Una Breve Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Martes 10 de Julio de 2012

El Test del Carbono 14

1940 - Lascaux (Francia). Un grupo de chicos estaba paseando con su perro y de repente el perro desapareció. Luego de buscarlo un tiempo, encontraron al perro dentro de un agujero profundo del cual el perro no podía salir solo. Uno de los chicos se metió en el agujero para sacar al perro y descubrió que el agujero era la entrada a una antigua caverna que había permanecido oculta por la maleza. En esta cueva se encontraron diversas pinturas rupestres, algunos artículos arquelógicos y restos de carbón de un fuego.

Surgió el problema de conocer la antiguedad del carbón para estimar el tiempo en el que fue habitada la caverna.
El carbono hallado era resto de madera quemada. Los organismos vivos tiene 2 isótopos de carbón

- C^{12} es estable;
- C^{14} es radioactivo.

Además se sabe que la relación entre las cantidades de cada uno, presentes en cualquier muestra microscópica de un organismo vivo, se mantiene constante. Sin embargo desde el momento en que el organismo muere, el C^{14} se pierde. La cantidad de C^{14} presente en el organismo muerto, así como la relación con el C^{12}, cambia con el tiempo.

Sea

$x(t) :=$ cantidad de C^{14} en los restos de carbón hallados a tiempo t.

El tiempo lo mediremos en años y $t = 0$ es el momento en el que el árbol murió.

$$\frac{dx}{dt} = \text{tasa (velocidad) de descomposición del } C^{14}.$$

Asumimos que la tasa de descomposición de C^{14} es proporcional a la cantidad existente

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \tag{1}$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad y el signo negativo indica que la cantidad de C^{14} está decreciendo.

La ecuación (1) es una ecuación diferencial ordinaria.

Soluciones para (1)

Comencemos por observar que $x \equiv 0$ o $x > 0$. Si $x \neq 0$ tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = -kx \to \frac{dx}{x} = -kdt \to \int \frac{dx}{dt} = -\int kdt \to \log(x) = -kt+C$$

entonces

$$x(t) = e^{-kt+C} = e^{C}e^{-kt} = Ae^{-kt}.$$

Observemos que $x(0) = A$ es la cantidad de C^{14} presente en el árbol al momento de su muerte.

Via experimentos se sabe que después de 10 años, la cantidad de C^{14} en un pedazo de madera muerta es 99.876 % del original, es decir,

$$x(10) = 0,99876x(0) = 0{,}99876A \to Ae^{-10k} = 0{,}99876A$$

$$\to k = -\frac{\log(0,99876)}{10} \approx 0{,}000124,$$

y por lo tanto

$$x(t) = Ae^{-0{,}000124t}.$$

Teniendo en cuenta la relación entre la cantidad de C^{14} y C^{12}, se observó, via experimentos químicos, que el 85.5 % de la cantidad C^{14} presente al momento de la muerte del árbol se descompuso, es decir que tenemos $0{,}145A$ unidades de C^{14}. Entonces

$$0{,}145A = Ae^{-0{,}000124t} \to t = 15573.$$

Luego se calcula que la caverna fue habitada hace unos 15500 años.

Resumen

- Problema.
- Modelo $\to$ Ecuación Diferencial.
- Solución (si existe).

Aplicaciones

- Física
- Química
- Biología
- Geometría

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en la que intervienen una variable independiente $t \in \mathbb{R}$, una función real $x(t)$ (incógnita) y alguna de sus derivadas $x', x'', \ldots, x^{(n)}$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} &tx' + 3x = 6t^3, \\ &x'^2 - 4x = 0, \\ &x'' + x = \cos(t), \\ &x''' = e^{-x} + t + x''. \end{aligned}$$

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada de la ecuación.

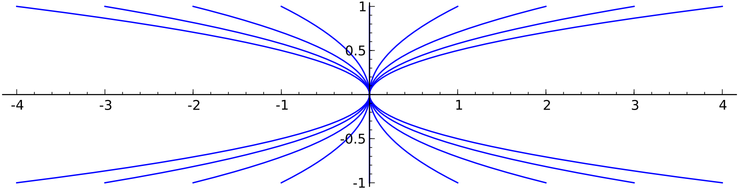
- ¿Cuándo tenemos solución?
- ¿Cuándo es única?
- ¿Cuándo podemos hallar la solución?
- Si tenemos solución pero no la podemos hallar, ¿qué podemos decir de la solución?

Trayectorias Ortogonales

Una curva que interseca en un ángulo recto a cada uno de los miembros de una familia de curvas se denomina trayectoria ortogonal a la familia dada. Por ejemplo, una partícula con carga eléctrica que se mueve bajo la influencia de un campo magnético describe siempre una curva que es perpendicular a cada una de la líneas del campo magnético.

Determinemos las trayectorias ortogonales a las familias de parábolas

$$x = cy^2.$$



Como $x = cy^2$ tenemos que $c = \frac{x}{y^2}$ y $2cyy' = 1$ entonces $y' = \frac{y}{2x}$ (pendiente de la recta tangente).
Sabemos que la pendiente de las curvas que se intersecan ortogonalmente son recíprocas negativas, por lo tanto las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $x = cy^2$ resultan solución de la ecuación diferencial

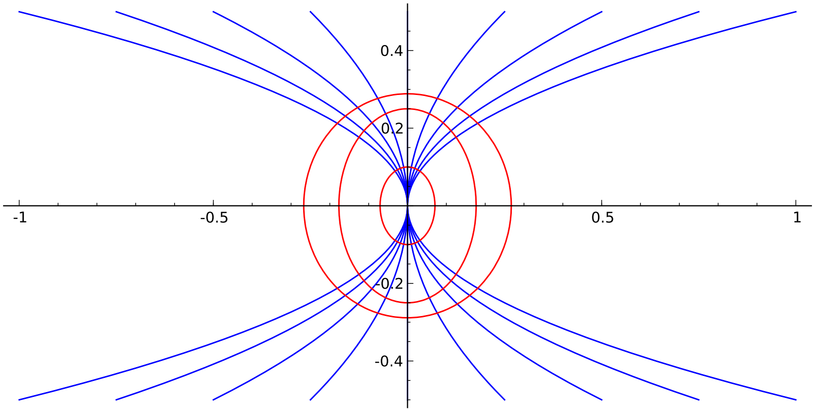
$$y' = -\frac{2x}{y}. \tag{2}$$

Solución

$$y' = -\frac{2x}{y} \rightarrow y\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow ydy = -2xdx \rightarrow \int ydy = -2\int xdx$$

$$\rightarrow y^2 = -2x^2 + K$$

Concluimos que las elipses $y^2 + 2x^2 = K$ son las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $x = cy^2$.


0.4
0.2
-0.2
-0.4
-1
-0.5
0.5
1

Ecuaciones de Variables Separables

Son las ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Para resolver este tipo de ecuaciones basta con separar las variables e integrar

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C,$$

es decir,

$$F(y(x)) = G(x) + C$$

donde

$$F(y) = \int \frac{dy}{h(y)} \text{ y } G(x) = \int g(x)dx.$$

Arribar a la otra orilla

El eje y y la recta $x = c$ son las orillas de un río cuya corriente fluye a una velocidad uniforme a en la dirección y negativa. Una barca entra en el río por el punto $(c, 0)$ y se dirige hacia el origen con velocidad b relativa al agua. ¿Qué trayectoria seguirá la barca?

Solución

Las componentes de la velocidad de la barca son

$$\frac{dx}{dt} = -b\cos(\theta) \text{ y } \frac{dy}{dt} = -a + b\sin(\theta).$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-a + b\sin(\theta)}{-b\cos(\theta)} = \frac{-a + b\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{-b\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)},$$

y llegamos a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}. \tag{3}$$

Observemos que la función

$$f(x, y) = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx}$$

tiene la siguiente propiedad: si $t > 0$

$$f(tx, ty) = \frac{a\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} + bty}{btx} = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx} = f(x, y).$$

Se dice que f es homogénea de grado 0.
Si tomamos $t = \frac{1}{x}$ y $z = \frac{y}{x}$ tenemos que

$$f(x, y) = f(1, \frac{y}{x}) = f(1, z) = \frac{a}{b}\sqrt{1 + z^2} + z$$

y además

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{\frac{dy}{dx} - z}{x} \to \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Por lo tanto(3) es equivalente a

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{a}{b}\sqrt{1 + z^2}$$

que es una ecuación de variables separables.

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{a}{b}\sqrt{1+z^2} \rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{a}{b}\frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{a}{b}\int \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \frac{a}{b}\log(x) + C,$$

$$\rightarrow z+\sqrt{1+z^2} = Ax^{\frac{a}{b}} \rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Ax^{\frac{a}{b}}$$

$$\rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2} = Ax^{\frac{a}{b}+1}.$$

Por otro lado sabemos que cuando $y=0$, tenemos $x=c$, entonces

$$c = Ac^{\frac{a}{b}+1} \rightarrow A = \frac{1}{c^{\frac{a}{b}}},$$

y por lo tanto

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^{\frac{a}{b}+1}}{c^{\frac{a}{b}}} \rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{a}{b}+1}}{c^{\frac{a}{b}}} - \frac{c^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}-1}}\right).$$

Ecuaciones homogéneas

Nos encontramos en el siguiente caso

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

donde $f(x, y)$ es una función homogénea de grado 0, es decir,

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

para todos los x, y, t convenientemente restringidos.
En estas condiciones, si tomamos $t = \frac{1}{x}$ tenemos que

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Luego realizando el cambio de variables $z = \frac{y}{x}$, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

y nuestra ecuación se convierte en una de variables separables

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(1, z).$$

Propulsión de un cohete

Supongamos que un cohete despega verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra a tiempo $t = 0$. Queremos calcular su altura máxima y y su velocidad máxima $v = \frac{dy}{dt}$. El cohete es implusado por gases de escape que salen hacia atrás del cohete con velocidad constante c (relativo al cohete). Como al inicio el cohete está lleno de combustible, la masa $m = m(t)$ del cohete varía con el tiempo.

Solución

Para obtener la ecuación del movimiento del cohete, usamos la segunda ecuación de Newton en la siguiente forma

$$\frac{dP}{dt} = F$$

donde P es el momento (el producto de la masa y la velocidad) y F denota el total de la fuerza externa.
Sea $F = F_G + F_R$ donde $F_G = -mg$ es la fuerza de la gravedad y $F_R = -kv$ es la fuerza de resistencia del aire que la asumimos proporcional a la velocidad del cohete.

Entonces tenemos que

$$\frac{dP}{dt} = -mg - kv.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\Delta P &\approx [(m - \Delta m)(v + \Delta v) + (c + v)\Delta m] - vm \\ &= m\Delta v + \Delta v \Delta m + c\Delta m\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dt} = m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt}.$$

De esta manera llegamos a la siguiente ecuación

$$m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt} = -mg - kv.$$

Ahora supongamos que el combustible del cohete se consume a una tasa constante β durante un intervalo de tiempo $[0, t_1]$ y cuando $t = t_1$ el combustible se agotará. Entonces $m(t) = m_0 - \beta t$ y nuestra ecuación queda de la siguiente manera

$$(m_0 - \beta t)\frac{dv}{dt} - c\beta = -(m_0 - \beta)g - kv$$

o equivalentemente

$$(m_0 - \beta t)\frac{dv}{dt} + kv = c\beta - (m_0 - \beta t)g$$

y dividiendo por $m_0 - \beta t$ tenemos

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_0 - \beta t}v = \frac{c\beta}{m_0 - \beta t} - g.$$

Este tipo de ecuación se conoce como ecuación lineal.
Multiplicando por

$$e^{\int \frac{k}{m_0 - \beta t}dt} = e^{-\frac{k}{\beta}\log(m_0 - \beta t)} = (m_0 - \beta t)^{-\frac{k}{\beta}}$$

tenemos

$$\underbrace{(m_0 - \beta t)^{-\frac{k}{\beta}}\frac{dv}{dt} + k(m_0 - \beta t)^{-\frac{k}{\beta}-1}v}_{\frac{d}{dt}\left((m_0 - \beta t)^{-\frac{k}{\beta}}v\right)} = \underbrace{c\beta(m_0 - \beta t)^{-\frac{k}{\beta}-1}}_{} - g(m_0 - \beta t)^{-\frac{k}{\beta}}.$$

Entonces

$$(m_0-\beta t)^{-\frac{k}{\beta}}v = \int\left(c\beta(m_0-\beta t)^{-\frac{k}{\beta}-1} - g(m_0-\beta t)^{-\frac{k}{\beta}}\right)dt$$
$$= \frac{c\beta}{k}(m_0-\beta t)^{-\frac{k}{\beta}} - \frac{g}{k-\beta}(m_0-\beta t)^{-\frac{k}{\beta}+1} + A$$

$$\to v = \frac{c\beta}{k} - \frac{g}{k-\beta}(m_0-\beta t) + A(m_0-\beta t)^{\frac{k}{\beta}}.$$

Si $v(0)=0$ tenemos que

$$A = -\frac{c\beta}{k}m_0^{-\frac{k}{\beta}} + \frac{g}{k-\beta}m_0^{-\frac{k}{\beta}+1}$$

$$\to v = \frac{c\beta}{k}\left(1-M^{\frac{k}{\beta}}\right) + \frac{gm_0}{\beta-k}\left(M-M^{\frac{k}{\beta}}\right)$$

donde $M=\frac{m_0-\beta t}{m_0}$.

Ecuaciones lineales

La ecuación diferencial lineal general de primer orden es

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{4}$$

El método más simple de resolución reposa en la observación de que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right) = e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + yPe^{\int Pdx} = e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right).$$

Entonces multiplicando (4) por $e^{\int Pdx}$, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right) = e^{\int Pdx}q.$$

Luego integrando,

$$e^{\int Pdx}y = \int e^{\int Pdx}qdx + c$$

$$\rightarrow y = e^{-\int Pdx}\left(\int e^{\int Pdx}qdx + c\right).$$

Caída libre

Supongamos que un cuerpo de masa m cae bajo la sola influencia de la gravedad. En tal caso, la única fuerza que actúa sobre él es mg. Si y es la altura medida hacia abajo desde una cierta altura prefijada, la segunda ley de Newton nos dice que

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg \to \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Si alteramos la situación, admitiendo que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es $mg - k\frac{dy}{dt}$, y tenemos la siguiente ecuación

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt} \to \frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{k}{m}\frac{dy}{dt}.$$

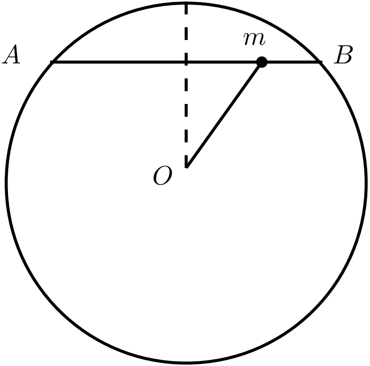
Si tomamos $u = \frac{dy}{dt}$, tenemos que

$$\frac{du}{dt} = g - \frac{k}{m}u$$

que es una ecuación de primer orden de variables separables.

El túnel

Supongamos que se perfora un túnel recto, de longitud $2L$, entre 2 puntos cualesquiera de la superficie terrestre. Si se coloca un raíl en el túnel, una vagoneta, situada en uno de los extremos del túnel, se deslizará por su propio peso hacia el interior de éste. Si suponemos que el rozamiento de las ruedas de la vagoneta con las vías es despreciable, ésta se detendrá justo en el otro extremo del túnel y regresará al punto de partida.



Tenemos que $|\vec{P}| = ks$, donde s es la distancia al centro de la vagoneta y k es una constante positiva. Luego por la segunda ley de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks\cos(\alpha)$$

con x la posición de la vagoneta y m la masa de la misma.
Teniendo en cuenta que $x = s\cos(\alpha)$, nuestra ecuación queda de la siguiente manera

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Si tomamos $u = \frac{dx}{dt}$, tendremos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u\frac{du}{dx}$$

y nuestra ecuación se transforma en la siguiente

$$u\frac{du}{dx} + \frac{k}{m}x = 0$$

que es una ecuación de variables separables.

Reducción del orden

- Ausencia de la variable dependiente. En este caso la variable y no aparece en nuestra ecuación de segundo orden
$$f(x, y', y'') = 0.$$
Tomando $u = y'$ nuestra ecuación se convierte en
$$f(x, u, u') = 0$$
que es una ecuación de primer orden.
- Ausencia de la variable independiente. En este caso la variable x no aparece en nuestra ecuación de segundo orden
$$f(y, y', y'') = 0.$$
Si tomamos $u = y'$ tenemos que
$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$
y nuestra ecuación queda de la siguiente manera
$$f(y, u, u\frac{du}{dy}) = 0.$$

- Edwards and Penney. Elementary Differential Equations.
- López Rodríguez. Problemas Resueltos de Ecuaciones Diferenciales.
- Simmons, Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas
- Tenenbaun and Pollar. *Ordinary Differential Equations, An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering and the Sciences*.