j) = 0$$

donde $0 \leq k \leq n, 0 \leq i, j \leq r$.

Notar que si $n-2r \neq 2k-2i-2j$ entonces $q_k(x_i x_j) = 0$. En otras palabras, fijada una forma cuadrática q_k y una de sus filas i , se tiene que hay a lo sumo un solo lugar no nulo, esto es pues si $n = 2r - 4m$ con k e i fijos, se tiene que $n - 2r = 2k - 2i - 2j \iff j = 2m + k - i$. En conclusión la forma cuadrática q_k tiene asociada una matriz (simétrica),

$$(q_k(x_i x_j))_{ij}$$

que es toda nula salvo en una anti-diagonal. Dicho de otro modo, $q_k(x_i x_j) = 0$ salvo quizás para $j = 2m + k - i$.

2.1.1 Corolario. Sean $E^1 = S^r(\mathbb{C}^2)$ y $E^2 = S^n(\mathbb{C}^2)$ tal que $n = 2r - 4m \geq 0$. Sea $\{x_0, \dots, x_r\}$ base de E^1 generada por su vector de peso máximo x_0 , sea w_0 vector de peso máximo de E^2 y sea q_0 forma bilineal sobre E^1 que cumple lo siguiente para $0 \leq i, j \leq r$:

$$0 = (i+1)q_0(x_{i+1}, x_j) + (j+1)q_0(x_i, x_{j+1}), \quad (2r-2i-2j-n)q_0(x_i, x_j) = 0,$$

entonces existe un único morfismo de E^0 -módulos $E^1 \otimes E^1 \xrightarrow{f} E^2$ tal que su componente sobre w_0 es q_0 . Más aún, f es simétrico si y sólo si q_0 lo es.

Demostración. Defino q_k utilizando la formula de recursión:

$$(n-k)q_{k+1}(x_i, x_j) = (r-i+1)q_k(x_{i-1}, x_j) + (r-j+1)q_k(x_i, x_{j-1}),$$

donde $0 \leq k \leq n, 0 \leq i, j \leq r$ y $x_{-1} = Xx_0 = 0$.

Notar que son simétricas si y sólo si lo es q_0 . Sea $\{w_0, \dots, w_n\}$ la base que genera w_0 en E^2 y defino $f := \sum q_k w_k$. Por construcción es morfismo E^0 -lineal y es único. \square

2.1.2. En este párrafo analizaremos más en detalle las condiciones del corolario anterior respecto a la forma cuadrática q_0 . La primer condición del corolario,

$$0 = (i + 1)q_0(x_{i+1}x_j) + (j + 1)q_0(x_ix_{j+1})$$

dice que q_0 depende únicamente de los valores $q_0(x_0x_j)$ (o análogamente de $q_0(x_ix_0)$). Esto es pues si se tienen los valores $q_0(x_0x_j)$ para $0 \leq j \leq r$, entonces se define

$$q_0(x_1x_j) := -\frac{j+1}{2}q_0(x_0x_{j+1})$$

Luego si se tiene definido hasta $q_0(x_ix_j)$ para $0 < i < r$, se definen los siguientes

$$q_0(x_{i+1}x_j) := -\frac{j+1}{i+1}q_0(x_ix_{j+1}).$$

El mismo razonamiento demuestra que si se empieza con $q_0(x_ix_0)$ también se reconstruye todo q_0 .

Analicemos ahora la segunda condición del corolario:

$$(2r - 2i - 2j - n)q_0(x_ix_j) = 0.$$

Sea $n = 2r - 4m$ entonces $(2r - 2i - 2j - n) = 0$ si y sólo si $i + j = 2m$, entonces

$$q_0(x_ix_j) \neq 0 \implies i + j = 2m.$$

Sea $\lambda := q_0(x_0x_{2m}) \neq 0$ arbitrario, entonces aplicando la recursión tenemos para $0 \leq i \leq 2m$,

$$q_0(x_ix_{2m-i}) = (-1)^i \binom{2m}{i} \lambda.$$

En particular, si $\lambda \in \mathbb{Q}$ todos los coeficientes de q_0 son también racionales, lo que implica que $q_k(x_ix_j) \in \mathbb{Q}$.

2.1.3 Corolario. Hemos caracterizado toda forma cuadrática que se extiende a un morfismo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulos entre $S^2(S^r(\mathbb{C}^2))$ y $S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$

$$q_0(x_ix_{2m-i}) = (-1)^i \binom{2m}{i} \lambda.$$

□

2.1.4 Corolario.

$$\dim_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}(S^2(S^r(\mathbb{C}^2)), S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)) = 1.$$

Demostración. Este hecho es obvio desde el punto de vista de la teoría general, pero en este caso se enfatiza el hecho de que todo morfismo depende de un solo coeficiente λ . □

Pasemos ahora a analizar las formas cuadráticas $q_1, \dots, q_{\frac{n}{2}}$.

2.1.5 Teorema. Sea $\lambda := q_0(x_0x_{2m})$ y $j := 2m + k - i$ entonces para $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$,

$$\binom{n}{k} q_k(x_i x_j) = \lambda \sum_{s=\max(0, i-k)}^{\min(2m, i)} (-1)^s \binom{2m}{s} \binom{r-s}{r-i} \binom{r-2m+s}{r-j}$$

Demostración. Empecemos haciendo algunas observaciones simples. Recordemos algunas identidades:

$$Xx_i x_j = (r-i+1)x_{i-1}x_j + (r-j+1)x_j x_{j-1}$$

$$X^s x_i = (r-i+1)(r-i+2)\dots(r-i+s)x_{i-s} = s! \binom{r-i+s}{r-i} x_{i-s}$$

$$X^k x_i x_j = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (X^l x_i) (X^{k-l} x_j)$$

Por otro lado utilizando la formula de recursión

$$(n-k+1)q_k(x_i x_j) = q_{k-1}(Xx_i x_j),$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} (n-k+1)(n-k+2)\dots(n)q_k(x_i x_j) &= (n-k+2)\dots(n)q_{k-1}(Xx_i x_j) = \\ &= (n-k+3)\dots(n)q_{k-2}(X^2 x_i x_j) = \dots = q_0(X^k x_i x_j). \end{aligned}$$

Finalmente supongamos $r > 2m$ ya que el caso $r = 2m$, o sea $n = 0$, queda sólo q_0 que ya conocemos (2.1.3). Entonces para $r > 2m$, $0 \leq i \leq r$, $n := 2r - 4m > 0$, $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$, $j := 2m + k - i$,

$$\begin{aligned} k! \binom{n}{k} q_k(x_i x_j) &= q_0(X^k x_i x_j) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} q_0(X^l x_i X^{k-l} x_j) = \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} l! \binom{r-i+l}{r-i} (k-l)! \binom{r-j+k-l}{r-j} q_0(x_{i-l} x_{j-k+l}) = \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} l! \binom{r-i+l}{r-i} (k-l)! \binom{r-j+k-l}{r-j} (-1)^{i-l} \binom{2m}{i-l} \lambda. \end{aligned}$$

Si pasamos dividiendo de la izquierda $k!$, el combinatorio $\binom{k}{l}$ se simplifica. Por último haciendo un cambio de variables $s = i - l$ se tiene ($0 \leq s \leq 2m$):

$$\binom{n}{k} q_k(x_i x_j) = \lambda \sum_{s=i-k}^i (-1)^s \binom{2m}{s} \binom{r-s}{r-i} \binom{r-2m+s}{r-j}$$

Por convención, los combinatorios que no tengan sentido son cero. □

2.1.6 Proposición. $q_k(x_i x_j) = q_{n-k}(x_{r-i} x_{r-j})$.

Demostración. Recordemos las tres condiciones obtenidas del hecho de que f es un morfismo de E^0 -módulos.

$$\begin{aligned} kq_{k-1}(x_i x_j) &= (i+1)q_k(x_{i+1} x_j) + (j+1)q_k(x_i x_{j+1}) \\ (n-k)q_{k+1}(x_i x_j) &= (r-i+1)q_k(x_{i-1} x_j) + (r-j+1)q_k(x_i x_{j-1}) \\ (n-2k)q_k(x_i x_j) &= (2r-2(i+j))q_k(x_i x_j) \end{aligned}$$

Si en la segunda recursión hacemos el cambio de variables $k' = n-k$, $i' = r-i$, $j' = r-j$ obtenemos para $0 \leq k' \leq \frac{n}{2}$, $0 \leq i', j' \leq r$:

$$k'q_{k'-1}(x_{i'} x_{j'}) = (i'+1)q_{k'}(x_{i'+1} x_{j'}) + (j'+1)q_{k'}(x_{i'} x_{j'+1}).$$

Si llamamos $a_k(i, j) := q_k(x_i x_j)$ y $b_k(i, j) := q_{n-k}(x_{r-i} x_{r-j})$ las ecuaciones recursivas que deben cumplir a_k y b_k son exactamente las mismas $0 \leq i, j \leq r$, $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned} ka_{k-1}(i, j) &= (i+1)a_k(i+1, j) + (j+1)a_k(i, j+1). \\ kb_{k-1}(i, j) &= (i+1)b_k(i+1, j) + (j+1)b_k(i, j+1). \end{aligned}$$

Luego si sus datos iniciales coinciden, $a_{\frac{n}{2}} = b_{\frac{n}{2}}$, se obtiene la igualdad $q_k(x_i x_j) = q_{n-k}(x_{r-i} x_{r-j})$ ya que las recursiones que las definen son las mismas,

$$\begin{aligned} a_{\frac{n}{2}}(i, 2m + \frac{n}{2} - i) &= q_{\frac{n}{2}}(x_i x_{2m + \frac{n}{2} - i}) = q_{\frac{n}{2}}(x_i x_{2m+r-2m-i}) = q_{\frac{n}{2}}(x_i x_{r-i}) = \\ &= q_{\frac{n}{2}}(x_{r-i} x_i) = b_{\frac{n}{2}}(i, r-i) = b_{\frac{n}{2}}(i, 2m + \frac{n}{2} - i). \end{aligned}$$

□

2.1.7 Corolario. Se tiene $\text{rk}(q_k) = \text{rk}(q_{n-k}) \leq 2m + k + 1$ para $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Demostración. La matriz de cada q_k posee a lo sumo $2m + k + 1$ de sus coordenadas no nulas. Estas aparecen de forma anti-diagonal, $(i+j = 2m+k)$, haciendo que filas no-nulas sean linealmente independientes. □

2.1.8 Ejemplo. Notar que la igualdad no vale. Por ejemplo para $r = 6$ y $n = 4$ (o sea, $m = 2$) se tiene que $q_2(x_1 x_5) = q_2(x_5 x_1) = 0$ haciendo que su rango sea menor a $2 + 4 + 1$. En este caso se tiene $\text{rk}(q_0) = \text{rk}(q_4) = 5$, $\text{rk}(q_1) = \text{rk}(q_3) = 6$ y $\text{rk}(q_2) = 5 < 7$.

2.1.9 Lema. Si $\lambda = q_0(x_0 x_{2m}) \neq 0$ entonces

$$q_k(x_0 x_{2m+k}) = q_{n-k}(x_r x_{r-2m}) \neq 0$$

con $0 \leq k \leq \frac{n}{2} = r - 2m$. Más aún, si $m = 0$,

$$q_k(x_i x_{k-i}) = q_{n-k}(x_{r-i} x_{r-k+i}) \neq 0.$$

Demostración. Se deduce de 2.1.5 la fórmula

$$q_k(x_0 x_{2m+k}) = \lambda \frac{\binom{r-2m}{k}}{\binom{n}{k}} \neq 0.$$

De 2.1.6 tenemos $q_{n-k}(x_r x_{r-2m}) = q_k(x_0 x_{2m+k}) \neq 0$. Análogamente si $m = 0$, se tiene

$$q_{n-k}(x_{r-i} x_{r-k+i}) = q_k(x_i x_{k-i}) = \lambda \frac{\binom{r}{r-i} \binom{r}{r-k+i}}{\binom{n}{k}} \neq 0.$$

□

2.2. Propiedades geométricas de $M \subseteq \mathbb{P}^r$.

Utilizando las ecuaciones explícitas de M daremos una cota superior para su dimensión, 2.2.1. También demostraremos un caso particular en donde M es intersección completa, 2.2.2. De la teoría del pletismo geométrico de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ podremos relacionar M con la geometría de la curva de Veronese, 2.2.4. De allí, obtendremos una cota inferior de la dimensión de M , 2.2.7. Finalizando la subsección daremos un cuadro (calculado con computadora) donde se ven las dimensiones de distintas M . Como se podrá observar se ha podido demostrar dimensiones que presentan un “patrón” determinado. En el caso general se verán comportamientos erráticos. Como corolario de este capítulo hemos explicitado las ecuaciones de algunas variedades tangenciales de la curva de Veronese, 2.2.10.

Fijado m , notemos

$$b_i^k(m) = b_i^k := q_k(x_i x_{2m+k-i}).$$

Dado que la matriz asociada a la forma cuadrática q_k es simétrica tenemos:

$$b_i^k = b_{2m+k-i}^k.$$

Si $x = a_0 x_0 + \dots + a_r x_r$

$$q_k(x.x) = \sum_{i=0}^{2m+k} q_k(x_i x_{2m+k-i}) a_i a_{2m+k-i} = \sum_{i=0}^{2m+k} b_i^k a_i a_{2m+k-i}.$$

$$q_{n-k}(x.x) = \sum_{i=0}^{2m+k} q_{n-k}(x_{r-i} x_{r-2m-k+i}) a_{r-i} a_{r-2m-k+i} = \sum_{i=0}^{2m+k} b_i^k a_{r-i} a_{r-2m-k+i}.$$

Calculemos la derivada de $q_k(x.x)$ respecto a a_i que nos servirá luego

$$\frac{\partial q_k(x.x)}{\partial a_i} = b_i^k a_{2m+k-i} + b_{2m+k-i}^k a_{2m+k-i} = 2b_i^k a_{2m+k-i}.$$

2.2.1 Proposición. *Sea $S^2(S^r(\mathbb{C}^2)) \xrightarrow{f \neq 0} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$ entonces la variedad proyectiva $M \subseteq \mathbb{P}^r$ asociada a f tiene $\dim(M) < 2m$. Si $m = 0$, $M = \emptyset$.*

Demostración. Ya que conocemos explícitamente las ecuaciones que definen a M , calculemos la dimensión de los espacios tangentes. Más precisamente, veamos que el rango de la aplicación $E^1 \xrightarrow{2[x, -]} E^2$ es mayor a $\frac{n}{2}$. La matriz Jacobiana de la aplicación $f(x) = [x.x] = (q_0(x.x), \dots, q_n(x.x))$ es, para $x = a_0 x_0 + \dots + a_r x_r \in E^1$ genérico, la matriz en $\mathbb{C}^{n+1 \times r+1}$ asociada a la aplicación lineal $y \rightarrow 2[x.y]$:

$$\begin{pmatrix} b_0^0 a_{2m} & b_1^0 a_{2m-1} & \dots & b_{2m}^0 a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0^1 a_{2m+1} & \dots & \dots & \dots & b_{2m+1}^1 a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0^2 a_{2m+2} & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{2m+2}^2 a_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \\ b_0^{r-2m} a_r & b_1^{r-2m} a_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_r^{r-2m} a_0 \\ 0 & b_0^{r-2m-1} a_r & b_1^{r-2m-1} a_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{r-1}^{r-2m-1} a_1 \\ 0 & 0 & b_0^{r-2m-2} a_r & b_1^{r-2m-2} a_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{r-2}^{r-2m-2} a_2 \\ & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0^0 a_r & b_1^0 a_{r-1} & \dots & b_{2m}^0 a_{r-2m} \end{pmatrix}$$

Dado que $b_0^* \neq 0$ (2.1.9) las últimas $\frac{n}{2} + 1$ filas son linealmente independientes, luego el rango de la matriz es mayor o igual a $\frac{n}{2} + 1 = r - 2m + 1$, entonces $\dim(T_x M) \leq 2m$. Si $m = 0$ el rango es $r + 1$. \square

2.2.2 Teorema. Si r es impar y $m = \frac{r-1}{2}$ entonces $\dim(M) = r - 3$ y su grado es 8.

Demostración. Ya sabemos que $I(M) = \langle q_0, q_1, q_2 \rangle$ donde

$$\begin{aligned} q_0(a_0, \dots, a_r) &= b_0^0 a_0 a_{r-1} + b_1^0 a_1 a_{r-2} + \dots + b_{r-1}^0 a_{r-1} a_0 \\ q_1(a_0, \dots, a_r) &= b_0^1 a_0 a_r + b_1^1 a_1 a_{r-1} + \dots + b_r^1 a_r a_0 \\ q_2(a_0, \dots, a_r) &= b_0^0 a_r a_1 + b_1^0 a_{r-1} a_2 + \dots + b_{r-1}^0 a_1 a_r \end{aligned}$$

Los coeficientes de las formas cuadráticas cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} b_0^0 &= b_{r-1}^0, b_1^0 = b_{r-2}^0, \dots, b_{m-1}^0 = b_{m+1}^0, \\ b_0^1 &= b_r^1, b_1^1 = b_{r-1}^1, \dots, b_{m-1}^1 = b_{m+2}^1, b_m^1 = b_{m+1}^1. \end{aligned}$$

Para ver que la dimensión es $r - 3$ se calcula el rango de la matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} b_0^0 a_{r-1} & b_1^0 a_{r-2} & \dots & b_{r-1}^0 a_0 & 0 \\ b_0^1 a_r & b_1^1 a_{r-1} & \dots & b_{r-1}^1 a_1 & b_r^1 a_0 \\ 0 & b_0^0 a_r & \dots & b_{r-2}^0 a_2 & b_{r-1}^0 a_1 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que $b_0^* \neq 0$ (2.1.9). El menor formado por las dos primeras columnas y la última, es una hipersuperficie propia ya que aparece el monomio $a_0 a_r a_{r-1}$. En su complemento, M es suave.

$$\det \begin{pmatrix} b_0^0 a_{r-1} & b_1^0 a_{r-2} & 0 \\ b_0^1 a_r & b_1^1 a_{r-1} & b_0^1 a_0 \\ 0 & b_0^0 a_r & b_0^0 a_1 \end{pmatrix} = b_0^0 b_1^1 b_0^0 a_1 a_{r-1} a_{r-1} - b_0^0 b_0^0 b_1^1 a_0 a_r a_{r-1} - b_0^0 b_1^1 b_0^0 a_1 a_r a_{r-2}.$$

Notar que los puntos $(a_0 : 0 : \dots : 0), (0 : \dots : 0 : a_r) \in M$ son singulares. \square

2.2.3 Notación. Recordemos brevemente las definiciones de la curva de Veronese $c_r \subseteq \mathbb{P}^r$ y sus variedades osculantes $T^p c_r$. La curva de Veronese puede darse de forma paramétrica sobre un abierto afín como

$$t \xrightarrow{c_r} (1, t, t^2, \dots, t^r).$$

Su variedad tangencial, denotada $T^1 c_r$, podemos definirla como

$$(t, \lambda_1) \longrightarrow c_r + \lambda_1 c_r'.$$

Depende de dos parámetros. Uno indica el punto de la curva y otro un vector tangente a ese punto. En general su variedad p -osculante, $T^p c_r$ viene dada por

$$(t, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \longrightarrow c_r + \lambda_1 c_r' + \dots + \lambda_p c_r^{(p)}.$$

En cada punto de la curva, se apoya un hiperplano de dimensión p .

Hemos dado una parametrización afín de estas variedades, pero las consideraremos en \mathbb{P}^r . Las dimensiones de c_r y de $T^p c_r$ son las esperadas $(p + 1)$.

2.2.4 Proposición. *La variedad M que define $S^2 S^r(\mathbb{C}^2) \xrightarrow{f \neq 0} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$ contiene a $T^{m-1}c_r$ y no contiene a $T^m c_r$. En particular $\dim(M) \geq m$.*

Demostración. Recordemos un hecho de la teoría de representaciones y del pletismo geométrico:

$$\{\text{formas cuadráticas en } \mathbb{P}^r \cong \mathbb{P}S^r(\mathbb{C}^2)\} \cong S^2(S^r(\mathbb{C}^2)^\vee) \cong S^{2r}(\mathbb{C}^{2\vee}) \oplus I(c_r)_2.$$

$$I(T^{p-1}c_r)_2 \cong S^{2r-4p}(\mathbb{C}^{2\vee}) \oplus I(T^p c_r)_2 \implies I(c_r)_2 \supseteq I(T^1 c_r)_2 \supseteq \dots \supseteq 0.$$

Como vale $I(M)_2 \cong S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)^\vee \cong S^{2r-4m}(\mathbb{C}^{2\vee})$, podemos elegir p para que valga

$$S^{2r-4m}(\mathbb{C}^{2\vee}) \subseteq I(T^p c_r)_2 \implies I(M)_2 \subseteq I(T^p c_r)_2 \implies I(M) \subseteq I(T^p c_r).$$

Por ejemplo, si $m \geq 1$ podemos elegir $p = 0$ para que valga $c_r \subseteq M$. En general,

$$\begin{cases} I(M)_2 \oplus I(T^m c_r)_2 = I(T^{m-1} c_r)_2 \implies T^{m-1} c_r \subseteq M, & T^m c_r \not\subseteq M & \text{si } m < \lfloor \frac{r}{2} \rfloor. \\ I(M)_2 = I(T^{m-1} c_r)_2 \implies T^{m-1} c_r \subseteq M, & T^m c_r \not\subseteq M & \text{si } m = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor. \end{cases}$$

□

2.2.5 Corolario. *Sea f un morfismo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulos sobreyectivo*

$$S^2(S^r(\mathbb{C}^2)) \xrightarrow{f} \bigoplus_{m>p} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2),$$

entonces $T^p c_r \subseteq M$, de hecho $I(M)_2 = I(T^p c_r)_2$. Si $p = 0$ tenemos igualdad $c_r = M$.

Demostración. Se tiene que f se descompone como $f = (f_{p+1}, \dots, f_s)$ donde $s = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ y cada $f_m : S^2(S^r(\mathbb{C}^2)) \rightarrow S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$ es un morfismo de módulos no nulo. La variedad M asociada a f es

$$\{a \mid f(aa) = 0\} = \{a \mid (f_{p+1}(aa), \dots, f_s(aa)) = 0\} = \bigcap_{m=p+1}^s \{a \mid f_m(aa) = 0\} = \bigcap_{m=p+1}^s M_m.$$

De la demostración de 2.2.4 se tiene $I(M)_2 = I(T^p c_r)_2$. Si $p = 0$ obtenemos la igualdad ya que c_r está generada en grado dos. □

2.2.6 Ejemplo. En el caso, r es par y $m = \frac{r}{2}$, hay exactamente una sola cuádrica q_0 cuya matriz (diagonal de rango $r+1$) tiene coeficientes $\lambda(-1)^i \binom{r}{i}$. De hecho es la única cuádrica en \mathbb{P}^r invariante por $PGL_2(\mathbb{C})$. Para $r = 4$ esta cuádrica es bien conocida, [Har92, 10.12]. La variedad $M = \mathbb{P}\{q_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^r$ es una cuádrica de rango máximo e irreducible ya que el único polinomio que la define (de grado dos) no es un producto de dos lineales.

$$\begin{aligned} 0 = q_0(xx) &\iff \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \binom{r}{i} a_i a_{r-i} = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{r}{i} a_i a_{r-i} = \\ &= \binom{r}{0} a_0 a_r - \binom{r}{1} a_1 a_{r-1} + \dots + (-1)^m \binom{r}{m} a_m^2 = 0. \end{aligned}$$

Al ser una hipersuperficie, posee $\dim(M) = r - 1$, luego de 2.2.4 obtenemos

$$\begin{cases} T^{\frac{r}{2}-1}c_r \subsetneq M & \text{si } r > 2. \\ c_2 = M & \text{si } r = 2. \end{cases}$$

Con este ejemplo concluimos que no vale la igualdad en 2.2.5.

2.2.7 Corolario. Sea $S^2(S^r(\mathbb{C}^2)) \xrightarrow{f} \bigoplus_{m>p} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$ morfismo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulos sobreyectivo. Entonces

$$p + 1 \leq \dim(M) \leq 2p + 1.$$

Demostración. Vimos en 2.2.5 que $p + 1 \leq \dim(M)$. Para ver la otra desigualdad utilizaremos 2.2.1. La variedad M asociada a f es

$$\{a \mid f(aa) = 0\} = \{a \mid (f_{p+1}(aa), \dots, f_s(aa)) = 0\} = \bigcap_{m=p+1}^s \{a \mid f_m(aa) = 0\} = \bigcap_{m=p+1}^s M_m.$$

Dado que $\dim(M_m) < 2m$, se tiene que $\dim(M) < 2(p + 1)$. □

2.2.8 Ejemplo. Hemos calculado con computadora la dimensión de M_m :

$m \setminus r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	<u>1</u>										
2			<u>3</u>	<u>2</u>	3	2	2	2	2	2	3
3					<u>5</u>	<u>4</u>	3	3	5	3	3
4							<u>7</u>	<u>6</u>	5	4	4
5									<u>9</u>	<u>8</u>	7
6											<u>11</u>

También hemos calculado el grado:

$m \setminus r$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>12</u>
2			<u>2</u>	<u>8</u>	5	12	14	16	18	20	22
3					<u>2</u>	<u>8</u>	32	21	12	27	30
4							<u>2</u>	<u>8</u>	32	128	36
5									<u>2</u>	<u>8</u>	32
6											<u>2</u>

Los números subrayados son datos que conocemos en general, 2.2.6,2.2.2.

2.2.9 Ejemplo. Hemos calculado con computadora la dimensión de la variedad M en el caso $I(M)_2 = I(T^p c_r)_2$:

	\mathbb{P}^4	\mathbb{P}^5	\mathbb{P}^6	\mathbb{P}^7	\mathbb{P}^8	\mathbb{P}^9	\mathbb{P}^{10}	\mathbb{P}^{11}	\mathbb{P}^{12}	\mathbb{P}^{13}
$I(T^1 c_r)_2$	<u>3</u>	<u>2</u>	2	2	2	2	2	2	2	2
$I(T^2 c_r)_2$			<u>5</u>	<u>4</u>	3	3	3	3	3	3
$I(T^3 c_r)_2$					<u>7</u>	<u>6</u>	4	4	4	4
$I(T^4 c_r)_2$							<u>9</u>	<u>8</u>	6	5
$I(T^5 c_r)_2$									<u>11</u>	<u>10</u>

Las dimensiones subrayadas son aquellas en las cuales el E^2 elegido es irreducible, con lo cual es información de la tabla anterior. Notar que el patrón se rompe en \mathbb{P}^{12} en la variedad 4-osculante pues $\dim(M) = 6$ y no 5. Concluimos que ésta no está generada en grado dos.

2.2.10 Ejemplos. Si M es tal que $I(M)_2 = I(T^1 c_5)_2$ hemos calculado con computadora que $I(M)$ es primo y $\dim M = 2$. Luego conocemos explícitamente las ecuaciones de $T^1 c_5$. Ídem para $T^1 c_6$, $T^1 c_7$ y $T^1 c_8$. Tienen grados 8, 10, 12 y 14.

$$I(T^1 c_5) = \langle x_5 x_0 - 3x_4 x_1 + 2x_3 x_2, x_4 x_0 - 4x_3 x_1 + 3x_2^2, x_5 x_1 - 4x_4 x_2 + 3x_3^2 \rangle.$$

$$I(T^1 c_6) = \langle x_4 x_0 - 4x_3 x_1 + 3x_2^2, x_6 x_0 - 9x_4 x_2 + 8x_3^2, x_6 x_2 - 4x_5 x_3 + 3x_4^2, \\ x_5 x_0 - 3x_4 x_1 + 2x_3 x_2, x_6 x_1 - 3x_5 x_2 + 2x_4 x_3, x_6 x_0 - 6x_5 x_1 + 15x_4 x_2 - 10x_3^2 \rangle.$$

$$I(T^1 c_7) = \langle x_7 x_3 - 4x_6 x_4 + 3x_5^2, 2x_7 x_3 + x_6 x_4 - 3x_5^2, x_7 x_2 + 3x_6 x_3 - 4x_5 x_4, x_3 x_0 - x_2 x_1, \\ x_4 x_0 - 4x_3 x_1 + 3x_2^2, x_5 x_0 + 3x_4 x_1 - 4x_3 x_2, x_7 x_4 - x_6 x_5, 2x_4 x_0 + x_3 x_1 - 3x_2^2, \\ x_5 x_0 - 3x_4 x_1 + 2x_3 x_2, x_6 x_0 - 6x_5 x_1 + 15x_4 x_2 - 10x_3^2, x_6 x_0 - x_5 x_1 - 5x_4 x_2 + 5x_3^2, \\ x_6 x_0 + 8x_5 x_1 + x_4 x_2 - 10x_3^2, x_7 x_0 + 5x_6 x_1 - 21x_5 x_2 + 15x_4 x_3, x_7 x_0 + 23x_6 x_1 + 51x_5 x_2 - 75x_4 x_3, \\ x_7 x_1 + 8x_6 x_2 + x_5 x_3 - 10x_4^2, x_7 x_1 - x_6 x_2 - 5x_5 x_3 + 5x_4^2, x_7 x_1 - 6x_6 x_2 + 15x_5 x_3 - 10x_4^2, \\ x_7 x_2 - 3x_6 x_3 + 2x_5 x_4, x_7 x_0 - 5x_6 x_1 + 9x_5 x_2 - 5x_4 x_3, x_2 x_0 - x_1^2, x_7 x_5 - x_6^2 \rangle.$$

$$I(T^1 c_8) = \langle x_4 x_0 - 4x_3 x_1 + 3x_2^2, x_8 x_2 - 6x_7 x_3 + 15x_6 x_4 - 10x_5^2, x_8 x_4 - 4x_7 x_5 + 3x_6^2, \\ x_8 x_1 + 2x_7 x_2 - 12x_6 x_3 + 9x_5 x_4, x_8 x_3 - 3x_7 x_4 + 2x_6 x_5, 3x_6 x_0 - 4x_5 x_1 - 11x_4 x_2 + 12x_3^2, \\ x_5 x_0 - 3x_4 x_1 + 2x_3 x_2, x_7 x_0 + 2x_6 x_1 - 12x_5 x_2 + 9x_4 x_3, x_7 x_0 - 5x_6 x_1 + 9x_5 x_2 - 5x_4 x_3, \\ x_8 x_1 - 5x_7 x_2 + 9x_6 x_3 - 5x_5 x_4, x_6 x_0 - 6x_5 x_1 + 15x_4 x_2 - 10x_3^2, \\ x_8 x_0 + 12x_7 x_1 - 22x_6 x_2 - 36x_5 x_3 + 45x_4^2, 3x_8 x_2 - 4x_7 x_3 - 11x_6 x_4 + 12x_5^2, \\ x_8 x_0 - 2x_7 x_1 - 8x_6 x_2 + 34x_5 x_3 - 25x_4^2, x_8 x_0 - 8x_7 x_1 + 28x_6 x_2 - 56x_5 x_3 + 35x_4^2 \rangle.$$

3. \mathfrak{g} simple.

Resumen

Este capítulo junto con el capítulo 6 son los más importantes de esta tesis doctoral. Estudiaremos las variedades de Maurer-Cartan que aparecen en una GLA con E^0 simple. A cada subvariedad $X \subseteq \mathbb{P}E^1$ le asociaremos una variedad de Maurer-Cartan $M_X = \{x \mid q(x) = 0 \ \forall q \in I(G.X)_2\}$. Veremos que bajo ciertas hipótesis las variedades de Maurer-Cartan son de la forma M_y , las asociadas a un punto. En la primera y segunda subsección daremos algunas observaciones y definiciones. Estudiaremos en detalle qué sucede con los pesos de las representaciones E^1 y E^2 . También analizaremos al grupo exponencial y a su correspondiente acción. Esto nos servirá en las siguientes subsecciones *Estructura de M_X* y *Estructura de M_y* . La subsección *Estructura de M_y* es la más técnica de todas. Es por esto que se empieza por el caso más fácil y luego se generaliza. Se demuestra que M_y son variedades irreducibles. En la última subsección se estudian los ideales de algunas variedades de Maurer-Cartan. Las relacionadas a la estructura de pesos de la representación E^1 . Se obtiene un resultado que relaciona la estructura de pesos con el grado de anulamiento de las ecuaciones sobre algunas curvas de Veronese. La herramienta fundamental de todo este capítulo es el uso sistemático del álgebra envolvente $U\mathfrak{g}$.

3.1. Preliminares.

En esta subsección se tratarán las definiciones básicas, se trabajaran con pesos y finalmente daremos una observación sobre el ideal de algunas variedades de Maurer-Cartan, 3.1.7. Podríamos decir que lo importante de esta subsección son las definiciones. La variedad de Maurer-Cartan asociada a una variedad invariante se define en 3.1.6. En el lema 3.1.2 hemos generalizado el siguiente hecho de la teoría de representaciones de álgebra de Lie simples: sea $w \in W$ su vector de peso máximo entonces el conjunto $\{Y_{\beta_1}^{m_1} \dots Y_{\beta_k}^{m_k} w\}$ genera linealmente a W . Nuestro lema afirma que fijado cualquier $w \in W$ no nulo, existen elementos del álgebra D_1, \dots, D_r tal que el conjunto $\{D_1^{m_1} \dots D_r^{m_r} w\}$ genera linealmente a W . Si bien este lema es bastante sencillo, es el primer paso en la utilización de $U\mathfrak{g}$.

Necesitaremos recordar algunos conceptos sobre la teoría general de álgebras de Lie. Como referencia puede utilizarse [Wei94, 7.3,7.4] y el libro de [Ser01, VII]. Dada \mathfrak{g} un álgebra de Lie, tenemos su álgebra envolvente universal $U\mathfrak{g}$. Se tiene que $\mathfrak{g} \subseteq U\mathfrak{g}$ como subespacio. El ideal que genera \mathfrak{g} en $U\mathfrak{g}$ se llama ideal de aumentación denotado \mathfrak{J} . Es un \mathfrak{g} -módulo (al igual que $U\mathfrak{g}$). Una manera de definir el ideal de aumentación es tomando el morfismo de álgebras asociativas $\varepsilon : U\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varepsilon(\mathfrak{g}) = 0$, luego $\mathfrak{J} := \ker \varepsilon$.

El functor $\text{der}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, -)$ es representado por \mathfrak{J} :

$$\text{hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{J}, V) \cong \text{der}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, V)$$

donde el isomorfismo es la restricción, si $\phi : \mathfrak{J} \rightarrow V$ es morfismo de \mathfrak{g} -módulos, $D_{\phi} := \phi|_{\mathfrak{g}}$ es una derivación. La inversa de este isomorfismo se obtiene del hecho que $\mathfrak{J} = U\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g}$ y $U\mathfrak{g}$ es asociativa, luego $\phi_D(u \cdot a) = u \cdot D(a)$. De esta ecuación se obtiene $U\mathfrak{g} \cdot \ker(D) \subseteq \ker(\phi_D)$. Desde este punto de vista, las derivaciones internas son aquellas ϕ que se extienden a todo $U\mathfrak{g}$ y quedan definidas por $\phi(1) = v$.

Si bien la imagen de una derivación D no es un \mathfrak{g} -módulo, la de su morfismo asociado ϕ sí lo es y están relacionadas de la siguiente manera:

$$\text{im}(\phi) = \phi(\mathfrak{J}) = \phi(U\mathfrak{g}.\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g}.\phi(\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g}.D(\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g}.\text{im}(D)$$

3.1.1 Notación. Supongamos que \mathfrak{g} es simple y sea $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ base del sistema de raíces. Toda raíz β puede escribirse como $\beta = \pm \sum m_i \alpha_i$ con $m_i \in \mathbb{N}_0$. Llamemos β_1, \dots, β_k a las raíces positivas. Para cada raíz positiva β , sean $X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$, $Y_\beta \in \mathfrak{g}^{-\beta}$ y $H_\beta \in \mathfrak{h}$ tal que $[X_\beta, Y_\beta] = H_\beta$. Recordar que si W es irreducible y tiene vector de peso máximo w , entonces $Y_{\beta_1}^{m_1} \dots Y_{\beta_k}^{m_k} w$, $m_i \in \mathbb{N}_0$ genera linealmente W , [Ser01, p.57]. Veremos que cualquier $w \in W$ lo genera con monomios de la forma

$$D_1^{m_1} \dots D_r^{m_r} w, \quad m_i \in \mathbb{N}_0, \quad D_i \in \{X_{\beta_1}, Y_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_k}, Y_{\beta_k}\}.$$

Dado $w \in W^\mu$, notaremos por $|w| := \mu$, el peso de w , luego

$$|Y_{\beta_1}^{m_1} \dots Y_{\beta_n}^{m_n} X_{\beta_1}^{m_{n+1}} \dots X_{\beta_n}^{m_{2n}} w| = \mu - \sum_{i=1}^n m_i \beta_i + \sum_{i=1}^n m_{n+i} \beta_i, \quad m_i \in \mathbb{N}_0.$$

3.1.2 Lema. Sea W una representación de dimensión finita. Dado $w \in W$ existen D_1, \dots, D_r ,

$$D_i \in \{X_{\beta_1}, Y_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_k}, Y_{\beta_k}\},$$

tal que $\{D_1^{m_1} \dots D_r^{m_r} w\}_{m_i \geq 0}$ genera $U\mathfrak{g}w$.

Demostración. Sean $p_1, \dots, p_s \in U\mathfrak{g}w$ los vectores de peso máximo de la representación $U\mathfrak{g}w$ y sean $P_1, \dots, P_s \in U\mathfrak{g}$ los polinomios (no conmutativos) tales que $P_i w = p_i$. Dado que vale $XY - YX = H$ en $U\mathfrak{g}$ podemos suponer que en los monomios de P_i no aparece H . Sea $D_1 = Y_{\beta_1}, \dots, D_k = Y_{\beta_k}$ y definamos D_{k+1}, \dots, D_r . Sea D_{k+1} la primer variable del primer monomio de P_1 , D_{k+2} la segunda variable del primer monomio de P_1 , finalmente D_r es la última variable del último monomio de P_s .

Notar entonces que con todos los polinomios formados con los monomios de la forma $D_1^{m_1} \dots D_r^{m_r} w$, obtenemos en particular los polinomios

$$Y_{\beta_1}^{m_1} \dots Y_{\beta_k}^{m_k} P_i w = Y_{\beta_1}^{m_1} \dots Y_{\beta_k}^{m_k} p_i$$

que generan toda la representación $U\mathfrak{g}p_i$. □

3.1.3. Lo siguiente está extraído de [Hum78, sección 13]. Sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ las raíces simples de \mathfrak{g} y sea $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ las raíces positivas.

Tomando base dual (respecto al producto interno de \mathfrak{h}^\vee), las raíces simples dan lugar a los pesos simples $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Estos pesos generan un lattice que contiene al lattice de raíces. Por ejemplo, en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ el lattice de raíces es $2\mathbb{Z}$ y el de pesos es \mathbb{Z} .

Si ω es un peso no-negativo, este genera una representación irreducible de dimensión finita, donde los pesos de la representación son de la forma $\omega - \sum m_i \alpha_i$ con $m_i \in \mathbb{N}_0$ ([Ser01, p.57]).

Dado que en general, las α_i no son pesos positivos, las β_i tampoco.

Por ejemplo, en el caso $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, si fijamos α_1 y α_2 como raíces simples,

$$\omega_1 = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{3}, \quad \omega_2 = \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2}{3}.$$

Todas las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ de peso máximo $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ quedan determinadas por el vector (m_1, m_2) donde $m_1, m_2 \geq 0$ ([Hum78, sección 21.2]).

La formula de pesos simples se obtiene invirtiendo la matriz de Cartan, con lo cual el único denominador que hace falta es su determinante.

3.1.4 Notación. Sea V una representación de \mathfrak{g} , sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan fija y sea λ un peso de \mathfrak{g} , i.e. $\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$. Denotaremos V^λ al subespacio vectorial de V de peso λ ,

$$V^\lambda := \{v \in V \mid a.v = \lambda(a)v \quad \forall a \in \mathfrak{h}\}.$$

También utilizaremos la siguiente notación. Dado que estamos trabajando con representaciones de dimensión finita de un álgebra simple, denotaremos $cl(W)$ a la clase, salvo isomorfismo, de la representación irreducible W . Dos representaciones irreducibles W, W' son isomorfas si y sólo si $cl(W) = cl(W')$.

3.1.5 Notación. Dado que trabajaremos con la representación $S^2(V)$ introduciremos la siguiente notación, si $V_1, V_2 \subseteq V$ son dos subespacios lineales:

$$V_1.V_2 = V_1V_2 := V_1 \otimes V_2 \bigoplus V_2 \otimes V_1$$

Luego si $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ con $V_i = V_i^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_i^{\lambda_{r_s}}$ tenemos

$$S^2(V) = \bigoplus_{i,j,k,l} V_k^{\lambda_i} V_l^{\lambda_j}$$

En particular los espacios estables son de la forma

$$S^2(V)^\gamma = \bigoplus_{\lambda_i + \lambda_j = \gamma} V_k^{\lambda_i} V_l^{\lambda_j}$$

Si $W \subseteq S^2(V)$ es una subrepresentación irreducible y $\dim_{\mathbb{C}}(W^\gamma) > 1$, entonces W^γ no es necesariamente suma de $V_k^{\lambda_i} V_l^{\lambda_j}$, de hecho vale:

$$S^2(V)^\gamma = \bigoplus_{\lambda_i + \lambda_j = \gamma} V_k^{\lambda_i} V_l^{\lambda_j} = \bigoplus_i W_i^\gamma$$

donde $W_i \subseteq S^2(V)$ son subrepresentaciones irreducibles.

De ahora en adelante trabajaremos con V irreducible de vector de peso máximo $p \in V$.

$$S^2(V)^\gamma = \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V^\alpha V^\beta = \bigoplus_i W_i^\gamma$$

Cada W_i posee un único (salvo múltiplos) vector de peso máximo $w_i \in W_i$ y si suponemos $cl(W_i) \neq cl(W_j)$, estos pesos son todos distintos. Sea $\gamma \in \mathfrak{h}^\vee$ el peso máximo de W_i , entonces llamemos $W_\gamma := W_i$. No confundir W_γ con $V(\gamma)$ la representación irreducible asociada a γ . La diferencia es que W_γ puede ser 0, pero $V(\gamma)$ nunca lo es.

Suponer que $cl(W_i) \neq cl(W_j)$ es muy fuerte porque es común que esto pase, por ejemplo, si $\mathfrak{g} = B_2$,

$$S^2(V(1,1)) = V(2,2) \oplus V(1,2) \oplus V(0,2)^{\oplus 2}.$$

Por otro lado, en el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, si V es irreducible, siempre vale $cl(W_i) \neq cl(W_j)$.

Dado que V es irreducible tiene un único peso máximo ν , luego los pesos de V son de la forma $\nu - \beta$ con β una combinación positiva de raíces simples. Luego los pesos de $S^2(V)$ son de la forma

$$(\nu - \beta) + (\nu - \beta') = 2\nu - \tilde{\beta}, \quad \tilde{\beta} = \sum m_i \alpha_i, \quad m_i \in \mathbb{N}_0.$$

El orden entre los pesos que se usa en general es un orden parcial definido como

$$\lambda \leq \lambda' \iff \lambda' - \lambda = \sum m_i \alpha_i, \quad m_i \in \mathbb{N}_0.$$

Como los pesos que aparecen en $S^2(V)$ son bastante específicos, el orden entre ellos es simplemente el orden lexicográfico:

$$2\nu - \sum m_i \alpha_i \leq 2\nu - \sum m'_i \alpha_i \iff m'_i \leq m_i.$$

Entonces si $\gamma \not\leq \lambda_0$

$$S^2(V)^\gamma \cap W_{\lambda_0} = W_{\lambda_0}^\gamma = 0, \quad \dim_{\mathbb{C}}(S^2(V)^\gamma \cap W_\gamma) = \dim_{\mathbb{C}}(W_\gamma^\gamma) = 1.$$

Obtenemos entonces la siguiente caracterización:

$$S^2(V)^\gamma = \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V^\alpha V^\beta = \bigoplus_{\lambda \geq \gamma} W_\lambda^\gamma.$$

Si $p \in V$ es el vector de peso máximo ν , tenemos que pp es vector de peso máximo en $S^2(V)$ y es el de peso mayor 2ν . En particular, $W_{2\nu}$ aparece con multiplicidad uno ([Pro07, p.345]) y

$$U\mathfrak{g}(pp) = W_{2\nu}.$$

3.1.6 Definición. Definamos el siguiente morfismo que utilizaremos en toda el capítulo,

$$\Delta : V \longrightarrow S^2(V), \quad \Delta(x) = xx.$$

Para cada subvariedad proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}V$, llamaremos $C = C(X) \subseteq V$ al cono asociado a la variedad proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}V$. Denotamos $S_X \subseteq S^2(V)$ al submódulo $S_X := U\mathfrak{g}\Delta(C)$,

$$S_X = U\mathfrak{g}\Delta(C) = \{Q(xx) \mid \langle x \rangle \in X, Q \in U\mathfrak{g}\} \subseteq S^2(V).$$

Notaremos $M_X := \mathbb{P}\Delta^{-1}(S_X)$ a la variedad proyectiva de Maurer-Cartan asociada a X . Esta definición trivializa el hecho que toda variedad de Maurer-Cartan en una GLA, es de la forma M_X para alguna subvariedad proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}V$.

Por simplicidad en la notación habrá casos en que utilizaremos M_C y S_C donde $C \subseteq V$ es un cono. Por ejemplo, en la observación 3.1.7 utilizamos esta notación.

Notar que vale

$$X \subseteq X' \implies M_X \subseteq M_{X'}.$$

Llamemos G al grupo asociado a \mathfrak{g} . Como V es un \mathfrak{g} -módulo, el grupo G actúa en V y de hecho actúa en $\mathbb{P}V$,

$$g.\langle v \rangle := \langle g.v \rangle.$$

Dada la subvariedad $X \subseteq \mathbb{P}V$ y $C \subseteq V$ su cono asociado, se tiene la caracterización

$$\langle \Delta(G.C) \rangle = \langle G.\Delta(C) \rangle = U\mathfrak{g}\Delta(C) = S_X.$$

La primera igualdad se obtiene pues Δ es G -invariante, y la segunda igualdad se obtiene mirando las dos inclusiones:

$$\Delta(C) \subseteq U\mathfrak{g}\Delta(C) \implies \langle G.\Delta(C) \rangle \subseteq U\mathfrak{g}\Delta(C).$$

$$\Delta(C) \subseteq \langle G.\Delta(C) \rangle \implies U\mathfrak{g}\Delta(C) \subseteq \langle G.\Delta(C) \rangle.$$

Notemos entonces que $M_X = M_{G.X}$ ya que $S_X = S_{G.X}$.

El teorema respecto a las variedades M_X dirá que contienen a $G.X$ y que sus ideales coinciden en grado dos. Esto extiende el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. También que bajo ciertas hipótesis son irreducibles. Antes de enunciar este teorema tendremos que analizar más en profundidad cada concepto.

3.1.7 Observación. Hagamos una pequeña observación geométrica respecto al ideal de estas variedades. Fijada una representación W \mathfrak{g} -isomorfa a su doble dual, se tiene una biyección entre submódulos de W y de W^\vee . Esta biyección viene dada por el anulador. Más precisamente, a cada $U \subseteq W$ le corresponde $U^\circ \subseteq W^\vee$, luego fijado un \mathfrak{g} -isomorfismo entre W y $W^{\vee\vee}$ se define la inversa, que es nuevamente el anulador.

Recordemos la definición del anulador:

$$U^\circ = \{\phi \in W^\vee \mid \phi(U) = 0\}.$$

Es una subrepresentación de W^\vee , ya que $(a.\phi)(u) = \phi(a.u) = 0$ pues $a.u \in U$.

Notar que vale

$$U_1 \subseteq U_2 \implies U_2^\circ \subseteq U_1^\circ.$$

Sea V un módulo de dimensión finita. Luego es \mathfrak{g} -isomorfo a su doble dual ($x \rightarrow ev_x$). Se tiene entonces que $S^2(V)$ es \mathfrak{g} -isomorfo a su doble dual $S^2(V)^{\vee\vee}$:

$$S^2(V)^{\vee\vee} \cong S^2(V^\vee)^\vee \cong S^2(V^{\vee\vee}) \cong S^2(V).$$

En conclusión hay una biyección, dada por el anulador, entre subrepresentaciones de $S^2(V)$ y de $S^2(V^\vee)$. Esta biyección invierte el orden.

Sea $S \subseteq S^2(V)$ una subrepresentación y tomemos la variedad proyectiva

$$M := \mathbb{P}\Delta^{-1}(S) \subseteq \mathbb{P}V.$$

El ideal (graduado) de esta variedad $I(M) \subseteq S^*(V^\vee)$ está formada por todos los polinomios que se anulan sobre M , en particular $I(M)_2$ puede pensarse como las cuádricas que contienen a la variedad $\mathbb{P}\Delta^{-1}(S)$, o las formas cuadráticas que se anulan sobre $\Delta^{-1}(S)$.

Supongamos que $S = \langle \Delta(C) \rangle$ donde $C \subseteq V$ es el cono de alguna variedad proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}V$, entonces

$$I(M)_2 = \{q \mid q(\Delta^{-1}(S)) = 0\} = \{q \mid q(xx) = 0, \forall xx \in S\} = \{q \mid q(S) = 0\} = S^\circ.$$

En conclusión, $I(M)$ es el ideal generado en grado dos por S° . Para el caso en que S no es de la forma $\langle \Delta(C) \rangle$, podemos reemplazar S por S_M , i.e. $I(M)_2 = (S_M)^\circ$.

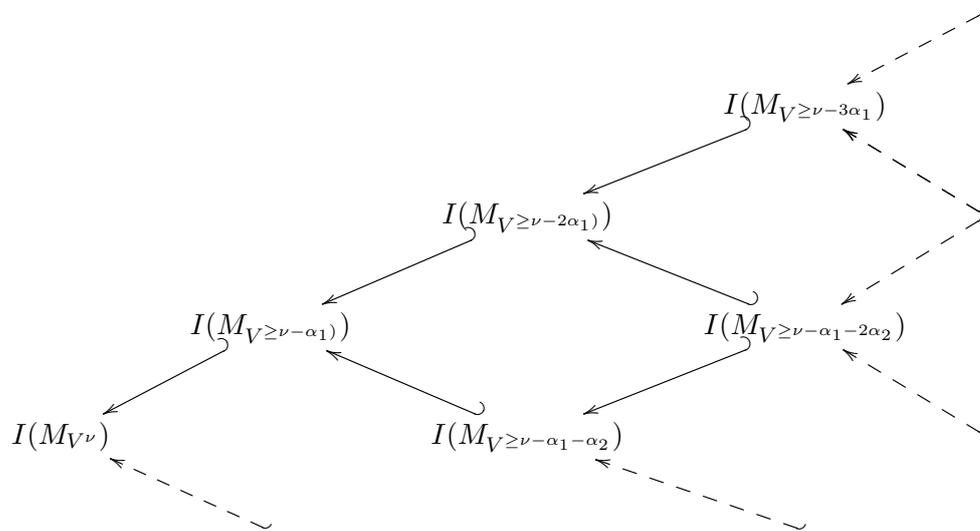
Por ejemplo el ideal de M_{V^ν} en grado dos corresponde a $(W_{2\nu})^\circ$, o sea, corresponde a poner todos los submódulos de $S^2(V^\vee)$ salvo el de peso 2ν . Es máximo en el orden.

Notemos que los ideales de las variedades $M_{V \geq \mu}$ forman un árbol (mediante la inclusión) en $S^2(V^\vee)$.

Si el álgebra tiene rango uno:

$$I(M_{V^r}) \supseteq I(M_{V \geq r-2}) \supseteq \dots \supseteq I(M_{V \geq r-2p}) \dots$$

Si el álgebra tiene rango dos:



Notar que en grado dos, no dejan ningún espacio libre, por ejemplo en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, el cociente de dos sucesivos distintos, da irreducible

$$I(M_{V \geq r-2p})_2 / I(M_{V \geq r-2p-2})_2 \cong W_{p+1} \cong S^{p+1}(\mathbb{C}^2).$$

3.2. Sobre la acción exponencial.

Analizaremos la acción exponencial en relación al álgebra envolvente. El problema técnico que se presenta en esta subsección es que el álgebra de Lie no es nilpotente, con lo cual las series formales e^D poseen infinitos términos no nulos. Hemos solucionado este hecho con el lema 3.2.5. Para cada $u \in W$ arbitrario y D_1, \dots, D_r particulares es posible encontrar (N_1, \dots, N_r) suficientemente grandes tal que $D_1^{N_1+k_1} \dots D_r^{N_r+k_r} u = 0$. Este hecho le dará a la acción exponencial una faceta de finitud que necesitaremos.

Se recomienda leer el párrafo 3.2.6 donde se da una observación general de las variedades M_X . Básicamente que contienen siempre a la órbita cerrada y que la órbita cerrada es una variedad de Maurer-Cartan. En el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ esto se traduce en que la curva de Veronese es una variedad de Maurer-Cartan y que está incluida en cualquier otra variedad de Maurer-Cartan.

3.2.1 Notación. Fijadas $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{g}$ y $m \in \mathbb{N}_0^r$, denotamos

$$D^m := D_1^{m_1} \dots D_r^{m_r} \in U\mathfrak{g}.$$

3.2.2 Lema.

$$\frac{D^n(yy)}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{D^i y}{i!} \frac{D^j y}{j!}$$

donde $k! = k_1!k_2! \dots k_r!$.

Demostración. Dada $D_1 \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$D_1^k(ab) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (D_1^l a)(D_1^{k-l} b) \iff \frac{D_1^k(ab)}{k!} = \sum_{p+q=k} \frac{D_1^p a}{p!} \frac{D_1^q b}{q!}.$$

Iterando esta formula se obtiene el resultado. □

3.2.3 Notación. Fijadas $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{g}$ denotamos

$$e^D := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m}{m!} = \sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} \frac{D_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{D_r^{m_r}}{m_r!} \in \widehat{U\mathfrak{g}}.$$

Notar que e^D no es un polinomio sino una serie. Más específicamente, es un producto de series, o visto como operadores, es la composición:

$$e^D = e^{D_1} \dots e^{D_r} \in \widehat{U\mathfrak{g}}.$$

Cabe aclarar que los elementos de la forma e^D dan lugar a un grupo multiplicativo dentro de $\widehat{U\mathfrak{g}}$. La inversa de e^{D_1} es e^{-D_1} y el neutro es $1 \in \mathbb{C} \subseteq U\mathfrak{g}$. Si V es una representación de \mathfrak{g} y $D_1 \in \mathfrak{g}$ la acción sobre $v \in V$ es la acción exponencial,

$$e^{D_1} v = \exp(ad_{D_1})v = Ad(\exp(D_1))v.$$

Finalmente hemos definido un grupo en $\widehat{U\mathfrak{g}}$ y una acción sobre V .

Para trabajar con polinomios y no con series (o sea, con elementos de $U\mathfrak{g}$), hagamos la siguiente definición. Dado $\ell \in \mathbb{N}_0^r$ denotamos

$$e_\ell^D := \sum_{m=0}^{\ell} \frac{D^m}{m!}.$$

Notar entonces que $e_\infty^D = e^D$.

3.2.4 Lema. Sea $D_1 \in \mathfrak{g}$ y $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $D_1^\ell a = D_1^\ell b = 0$, entonces

$$e_{2\ell}^{D_1}(ab) = (e_\ell^{D_1}a)(e_\ell^{D_1}b).$$

En particular, si $D = D_1 \dots D_r$ y para cada D_i existe un ℓ_i tal que $D_i^{\ell_i}(e^{D_1 \dots D_{i-1}}a) = D_i^{\ell_i}(e^{D_1 \dots D_{i-1}}b) = 0$, tenemos $e^D(ab) = (e^D a)(e^D b)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} e_{2\ell}^{D_1}(ab) &= \sum_{m=0}^{2\ell} \frac{D_1^m(ab)}{m!} = \sum_{m=0}^{2\ell} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (D_1^k a)(D_1^{m-k} b) = \\ &= \sum_{k=0}^{2\ell} \sum_{m=k}^{2\ell} \frac{D_1^k a}{k!} \frac{D_1^{m-k} b}{(m-k)!} = \sum_{k=0}^{2\ell} \sum_{l=0}^{2\ell-k} \frac{D_1^k a}{k!} \frac{D_1^l b}{l!} = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{D_1^k a}{k!} \sum_{l=0}^{\ell} \frac{D_1^l b}{l!} = (e_\ell^{D_1}a)(e_\ell^{D_1}b). \end{aligned}$$

□

3.2.5 Lema. Sea W una representación de dimensión finita y D_1, \dots, D_r ,

$$D_i \in \{X_{\beta_1}, Y_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_k}, Y_{\beta_k}\}.$$

Dado $u \in W$ existe $N \in \mathbb{N}_0^r$ tal que

$$D^{N+s}u = 0, \quad \forall s \geq 0.$$

Demostración. Supongamos que $u \in W^\mu$ y $D_1 = X_\beta$, entonces $D_1^m u \in W^{\mu+m\beta}$. Si $D_1 = Y_\beta$, $D_1^m u \in W^{\mu-m\beta}$. Dado que W es de dimensión finita, posee finitos pesos, luego existe ℓ tal que $D_1^\ell u = 0$.

Más en general, si $u \in W$ sin un peso definido, $u = \sum u_i$ donde cada u_i tiene peso μ_i . Entonces para cada i existe un ℓ_i tal que $D_1^{\ell_i} u_i = 0$, luego si tomamos el máximo de los ℓ_i , se tiene que existe ℓ tal que $D_1^\ell u = 0$.

Por último, veamos que existe $N \in \mathbb{N}_0^r$ tal que $D^{N+s}u = 0$ para $s \geq 0$ multi-índice.

Sea N_1 tal que $D_1^{N_1} u = 0$. Sea N_2 el máximo de los N_{2i} tales que $D_2^{N_{2i}}(D_1^i u) = 0$ y $0 \leq i \leq N_1$. En general, sea N_s tal que $D_s^{N_s}(D_{s-1}^{i_{s-1}} \dots D_1^{i_1} u) = 0$ para todo $0 \leq i_j \leq N_j$. □

3.2.6. Sabemos de [FH91, p.388, claim 23.52], que la órbita del vector de peso máximo p es la única órbita cerrada. Por otro lado, la clausura de cualquier órbita es unión de órbitas de dimensión menor ([Pro07, p.555]) y siempre aparece una órbita cerrada ([Muk03, p.162, corolario 5.5]).

También, de [Pro07, 6.6], o de [Lic82], sabemos que la órbita cerrada está generada en grado dos, con lo cual la órbita cerrada es una variedad de Maurer-Cartan.

Resumiendo, tenemos que dentro de cualquier variedad M_X aparece $M_{(p)}$. En otras palabras, $W_{2\nu} \subseteq S_X$.

3.3. Estructura de M_X .

En la primer parte demostraremos el teorema 3.3.3 que tiene a 3.3.5 como corolario. Este dice que si X es una variedad irreducible y el módulo S_X posee todos sus sumandos simples distintos entonces la variedad de Maurer-Cartan M_X es de la forma M_y donde y es un punto genérico de X . Seguido a esto tenemos 3.3.6 donde damos dos propiedades de las variedades M_X , que contienen a $G.X$ y que sus ideales en grado dos coinciden $I(M_X)_2 = I(G.X)_2$. Obtuvimos algunos corolarios, entre ellos una cota para la cantidad de componentes irreducibles de M_X , 3.3.7 y obtuvimos que una órbita genérica no está contenida en ninguna cuádrica, 3.3.9.

3.3.1 Lema. *Si $w = w_1 + \dots + w_k \in W$ con $w_i \in W_i$ no nulo y W_i subrepresentación irreducible de W , $cl(W_i) \neq cl(W_j)$, entonces*

$$U\mathfrak{g}w = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

Demostración. Sea p_i vector de peso máximo de W_i de peso ω_i . Como $cl(W_i) \neq cl(W_j)$ los pesos $\omega_i \in \mathfrak{h}^\vee$ son todos distintos ([Ser01, p.58]).

Caso uno: Supongamos que $w = p_1 + \dots + p_k$ suma de vectores de peso máximo. Como los pesos son distintos, existe $P \in U\mathfrak{g}$ tal que $Pw = Pp_i$ para algún índice i . Por otro lado como $Pp_i \neq 0$, genera todo W_i y con lo cual existe $Q \in U\mathfrak{g}$ tal que $QPw = p_i$, entonces se sigue por inducción para $w - p_i$.

Caso dos: Si $w = w_1 + \dots + w_k$ existe $P \in U\mathfrak{g}$ tal que Pw es suma de vectores de peso máximo. Se sigue del caso uno. \square

3.3.2 Lema. *Si $w \in W^{\oplus n}$ con W irreducible y w no nulo, entonces*

$$U\mathfrak{g}w \cong W$$

Demostración. Hay un subespacio de dimensión n formado por vectores de peso máximo. Si w tiene peso máximo, genera una representación isomorfa a W . Si w no tiene peso máximo, existe $P \in U\mathfrak{g}$ tal que Pw tiene peso máximo. Como $U\mathfrak{g}w$ es irreducible, hay un único vector de peso máximo. \square

3.3.3 Teorema. Si $X \subseteq \mathbb{P}V$ variedad irreducible, existe $\langle y \rangle \in X$ genérico tal que

$$U\mathfrak{g}(yy) = S_{\langle y \rangle} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda, \quad \text{donde} \quad S_X = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda^{\oplus n_\lambda}.$$

En particular si $cl(W_\lambda) \neq cl(W_{\lambda'})$, vale $S_X = S_{\langle y \rangle}$. Luego $M_X = M_{\langle y \rangle}$.

Demostración. Denotemos por $C \subseteq V$ al cono irreducible asociado a $X \subseteq \mathbb{P}V$. Para cada $W_\lambda \subseteq S_X$ tomamos la proyección $S^2(V) \xrightarrow{\pi_\lambda} W_\lambda$ y sea

$$H_\lambda := \{\pi_\lambda = 0\} = \ker \pi_\lambda.$$

Notemos que $S_X \not\subseteq H_\lambda$. Como $S_X = U\mathfrak{g}\Delta(C)$ y H_λ es un módulo, tenemos $\Delta(C) \not\subseteq H_\lambda$.

Si denotamos por $H := \bigcup_\lambda H_\lambda$, se tiene que $\Delta(C) \setminus H$ es denso en $\Delta(C)$ y luego existe $yy \notin H$, $y \in C$.

$$yy = \sum a_\lambda w_\lambda, \quad a_\lambda = \pi_\lambda(yy) \neq 0 \implies U\mathfrak{g}(yy) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda.$$

La última implicación se obtiene de 3.3.1 y de 3.3.2. \square

3.3.4 Corolario. Sea $X \subseteq \mathbb{P}V$ variedad irreducible donde V es un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo simple. Entonces M_X es de la forma $M_{\langle y \rangle}$ para algún $\langle y \rangle \in X$ genérico. Esto incluye las variedades c_r y $T^p c_r$ estudiadas previamente.

Demostración. Todo módulo irreducible es de la forma $S^r(\mathbb{C}^2)$ y $S^2(S^r(\mathbb{C}^2))$ se descompone como suma de submódulos simples distintos. \square

3.3.5 Corolario. Sea $X \subseteq \mathbb{P}V$ variedad invariante irreducible tal que S_X tiene todos sus submódulos simples distintos, entonces $M_X = M_{\langle y \rangle}$ con $\langle y \rangle \in X$ genérico. \square

Llamemos G al grupo de Lie asociado al álgebra de Lie simple \mathfrak{g} , sea $X \subseteq \mathbb{P}V$ y sea $C \subseteq V$ su cono afín asociado.

$$\langle x \rangle \in X \implies xx \in \Delta(C) \subseteq S_X \implies X \subseteq M_X \implies G.X \subseteq M_X.$$

Esto da una cota inferior de $\dim(M_X)$. Ya en el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, hay ejemplos en los que se alcanza y ejemplos en los que no.

En lo que sigue veremos que la inclusión a nivel de ideales se vuelve igualdad en grados. En el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ hay ejemplos conocidos sobre esto.

3.3.6 Teorema. Sea $X \subseteq \mathbb{P}V$ entonces $G.X \subseteq M_X$, $I(M_X)_2 = I(G.X)_2$.

Demostración. Sea $C \subseteq V$ el cono afín asociado a $X \subseteq \mathbb{P}V$.

$$\Delta(C) \subseteq S_X \implies C \subseteq \Delta^{-1}(S_X) \implies X \subseteq M_X \implies G.X \subseteq M_X.$$

Sea $q \in I(G.X)_2$ y sea b su forma bilineal asociada.

$$0 = q(gu) = 2b(gu, gu) \implies b \in \langle \Delta(G.C) \rangle^\circ = (S_X)^\circ = I(M_X)_2.$$

La última igualdad se debe a 3.1.7. \square

3.3.7 Corolario. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}V$ variedad invariante donde X_1, \dots, X_n son sus componentes irreducibles entonces*

$$S_X = S_{X_1} + \dots + S_{X_n}.$$

Si X y sus componentes están generadas en grado dos, tenemos que la escritura es irredundante. En particular la máxima cantidad k tal que $S_X = S_1 + \dots + S_k$ donde $S_i \not\subseteq S_j$, acota la cantidad de componentes irreducibles generadas en grado dos.

Demostración. Vale $I(X)_2 = I(X_1)_2 \cap \dots \cap I(X_n)_2$ y aplicando anulador tenemos $S_X = S_{X_1} + \dots + S_{X_n}$ (ver 3.1.7). Notar que cualquier componente irreducible de una variedad G -invariante es G -invariante. Sea $y \in X_1$ entonces

$$\overline{G \cdot y} = (\overline{G \cdot y} \cap X_1) \cup \dots \cup (\overline{G \cdot y} \cap X_n).$$

Como $\overline{G \cdot y} \cap X_1 \neq \emptyset$ y la órbita es irreducible debe valer $\overline{G \cdot y} \subseteq X_1$. □

Más adelante veremos que las variedades $M_{\langle y \rangle}$ son irreducibles, luego si $Z \subseteq M_X$ es una componente irreducible, tenemos $M_Z \subseteq M_{M_X} = M_X$. Supongamos que S_X tiene todos sus submódulos simples distintos y sea $y \in Z$ genérico tal que $M_Z = M_{\langle y \rangle}$ entonces, dado que M_Z resulta irreducible y que $Z \subseteq M_Z$ también lo es, resulta $Z = M_Z$. En otras palabras la variedad M_X y sus componentes irreducibles son variedades de Maurer-Cartan, y por lo tanto, están generadas en grado dos.

3.3.8 Ejemplo. El siguiente ejemplo es trivial y fundamental al mismo tiempo. Tomemos $X = \mathbb{P}V$, luego sabemos que $X \subseteq M_X$, o sea $M_X = \mathbb{P}V$. Supongamos que los submódulos simples de $S^2(V)$ son todos distintos, entonces para un $\langle y \rangle \in \mathbb{P}V$ genérico, se tiene $\mathbb{P}V = M_{\langle y \rangle}$. En conclusión, para $\langle y \rangle \in \mathbb{P}V$ genérico, vale $M_{\langle y \rangle} = \mathbb{P}V$.

3.3.9 Corolario. *Sea $\langle y \rangle \in \mathbb{P}V$ un elemento genérico y supongamos que $S^2(V)$ posee todos sus submódulos simples distintos, entonces*

$$I(\overline{G \cdot \langle y \rangle})_2 = 0.$$

En otras palabras, una órbita genérica no está contenida en ninguna cuádrica.

Demostración. Sabemos que $I(\overline{G \cdot \langle y \rangle})_2 = I(M_{\langle y \rangle})_2$ y como $\langle y \rangle$ es genérico, $M_{\langle y \rangle} = \mathbb{P}V$. □

3.4. Estructura de M_y .

Esta subsección es muy técnica y debido a esto tiene muchos comentarios y observaciones. El objetivo principal es demostrar que M_y es irreducible. La herramienta para esto es el álgebra envolvente y todos los lemas que la involucran. El recorrido es el siguiente: en el teorema 3.4.7 se demuestra que la variedad M_y es isomorfa a $\{ABA^t \mid \text{rk}(ABA^t) \leq 1\} = \phi(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}$ donde A y B son multi-matrices con B cataléctica, $\phi(M) = AMA^t$ es un morfismo lineal y \mathcal{V} es una variedad de Veronese. La subsección comienza definiendo y trabajando con estos conceptos pero para matrices. Se define la variedad de Veronese, la variedad de matrices catalécticas, etc. Luego se define la noción de multi-matriz y su estructura algebraica (suma, producto, traspuesta). Se definen multi-matrices catalécticas y variedades de Veronese en estos espacios. Una vez terminado esto, se tiene el teorema antes mencionado, 3.4.7. Siguiendo, hemos hecho una caracterización del espacio $\phi(\text{Cat})$, 3.4.10, que nos sirve para entender que su intersección con \mathcal{V} es irreducible, 3.4.11. Con estos pasos hemos demostrado que M_y es irreducible.

3.4.1 Notación. Dentro del espacio de matrices simétricas de tamaño $N + 1 \times N + 1$, trabajaremos con variedades de Veronese y sus secantes.

El espacio proyectivo ambiente, que denotaremos \mathcal{S} , tiene dimensión $\frac{N(N+3)}{2}$,

$$\mathcal{S} := \{\langle A \mid A^t = A, A \in \mathbb{C}^{N+1 \times N+1} \} \cong \mathbb{P}S^2(\mathbb{C}^{N+1}).$$

La definición matricial de la variedad de Veronese es

$$\mathcal{V} := \{\langle vv^t \mid \langle v^t \rangle = (v_0 : \dots : v_N)\} \subseteq \mathcal{S}.$$

La variedad \mathcal{V} es determinantal² dada por las matrices simétricas de rango 1. Su ℓ -secante, viene dada por las matrices simétricas de rango ℓ ([Kan99] o [Eis88, proposición 4.4]). En particular, si $\text{rk}(v_1v_1^t + \dots + v_\ell v_\ell^t) \leq 1$ existe v tal que $vv^t = v_1v_1^t + \dots + v_\ell v_\ell^t$.

Diremos que una matriz $B \in \mathbb{C}^{N+1 \times N+1}$ es cataléctica si $(B)_{ij} = b_{i+j}$ para $b = (b_0, \dots, b_{2N})$. Una matriz cataléctica tiene rango ℓ si y sólo si $\langle B \rangle$ pertenece a la variedad ℓ -secante de la curva de Veronese ([Har92, p.103, proposición 9.7]). En particular, la curva de Veronese en \mathbb{P}^{2N} se puede definir dentro del espacio de matrices catalécticas como

$$\mathcal{C} := \{\langle B \mid \text{rk}(B) \leq 1, (B)_{ij} = b_{i+j}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Notar que la variedad lineal de matrices catalécticas es igual a la variedad $(N+1)$ -secante de \mathcal{C} . Llamemos Cat al espacio lineal de matrices catalécticas, luego toda matriz cataléctica B puede escribirse como $B = \sum \lambda_i c_i c_i^t$.

$$\text{Cat} := \{\langle B \mid B_{ij} = b_{i+j}, \langle b^t \rangle = (b_0 : \dots : b_{2N})\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Vale $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$, pues las matrices catalécticas de rango uno se escriben como elementos de la variedad de Veronese, $\langle B \rangle = \langle cc^t \rangle$ con $c \in \tilde{\mathcal{C}}$, la curva de Veronese en \mathbb{P}^N .

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(y^N : xy^{N-1} : \dots : x^N) \in \mathbb{P}^N \mid (x : y) \in \mathbb{P}^1\}.$$

²Una variedad determinantal es una variedad en el espacio de matrices dada por cotas en sus rangos.

La curva $\tilde{\mathcal{C}}$ es la imagen de la inmersión de \mathbb{P}^1 inducida por el line-bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N)$. Son todos los monomios de grado N evaluados en $(x : y) \in \mathbb{P}^1$.

Utilizando la matriz de Van der Monde se obtiene que $N + 1$ puntos distintos de $\tilde{\mathcal{C}}$ son linealmente independientes.

Para cada $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N+1}$ definimos $\phi(M) = \phi_A(M) = AMA^t$. Se induce un endomorfismo en \mathcal{S} y vale trivialmente $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \phi(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}$.

3.4.2 Proposición. *Existen matrices A tal que $\phi_A(\text{Cat}) \cap \mathcal{V} = \phi_A(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $I_d \in \mathbb{C}^{d \times d}$ la matriz identidad y sea $U \in \mathbb{C}^{\ell \times N+1}$ y $B \in \text{Cat}$ tal que

$$U = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \implies UBU^t = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que B_0 es una matriz cataléctica $d \times d$, entonces

$$\text{rk}(UBU^t) = 1 \iff \text{rk}(B_0) = 1 \iff \langle B_0 \rangle = \langle cc^t \rangle \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}\mathbb{C}^{d \times d}.$$

Finalmente, $\phi_U(\text{Cat}) \cap \mathcal{V} = \phi_U(\mathcal{C})$.

Esto mismo puede hacerse para matrices de la forma $A = XU$ donde $X \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ es inversible. También para matrices de la forma $A = XUY$ donde Y es inversible y tal que $\phi_Y(\text{Cat}) = \text{Cat}$. Notemos que como ϕ_Y es inversible, preserva el rango de las matrices, luego debe mandar \mathcal{C} en \mathcal{C} . Es por esto que el grupo proyectivo de las Y que sirven es una representación del grupo $PGL_2(\mathbb{C})$, los automorfismos de \mathbb{P}^1 [FH91, p.154]. \square

En lo que sigue generalizaremos lo previo para multi-matrices y multi-vectores. Será fundamental para caracterizar $M_{\langle y \rangle}$. La noción de multi-matriz y multi-vector es un caso particular de la definición de matriz dada en [Bou70, II, §10].

3.4.3 Notación. Para cada $N = (N_1, \dots, N_r) \in \mathbb{N}_0^r$ denotemos

$$\underline{N} := \{(i_1, \dots, i_r) \mid 0 \leq i_k \leq N_k\}.$$

Llamaremos multi-vector a una función $v : \underline{N} \rightarrow \mathbb{C}$, equivalentemente a un elemento de $\mathbb{C}^{\underline{N}}$. Llamaremos multi-matriz a un elemento $A \in \mathbb{C}^{\underline{N}' \times \underline{N}}$.

Para cada $i, j \in \mathbb{N}_0^r$ notaremos por $A_{ij} := A(i, j)$ a las coordenadas de la multi-matriz A .

El espacio de multi-matrices tiene definidas operaciones de suma, producto y traspuesta. La suma de multi-matrices está definida si son del mismo tamaño y el producto AA' está definido si $A \in \mathbb{C}^{\underline{N}' \times \underline{N}}$, $A' \in \mathbb{C}^{\underline{N} \times \underline{N}''}$.

$$(A + A')_{ij} = A_{ij} + A'_{ij}, \quad (AA')_{ij} = \sum_{k \geq 0} A_{ik} A'_{kj}, \quad (A^t)_{ij} = A_{ji}$$

La notación $\sum_{k \geq 0}^N$ significa $\sum_{k \in \underline{N}}$. Dado que un multi-vector es una multi-matriz en $\mathbb{C}^{\underline{N} \times \underline{0}}$, tenemos definida la operación vv^t , tal que $(vv^t)_{ij} = v_i v_j$.

Dentro del espacio proyectivo de multi-matrices cuadradas $\mathbb{P}\mathbb{C}^{\underline{N} \times \underline{N}}$ definimos el espacio proyectivo \mathcal{S} de multi-matrices simétricas, i.e. $A = A^t$. Dentro de \mathcal{S} definimos la variedad de Veronese,

$$\mathcal{V} := \{\langle vv^t \rangle \mid v \in \mathbb{C}^{\underline{N}}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Diremos que $B \in \mathbb{C}^{\underline{N} \times \underline{N}}$ es cataléctica si $B_{ij} = b_{i+j}$ donde $b \in \mathbb{C}^{2\underline{N}}$ es un multi-vector. Llamaremos Cat al espacio proyectivo de multi-matrices catalécticas

$$Cat := \{\langle B \rangle \mid B_{ij} = b_{i+j}, b \in \mathbb{C}^{2\underline{N}}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Sea $\tilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{P}\mathbb{C}^{\underline{N}}$ la variedad proyectiva parametrizada por $(\mathbb{P}^1)^{\times r}$, formada por los multi-vectores $\langle c \rangle$ de la forma

$$c(i) := c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots c_r^{i_r}, \quad (c_1, \dots, c_r) \in (\mathbb{C}^*)^r.$$

Sea \mathcal{C} la subvariedad de $Cat \cap \mathcal{V}$ definida por

$$\mathcal{C} := \{\langle cc^t \rangle \mid \langle c \rangle \in \tilde{\mathcal{C}}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Todo punto \underline{N} -secante a \mathcal{C} es una multi-matriz cataléctica $B = \sum_{i \in \underline{N}} \lambda_i c_i c_i^t$ donde $\langle c_i \rangle \in \tilde{\mathcal{C}}$. Aprovechando el producto de multi-matrices podemos escribirla $B = C \lambda \lambda^t C^t$, donde en la columna i de C aparece el multi-vector c_i y la multi-matriz λ es diagonal, i.e. $\lambda_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Cuando las dimensiones de Cat y de la variedad \underline{N} -secante de \mathcal{C} coinciden, por ejemplo si $\tilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{P}\mathbb{C}^{\underline{N}}$ es no degenerada, tenemos que toda multi-matriz cataléctica es secante a \mathcal{C} . Lo que vale en general es $Cat \cap \mathcal{V} = \mathcal{C}$.

Si identificamos una multi-matriz $A \in \mathbb{C}^{\underline{N}' \times \underline{N}}$ con un morfismo lineal se tiene definido $\text{rk}(A)$. En particular, diremos $\text{rk}(A) \leq 1$ si todos los menores 2×2 de A son singulares. Un menor 2×2 es de la forma

$$\begin{pmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{pmatrix}, \quad i, j \in \underline{N}', \quad k, l \in \underline{N}.$$

Si A es simétrica, i.e. $A = A^t$, es fácil ver que $\text{rk}(A) \leq 1 \iff \langle A \rangle \in \mathcal{V}$.

3.4.4. Fijemos $r, N \in \mathbb{N}_0^r$ y consideramos r productos de \mathbb{P}^1 con sus respectivas proyecciones,

$$(\mathbb{P}^1)^{\times r} = \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1,$$

Sobre $(\mathbb{P}^1)^{\times r}$ consideramos el haz inversible [Gro67, 21.3.2.4]

$$\mathcal{L} := \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N_1) \otimes \dots \otimes \pi_r^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N_r).$$

Una sección global de \mathcal{L} es un polinomio formado con monomios de la forma

$$y_1^{N_1 - i_1} x_1^{i_1} \dots y_r^{N_r - i_r} x_r^{i_r}.$$

En otras palabras, las coordenadas de una sección de \mathcal{L} es un multi-vector,

$$s \in H^0((\mathbb{P}^1)^{\times r}, \mathcal{L}) \iff s = \sum_{i \geq 0} s_i y_1^{N_1 - i_1} x_1^{i_1} \dots y_r^{N_r - i_r} x_r^{i_r} \iff s \in \mathbb{C}^N.$$

Notar que el álgebra de funciones regulares de $(\mathbb{P}^1)^{\times r}$ es

$$S^*(\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1) = S^*(\mathbb{P}^1) \otimes \dots \otimes S^*(\mathbb{P}^1).$$

Este álgebra está multi-graduada y en grado N , tenemos justamente a \mathbb{C}^N .

Tenemos la inmersión inducida por el sistema lineal completo de \mathcal{L} ,

$$(\mathbb{P}^1)^{\times r} \xrightarrow{i} \mathbb{P}H^0((\mathbb{P}^1)^{\times r}, \mathcal{L}).$$

En el abierto $(\mathbb{C}^*)^r$ son todos los monomios de la forma $c_1^{i_1} \dots c_r^{i_r} =: c^i$ con $i \leq N$.

También tenemos la inmersión de Veronese,

$$\mathbb{P}H^0((\mathbb{P}^1)^{\times r}, \mathcal{L}) \xrightarrow{v_2} \mathbb{P}S^2(H^0((\mathbb{P}^1)^{\times r}, \mathcal{L})).$$

Finalmente tenemos la siguiente traducción, $\text{im } i = \tilde{\mathcal{C}}$, $\mathcal{S} = \mathbb{P}S^2(H^0((\mathbb{P}^1)^{\times r}, \mathcal{L}))$, $\text{im } v_2 = \mathcal{V}$, $\text{im } v_2 i = \mathcal{C}$ y Cat contiene a la variedad secante de \mathcal{C} .

Respecto al espacio proyectivo Cat , podemos decir lo siguiente. Tomemos la sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow \ker \mu \longrightarrow S^2(\mathbb{C}^N) \xrightarrow{\mu} \mathbb{C}^{2N} \longrightarrow 0,$$

donde μ es la multiplicación de polinomios.

$$\ker \mu = \left\{ \sum_{i,j=0}^N a_{ij} x^i \cdot x^j \mid \sum_{i+j=k} a_{ij} = 0, 0 \leq k \leq 2N \right\}.$$

Es fácil ver que $\ker \mu$ tiene intersección nula con el espacio de matrices catalécticas y por dimensión están en suma directa. De hecho, las multi-matrices catalécticas son las coordenadas del producto de polinomios $\mu(f.g)$.

La siguiente proposición generaliza el hecho de que puntos distintos en la curva de Veronese son linealmente independientes. La manera de demostrarlo, sin recurrir a una matriz de Van der Monde, es con la teoría de grupos diagonalizables. Esta proposición es relevante a la teoría de interpolación.

3.4.5 Proposición. *Dados $r, \ell \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}_0^r$ tal que si $\langle c_1 \rangle, \dots, \langle c_\ell \rangle \in \tilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{P}\mathbb{C}^N$ son distintos, entonces son linealmente independientes.*

Demostración. Utilicemos la teoría de grupos diagonalizables y sus caracteres de [Spr98, p.43]. Notar que c_k y cualquier monomio en c_1, \dots, c_ℓ , define un morfismo de grupos

$$\mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad c(z_1, \dots, z_r) = t_1^{z_1} t_2^{z_2} \dots t_r^{z_r} \in \mathbb{C}^*.$$

Sea G el grupo abeliano de tipo finito (multiplicativo),

$$G = \{c_1^{n_1} \dots c_\ell^{n_\ell}\} \cong \mathbb{Z}^\ell / I.$$

De la [Spr98, proposición 3.2.6], sabemos que existe un grupo diagonalizable cuyos caracteres son los elementos de G . De [Spr98, 3.2.3(b)], sabemos que caracteres distintos son linealmente independientes, en particular, $\{c_1, \dots, c_\ell\}$ es un conjunto linealmente independiente. Existen $i_0, \dots, i_{\ell-1} \in \mathbb{Z}^r$ tal que la matriz $(c_k(i_s))_{k,s} \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ es inversible. Multiplicando convenientemente cada fila, podemos suponer que $i_0, \dots, i_{\ell-1} \in \mathbb{N}_0^r$ y $i_0 = 0$. Sea $N \in \mathbb{N}_0^r$ de la forma $N = (n, \dots, n)$ tal que $N \geq i_0, \dots, i_{\ell-1}$, entonces

$$c_i : \underline{(n, \dots, n)} \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad c_1 \wedge \dots \wedge c_\ell \neq 0.$$

Restaría ver que para cada elección de ℓ elementos distintos de $(\mathbb{C}^*)^r$ se puede elegir un mismo N . Recordemos que a cada $t \in (\mathbb{C}^*)^r$ le asociamos un caracter $c : \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{C}^*$. De lo anterior sabemos que dados ℓ caracteres existe $n \in \mathbb{N}$ tal que vistos como multi-vectores $\underline{(n, \dots, n)} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ son linealmente independientes.

Trabajemos en ℓ copias de $(\mathbb{P}^1)^r$ y consideremos el siguiente abierto,

$$X := \{(t_1, \dots, t_\ell) \mid t_i \neq t_j\} \subseteq (\mathbb{C}^*)^r \times \dots \times (\mathbb{C}^*)^r \subseteq (\mathbb{P}^1)^r \times \dots \times (\mathbb{P}^1)^r.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los abiertos,

$$\mathcal{U}_n := \{(t_1, \dots, t_\ell) \in X \mid c_i : \underline{(n, \dots, n)} \longrightarrow \mathbb{C}^*, c_1 \wedge \dots \wedge c_\ell \neq 0\}.$$

Sabemos que existe $\mathcal{U}_{n_1} \neq \emptyset$, luego en su complemento existe otro $\mathcal{U}_{n_2} \supseteq \mathcal{U}_{n_1}$. Iterando este proceso y por noetherianidad de X , [Har77, ejercicio 1.7], esta cadena se estaciona necesariamente en todo el espacio. □

Para cada multi-matriz $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$ definimos $\phi(M) = \phi_A(M) = AMA^t$. Se obtiene la siguiente inclusión $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \phi(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}$.

3.4.6 Proposición. *Existen multi-matrices $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$ tal que $\phi_A(\text{Cat}) \cap \mathcal{V} = \phi_A(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $d \leq \ell$ y $U \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$ la siguiente multi-matriz,

$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = (i, \dots, i) \text{ y } i \leq d \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea B una multi-matriz cataléctica y consideremos el menor $E \in \mathbb{C}^{d \times d}$,

$$E_{ij} = B_{(i, \dots, i), (j, \dots, j)}.$$

Notemos que E es cataléctica ya que si b es el multi-vector que define a B y e es el vector $e_i := b_{(i, \dots, i)}$, tenemos

$$e_{i+j} = b_{(i+j, \dots, i+j)} = b_{(i, \dots, i) + (j, \dots, j)} = B_{(i, \dots, i), (j, \dots, j)} = E_{ij}.$$

Entonces

$$\text{rk}(UBU^t) = 1 \iff \text{rk}(E) = 1 \iff \langle E \rangle = \langle ce^t \rangle \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}\mathbb{C}^{d \times d}.$$

Finalmente, $\phi_U(\text{Cat}) \cap \mathcal{V} = \phi_U(\mathcal{C})$.

Esto mismo puede hacerse para multi-matrices de la forma $A = XU$ donde $X \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ es inversible. También para multi-matrices de la forma $A = XUY$ donde Y es inversible y tal que $\phi_Y(\text{Cat}) = \text{Cat}$. Notemos que como ϕ_Y es inversible, preserva el rango, luego debe mandar \mathcal{C} en \mathcal{C} . Es por esto que el grupo proyectivo de las Y que sirven es una representación del grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$. \square

3.4.7 Teorema. *Sea $y \in V$, entonces existe una multi-matriz A que depende de y tal que*

$$M_{\langle y \rangle} \cong \phi_A(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}.$$

Demostración. Consideremos la proyectivización de Δ , el morfismo de Veronese v_2 .

$$v_2 : \mathbb{P}V \longrightarrow \mathbb{P}S^2(V), \quad \langle x \rangle \longrightarrow \langle xx \rangle.$$

Del [Har92, ejercicio 2.8] sabemos que $M_{\langle y \rangle} \cong v_2(M_{\langle y \rangle})$,

$$v_2(M_{\langle y \rangle}) = \{ \langle xx \rangle \mid \langle x \rangle \in M_{\langle y \rangle} \} = \{ \langle xx \rangle \mid xx \in U\mathfrak{g}(yy) \} =$$

$$\{ \langle xx \rangle \mid xx = Q(yy), Q \in U\mathfrak{g} \} = \{ \langle Q(yy) \rangle \mid Q(yy) \in \Delta(V) \}.$$

Existen D_1, \dots, D_r tal que $\{D^n(yy)\}_{n \geq 0}$ genera $U\mathfrak{g}(yy) \subseteq S^2(V)$, 3.1.2. Para $y \in V$ existe $N \in \mathbb{N}_0^r$ como en 3.2.5. Podemos tomar N suficientemente grande para que $\{D^n(yy)\}_{n=0}^{2N}$ genere $U\mathfrak{g}(yy)$. Fijemos una base de V , $\{v_k\}_1^\ell$, $\ell = \dim V$, entonces

$$Q(yy) = \sum_{n=0}^{2N} b_n \frac{D^n(yy)}{n!} = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{i+j=n} b_n \frac{D^i y}{i!} \frac{D^j y}{j!} = \sum_{i,j=0}^N b_{i+j} \frac{D^i y}{i!} \frac{D^j y}{j!}.$$

$$\frac{D^i y}{i!} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} v_k \implies Q(yy) = \sum_{i,j=0}^N b_{i+j} \frac{D^i y}{i!} \frac{D^j y}{j!} = \sum_{k,l=1}^{\ell} \left(\sum_{i,j=0}^N b_{i+j} a_{ik} a_{jl} \right) v_k v_l.$$

Sean $B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ y $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$ tal que $B_{ij} = b_{i+j}$, $A_{ki} = a_{ik}$.

$$\left(\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k v_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\ell} \lambda_l v_l \right) = Q(yy) \iff \sum_{i,j=0}^N b_{i+j} a_{ik} a_{jl} = \lambda_k \lambda_l, \quad \forall k, l \iff \langle ABA^t \rangle \in \mathcal{V}.$$

En conclusión,

$$v_2(M_{(y)}) \cong \phi(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}, \quad \phi(M) := AMA^t.$$

□

3.4.8. Dado que $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \phi(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}$ deducimos, de la demostración anterior,

$$\phi(\mathcal{C}) \hookrightarrow M_{(y)}.$$

Analicemos esta inclusión en función de $y \in V$.

Sea $\langle Acc^t A^t \rangle \in \phi(\mathcal{C})$, tomemos $\{D_1, \dots, D_r\}$ y N como en la demostración anterior y denotemos $cD = (t_1 D_1) \dots (t_r D_r)$ donde $(t_1, \dots, t_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$ es el punto que define $\langle c \rangle \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} Q(yy) &= \sum_{k,l=1}^{\ell} \left(\sum_{i,j=0}^N c(i)c(j)a_{ik}a_{jl} \right) v_k v_l = \sum_{i,j=0}^N c(i)c(j) \frac{D^i y}{i!} \frac{D^j y}{j!} = \\ &= \sum_{i,j=0}^N c(i)c(j) \frac{D^i y}{i!} \frac{D^j y}{j!} = \left(\sum_{i=0}^N c(i) \frac{D^i y}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^N c(j) \frac{D^j y}{j!} \right) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^N \frac{(cD)^i y}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{(cD)^j y}{j!} \right) = (e^{cD} y)(e^{cD} y) = e^{cD}(yy). \end{aligned}$$

En otras palabras, la subvariedad $\phi(\mathcal{C})$ viene dada, paramétricamente, por

$$(\mathbb{P}^1)^{\times r} \longrightarrow M_{(y)}, \quad (t_1, \dots, t_r) \longrightarrow \langle e^{cD} y \rangle.$$

3.4.9 Observación. Sea $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$ tal que $\text{rk}(\phi_A) > 2$. Dados $\langle c_1 c_1^t \rangle, \langle c_2 c_2^t \rangle \in \mathcal{C}$ genéricos, la recta que generan no interseca al núcleo de ϕ_A , luego una combinación lineal genérica de $\langle Ac_1 c_1^t A^t \rangle, \langle Ac_2 c_2^t A^t \rangle \in \phi(\mathcal{C})$ tiene rango dos.

En otras palabras, existe un abierto denso \mathcal{U} de la variedad 2-secante de \mathcal{C} tal que $\phi(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. En particular, ninguna variedad secante de $\phi(\mathcal{C})$ está incluida en $\phi(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}$.

Las variedades que debemos considerar son las p -osculantes, $T^p \mathcal{C} \subseteq \text{Cat}$. Dado $y \in V$, existe $p \geq 0$ tal que $\phi(T^p \mathcal{C}) \hookrightarrow M_{(y)}$. La existencia se obtiene pues $\phi(\mathcal{C}) \hookrightarrow M_{(y)}$. Notemos entonces que hay cierta similitud del caso general con el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

3.4.10 Lema. Denotemos $\mu : S^2(\mathbb{C}^N) \longrightarrow \mathbb{C}^{2N}$ a la multiplicación de polinomios. Sea $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$, entonces

$$\phi(\text{Cat}) \cong \mathbb{P}(\mu(\text{im}A^t \cdot \text{im}A^t)^\vee).$$

Trabajaremos indistintamente con multi-matrices ABA^t o con funcionales en $\mu(\text{im}A^t \cdot \text{im}A^t)$.

Demostración. Cada multi-matriz $Z \in \mathbb{C}^{N' \times N}$ la podemos identificar con un morfismo lineal,

$$\widehat{Z} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^{N'}, \quad x \longrightarrow Zx.$$

En particular, a cada multi-vector $b \in \mathbb{C}^{2N}$ le podemos asociar la aplicación lineal

$$\widehat{b}^t : \mathbb{C}^{2N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longrightarrow b^t x.$$

Consideremos sobre $(\mathbb{P}^1)^{\times r}$ secciones del haz inversible

$$\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N_1) \otimes \dots \otimes \pi_r^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N_r).$$

Como hemos explicado en 3.4.4, las secciones son polinomios formados por monomios de grado N . En particular, si f, g son dos de estos polinomios, podemos considerar el producto $\mu(f \cdot g)$ como sección del haz

$$\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2N_1) \otimes \dots \otimes \pi_r^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2N_r),$$

en particular $\mu(f \cdot g) \in \mathbb{C}^{2N}$. En conclusión, para cada $b \in \mathbb{C}^{2N}$ tenemos definida la aplicación bilineal simétrica

$$\widetilde{B} : S^2(\mathbb{C}^N) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \widetilde{B}(f, g) := \widehat{b}^t(\mu(f \cdot g)).$$

La multi-matriz de esta aplicación simétrica (en la base de monomios) es una multi-matriz cataléctica B . Más aún, toda multi-matriz cataléctica se obtiene de esta forma, $\mathbb{P}\mathbb{C}^{2N} \cong \text{Cat}$.

Toda multi-matriz simétrica B induce una aplicación lineal,

$$\widetilde{B} : S^2(\mathbb{C}^N) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \widetilde{B}(v, w) := v^t B w.$$

Si queremos restringir esta aplicación al subespacio $\text{im}(A^t)$, $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$, debemos considerar la multi-matriz simétrica ABA^t ,

$$\widetilde{B}|_{\text{im}(A^t) \times \text{im}(A^t)} : \text{im}(A^t) \times \text{im}(A^t) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\widetilde{B}(A^t x, A^t y) = (A^t x)^t B (A^t y) = x^t A B A^t y = \widetilde{ABA^t}(x, y),$$

$$\widetilde{ABA^t} : \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{C}^\ell \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Para finalizar, sea B una multi-matriz cataléctica, $b \in \mathbb{C}^{2N}$ su multi-vector asociado y sea $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$. Llamemos x_i al multi-vector que tiene un 1 en el lugar i y 0 en el resto, luego

$$(ABA^t)_{ij} = x_i^t A B A^t x_j = B(A^t x_i, A^t x_j) = \widehat{b}^t(\mu(A^t x_i \cdot A^t x_j)).$$

Todo $b \in \mathbb{C}^{2N}$ define un funcional $\widehat{b}^t : \mathbb{C}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$ y su restricción $\widehat{b}^t|_{\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)}$ da un funcional en $\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)$. Tenemos definido entonces un isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi(\text{Cat}) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)^\vee), \\ ABA^t &\longrightarrow \widehat{b}^t|_{\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)}. \end{aligned}$$

Está bien definido ya que si $AB_1A^t = AB_2A^t$ entonces

$$\widehat{b}_1^t(\mu(A^tx_i.A^tx_j)) = (AB_1A^t)_{ij} = (AB_2A^t)_{ij} = \widehat{b}_2^t(\mu(A^tx_i.A^tx_j)).$$

La inversa se obtiene con los mismos argumentos. \square

3.4.11 Lema. *Sea $A \in \mathbb{C}^{\ell \times N}$ entonces $\phi_A(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}$ es irreducible.*

Demostración. De 3.4.10 la multi-matriz ABA^t tiene asociado un funcional \widehat{b}^t en $\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)$.

$$\begin{aligned} \text{rk}(ABA^t) \leq 1 &\iff \text{rk}(\widetilde{B}|_{\text{im}A^t \times \text{im}A^t}) \leq 1 \iff \\ \exists W \subseteq \text{im}A^t, \text{codim}W = 1 &| \widetilde{B}(W, \text{im}A^t) = 0 \iff \\ \exists W \in \text{Gr}^1(\text{im}A^t) &| \mu(W.\text{im}A^t) \subseteq \ker(\widehat{b}^t). \end{aligned}$$

Donde $\text{Gr}^1(\text{im}A^t) \cong \mathbb{P}((\text{im}A^t)^\vee)$ es la variedad de hiperplanos en $\text{im}A^t$. Analicemos la última equivalencia empezando con la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker \mu \cap (W.\text{im}A^t) \longrightarrow W.\text{im}A^t \xrightarrow{\mu} \mu(W.\text{im}A^t) \longrightarrow 0.$$

Sea $K := \ker \mu \cap (\text{im}A^t.\text{im}A^t)$ y dado que $W \subseteq \text{im}A^t$ vale

$$\begin{aligned} \ker \mu \cap (W.\text{im}A^t) &= \ker \mu \cap (W.\text{im}A^t) \cap (\text{im}A^t.\text{im}A^t) = K \cap (W.\text{im}A^t) \implies \\ K \cap (W.\text{im}A^t) &\subseteq K \cap (\text{im}A^t.\text{im}A^t) = K. \end{aligned}$$

Dado que $W.\text{im}A^t$ es un hiperplano en $\text{im}A^t.\text{im}A^t$, al intersecar a ambos con K pueden pasar dos cosas, que sean iguales (en cuyo caso $K \subseteq W.\text{im}A^t$) o que $K \cap (W.\text{im}A^t)$ sea un hiperplano de K . Calculando las dimensiones tenemos que si $K \subseteq W.\text{im}A^t$, vale que $\mu(W.\text{im}A^t)$ es un hiperplano de $\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)$ y si no $\mu(W.\text{im}A^t) = \mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)$. Sea $v \in \text{im}A^t$ tal que $\langle v \rangle \oplus W = \text{im}A^t$, luego $\langle v.v \rangle \oplus W.\text{im}A^t = \text{im}A^t.\text{im}A^t$, entonces

$$K \subseteq W.\text{im}A^t \iff K \cap \langle v.v \rangle = 0,$$

$$K \cap \langle v.v \rangle \neq 0 \iff v.v \in K \iff \mu(v.v) = 0 \iff v = 0.$$

En otras palabras, para todo $W \in \text{Gr}^1(\text{im}A^t)$ siempre vale $K \subseteq W.\text{im}A^t$, i.e. $\mu(W.\text{im}A^t)$ es un hiperplano de $\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)$.

Sea $W \in \text{Gr}^1(\text{im}A^t)$ y $\widehat{b}^t : \mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\mu(W.\text{im}A^t) \subseteq \ker \widehat{b}^t$, entonces

$$\mu(W.\text{im}A^t) = \ker \widehat{b}^t, \quad \mu(W.\text{im}A^t)^\circ = \langle \widehat{b}^t \rangle.$$

Tenemos entonces que para todo hiperplano W , existe un único $\langle \widehat{b}^t \rangle \in \mathbb{P}(\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)^\vee)$ tal que $\mu(W.\text{im}A^t) \subseteq \ker \widehat{b}^t$, entonces tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} \phi(\text{Cat}) \cap \mathcal{V} &= \{\langle ABA^t \rangle \mid \text{rk}(ABA^t) \leq 1\} = \\ &= \{\langle ABA^t \rangle \mid \exists W \in \text{Gr}^1(\text{im}A^t), \mu(W.\text{im}A^t) \subseteq \ker \widehat{b}^t\} \cong \\ &= \{\langle \widehat{b}^t \rangle \in \mathbb{P}(\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)^\vee) \mid \exists W \in \text{Gr}^1(\text{im}A^t), \mu(W.\text{im}A^t) = \ker \widehat{b}^t\} = \\ &= \{\mu(W.\text{im}A^t)^\circ \in \mathbb{P}(\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)^\vee) \mid W \in \text{Gr}^1(\text{im}A^t)\}. \end{aligned}$$

Caractericemos la última variedad. Elijamos consistentemente v tal que $\langle v \rangle \oplus W = \text{im}A^t$. Dado que $K \subseteq W.\text{im}A^t$ se tiene $\mu(v.v) \oplus \mu(W.\text{im}A^t) = \mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t)$, entonces

$$\{\mu(W.\text{im}A^t)^\circ \mid W \in \text{Gr}^1(\text{im}A^t)\} \cong \{\langle \mu(v.v) \rangle \mid \langle v \rangle \in \mathbb{P}(\text{im}A^t)\} \subseteq \mathbb{P}\mu(\text{im}A^t.\text{im}A^t).$$

□

3.4.12 Teorema. *Sea $y \in V$ entonces $M_{\langle y \rangle}$ es irreducible.*

Demostración. De 3.4.7 existe una multi-matriz A tal que $M_{\langle y \rangle} \cong \phi_A(\text{Cat}) \cap \mathcal{V}$. Utilizando 3.4.11 obtenemos el resultado. □

3.5. Aplicación del pletismo geométrico de $S^2(V)$ en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Analizaremos el pletismo geométrico asociado a la variedad M_{V^ν} . El objetivo es entender un poco más la geometría de las variedades $M_{V \geq \mu}$ estudiadas en 3.1.7. Comenzaremos repasando el pletismo geométrico para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Finalizado esto se agrega un teorema técnico que se aplica en 3.5.5. Allí se explica lo siguiente: para cada raíz positiva β de \mathfrak{g} se tiene una copia $\mathfrak{s}_\beta \subseteq \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. El vector de peso máximo ν de una representación irreducible, también es máximo para \mathfrak{s}_β , luego dentro de $M_{V \geq \mu}$ tenemos una curva de Veronese c_β . Dependiendo el caso, no sólo estará incluida la curva sino también alguna osculante $T^p c_\beta$. El resultado que demostramos afirma que si $\nu - p\beta \geq \mu$ entonces $T^p c_\beta \subseteq M_{V \geq \mu}$. Más aún, vale la recíproca.

3.5.1. En el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ el pletismo de $S^2(S^r(\mathbb{C}^2))$ es conocido ([FH91, p.153]). Hagamos un pequeño repaso. Las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ son de la forma $V = S^r(\mathbb{C}^2)$. Las representaciones $S^2(V)$ corresponden geoméricamente a polinomios homogéneos de grado 2 en $\mathbb{P}(V^\vee)$, pero como vale la reciprocidad de Hermite,

$$S^2(S^r(\mathbb{C}^2)) \cong S^r(S^2(\mathbb{C}^2))$$

podemos traducir toda la geometría al plano $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^{2^\vee}))$.

Si $V = S^2(\mathbb{C}^2)$, la órbita cerrada por la acción exponencial de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en \mathbb{P}^2 corresponde a la curva de Veronese. El ideal I de esta curva está generado por el polinomio homogéneo $y^2 - xz$.

Como $SL_2(\mathbb{C})$ actúa en V , también actúa en $S^*(V)$ y más aún, I es un submódulo. De hecho, se tiene la siguiente filtración de submódulos

$$\dots \subseteq I^n \subseteq I^{n-1} \subseteq \dots \subseteq I^2 \subseteq I \subseteq S^*(V)$$

Las variedades osculantes $T^p c$ de la curva de Veronese entran dentro de esta cadena, ya que un espacio p -osculante tiene índice de contacto con la curva $p+1$, y así $I(T^p c) \subseteq I^{p+1}$.

Si $P \in S^2(S^r(\mathbb{C}^2))$, puede pensarse que es una hipersuperficie de grado r en \mathbb{P}^2 , i.e. $P \in S^r(S^2(\mathbb{C}^2))$, luego existe p tal que $P \in I^p \setminus I^{p+1}$, entonces $P = (y^2 - xz)^p Q$ donde Q es un polinomio homogéneo de grado $\deg(Q) = \deg(P) - p \deg(y^2 - xz) = r - 2p$ en \mathbb{P}^2 . Si lo llevamos a \mathbb{P}^1 mediante la inclusión de Veronese obtenemos un polinomio homogéneo de grado $2(r - 2p)$, un elemento de $S^{2r-4p}(\mathbb{C}^2)$. Luego se tiene el pletismo:

$$S^2(S^r(\mathbb{C}^2)) \cong \bigoplus_{p=0}^{\frac{r}{2}} S^{2r-4p}(\mathbb{C}^2).$$

Existe otra interpretación geométrica del pletismo que es la que nos va a interesar. En vez de utilizar la reciprocidad de Hermite y trabajar en el plano \mathbb{P}^2 , trabajaremos con cuádricas en \mathbb{P}^r .

Sea $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{v_r} \mathbb{P}^r$ la inclusión de la curva de Veronese c_r en \mathbb{P}^r . Dado que todos los módulos irreducibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ son polinomios homogéneos en \mathbb{P}^1 , para conocer la descomposición de las cuádricas en \mathbb{P}^r , tendremos que llevarlas a \mathbb{P}^1 mediante v_r .

Sea $V = S^r(\mathbb{C}^2)$ y sea $I = I(c_r) \subseteq S^*(V)$ el ideal de la curva de Veronese en $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(S^r(\mathbb{C}^{2V}))$. Se tiene la $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -filtración

$$\dots \subseteq I^n \subseteq I^{n-1} \subseteq \dots \subseteq I^2 \subseteq I \subseteq S^*(V).$$

El ideal de la variedad p -osculante está incluido en I^{p+1} ,

$$I(T^p c_r) \subseteq I^{p+1} \implies I(T^p c_r)_2 \subseteq I_2^{p+1}.$$

El pletismo de $S^2(S^r(\mathbb{C}^2))$ viene dado por el orden de anulamiento sobre c_r ([FH91, 11.32]).

$$S^2(S^r(\mathbb{C}^2)) \cong \bigoplus_{p=0}^{\frac{r}{2}} S^{2r-4p}(\mathbb{C}^2) \cong \bigoplus_{p=0}^{\frac{r}{2}} I_2^p / I_2^{p+1}.$$

Antes de pasar al caso general \mathfrak{g} necesitaremos agregar el siguiente resultado técnico:

3.5.2 Teorema. *Sea $V = S^r(\mathbb{C}^2)$ un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo irreducible y p tal que $r - 2p$ es un peso de V , entonces*

$$U\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \triangleleft (V^{\geq r-2p}) = \bigoplus_{m=0}^p S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2).$$

Demostración. Llamemos $v_r \in V$ al vector de peso máximo r , recordemos que los pesos de V son de la forma $r - 2p$ con $0 \leq p \leq r$ y $\dim V^{r-2p} = 1$. Tomemos la base estándar de V ([FH91, p.148]), $Y^k v_r = v_{r-2k} \in V^{r-2k}$, tal que

$$Hv_{r-2k} = (r - 2k)v_{r-2k}, \quad Yv_{r-2k} = v_{r-2(k+1)}, \quad Xv_{r-2k} = k(r - k + 1)v_{r-2(k-1)}.$$

Procedamos por inducción en p y empecemos por $p = 0$. Dado que v_r es el vector de peso máximo de V , $v_r v_r$ es un vector de peso máximo en $S^2(V)$ y es el que tiene el mayor peso de todos. Genera la representación $S^{2r}(\mathbb{C}^2) \subseteq S^2(V)$, luego

$$U\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\Delta(V^{\geq r}) = U\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).(v_r v_r) = S^{2r}(\mathbb{C}^2) = \bigoplus_{m=0}^0 S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2).$$

Supongamos entonces que el resultado es válido para $p - 1$ y veamos que vale para p . Por hipótesis inductiva, sabemos

$$U\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\Delta(V^{\geq r-2(p-1)}) = \bigoplus_{m=0}^{p-1} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2).$$

También sabemos en general que vale,

$$\Delta(V^{r-2p}) \subseteq V^{r-2p}V^{r-2p} \subseteq \bigoplus_{a+b=2r-4p} V^a V^b = \bigoplus_{m=0}^p S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)^{2r-4p}.$$

En conclusión,

$$\bigoplus_{m=0}^{p-1} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2) = U\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\Delta(V^{\geq r-2(p-1)}) \subseteq U\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\Delta(V^{\geq r-2p}) \subseteq \bigoplus_{m=0}^p S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$$

Debemos probar que la última inclusión es una igualdad.

Sabemos que vale,

$$S^2(V)^{2r-4p+2} = \bigoplus_{m=0}^{p-1} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)^{2r-4p+2} = \bigoplus_{k+l=2p-1} V^{r-2k}V^{r-2l} = \bigoplus_{k=0}^{p-1} V^{r-2k}V^{r-2(2p-1-k)},$$

luego $\{v_{r-2k}v_{r-2(2p-1-k)}\}_0^{p-1}$ forma una base y al aplicarle Y obtenemos una base de

$$T := \bigoplus_{m=0}^{p-1} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)^{2r-4p}.$$

Los elementos de la base de T , $\{Y(v_{r-2k}v_{r-2(2p-1-k)})\}_0^{p-1}$, son

$$\begin{aligned} Y(v_{r-2k}v_{r-2(2p-1-k)}) &= v_{r-2k-2}v_{r-2(2p-1-k)} + v_{r-2k}v_{r-2(2p-1-k)-2} = \\ &= v_{r-2k-2}v_{r-4p+2+2k} + v_{r-2k}v_{r-4p+2k}, \quad 0 \leq k \leq p-1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$S^2(V)^{2r-4p} = T \oplus S^{2r-4p}(\mathbb{C}^2)^{2r-4p}.$$

El vector $v_{r-2p}v_{r-2p}$ es linealmente independiente a $\{v_{r-2k-2}v_{r-4p+2+2k} + v_{r-2k}v_{r-4p+2k}\}_0^{p-1}$, luego $\Delta(V^{\geq r-2p})$ genera también $S^{2r-4p}(\mathbb{C}^2)$. □

3.5.3 Corolario. Sea $V = S^r(\mathbb{C}^2)$ un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo irreducible. Entonces la variedad de Maurer-Cartan asociada a $X := \mathbb{P}(V^{\geq r-2p}) \subseteq \mathbb{P}V$ y a $T^p c_r$ coinciden,

$$M_{\mathbb{P}(V^{\geq r-2p})} = M_{T^p c_r}.$$

Demostración. Por el teorema anterior sabemos que $S_X = \bigoplus_{m=0}^p S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$, por otro lado, $I(T^p c_r)_2 = \bigoplus_{m>p} S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)$. De 3.1.7, tenemos $I(M_X)_2 = S_X^\circ$. \square

3.5.4. La acción exponencial de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sobre $V := S^r(\mathbb{C}^2)$ induce una acción sobre los subespacios lineales de dimensión $p+1$. Tenemos que $V^{\geq r-2p}$ tiene dimensión $p+1$ y contiene al vector de peso máximo v_r . Al aplicar G a $V^{\geq r-2p}$, tenemos que $G.v_r \subseteq G.V^{\geq r-2p}$. Recordar que $G.\langle v_r \rangle$ es la curva de Veronese y sobre cada punto de la curva, $g.\langle v_r \rangle$, tenemos un subespacio de dimensión p que lo contiene, $g.\mathbb{P}(V^{\geq r-2p})$. Llamemos X a la variedad invariante $G.\mathbb{P}(V^{\geq r-2p})$.

Del corolario anterior sabemos que el ideal de X y de $T^p c_r$ coinciden en grado dos y por construcción $\dim X = \dim T^p c_r$. En los casos que valga la igualdad, $X = T^p c_r$, por ejemplo si $T^p c_r$ está generada en grado dos, hemos demostrado que el espacio $\mathbb{P}(V^{\geq r-2p})$ es p -osculante a $\langle v_r \rangle \in c_r$.

3.5.5. Comencemos entonces con el caso en que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie simple. Para cada raíz positiva β , se tiene una copia de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{s}_\beta \subseteq \mathfrak{g}$. Dentro de $U\mathfrak{g}$ son los polinomios no conmutativos en las variables $X_\beta, H_\beta, Y_\beta$ ([Ser01, VI]).

Sea V una representación irreducible de \mathfrak{g} , luego V es una representación para cada \mathfrak{s}_β (no necesariamente irreducible). Dado que a un mismo espacio vectorial se le pueden dar varias estructuras de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo, las estructuras de \mathfrak{s}_β -módulo sobre V no tienen por qué ser isomorfas.

Sea $p \in V$ el vector de peso máximo para \mathfrak{g} . Como este cumple $X_\beta p = 0$, es un vector de peso máximo para \mathfrak{s}_β . En particular, para cada β , p pertenece a una copia de $S^r(\mathbb{C}^2)$ dentro de V donde $r = \nu(H_\beta)$.

Si tomamos las órbitas exponenciales de p de las diferentes álgebras de Lie \mathfrak{s}_β , obtenemos que dentro de la variedad M_{V^ν} hay k curvas de Veronese, $c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_k}$.

Veamos que cualquier polinomio de $I(M_{V^{\geq \mu}})_2$ tiene asociado una tira de números que corresponde con su orden de anulamiento sobre cada curva de Veronese.

Fijemos μ un peso de V y sea β una raíz positiva de \mathfrak{g} . Llamemos $r = \nu(H_\beta)$, p al vector de peso máximo ν y escribamos a $\mu = \nu - q\beta - \lambda$ con $q \geq 0$ máximo, $\lambda \geq 0$.

Notemos que vale $\nu - q\beta \geq \mu$ y $(\nu - q\beta)(H_\beta) = r - 2q$.

Consideremos el \mathfrak{s}_β -submódulo irreducible $U = U\mathfrak{s}_\beta.p \subseteq V$. Notar que $p \in U^r$ y al ser vector de peso máximo de V , tenemos $p \in V^\nu$. En particular, como $\dim U^r = 1$, tenemos

$U^r \subseteq V^\nu$. Si hacemos actuar $Y_\beta \in \mathfrak{s}_\beta$ en ambos miembros q veces, obtenemos

$$U^{r-2q} \subseteq V^{\nu-q\beta}.$$

Dado que q fue elegido para que valga $\nu - q\beta \geq \mu$, tenemos

$$\begin{aligned} U^{\geq r-2q} \subseteq V^{\geq \nu-q\beta} \subseteq V^{\geq \mu} &\implies \Delta(U^{\geq r-2q}) \subseteq \Delta(V^{\geq \mu}) \implies \\ U\mathfrak{s}_\beta\Delta(U^{\geq r-2q}) \subseteq U\mathfrak{s}_\beta\Delta(V^{\geq \mu}) &\subseteq U\mathfrak{g}\Delta(V^{\geq \mu}) = S_{V^{\geq \mu}}. \end{aligned}$$

Recordemos que $U \cong S^r(\mathbb{C}^2)$, luego $S^2(U)$ será, como \mathfrak{s}_β -módulo,

$$\bigoplus_{m=0}^r S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2) \cong S^2(U).$$

De 3.5.2 sabemos

$$\bigoplus_{m=0}^q S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2) = U\mathfrak{s}_\beta\Delta(U^{\geq r-2q}) \subseteq S^2(U).$$

Finalmente, el submódulo $I(M_{V^{\geq \mu}})_2$ corresponde a las cuádricas que se anulan sobre cada c_β con orden q , esto se debe a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{m=0}^q S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2) \subseteq S_{V^{\geq \mu}} &\iff I(T^q c_\beta)_2^\circ \subseteq I(M_{V^{\geq \mu}})_2^\circ \iff \\ I(T^q c_\beta)_2 \supseteq I(M_{V^{\geq \mu}})_2 &\iff I(T^q c_\beta) \supseteq I(M_{V^{\geq \mu}}). \end{aligned}$$

Podemos decir, simplificando un poco, que si $\mu = \nu - \sum a_i \alpha_i$, el módulo $I(M_{V^{\geq \mu}})_2$ corresponde a las cuádricas que se anulan sobre c_{α_i} con orden a_i .

4. Variedad de estructuras.

Resumen

En este capítulo daremos una pequeña introducción a las DG-estructuras más sencillas, los complejos. Construiremos variedades relacionadas con la estructura diferencial y estudiaremos su geometría. Pensaremos a un complejo como un espacio vectorial graduado provisto de un diferencial. Este capítulo 4 junto con los capítulos 5 y 6 está destinado al estudio de la variedad de $DG\mathcal{LA}$. Una variedad en la cual cada punto corresponde a una estructura de DGLA.

4.1. Generalidades.

En esta primer subsección daremos algunas definiciones y trataremos algunos conceptos básicos. Se calcularán las dimensiones del espacio de morfismos de complejos 4.1.5 y se introducirá el grupo de Lie que actúa sobre estos morfismos.

Dado V^* y W^* dos espacios vectoriales graduados, se tiene que $\text{hom}^*(V, W)$ también es graduado, si $f \in \text{hom}^i(V, W)$ la llamaremos de grado i . Más aún si (V, d) y (W, δ) son complejos, el $\text{hom}^*(V, W)$ también lo es. Su diferencial sobre f homogénea de grado \bar{f} es

$$D(f) := \delta f - (-1)^{\bar{f}} f d.$$

Notar que los i -ciclos de $\text{hom}(V, W)$ son los morfismos de complejos de grado i y los i -bordes son las relaciones de homotopía, luego su homología son los morfismos de complejos módulo homotopía. Se define

$$\text{hom}_D^i(V, W) := Z^i(\text{hom}(V, W)) \subseteq \text{hom}^i(V, W).$$

$$\text{ext}^i(V, W) := H^i(\text{hom}(V, W)).$$

Se tiene una aplicación lineal de grado cero canónica (es natural):

$$H(\text{hom}(V, W)) \xrightarrow{\lambda} \text{hom}(H(V), H(W)).$$

Si f es un morfismo de complejos de grado i ,

$$\lambda^i([f]) : H^*(V) \longrightarrow H^{*+i}(W),$$

es el inducido en homología. El morfismo λ^0 es una biyección ([Bou07, §5]).

En todo este capítulo trabajaremos con morfismos graduados entre complejos de la forma

$$W = \bigoplus_{i=0}^n W_i, \quad \dim W_i < \infty.$$

4.1.1 Notación. Para $f \in \text{hom}^0(V, L)$ definimos

$$\text{rk}(f) := (\text{rk}(f^0), \text{rk}(f^1), \dots, \text{rk}(f^n)) \in \mathbb{N}_0^{n+1}.$$

También definimos $\dim V := \text{rk}(1_V)$, en otras palabras,

$$\dim V = (\dim(V^0), \dim(V^1), \dots, \dim(V^n)) \in \mathbb{N}_0^{n+1}.$$

Para $r, s \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ definimos el orden inducido de \mathbb{N}_0 coordenada a coordenada,

$$s \leq r \iff s_i \leq r_i \quad 0 \leq i \leq n.$$

4.1.2 Lema. Sea (V, d) y (V', d') dos complejos, entonces $\text{hom}_D^0(V, V')$ es un espacio vectorial de dimensión

$$\dim \text{hom}_D^0(V, V') = \sum_{i=0}^n h^i h'^i + \text{rk}(d^i) \text{rk}(d'^i)$$

donde $h^i = \dim H^i(V)$, $h'^i = \dim H^i(V')$.

Demostración. Sean $Z^i := \ker(d^i)$, $B^i := \text{im}(d^{i-1})$, $H^i := Z^i/B^i$ y C^i un complemento de Z^i en V^i , luego

$$V^i = Z^i \oplus C^i = B^i \oplus H^i \oplus C^i.$$

Notar que $C^i \cong B^{i+1}$ ya que $d|_C$ es inyectiva. Usemos notaciones análogas para V' .

Sea $f \in \text{hom}_D^0(V, V')$, luego $f(B) \subseteq B'$ y $f(H) \subseteq H'$, entonces podemos suponer

$$B^i \oplus H^i \oplus B^{i+1} \xrightarrow{f^i} B'^i \oplus H'^i \oplus B'^{i+1}.$$

Dado que $f^i d^{i-1} = d'^{i-1} f^{i-1}$, tenemos que $f^i|_{B^i}$ queda determinada por f^{i-1} , y en consecuencia f^i la define un elemento arbitrario de $\text{hom}(H^i, H'^i) \times \text{hom}(B^{i+1}, B'^{i+1})$. Finalmente,

$$\text{hom}_D^0(V, V') \cong \bigoplus_{i=0}^n \text{hom}(H^i, H'^i) \times \text{hom}(B^{i+1}, B'^{i+1}) \cong$$

$$\text{hom}^0(H(V), H(V')) \times \text{hom}^0(V/\ker(d), V'/\ker(d')).$$

□

4.1.3 Corolario. Sean L y N complejos tal que $\dim L = \dim N = r$ y $\dim H(L) = \dim H(N) = s$, entonces

$$\dim \ker(d_L^i) = \dim \ker(d_N^i).$$

Más aún, si denotamos $z^i := \dim \ker(d^i)$ y $z^{i-1} := \dim \ker(d^{i-1})$, vale

$$z^i = r_{i-1} - z^{i-1} + s_i.$$

Demostración. Utilicemos las siguientes notaciones, $Z^i = \ker(d^i)$, $B^i = \text{im}(d^{i-1})$, $H^i = Z^i/B^i$ y $C^i \cong B^{i+1}$ es un complemento de Z^i en V^i . A las dimensiones de estos espacios las denotamos con letra minúscula, z^i, b^i, h^i, c^i, v^i .

Procedamos inductivamente. Como los complejos empiezan en grado cero, se tiene que $z^0(L) = h^0(L) = h^0(N) = z^0(N)$.

Como $\dim L^i = \dim N^i$ y $\dim L^i = z^i(L) + b^{i+1}(L)$ se tiene por hipótesis inductiva que $b^{i+1}(L) = b^{i+1}(N)$, por otro lado como $h^{i+1}(L) = h^{i+1}(N)$ se obtiene lo deseado,

$$z^{i+1}(L) = z^{i+1}(N).$$

□

4.1.4 Notación. Denotamos $\chi_i : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ a la característica parcial i .

$$\chi_i(t) := t_i - t_{i-1} + t_{i-2} - \dots + (-1)^i t_0, \quad t \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

Si en 4.1.3 resolvemos la recursividad $z^i = r_{i-1} - z^{i-1} + s_i$, tenemos

$$z^i = \chi_{i-1}(r) + \chi_i(s), \quad r, s \in \mathbb{N}_0^{n+1}.$$

4.1.5 Proposición. Sean V, L y N complejos. Si $\dim L = \dim N$ y $\dim H(L) = \dim H(N)$ entonces

$$\dim \text{hom}_D^0(V, L) = \dim \text{hom}_D^0(V, N).$$

Demostración. De 4.1.3 sabemos $z^i(L) = z^i(N)$. Por otro lado, $\dim(L^i) = \dim(N^i)$, luego $b^{i+1}(L) = b^{i+1}(N)$, entonces

$$h^i(V)h^i(L) + b^{i+1}(V)b^{i+1}(L) = h^i(V)h^i(N) + b^{i+1}(V)b^{i+1}(N).$$

Utilizando la fórmula 4.1.2 se obtiene $\dim \text{hom}_D^0(V, L) = \dim \text{hom}_D^0(V, N)$.

□

4.1.6 Corolario. Sea (V, d) un complejo, entonces $\chi_n(\dim V) = \chi_n(\dim HV)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \chi_n(\dim V) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim V^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim \text{im}(d^{i-1}) + \dim H^i + \dim V/\text{im}(d^{i-1})) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim \text{im}(d^{i-1}) + \dim H^i + \dim \text{im}(d^i)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(V) = \chi_n(\dim HV). \end{aligned}$$

□

Se tiene que $GL(V, d) \times GL(W, \delta)$ actúa a izquierda en $\text{hom}_D(V, W)$

$$(\phi, \psi).f := \psi f \phi^{-1}$$

donde ϕ y ψ son morfismos de complejos inversibles y f es morfismo de complejos, $\delta f = f d$.

$$\delta(\psi f \phi^{-1}) = \psi \delta f \phi^{-1} = \psi f d \phi^{-1} = (\psi f \phi^{-1}) d.$$

Como el grupo $GL(V, d) \times GL(W, \delta)$ es un abierto de $\text{hom}_D^0(V, V) \times \text{hom}_D^0(W, W)$, su álgebra de Lie es $\text{hom}_D^0(V, V) \times \text{hom}_D^0(W, W)$. En general si trabajamos con todos los morfismos y no sólo con los de complejos, el grupo $GL(V) \times GL(W)$ actúa en $\text{hom}(V, W)$ y no preserva los ciclos. El álgebra de Lie de $GL(V) \times GL(W)$ es $\text{hom}^0(V, V) \times \text{hom}^0(W, W)$. Cuando $V = W$ existe una estructura extra en $\text{hom}(V, V)$ que es el conmutador. Le da una estructura de DGLA no abeliana, dados a, b homogéneos de grado \bar{a} y \bar{b} respectivamente,

$$[a, b] := ab - (-1)^{\bar{a}\bar{b}} ba.$$

Usando el conmutador, podemos escribir el diferencial de $\text{hom}(V, V)$ como $D = [d, -]$. El grupo $GL(V)$ actúa en $\text{hom}(V, V)$ por conjugación. Esta acción es compatible con el corchete

$$\phi.[a, b] = [\phi.a, \phi.b]$$

4.1.7 Definición. Definamos un invariante en $\text{hom}_D^0(V, W)$ y en $\text{hom}_D^0(V, V)$. Recordar que $GL(V, d) \times GL(W, \delta)$ actúa en $\text{hom}_D(V, W)$ y $GL(V, d)$ actúa en $\text{hom}_D(V, V)$.

Definamos las características de Euler:

$$\alpha : \text{hom}_D^0(V, W) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \alpha(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk}(f^i) = \chi_n(\text{rk}(f))$$

$$\beta : \text{hom}_D^0(V, V) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \beta(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f^i) = \chi_n(\text{tr}(f))$$

Ambas son lineales, invariantes y vale $\alpha(f) = \alpha([f])$ y $\beta(f) = \beta([f])$. Esto lo demostraremos en 4.3.7 para α , pero para β es un hecho conocido. Se lo llama el número de Lefschetz. Observar que $\alpha(1_V) = \beta(1_V) = \chi_n(\dim V)$ es la característica de Euler usual.

4.2. Variedad de subcomplejos de un complejo dado.

Estudiaremos la geometría de la variedad de subcomplejos. Entre otras cosas calcularemos la cantidad de componentes irreducibles, su dimensión y analizaremos la regularidad de las componentes.

Fijemos (W, δ) un complejo, $W = \bigoplus_0^n W_i$, $\dim W_i < \infty$ y sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(W)$ la variedad que consiste en todos los subcomplejos de W , o sea, $L \in \mathcal{G}$ si y sólo si $L \hookrightarrow W$ es un subcomplejo de W .

Fijemos $r, s \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ y definimos $\mathcal{G}_{r,s} \subseteq \text{Grass}(W^0, r_0) \times \dots \times \text{Grass}(W^n, r_n)$ como la subvariedad que consiste en los subcomplejos L de $\dim L = r$ y $\dim H(L) = s$. Recordar que las dimensiones de los ciclos y de los bordes en L quedan determinadas.

$$\mathcal{G}_{r,s} := \{(L^0, L^1, \dots, L^n) \mid \delta^i(L^i) \subseteq L^{i+1}, \dim L = r, \dim H(L) = s\}$$

4.2.1 Proposición. Sea $w := \dim W$ y $h := \dim H(W)$. Si $\mathcal{G}_{r,s} \neq \emptyset$, entonces es irreducible, suave y

$$\dim \mathcal{G}_{r,s} = \sum_{i=0}^n (h_i - s_i)s_i + (\chi_i(w - h) - \chi_i(r - s))\chi_i(r - s).$$

Demostración. Consideremos la aplicación que olvida la última coordenada, $\mathcal{G}_{r,s} \xrightarrow{\pi} \widehat{\mathcal{G}}_{\widehat{r},\widehat{s}}$.

$$\pi^{-1}(L^0, \dots, L^{n-1}) =$$

$$\{L^n \subseteq W^n \mid \delta^{n-1}(L^{n-1}) \subseteq L^n, \dim(L^n) = r_n, \dim \ker(\delta^n|_{L^n}) - \text{rk}(\delta^{n-1}|_{L^{n-1}}) = s_n\} \cong \\ \cong \text{Grass}(\ker \delta^n / \delta^{n-1}(L^{n-1}), s_n) \times \text{Grass}(W^n / \ker \delta^n, r_n - \text{rk}(\delta^{n-1}|_{L^{n-1}}) - s_n).$$

Las fibras son todas suaves, irreducibles y de la misma dimensión,

$$r_n - \text{rk}(\delta^{n-1}|_{L^{n-1}}) - s_n = r_n - (\dim \ker(\delta^n|_{L^n}) - s_n) - s_n =$$

$$r_n - \chi_{n-1}(r) - \chi_n(s) = \chi_n(r) - \chi_n(s) = \chi_n(r - s) \implies$$

$$\dim \pi^{-1}(L^0, \dots, L^{n-1}) =$$

$$(\dim H^n(W) - s_n)s_n + (\dim W^n - \dim \ker \delta^n - \chi_n(r - s))\chi_n(r - s) =$$

$$(h_n - s_n)s_n + (\chi_n(w - h) - \chi_n(r - s))\chi_n(r - s).$$

Se sigue por inducción. □

4.2.2. El grupo $GL(W, \delta)$ actúa en $\mathcal{G}(W)$. Diremos que $L \sim N$ si existe $\phi \in GL(W, \delta)$ tal que $\phi|_L : L \rightarrow N$, en otras palabras, L se relaciona con $\phi(L)$. La relación está bien definida dado que $\delta\phi = \phi\delta$ y como $\delta(L) \subseteq L$ se tiene que

$$\delta\phi(L) = \phi\delta(L) \subseteq \phi(L) \implies \phi.L \in \mathcal{G}(W).$$

La acción preserva las variedades $\mathcal{G}_{r,s}$,

$$\dim(L) = \dim(\phi.L), \quad \dim(H(L)) = \dim(H(\phi.L)).$$

Como actúa sobre $\mathcal{G}_{r,s}$ de manera transitiva, se tiene que $\mathcal{G}_{r,s}$ son las órbitas de esta acción.

Analicemos condiciones para que exista algún $L \subseteq W$, $\dim L = r$ y $\dim H(L) = s$, en otras palabras para que $\mathcal{G}_{r,s}(W) \neq \emptyset$.

4.2.3 Proposición. Sea $r \leq w := \dim W$, $s \leq h := \dim H(W)$, $h \leq w$ y $s \leq r$.

$$\mathcal{G}_{r,s}(W) \neq \emptyset \iff 0 \leq \chi_i(r-s) \leq \chi_i(w-h)$$

Demostración. Descompongamos cada W^i ,

$$W^i = B^i \oplus H^i \oplus C^i,$$

donde $Z^i \cong B^i \oplus H^i$ y $C^i \cong B^{i+1}$.

Procedamos por inducción. Definamos $L^0 = L_Z^0 \oplus L_C^0$, donde $L_Z^0 \subseteq Z^0 = H^0$ y $L_C^0 \subseteq C^0$ de dimensiones s_0 y $r_0 - s_0$ respectivamente. Esto es posible pues $0 \leq r_0 - s_0 \leq \dim(C^0) = w_0 - h_0$.

Notar que $\dim(L^0) = r_0$.

Supongamos que tenemos definido L^i y definamos $L^{i+1} = L_H^{i+1} \oplus L_B^{i+1} \oplus L_C^{i+1}$:

Como $\delta^i|_{C^i}$ es inyectiva, en L^{i+1} habrá una copia de $L^i \cap C^i \cong L^{i+1} \cap B^{i+1}$ que tiene dimensión $\dim(L^i) - \dim(Z^i \cap L^i)$. Llamemos $L_B^{i+1} = L^{i+1} \cap B^{i+1}$.

Por hipótesis inductiva, L es un complejo de las dimensiones requeridas, luego

$$\dim L_B^{i+1} = \dim(L^i) - \dim(Z^i \cap L^i) = r_i - \chi_{i-1}(r) - \chi_i(s) = \chi_i(r-s).$$

Sea $L_H^{i+1} \subseteq H^{i+1}$ de dimensión s_{i+1} y sea $L_C^{i+1} \subseteq C^{i+1}$ de dimensión

$$r_{i+1} - s_{i+1} - \chi_i(r-s) = \chi_{i+1}(r-s).$$

Esto es posible ya que $0 \leq \chi_{i+1}(r-s) \leq w_{i+1} - \dim(Z^{i+1}) = \chi_{i+1}(w-h)$. Luego $\dim L^{i+1} = r_{i+1}$ y $\dim H^{i+1}(L) = s_{i+1}$.

La vuelta es obvia. □

4.3. Variedad de morfismos entre complejos de rango fijo.

Estudiaremos la geometría de la variedad de morfismos. Entre otras cosas calcularemos la cantidad de componentes irreducibles, su dimensión y analizaremos la regularidad de las componentes. Entenderemos la intersección de dos componentes irreducibles.

Sea $V = \bigoplus_0^n V_i$, $W = \bigoplus_0^n W_i$, $\dim V_i, \dim W_i < \infty$ complejos. El grupo $GL(V, d) \times GL(W, \delta)$ actúa en $\text{hom}_D^0(V, W)$,

$$\psi f \phi^{-1} = (\psi^0 f^0 \phi^{0,-1}, \psi^1 f^1 \phi^{1,-1}, \dots, \psi^n f^n \phi^{n,-1})$$

donde $f^{i+1} d^i = \delta^i f^i$, $\phi^{i+1} d^i = d^i \phi^i$, $\psi^{i+1} \delta^i = \delta^i \psi^i$, $\phi^i \in GL(V^i)$ y $\psi^i \in GL(W^i)$.

Notar que $\text{rk}(f)$ es invariante por conjugación, $\text{rk}(\psi f \phi^{-1}) = \text{rk}(f)$ y si denotamos por $[f]$ al morfismo inducido en homología se tiene que $\text{rk}([f])$ también es invariante por conjugación, $\text{rk}([\psi f \phi^{-1}]) = \text{rk}([f])$.

Para cada $r, s \in \mathbb{N}^{n+1}$ sea

$$\mathcal{C}_{r,s} = \mathcal{C}_{r,s}(V, W) := \{f \in \text{hom}_D^0(V, W) \mid \text{rk}(f) = r, \text{rk}([f]) = s\}.$$

Se tiene

$$\bigcup_{r,s} \mathcal{C}_{r,s} = \text{hom}_D^0(V, W)$$

donde la unión es finita, $0 \leq r \leq \dim W$ y $0 \leq s \leq \dim H(W)$.

4.3.1 Lema. $f, g \in \text{hom}_D^0(V, W)$ tal que $\text{rk}(f) = \text{rk}(g) = r$ y $\text{rk}([f]) = \text{rk}([g]) = s$ entonces

$$\dim(f^i(\ker d^i)) = \dim(g^i(\ker \delta^i))$$

Más aún $\dim(f^i(\ker d^i)) = \chi_{i-1}(r) + \chi_i(s)$

Demostración. Dado que $\text{rk}(f^0|_{\ker d^0}) = \text{rk}([f^0]) = \text{rk}([g^0]) = \text{rk}(g^0|_{\ker \delta^0})$ se tiene

$$\dim(f^0(\ker d^0)) = \dim(g^0(\ker \delta^0)).$$

Vale lo siguiente

$$\text{rk}(f^i) = \dim f^i(\ker d^i) + \text{rk}(f^{i+1}d^i), \quad \text{rk}(g^i) = \dim g^i(\ker \delta^i) + \text{rk}(g^{i+1}\delta^i).$$

Por hipótesis inductiva, $\dim f^i(\ker d^i) = \dim g^i(\ker \delta^i)$, también $\text{rk}(f^i) = \text{rk}(g^i)$ entonces

$$\text{rk}(f^{i+1}d^i) = \text{rk}(g^{i+1}\delta^i).$$

Dado que $\text{rk}([f^{i+1}]) = \text{rk}([g^{i+1}])$ obtenemos

$$\dim f^{i+1}(\ker d^{i+1}) = \text{rk}(f^{i+1}d^i) + \text{rk}[f^{i+1}] = \text{rk}(g^{i+1}\delta^i) + \text{rk}[g^{i+1}] = \dim g^{i+1}(\ker \delta^{i+1}).$$

La fórmula para la dimensión sale de la siguiente recursión:

$$\begin{aligned} \text{rk}f^i &= \dim f^i(\ker d^i) + \text{rk}(f^{i+1}d^i) \implies \\ \text{rk}f^i + \text{rk}[f^{i+1}] &= (\dim f^i(\ker d^i) + \text{rk}(f^{i+1}d^i)) + \text{rk}[f^{i+1}] \implies \\ r_i + s_{i+1} &= \dim f^i(\ker d^i) + (\text{rk}(f^{i+1}d^i) + \text{rk}[f^{i+1}]) \implies \\ r_i + s_{i+1} &= \dim f^i(\ker d^i) + \dim f^{i+1}(\ker d^{i+1}). \end{aligned}$$

□

4.3.2 Proposición. Sea $v := \dim V$, $h^v := \dim H(V)$, $w := \dim W$ y $h^w := \dim H(W)$. Si $\mathcal{C}_{r,s} \neq \emptyset$ entonces $\mathcal{C}_{r,s}$ es irreducible, suave y

$$\dim(\mathcal{C}_{r,s}) = \sum_{i=0}^n (h_i^v + h_i^w - s_i) s_i + (\chi_i(v - h^v) + \chi_i(w - h^w) - \chi_i(r - s)) \chi_i(r - s).$$

Demostración. Consideremos la aplicación que olvida el último morfismo

$$\pi : \mathcal{C}_{r,s} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{r},\widehat{s}}$$

Las fibras $\pi^{-1}(\widehat{f}) = \pi^{-1}(f^0, f^1, \dots, f^{n-1})$ son

$$\{f^n \in \text{hom}(V^n, W^n) \mid f^n d^{n-1} = \delta^{n-1} f^{n-1}, \text{rk}(f^n) = r_n, \text{rk}([f^n]) = s_n\}.$$

Notar que

$$\{f^n \in \text{hom}(V^n, W^n) \mid f^n d^{n-1} = \delta^{n-1} f^{n-1}\} \cong \text{hom}(H^n V, H^n W) \times \text{hom}(C^n V, C^n W)$$

ya que f^n sobre los n -bordes debe ser $\delta^{n-1} f^{n-1}$, por otro lado, debe mandar la homología en la homología y el complemento de los n -ciclos (C^n) en el complemento de los n -ciclos. Su rango sobre la homología debe ser s_n y sobre C^n debe ser

$$r_n - \text{rk}(\delta^{n-1} f^{n-1}) - s_n = \chi_n(r) - \chi_n(s) = \chi_n(r - s).$$

Luego, independientemente de \widehat{f} , todas las fibras son isomorfas a la variedad

$$\{f_1 \in \text{hom}(H^n V, H^n W) \mid \text{rk}(f_1) = s_n\} \times \{f_2 \in \text{hom}(C^n V, C^n W) \mid \text{rk}(f_2) = \chi_n(r - s)\}.$$

Esta es irreducible, suave y de dimensión ([Har92, proposición 12.2])

$$(\dim H^n(V) + \dim H^n(W) - s_n) s_n + (\dim C^n(V) + \dim C^n(W) - \chi_n(r - s)) \chi_n(r - s) =$$

$$(h_n^v + h_n^w - s_n) s_n + (\chi_n(v - h^v) + \chi_n(w - h^w) - \chi_n(r - s)) \chi_n(r - s).$$

El resultado se obtiene por inducción. \square

Dado que $GL(V, d) \times GL(W, \delta)$ actúa de manera transitiva sobre las variedades $\mathcal{C}_{r,s}$ y como son suaves e irreducibles, estas son órbitas de la acción.

4.3.3 Proposición. Sea $w := \dim W$ y $h_w := \dim H(W)$. Si $\mathcal{C}_{r,s} \neq \emptyset$,

$$\overline{\mathcal{C}}_{r,s} = \bigcup_{(u,t) \leq (s,r)} \mathcal{C}_{t,u} = \{f \in \text{hom}_D^0(V, W) \mid \text{rk}(f) \leq r, \text{rk}([f]) \leq s\}.$$

Demostración. Sea

$$E_{r,s} := \bigcup_{(u,t) \leq (s,r)} \mathcal{C}_{t,u}.$$

Al ser cerrado, tenemos $\overline{\mathcal{C}}_{r,s} \subseteq E_{r,s}$. Dado que $\mathcal{C}_{r,s}$ es denso en $E_{r,s}$, para obtener la igualdad veremos que $E_{r,s}$ es irreducible. Sea

$$\mathcal{I}_{r,s} := \{(L, f) \mid \text{im}(f) \subseteq L\} \subseteq \mathcal{G}_{r,s}(W) \times \text{hom}_D^0(V, W).$$

Las fibras de la primera proyección $\pi_1^{-1}(L) \cong \text{hom}_D^0(V, L)$ son irreducibles de la misma dimensión, entonces $\mathcal{I}_{r,s}$ y $\text{im}(\pi_2)$ son irreducibles. Veamos $\text{im}(\pi_2) = E_{r,s}$, sea $f \in \mathcal{C}_{t,u}$, $(t, u) \leq (r, s)$ entonces

$$\begin{aligned} \exists L \in \mathcal{G}_{r,s}(W) \mid \text{im}(f) \subseteq L &\iff \mathcal{G}_{r-t,s-u}(W/\text{im}(f)) \neq \emptyset \iff \\ \chi_i((r-t) - (s-u)) \leq \chi_i((w-t) - (h_w - u)) &\iff \\ \chi_i(r-s) \leq \chi_i(w-h_w) &\iff \mathcal{G}_{r,s}(W) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}_{r,s} \neq \emptyset$, obtenemos $\mathcal{G}_{r,s}(W) \neq \emptyset$. Notar que se recupera la fórmula

$$\dim(\mathcal{C}_{r,s}) = \dim(E_{r,s}) = \dim(\mathcal{G}_{r,s}(W)) + \dim(\text{hom}_D^0(V, L)).$$

□

4.3.4 Corolario. $\mathcal{C}_{t,u} \subseteq \overline{\mathcal{C}_{r,s}} \iff (u, t) \leq (s, r)$.

□

4.3.5 Corolario.

$$\overline{\mathcal{C}_{t,u}} \cap \overline{\mathcal{C}_{r,s}} = \overline{\mathcal{C}_{\min(t,r), \min(u,s)}}$$

donde $\min(t, r) = (\min(t_0, r_0), \dots, \min(t_n, r_n))$ y $\min(u, s) = (\min(u_0, s_0), \dots, \min(u_n, s_n))$.

□

Analicemos condiciones para que exista $V \xrightarrow{f} W$ de $\text{rk}(f) = r$ y $\text{rk}([f]) = s$, en otras palabras para que $\mathcal{C}_{r,s}$ sea no-vacío.

4.3.6 Proposición. Sea $v = \dim V$, $w = \dim W$, $h^v = \dim H(V)$, $h^w = \dim H(W)$. Sea r y s tales que $r \leq \min(v, w)$, $s \leq \min(h^v, h^w)$ y $s \leq r$.

$$\mathcal{C}_{r,s} \neq \emptyset \iff 0 \leq \chi_i(r-s) \leq \min(\chi_i(v-h^v), \chi_i(w-h^w))$$

Demostración. Escribamos $V^i = Z_V^i \oplus C_V^i$, $W^i = Z_W^i \oplus C_W^i$, $Z_V^i = B_V^i \oplus H_V^i$, $Z_W^i = B_W^i \oplus H_W^i$. Procedamos por inducción. Sea $f^0 = f_Z^0 \oplus f_C^0$ de rango s_0 y $r_0 - s_0$ respectivamente,

$$H_V^0 = Z_V^0 \xrightarrow{f_Z^0} Z_W^0 = H_W^0, \quad C_V^0 \xrightarrow{f_C^0} C_W^0.$$

Esto es posible pues

$$0 \leq r_0 - s_0 = \text{rk}(f_C^0) \leq \min(\dim C_V^0, \dim C_W^0) \implies \text{rk}(f^0) = r_0.$$

Supongamos que hemos definido f^i . Dado que $d^i|_{C_V^i}$ y $\delta^i|_{C_W^i}$ son inyectivas, en f^{i+1} hay una componente f_C^i de rango $\text{rk}(f^i) - \text{rk}(f^i|_{Z_V^i})$. Llamémosla f_B^{i+1} . Por hipótesis inductiva tenemos

$$\text{rk}(f_B^{i+1}) = \text{rk}(f^i) - \text{rk}(f^i|_{Z_V^i}) = r_i - \chi_{i-1}(r) - \chi_i(s) = \chi_i(r) - \chi_i(s).$$

Sea f_H^{i+1} de rango s_{i+1} y sea f_C^{i+1} de rango

$$r_{i+1} - s_{i+1} - (\chi_i(r) - \chi_i(s)) = \chi_{i+1}(r) - \chi_{i+1}(s).$$

Esto es posible pues

$$0 \leq \chi_{i+1}(r) - \chi_{i+1}(s) \leq \min(\dim C_V^{i+1}, \dim C_W^{i+1}) = \min(\chi_{i+1}(v-h^v), \chi_{i+1}(w-h^w)).$$

Entonces $\text{rk}(f^{i+1}) = r_{i+1}$ y $\text{rk}([f]^{i+1}) = s_{i+1}$. La vuelta es obvia. □

4.3.7 Corolario. Sea $f \in \text{hom}_D^0(V, W)$ donde $\text{hom}_D^0(V, W)$ tiene dimensión finita y $f = (f_0, \dots, f_n)$, entonces

$$\chi_n(\text{rk}(f)) = \chi_n(\text{rk}([f])).$$

Demostración. Se tiene que $f \in \mathcal{C}_{t,u}$ para algún $t, u \in \mathbb{N}_0^{n+1}$. Utilizando 4.3.6 y 4.1.6, resulta $0 \leq \chi_n(t - u) \leq 0$, luego $\chi_n(t) = \chi_n(u)$. \square

4.3.1. Subvariedad de cuasi-isomorfismos.

En esta pequeña subsección nos detendremos a estudiar la variedad de cuasi-isomorfismos. Veremos condiciones necesarias y suficientes para que existan cuasi-isomorfismos entre dos complejos. En particular, para que dos complejos sean cuasi-isomorfos.

Fijemos (V, d) y (W, δ) dos complejos tal que $h = \dim H(V) = \dim H(W)$. Esta es una condición necesaria para que existan cuasi-isomorfismos, de hecho si f es un cuasi-isomorfismo, $f \in \mathcal{C}_{q,h}$ para algún q a determinar.

Llamemos $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(V, W)$ a la subvariedad de $\text{hom}_D^0(V, W)$ que consiste en los cuasi-isomorfismos.

Sea $v := \dim V$ y $w := \dim W$. La condición para que $\mathcal{C}_{q,h} \neq \emptyset$ es equivalente (4.3.6) a

$$0 \leq \chi_i(q - h) \leq \min(\chi_i(v - h), \chi_i(w - h)) \iff$$

$$0 \leq \chi_i(q) - \chi_i(h) \leq \min(\chi_i(v), \chi_i(w)) - \chi_i(h) \iff$$

$$\chi_i(h) \leq \chi_i(q) \leq \min(\chi_i(v), \chi_i(w)).$$

En conclusión si q es tal que

$$h \leq q \leq \min(v, w), \quad \chi_i(h) \leq \chi_i(q) \leq \min(\chi_i(v), \chi_i(w)),$$

entonces $\overline{\mathcal{C}_{q,h}} \subseteq \mathcal{Q}$. Más aún las componentes irreducibles corresponden a los q maximales. En particular si $v = w$ se tiene que $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{C}_{v,h}}$ es irreducible y de dimensión

$$\dim(\mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^n h_i^2 + \chi_i(v - h)^2.$$

4.4. Variedad de estructuras de complejo.

Estudiaremos la geometría de la variedad de complejos. Entre otras cosas calcularemos la cantidad de componentes irreducibles, su dimensión y analizaremos la regularidad de las componentes. Entenderemos la intersección entre dos componentes irreducibles.

Supongamos ahora que tenemos un espacio vectorial graduado ($V = H(V)$) y queremos analizar $\mathcal{D} = \mathcal{D}(V) \subseteq \text{hom}^1(V, V)$ que consiste en todas las estructuras de complejo admisibles en V .

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \mathcal{D}(V) &:= \{d \in \text{hom}^1(V, V) \mid [d, d] = 0\} = \{d \in \text{hom}^1(V, V) \mid dd + dd = 0\} = \\ &= \{d \in \text{hom}^1(V, V) \mid dd = 0\} = \{d \in \text{hom}^0(V, V[1]) \mid d^2 = 0\}. \end{aligned}$$

El grupo $GL(V)$ actúa en \mathcal{D} . No confundir con la acción de $GL(V) \times GL(V[1])$ sobre $\text{hom}^1(V, V)$, que tiene como órbitas a $\mathcal{C}_{r,r}$. La diferencia radica en la condición $d^2 = 0$ que antes no se presentaba.

Definamos entonces

$$\mathcal{D}_r := \{d \in \mathcal{C}_{r,r} \mid d^2 = 0\}.$$

Notar que en la definición de \mathcal{D}_r hemos utilizado $\mathcal{C}_{r,r}$, esto es debido a que $V = H(V)$, luego $\text{rk}(d) = \text{rk}([d])$ para todo $d \in \text{hom}^0(V, V[1])$.

La acción de $GL(V)$ preserva los conjuntos \mathcal{D}_r ,

$$(\phi d \phi^{-1})^2 = \phi d \phi^{-1} \phi d \phi^{-1} = \phi d^2 \phi^{-1} = 0.$$

Como $d^{i+1}d^i = 0$, es posible elegir bases de V^i y de V^{i+1} para que las matrices de ambas aplicaciones queden diagonales (con unos o ceros en la diagonal), luego la acción es transitiva sobre \mathcal{D}_r haciendo que sean órbitas. Más aún, las componentes irreducibles de \mathcal{D} son $\overline{\mathcal{D}_r}$ para algunos $r \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ convenientes.

4.4.1 Proposición. Sea $v = \dim V$ y sea $r \in \mathbb{N}_0^{n+1}$. Si $\mathcal{D}_r \neq \emptyset$ entonces \mathcal{D}_r es suave, irreducible y

$$\dim \mathcal{D}_r = \sum_{i=0}^n (v_i + v_{i+1} - r_i - r_{i-1})r_i.$$

Demostración. Consideremos la aplicación que olvida el último diferencial

$$\pi : \mathcal{D}_r \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{r}}$$

Las fibras $\pi^{-1}(\widehat{d}) = \pi^{-1}(d^0, d^1, \dots, d^{n-1})$ son

$$\{d^n \in \text{hom}(V^n, V^{n+1}) \mid d^n d^{n-1} = 0, \text{rk}(d^n) = r_n\}.$$

Luego, independientemente de \widehat{d} , todas las fibras son isomorfas a la variedad

$$\{f \in \text{hom}(V^n/\text{im}(d^{n-1}), V^{n+1}) \mid \text{rk}(f) = r_n\}.$$

Esta es irreducible, suave y de dimensión

$$((v_n - r_{n-1}) + v_{n+1} - r_n)r_n = (v_n + v_{n+1} - r_n - r_{n-1})r_n.$$

El resultado se obtiene por inducción. □

4.4.2 Proposición. Sea $v = \dim V$ y $r \in \mathbb{N}_0^{n+1}$. Si $\mathcal{D}_r \neq \emptyset$ entonces

$$\overline{\mathcal{D}_r} = \bigcup_{t \leq r} \mathcal{D}_t = \{d \mid d^2 = 0, \text{rk}(d) \leq r\}.$$

Demostración. Sea

$$E_r := \{d : V \longrightarrow V[1] \mid d \circ d = 0, \text{rk}(d) \leq r\}.$$

Como es cerrado, tenemos $\overline{\mathcal{D}_r} \subseteq E_r$. Sea

$$\mathcal{I}_r := \{(L, d) \mid \text{im } d^i \subseteq L^{i+1} \subseteq \ker d^{i+1}\} \subseteq \mathcal{G}_{r,r}(V) \times \mathcal{D}.$$

Las fibras de la primera proyección $\pi_1^{-1}(L) \cong \text{hom}^0(V/L, L[1])$ son irreducibles de la misma dimensión, entonces \mathcal{I}_r y $\text{im}(\pi_2) = E_r$ son irreducibles. Dado que \mathcal{D}_r es denso en E_r obtenemos la igualdad. \square

4.4.3 Corolario. $\mathcal{D}_t \subseteq \overline{\mathcal{D}_r} \iff t \leq r$. \square

4.4.4 Corolario. $\overline{\mathcal{D}_t} \cap \overline{\mathcal{D}_r} = \overline{\mathcal{D}_{\min(t,r)}}$. \square

4.4.5 Proposición. Sea $v = \dim V$ y sea $r \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ tal que $r_i \leq v_{i+1}$, entonces

$$\mathcal{D}_r \neq \emptyset \iff r_i + r_{i-1} \leq v_i.$$

Más aún si $d \in \mathcal{D}_r$,

$$\dim H^i(V, d) = v_i - r_i - r_{i-1}.$$

Demostración. Construyamos un diferencial por inducción. El caso d^0 es trivial. Supongamos que hemos construido d^0, \dots, d^{i-1} y construyamos $V^i \xrightarrow{d^i} V^{i+1}$. Como necesitamos $d \circ d = 0$, esto significa que d^i pasa al cociente,

$$d^i : V^i / \text{im}(d^{i-1}) \longrightarrow V^{i+1}.$$

Para que $\text{rk}(d^i) = r_i$ se necesita $r_i \leq \min(v_i - r_{i-1}, v_{i+1})$. Dado que por hipótesis $r_i \leq v_{i+1}$, se tiene que existe d^i si y sólo si $r_i \leq v_i - r_{i-1}$.

Notar en particular que hemos calculado la dimensión de la homología en grado i . \square

4.4.6. Caractericemos los espacios tangentes a \mathcal{D} .

Sea $d \in \mathcal{D}$ y $\delta \in \text{hom}^1(V, V)$ y $\varepsilon \in \mathbb{C}[x]/(x^2)$ tal que $\varepsilon^2 = 0$,

$$d + \varepsilon\delta \in \mathcal{D} \iff 0 = (d + \varepsilon\delta)^2 = \varepsilon(d\delta + \delta d) \iff [d, \delta] = 0 \iff \delta \in \ker([d, -])$$

donde $[d, -] : \text{hom}^1(V, V) \longrightarrow \text{hom}^2(V, V)$.

Luego si $d \in \mathcal{D}_r$ con r maximal (\mathcal{D}_r resulta una componente irreducible de \mathcal{D}) se tiene

$$\dim \ker([d, -]) = \dim(\mathcal{D}_r) = \sum_{i=0}^n (\dim V^i + \dim V^{i+1} - r_i - r_{i-1})r_i$$

Recordar que \mathcal{D}_r es suave y luego d es regular. Caractericemos ahora los espacios tangentes en \mathcal{D}_s . Sea $d \in \mathcal{D}_s$ y $\delta \in \text{hom}^1(V, V)$ y ε tal que $\varepsilon^2 = 0$,

$$\begin{aligned} d + \varepsilon\delta \in \mathcal{D}_s &\iff \text{rk}(d + \varepsilon\delta) = s \iff \\ \exists \phi \in GL(V), \alpha \in \text{hom}^0(V, V) \mid d + \varepsilon\delta &= (\phi + \varepsilon\alpha).d.(\phi^{-1} - \varepsilon\alpha) \iff \\ d + \varepsilon\delta = \phi d \phi^{-1} + \varepsilon \alpha d \phi^{-1} - \varepsilon \phi d \alpha &\iff \delta = \alpha d \phi^{-1} - \phi d \alpha \iff \\ \phi^{-1} \delta \phi = \phi^{-1} \alpha d - d \alpha \phi &\iff \delta = [d, \alpha] \end{aligned}$$

donde $[d, -] : \text{hom}^0(V, V) \rightarrow \text{hom}^1(V, V)$. Luego el tangente a la órbita de d viene dado por $\text{im}([d, -])$ y luego para algún s maximal se tiene:

$$\dim \text{im}([d, -]) = \dim(\mathcal{D}_s) = \sum_{i=0}^n (\dim V^i + \dim V^{i+1} - s_i - s_{i-1}) s_i$$

En conclusión el problema de deformación de estructuras de complejo sobre un espacio vectorial graduado es gobernado por $\text{hom}(V, V)$ que es una *GLA*. Su variedad de Maurer-Cartan es justamente \mathcal{D} .

4.4.1. Subvariedad de complejos exactos.

En esta pequeña subsección nos detendremos a estudiar la subvariedad de complejos exactos. Veremos condiciones necesarias y suficientes para que existan estructuras exactas.

Consideremos dentro de $\mathcal{D}(V)$ las estructuras de complejos exactos. Llamemos a esta subvariedad $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V) \subseteq \mathcal{D}(V)$.

Sea $e_i := \chi_i(v) \geq 0$ donde $v = \dim(V)$, se tiene por 4.4.5,

$$e_i + e_{i-1} = \chi_i(v) + \chi_{i-1}(v) = v_i \leq v_i \implies \overline{\mathcal{D}_e} \subseteq \mathcal{D}.$$

$$\dim(\mathcal{D}_e) = \sum_{i=0}^n (v_i + v_{i+1} - e_i - e_{i-1}) e_i.$$

Notar que si $d \in \mathcal{D}_e$ entonces $\dim H(V, d) = 0$ pues $v_i - e_{i-1} - e_i = 0$. Se deduce de 4.4.5 que cualquier diferencial exacto pertenece a \mathcal{D}_e , luego

$$\mathcal{E} = \overline{\mathcal{D}_e} = \{d \mid \text{rk}(d^i) \leq e_i\}.$$

Si algún $e_i < 0$ no hay diferenciales exactos.

4.4.7 Corolario. *Toda $d \in \mathcal{D}$ exacta, es rígida. Ya que el tangente a la variedad y a la órbita coinciden. La vuelta en principio es falsa ya que en \mathcal{D} pueden haber otras componentes irreducibles de dimensión máxima. Depende de $\dim(V)$.*

5. Variedad de \mathfrak{g} -estructuras.

Resumen

En este capítulo utilizaremos ideas del capítulo 4 para poder estudiar dos variedades que nos servirán en el capítulo 6. La variedad de submódulos de un módulo de Lie fijo y la variedad de morfismos de módulos de \mathfrak{g} -rango fijo. Estas variedades están relacionadas con la Grassmanniana y con variedades determinantaes.

Estudiaremos la geometría de la variedad de submódulos de Lie y de morfismos de módulos. Entre otras cosas calcularemos la cantidad de componentes irreducibles, sus dimensiones y analizaremos la regularidad de las componentes. Primero estudiaremos la variedad de morfismos de \mathfrak{g} -rango fijo y luego la variedad de submódulos de un módulo fijo. La hipótesis de semi-simplicidad en \mathfrak{g} es fundamental en todo el capítulo.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple sobre \mathbb{C} . Sea $R(\mathfrak{g})$ el anillo de \mathfrak{g} -representaciones de dimensión finita. A cada representación V le asociamos su clase $cl(V) \in R(\mathfrak{g})$. Toda representación de dimensión finita se escribe como suma de representaciones irreducibles. Esta descomposición es única salvo isomorfismos (ver [FH91, §23.2]). Por ejemplo, es sabido, [FH91, 11.31], que si $V = S^r(\mathbb{C}^2)$ entonces

$$cl(S^2(V)) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} cl(S^{2r-4m}(\mathbb{C}^2)) \in R(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})).$$

5.0.8 Definición. Para $S \in R(\mathfrak{g})$ diremos que $S \geq 0$ si en su descomposición como suma de representaciones irreducibles tiene sólo coeficientes no negativos, en particular

$$S_1 \leq S_2 \iff S_2 - S_1 \geq 0.$$

Notar que $V \subseteq W \iff cl(V) \leq cl(W)$ donde $cl(V)$ y $cl(W)$ son sus clases en $R(\mathfrak{g})$.

Dada $f : V \rightarrow W$ un morfismo definamos su \mathfrak{g} -rango como

$$rk_{\mathfrak{g}}(f) := cl(\text{im}(f)) \in R(\mathfrak{g}) \implies rk_{\mathfrak{g}}(f) \leq cl(W).$$

Sea $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$ la variedad de todos los \mathfrak{g} -morfismos de \mathfrak{g} -rango $s \in R(\mathfrak{g})$. Dada una representación V y una subrepresentación S , sea $Gr_{\mathfrak{g}}(V, S)$ la variedad de todas las subrepresentaciones isomorfas a S . Dado que esta variedad depende sólo de las clases de V y de S , en general la denotaremos $Gr_{\mathfrak{g}}(cl(V), cl(S))$.

El objetivo de este capítulo es analizar $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$ y $Gr_{\mathfrak{g}}(V, S)$. Empecemos con $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$.

5.0.9 Proposición. *Sea V y W dos representaciones con $cl(V) = \sum_{i=1}^k n_i cl(V_i)$ y $cl(W) = \sum_{i=1}^k m_i cl(V_i)$ entonces*

$$\dim \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \dim \text{hom}_{\mathfrak{g}}(cl(V), cl(W)) = \sum_{i=1}^k n_i m_i.$$

Demostración. Se obtiene de:

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) &= \text{hom}_{\mathfrak{g}}(\oplus V_i^{n_i}, \oplus V_j^{m_j}) = \oplus_{i,j} \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V_i^{n_i}, V_j^{m_j}) = \\ &= \oplus_{i,j} \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V_i, V_j)^{n_i m_j} = \oplus_i \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V_i, V_i)^{n_i m_i} = \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{n_i m_i}. \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia del lema de Schur, [Hum78, §6.1]. \square

5.0.10 Lema. *Sea V una representación irreducible y sea $n, m, s \in \mathbb{N}$ con $s \leq \min(m, n)$ entonces*

$$\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V^n, V^m)_{V^s} \cong \text{hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)_s.$$

Demostración. La representación V tiene sólo una recta de peso máximo, $\langle v \rangle$. En general V^n tiene sólo n vectores de peso máximo linealmente independientes $\{v_1, \dots, v_n\}$. Un morfismo desde V^n queda determinado por estos vectores. Todo morfismo manda vectores de peso máximo en vectores de peso máximo, luego

$$\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V^n, V^m) = \text{hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m).$$

Sea $f \in \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V^n, V^m)$ tal que $\text{im}(f) \cong V^s$ entonces f manda los vectores de peso máximo v_1, \dots, v_n a s vectores de peso máximo linealmente independientes de V^m . En otras palabras, f determina una aplicación lineal de rango s . Finalmente obtenemos el resultado. \square

5.0.11 Corolario. *Sean V y W dos representaciones con $cl(V) = \sum_{i=1}^k n_i cl(V_i)$, $cl(W) = \sum_{i=1}^k m_i cl(V_i)$ y sea $0 \leq s \leq \min(cl(V), cl(W))$ con $s = \sum_{i=1}^k s_i cl(V_i)$ entonces*

$$\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s = \text{hom}(\mathbb{C}^{n_1}, \mathbb{C}^{m_1})_{s_1} \times \dots \times \text{hom}(\mathbb{C}^{n_k}, \mathbb{C}^{m_k})_{s_k}.$$

En particular, tener \mathfrak{g} -rango máximo es una condición genérica.

Demostración. Sale del lema anterior y de lo siguiente:

$$\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s = \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V_1^{n_1}, V_1^{m_1})_{V_1^{s_1}} \times \dots \times \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V_k^{n_k}, V_k^{m_k})_{V_k^{s_k}}.$$

\square

5.0.12 Proposición. *Dados $cl(V) = \sum_{i=1}^k n_i cl(V_i)$, $cl(W) = \sum_{i=1}^k m_i cl(V_i)$ y $s = \sum_{i=1}^k s_i cl(V_i)$ tal que $0 \leq s \leq \min(cl(V), cl(W))$ tenemos que la variedad $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$ es irreducible, suave y*

$$\dim \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s = \sum_{i=1}^k (n_i + m_i - s_i) s_i.$$

Demostración. Ya sabemos que la variedad $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$ es irreducible y suave. La dimensión se obtiene de [Har92, 12.2],

$$\dim \text{hom}(\mathbb{C}^{n_i}, \mathbb{C}^{m_i})_{s_i} = (n_i + m_i - s_i) s_i.$$

□

5.0.13 Observación. Si tomamos $V = W$, un endomorfismo de \mathfrak{g} -rango máximo es lo mismo que un automorfismo, luego

$$\text{aut}_{\mathfrak{g}}(V) \subseteq \text{end}_{\mathfrak{g}}(V)$$

es denso de dimensión $\sum_{i=1}^k n_i^2$ donde $cl(V) = \sum_{i=1}^k n_i cl(V_i)$.

$$\text{aut}_{\mathfrak{g}}(V) = \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)_{cl(V)} = \prod_{i=1}^k \text{hom}(\mathbb{C}^{n_i}, \mathbb{C}^{n_i})_{n_i} = \prod_{i=1}^k \text{aut}(\mathbb{C}^{n_i}).$$

5.0.14 Proposición. *El grupo $\text{aut}_{\mathfrak{g}}(V) \times \text{aut}_{\mathfrak{g}}(W)$ actúa a izquierda en $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ y la acción es transitiva sobre $\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$.*

Demostración. Dadas $(\phi, \psi) \in \text{aut}_{\mathfrak{g}}(V) \times \text{aut}_{\mathfrak{g}}(W)$ u $f \in \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s$, sea

$$(\phi, \psi).f := \phi f \psi^{-1}$$

Los automorfismos ϕ y ψ deben mandar cada componente irreducible en una copia de esa componente, luego

$$\text{im}(f) \cong \text{im}(\phi f \psi^{-1}) \implies \text{rk}_{\mathfrak{g}}(f) = \text{rk}_{\mathfrak{g}}(\phi f \psi^{-1}).$$

La transitividad se obtiene de argumentos estándares. □

5.0.15 Proposición. *Dados $cl(V) = \sum_{i=1}^k n_i cl(V_i)$, $cl(W) = \sum_{i=1}^k m_i cl(V_i)$ y $s = \sum_{i=1}^k s_i cl(V_i)$ tal que $0 \leq s \leq \min(cl(V), cl(W))$ tenemos*

$$\overline{\text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_s} = \bigcup_{t \leq s} \text{hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)_t = \{f : V \longrightarrow W \mid \text{rk}_{\mathfrak{g}}(f) \leq s\}.$$

Demostración. Se obtiene de

$$\overline{\text{hom}(\mathbb{C}^{n_i}, \mathbb{C}^{m_i})_{s_i}} = \{f : \mathbb{C}^{n_i} \longrightarrow \mathbb{C}^{m_i} \mid \text{rk}(f) \leq s_i\}.$$

□

Analicemos ahora la variedad $Gr_{\mathfrak{g}}(V, S)$.

5.0.16 Lema. *Sea V una representación irreducible y sea $s \leq n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$Gr_{\mathfrak{g}}(V^n, V^s) \cong Gr(n, s).$$

Demostración. Una subrepresentación de V^n isomorfa a V^s determina y queda determinada por un subespacio de dimensión s dentro del espacio vectorial de dimensión n de vectores de peso máximo de V^n . \square

5.0.17 Corolario. *Dada $S \subseteq V$ con $cl(V) = \sum_{i=1}^k n_i cl(V_i)$ y $cl(S) = \sum_{i=1}^k s_i cl(V_i)$.*

$$Gr_{\mathfrak{g}}(V, S) = Gr_{\mathfrak{g}}(V_1^{n_1}, V_1^{s_1}) \times \dots \times Gr_{\mathfrak{g}}(V_k^{n_k}, V_k^{s_k}).$$

Demostración. Toda subrepresentación $S \subseteq V$ viene dada por un morfismo $S \hookrightarrow V$, luego se descompone como suma de $V_i^{s_i} \hookrightarrow V_i^{n_i}$, en otras palabras, tenemos subrepresentaciones $V_i^{s_i} \subseteq V_i^{n_i}$. \square

5.0.18 Proposición. *Dada $S \subseteq V$ con $cl(V) = \sum_{i=1}^k n_i cl(V_i)$ y $cl(S) = \sum_{i=1}^k s_i cl(V_i)$. La variedad $Gr_{\mathfrak{g}}(V, S)$ es irreducible, suave y*

$$\dim Gr_{\mathfrak{g}}(V, S) = \sum_{i=1}^k (n_i - s_i) s_i.$$

Demostración. Ya sabemos que la variedad $Gr_{\mathfrak{g}}(V, S)$ es irreducible y suave. La dimensión sale de [Har92, p.138],

$$\dim Gr(n, s) = (n - s)s.$$

\square

5.0.19 Observación. Con estas definiciones y construcciones es posible construir las variedades de \mathfrak{g} -complejos, de \mathfrak{g} -subcomplejos de un \mathfrak{g} -complejo dado, de morfismos entre \mathfrak{g} -complejos de rango fijo. Incluso estudiar la representabilidad del funtor $Quot_{\mathfrak{g}}$. Esto lo dejaremos para un trabajo futuro.

6. Variedad de DGLA.

Resumen

En este capítulo estudiaremos las variedades de estructuras de DGLA. Fijado un espacio vectorial graduado definiremos la variedad de todas las posibles estructuras de DGLA admisibles. Empezaremos analizando el caso general, luego el caso trivial y finalmente en la última subsección el caso semisimple. Daremos condiciones suficientes para que la variedad de Maurer-Cartan de una DGLA con E^0 simple sea de la forma M_y .

Dado una DGLA F , queremos estudiar qué tipos de variedades de Maurer-Cartan pueden aparecer. Sabremos de 6.0.20 que si $E \xrightarrow{\phi} F$ es un morfismo donde ϕ_0, ϕ_1 son biyectivas y ϕ_2 es inyectiva, $M(E) \cong M(F)$ donde el isomorfismo es equivariante, con lo cual en vez de considerar toda la DGLA F podemos reducirnos a estudiar la DGLA E de la forma

$$E = F^0 \oplus F^1 \oplus \ker(d^2) \subseteq F.$$

El diferencial y el corchete son los de F . Con esta reducción, la variedad de Maurer-Cartan de F y de E son iguales. Definiremos la variedad $\mathcal{DGLA}(E)$ como la variedad de posibles estructuras de DGLA sobre E . Toda variedad de Maurer-Cartan en una DGLA arbitraria F aparece dentro de una DGLA $e \in \mathcal{DGLA}(E)$ donde $E = F^0 \oplus F^1 \oplus \ker(d^2)$.

6.0.20 Proposición. *Todo morfismo de grado cero entre dos DGLA, $\phi : E \rightarrow F$, induce un morfismo equivariante ϕ_* entre $M(E)$ y $M(F)$. Si ϕ_0, ϕ_1 es biyectiva y ϕ_2 es inyectiva, ϕ_* es un isomorfismo equivariante.*

Demostración. El morfismo ϕ induce un morfismo entre las variedades de Maurer-Carta,

$$x \in M(E) \iff 2dx + [x, x] = 0 \implies$$

$$2d(\phi(x)) + [\phi(x), \phi(x)] = \phi(2dx + [x, x]) = 0 \implies \phi(x) \in M(F) \implies$$

$$M(E) \xrightarrow{\phi_*} M(F).$$

Este morfismo es equivariante, sean $a \in E^0$, $x \in M(E)$ y llamemos $b = \phi_0(a) \in F^0$ y $y = \phi_1(x) \in M(F)$. Como ϕ es morfismo de DGLA, vale $\phi_1(d^0 a) = d^0 \phi_0(a) = d^0 b$,

$$\phi_*(a \cdot x) = \phi_*\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left(x - \frac{da}{k+1}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \left(y - \frac{db}{k+1}\right) = b \cdot y.$$

Finalmente, si ϕ_1 es sobreyectiva y ϕ_2 inyectiva,

$$z \in M(F) \implies 0 = 2dz + [z, z] = 2d\phi(x) + [\phi(x), \phi(x)] = \phi(2dx + [x, x]) \implies x \in M(E).$$

Luego ϕ_* es sobreyectiva. Si ϕ_1 es inyectiva, claramente ϕ_* también. \square

6.0.21 Definición. Supondremos que la DGLA E viene dada por E^0 un álgebra de Lie, E^1 y E^2 representaciones, d^0 y d^1 morfismos \mathbb{C} -lineales y $f : S^2(E^1) \rightarrow E^2$ morfismo de representaciones. La terna (d^0, d^1, f) debe cumplir las siguientes compatibilidades,

$$d^0([a, b]) = -b.d^0(a) + a.d^0(b), \quad d^1(a.x) = f(d^0 a, x) + a.d^1(x), \quad d^1 d^0 = 0$$

El morfismo d^0 resulta una derivación ([Wei94, 7.4.3]).

Definamos la variedad de estructuras de DGLA admisibles en $E = E^0 \oplus E^1 \oplus E^2$, donde E^0 es un álgebra de Lie y E^1 y E^2 son E^0 -módulos como

$$\mathcal{DGLA}(E) := \{(d^0, d^1, f) \mid \text{compatibilidades}\}.$$

Denotemos

$$\mathcal{DGLA}(E)_0 := \{(0, d^1, f)\} \subseteq \mathcal{DGLA}(E).$$

Esta variedad será utilizada en todo este capítulo. Notar que si $d^0 = 0$ entonces d^1 resulta un morfismo de E^0 -módulos, con lo cual

$$\mathcal{DGLA}(E)_0 = \text{hom}_{E^0}(E^1, E^2) \times \text{hom}_{E^0}(S^2(E^1), E^2) \cong \text{hom}_{E^0}(E^1 \oplus S^2(E^1), E^2).$$

Más aún, la acción de gauge de E^0 sobre E^1 se reduce a la acción exponencial.

6.1. E general.

En esta subsección obtendremos la mayor cantidad de información posible acerca de los morfismos d^0 , d^1 y f sin pedir condiciones para E . Debido a esto se obtendrán resultados poco prácticos pero que marcan las distintas hipótesis que se necesitan para poder caracterizar la variedad $\mathcal{DGLA}(E)$.

Supongamos que fijamos d^0 y d^1 y sea f compatible. Si $a \in \ker d^0$ vale

$$ad^1(x) = d^1(ax),$$

luego d^1 es un morfismo de $\ker d^0$ -módulos. Como $d^1 d^0 = 0$, d^1 debe ser nula sobre $\text{im} d^0$. En particular será nula sobre el $\ker d^0$ -módulo generado por $\text{im} d^0$. En otras palabras, sobre $U \ker d^0 \cdot (\text{im} d^0)$.

Como f queda determinada sobre $\text{im}(d^0) \otimes E^1 \oplus E^1 \otimes \text{im}(d^0)$ y al ser morfismo E^0 -lineal, podemos identificar f con un morfismo en $\text{hom}_{E^0}(S^2(E^1/UE^0 \cdot \text{im}(d^0)), E^2)$.

Consideremos la primera proyección $\pi_1 : \mathcal{DGLA}(E) \rightarrow \text{der}_{\mathbb{C}}(E^0, E^1)$. Su fibra sobre algún d^0 es:

$$\pi_1^{-1}(d^0) = \{(d^1, f) \mid d^1(a.x) = f(d^0 a, x) + a.d^1(x), d^1 d^0 = 0\}.$$

Si proyectamos nuevamente sobre la primer variable y tomamos fibra obtenemos:

$$p_1^{-1}(d^1) \cong \text{hom}_{E^0}(S^2(E^1/UE^0 \cdot \text{im}(d^0)), E^2)$$

y la imagen de esta proyección es:

$$\text{im}(p_1) \cong \text{hom}_{\ker d^0}(E^1/U \ker d^0 \cdot \text{im}(d^0), E^2).$$

Para cada subálgebra $\mathfrak{g} \subseteq E^0$, cada E^0 -submódulo $S \subseteq E^1$ y cada \mathfrak{g} -submódulo $T \subseteq E^1$ definimos

$$\text{der}_{\mathbb{C}}(E^0, E^1)_{\mathfrak{g}, S, T} := \{d^0 \mid \ker d^0 = \mathfrak{g}, U E^0 \cdot \text{im}(d^0) = S, U \mathfrak{g} \cdot \text{im}(d^0) = T\}.$$

Entonces la variedad $\mathcal{DGLA}(E)$ es una unión de fibrados sobre $\text{der}_{\mathbb{C}}(E^0, E^1)_{\mathfrak{g}, S, T}$.

6.2. E^1 y E^2 módulos triviales.

En esta subsección supondremos que E^1 y E^2 son E^0 -módulos triviales. Es el otro caso extremo en contraposición a la subsección anterior. En este caso se pierde toda la estructura de Lie dejando sólo variedades algebraicas sin estructuras invariantes. Hallaremos las componentes de la variedad de DGLA y sus dimensiones. Se presentará una variedad de incidencia en la cual las fibras de una proyección son variedades de Maurer-Cartan.

La condición de DGLA se traduce en:

$$d^0([a, b]) = 0, \quad 0 = f(d^0 a, x), \quad d^1 d^0 = 0$$

Para cada elección de d^0 , los morfismos d^1 y f quedan caracterizados por

$$(d^1, f) \in \text{hom}_{\mathbb{C}}(E^1/\text{im} d^0, E^2) \times \text{hom}_{\mathbb{C}}(S^2(E^1/\text{im} d^0), E^2)$$

Por otro lado, podemos identificar d^0 con un morfismo

$$d^0 \in \text{hom}_{\mathbb{C}}(E^0/[E^0, E^0], E^1).$$

Fijemos $r \in \mathbb{N}$ y denotemos

$$\text{hom}_{\mathbb{C}}(E^0/[E^0, E^0], E^1)_r := \{d \in \text{hom}_{\mathbb{C}}(E^0/[E^0, E^0], E^1) \mid \text{rk}(d) = r\},$$

$$\mathcal{DGLA}(E)_r := \{(d^0, d^1, f) \in \mathcal{DGLA}(E) \mid \text{rk}(d^0) = r\}.$$

Entonces tenemos la fibra de la primera proyección π_1

$$\mathcal{DGLA}(E)_r \xrightarrow{\pi_1} \text{hom}_{\mathbb{C}}(E^0/[E^0, E^0], E^1)_r,$$

$$\pi_1^{-1}(d^0) \cong \text{hom}_{\mathbb{C}}(E^1/\text{im}(d^0), E^2) \times \text{hom}_{\mathbb{C}}(S^2(E^1/\text{im}(d^0)), E^2).$$

Son todas isomorfas a espacios vectoriales de la misma dimensión, entonces se tiene la siguiente unión de variedades irreducibles y suaves

$$\mathcal{DGLA}(E) = \bigcup_r \mathcal{DGLA}(E)_r,$$

$$\dim \mathcal{DGLA}(E)_r = (e^0 - \dim_{\mathbb{C}}[E^0, E^0] + e^1 - r)r + (e^1 - r)e^2 + \frac{(e^1 - r)(e^1 - r + 1)}{2}e^2.$$

La dimensión es cuadrática en r , luego a lo sumo hay dos componentes de dimensión máxima. Por otro lado si el álgebra es semisimple, vale $E^0 = [E^0, E^0]$ lo que simplifica un poco el cálculo de la dimensión y como d^0 resulta nula, la variedad queda irreducible,

igual a $\mathcal{DGLA}(E)_0$.

Analizamos la variedad de incidencia $\mathcal{I} \subseteq E^1 \times \mathcal{DGLA}(E)_0$. Estamos suponiendo $d^0 = 0$.

$$\begin{array}{ccc} & \{(x, e) \mid x \in M(e)\} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ E^1 & & \mathcal{DGLA}(E)_0 \end{array}$$

Entonces

$$\pi_1^{-1}(x) = \{(d^1, f) \mid (d^1 + f)(2x + xx) = 0\} \cong \text{hom}_{\mathbb{C}}((E^1 \oplus S^2(E^1))/\langle 2x + xx \rangle, E^2)$$

Esto nos permite calcular la dimensión de \mathcal{I} y como conocemos la dimensión de $\mathcal{DGLA}(E)_0$ tenemos que para $e = (0, d^1, f)$ genérico:

$$\dim M(e) = e^1 - e^2$$

Por otro lado, como \mathcal{I} resultó suave e irreducible al igual que $\mathcal{DGLA}(E)_0$, se tiene que genéricamente $M(e)$ también lo es.

6.3. E^0 semisimple.

Como el título indica estaremos trabajando con E^0 semisimple. En primer lugar estudiaremos la variedad de DGLA y sus componentes, 6.3.2. Luego analizaremos qué tipos de variedades de Maurer-Cartan pueden aparecer. Como primer resultado en esta dirección obtuvimos que cualquier variedad de Maurer-Cartan aparece en una GLA, 6.3.3. Es por esto que nos hemos concentrado en las variedades de Maurer-Cartan de una GLA. Hemos obtenido en 6.3.7 que bajo ciertas hipótesis las variedades de Maurer-Cartan son las estudiadas en el capítulo 3. Por último hemos tratado rápidamente la variedad de GLA y hemos dado algunos ejemplos clásicos relacionándolos con variedades de Maurer-Cartan.

Supondremos que la DGLA E es de la siguiente forma

$$E = E^0 \oplus E^1 \oplus E^2, \quad d^0 : E^0 \longrightarrow E^1, \quad d^1 : E^1 \longrightarrow E^2, \quad f : S^2(E^1) \longrightarrow E^2,$$

donde E^1 y E^2 son E^0 -módulos, f es morfismo de Lie y d^0 y d^1 son \mathbb{C} -lineales. Cumplen:

$$d^0([a, b]) = -b.d^0(a) + a.d^0(b), \quad d^1(a.x) = f(d^0a, x) + a.d^1(x), \quad d^1d^0 = 0.$$

6.3.1 Notación. Dada $e \in \mathcal{DGLA}(E)$, denotamos por $M(e)$ a su variedad de Maurer-Cartan (es afín),

$$M(e) := \{x \in E^1 \mid 2d^1(x) + f(xx) = 0\}.$$

Utilizaremos letra minúscula para no confundir a la estructura de DGLA e con el espacio vectorial graduado E . Hay muchas estructuras de DGLA para el mismo espacio E .

Al igual que en el caso de módulos triviales, para conocer las componentes de $\mathcal{DGLA}(E)$ debemos fijar el $\text{rk}_{E^0}(\phi_{d^0})$ que ya no es más un número natural, sino un caracter.

6.3.2 Proposición. *Se tiene la siguiente unión de variedades irreducibles y suaves*

$$\mathcal{DGLA}(E) = \bigcup_v \mathcal{DGLA}(E)_v,$$

$$\dim \mathcal{DGLA}(E)_v = \dim E_v^1 + \dim \text{hom}_{E^0}(E^1/v, E^2) + \dim \text{hom}_{E^0}(S^2(E^1), E^2).$$

La unión se toma sobre todos los caracteres $0 \leq v \leq \text{cl}(E^1)$.

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned} E_v^1 &:= \{d^0 \in \text{der}_{\mathbb{C}}(E^0, E^1) \mid \text{cl}(UE^0 \text{im}(d^0)) = v\} = \{\phi : \mathcal{J} \longrightarrow E^1 \mid \text{rk}_{E^0}(\phi) = v\} = \\ &\{\phi_y : UE^0 \longrightarrow E^1 \mid \text{rk}_{E^0}(\phi_y) = v\} = \{y \in E^1 \mid \text{cl}(UE^0 y) = v\} \end{aligned}$$

La proyección $\pi_1 : \mathcal{DGLA}(E)_v \longrightarrow E_v^1$ tiene fibra

$$\pi_1^{-1}(d^0) = \{(d^1, f) \mid d^1(ax) = f(d^0 a, x) + ad^1(x), d^1 d^0 = 0\}$$

Sea $(d^1, f) \in \pi_1^{-1}(d^0)$, recordemos que f es un morfismo de E^0 -módulos y que $d^0 = \phi_y$ para algún $y \in E^1$, luego la condición de compatibilidad para (d^1, f) se traduce en:

$$\begin{aligned} d^1(ax) = f(ay, x) + ad^1(x) &= af(y, x) - f(y, ax) + ad^1(x) \iff \\ ad^1(x) + af(y, x) = d^1(ax) + f(y, ax) &\iff a(d^1 + f(y, -))(x) = (d^1 + f(y, -))(ax) \iff \\ d^1 + f(y, -) &\in \text{hom}_{E^0}(E^1, E^2). \end{aligned}$$

Proyectemos la variedad $\pi_1^{-1}(d^0)$ sobre la segunda variable con p_2 y tomemos fibra

$$\begin{aligned} p_2^{-1}(f) &= \{d^1 \mid d^1 + f(y, -) \in \text{hom}_{E^0}(E^1, E^2), d^1 d^0 = 0\} \cong \\ &\{g \in \text{hom}_{E^0}(E^1, E^2) \mid (g - f(y, -))d^0 = 0\}. \end{aligned}$$

La última condición se traduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0 &= (g - f(y, -))d^0(a) = (g - f(y, -))(ay) = g(ay) - f(y, ay) = \\ ag(y) - \frac{a}{2}f(yy) &= a(g(y) - \frac{1}{2}f(yy)) \quad \forall a \in E^0 \iff 2g(y) = f(yy). \end{aligned}$$

La equivalencia final proviene del hecho que E^0 es semisimple. En conclusión

$$p_2^{-1}(f) \cong \{g \in \text{hom}_{E^0}(E^1, E^2) \mid g(y) = f(yy)\} \cong \text{hom}_{E^0}(E^1/v, E^2)$$

y también

$$\text{im}(p_2) = \text{hom}_{E^0}(S^2(E^1), E^2).$$

□

Analicemos ahora las variedades de Maurer-Cartan dentro de una DGLA e . Veremos que toda variedad de Maurer-Cartan proviene de una DGLA con $d^0 = 0$. Cuando $d^0 = 0$ la acción de gauge es la acción exponencial.

6.3.3 Lema. *Sea $e \in \mathcal{DGLA}(E)$ con E^0 semisimple, entonces existe $\tilde{e} \in \mathcal{DGLA}(E)_0$, tal que*

$$M(e) \cong M(\tilde{e}).$$

Demostración. Recordemos que si $x \in M(e)$ entonces modificando $e = (d^0, d^1, f)$ tenemos que $x + y \in M(e)$ si y sólo si $y \in M(\tilde{e})$, donde $\tilde{e} := (d^0 + \phi_x, d^1 + f(x, -), f)$.

Más precisamente hay un isomorfismo afín entre $M(e)$ y $M(\tilde{e})$:

$$M(\tilde{e}) \longrightarrow M(e), \quad z \longrightarrow z + x.$$

Por otro lado, como toda derivación d^0 es interna, tenemos que existe $y \in E^1$ tal que $d^0 = \phi_y$, con lo cual si $y \in M(e)$, siempre podemos suponer que $e \in \mathcal{DGLA}(E)_0$.

Sea $e = (d^0, d^1, f) \in \mathcal{DGLA}(E)$ con $d^0 = \phi_y$ y veamos $y \in M(e)$,

$$\begin{aligned} 0 = d^1 d^0(a) &= d^1(ay) = f(d^0 a, y) + ad^1(y) = f(ay, y) + ad^1(y) = \\ &= \frac{1}{2}af(y, y) + ad^1(y) = a(d^1(y) + \frac{1}{2}f(y, y)). \end{aligned}$$

El elemento y cumple que para todo $a \in E^0$,

$$a(d^1(y) + \frac{1}{2}f(y, y)) = 0.$$

Como el álgebra es semisimple, vale $y \in M(e)$. □

6.3.4 Notación. Consideramos el morfismo

$$E^1 \xrightarrow{\tilde{\Delta}} E^1 \oplus S^2(E^1), \quad x \longrightarrow 2x + xx.$$

A cada submódulo $S \subseteq E^1 \oplus S^2(E^1)$, le asociamos

$$\tilde{\Delta}^{-1}(S) := \{x \in E^1 \mid 2x + xx \in S\}.$$

Esta variedad es similar a la de 3.1.6.

6.3.5 Proposición. *Si $e \in \mathcal{DGLA}(E)_0$ entonces*

$$M(e) = \tilde{\Delta}^{-1}(\ker e)$$

donde a la estructura e se la identifica con un morfismo $e : E^1 \oplus S^2(E^1) \longrightarrow E^2$

Demostración. Identificamos a $e = (0, d^1, f)$ con un morfismo de E^0 -módulos,

$$\begin{aligned} e = (0, d^1, f) &= d^1 + f : E^1 \oplus S^2(E^1) \longrightarrow E^2 \implies \\ \mathcal{DGLA}(E)_0 &\cong \text{hom}_{E^0}(E^1 \oplus S^2(E^1), E^2). \end{aligned}$$

Notar que

$$x \in M(e) \iff (d^1 + f)(2x + xx) = 0 \iff 2x + xx \in \ker(d^1 + f).$$

□

6.3.6 Corolario. Sea $S \subseteq E^1 \oplus S^2(E^1)$ tal que $S = S_1 \oplus S_2$ con $S_1 \subseteq E^1$ y $S_2 \subseteq S^2(E^1)$, entonces $\tilde{\Delta}^{-1}(S)$ es isomorfa a una variedad de Maurer-Cartan afín de una GLA.

Demostración.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^{-1}(S) &= \{x \in E^1 \mid 2x + xx \in S\} = \{x \in E^1 \mid 2x + xx \in S_1 \oplus S_2\} = \\ &= \{x \in E^1 \mid x \in S_1, xx \in S_2\} = \{x \in S_1 \mid xx \in S_2\}. \end{aligned}$$

Estas variedades son las que hemos analizado en [3]. Notar que de S_2 sólo interesa sus componentes en $S^2(S_1)$, ya que si $x \in S_1$, $xx \in S^2(S_1)$. \square

6.3.7 Corolario. Sea E una DGLA con E^0 semisimple y donde E^1 no comparte submódulos con $S^2(E^1)$. Si M es su variedad de Maurer-Cartan, entonces M es isomorfa a la variedad de Maurer-Cartan afín de una GLA.

Demostración. Sea $S \subseteq E^1 \oplus S^2(E^1)$ un submódulo, llamemos S_1 y S_2 a las proyecciones de S sobre E^1 y $S^2(E^1)$ respectivamente. De las hipótesis sabemos que $S = S_1 \oplus S_2$. \square

6.3.8. Una estructura de GLA se identifica con $(0, 0, f)$,

$$\mathcal{GLA}(E) := \text{hom}_{E^0}(S^2(E^1), E^2)$$

Como no hay diferencial, las variedades de Maurer-Cartan son conos en E^1 . Podemos suponerla en $\mathbb{P}E^1$ y definidas por $f \in \mathcal{GLA}(E)$. Vale $I(M) \subseteq S^*(E^{1\vee})$. Trasponiendo f se obtiene que $I(M)_2 = \text{im}(f^t) = \ker(f)^\circ$, con lo cual M es la intersección de todas las cuádricas que aparecen en $\text{im}(f^t)$. De hecho si E^2 es irreducible, f^t queda determinada por dónde manda el vector de peso máximo de $E^{2\vee} \cong \text{im}(f^t)$, luego

$$xx \in \ker(f) \iff q(xx) = 0 \quad \forall q \in \text{im}(f^t).$$

Esto se ha estudiado en el caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

6.3.9 Ejemplo. Sea $E^0 = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $E^1 = S^k(\mathbb{C}^n)$ la representación estándar y $E^{2\vee} = I(v_k)_2$ donde v_k es la variedad de Veronese obtenida como la imagen del morfismo de Veronese

$$v_k : \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(E^1) \cong \mathbb{P}^{\binom{n+k}{k}-1}$$

Se sabe que la variedad de Veronese está generada en grado dos y que puede obtenerse mediante la acción exponencial de E^0 en el vector de peso máximo $p \in E^1$ ([FH91, p.388, claim 23.52]). En otras palabras, $v_k = M_{(p)}$.

6.3.10 Ejemplo. [FH91, p.228-231]. Sea $V = \mathbb{C}^n$ la representación estándar de $E^0 = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $E^1 = \wedge^k V$ y $E^{2\vee} = I(Gr^k V)_2$. Dado que $I(Gr^k V)$ está generado en grado dos por las ecuaciones de Plücker,

$$M = Gr^k V \subseteq \mathbb{P}(E^1)$$

Estamos notando $Gr^k V$ al espacio de los cocientes de dimensión k .

Se tiene la siguiente descomposición donde los sumandos son representación irreducibles distintas de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

$$S^2(\wedge^k V) = \bigoplus_{i \geq 0} \Theta_{2i}.$$

Para $p \geq 1$, se tiene ([FH91, hard exercise 15.44]):

$$I(C^p Gr^k V)_2 = \bigoplus_{i \geq p} \Theta_{2i}$$

donde $C^1 Gr^k V = Gr^k V$ y $C^p Gr^k V$ corresponde a la variedad irreducible que es unión de rectas que unen los puntos $L, L' \in Gr^k$ con $\dim(L \cap L') \geq k - 2p + 1$. Sea M la intersección de cuádricas que contienen a $C^p Gr^k V$. En el libro [FH91] se preguntan qué propiedades geométricas tiene. Podemos afirmar que como $C^p Gr^k V$ es irreducible, $M = M_{C^p Gr^k V} = M_{\langle y \rangle}$ (3.3.5).

7. Bibliografía.

- [Bou61] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fascicule XXVII. Algèbre commutative. Chapitre 1: Modules plats. Chapitre 2: Localisation.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1290. Herman, Paris, 1961.
- [Bou70] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.* Hermann, Paris, 1970.
- [Bou07] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique.* Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1980 original [Masson, Paris; MR0610795].
- [Cuk11] Fernando Cukierman. *Varieties of Complexes and Foliations.* 2011. Preprint.
- [DTT09] Vasilij Dolgushev, Dmitry Tamarkin, and Boris Tsygan. Formality theorems for Hochschild complexes and their applications. *Lett. Math. Phys.*, 90(1-3):103–136, 2009.
- [EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Eis88] David Eisenbud. Linear sections of determinantal varieties. *Amer. J. Math.*, 110(3):541–575, 1988.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [GM88] William M. Goldman and John J. Millson. The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (67):43–96, 1988.
- [Gro67] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Har92] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. A first course.
- [Hum78] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.

- [Iac07] D. Iacono. Differential Graded Lie Algebras and Deformations of Holomorphic Maps. *ArXiv Mathematics e-prints*, January 2007.
- [Kan99] Vassil Kanev. Chordal varieties of Veronese varieties and catalecticant matrices. *J. Math. Sci. (New York)*, 94(1):1114–1125, 1999. Algebraic geometry, 9.
- [Lic82] Woody Lichtenstein. A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 84(4):605–608, 1982.
- [Muk03] Shigeru Mukai. *An introduction to invariants and moduli*, volume 81 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Translated from the 1998 and 2000 Japanese editions by W. M. Oxbury.
- [Mum76] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Complex projective varieties, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 221.
- [NR66] Albert Nijenhuis and R. W. Richardson, Jr. Cohomology and deformations in graded Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72:1–29, 1966.
- [Pro07] Claudio Procesi. *Lie groups*. Universitext. Springer, New York, 2007. An approach through invariants and representations.
- [Ser01] Jean-Pierre Serre. *Complex semisimple Lie algebras*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Translated from the French by G. A. Jones, Reprint of the 1987 edition.
- [Spr98] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*, volume 9 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.