Control y Observabilidad de la Ecuación del Calor: Una Introducción al Control de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Nicolás Carreño*

Resumen

En estas notas, correspondientes a un curso de dos sesiones, introduciremos la teoría de control de EDP analizando propiedades de controlabilidad de la ecuación del calor. En particular, veremos que, en un marco funcional apropiado, la controlabilidad es equivalente a un problema de observabilidad para una ecuación del calor sin control. Luego, presentaremos una de las herramientas más poderosas para probar observabilidad: estimaciones de Carleman.

1. Introducción

De manera general, podemos formular un sistema de control de una ecuación en derivadas parciales (EDP) como

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) & t > 0, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $t \mapsto y(t) \in X$ es el estado del sistema y $t \mapsto u(t) \in U$ es el control en el instante t. Los conjuntos X y U son los espacios de estado y controles admisibles, respectivamente. El problema de la controlabilidad consiste, para una condición inicial y^0 y un tiempo final T dados, llevar la solución del sistema (1.1) a un objectivo en el instante T mediante la acción del control u.

Introduzcamos algunas nociones de controlabilidad:

Definición 1.1 (Controlabilidad exacta)**.** *El sistema de control* (1.1) *es* exactamente controlable *en tiempo T si, para todo y^0 e y^T en X, existe un control $u(t) \in U$ tal que $y(T) = y^T$.*

Definición 1.2 (Controlabilidad a cero)**.** *El sistema de control* (1.1) *es* controlable a cero *en tiempo T si, para todo y^0 en X, existe un control $u(t) \in U$ tal que $y(T) = 0$.*

Definición 1.3 (Controlabilidad aproximada)**.** *El sistema de control* (1.1) *es* aproximadamente controlable *en tiempo T si, para toda y^0 e y^T en X, y todo $\varepsilon > 0$, existe un control $u(t) \in U$ tal que $\|y^T - y(T)\|_X \leqslant \varepsilon$.*

Estas definiciones son de tipo global, pues no restringen el tamaño de la condición inicial. Hablamos de *controlabilidad local* si además y^0 es cercana al objetivo final. Esta noción es importante para tratar sistemas no lineales.

*Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Casilla 110-V, Valparaíso, Chile. E-mail: nicolas.carrenog@usm.cl

La resolución de cada problema de controlabilidad depende de la naturaleza del sistema. Por ejemplo, en dimensión finita, las propiedades de controlabilidad son equivalentes y bien comprendidas en muchos casos lineales y no lineales. En particular, para un sistema lineal autónomo, una condición necesaria y suficiente es el *Criterio de Kalman* (ver, por ejemplo, [1, Capítulo 1]).

En dimensión infinita, la situación es más complicada ya que depende de las propiedades particulares de la ecuación que trabajamos. Por ejemplo, es sabido que para las ecuaciones parabólicas, como la ecuación del calor, la controlabilidad exacta no es posible debido al efecto regularizante. Para las ecuaciones hiperbólicas, como la ecuación de ondas, la controlabilidad no está asegurada si el tiempo final es pequeño debido a la velocidad finita de propagación.

Para los sistemas de control no lineales, encontramos en general resultados de tipo local. En efecto, una estrategia clásica consiste en linealizar en torno a un estado de equilibrio para obtener un resultado de controlabilidad para este sistema. Luego, volvemos al problema original por medio de un argumento de punto fijo o de inversión local.

En estas notas nos concentraremos, a modo de introducción al control de EDP, en el control a cero de la ecuación del calor lineal mediante la dualidad *controlabilidad-observabilidad*. Una herramienta fundamental serán las llamadas *desigualdades de Carleman*. Comencemos por presentar esta dualidad en un cuadro lineal abstracto.

2. Sistema lineal abstracto y el método HUM

Consideremos el sistema lineal autónomo de control siguiente:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y^0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Para simplificar, supongamos que los espacios de estado H y de controles admisibles U son espacios de Hilbert. Además, $A : D(A) \subset H \to H$ es un operador no acotado, $B \in \mathcal{L}(U; H)$ y $y^0 \in H$. Invitamos a consultar [1, Section 2.3] y [13, Capítulo 11] para una presentación completa y más general.

El objetivo de esta parte es presentar un método para construir un control u tal que la solución y de (2.1) satisfaga $y(T) = 0$. Este método es llamado HUM (Hilbert Uniqueness Method), introducido por J.-L. Lions en [11, 12].

Consideremos la ecuación (retrógrada en tiempo) siguiente, llamada *ecuación adjunta* de (2.1),

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^*\varphi(t), \\ \varphi(T) = \varphi^T, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\varphi^T \in H$ y A^* es el operador adjunto de A.

Tomando el producto entre la ecuación (2.1) y φ solución de (2.2), no es difícil ver que un control u tal que $y(T) = 0$ debe satisfacer, para todo $\varphi^T \in H$,

$$\int_0^T (u(t), B^*\varphi(t))_U \, dt + (y^0, \varphi(0))_H = 0. \tag{2.3}$$

Construimos entonces el control de la manera siguiente: sea un funcional $J : H \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(\varphi^T) := \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_U^2 \, dt + (y^0, \varphi(0))_H, \tag{2.4}$$

donde φ es la solución de (2.2) tal que $\varphi(T) = \varphi^T$. Supongamos que J admite un mínimo que llamamos $\widehat{\varphi}^T$. Ahora, definamos

$$\widehat{u}(t) := B^*\widehat{\varphi}(t), \tag{2.5}$$

donde $\widehat{\varphi}$ es la solución de (2.2) asociada a $\widehat{\varphi}^T$. Con esta elección de control, vemos directemente que (2.3) corresponde a la condición de optimalidad de primer orden de J, que se satisface pues φ^T es un mínimo.

Como podemos observar, para obtener la controlabilidad a cero de (2.1), hay que asegurar la existencia de un mínimo para el funcional J dado por (2.4). Como J es continuo y convexo, bastaría ver si también es coercivo. Para ver este último punto, supongamos que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo $\varphi^T \in H$, la solución φ de (2.2) satisface

$$\|\varphi(0)\|_H^2 \leqslant C_0 \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_U^2 \, \mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

En vista de (2.6), J es coercivo para la norma

$$\|\varphi^T\|^2 := \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_U^2 \, \mathrm{d}t,$$

y posee un mínimo $\widehat{\varphi}^T$ que pertenece al espacio completado de H para esta norma.

La desigualdad (2.6) es llamada *desigualdad de observabilidad*. Además, el control dado por (2.5) es tal que

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(0,T;U)} \leqslant \sqrt{C_0}\|y^0\|_H.$$

En efecto, basta utilizar $\varphi^T = \widehat{\varphi}^T$ y (2.5) en (2.3) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz con (2.6).

Por otro lado, $\widehat{u}$ es aquel de norma mínima: en efecto, si $\bar{u}$ es otro control tal que $y(T) = 0$, safisface también (2.3). Tomando la diferencia entre (2.3) con $\widehat{u}$ y $\bar{u}$, encontramos

$$\int_0^T (\widehat{u}(t), B^*\varphi(t))_U \, \mathrm{d}t = \int_0^T (\bar{u}(t), B^*\varphi(t))_U \, \mathrm{d}t \quad \forall \varphi^T \in H,$$

donde φ es la solución de (2.2) asociada a φ^T. Tomamos $\varphi^T = \widehat{\varphi}^T$, el mínimo del funcional J, en esta última identidad. Tenemos

$$\int_0^T \|\widehat{u}(t)\|_U^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^T (\bar{u}(t), \widehat{u}(t))_U \, \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^T \|\bar{u}(t)\|_U^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\widehat{u}(t)\|_U^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

de donde se concluye.

El método HUM abarca diversos tipos de ecuaciones, en particular la ecuación del calor que veremos más adelante. Remarquemos que el procedimiento anterior nos permite resolver la controlabilidad a cero demostrando una desigualdad (para la ecuación adjunta), que en la práctica es más abordable. Sin embargo, no entrega un método para demostrarla (ver el libro de J.-M. Coron [1] y el *survey* de E. Zuazua [14] para una descripción detallada de métodos para obtener (2.6) para algunas ecuaciones clásicas).

A continuación veremos una de las herramientas más poderosas para demostrar la desigualdad de observabilidad y que aplica a un gran espectro de ecuaciones: las *desigualdades de Carleman*. La presentaremos en el marco de la controlabilidad a cero de la ecuación del calor.

3. Control a cero de la ecuación del calor y desigualdades de Carleman

Sea $T > 0$, Ω un dominio regular de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) y $\omega \subset \Omega$ que llamamos *dominio de control*. Denotaremos $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$, y n el vector normal unitario exterior de Ω. Consideremos la ecuación del calor

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \Delta y = u\,\mathbb{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

donde $y^0 \in L^2(\Omega)$ es la condición inicial, $y = y(x,t)$ es la variable de estado que describe la distribución de temperatura en Ω en el instante t y $u = u(x,t)$ denota el control actúa sobre el dominio ω.

Observemos que, debido al efecto regularizante de (3.1) (y en general de las ecuaciones parabólicas), no se puede esperar, quien quiera que sea $y^0 \in L^2(\Omega)$, llevar y hacia un estado arbitrario en tiempo T. Por esto es conveniente considerar la noción de *controlabilidad a las trayectorias*, i.e., para todo $y^0 \in L^2(\Omega)$ y toda solución $\bar{y}$ de (3.1) sin control

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{y}_t - \Delta \bar{y} = 0 & \text{en } Q, \\ \bar{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \end{array} \right.$$

existe un control $u \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que $y(T) = \bar{y}(T)$. Sin embargo, por linealidad, esta noción de controlabilidad es equivalente a la controlabilidad a cero, por lo que nos concentraremos en este caso. En otras palabras, nos interesa el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea $T > 0$ e $y^0 \in L^2(\Omega)$. Existe un control $u \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que la solución $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ de (3.1) satisface $y(T) = 0$ en Ω.*

Además, existe una constante $C(\Omega,\omega,T) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

De la Sección 2 con $H = L^2(\Omega)$, $U = L^2(\omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $A : y \mapsto \Delta y$ y $B : u \mapsto u\,\mathbb{1}_\omega$, la controlabilidad a cero de (3.1) se reduce a mostrar la observabilidad de la ecuación adjunta, i.e., la existencia de una constante $C > 0$ tal que para todo $\varphi^T \in L^2(\Omega)$, la solución φ de la ecuación adjunta dada por

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^T & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

satisfaga

$$\int_\Omega |\varphi(0)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant C \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

La controlabilidad a cero de (3.1) se debe a G. Lebeau y L. Robbiano [10], y a A. V. Fursikov y O. Yu. Imanuvilov [8] (ver [4] para un resultado con $N = 1$). En el primero, los autores probaron (3.3) por una descomposición espectral de las soluciones. En el segundo, la demostración de (3.3) está basada en *desigualdades de Carleman globales* para las soluciones de (3.2). Veremos a continuación la segunda técnica.

Para esto, debemos introducir algunas funciones peso. Sea $\omega_0 \Subset \omega$. En [8] se prueba que existe una función $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\eta > 0 \text{ en } \Omega, \quad \eta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad \text{ y } \quad |\nabla\eta| > 0 \text{ en } \overline{\Omega \setminus \omega_0}. \tag{3.4}$$

Ahora, definimos, para $\lambda \geq 1$ y $k > 1$, las funciones

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{2\lambda k\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)}, \quad \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{T(T-t)}. \tag{3.5}$$

Notemos que

$$\alpha, \xi \to +\infty \text{ cuando } t \to 0^+, T^-. \tag{3.6}$$

El resultado que sigue ha sido probado en [8]. Ver también [6, Lema 1.3].

Lema 3.2. *Existen tres constantes positivas λ_0, s_0 y C (que dependen sólo de Ω y ω) tales que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y para todo $s \geq s_0(T+T^2)$, tenemos*

$$s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\big(|q_t|^2 + |\Delta q|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leqslant C\Big(\iint_Q e^{-2s\alpha}|q_t + \Delta q|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + s^3\lambda^4\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big) \tag{3.7}$$

para todo $q \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $q = 0$ sobre Σ.

Vamos a deducir ahora (3.3) a partir de (3.7). Comencemos por observar que (3.7) es válida para las soluciones de (3.2) con $\varphi^T \in L^2(\Omega)$. Esto es una consecuencia de la densidad de las funciones regulares de traza nula en el espacio de soluciones de (3.2), a saber, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Fijamos $\lambda = \lambda_0$ y $s = s_0(T+T^2)$. Obtenemos en particular

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Por (3.6), truncamos en $(T/4, 3T/4)$ la integral de la izquierda y usamos

$$e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq e^{-2C(1+1/T)}\frac{1}{T^6} \quad \text{en } \Omega\times(T/4,3T/4)$$

y

$$e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \leqslant e^{-C(1+1/T)}\frac{1}{T^6} \quad \text{en } \Omega\times(0,T)$$

para obtener

$$\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant Ce^{C(1+1/T)}\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

Para las soluciones de la ecuación (3.2) tenemos la estimación de energía

$$\int_\Omega |\varphi(0)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}x, \quad \forall t \in [0,T],$$

e integrando en $(T/4, 3T/4)$ tenemos

$$\int_\Omega |\varphi(0)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{T}\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Basta combinar esta desigualdad con (3.8) para obtener la desigualdad de observabilidad (3.3).

Las desigualdades de Carleman permiten obtener el control a cero de ecuaciones parabólicas más generales. Por ejemplo, para una ecuación de la forma

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + B(x,t) \cdot \nabla y + a(x,t) y = u \, \mathbb{1}_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Aquí, a y $B = (B_i)_{i=1}^N$ son $N+1$ funciones que dependen de x y de t que suponemos pertenecen a $L^\infty(Q)$. En este caso, se debe utilizar una desigualdad de Carleman apropiada para las soluciones de la ecuación del calor con un segundo miembro perteneciente a un espacio más débil (ver [9]). En particular, la controlabilidad a cero de (3.9) es usada para tratar algunas ecuaciones parabólicas no lineales mediante de un argumento de punto fijo. El lector interesado puede consultar [3, 8, 5, 7, 2] para algunos resultados de controlabilidad de la ecuación del calor semi-lineal.

3.1. Esquema de la demostración de (3.7)

En esta sección presentaremos una idea de la demostración de la desigualdad de Carleman (3.7). La demostración completa se puede consultar en [8] y [6].

En lo que sigue, C representa una constante positiva que puede variar de una línea a otra, pero que sólo depende de Ω y ω. Dividamos la prueba en varios pasos:

Paso 0: Preliminares.

Notemos que las funciones definidas en (3.5) son tales que

$$\nabla \xi = \lambda \nabla \eta \xi, \quad \nabla \alpha = -\lambda \nabla \eta \xi,$$

y

$$\alpha_t = -(T-2t) \frac{e^{2\lambda k \|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t^2(T-t)^2}, \quad \xi_t = -(T-2t) \frac{e^{\lambda(k\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t^2(T-t)^2}.$$

Por lo tanto,

$$1 \leqslant \frac{T^2}{4} \xi, \quad |\nabla \alpha|, |\nabla \xi| \leqslant C \lambda \xi,$$

y

$$|\alpha_t|, |\xi_t| \leqslant T\xi^2, \quad |\alpha_{tt}| \leqslant C T^2 \xi^3.$$

Estas propiedades serán importantes en los cálculos que siguen.

Paso 1: Cambio de variables.

Denotemos $\psi := e^{-s\alpha} q$ y $g := e^{-s\alpha}(q_t + \Delta q)$, donde α está dada por (3.5) asociada a un abierto $\omega_0 \Subset \omega$ y $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que cumple (3.4). Entonces, se verifica que

$$M_1 \psi + M_2 \psi = g + M_3 \psi, \tag{3.10}$$

donde

$$M_1 \psi = -2s\lambda^2 |\nabla \eta|^2 \xi \psi - 2s\lambda (\nabla \eta \cdot \nabla \psi) \xi + \psi_t, \tag{3.11}$$

$$M_2 \psi = s^2 \lambda^2 |\nabla \eta|^2 \xi^2 \psi + \Delta \psi + s \alpha_t \psi, \tag{3.12}$$

y

$$M_3 \psi = s\lambda \Delta \eta \xi - s\lambda^2 |\nabla \eta|^2 \xi \psi.$$

Tomando la norma $L^2(Q)$ en (3.10), obtenemos

$$\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + 2(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q)} = \|g + M_3\psi\|^2_{L^2(Q)}. \tag{3.13}$$

La idea ahora es desarrollar el producto $(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q)}$ (que contiene nueve términos) para obtener los términos que aparecen en el lado izquierdo de (3.7).

Paso 2: Desarrollo de $(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q)}$.

Enumeremos los términos de $M_2\psi$ por $(M_2\psi)_1$, $(M_2\psi)_2$ y $(M_2\psi)_3$ (análogo para $M_1\psi$). Integrando por partes en tiempo y espacio, y usando las propiedades del Paso 0 de α y ξ, encontramos

$$(M_1\psi, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} \geq s^3\lambda^4 \iint_Q |\nabla\eta|^4\xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - C\iint_Q (s^3\lambda^3\xi^3 + s^2\lambda^2 T\xi^3)|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}(M_1\psi, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} \geq & s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta|^2\xi|\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 2s\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\eta\cdot\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & - s\lambda \iint_\Sigma \frac{\partial\eta}{\partial n}\xi\Big|\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - Cs^2\lambda^4T^2 \iint_Q \xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & - C\iint_Q (s + s\lambda + \lambda^2T^2)\xi|\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$(M_1\psi, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \geq -C(s^2\lambda^2T + sT^2) \iint_Q \xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Además,

$$\|g + M_3\psi\|^2_{L^2(Q)} \leqslant C\iint_Q |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C\iint_Q (s^2\lambda^2T^2 + s^2\lambda^4T^2)\xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Volviendo a (3.13), tenemos que

$$\begin{aligned}&\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + 2s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta|^2\xi|\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 2s^3\lambda^4 \iint_Q |\nabla\eta|^4\xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad\leqslant C\iint_Q |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C\iint_Q (s^3\lambda^3 + s^2\lambda^2T + s^2\lambda^4T^2 + sT^2 + s^2\lambda^2T^2)\xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + C\iint_Q (s + s\lambda + \lambda^2T^2)\xi|\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ahora, usando el hecho de que $|\nabla\eta(x)| > C > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega\setminus\omega_0}$ (ver (3.4)), tenemos

$$\begin{aligned}&\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + 2s\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 2s^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad\leqslant C\iint_Q |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs\lambda^2 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+ C\iint_Q (s^3\lambda^3 + s^2\lambda^2T + s^2\lambda^4T^2 + sT^2 + s^2\lambda^2T^2)\xi^3|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C\iint_Q (s + s\lambda + \lambda^2T^2)\xi|\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Tomando s y λ suficientemente grandes como $s \geq C(T+T^2)$ y $\lambda \geq C$, respectivamente, podemos estimar los términos globales de $|\psi|^2$ y $|\nabla\psi|^2$ que se encuentran a la derecha de (3.14) por los términos que se encuentran a la izquierda. En otras palabras,

$$C\iint_Q (s^3\lambda^3 + s^2\lambda^2 T + s^2\lambda^4 T^2 + sT^2 + s^2\lambda^2 T^2)\xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant s^3\lambda^4\iint_Q \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

y

$$C\iint_Q (s + s\lambda + \lambda^2 T^2)\xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant s\lambda^2\iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

para todo $s \geq C(T+T^2)$ y $\lambda \geq C$.

Así, encontramos

$$\begin{aligned}\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + s\lambda^2\iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^3\lambda^4\iint_Q \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \leqslant C\iint_Q |g|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4\iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs\lambda^2\iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \quad (3.15)$$

para todo $s \geq C(T+T^2)$ y $\lambda \geq C$.

Paso 3: Derivadas de mayor orden.

En esta etapa, agregaremos a la izquierda de (3.15) integrales con pesos de $|\Delta\psi|^2$ y $|\psi_t|^2$. En particular, la presencia de $|\Delta\psi|^2$ nos permitirá estimar la última integral de (3.15). Notemos que multiplicando (3.11) por el $s^{-1/2}\xi^{-1/2}$, tenemos que

$$s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + Cs\lambda^4\iint_Q \xi|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs\lambda^2\iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

para todo $s \geq CT^2$. De igual forma para (3.12) encontramos

$$s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + Cs^3\lambda^4\iint_Q \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + CsT^2\iint_Q \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

para todo $s \geq CT^2$. Volviendo a (3.15), tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s\lambda^2\iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^3\lambda^4\iint_Q \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \leqslant C\iint_Q |g|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4\iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs\lambda^2\iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \quad (3.16)$$

para todo $s \geq C(T+T^2)$ y $\lambda \geq C$.

Ahora estamos en posición de estimar la última integral de (3.16). Para esto, sea $\theta(x) \in C^2_0(\omega)$ no negativa tal que $\|\theta(x)\|_\infty = 1$ y $\theta(x) = 1$ para todo $x \in \omega_0$. Así, integrando por partes en espacio tenemos

$$
\begin{aligned}
s\lambda^2 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant & s\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta(x)\xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
=& - s\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta(x)\xi\Delta\psi\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - s\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi(\nabla\theta(x)\cdot\nabla\psi)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& - s\lambda^3 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta(x)\xi(\nabla\eta\cdot\nabla\psi)\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\leqslant & \varepsilon s^{-1} \iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C \iint_{\omega_0\times(0,T)} (s^3\lambda^4\xi^3 + s\lambda^4\xi)|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(\Omega,\omega) > 0$ es una constante suficientemente pequeña. De esta manera, volviendo a (3.16), obtenemos

$$
\begin{aligned}
s^{-1} \iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^{-1} \iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\leqslant C \iint_Q |g|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad (3.17)
\end{aligned}
$$

para todo $s \geq C(T+T^2)$ y $\lambda \geq C$. Notemos que el costo de eliminar el término de $|\nabla\psi|^2$ en ω_0 es agrandar el dominio de control (pasamos de ω_0 a ω).

Paso 4: Regreso a la variable original.

Sólo resta volver a la variable original $q = e^{s\alpha}\psi$. Usando esta relación en (3.17) obtenemos directamente

$$
\begin{aligned}
s^{-1} \iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^{-1} \iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\leqslant C \iint_Q e^{-2s\alpha}|q_t + \Delta q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad (3.18)
\end{aligned}
$$

para todo $s \geq C(T+T^2)$ y $\lambda \geq C$. Para $|\nabla q|^2$, notemos que

$$
e^{-s\alpha}\nabla q = \nabla\psi - s\lambda\nabla\eta\xi e^{-s\alpha} q,
$$

de donde deducimos

$$
s\lambda^2 \iint_Q \xi e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant Cs\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
$$

Volviendo a (3.18) tenemos ahora

$$
\begin{aligned}
s^{-1} \iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^{-1} \iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s\lambda^2 \iint_Q \xi e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\leqslant C \iint_Q e^{-2s\alpha}|q_t + \Delta q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad (3.19)
\end{aligned}
$$

para todo $s \geq C(T+T^2)$ y $\lambda \geq C$.

De forma análoga, para agregar los términos de $|\Delta q|^2$ y $|q_t|$ a la izquierda de (3.19), usamos las relaciones

$$e^{-s\alpha}\Delta q = \Delta\psi - e^{-s\alpha}\big(s\lambda\Delta\eta\xi q + s\lambda^2|\nabla\eta|^2\xi q + 2s\lambda\xi(\nabla\eta\cdot\nabla q) + s^2\lambda^2|\nabla\eta|^2\xi^2 q\big),$$

y

$$e^{-s\alpha}q_t = \psi_t + s\alpha_t\psi.$$

Esto concluye (el esquema de) la prueba de (3.7)

4. Control frontera

Consideremos ahora el caso en que el control actúa sobre una parte de la frontera de Ω. Sea $\Gamma \Subset \partial\Omega$ un abierto no vacío de $\partial\Omega$, y consideremos la ecuación del calor

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{en } Q, \\ y = u\,\mathbb{1}_\Gamma & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $y^0 \in L^2(\Omega)$. Nos interesa encontrar un control u tal que la solución de (4.1) sea tal que $y(T) = 0$ en Ω. Resolveremos este problema de control de dos formas.

Forma 1: Usando el resultado de control interno.
Sea $\widetilde{\Omega}$ una extensión suave de Ω tal que $\partial\Omega\setminus\Gamma \Subset \partial\widetilde{\Omega}$, y un abierto $\widetilde{\omega} \Subset \widetilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}$. En este nuevo dominio, consideramos el sistema de control

$$\begin{cases} \widetilde{y}_t - \Delta\widetilde{y} = \widetilde{u}\,\mathbb{1}_{\widetilde{\omega}} & \text{en } \widetilde{Q} := \widetilde{\Omega}\times(0,T), \\ \widetilde{y} = 0 & \text{sobre } \widetilde{\Sigma} := \partial\widetilde{\Omega}\times(0,T), \\ \widetilde{y}(0) = y^0\mathbb{1}_\Omega & \text{en } \widetilde{\Omega}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Sabemos por el Teorema 3.1 que para (4.2) existe $\widetilde{u} \in L^2(\widetilde{\omega}\times(0,T))$ tal que la solución asociada $\widetilde{y} \in L^2(0,T;H_0^1(\widetilde{\Omega}))\cap C^0([0,T];L^2(\widetilde{\Omega}))$ satisface $\widetilde{y}(T) = 0$ en $\widetilde{\Omega}$. Entonces, basta tomar la restricción de $\widetilde{y}$ a Ω, esto es, $y := \widetilde{y}|_Q \in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$, que es claramente la solución de (4.1) con $u := \widetilde{y}|_{\Gamma\times(0,T)}$ que satisface $y(T) = 0$ en Ω.
Esto prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.1. *Sea $T > 0$ e $y^0 \in L^2(\Omega)$. Existe un control $u \in L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))$ tal que la solución $y \in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ de (4.1) satisface $y(T) = 0$ en Ω.*
Además, existe una constante $C(\Omega,\Gamma,T) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Forma 2: Desigualdad de observabilidad.
Es posible probar el Teorema 4.1 directamente usando una desigualdad de observabilidad apropiada para la ecuación adjunta (3.2) de la forma

$$\int_\Omega |\varphi(0)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\iint_{\Gamma\times(0,T)}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

para alguna constante $C(\Omega,\Gamma,T)>0$. Esta desigualdad se puede probar con una desigualdad de Carleman con pesos α y ξ como en (3.5) asociadas a una función $\eta\in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\eta>0 \text{ en } \Omega,\quad \eta=0 \text{ sobre } \partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}\quad \text{y}\quad |\nabla\eta|>0 \text{ en } \overline{\Omega}. \tag{4.3}$$

Notemos que si $\widetilde{\eta}$ es la función de (3.4) asociada a $\widetilde{\Omega}$ y $\widetilde{\omega}_0$ (las extensiones de Ω anteriores), entonces $\eta:=\widetilde{\eta}|_{\Omega}$ es una función tal que satisface (4.3).

Referencias

[1] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity.* Mathematical Surveys and Monographs, 136. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[2] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and E. Zuazua. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. *SIAM J. Control Optim.* **41** (2002), no. 3, 798–819.

[3] C. Fabre, J.-P. Puel, and E. Zuazua. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **125** (1995), no. 1, 31–61.

[4] H. O. Fattorini and D. L. Russell. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.* **43** (2011), 272–292.

[5] E. Fernández-Cara. Null controllability of the semilinear heat equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **2** (1997), 87–103 (electronic).

[6] E. Fernández-Cara and S. Guerrero. Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM J. Control Optim.* **45** (2006), no. 4, 1399–1446.

[7] E. Fernández-Cara and E. Zuazua. Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **17** (2000), no. 5, 583–616.

[8] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations.* Lecture Notes Series, 34. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.

[9] O. Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its applications. *Control of nonlinear distributed parameter systems (College Station, TX, 1999), Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **218**, 113–137. Dekker, New York, 2001.

[10] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995), no. 1-2, 335–356.

[11] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1, volume 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics].* Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], with appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

[12] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed sys- tems. *SIAM Rev.* **30** (1988), no. 1, 1–68.

[13] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and control for operator semigroups.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[14] E. Zuazua. Controllability and Observability of Partial Differential Equations: some results and open problems. *Handbook of differential equations: evolutionary equations,* Vol. III, 527–621, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2007.