Levantamiento[1] de límites[1] en teoría de mónadas[1] 2-dimensional[1]

Martin Szyld
Universidad de Buenos Aires - CONICET

XXVI ERAG @ ICAS, Buenos Aires, Argentina

[1] a definir en la presentación.

Un primer ejemplo: monoides libres

Un primer ejemplo: monoides libres

K es la categoría de conjuntos. $K \xrightarrow{T} K$ es el funtor "monoide libre":

$$TX = \{[x_1 ... x_n] \mid x_i \in X\}, \quad T(f)([x_1 ... x_n]) = [f(x_1) ... f(x_n)].$$

Un primer ejemplo: monoides libres

K es la categoría de conjuntos. $K \xrightarrow{T} K$ es el funtor "monoide libre":

$$TX = \{[x_1 ... x_n] \mid x_i \in X\}, \quad T(f)([x_1 ... x_n]) = [f(x_1) ... f(x_n)].$$

Tiene la siguiente estructura:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & K \end{tikzcd}, \quad i_X(x) = [x], \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "T \circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & K \end{tikzcd}, \quad TTX \xrightarrow{m_X} TX \text{ concatenar}$$

que cumple los axiomas: i unidad para m, m asociativa.

Un primer ejemplo: monoides libres

K es la categoría de conjuntos. $K \xrightarrow{T} K$ es el funtor "monoide libre":

$$TX = \{[x_1 ... x_n] \mid x_i \in X\}, \quad T(f)([x_1 ... x_n]) = [f(x_1) ... f(x_n)].$$

Tiene la siguiente estructura:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & K \end{tikzcd}, \quad i_X(x) = [x], \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "T \circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & K \end{tikzcd}, \quad TTX \xrightarrow{m_X} TX \text{ concatenar}$$

que cumple los axiomas: i unidad para m, m asociativa.

> (T, m, i) es un ejemplo de mónada en K, $T \equiv$ "teoría de monoides"

Monoides $\equiv$ "modelos" de $T \equiv T$-álgebras

K conjuntos, $A \in K$. Objetivo: expresar en términos de (T, m, i) a qué equivale una estructura de monoide para A.

Monoides $\equiv$ "modelos" de $T \equiv T$-álgebras

K conjuntos, $A \in K$. Objetivo: expresar en términos de (T, m, i) a qué equivale una estructura de monoide para A.

TA monoide libre: $(A, \bullet, 1)$ monoide $\rightsquigarrow \exists\, !\, a$ morfismo de monoides tq

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "①"] & TA \arrow[d, dotted, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} &① & a[x] &= x \\ &②a & a[] &= 1 \\ &②b & a[x_1 ... x_n ... x_m] &= a[x_1 ... x_n] \bullet a[x_{n+1} ... x_m] \end{aligned}$$

Monoides $\equiv$ "modelos" de $T \equiv T$-álgebras

K conjuntos, $A \in K$. Objetivo: expresar en términos de (T, m, i) a qué equivale una estructura de monoide para A.

TA monoide libre: $(A, \bullet, 1)$ monoide $\rightsquigarrow \exists\, !\ a$ morfismo de monoides tq

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, dotted, "a"] \arrow[dl, phantom, "1"] \\ & A \end{tikzcd}$$

1 $\quad a[x] = x$

2a $\quad a[] = 1$

2b $\quad a[x_1 ... x_n ... x_m] = a[x_1 ... x_n] \bullet a[x_{n+1} ... x_m]$

Obs: la estructura de monoide de A queda determinada por a:

$$x \bullet y = a[x] \bullet a[y] = a[x, y], \qquad 1 = a[].$$

Monoides ≡ "modelos" de T ≡ T-álgebras

K conjuntos, $A \in K$. Objetivo: expresar en términos de (T, m, i) a qué equivale una estructura de monoide para A.

TA monoide libre: $(A, \bullet, 1)$ monoide $\rightsquigarrow \exists\,!\ a$ morfismo de monoides tq

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "1"] & TA \arrow[d, dotted, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$$

1 $\qquad a[x] = x$

2a $\qquad a[\,] = 1$

2b $\qquad a[x_1 \dots x_n \dots x_m] = a[x_1 \dots x_n] \bullet a[x_{n+1} \dots x_m]$

Obs: la estructura de monoide de A queda determinada por a:

$$x \bullet y = a[x] \bullet a[y] = a[x, y], \qquad 1 = a[\,].$$

Y luego 2a y 2b equivalen a

$$\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$$

(ejercicio)

Monoides $\equiv$ "modelos" de $T \equiv T$-álgebras

K conjuntos, $A \in K$. Objetivo: expresar en términos de (T, m, i) a qué equivale una estructura de monoide para A.

TA monoide libre: $(A, \bullet, 1)$ monoide $\rightsquigarrow \exists\,!\; a$ morfismo de monoides tq

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, dotted, "a"] \arrow[dl, phantom, "1"] \\ & A \end{tikzcd}$$

1 $\quad a[x] = x$

2a $\quad a[] = 1$

2b $\quad a[x_1 \ldots x_n \ldots x_m] = a[x_1 \ldots x_n] \bullet a[x_{n+1} \ldots x_m]$

Obs: la estructura de monoide de A queda determinada por a:

$$x \bullet y = a[x] \bullet a[y] = a[x, y], \qquad 1 = a[].$$

Y luego 2a y 2b equivalen a

$$\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$$

(ejercicio)

A monoide $\equiv TA \xrightarrow{a} A$ tq 1 y 2 $\equiv_{\text{def}}$ (A, a) es T-álgebra.

La categoría T-Alg

- Mónada: $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "T\circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ asociativa.

La categoría T-Alg

- Mónada: $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "T \circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ asociativa.

- T-álgebra: $TA \xrightarrow{a} A$ tq $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$

La categoría T-Alg

- Mónada: $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "T\circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ asociativa.

- T-álgebra: $TA \xrightarrow{a} A$ tq $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$

- Morfismos de T-álgebra: $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b)$ es $A \xrightarrow{f} B$ tq

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$ (en el ejemplo da morfismo de monoides)

La categoría T-Alg

- Mónada: $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend left, "T\circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & K \end{tikzcd}$ asociativa.

- T-álgebra: $TA \xrightarrow{a} A$ tq $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$

- Morfismos de T-álgebra: $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b)$ es $A \xrightarrow{f} B$ tq

$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$ (en el ejemplo da morfismo de monoides)

- Se tiene un funtor de olvido $T\text{-}Alg \xrightarrow{U} K$

La 2-categoría $T\text{-}Alg_s$

Diferencia: $\mathcal{K}$ es 2-categoría, las flechas son 2-funtores, las transformaciones son 2-naturales.

La 2-categoría T-Alg_s

Diferencia: $\mathcal{K}$ es 2-categoría, las flechas son 2-funtores, las transformaciones son 2-naturales.

- 2-Mónada: $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "T \circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ asociativa.

La 2-categoría T-Alg_s

Diferencia: $\mathcal{K}$ es 2-categoría, las flechas son 2-funtores, las transformaciones son 2-naturales.

- 2-Mónada: $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "T\circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ asociativa.
- T-álgebra: $TA \xrightarrow{a} A$ tq $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$

La 2-categoría T-Alg_s

Diferencia: $\mathcal{K}$ es 2-categoría, las flechas son 2-funtores, las transformaciones son 2-naturales.

- 2-Mónada: $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "T\circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ asociativa.

- T-álgebra: $TA \xrightarrow{a} A$ tq $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$

- Morfismo (estricto) de T-álgebra: $A \xrightarrow{f} B$ tq $\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$

La 2-categoría $T\text{-}Alg_s$

Diferencia: $\mathcal{K}$ es 2-categoría, las flechas son 2-funtores, las transformaciones son 2-naturales.

- 2-Mónada: $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "T\circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ asociativa.
- T-álgebra: $TA \xrightarrow{a} A$ tq $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$
- Morfismo (estricto) de T-álgebra: $A \xrightarrow{f} B$ tq $\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$
- 2-cell: es 2-cell de $\mathcal{K}$ con una condición extra.

La 2-categoría $T\text{-}Alg_s$

Diferencia: $\mathcal{K}$ es 2-categoría, las flechas son 2-funtores, las transformaciones son 2-naturales.

- 2-Mónada: $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "i\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ unidad para $\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, bend left, "T\circ T"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$ asociativa.
- T-álgebra: $TA \xrightarrow{a} A$ tq $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$
- Morfismo (estricto) de T-álgebra: $A \xrightarrow{f} B$ tq $\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$
- 2-cell: es 2-cell de $\mathcal{K}$ con una condición extra.
- Se tiene un 2-funtor de olvido $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$

Ejemplos

Se tiene una 2-mónada T tal que sus álgebras son las...

- Categorías monoidales (tensoriales). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(1) = 1$, $F(C \otimes C') = FC \otimes FC'$

Ejemplos

Se tiene una 2-mónada T tal que sus álgebras son las...

- Categorías monoidales (tensoriales). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(1) = 1$, $F(C \otimes C') = FC \otimes FC'$
- Categorías con algún tipo de límite elegido (objeto terminal, productos finitos, límites finitos...). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(L) = L'$

Ejemplos

Se tiene una 2-mónada T tal que sus álgebras son las...

- Categorías monoidales (tensoriales). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(1) = 1$, $F(C \otimes C') = FC \otimes FC'$
- Categorías con algún tipo de límite elegido (objeto terminal, productos finitos, límites finitos...). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(L) = L'$

La noción de morfismo estricto no es la noción util en estos ejemplos.

Ejemplos

Se tiene una 2-mónada T tal que sus álgebras son las...

- Categorías monoidales (tensoriales). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(1) = 1$, $F(C \otimes C') = FC \otimes FC'$
- Categorías con algún tipo de límite elegido (objeto terminal, productos finitos, límites finitos...). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(L) = L'$

La noción de morfismo estricto no es la noción util en estos ejemplos.

- P, L 2-categorías, X: familia de objetos de $P \rightsquigarrow T$ 2-mónada con $K = P^X$ tal que $T\text{-}Alg_s = Hom_s(P, L)$, $UF = (Fp)_{p \in P}$. Levantamiento de límites $\equiv$ límites se calculan punto a punto en $Hom_s(P, L)$.

Ejemplos

Se tiene una 2-mónada T tal que sus álgebras son las...

- Categorías monoidales (tensoriales). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(1) = 1$, $F(C \otimes C') = FC \otimes FC'$
- Categorías con algún tipo de límite elegido (objeto terminal, productos finitos, límites finitos...). Morfismos estrictos: $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(L) = L'$

La noción de morfismo estricto no es la noción util en estos ejemplos.

- P, L 2-categorías, X: familia de objetos de $P \rightsquigarrow T$ 2-mónada con $K = P^X$ tal que $T\text{-}Alg_s = Hom_s(P, L)$, $UF = (Fp)_{p \in P}$. Levantamiento de límites $\equiv$ límites se calculan punto a punto en $Hom_s(P, L)$.

Es relevante para la teoría de 2-funtores playos el resultado anterior con Hom_p en lugar de Hom_s.

Ω-morfismos de T-álgebras

Para obtener las nociones más relevantes de morfismos en los ejemplos anteriores (morfismos de categorias tensoriales, funtores que preservan los limites, etc) se debe *relajar* la noción de morfismo.

Ω-morfismos de T-álgebras

> Para obtener las nociones más relevantes de morfismos en los ejemplos anteriores (morfismos de categorias tensoriales, funtores que preservan los limites, etc) se debe *relajar* la noción de morfismo.

Un *lax* morfismo $A \xrightarrow{f} B$ entre T-álgebras tiene una 2-cell estructural

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{f}"] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

1. lax (ℓ) morfismo: $\overline{f}$ es cualquier 2-cell.

Ω-morfismos de T-álgebras

Para obtener las nociones más relevantes de morfismos en los ejemplos anteriores (morfismos de categorias tensoriales, funtores que preservan los limites, etc) se debe *relajar* la noción de morfismo.

Un *lax* morfismo $A \xrightarrow{f} B$ entre T-álgebras tiene una 2-cell estructural

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{f}"] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

1. lax (ℓ) morfismo: $\overline{f}$ es cualquier 2-cell.
2. pseudo (p) morfismo: $\overline{f}$ inversible.

Ω-morfismos de T-álgebras

Para obtener las nociones más relevantes de morfismos en los ejemplos anteriores (morfismos de categorias tensoriales, funtores que preservan los limites, etc) se debe *relajar* la noción de morfismo.

Un *lax* morfismo $A \xrightarrow{f} B$ entre T-álgebras tiene una 2-cell estructural

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{f}"] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

1. lax (ℓ) morfismo: $\overline{f}$ es cualquier 2-cell.
2. pseudo (p) morfismo: $\overline{f}$ inversible.
3. morfismo estricto (s): $\overline{f}$ una identidad.

Ω-morfismos de T-álgebras

Para obtener las nociones más relevantes de morfismos en los ejemplos anteriores (morfismos de categorias tensoriales, funtores que preservan los limites, etc) se debe *relajar* la noción de morfismo.

Un *lax* morfismo $A \xrightarrow{f} B$ entre T-álgebras tiene una 2-cell estructural

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{f}"] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

1. lax (ℓ) morfismo: $\overline{f}$ es cualquier 2-cell.
2. pseudo (p) morfismo: $\overline{f}$ inversible.
3. morfismo estricto (s): $\overline{f}$ una identidad.

Más en general, si se fija una familia Ω de 2-cells de $\mathcal{K}$, decimos que f es un Ω-morfismo si $\overline{f} \in \Omega$.

Ω-morfismos de T-álgebras

Para obtener las nociones más relevantes de morfismos en los ejemplos anteriores (morfismos de categorias tensoriales, funtores que preservan los limites, etc) se debe *relajar* la noción de morfismo.

Un *lax* morfismo $A \xrightarrow{f} B$ entre T-álgebras tiene una 2-cell estructural

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{f}"] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

1. lax (ℓ) morfismo: $\overline{f}$ es cualquier 2-cell.
2. pseudo (p) morfismo: $\overline{f}$ inversible.
3. morfismo estricto (s): $\overline{f}$ una identidad.

Más en general, si se fija una familia Ω de 2-cells de $\mathcal{K}$, decimos que f es un Ω-morfismo si $\overline{f} \in \Omega$.

Se define así una 2-categoría $T\text{-}Alg^{\Omega}$ que tiene como casos particulares a $T\text{-}Alg_s$, $T\text{-}Alg_p$, $T\text{-}Alg_\ell$ (tomando Ω_s, Ω_p, Ω_ℓ).

Levantamiento de límites

K una categoría, T una mónada, F un funtor.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg \arrow[d, "U"] \\ A \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & K \end{tikzcd}$$

U *crea* $\lim F$: se le da a $\lim F$ una estructura de T-algebra tal que sea $\lim \overline{F}$ (se *levanta* el límite de F a lo largo de U)

Levantamiento de límites

K una categoría, T una mónada, F un funtor.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg \arrow[d, "U"] \\ A \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & K \end{tikzcd}$$

U *crea* $\lim F$: se le da a $\lim F$ una estructura de T-algebra tal que sea $\lim \overline{F}$ (se *levanta* el límite de F a lo largo de U)

Resultados previos

1. (del caso $\mathcal{V}$-enriquecido) $T\text{-}Alg \xrightarrow{U} K$ crea todos los límites.

Levantamiento de límites

$\mathcal{K}$ una 2-categoría, T una 2-mónada, F un 2-funtor.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg_s \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

U *crea* $\lim F$: se le da a $\lim F$ una estructura de T-algebra tal que sea $\lim \overline{F}$ (se *levanta* el límite de F a lo largo de U)

Resultados previos

1. (del caso $\mathcal{V}$-enriquecido) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los (2-)límites.

Levantamiento de límites

$\mathcal{K}$ una 2-categoría, T una 2-mónada, F un 2-funtor.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg_p \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

U *crea* $\lim F$: se le da a $\lim F$ una estructura de T-algebra tal que sea $\lim \overline{F}$ (se *levanta* el límite de F a lo largo de U)

Resultados previos

1. (del caso $\mathcal{V}$-enriquecido) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los (2-)límites.
2. $T\text{-}Alg_p \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea lax y pseudolímites [BKP,89].

Levantamiento de límites

$\mathcal{K}$ una 2-categoría, T una 2-mónada, F un 2-funtor.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg_{\ell} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

U *crea* $\lim F$: se le da a $\lim F$ una estructura de T-algebra tal que sea $\lim \overline{F}$ (se *levanta* el límite de F a lo largo de U)

Resultados previos

1. (del caso $\mathcal{V}$-enriquecido) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los (2-)límites.
2. $T\text{-}Alg_p \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea lax y pseudolímites [BKP,89].
3. $T\text{-}Alg_{\ell} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea oplax límites [Lack,05].

Levantamiento de límites

$\mathcal{K}$ una 2-categoría, T una 2-mónada, F un 2-funtor.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg_{?} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

U *crea* $\lim F$: se le da a $\lim F$ una estructura de T-algebra tal que sea $\lim \overline{F}$ (se *levanta* el límite de F a lo largo de U)

Resultados previos

1. (del caso $\mathcal{V}$-enriquecido) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los (2-)límites.
2. $T\text{-}Alg_p \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea lax y pseudolímites [BKP,89].
3. $T\text{-}Alg_\ell \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea oplax límites [Lack,05].

Nota: los límites se pueden tomar *con peso*, y las proyecciones son morfismos estrictos.

Levantamiento de límites

$\mathcal{K}$ una 2-categoría, T una 2-mónada, F un 2-funtor.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

U *crea* $\lim F$: se le da a $\lim F$ una estructura de T-algebra tal que sea $\lim \overline{F}$ (se *levanta* el límite de F a lo largo de U)

Resultados previos

1. (del caso $\mathcal{V}$-enriquecido) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los (2-)límites.
2. $T\text{-}Alg_p \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea lax y pseudolímites [BKP,89].
3. $T\text{-}Alg_\ell \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea oplax límites [Lack,05].

Nota: los límites se pueden tomar *con peso*, y las proyecciones son morfismos estrictos.

Veremos un teorema que unifica y generaliza estos resultados

Límites a partir de transformaciones naturales

- transformación natural $A \underset{G}{\overset{F}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} B$:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

Límites a partir de transformaciones naturales

- transformación natural $A \underset{G}{\overset{F}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} B$:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

- cono (para F, con vértice $E \in B$): es una transf. natural

$A \underset{F}{\overset{\triangle E}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} B$, i.e.

$$\begin{tikzcd} & FA \arrow[dd, "Ff"] \\ E \arrow[ur, bend left, "\theta_A"] \arrow[dr, bend right, "\theta_B"'] & \\ & FB \end{tikzcd}$$

Límites a partir de transformaciones naturales

- transformación natural $A \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} B$ con $\theta\Downarrow$:
$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

- cono (para F, con vértice $E \in B$): es una transf. natural

$$A \underset{F}{\overset{\triangle E}{\rightrightarrows}} B \ (\theta\Downarrow), \text{ i.e. } \begin{tikzcd} & FA \arrow[d, "Ff"] \\ E \arrow[ur, bend left, "\theta_A"] \arrow[r, bend right, "\theta_B"'] & FB \end{tikzcd}$$

- límite de F: es un cono π (para F, con vértice L) universal:

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Conos}(E, F)$$

es una biyección.

Límites a partir de transformaciones naturales

- transformación natural $A \underset{G}{\overset{F}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} B$:
$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

- cono (para F, con vértice $E \in B$): es una transf. natural
$$A \underset{F}{\overset{\triangle E}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} B, \text{ i.e. } \begin{tikzcd} & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\ E \arrow[urr, bend left, "\theta_A"] \arrow[drr, bend right, "\theta_B"'] & L \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & & FB \end{tikzcd}$$

- límite de F: es un cono π (para F, con vértice L) universal:
$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Conos}(E, F)$$
es una biyección.

Límites a partir de transformaciones naturales

- transformación natural $A \underset{G}{\overset{F}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} B$:
$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

- cono (para F, con vértice $E \in B$): es una transf. natural
$A \underset{F}{\overset{\triangle E}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} B$, i.e.
$$\begin{tikzcd} & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\ E \arrow[urr, bend left, "\theta_A"] \arrow[drr, bend right, "\theta_B"'] \arrow[r, dotted, "\exists!"] & L \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & & FB \end{tikzcd}$$

- límite de F: es un cono π (para F, con vértice L) universal:
$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Conos}(E, F)$$
es una biyección.

σ-ω-límites (Gray, 1974 "revisited")

Fijamos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 2-categorías, $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{B})$

σ-ω-límites (Gray, 1974 "revisited")

Fijamos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 2-categorías, $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{B})$

- transf. σ-ω-natural $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} \mathcal{B}$: transf. lax natural

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta_f"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

tal que $\theta_f \in \Omega$ cuando $f \in \Sigma$.

σ-ω-límites (Gray, 1974 "revisited")

Fijamos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 2-categorías, $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{B})$

- transf. σ-ω-natural $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} \mathcal{B}$: transf. lax natural

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta_f"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

tal que $\theta_f \in \Omega$ cuando $f \in \Sigma$.

- σ-ω-cono (para F, con vértice $E \in \mathcal{B}$): es una transf. σ-ω-natural

$$\mathcal{A} \underset{F}{\overset{\triangle E}{\underset{\theta\Downarrow}{\rightrightarrows}}} \mathcal{B}, \text{ i.e. } \begin{tikzcd} & FA \arrow[dd, "Ff"] \\ E \arrow[ur, "\theta_A"] \arrow[dr, "\theta_B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_f"] & \\ & FB \end{tikzcd}$$

tq $\theta_f \in \Omega$ cuando $f \in \Sigma$.

- Morfismos de σ-ω-cono: modificaciones $\theta \xrightarrow{\eta} \theta'$, i.e.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, bend left, "\theta_A"] \arrow[r, bend right, "\theta'_A"'] \arrow[r, phantom, "\eta_A\Downarrow"] & FA
\end{tikzcd}
\qquad \text{tales que} \qquad
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[dd, "Ff"] \\
E \arrow[ur, bend left, "\theta_A"] \arrow[ur, bend right, "\theta'_A"'] \arrow[ur, phantom, "\eta_A\Downarrow"] \arrow[dr, bend left, "\theta_B"] \arrow[dr, bend right, "\theta'_B"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_B\Downarrow"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_f \;\; \Downarrow\theta'_f"] & \\
 & FB
\end{tikzcd}
$$

- Morfismos de σ-ω-cono: modificaciones $\theta \xrightarrow{\eta} \theta'$, i.e.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left=3, "\theta_A"] \arrow[r, shift right=3, "\theta'_A"'] \arrow[r, phantom, "\eta_A\Downarrow"] & FA \end{tikzcd} \quad \text{tales que} \quad \begin{tikzcd} & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\ E \arrow[urr, shift left=3, "\theta_A"] \arrow[urr, shift right=3, "\theta'_A"'] \arrow[urr, phantom, "\eta_A\Downarrow"] \arrow[drr, shift left=3, "\theta_B"] \arrow[drr, shift right=3, "\theta'_B"'] \arrow[drr, phantom, "\eta_B\Downarrow"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta_f \ \Downarrow\theta'_f"] & & \\ & & FB \end{tikzcd}$$

- El σ-ω-límite de F es el σ-ω-cono universal:

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

es un isomorfismo de categorías.

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

En objetos: $\varphi \longleftrightarrow \theta$

$$\begin{tikzcd}
 & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\
E \arrow[urr, bend left, "\theta_A"] \arrow[drr, bend right, "\theta_B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_f"] & L \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\pi_f"] & \\
 & & FB
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

En objetos: $\varphi \longleftrightarrow \theta$

$$\begin{tikzcd}
 & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\
E \arrow[r, dotted, "\exists\ !\varphi"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\theta_f"] \arrow[urr, bend left, "\theta_A"] \arrow[drr, bend right, "\theta_B"'] & L \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\pi_f"] & \\
 & & FB
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

En objetos: $\varphi \longleftrightarrow \theta$

$$\begin{tikzcd}
 & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\
E \arrow[urr, bend left, "\theta_A"] \arrow[r, dotted, "\exists\ !\varphi"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_B"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\color{red}\Uparrow\theta_f"] & L \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\color{red}\Uparrow\pi_f"] & \\
 & & FB
\end{tikzcd}$$

- Se tienen las nociones duales de transf. σ-ω-opnatural, que inducen σ-ω-oplímites, donde se invierten las 2-cells.

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

En objetos: $\varphi \longleftrightarrow \theta$

$$\begin{tikzcd}
 & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\
E \arrow[urr, bend left, "\theta_A"] \arrow[drr, bend right, "\theta_B"'] \arrow[r, dotted, "\Uparrow\theta_f", "\exists\ !\varphi"'] & L \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\pi_f"] & \\
 & & FB
\end{tikzcd}$$

• Se tienen las nociones duales de transf. σ-ω-opnatural, que inducen σ-ω-oplímites, donde se invierten las 2-cells.

• Las nociones de límites lax, pseudo y estricto (2-límite) se obtienen con las elecciones particulares de $\Omega = \Omega_\ell, \Omega_p, \Omega_s$.

Límites Ω'-compatibles

Fijemos otra familia Ω' de 2-cells. Decimos que el σ-ω-límite de F es compatible con Ω' si el isomorfismo

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

en flechas
$$E \underset{\varphi'}{\overset{\varphi}{\underset{\alpha\Downarrow}{\rightrightarrows}}} L \leftrightarrow E \underset{\theta'_A}{\overset{\theta_A}{\underset{\eta_A\Downarrow}{\rightrightarrows}}} FA$$

se restringe a Ω': $\alpha \in \Omega'$ sii cada η_A lo está.

Límites Ω'-compatibles

Fijemos otra familia Ω' de 2-cells. Decimos que el σ-ω-límite de F es compatible con Ω' si el isomorfismo

$$\mathcal{B}(E, L) \xrightarrow{\pi_*} \sigma\text{-}\omega\text{-Conos}(E, F)$$

en flechas
$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\varphi'"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & L
\end{tikzcd}
\leftrightarrow
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, bend left, "\theta_A"] \arrow[r, bend right, "\theta'_A"'] \arrow[r, phantom, "\eta_A\Downarrow"] & FA
\end{tikzcd}
$$
se restringe a Ω': $\alpha \in \Omega'$ sii cada η_A lo está.

Ejemplos: Si Ω' es Ω_s, Ω_p u Ω_ℓ, todo σ-ω-límite es compatible con Ω'.

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma\text{-}\omega\text{-}\lim F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & TFA \arrow[r, "a"] & FA \\ TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[r, dotted, "\ell"'] & L \arrow[ur, "\pi_A"'] & \end{tikzcd}$$

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma\text{-}\omega\text{-}\lim F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & TFA \arrow[rr, "a"] & & FA \arrow[dd, "Ff"] \\ TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[dr, "T\pi_B"'] \arrow[r, dotted, "\Downarrow\theta_f", "\ell"'] & L \arrow[urr, "\pi_A"] \arrow[drr, "\pi_B"'] & \Downarrow\pi_f & \\ & TFB \arrow[rr, "b"'] & & FB \end{tikzcd}$$

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma\text{-}\omega\text{-lim}F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

Necesitamos 2-cells θ_f que den un σ-ω-cono:

$$\begin{tikzcd} & TFA \arrow[r, "a"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta_f"] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[dr, "T\pi_B"'] & & \\ & TFB \arrow[r, "b"'] & FB \end{tikzcd}$$

$\theta_f \in \Omega$ if $f \in \Sigma$:

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma\text{-}\omega\text{-}\mathrm{lim}F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

$$
\begin{tikzcd}
 & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}
$$

Necesitamos 2-cells θ_f que den un σ-ω-cono:

$$
\Downarrow\theta_f\colon
\begin{tikzcd}
 & TFA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "TFf"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\overline{Ff}}{\Rightarrow}"] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[dr, "T\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T\pi_f"] & TFB \arrow[r, "b"'] & FB \\
 & TFB &
\end{tikzcd}
$$

$\theta_f \in \Omega$ if $f \in \Sigma$:

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma$-ω-oplim$F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

$$\begin{tikzcd}
 & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

Necesitamos 2-cells θ_f que den un σ-ω-opcono:

$$\begin{tikzcd}
 & TFA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "TFf"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\overline{Ff}}{\Rightarrow}"] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
\Uparrow\theta_f\colon TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[dr, "T\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow T\pi_f"] & TFB \arrow[r, "b"'] & FB
\end{tikzcd}$$

$\theta_f \in \Omega$ if $f \in \Sigma$:

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma\text{-}\omega\text{-oplim} F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

Necesitamos 2-cells θ_f que den un σ-ω-opcono:

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & TFA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "TFf"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\overline{Ff}}{\Rightarrow}"] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ \Uparrow\theta_f\colon TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[dr, "T\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow T\pi_f"] & TFB \arrow[r, "b"'] & FB \end{tikzcd}$$

$\theta_f \in \Omega$ if $f \in \Sigma$: $\quad T(\Omega) \subseteq \Omega$

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

Cómo le damos a $L = \sigma$-ω-oplim$F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

Necesitamos 2-cells θ_f que den un σ-ω-opcono:

$$\begin{tikzcd} & TFA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "TFf"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\overline{Ff}}{\Rightarrow}"] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ \Uparrow\theta_f\colon TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[dr, "T\pi_B"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow T\pi_f"] & TFB \arrow[r, "b"'] & FB \end{tikzcd}$$

$\theta_f \in \Omega$ if $f \in \Sigma$: $T(\Omega) \subseteq \Omega$, $\Omega' \subseteq \Omega$

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma\text{-}\omega\text{-oplim}F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

$$
\begin{tikzcd}
 & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}
$$

Necesitamos 2-cells θ_f que den un σ-ω-opcono:

$$
\begin{tikzcd}
 & & TFA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "TFf"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\overset{\overline{Ff}}{\Rrightarrow}"] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
\Uparrow\theta_f\colon TL \arrow[urr, "T\pi_A"] \arrow[drr, "T\pi_B"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow T\pi_f"] & & TFB \arrow[r, "b"'] & FB
\end{tikzcd}
$$

$\theta_f \in \Omega$ if $f \in \Sigma$: $\quad T(\Omega) \subseteq \Omega$, $\Omega' \subseteq \Omega \Rightarrow TL \xrightarrow{\ell} L$.

Nuestro teorema (buscando las hipótesis)

Consideramos $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Los σ-ω-límites se toman siempre con respecto a Σ y Ω.

Cómo le damos a $L = \sigma$-ω-oplim$F$ una estructura de T-álgebra tal que las proyecciones son morfismos estrictos?

$$\begin{tikzcd} & T\text{-}Alg^{\Omega'} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

Necesitamos 2-cells θ_f que den un σ-ω-opcono:

$$\Uparrow\theta_f\colon \begin{tikzcd} & TFA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "TFf"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\overline{Ff}}{\Rrightarrow}"] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ TL \arrow[ur, "T\pi_A"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow T\pi_f"] \arrow[dr, "T\pi_B"'] & TFB \arrow[r, "b"'] & FB \\ & & \end{tikzcd}$$

$\theta_f \in \Omega$ if $f \in \Sigma$: $T(\Omega) \subseteq \Omega$, $\Omega' \subseteq \Omega \Rightarrow TL \xrightarrow{\ell} L$.

Si L es Ω'-compatible $\Rightarrow (TL, \ell)$ es el límite buscado.

Nuestro teorema (enunciado como la gente)

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Si $T(\Omega) \subseteq \Omega$ y $\Omega' \subseteq \Omega$, entonces $T\text{-}Alg^{\Omega'} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-ω-oplímites Ω'-compatibles.

la prueba sigue las ideas de la diapositiva anterior.

Nuestro teorema (enunciado como la gente)

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Si $T(\Omega) \subseteq \Omega$ y $\Omega' \subseteq \Omega$, entonces $T\text{-}Alg^{\Omega'} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-ω-oplímites Ω'-compatibles.

la prueba sigue las ideas de la diapositiva anterior.

Deducimos el resultado para límites con peso pues estos se pueden expresar como σ-ω-límites.

Nuestro teorema (enunciado como la gente)

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Si $T(\Omega) \subseteq \Omega$ y $\Omega' \subseteq \Omega$, entonces $T\text{-}Alg^{\Omega'} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-ω-oplímites Ω'-compatibles.

la prueba sigue las ideas de la diapositiva anterior.

Deducimos el resultado para límites con peso pues estos se pueden expresar como σ-ω-límites.

El caso $\Omega, \Omega' \in \{\Omega_\ell, \Omega_p, \Omega_s\}$

$T(\Omega) \subseteq \Omega$ ✓, Ω'-compatible ✓

Nuestro teorema (enunciado como la gente)

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Si $T(\Omega) \subseteq \Omega$ y $\Omega' \subseteq \Omega$, entonces $T\text{-}Alg^{\Omega'} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-ω-oplímites Ω'-compatibles.

la prueba sigue las ideas de la diapositiva anterior.

Deducimos el resultado para límites con peso pues estos se pueden expresar como σ-ω-límites.

El caso $\Omega, \Omega' \in \{\Omega_\ell, \Omega_p, \Omega_s\}$

$T(\Omega) \subseteq \Omega$ ✓, Ω'-compatible ✓
La única hipótesis que queda es $\Omega' \subseteq \Omega$. Además, si $\Omega' \subseteq \Omega_p$ puedo invertir las 2-cells y tachar el "op".

Nuestro teorema (enunciado como la gente)

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Si $T(\Omega) \subseteq \Omega$ y $\Omega' \subseteq \Omega$, entonces $T\text{-}Alg^{\Omega'} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-ω-oplímites Ω'-compatibles.

la prueba sigue las ideas de la diapositiva anterior.

Deducimos el resultado para límites con peso pues estos se pueden expresar como σ-ω-límites.

El caso $\Omega, \Omega' \in \{\Omega_\ell, \Omega_p, \Omega_s\}$

$T(\Omega) \subseteq \Omega$ ✓, Ω'-compatible ✓

La única hipótesis que queda es $\Omega' \subseteq \Omega$. Además, si $\Omega' \subseteq \Omega_p$ puedo invertir las 2-cells y tachar el "op".

1. (con $\Omega = \Omega' = \Omega_s$) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los límites.

Nuestro teorema (enunciado como la gente)

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Si $T(\Omega) \subseteq \Omega$ y $\Omega' \subseteq \Omega$, entonces $T\text{-}Alg^{\Omega'} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-ω-oplímites Ω'-compatibles.

la prueba sigue las ideas de la diapositiva anterior.

Deducimos el resultado para límites con peso pues estos se pueden expresar como σ-ω-límites.

El caso $\Omega, \Omega' \in \{\Omega_\ell, \Omega_p, \Omega_s\}$

$T(\Omega) \subseteq \Omega$ ✓, Ω'-compatible ✓

La única hipótesis que queda es $\Omega' \subseteq \Omega$. Además, si $\Omega' \subseteq \Omega_p$ puedo invertir las 2-cells y tachar el "op".

1. (con $\Omega = \Omega' = \Omega_s$) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los límites.
2. (con $\Omega = \Omega' = \Omega_p$) $T\text{-}Alg_p \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-límites (en particular lax y pseudolímites).

Nuestro teorema (enunciado como la gente)

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})$, $\Omega, \Omega' \subseteq$ 2-cells$(\mathcal{K})$. Si $T(\Omega) \subseteq \Omega$ y $\Omega' \subseteq \Omega$, entonces $T\text{-}Alg^{\Omega'} \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-ω-oplímites Ω'-compatibles.

la prueba sigue las ideas de la diapositiva anterior.

Deducimos el resultado para límites con peso pues estos se pueden expresar como σ-ω-límites.

El caso $\Omega, \Omega' \in \{\Omega_\ell, \Omega_p, \Omega_s\}$

$T(\Omega) \subseteq \Omega$ ✓, Ω'-compatible ✓

La única hipótesis que queda es $\Omega' \subseteq \Omega$. Además, si $\Omega' \subseteq \Omega_p$ puedo invertir las 2-cells y tachar el "op".

1. (con $\Omega = \Omega' = \Omega_s$) $T\text{-}Alg_s \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea todos los límites.
2. (con $\Omega = \Omega' = \Omega_p$) $T\text{-}Alg_p \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea σ-límites (en particular lax y pseudolímites).
3. (con $\Omega = \Omega' = \Omega_\ell$) $T\text{-}Alg_\ell \xrightarrow{U} \mathcal{K}$ crea oplax límites.

Gracias!

Referencias

[BKP,89] Blackwell R., Kelly G. M., Power A.J., *Two-dimensional monad theory*, JPAA 59.

[Gray,74] Gray J. W., *Formal category theory: adjointness for 2-categories*, Springer LNM 391.

[Lack,05] Lack S., *Limits for lax morphisms*, ACS 13.

A general limit lifting theorem for 2-dimensional monad theory fue aceptado en JPAA, 2017 y está en arXiv.

Present and future work

- The 2-category $Hom_{\sigma,\omega}(F, G)$ as a 2-category of weak morphisms.
- More examples like that one, in which Ω is not one of $\Omega_{\ell,p,s}$ (may arise from weak equivalences?)
- Bilimit lifting (projections probably won't be strict).
- Other results from 2-dimensional monad theory (flexibility, biadjunctions).