

**ALGEBRA LINEAL - Práctica N°1 - Segundo cuatrimestre de 2013****Espacios Vectoriales**

**Ejercicio 1.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre  $K = \mathbb{R}$ . ¿Cambia algo si  $K = \mathbb{Q}$ ? ¿Y si  $K = \mathbb{C}$ ?

$$\text{i) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** Determinar los  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

**Ejercicio 3.**

i) Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para que cada uno de los siguientes sistemas tenga alguna solución no trivial y, para esos  $k$ , resolverlos.

$$\text{(a) } \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{(b) } \begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

ii) Determinar para qué valores de  $k \in \mathbb{R}$  el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 4.** Resolver el siguiente sistema en  $\mathbb{C}^3$ :

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 5.** Resolver el siguiente sistema en  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 6.** Probar que si un sistema de ecuaciones lineales en el que todos los coeficientes son racionales tiene una solución en  $\mathbb{R}$  entonces también tiene una solución en  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 7.** Probar en cada caso que el conjunto  $V$  con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre  $K$ .

i)  $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) / a_i \in K \forall i \in \mathbb{N}\}$ , el conjunto de todas las sucesiones de elementos de  $K$  (donde  $K$  es un cuerpo cualquiera).

$$+ : (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\cdot : k \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

ii)  $V = \mathbb{R}_{>0}$ ,  $K = \mathbb{Q}$ .

$$\oplus : a \oplus b = a \cdot b$$

$$\otimes : \frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m}$$

**Ejercicio 8.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ ,  $k \in K$ ,  $v \in V$ . Probar las siguientes afirmaciones:

i)  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

iii)  $k \cdot v = \vec{0} \Rightarrow k = 0 \text{ ó } v = \vec{0}$

ii)  $-(-v) = v$

iv)  $-\vec{0} = \vec{0}$

**Ejercicio 9.**

i) Sea  $v \in \mathbb{R}^2$  un vector fijo. Se define la función  $f_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la siguiente forma:

$$f_v(x, y) = (x, y) + v$$

Interpretar geoméricamente el efecto de  $f_v$  sobre el plano ( $f_v$  se llama la *traslación en v*).

ii) Probar que  $\mathbb{R}^2$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con la suma  $+_{(2,1)}$  y el producto por escalares  $\cdot_{(2,1)}$  definidos de la siguiente forma:

$$(x, y) +_{(2,1)} (x', y') = (x + x' - 2, y + y' - 1)$$

$$r \cdot_{(2,1)} (x, y) = r \cdot (x - 2, y - 1) + (2, 1)$$

(Este espacio se notará  $\mathbb{R}_{(2,1)}^2$  para distinguirlo de  $\mathbb{R}^2$  con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el  $(2, 1)$  resulta el neutro de la suma  $+_{(2,1)}$ ).

iii) Interpretar geoméricamente  $+_{(2,1)}$  y  $\cdot_{(2,1)}$ , teniendo en cuenta que:

$$(x, y) +_{(2,1)} (x', y') = f_{(2,1)}(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y'))$$

$$r \cdot_{(2,1)} (x, y) = f_{(2,1)}(r \cdot f_{(-2,-1)}(x, y))$$

**Ejercicio 10.**

i) Encontrar un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^2$  que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.

ii) Encontrar un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^2$  que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

**Ejercicio 11.** Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de  $V$  como  $K$ -espacio vectorial:

i)  $S_1 = \{a \cdot i / a \in \mathbb{R}\}$   $V = \mathbb{C}$   $K = \mathbb{R}$  ó  $K = \mathbb{C}$

ii)  $S_2 = \{f \in K[X] / f'(1) = 0\}$   $V = K[X]$

- iii)  $S_3 = \{M \in K^{n \times n} / M^t = -M\}$   $V = K^{n \times n}$
- iv)  $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + 3f' = 0\}$   $V = C^\infty(\mathbb{R})$   $K = \mathbb{R}$
- v)  $S_5 = \{v \in \mathbb{R}_{(2,1)}^2 / x + y = 3\}$   $V = \mathbb{R}_{(2,1)}^2$   $K = \mathbb{R}$
- vi)  $S_6 = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0 \forall r \geq k\}$   $V = K^\mathbb{N}$

**Ejercicio 12.** Sean  $S$  y  $T$  subespacios de un  $K$ -espacio vectorial  $V$ . Probar que  $S \cup T$  es un subespacio de  $V \iff S \subseteq T$  ó  $T \subseteq S$ .

**Ejercicio 13.** Encontrar un sistema de generadores para los siguientes  $K$ -espacios vectoriales:

- i)  $K^{n \times n}$
- ii)  $\mathbb{C}^n$ ,  $K = \mathbb{R}$
- iii)  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 ; x - y = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- iv)  $S_2 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 / x + 2y + z = 0\}$ ,  $K = \mathbb{Z}_7$
- v)  $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} / A = -A^t\}$ ,  $K = \mathbb{Q}$
- vi)  $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] / f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- vii)  $S_5 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} / a_i = 0 \forall i \geq 5 ; a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 ; a_2 + a_4 = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- viii)  $S_6 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''' = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$

**Ejercicio 14.** Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- i) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $v, w \in V, k \in K$ . Entonces  $\langle v, w \rangle = \langle v, w + k.v \rangle$ .
- ii) Sean  $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$  tales que  $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle$ . Entonces  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- i) Determinar si  $(2, 1, 3, 5) \in S$ .
- ii) Determinar si  $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$ .
- iii) Determinar si  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ .

**Ejercicio 16.** Hallar un sistema de generadores para  $S \cap T$  como subespacio de  $V$  en cada uno de los siguientes casos:

- i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$   $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$
- ii)  $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \forall i, j\}$   $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$
- iii)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = 0\}$   $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$

**Ejercicio 17.** Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes sobre  $K$ .

- i)  $(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1$  en  $K[X]$
- ii)  $(1 - i, i), (2, -1 + i)$  en  $\mathbb{C}^2$ , para  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- iii)  $f(x) = e^x, g(x) = x$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

**Ejercicio 18.** Hallar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$  es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

- i)  $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$
- ii)  $\{k \cdot X^2 + X, X^2 - k, k^2 \cdot X\} \subset \mathbb{R}[X]$
- iii)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

**Ejercicio 19.** Sean  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . Probar que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{R} \iff \{v_1, \dots, v_n\}$  es linealmente independientes sobre  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 20.** Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del  $K$ -espacio vectorial  $V$  indicado.

- i)  $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}, V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$
- ii)  $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}, V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$
- iii)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 21.** Extraer una base de  $S$  de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de  $S$ .

- i)  $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$
- ii)  $S = \langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$
- iii)  $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 22.** Hallar una base y la dimensión de los siguientes  $K$ -espacios vectoriales:

- i)  $\mathbb{C}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$
- ii)  $\{f \in \mathbb{Q}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } (x^2 - 2) \mid f\}, K = \mathbb{Q}$
- iii)  $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / a_i = a_j \forall i, j\}$

**Ejercicio 23.** Hallar la dimensión del  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $S$  para cada  $k \in \mathbb{R}$  en los siguientes casos:

- i)  $S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$
- ii)  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / A \cdot x = 0\}$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 3 & k - 6 & 5k \\ 1 & k - 2 & k^2 + 4k \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

**Ejercicio 24.** Sean  $S$  y  $T$  los subespacios de  $\mathbb{R}^4$

$$S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle \quad \text{y} \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Hallar un subespacio  $U$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $\dim U = 2$  y  $S \cap T \subset U \subset T$ .

**Ejercicio 25.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales:

i)  $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$ .

ii)  $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ , siendo  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$  y  $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$ .

**Ejercicio 26.** En cada uno de los siguientes casos caracterizar  $S + T \subseteq V$  y determinar si la suma es directa.

i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, 1, 1) \rangle$ ,  $T = \langle (2, -1, 1), (3, 0, 2) \rangle$

ii)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3\}$ ,  $T = \{f \in \mathbb{R}[X] / \text{mult}(4, f) \geq 4\}$

iii)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / A_{11} + A_{21} = 0, 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$ ,

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

**Ejercicio 27.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i)  $S, T$  subespacios de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$  tal que  $v \in S \cap T$ .

ii)  $S, T, W$  subespacios de  $\mathbb{R}^{11}$ ,  $\dim S = \dim T = \dim W = 4 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$ .

**Ejercicio 28.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $S, T$  y  $U$  subespacios de  $V$ .

i) Probar que  $(S \cap T) + (S \cap U) \subseteq S \cap (T + U)$ .

ii) Mostrar que, en general, la inclusión anterior es estricta.

iii) Probar que, si  $U \subseteq S$ , entonces vale la igualdad en i).

**Ejercicio 29.** Sean  $S, T$  y  $U$  subespacios de un  $K$ -espacio vectorial  $V$  tales que

$$S \cap T = S \cap U, \quad S + T = S + U \quad \text{y} \quad T \subseteq U.$$

Probar que  $T = U$ .

**Ejercicio 30.** Para cada  $S$  dado hallar un subespacio  $T \subseteq V$  tal que  $S \oplus T = V$  (en este caso  $T$  se dice un *complemento* de  $S$  con respecto a  $V$ ).

i)  $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}^4$

ii)  $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}_4[X]$

iii)  $S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} / \text{tr}(A) = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$

**Ejercicio 31.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $T$  un hiperplano de  $V$  (es decir, un subespacio de dimensión  $n - 1$ ).

i) Probar que  $\forall v \notin T$ ,  $T \oplus \langle v \rangle = V$ .

ii) Si  $S$  es un subespacio de  $V$  tal que  $S \not\subseteq T$ , probar que  $S + T = V$ . Calcular  $\dim(S \cap T)$ .

iii) Si  $S$  y  $T$  son dos hiperplanos distintos, deducir  $\dim(S \cap T)$ .