Un Problema de Optimización para el Primer Autovalor del p-Laplaciano más un Potencial.

Leandro M. Del Pezzo

Director: Julián Fernández Bonder

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Abril 2005

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El problema de autovalores para ecuaciones diferenciales elípticas de segundo orden es uno de los problemas fundamentales de la física–matemática y, probablemente, uno de los problemas más estudiados en los últimos tiempos. Ver [9].

Más precisamente, si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$, el problema de autovalores para el operador de Laplace con condiciones de Dirichlet homogéneas se formula como sigue: Encontrar λ y $u(x)$ tales que satisfagan

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda \text{ en } \Omega \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ es el Laplaciano.

El conjunto de valores $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfacen (1.1) para alguna función $u(x)$ no nula se los llama *autovalores* y a las funciones u se las llama *autofunciones asociadas.*

Sobre este problema, la teoría clásica del análisis funcional da una respuesta casi completa. Es decir, se sabe que existe una sucesión de autovalores $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \nearrow \infty,$$

las autofunciones asociadas $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y son un sistema ortogonal y completo del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (ver Capítulo 3 para la definición y propiedades de este espacio). El primer autovalor λ_1 es un *autovalor principal*, es decir, el autoespacio asociado es de dimensión uno y las autofunciones asociadas no nulas son de signo constante.

La teoría de autovalores se generaliza a operadores elípticos en forma de divergencia de manera bastante natural (ver Capítulo 4).

Al estudiar el problema cuando el operador elíptico es no lineal, pero homogéneo, la teoría clásica ya no funciona, si bien varias de sus ideas pueden aún aplicarse y se obtienen resultados parciales. Ver, por ejemplo, García Azorero-Peral Alonso [12], [13], Cuesta [7], Anane [2] etc. Algunos de estos resultados estan descriptos en el Capítulo 6.

Dentro de la teoría de autovalores para operadores elípticos diferenciales, un problema de especial importancia es el de optimización de estos autovalores con respecto a los diferentes parámetros en consideración.

Consideraremos operadores de Schroedinger, es decir operadores uniformemente elípticos L bajo perturbaciones dadas por un potencial V, en regiones acotadas.

Estos operadores aparecen en diferentes campos de aplicaciones tales como mecánica cuántica, estabilidad de la materia, teoría de scattering, etc.

En Ashbaugh-Harrell [4] se estudia el problema siguiente: Supongamos que $\|V\|_{L^q(\Omega)}$ está restringida, pero aparte de eso el potencial V es arbitrario. ¿Se puede entonces estimar el máximo valor que el primer autovalor asociado al operador $L+V$ puede alcanzar? ¿Y el mínimo valor? ¿Existen potenciales *optimales*? (i.e. potenciales V^* y V_* tales que el primer autovalor asociado a $L+V^*$ sea máximo y el primer autovalor asociado a $L+V_*$ sea mínimo).

En Ashbaugh-Harrell [4] se responden a estas preguntas de manera satisfactoria y, más aún, se de una caracterización de estos potenciales optimales.

Llegamos entonces al resultado principal de este trabajo que es la extensión de los resultados de Ashbaugh-Harrell [4] al caso no lineal. Consideramos como operador no lineal modelo el $p-$Laplaciano que se define como

$$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Este operador ha sido intensamente estudiado en años recientes y es un modelo para el estudio de operadores degenerados (si $p > 2$) y singulares (si $1 < p < 2$). En el caso $p = 2$ coincide con el Laplaciano. Este operador tambien sirve de modelo en el estudio de fluidos no Newtonianos. Ver Arcoya-Diaz-Tello [3] y Atkinson-Kalli [5].

En esta tesis, hemos demostrado que si uno considera pertubaciones del $p-$Laplaciano por un potencial V y se restringe $\|V\|_{L^q(\Omega)}$, entonces existen potenciales optimales en el sentido descripto arriba y se da una caracterización de los mismos.

Estos resultados son originales de este trabajo.

Esta Tesis se divide en dos partes. La primera consiste en una introducción breve a la teoría de funciones integrables, espacios L^p y a funciones de Sobolev. En la segunda se aplican estas herramientas al estudio de algunos problemas de contorno para ecuaciones diferenciales elípticas. Principalmente, nos ocupamos del problema de autovalores para operadores diferenciales de segundo orden.

El resto de esta Tesis está organizado como sigue: En el Capítulo 2 se da un repaso de los espacios $L^p(\Omega)$ que serán de utilidad en el transcurso de este trabajo. En el Capítulo 3 se da una breve introducción a los espacios de Sobolev que son el marco funcional en donde se desarrollará la teoría de las ecuaciones diferenciales elípticas. Para estos dos primeros capítulos hemos seguido la presentación del libro Brezis [6].

En el Capítulo 4, repasamos algunos resultados básicos en la teoría de ecuaciones lineales elípticas de segundo orden siguiendo la presentación de Gilbarg-Trudinger [14].

En el Capítilo 5, adaptamos los resultados del capítulo 4 para tratar con el operador $-\Delta_p+V$. Estos resultados, si bien son conocidos por los expertos, están esparcidos en la literatura.

Llegamos finalmente al Capítulo 6, que es el más importante de este trabajo. En el mismo estudiamos y resolvemos el problema de existencia y caracterización para potenciales maximales del operador $-\Delta_p + V$.

Capítulo 2

Los Espacios L^p

En todo lo que sigue, Ω designa un abierto de $\mathbb{R}^N$ dotado de la medida de Lebesgue dx. Se supone que el lector esta familiarizado con las nociones de función integrable, función medible, conjunto de medida cero, espacios de Banach, espacios Reflexivos y espacios Separables; ver por ejemplo Rudin [20], [21], Kolmogorov-Fomin [17], Wheeden-Zygmund [23], Brézis [6], etc. Se designa por $L^1(\Omega)$ el espacio de las funciones integrables sobre Ω con valores de $\mathbb{R}$. Se escribe,

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Como es habitual, se identifican dos funciones de $L^1(\Omega)$ que coinciden *c.t.p.* = para casi todo punto (= excepto en un conjunto de medida nula).

Extraordinariamente útiles, recordemos...

2.1. Algunos Resultados de Integración

Teorema 2.1.1 (Teorema de Convergencia Monótona de Beppo Levi) *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones de $L^1(\Omega)$ tal que $\sup\left\{\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge c.t.p. en Ω a un limite finito c.t.p. denotado por $f(x)$; además $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.*

Lema 2.1.2 (Lema de Fatou) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones no negativas,*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 2.1.3 (Teorema de Convergencia Mayorada) *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$. Supongamos que*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en* Ω
2. *existe una función g en $L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω.*

Entonces f esta en $L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Notación 2.1.4 *Se designa por $C_c(\Omega)$ el espacio de funciones continuas en Ω y con soporte compacto.*

Teorema 2.1.5 (Teorema de Densidad) *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$.*

2.2. Definición y Propiedades Elementales de los Espacios L^p

Definición 2.2.1 *Sean $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

y se nota

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right]^{1/p}.$$

Definición 2.2.2 *Se define*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ medible y existe } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

y se nota

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{C : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

Notación 2.2.3 *Sea $1 \leq p \leq \infty$; se designa por p' el exponente conjugado de p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1' = \infty$ y $\infty' = 1$.*

Los siguientes resultados son clásicos.

Teorema 2.2.4 (Desigualdad de Young) *Sean $1 < p < \infty$. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \ (a, b > 0).$$

Demostración. La función $x \to e^x$ es convexa, y por lo tanto

$$\begin{aligned} ab &= e^{\log(a)+\log(b)} = e^{\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{p'}\log(b^{p'})} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\log(a^p)} + \frac{1}{p'}e^{\log(b^{p'})} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \end{aligned}$$

♣

Teorema 2.2.5 (Desigualdad de Hölder) *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Demostración. Por homogeneidad, podemos asumir que $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Entonces, por la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{p'}\int_\Omega |g(x)|^{p'} \,\mathrm{d}x \\ &= 1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}. \end{aligned}$$

♣

Corolario 2.2.6 (Desigualdad de Interpolación) *Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ y se verifica la desigualdad de interpolación*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Demostración. $\int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{\alpha r}|f|^{(1-\alpha)r} \,\mathrm{d}x$, por la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |f|^{\alpha r \frac{p}{\alpha r}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_\Omega |f|^{(1-\alpha)r\frac{q}{(1-\alpha)r}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}}.$$

♣

Teorema 2.2.7 (Desigualdad de Minkowski) *Sean* $1 \leq p \leq \infty$ *y* f, $g \in L^p(\Omega)$. *Entonces*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)\, \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).
\end{aligned}$$

♣

Teorema 2.2.8 $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach para todo* $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración.

1.- $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_p$ es una norma.

Es un corolario de la Desigualdad de Minkowski.

2.- $L^p(\Omega)$ es un Banach.

a.- Supongamos primero que $p = \infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\Omega)$. Dado un entero $k \geq 1$ existe n_k tal que

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k} \text{ para } m, n \geq n_k.$$

Y así existe E_k de medida cero tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \;\; \forall x \in \Omega \setminus E_k,\; m, n \geq n_k. \tag{2.1}$$

Poniendo $E = \bigcup_k E_k$ (E es de medida cero), se observa que para todo $x \in \Omega \setminus E$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy (en $\mathbb{R}$). Sea $f_n(x) \to f(x)$ para $x \in \Omega \setminus E$. Al pasar al limite en (2.1) cuando $m \to \infty$ se obtiene

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \;\; \forall x \in \Omega \setminus E_k,\; n \geq n_k.$$

Asi $f \in L^\infty(\Omega)$ y $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ para todo $n \geq n_k$. Por consiguiente $\|f - f_n\|_\infty \to 0$.

b.- Supongamos ahora que $1 \leq p < \infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Para concluir la demostración es suficiente probar que una subsucesión es convergente en $L^p(\Omega)$.
Se extrae un subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \text{ para } k \geq 1$$

(se procede como sigue: existe n_1 tal que $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2}$ para $m, n \geq n_1$; se toma después $n_2 \geq n_1$ tal que $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2^2}$ para $m, n \geq n_2$, etc.). Demostraremos que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $L^p(\Omega)$. Para simplifica la notación escribimos f_k en lugar de f_{n_k} de forma que se tiene

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k} \text{ para } k \geq 1. \tag{2.2}$$

Poniendo

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

resulta

$$\|g_n\|_p \leq 1.$$

Del Teorema de Convergencia Monótona se deduce que *c.t.p.* en Ω, $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un limite, que se denota por $g(x)$, con $g \in L^p(\Omega)$. Por otra parte, para cada $n \geq k \geq 2$ se verifica

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_k(x)| &\leq |f_n(x) - f_{n-1}(x)| + \ldots + |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \\ &\leq g(x) - g_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Y resulta de esto que *c.t.p.* en Ω $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y converge a un limite, designado por $f(x)$. Se tiene *c.t.p.* en Ω

$$|f(x) - f_k(x)| \leq g(x) \text{ para } k \geq 2.$$

De donde resulta que $f \in L^p(\Omega)$. Por último $\|f_k - f\|_p \to 0$; en efecto, se tiene $|f_k(x) - f(x)|^p \to 0$ *c.t.p.* y $|f(x) - f_k(x)|^p \leq g(x)^p$ una moyorante integrable. Y se concluye gracias al Teorema de Convergencia Mayorada. ♣

2.3. Reflexividad. Separabilidad. Dual de L^p

Teorema 2.3.1 *$L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.*

La demostración se lleva a cabo en tres etapas.

1^a **etapa (Primera desigualdad de Clarkson).** Sea $2 \leq p < \infty$; se verifica

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \tag{2.3}$$

para todo $f, g \in L^p(\Omega)$.

Demostración. Claramente, es suficiente demostrar que

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)$$

para todo a, $b \in \mathbb{R}$.
Se tiene

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}} \ \forall \alpha, \beta \geq 0$$

(reducir al caso $\beta = 1$ y observar que la función $(x^2+1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$ es creciente sobre $[0, +\infty)$). Tomando $\alpha = |\frac{a+b}{2}|$ y $\beta = |\frac{a-b}{2}|$ resulta

$$\begin{aligned} \left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p &\leq \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \\ &= \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p \end{aligned}$$

(esta ultima desigualdad resulta de la convexidad de la función $x \to |x|^{\frac{p}{2}}$ por ser $p \geq 2$). ♣

2^a **etapa:** $L^p(\Omega)$ es uniformemente convexo, y por lo tanto reflexivo para $2 \leq p < \infty$.

Demostración. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ fijo. Se supone que

$$\|f\|_p \leq 1, \|g\|_p \leq 1 \text{ y } \|f - g\|_p > \varepsilon.$$

Se deduce de (2.3) que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)$$

y entonces

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \leq 1-\delta$$

con

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{p}{2}} > 0.$$

Por consiguiente $L^p(\Omega)$ es uniformemente convexo, y por tanto reflexivo. ♣

3^a **etapa:** $L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p \leq 2$.

Demostración. Sea $1 < p \leq 2$. Se considera el operador

$$T : L^p(\Omega) \to (L^{p'}(\Omega))'$$

definido como sigue:
Sea $u \in L^p(\Omega)$ fijo; la aplicación $f \in L^{p'}(\Omega) \to \int_\Omega uf \, \mathrm{d}x$ es una forma lineal y continua sobre $L^{p'}(\Omega)$, designada Tu, de forma que

$$Tu(f) = \int_\Omega uf \, \mathrm{d}x$$

para toda $f \in L^{p'}(\Omega)$.
Se tiene (por la desigualdad de Hölder)

$$|Tu(f)| \leq \|u\|_p \|f\|_{p'}$$

y entonces

$$\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_p. \tag{2.4}$$

Por otra parte, pongamos

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \ (f_0(x) = 0 \text{ si } \ u(x) = 0).$$

Se tiene $f_0 \in L^{p'}(\Omega)$, $\|f_0\|_{p'} = \|u\|_p^{p-1}$ y $Tu = \|u\|_p^p$. Y entonces

$$\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \geq \frac{Tu(f_0)}{\|f_0\|_{p'}} = \|u\|_p. \tag{2.5}$$

Al compara (2.4) y (2.5) se obtiene $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} = \|u\|_p$. Resulta de ello que T es una isometría de $L^p(\Omega)$ sobre un subespacio cerrado (por ser $L^p(\Omega)$ completo) de $(L^{p'}(\Omega))'$. Pero $L^{p'}(\Omega)$ es reflexivo (2^a etapa) y así $(L^{p'}(\Omega))'$ es reflexivo. Se sigue que $T(L^p(\Omega))$ es reflexivo, y por tanto también $L^p(\Omega)$. ♣

Observación 2.3.2 *Si $p = 1$ o ∞ entonces $L^p(\Omega)$ no es reflexivo, para una demostración de esto ver Brézis [6].*

Teorema 2.3.3 (Teorema de Representación de Riesz) *Sean $1 < p < \infty$ y $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Entonces existe $u \in L^{p'}(\Omega)$ único tal que*

$$\varphi(f) = \int_\Omega uf \, \mathrm{d}x$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$.
Además se verifica

$$\|u\|_{p'} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demostración. Se define el operador $T : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ por

$$Tu(f) = \int_\Omega uf \, \mathrm{d}x$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$ y se tiene

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{p'}$$

para toda $u \in L^{p'}(\Omega)$ (proceder como en la demostración del Teorema 2.3.1, 3^a etapa). Hemos de probar que T es sobreyectivo. Se pone $E = T(L^{p'}(\Omega))$. Como E es un subespacio cerrado, basta demostrar que E es denso en $(L^p(\Omega))'$. Sea $h \in (L^p(\Omega))''$ (igual a $L^p(\Omega)$ por ser $L^p(\Omega)$ reflexivo) tal que $Tu(h) = 0$ para toda $u \in L^{p'}(\Omega)$; comprobemos que $h = 0$, alcanza con esto para ver que E es denso por la Forma Geométrica de Hahn-Banach, ver Brézis [6]. Se tiene

$$\int_\Omega uh \, \mathrm{d}x = Tu(h) = 0$$

para toda $u \in L^{p'}(\Omega)$. Y se concluye que $h = 0$ eligiendo $u = |h|^{p-2}h$. ♣

Observación 2.3.4 *El Teorema 2.3.3 es muy importante. Expresa que toda forma lineal continua sobre $L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$ se representa por medio de una función de $L^{p'}(\Omega)$. La aplicación $\varphi \to u$ es un operador lineal isométrico y sobreyectivo que permite identificar al dual de $L^p(\Omega)$ con $L^{p'}(\Omega)$. En lo que sigue, se hará sistemáticamente la identificación*

$$(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega).$$

También se puede ver que el dual de $L^1(\Omega)$ es $L^\infty(\Omega)$, ver Fava-Zó [11].

Definiciones 2.3.5 *Sean* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $f \in L^p(\Omega)$

1. *Diremos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* f *en* $L^p(\Omega)$*, se nota*
$$f_n \to f \ \text{ en } \ L^p(\Omega),$$
si
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

2. *Diremos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débil a* f *en* $L^p(\Omega)$*, se nota*
$$f_n \rightharpoonup f \ \text{ en } \ L^p(\Omega),$$
si para toda $g \in L^{p'}(\Omega)$
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}x.$$

El siguiente es un lema técnico que sera de vital importancia en la demostración del proximo Teorema.

Lema 2.3.6 *Si* $x, y \geq 0$ *entonces*
$$|x^p - y^p| \leq p|x-y|(x^{p-1} + y^{p-1}).$$

Demostración. Supongamos $x \geq y$ por lo tanto, por Young
$$yx^{p-1} \leq \frac{1}{p'}x^p + \frac{1}{p}y^p.$$
Por otro lado,
$$y^{p-1}x \geq y^p \text{ por ser } x \geq y.$$
Entonces
$$yx^{p-1} - y^{p-1}x \leq \frac{1}{p'}(x^p - y^p)$$
de donde
$$p(yx^{p-1} - y^{p-1}x) \leq (p-1)(x^p - y^p).$$
Luego
$$\begin{aligned} x^p - y^p &\leq p(x^p - y^p) - p(yx^{p-1} - y^{p-1}x) = p(x^p + y^{p-1}x - y^p - yx^{p-1}) \\ &= p[x(x^{p-1} + y^{p-1}) - y(x^{p-1} + y^{p-1})] = p(x-y)(x^{p-1} + y^{p-1}). \end{aligned}$$
Como queríamos ver. ♣

Teorema 2.3.7 *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $L^{pq}(\Omega)$, con $1 \leq p, q \leq \infty$. Si*

$$f_n \to f \ \text{en} \ L^{pq}(\Omega) \tag{2.6}$$

entonces

$$|f_n|^p \to |f|^p \text{en} \ L^q(\Omega). \tag{2.7}$$

Demostración. Usando el Lema 2.3.6

$$\begin{aligned} ||f_n|^p - |f|^p| &\leq p||f_n| - |f||(|f_n|^{p-1} + |f|^{p-1}) \\ &\leq p|f_n - f|(|f_n|^{p-1} + |f|^{p-1}). \end{aligned}$$

Luego

$$||f_n|^p - |f|^p|^q \leq p^q|f_n - f|^q(|f_n|^{p-1} + |f|^{p-1})^q.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||f_n|^p - |f|^p|^q \,\mathrm{d}x &\leq p^q \int_\Omega |f_n - f|^q(|f_n|^{p-1} + |f|^{p-1})^q \,\mathrm{d}x \\ &\leq p^q\Big(\int_\Omega |f_n - f|^{pq} \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega (|f_n|^{p-1} + |f|^{p-1})^{p'q} \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p'} \\ &= p^q\|f_n - f\|_{pq}^q \||f_n|^{p-1} + |f|^{p-1}\|_{qp'}^q \\ &\leq p^q\|f_n - f\|_{pq}^q(\||f_n|^{p-1}\|_{qp'} + \||f|^{p-1}\|_{qp'})^q, \end{aligned}$$

entonces

$$\int_\Omega ||f_n|^p - |f|^p|^q \,\mathrm{d}x \leq p^q\|f_n - f\|_{pq}^q(\|f_n\|_{qp}^{p-1} + \|f\|_{qp}^{p-1})^q. \tag{2.8}$$

De (2.6) tengo que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{pq} = 0$ y $(\|f_n\|_{pq})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, luego de (2.8) se deduce (2.7). ♣

Definición 2.3.8 *Sea $1 \leq p \leq \infty$; se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$, donde χ_K es la función característica de K.*

Lema 2.3.9 *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega fu \,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.9}$$

para toda $u \in C_c(\Omega)$. Entonces $f = 0$ c.t.p. en Ω.

Demostración. Se lleva a cabo en dos etapas:

1.- Supongamos que además se verifica $f \in L^1(\Omega)$ y $|\Omega| < \infty$ [1].
Dado $\varepsilon > 0$ existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f - f_1\|_1 < \varepsilon$. Por (2.9) se tiene

$$\left| \int_\Omega f_1 u \, \mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon \|u\|_\infty \tag{2.10}$$

para toda $u \in C_c(\Omega)$.
Sean

$$\begin{aligned} K_1 &= \{x \in \Omega : f_1(x) \geq \varepsilon\} \\ K_2 &= \{x \in \Omega : f_1(x) \leq -\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Como K_1 y K_2 son compactos disjuntos, se puede construir gracias al Teorema de Tietze-Urysohn (ver Dieudonné [8])

$$u_0(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in K_1 \\ -1 & \text{si } x \in K_2 \end{cases}$$

y

$$|u_0(x)| \leq 1$$

para todo $x \in \Omega$. Poniendo $K = K_1 \cup K_2$ resulta

$$\int_\Omega f_1 u_0 \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega \setminus K} f_1 u_0 \, \mathrm{d}x + \int_K f_1 u_0 \, \mathrm{d}x$$

y así, gracias a (2.10)

$$\int_K |f_1| \, \mathrm{d}x = \int_K f_1 u_0 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1 u_0| \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1| \, \mathrm{d}x.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_1| \, \mathrm{d}x &= \int_K |f_1| \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega \setminus K} |f_1| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon + 2 \int_{\Omega \setminus K} |f_1| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon |\Omega|. \end{aligned}$$

ya que

$$|f_1| \leq \varepsilon \text{ en } \Omega \setminus K.$$

[1] Dado $A \subset \Omega$, se designa por $|A|$ la medida de A.

Entonces
$$\|f\|_1 \leq \|f - f_1\|_1 + \|f_1\|_1 \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|.$$
Como esta desigualdad es valida para todo $\varepsilon > 0$, se concluye que $f = 0$ *c.t.p.* en Ω.

2.- Consideremos ahora el caso general.
Se escribe $\Omega = \cup_n \Omega_n$ con $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ abierto, $\overline{\Omega}_n$ es compacto, (tomar, por ejemplo $\Omega_n = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$ y $|x| < n\}$). Aplicando lo anterior a Ω_n y $f|_{\Omega_n}$ se ve que $f = 0$ *c.t.p.* en Ω_n y se concluye que $f = 0$ *c.t.p.* en Ω. ♣

Teorema 2.3.10 (Densidad) *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Se sabe ya que $C_c(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$. Supongamos que $1 < p < \infty$. Para demostrar que $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ es suficiente con probar que si $h \in L^{p'}(\Omega)$ verifica $\int_\Omega hu \, \mathrm{d}x = 0$ para toda $u \in C_c(\Omega)$, entonces $h = 0$. Pero $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ ya que
$$\int_\Omega |h\chi_K| \, \mathrm{d}x \leq \|h\|_{p'} |K|^{\frac{1}{p}} < \infty$$
y entonces se puede aplicar el Lema 2.3.9 para concluir que $h = 0$ *c.t.p.* ♣

Teorema 2.3.11 *$L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Se designa por $(R_i)_{i \in I}$ la familia (numerable) de rectángulos R de la forma
$$R = \prod_{k=1}^{N} (a_k, b_k) \text{ con } a_k, b_k \in \mathbb{Q} \text{ y } R \subset \Omega.$$
Se designa por E el espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por las funciones χ_{R_i} (i.e. las combinaciones lineales finitas con coeficientes racionales de las funciones χ_{R_i}); de modo que E es numerable. Demostremos que E es denso en $L^p(\Omega)$. Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ fijos. Sea $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$ (Teorema 2.3.10). Sea U un abierto acotado tal que $sop(f_1) \subset U \subset \Omega$. Como $f_1 \in C_c(U)$, se construye fácilmente una función $f_2 \in E$ tal que $sop(f_2) \subset U$ y que $|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|U|^{\frac{1}{p}}}$ *c.t.p.* en U (se comienza recubriendo $sop(f_1)$ con un numero finito de rectángulos R_i sobre los cuales la oscilación de f_1 es inferior a $\frac{\varepsilon}{|U|^{\frac{1}{p}}}$). Resulta de esto que $\|f_2 - f_1\|_p \leq \varepsilon$ y entonces tenemos que $\|f - f_2\|_p \leq 2\varepsilon$. ♣

2.4. Convolución y Regularización

Teorema 2.4.1 *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, la función $y \to f(x-y)g(y)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^N$. Se define*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Demostración.

1.- El caso $p = \infty$ es evidente.

2.- El caso $p = 1$ es un resultado usual del análisis real, ver Fava-Zó [11].

3.- Supongamos que $1 < p < \infty$ por 2, se sabe que para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^N$ fijo, la función $y \to |f(x-y)||g(y)|^p$ es integrable sobre $\mathbb{R}^N$, i.e.,

$$|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N).$$

Como $|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^N)$, se deduce de la desigualdad de Hölder que

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)||f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1_y(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{p'}},$$

i.e.

$$|(f * g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x)\|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

Aplicando el resultado del caso $p = 1$, se ve que

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N) \text{ y } \|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1 \|g\|_p^p \|f\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

i.e.

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

♣

Notación 2.4.2 *Dada una función f se escribe $\check{f} = f(-x)$.*

Proposición 2.4.3 *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Entonces se verifica*

$$\int (f * g)h \,\mathrm{d}x = \int g(\check{f} * h)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración. La función $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x) \in L^1(\mathbb{R}^N \mathrm{x} \mathbb{R}^N)$ ya que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x < \infty$$

gracias al Teorema 2.4.1 y a la desigualdad de Hölder.
Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x)h(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)(\check{f} * h)(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

♣

Proposición 2.4.4 *Sean $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Entonces*

$$f * g \in C(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. Observemos primero que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ la función $y \to f(x-y)g(y)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^N$ y asi $(f*g)(x)$ tiene sentido para todo $x \in \mathbb{R}^N$.
Sea $x_n \to x$ y pongamos

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= f(x_n - y)g(y) \\
F(y) &= f(x-y)g(y)
\end{aligned}$$

de modo que $F_n(y) \to F(y)$ *c.t.p.* en $\mathbb{R}^N$. Por otra parte, sea K un compacto fijo tal que $(x_n - sop(f)) \subset K$ para todo n. Así $f(x_n - y) = 0$ para $y \notin K$ y por tanto $|F_n(y)| \leq \|f\|_\infty \chi_k(y)g(y)$, mayorante integrable. Se deduce de Teorema de Convergencia Mayorada que

$$(f*g)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F_n(y)\,\mathrm{d}y \to \int_{\mathbb{R}^N} F(y)\,\mathrm{d}y = (f*g)(x).$$

♣

Notación 2.4.5 $C^k(\Omega)$ *designa el espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables sobre* Ω.

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &= \bigcap_k C^k(\Omega) \\ C_c^k(\Omega) &= C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega) \\ C_c^\infty(\Omega) &= C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) \\ C^\alpha(\overline{\Omega}) &= \left\{ u \in C(\Omega) : \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \ \textit{con} \ 0 < \alpha < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.4.6 *Sean* $f \in C_c^k(\Omega)$ *y* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(k \in \mathbb{N})$*. Entonces*

$$f * g \in C^k(\Omega) \ \ y \ \ D^k(f*g) = (D^k f) * g.^2$$

En particular, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *y* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *entonces* $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Por recurrencia, se reduce inmediatamente al caso $k = 1$.
Sea $x \in \mathbb{R}^N$ fijo; demostremos que $f * g$ es diferenciable en x y que

$$\nabla(f*g)(x) = (\nabla f * g)(x).^3.$$

Sea $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < 1$. Se tiene

$$\begin{aligned} |f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y)| &= \\ &= \left| \int_0^1 [h\nabla f(x+sh-y) - h\nabla f(x-y)] \, \mathrm{d}s \right| \\ &\leq |h|\varepsilon(|h|) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

con $\varepsilon(|h|) \to 0$ cuando $|h| \to 0$ (ya que ∇f es uniformemente continuo sobre $\mathbb{R}^N$).
Sea K un compacto fijado suficientemente grande para que $x + B(0,1) - sop(f) \subset K$. Se tiene

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y) = 0$$

[2] aqui D^k designa una cualquiera de las derivadas parciales

$$D^k f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n} f \text{ con } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k.$$

[3] $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

para todo $y \in K$ y para todo $h \in B(0,1)$, entonces

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y)| \leq |h|\varepsilon(|h|)\chi_K(y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$ y todo $h \in B(0,1)$.
Por consiguiente

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x) - h(\nabla f * g)(x)| \leq |h|\varepsilon(|h|) \int_K |g(y)|\,\mathrm{d}y.$$

De donde resulta que $f*g$ es diferenciable en x y que

$$\nabla(f*g)(x) = (\nabla f * g)(x).$$

♣

Sucesiones regularizantes.

Definición 2.4.7 *Se llama sucesión regularizante a toda sucesión* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones tal que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \ sop(\rho_n) \subset B(0,1),\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_m \,\mathrm{d}x = 1\,, y\ \ \rho_n \geq 0\ \ en\ \ \mathbb{R}^N.$$

En adelante, se utilizara sistemáticamente $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para designar una sucesión regularizante.

Observemos que existen sucesiones regularizantes. En efecto, basta fijar una función $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $sop(\rho) \subset B(0,1)$, $\rho \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$ y $\int_{\mathbb{R}^N} \rho\,\mathrm{d}x = 1$; tomar por ejemplo la función

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Y considerar a continuación $\rho_n(x) = Cn^N\rho(nx)$ con $C = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho\,\mathrm{d}x\right)^{-1}$.

Proposición 2.4.8 *Sea* $f \in C(\mathbb{R}^N)$*; entonces* $\rho_n * f \to f$ *uniformemente sobre todo compacto de* $\mathbb{R}^N$.

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto fijo. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (dependiente de K y de ε) tal que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in K$ y para todo $y \in B(0, \delta)$. Se tiene

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{B(0,\frac{1}{n})} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Entonces, para $n > \frac{1}{\delta}$ y $x \in K$,

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \,\mathrm{d}x = \varepsilon.$$

♣

Teorema 2.4.9 *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $\rho_n * f \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ fija tal que $\|f_1 - f\|_p < \varepsilon$ (ver Teorema 2.3.10). Por la Proposición 2.4.8 se sabe que $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniformemente sobre todo compacto. Por otra parte, se tiene (resultado conocido del Análisis Real)

$$sop(\rho_n * f_1) \subset B(0, \frac{1}{n}) + sop(f_1) \subset K, \;\; K \text{ compacto fijo.}$$

Por consiguiente se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n * f_1 - f_1\|_p = 0.$$

Finalmente, se escribe

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [\rho_m * f_1 - f_1] + [f_1 - f]$$

de donde resulta que

$$\|\rho_n * f - f\|_p \leq \|\rho_n * f_1 - f_1\| + 2\|f_1 - f\|_p$$

(en virtud del Teorema 2.4.1). Se tiene entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \|\rho_n * f - f\|_p \leq 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, i.e.,

$$\limsup_{n\to\infty} \|\rho_n * f - f\|_p = 0.$$

♣

Corolario 2.4.10 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto arbitrario. Entonces $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sean $f \in L^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ y $f_1 \in C_c(\Omega)$ tales que

$$\|f - f_1\|_p < \varepsilon.$$

Se considera la función $\overline{f_1}$ definida por

$$\overline{f_1}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

de modo que $\overline{f_1} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y (Teorema 2.4.9) $\rho_n * \overline{f_1} \to \overline{f_1}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Por otra parte

$$sop(\rho_n * \overline{f_1}) \subset B(0, \frac{1}{n}) + sop(f_1) \subset \Omega$$

para n suficientemente grande.
Sea $u_n = (\rho_n * \overline{f_1})|_\Omega$. Entonces, para n suficientemente grande,
$u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ y además $u_n \to f_1$ en $L^p(\Omega)$. Así, para n suficientemente grande, $\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon$. ♣

2.5. Criterio de Compacidad Fuerte en L^p

Es importante saber cuando una familia de funciones de $L^p(\Omega)$ es relativamente compacta en $L^p(\Omega)$ para la topología fuerte. Recordemos primero el Teorema de Ascoli, que responde a esta misma pregunta en $C(K)$, siendo K un espacio métrico compacto.

Teorema 2.5.1 (Ascoli) *Sean K un espacio métrico compacto y $\mathfrak{H}$ un subconjunto acotado de $C(K)$.*
Supongamos que $\mathfrak{H}$ es uniformemente equicontinua, i.e. para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\textit{si } \operatorname{dist}(x_1, x_2) < \delta \textit{ entonces } |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

para toda $f \in \mathfrak{H}$.
Entonces $\mathfrak{H}$ es relativamente compacta en $C(K)$.

Para la demostración del Teorema de Ascoli ver Diudonné [8].

Notaciones

1. Se escribe $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ (tralación de f por h).

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto; se dice que un abierto U esta fuertemente incluido en Ω, y se escribe $U \subset\subset \Omega$ si $\overline{U} \subset \Omega$ y si $\overline{U}$ es compacto.

El siguiente teorema (y su corolario) son «versiones L^p» del Teorema de Ascoli.

Teorema 2.5.2 (Frechet-Kolmogorov) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, $U \subset\subset \Omega$ y $\mathfrak{F}$ un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < \mathrm{dist}(\mathrm{U}, \mathbb{R}^\mathrm{N} \setminus \Omega)$ tal que*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon$$

para todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \delta$ y para toda $f \in \mathfrak{F}$.[4] *Entonces $\mathfrak{F}|_U$ es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$.*

Demostración. Siempre se puede suponer que Ω es acotado. Para $f \in \mathfrak{F}$ se pone

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Se escribe

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{\overline{f} : f \in \mathfrak{F}\}$$

de forma que $\overline{\mathfrak{F}}$ esta acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y en $L^1(\mathbb{R}^N)$. Se procede en tres etapas:

a.- Se tiene

$$\|\rho_n * \overline{f} - \overline{f}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

para toda $\overline{f} \in \overline{\mathfrak{F}}$ y todo $n > \frac{1}{\delta}$.
En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)| \rho_n(y)\, \mathrm{d}y \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y)\, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

[4] Obsérvese que si $x \in U$ y $|h| < \delta < \mathrm{dist}(\mathrm{U}, \mathbb{R}^\mathrm{N} \setminus \Omega)$ entonces $x + h \in \Omega$ y $f(x+h)$ tiene sentido.

y por lo tanto

$$|(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p \leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y)\,\mathrm{d}y.$$

Luego

$$\int_U |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y \int_U |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon^p$$

para $n > \frac{1}{\delta}$ (por hipótesis).

b.- La familia $\mathfrak{K} = (\rho_n * \overline{\mathfrak{F}})|_{\overline{U}}$ verifica, para cada n, las hipótesis del Teorema de Ascoli, En efecto, en primer lugar se tiene

$$\|\rho_n * \overline{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_\infty \|\overline{f}\|_1 \leq C_n$$

para toda $\overline{f} \in \overline{\mathfrak{F}}$. Por otra parte, se tiene para todo x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^N$, para toda $\overline{f} \in \overline{\mathfrak{F}}$

$$|(\rho_n * \overline{f})(x_1) - (\rho_n * \overline{f})(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \|\rho_n\|_{Lip} \|\overline{f}\|_1,$$ [5]

entonces

$$|(\rho_n * \overline{f})(x_1) - (\rho_n * \overline{f})(x_2)| \leq C_n |x_1 - x_2|$$

para toda $\overline{f} \in \overline{\mathfrak{F}}$. De donde resulta que $\mathfrak{K}$ es relativamente compacto en $C(\overline{U})$ y a fortiori en $L^p(U)$.

c.- Fin de la demostración. Dado $\varepsilon > 0$ se fija $n > \frac{1}{\delta}$ de forma que

$$\|(\rho * \overline{f}) - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon$$

para toda $f \in \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{K}$ es relativamente compacto en $L^p(U)$, se puede recubrir $\mathfrak{K}$ con un número finito de bolas de radio ε (en $L^p(U)$). Las bolas correspondientes de radio 2ε recubren entonces $\mathfrak{F}|_U$. Por consiguiente $\mathfrak{F}|_U$ es relativamente compacto en $L^p(U)$. ♣

[5] $\|\rho_n\|_{Lip} = \sup_{x_1 = x_2} \frac{|\rho_n(z_1) - \rho_n(z_2)|}{|z_1 - z_2|}$.

Corolario 2.5.3 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, y $\mathfrak{F}$ un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Supongamos que*

1. *para todo $\varepsilon > 0$ y todo $U \subset\subset \Omega$, existe $\delta > 0$, $\delta < \operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ tal que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon$ para todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \delta$ y para toda $f \in \mathfrak{F}$,*

2. *para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \subset\subset \Omega$ tal que $\|f\|_{L^p(\Omega\setminus U)} < \varepsilon$ para toda $f \in \mathfrak{F}$.*

Entonces $\mathfrak{F}$ es relativamente compacta en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ se fija $U \subset\subset \Omega$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus U)} < \varepsilon$$

para toda $f \in \mathfrak{F}$. Por el Teorema 2.5.2 se sabe que $\mathfrak{F}|_U$ es relativamente compacta en $L^p(U)$. Se puede entonces recubrir $\mathfrak{F}|_U$ con un número finito de bolas de radio ε en $L^p(U)$. Sea

$$\mathfrak{F}|_U \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \varepsilon) \text{ con } g_i \in L^p(\Omega)$$

(estas bolas se consideran en $L^p(\Omega)$). Se pone

$$\overline{g_i}(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus U. \end{cases}$$

Se comprueba con facilidad que $\mathfrak{F} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\overline{g_i}, 2\varepsilon)$ (estas bolas se consideran en $L^p(\Omega)$). ♣

2.6. El Tangente de la Bola en L^p

En lo que sigue $1 < p < \infty$. Comencemos un lema técnico.

Lema 2.6.1 *Sea $\alpha : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\alpha(t) = \|v + tw\|_p$$

donde v,$w \in L^p(\Omega)$. Entonces α es diferenciable y

$$\dot{\alpha}(0) = \frac{1}{p}\|v\|_p^{-1/p'} \int_\Omega |v|^{p-2} vw \, \mathrm{d}x.$$

Demostración. Basta ver que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |v+tw|^p\,\mathrm{d}x\Big|_{t=0} = \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x.$$

Observemos que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|^p = |x|^{p-2}x$, luego

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{\int_\Omega |v+tw|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega |v|^p\,\mathrm{d}x}{t} - \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x\right| =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left|\int_\Omega \frac{|v+tw|^p - |v|^p - t|v|^{p-2}vw}{t}\,\mathrm{d}x\right|.$$

Si $f_t = \frac{|v+tw|^p - |v|^p - t|v|^{p-2}vw}{t}$ tenemos que $f_t \to 0$ p.p. Por otro lado, por el Lema 2.3.6

$$\begin{aligned}
|f_t| &= \left|\frac{|v+tw|^p - |v|^p - t|v|^{p-2}vw}{t}\right| \\
&\le \left|\frac{|v+tw|^p - |v|^p}{t}\right| + |v|^{p-1}|w| \\
&\le p\frac{||v+tw| - |v||(|v+tw|^{p-1} + |v|^{p-1})}{t} + |v|^{p-1}|w| \\
&\le p|w|[(|v|+|w|)^{p-1} + |v|^{p-1} + |v|^{p-1}|w|] \\
&\le C_p(|w||v|^{p-1} + |w|^p) \text{ que es integrable.}
\end{aligned}$$

Por el Teorema De Convergencia Mayorada

$$\lim_{t\to 0}\left|\int_\Omega \frac{|v+tw|^p - |v|^p - t|v|^{p-2}vw}{t}\,\mathrm{d}x\right| = 0$$

♣

Teorema 2.6.2 (El tangente de la bola en $L^p(\Omega)$) *Sea $S = \partial B(0,1)$ incluida en $L^p(\Omega)$ y $v \in S$ entonces*

$$T_vS = \left\{ w \in L^p(\Omega) : \int_\Omega |v|^{p-2}vw\,\mathrm{d}x = 0 \right\}. \tag{2.11}$$

Demostración. Sea $v \in S$. Por definición de tangente, se tiene

$$T_vS = \{w \in L^p(\Omega) : \text{ existe}\,\alpha : (-1,1) \to S\,\text{diferenciable tal que}\,\alpha(0) = v\,\text{y}\,\dot\alpha(0) = w\}.$$

Sean $w \in T_vS$ y $\alpha : (-1,1) \to S$ diferenciable tal que $\alpha(0) = v$ y $\dot\alpha(0) = w$. Definimos

$$\rho : (-1,1) \to \mathbb{R},$$

$$\rho(t) = \|\alpha(t)\|_p^p = 1.$$

Luego se tiene $\dot{\rho}(t) = 0$ para $t \in (-1, 1)$.
Es decir,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |\alpha(t)|^p \,\mathrm{d}x \bigg|_{t=0} = \int_\Omega p|\alpha(t)|^{p-2}\alpha(t)\dot{\alpha}(t)\,\mathrm{d}x \bigg|_{t=0} = p \int_\Omega |v|^{p-2} vw \,\mathrm{d}x.$$

Con lo cual $\int_\Omega |v|^{p-2} vw \,\mathrm{d}x = 0$.
Recíprocamente. Sea $w \in L^p(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |v|^{p-2} vw \,\mathrm{d}x = 0$.
Definimos

$$\alpha : (-1, 1) \to S$$
$$\alpha(t) = \frac{v + tw}{\|v + tw\|_p}.$$

Notar que $\alpha(0) = v$. Veamos que $\dot{\alpha}(0) = w$. En efecto

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}\left(\frac{v+tw}{\|v+tw\|_p} - v \right) - w \right\|_p &= \lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}\left(\frac{v+tw}{\|v+tw\|_p} - v - tw \right) \right\|_p \\
&= \lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\|v+tw\|_p} - 1 \right) v + tw \right\|_p \\
&= \lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}\left(\frac{1 - \|v+tw\|_p}{\|v+tw\|_p} \right) v + tw \right\|_p \\
&= \lim_{t\to 0} \left| \frac{1 - \|v+tw\|_p}{t} \right| \\
&= \lim_{t\to 0} \left| \frac{\|v\|_p - \|v+tw\|_p}{t} \right| \\
&= \frac{1}{p}\|v\|_p^{-1/p'} \int_\Omega |v|^{p-2} vw \,\mathrm{d}x \text{ por el Lema 2.6.1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego $w \in T_v S$. ♣

Capítulo 3

Los Espacios $W^{1,p}$

3.1. Definición y Propiedades Elementales de los Espacios $W^{1,p}$

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 3.1.1 *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada débil de f con respecto a x_i si*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega v_i \varphi \, \mathrm{d}x$$

para toda $\varphi \in C^1_c(\Omega)$.

Observación 3.1.2 *v_i es única.*

Notación 3.1.3

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{\partial u}{\partial x_i}. \\ \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Definición 3.1.4 *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ consiste de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que para cada $i = 1, \ldots, N$ existe la derivada débil con respecto a x_i y $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$.*

Notación 3.1.5 $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Definición 3.1.6 *Si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$\|u\|_{1,\infty} = \sup \mathrm{ess}(|\mathrm{u}| + |\nabla \mathrm{u}|).$$

Observación 3.1.7 *El espacio* $H^1(\Omega)$ *está dotado del producto escalar*

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x;$$

la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es equivalente a la norma de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposición 3.1.8 *El espacio* $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración.

1.- $\| \cdot \|_{1,p}$ es una norma.

Es claro que

$$\|\lambda u\|_{1,p} = |\lambda| \|u\|_{1,p},$$

y

$$\|u\|_{1,p} = 0 \text{ si y solo si } u = 0 \ \textit{c.t.p.}$$

Sean u, $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces si $1 \leq p \leq \infty$, por la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{1,p} &= \left(\|u+v\|_p^p + \sum_{i=1}^N \| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p + \sum_{i=1}^N \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_p^p + \sum_{i=1}^N \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\|u\|_p^p \sum_{i=1}^N \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|v\|_p^p + \sum_{i=1}^N \| \frac{\partial v}{\partial x_i} \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}.
\end{aligned}$$

2.- $W^{1,p}(\Omega)$ es completo.
Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq N)$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo, existen $u, u_1, \ldots, u_N \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \,\text{en}\; L^p(\Omega)$$

y

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to u_i \,\text{en}\; L^p(\Omega)\; (i = 1, \ldots, N).$$

3.- Veamos que

$$u \in W^{1,p}(\Omega),\; \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i \; (i = 1, \ldots, N). \tag{3.1}$$

Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_i \phi\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Luego (3.1) es verdadero. Usando 2 tenemos que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, como queríamos. ♣

Definiciones 3.1.9 *Sean* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$

1. *Diremos que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* u *en* $W^{1,p}(\Omega)$, *se nota*

$$u_n \to u \;\textit{en}\; W^{1,p}(\Omega),$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{1,p} = 0.$$

2. *Diremos que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débil a* u *en* $W^{1,p}(\Omega)$, *se nota*

$$u_n \rightharpoonup u \;\textit{en}\; W^{1,p}(\Omega),$$

si

$$u_n \rightharpoonup u \;\textit{en}\; L^p(\Omega) \;\textit{y}\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \;\textit{en}\; L^p(\Omega)$$

para todo $1 \leq i \leq N$.

Proposición 3.1.10 $W^{1,p}(\Omega)$ *es reflexivo para* $1 < p < \infty$ *y separable para* $1 \leq p < \infty$. *El espacio* $H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración.

1.- $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.
En efecto, el espacio producto $E = (L^p(\Omega))^{N+1}$ es reflexivo. El operador $T : W^{1,p}(\Omega) \to E$ definido por $Tu = (u, \nabla u)$ es una isometría de $W^{1,p}(\Omega)$ en E; por lo tanto $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de E. Resulta entonces que $T(W^{1,p}(\Omega))$ es reflexivo -y por consiguiente también lo es $W^{1,p}(\Omega)$.

2.- $W^{1,p}(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.
En efecto, el espacio producto $E = (L^p(\Omega))^{N+1}$ es separable, por tanto también $T(W^{1,p}(\Omega))$ es separable. Por consiguiente $W^{1,p}(\Omega)$ es separable. ♣

Observación 3.1.11 *Es claro que si* $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ *y si* $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, N$ *(aquí* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *designa la derivada parcial de* u *en el sentido usual), entonces* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*; además, las derivadas parciales en el sentido usual coinciden con las derivadas en el sentido de* $W^{1,p}(\Omega)$. *En particular, si* Ω *es acotado, entonces* $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ *para todo* $1 \leq p \leq \infty$. *Inversamente se demuestra que si* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$ *y si* $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, N$ *(*$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *designa aquí la derivada parcial en el sentido de* $W^{1,p}(\Omega)$*), entonces* $u \in C^1(\Omega)$.

Observación 3.1.12 *Sea* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*; la teoría de las distribuciones permite dar sentido a* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *(*$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *es un elemento del «enorme» espacio de distribuciones* $D'(\Omega)$ *-espacio que contiene en particular a* $L^1_{loc}(\Omega)$*). Utilizando el lenguaje de distribuciones se puede decir que* $W^{1,p}(\Omega)$ *es el conjunto de funciones de* $u \in L^p(\Omega)$ *tales que todas las derivadas parciales* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$ *(en el sentido de las derivadas distribucionales) pertenece a* $L^p(\Omega)$.
Cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$ *y* $p = 2$ *también se pueden definir los espacios de Sobolev con la transformada de Fourier; ver por ejemplo Lions-Magenes [18], Goulaouic [15] o Malliavin [19]. Aquí no tendremos en cuenta este punto de vista.*

Observación 3.1.13 *Es conveniente retener los siguientes hechos:*

a.- Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $W^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$ *en* $L^p(\Omega)$ *y* $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a un limite en* $(L^p(\Omega))^N$, *entonces* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *y*
$\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$. *Cuando* $1 < p \leq \infty$, *es suficiente saber que* $u_n \to u$ *en* $L^p(\Omega)$ *y que* $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada en* $(L^p(\Omega))^N$ *para concluir que* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

b.- Dada una función f definida en Ω, se define por $\overline{f}$ su extensión por 0 fuera de Ω, es decir

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in \Omega \\ 0 & \textit{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\alpha \in C_c^1(\Omega)$. Entonces

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \textit{y} \ \frac{\partial \overline{\alpha u}}{\partial x_i} = \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}.$$

La misma conclusión es valida si en lugar de suponer $\alpha \in C_c^1(\Omega)$ se toma $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\nabla\alpha \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))^N$ y $sop(\alpha) \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$.

He aquí un primer resultado de densidad.

Teorema 3.1.14 (Friedrichs) *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C_c^∞ tal que para todo $U \subset\subset \Omega$ se tiene*

$$u_n|_U \to u \ \textit{en} \ L^p(\Omega) \tag{3.2}$$

$$\nabla u_n|_U \to \nabla u \ \textit{en} \ (L^p(U))^N. \tag{3.3}$$

Recordemos que la notación $U \subset\subset \Omega$ significa que U es un abierto tal que $\overline{U} \subset \Omega$ y $\overline{U}$ es compacto.

En la demostración se utilizará el

Lema 3.1.15 *Sean $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\begin{array}{ll} \rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) & \textit{y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \dfrac{\partial v}{\partial x_i} & \textit{para todo } i = 1, 2, \ldots, N. \end{array}$$

Demostración. Supongamos primero que ρ es de soporte compacto. Se sabe que $\rho * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$; por la Proposición 2.4.3 y 2.4.6 se tiene, para todo $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} \int (\rho * v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int v (\check{\rho} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) \\ &= \int v \frac{\partial}{\partial x_i} (\check{\rho} * \varphi) \\ &= -\int \frac{\partial v}{\partial x_i} (\check{\rho} * \varphi) \\ &= -\int (\rho * \frac{\partial v}{\partial x_i}) \varphi. \end{aligned}$$

De donde
$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$
y
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i}$$
para todo $i = 1, 2, \ldots, N$..
Si ρ no es de soporte compacto se introduce una sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $\rho_n \to \rho$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$. Por lo anterior se tiene,
$$\rho_n * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$
y
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * v) = \rho_n * \frac{\partial v}{\partial x_i}$$
para todo $i = 1, 2, \ldots, N$.
Ahora bien, $\rho_n * v \to \rho * v$ en $L^p(\Omega)$ y $\rho_n * \frac{\partial v}{\partial x_i} \to \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i}$ en $L^p(\Omega)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, N$, (ver Teorema 2.4.9). Se concluye
$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$
y
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i}$$
para todo $i = 1, 2, \ldots, N$. ♣

Demostración del Teorema de 3.1.14 Se nota
$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$
y se pone $v_n = \rho_n * \overline{u}$ (donde ρ_n es una sucesión regularizante). Se sabe que $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $v_n \to \overline{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.
Demostremos que $\nabla v_n|_U \to \nabla u|_U$ en $L^p(U)^N$ para todo $U \subset\subset \Omega$.
Dado $U \subset\subset \Omega$ se fija una función $\alpha \in C_c^1(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, tal que $\alpha = 1$ en un entorno de U. Observar que para n suficientemente grande se tiene
$$\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u} \text{ en } U. \tag{3.4}$$
En efecto,
$$\begin{aligned} sop(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u}) &= sop[\rho_n * (1 - \overline{\alpha u})] \\ &\subset sop(\rho_n) + sop[(1 - \overline{\alpha})\overline{u}] \\ &\subset B(0, \frac{1}{n}) + sop(1 - \overline{\alpha}) \\ &\subset \mathbb{R}^N \setminus U \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. De donde (3.4).
Según el Lema 3.1.15 y la Observación 3.1.13 b se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \left(\overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}}\right)$$

y por consiguiente

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}} \text{ en } L^p(U),$$

y en virtud de (3.4)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{u}) \to \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \text{ en } L^p(U).$$

Finalmente se «trunca» la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se fija una función $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \le \zeta \le 1$ y

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le 1 \\ 0 & \text{si } |x| \ge 2, \end{cases}$$

y se pone $\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$ y $u_n = \zeta_n v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Se comprueba sin dificultad que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene las propiedades deseadas; es decir $u_n \in C_c^\infty$, $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_n \to \nabla u$ en $L^p(U)^N$. ♣

He aquí una caracterización sencilla de las funciones $W^{1,p}(\Omega)$:

Proposición 3.1.16 *Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \le \infty$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$u \in W^{1,p}(\Omega)$.*
2. *Existe una constante C tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \right| \le C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

   para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y todo $i = 1, 2, \ldots, N$.

3. *Existe una constante C tal que para todo abierto $U \subset\subset \Omega$ y todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ se verifica*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(U)} \le C|h|.$$

Además, se puede tomar $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ en 2 y 3.

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$ Evidente.
$2 \Rightarrow 1$ La forma lineal

$$\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \to \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x$$

definida en un subespacio denso de $L^{p'}(\Omega)$ es continua para la norma de $L^{p'}(\Omega)$. Por tanto, se extiende a una forma lineal y continua F_i en $L^{p'}(\Omega)$. Según el Teorema de Representación de Riesz existe $g_i \in L^p(\Omega)$ tal que

$$F_i(\varphi) = \int_\Omega g_i \varphi \, \mathrm{d}x$$

para todo $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$. De donde en particular

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g_i \varphi \, \mathrm{d}x$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y así $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
$1 \Rightarrow 3$ Comencemos suponiendo que $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sea $h \in \mathbb{R}^N$ y pongamos

$$v(t) = u(x + th), \ t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $v'(t) = h.\nabla u(x + th)$ y entonces

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 h.\nabla u(x + th) \, \mathrm{d}t.$$

Por tanto

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p \, \mathrm{d}t$$

y

$$\begin{aligned} \int_U |\tau_h u(x) - u(x)|^p \, \mathrm{d}x &\leq |h|^p \int_U \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &= |h|^p \int_0^1 \int_U |\nabla u(x + th)|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &= |h|^p \int_0^1 \int_{U+th} |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Fijando $|h| < \mathrm{dist}(U, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, existe un abierto $U' \subset\subset \Omega$ tal que $U + th \subset U'$ para todo $t \in [0,1]$, y entonces

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(U)}^p \leq |h|^p \int_{U'} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Ahora para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $p \neq \infty$ existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_n \to \nabla u$ en $L^p(\Omega)$ para todo $U \subset\subset \Omega$. Se aplica la desigualdad (3.5) a u_n y en el limite se obtiene 3.
Cuando $p = \infty$, se aplica lo anterior (para $p < \infty$) y después se hace tender p a infinito.
$3 \Rightarrow 2$ Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$; se considera un abierto U tal que el $sop(\varphi) \subset U \subset\subset \Omega$. Sea $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \mathrm{dist}(U, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Gracias a 3 se tiene

$$\left| \int_\Omega (\tau_h u - u)\varphi \, \mathrm{d}x \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Por otra parte, como

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y)) \, \mathrm{d}y,$$

resulta

$$\left| \int_\Omega u(y) \frac{(\varphi(y-h) - \varphi(y))}{|h|} \, \mathrm{d}y \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Eligiendo $h = te_i$, $t \in \mathbb{R}$, y pasando al limite cuando $t \to 0$, se obtiene 2. ♣

Proposición 3.1.17 (Derivación de una composición) *Sea* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $G(0) = 0$ *y* $|G'(s)| \leq M$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$*. Sea* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, entonces*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ y } \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Demostración. Se tiene $|G(s)| \leq M|s|$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y así $|G \circ u| \leq M|u|$; por consiguiente $G \circ u \in L^p(\Omega)$ y también $(G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$.
Falta comprobar que para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (G \circ u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

Cuando $1 \leq p < \infty$, se elige una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y *c.t.p.* en Ω, $\nabla u_n \to \nabla u$ en $L^p(U)^N$ para todo $U \subset\subset \Omega$ (Teorema 3.1.14). Se tiene

$$\int_\Omega (G \circ u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega (G' \circ u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \, \mathrm{d}x$$

para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Pero $G \circ u_n \to G \circ u$ en $L^p(\Omega)$ y $(G' \circ u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(U)$ por el Teorema de Convergencia Mayorada. Y se deduce (3.6).
Cuando $p = \infty$, se fija un abierto Ω' tal que $sop(u) \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Entonces $u \in W^{1,p}(\Omega')$ para todo $p < \infty$ y se deduce (3.6) por lo anterior. ♣

Corolario 3.1.18 *Sea* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *entonces* $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = -\min\{0, u\}$ *y* $|u|$ *están en* $W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ y definimos

$$F_\varepsilon(r) = \begin{cases} (r^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Entonces $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $F'_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$, por el Teorema 3.1.17, para todo $\varphi \in C^1_c(\Omega)$

$$\int_\Omega F_\varepsilon(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega F'_\varepsilon(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Haciendo tender ε a 0 tenemos

$$\int_\Omega u^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = - \int_{\Omega \cap \{u > 0\}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Entonces $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$Du^+ = \begin{cases} Du & c.t.p. \ \{u > 0\} \\ 0 & c.t.p. \ \{u \leq 0\}. \end{cases}$$

Las otras afirmaciones se siguen de estas teniendo en cuenta que

$$u^- = (-u)^+, \ \ |u| = u^+ + u^-.$$

♣

3.2. Operadores de Prolongación

Con frecuencia es cómodo establecer propiedades de las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ comenzando por el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$. Así pues, es útil poder prolongar una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a una función $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Esto no siempre es posible. Sin embargo, cuando el abierto Ω es «regular», sí se puede construir tal prolongación. Comencemos precisando la noción de abierto regular.

Notación 3.2.1 *Dado* $x \in \mathbb{R}^N$ *se escribe*

$$x = (x', x_N) \ \textit{con} \ x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \ x' = (x_1, .., x_{N-1})$$

y se pone

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se denota

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^N_+ & = & \{x = (x', x_n) : |x_N| > 1\} \\ Q & = & \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \ y \ |x_N| < 1\} \\ Q_+ & = & Q \cap \mathbb{R}^N_+ \\ Q_0 & = & \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \ y \ x_N = 0\}. \end{array}$$

Definición 3.2.2 *Se dice que un abierto Ω es de clase C^1 si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un entorno U de x en $\mathbb{R}^N$ y una aplicación biyectiva $H : Q \to U$ tal que*

$$H \in C^1(\overline{Q}),\ H^{-1} \in C^1(\overline{U}),\ H(Q_+) = U \cap \Omega \ y \ H(Q_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Teorema 3.2.3 *Supongamos que Ω es de clase C^1 con $\partial\Omega$ acotada (o bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Entonces existe un operador de prolongación*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

lineal, tal que para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$

1. $Pu|_\Omega = u$
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

donde C sólo depende de Ω.

Comencemos demostrando un lema sencillo, pero fundamental, a propósito de la prolongación por reflexión.

Lema 3.2.4 *Dado $u \in W^{1,p}(Q_+)$ se define sobre Q la función u^* prolongación por reflexión es decir*

$$u^*(x', x) = \begin{cases} u(x', x_N) & si\ x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & si\ x_N < 0. \end{cases}$$

Entonces $u^* \in W^{1,p}(Q)$ y

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \le 2\|u\|_{L^p(Q_+)},\ \|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \le 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

Demostración. Comprobemos que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \text{ para } 1 \leq i \leq N-1 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_N} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square} \tag{3.8}$$

donde $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*$ designa la prolongación por reflexión de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ y se pone, para f definida en Q_+

$$f^{\square}(x', x) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{si } x_N > 0 \\ -f(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases}$$

Se utilizará la sucesión $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$\eta_k(t) = \eta(kt) \; t \in \mathbb{R} \; k = 1, 2, ...$$

donde η es una función fija, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Demostremos (3.7); sea $\varphi \in C_c^\infty(Q)$, para cada $1 \leq i \leq N-1$ se tiene

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

donde

$$\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N).$$

En general la función ϕ no pertenece a $C_c^1(Q_+)$ y no se puede utilizar como función test, pero

$$\eta_k(x_N)\psi(x', x_N) \in C_c^1(Q_+)$$

y entonces

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) \,\mathrm{d}x = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi \,\mathrm{d}x.$$

Por otra parte $\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) = \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, y por consiguiente

$$\int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial}{\partial x_i} \psi \,\mathrm{d}x = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi \,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Pasando al limite en (3.10) cuando $k \to \infty$, por el Teorema de Convergencia Mayorada, se obtiene

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i} \psi \, \mathrm{d}x = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi \, \mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Combinando (3.9) y (3.11) se tiene

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi \, \mathrm{d}x = - \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^* \psi \, \mathrm{d}x.$$

De donde se sigue (3.7).
Demostremos (3.8); sea $\varphi \in C_c^1(Q)$, se tiene

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{Q_+} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \tag{3.12}$$

donde

$$\phi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N).$$

Obsérvese que $\phi(x', 0) = 0$, luego existe una constante M tal que $|\phi(x', x_N)| \leq M|x_N|$ en Q. Como $\eta_k \phi \in C_c^1(Q_+)$ se tiene

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_N} (\eta_k \phi) \, \mathrm{d}x = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_k \phi \, \mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial x_N} (\eta_k \phi) = \eta_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + k \eta'(k x_N) \phi. \tag{3.14}$$

Demostremos que

$$\lim_{k \to \infty} \int_{Q_+} u k \eta'(k x_N) \phi \, \mathrm{d}x = 0. \tag{3.15}$$

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_Q u k \eta'(k x_N) \phi \, \mathrm{d}x \right| &\leq kMC \int_{0 < x_N < \frac{1}{k}} |u| x_N \, \mathrm{d}x \\ &\leq MC \int_{0 < x_N < \frac{1}{k}} |u| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

con $C = \sup\{|\eta'(t)| : t \in [0, 1]\}$; de donde (3.15).
Se deduce entonces de (3.13), (3.14) y (3.15) que

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \, \mathrm{d}x = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \phi \, \mathrm{d}x.$$

Finalmente se tiene

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \phi \, \mathrm{d}x = \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^{\square} \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

Combinando (3.12) y (3.16)se obtiene (3.8). ♣

Observación 3.2.5 *La conclusión del Lema 3.2.4 permanece valida si se sustituye* Q_+ *por* $\mathbb{R}^N_+$*(la misma demostración), y esto demuestra el teorema para* $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

En lo que sigue utilizaremos el

Lema 3.2.6 (Partición de la Unidad) *Sean* Γ *un compacto de* $\mathbb{R}^N$ *y* U_1*, ...,* U_k *abiertos tales que* $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$.
Entonces existen funciones $\theta_0, \ldots, \theta_k$ *de* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tales que*

1. $0 \leq \theta_i \leq 1$ *para todo* $i = 0, \ldots, k$ *y* $\sum_{i=0}^k \theta_i = 1$ *en* $\mathbb{R}^N$
2. $\left\{ \begin{array}{c} sop(\theta_i) \text{ es compacto y } sop(\theta_i) \subset U_i \quad \text{ para todo } i = 1, \ldots, k \\ sop(\theta_0) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma. \end{array} \right.$

Si Ω *es un abierto acotado y* $\Gamma = \partial\Omega$*, entonces* $\theta_0|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$.

Este lema es clásico; se puede encontrar un enunciado cercano a este en Malliavin [19].

Demostración del Teorema 3.2.3. Se «rectifica» $\partial\Omega$ con cartas locales y se introduce una partición de la unidad. Más exactamente, como $\partial\Omega$ es compacto y de clase C^1, existen abiertos $(U_i)_{1 \leq i \leq k}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que
$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ y existen aplicaciones biyectivas $H_i : Q \to U_i$ tales que

$$H_i \in C^1(\overline{Q}), \; H_i^{-1} \in C^1(\overline{U_1}), \; H_i(Q_+) = U_i \cap \Omega, \text{ y } \; H_i(Q_0) = U_i \cap \partial\Omega.$$

Se consideran las funciones $\theta_0, \ldots, \theta_k$ introducidas en el Lema 3.2.6. Dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se escribe

$$u = \sum_{i=0}^k \theta_i u = \sum_{i=0}^k u_i$$

donde $u_i = \theta_i u$.
Ahora se prolonga cada una de las funciones u_i a $\mathbb{R}^N$ distinguiendo entre u_0 y las otras $(u_i)_{1 \leq i \leq k}$.

a.- Prolongación de u_0.

$$\tilde{u_0}(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Recordemos que $\theta_0 \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ya que $\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^k \nabla\theta_i$ es de soporte compacto y $sop(\theta_0) \subset \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega$. Se sigue entonces (Observación 3.1.13) que

$$\tilde{u_0} \in W^{1,p}(\Omega) \text{ y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{u_0} = \theta_0 \frac{\widetilde{\partial u}}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}\tilde{u}.$$

Así pues

$$\|\tilde{u_0}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

b.- Prolongación de u_i, $1 \leq i \leq k$.
Se considera la restricción de u a $U_i \cap \Omega$ y se «transporta» esta función a Q_+ con ayuda de H_i; más exactamente, se pone $v_i = u(H_i(y))$ para $y \in Q_+$. Se sabe, por la Formula de Cambio de Variables, que $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. Se define a continuación en Q la prolongación por reflexión de v_i (Lema 3.2.4), sea v_i^*; se sabe que $v_i^* \in W^{1,p}(Q)$. Se «transporta» v_i^* a U_i con ayuda de H_i^{-1}, sea

$$w_i(x) = v_i^*(H^{-1}(x)) \text{ para } x \in U_i.$$

Se tiene entonces $w_i \in W^{1,p}(Q)$, $w_i = u$ en $U_i \cap \Omega$ y

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(U_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}.$$

Finalmente, se pone para $x \in \mathbb{R}^N$

$$\hat{u_i}(x) = \begin{cases} \theta_i(x)u_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{si } \mathbb{R}^N \setminus U_i, \end{cases}$$

de forma que $\hat{u_i} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$(Obaservación 3.1.13), $\hat{u_i} = u_i$ en Ω y

$$\|\hat{u_i}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}.$$

Conclusión. El operador $Pu = \tilde{u_0} + \sum_{i=1}^k \hat{u_i}$ posee todas las propiedades pedidas. ♣

Observación 3.2.7 *El Teorema 3.2.3 sigue siendo valido si Ω es acotado y $\partial\Omega$ es Lipschitz. Para una demostración de esto ver Evans-Gariepy [10].*

3.3. Desigualdades de Sobolev

Comencemos considerando el:

A. Caso en que $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Teorema 3.3.1 (Gagliardo, Nirenberg, Sobolev) *Sea* $1 \leq p < N$*, entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

donde p^* *viene dado por* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$*, y existe una constante* $C = C(p,N)$[1] *tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*.*

Observación 3.3.2 *El valor de* p^* *se puede obtener con un argumento de homogeneidad muy sencillo. En efecto, si existen constantes* C *y* $1 \leq q \leq \infty$ *que verifican*

$$\|u\|_q \leq C\|\nabla u\|_p \tag{3.17}$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*.*
Entonces necesariamente $q = p^*$*. Para verlo, se pone en (3.17)* $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$ *en lugar de* u*. Resulta*

$$\|u\|_q \leq C\lambda^{\left(1+\frac{N}{q}-\frac{N}{p}\right)}\|\nabla u\|_p$$

para todo $\lambda > 0$ *y esto implica* $q = p^*$*.*

Definición 3.3.3 *Si* $1 \leq p < N$*, el conjugado de Sobolev de* p *es*

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Notar que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \; p^* > p.$$

En la demostración del Teorema 3.3.1 utilizaremos el

[1]Se puede tomar $C(p,N) = \frac{(N-1)p}{N-p}$, pero esta constante no es óptima.

Lema 3.3.4 *Sean* $N \geq 2$ *y* f_1, ..., $f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1}.)$ *Para* $x \in \mathbb{R}^N$ *y* $1 \leq i \leq N$ *se pone*

$$\tilde{x_i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Entonces la función

$$f(x) = f_1(\tilde{x_1}) \ldots f_N(\tilde{x_N}) \ \ x \in \mathbb{R}^N$$

pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i-1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Demostración. El caso $N = 2$ es trivial. Consideremos el caso $N = 3$; se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x_3 &= |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)| \, \mathrm{d}x_3 \\ &\leq |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 \, \mathrm{d}x_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 \, \mathrm{d}x_3 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(por Cauchy-Schwarz). Aplicando nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

En el caso general se obtiene por inducción; admitamos el resultado para N y demostrémoslo para $N + 1$.
Se fija x_N; gracias a la desigualdad de Hölder se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f_1 \ldots f_N|^{N'} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \right)^{\frac{1}{N'}}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a las funciones $|f_1|^{N'}, \ldots, |f_N|^{N'}$ resulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_1 \ldots f_N|^{N'} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}^{N'}.$$

De donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Ahora se hace variar x_{N+1}; cada una de las funciones $x_{N+1} \to \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ pertenecen a $L^N(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq N$. Por consiguiente el producto $\prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{N+1} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.$$

♣

Demostración del Teorema 3.3.1.

1.- Asumamos primero que $p = 1$ y $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.
Se tiene

$$\begin{aligned} |u(x_1, ..., x_N)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) \right| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

e igualmente para $1 \leq i \leq n$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \right| \mathrm{d}t \overset{def}{=} f_i(\tilde{x}_i).$$

Así pues

$$|u(x)|^N \leq \prod_{i=1}^N f_i \tilde{x}_i.$$

Se deduce del Lema 3.3.4 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N'} \, \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}} = \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}.$$

Por Consiguiente se tiene

$$\|u\|_{L^{N'}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}, \tag{3.18}$$

y como

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^1 \mathbb{R}^N}$$

para todo $1 \leq i \leq N$. Resulta

$$\|u\|_{L^{N'}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^1 \mathbb{R}^N}$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Notar que $1^* = N'$.

2.- Consideremos el caso $1 < p < N$ y como en 1 tomemos $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sea $t \geq 1$; se aplica (3.18) a $|u|^{t-1}u$ en lugar de u. Resulta

$$\|u\|^t_{L^{tN'}(\mathbb{R}^N)} \leq t \prod_{i=1}^{n} \left\| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq t \|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.19}$$

Se elige entonces t de forma que $\frac{tN}{N-1} = p'(t-1)$, lo que da $t = \frac{N-1}{N} p^*$ ($t \geq 1$ puesto que $1 < p < N$).
Se obtiene

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq t \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Así pues

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

3.- Tomemos ahora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < N$.
Se sabe que existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Se puede suponer también (extrayendo una subsucesión si es necesario) que $u_n \to u$ *c.t.p.* Para todo n, se tiene

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Y resulta del Lema de Fatou que

$$u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ y que } \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

♣

Corolario 3.3.5 *Sea $1 \leq p < n$. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$$

para todo $q \in [p, p^*]$ con inyección continua.

Demostración. Dado $p \leq q \leq p^*$ se escibe

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Se sabe (por la Desigualdad de Interpolación, Corolario 2.2.6) que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\alpha \|u\|_{p^*}^{1-\alpha} \leq \|u\|_p + \|u\|_{p^*}$$

(por la Desigualdad de Young). Se concluye gracias al Teorema 3.3.1 que

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ♣

Corolario 3.3.6 (El caso limite $p = N$) *Se verifica*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\Omega)$$

para todo $q \in [N, +\infty)$ con inyección continua.

Demostración. Supongamos que $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$; aplicando (3.19) con $p = N$ se tiene

$$\|u\|^t_{\frac{tN}{N-1}} \leq \|u\|^{t-1}_{\frac{(t-1)N}{N-1}} \|\nabla u\|_N \text{ para todo } t \geq 0$$

y gracias a la Desigualdad de Young se obtiene

$$\|u\|_{\frac{tN}{N-1}} \leq C(\|u\|_{\frac{(t-1)N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N). \tag{3.20}$$

En (3.20) se elige $t = N$; resulta

$$\|u\|_{\frac{N^2}{N-1}} \leq C\|u\|_{1,N}$$

y por la Desigualdad de Interpolación se tiene

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{1,N} \tag{3.21}$$

para todo $n \leq q \leq \frac{N^2}{N-1}$.
Reiterando este argumento con $t = N + 1$, $t = N + 2$, etc. se llega a

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{1,N} \tag{3.22}$$

para toda $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ y para todo $n \leq q < \infty$ con una constante C que depende de q y de N [2].
La desigualdad (3.22) se extiende por densidad a $W^{1,N}(\Omega)$. ♣

Teorema 3.3.7 (Morrey) *Sea $p > N$, entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^\alpha(\mathbb{R}^N) \tag{3.23}$$

con inyección continua.
Además, para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ se verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_p \text{ c.t.p. } x, y \in \mathbb{R}^N \tag{3.24}$$

con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y C una constante (que sólo depende de p y N).

[2] ya que «explota» cuando $q \to \infty$.

Observación 3.3.8 *La desigualdad (3.24) implica la existencia de una función* $\overline{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u = \overline{u}$ *c.t.p. en* $\mathbb{R}^N$*. Dicho de otro modo, toda fución* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*,* $p > N$*, posee un representante continuo. En lo que sigue sustituiremos sistemáticamente* u *por su representante continuo siempre que sea útil.*

Demostración. Se comienza por establecer (3.24) para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sea Q un cubo abierto que contiene a 0, cuyas aristas (de longitud r) son paralelas a los ejes de coordenadas. Para $x \in Q$ se tiene

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u(tx)\,\mathrm{d}t$$

y entonces

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^t \sum_{i=1}^N |x_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}t \leq r \sum_{i=1}^N \int_0^t \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}t. \tag{3.25}$$

Pongamos $(u)_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\,\mathrm{d}x$ ($(u)_Q$ es la media de u sobre Q). Integrando (3.25) en Q se obtiene

$$\begin{aligned}
|(u)_Q - u(0)| &\leq \frac{r}{|Q|}\int_Q \mathrm{d}x \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \mathrm{d}t \int_Q \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \frac{\mathrm{d}y}{t^N}.
\end{aligned}$$

Pero por la desigualdad de Höder se verifica

$$\int_{tQ} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \mathrm{d}y \leq \left(\int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} |tQ|^{\frac{1}{p'}}$$

(ya que $tQ \subset Q$ para $0 < t < 1$).
De donde se deduce que

$$\begin{aligned}
|(u)_Q - u(0)| &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{\frac{n}{p'}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}.
\end{aligned}$$

Por traslación, esta desigualdad es valida para todo cubo Q de lado r cuyas aristas son paralelas a los ejes de coordenadas; de donde

$$|\overline{u} - u(0)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \tag{3.26}$$

para todo $x \in Q$.
Sumando (y aplicando la Desigualdad Triangular) se tiene

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \tag{3.27}$$

para todo x, $y \in Q$.
Para dos puntos cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}^N$ existe un cubo Q de aristas $r = 2|x - y|$ que contiene a x e y. Y se deduce (3.24) para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.
Cuando $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, se utiliza la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $u_n \to u$ *c.t.p.*
Demostremos ahora (3.23). Sea $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ y Q un cubo de aristas $r = 1$ que contiene a x. Por (3.26) se tiene

$$|u(x)| \leq |\overline{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

donde C solo depende de p y N. Entonces

$$\|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.
Cuando $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ se utiliza una suceción $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $u_n \to u$ *c.t.p.* ♣

Observación 3.3.9 *De (3.23) se deduce que si* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *con* $N < p < \infty$, *entonces*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

En efecto, existe una suceción $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u_n \to u$ *en* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*; por (3.23)* u *también es límite uniforme sobre* $\mathbb{R}^N$ *de las* u_n.

B. Caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Supongamos que Ω es un abierto de clase C^1 con $\partial\Omega$ acotada, o bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.

Corolario 3.3.10 *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se verifica*

si $1 \leq p < N$ *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *donde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

si $p = n$ *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [p, \infty)$,

si $p > N$ *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

con inyecciones continuas.
Además, si $p > N$, *se verifica para toda* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{1,p}|x - y|^\alpha \text{ c.t.p. } x,\ y \in \Omega$$

con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *y* C *depende sólo de* Ω, p *y* N. *En particular* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Demostración. Se introduce el operador de prolongación

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

(ver Teorema 3.2.3); a continuación se aplican el Teorema 3.3.1, el Corolario 3.3.6 y el Teorema 3.3.7. ♣

Teorema 3.3.11 (Rellich-Kondrachov) *Supongamos* Ω *acotado de clase* C^1. *Se verifica*

si $p < n$ *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [1, p^*)$ *donde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

si $p = n$ *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [1, \infty)$,

si $p > N$ *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

con inyecciones compactas.[3]

Demostración. El caso $p > N$ resulta del Corolario 3.3.10 y el Teorema de Ascoli. El caso $p = N$ se reduce al caso $p < N$. Se aplica el Corolario 2.5.3 con $\mathfrak{F}$ la bola unidad de $W^{1,p}(\Omega)$. Verifiquemos 1 y 2 del Corolario 2.5.3.
1.- Como $1 \leq q < p^*$, se puede escribir

$$\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{p^*} \text{ con } 0 < \alpha \leq 1.$$

[3] En particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inyección compacta para todo p.

Sean $U \subset\subset \Omega$, $u \in \mathfrak{F}$ y $|h| < \text{dist}(U, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. En virtud de la Desigualdad de Interpolación se tiene

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(U)} \leq \|\tau_h - u\|_{L^1(U)}^{\alpha} \|\tau_h u - u\|_{L^{p^*}(U)}^{1-\alpha}.$$

Pero según la Proposición 3.1.16 se tiene $\|\tau_h u - u\|_{L^1(U)} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$. Por consiguiente

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(U)} \leq (|h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)})^{\alpha} (2\|u\|_{L^{p^*}})^{1-\alpha} \leq C|h|^{\alpha}$$

(aplicar la desigualdad de Hölder y el Corolario 3.3.10). Se concluye que $\|\tau_h u - u\|_{L^q(U)} < \varepsilon$ para $|h|$ suficientemente pequeño.
2.- Sea $u \in \mathfrak{F}$; por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\|u\|_{L^q(\Omega \setminus U)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus U)} |\Omega \setminus U|^{1-\frac{q}{p^*}} \leq |\Omega \setminus U|^{1-\frac{q}{p^*}} \leq \varepsilon$$

para U elegido adecuadamente, por ejemplo $U = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeño. ♣

Notación 3.3.12 *Sean E y F dos espacios de Banach. Notaremos $E \subset\subset F$ si $E \subset F$ con inyección compacta.*

Lema 3.3.13 *Si $p < N$, para todo $\varepsilon > 0$ existe M_ε tal que si $1 \leq q < p^*$*

$$\|u\|_q \leq \varepsilon \|\nabla u\|_p + M_\varepsilon \|u\|_p \tag{3.28}$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Supongamos que no vale (3.28). Entonces existe ε_0 tal que para todo n existe $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\star \ \varepsilon_0 \|\nabla u_n\|_p + n\|u_n\|_p < 1$$

y

$$\|u_n\|_q = 1.$$

Por $\star$ se tiene $\varepsilon_0 \|\nabla u_n\|_p < 1$ y $n\|u_n\|_p < 1$ es decir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}(\Omega)$$

y como $1 \leq q < p^*$, la compacidad de la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ nos da

$$u_{n_j} \to u \text{ en } L^q(\Omega).$$

En particular $\|u\|_q = 1$ con lo cual $u \neq 0$ en Ω.
Usando una vez mas $\star$ $n_j\|u_{n_j}\|_p < 1$ luego $u_{nj} \to 0$ en $L^p(\Omega)$ entonces para una subsucesión $u_{n_j} \to 0$ en *c.t.p.* de Ω luego $u = 0$ en *c.t.p.* de Ω lo que es una contradicción. ♣

El proximo lema sera de utilidad en los capítulos siguientes.

Lema 3.3.14 *Si* $p < N$ *y* $q > \frac{N}{p}$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* D_ε *tal que*

$$\left| \int_\Omega V(x)|u|^p \, \mathrm{d}x \right| \leq \|V\|_q \Big\{ \varepsilon \|\nabla u\|_p^p + D_\varepsilon \|u\|_p^p \Big\} \tag{3.29}$$

para todo $V \in L^q(\Omega)$ *y* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Sean $V \in L^q(\Omega)$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\left| \int_\Omega V(x)|u|^p \, \mathrm{d}x \right| \leq \|V\|_q \|u\|_{pq'}^p.$$

Veamos que $pq' < p^*$

$$pq' < p^* \Longleftrightarrow q(N-p) < N(q-1) \Longleftrightarrow \frac{N}{p} < q$$

entonces dado $\varepsilon > 0$ por el Lema 3.3.13 existe M_ε tal que

$$\|u\|_{pq'}^p \leq \varepsilon \|\nabla u\|_p^p + M_\varepsilon \|u\|_p^p$$

luego

$$\left| \int_\Omega V(x)|u|^p \, \mathrm{d}x \right| \leq \|V\|_q \Big\{ \varepsilon \|\nabla u\|_p^p + M_\varepsilon \|u\|_p^p \Big\}.$$

Tomo $D_\varepsilon = M_\varepsilon$. ♣

3.4. El Espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definición 3.4.1 *Sea* $1 \leq p < \infty$*:* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *designa la clausura de* $C_c^1(\Omega)$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$*. Se nota*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotado de la norma inducida por $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable; es reflexivo si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar de $H^1(\Omega)$.

Observación 3.4.2 *Se comprueba fácilmente que* $C_c^\infty(\Omega)$ *es denso en* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposición 3.4.3 *Supongamos que* Ω *es de clase* C^1. *Sea* $u \in L^p(\Omega)$ *con* $1 < p < \infty$. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. *Existe una constante* C *tal que*
$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right| \leq C \|\varphi\|_{p'}$$
para todo $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *y todo* $i = 1, \ldots, n$.
3. *La función*
$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \textit{si } x \in \Omega \\ 0 & \textit{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$
pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *y en este caso* $\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Demostración.

1.- Veamos primero que $1 \Rightarrow 2$. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Para $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ se tiene
$$\left| \int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{d}x \right| \leq \|\nabla u_n\|_p \|\varphi\|_{p'}.$$
En el limite se tiene 2.

2.- $2 \Rightarrow 3$. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$; se tiene
$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{d}x \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.$$
Y entonces $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$(por la Proposición 3.1.16).

3.- Por ultimo $3 \Rightarrow 1$. Siempre se puede suponer que Ω es acotado (en caso contrario se considera los truncamientos $\zeta_n u$ de u). Con cartas locales y una partición de la unidad se reduce al siguiente problema: sea $u \in L^p(Q_+)$; supongamos que la función
$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in Q, x_N > 0 \\ 0 & \text{si } x_N < 0 \end{cases}$$
pertenece a $W^{1,p}(Q)$; demostremos que
$$\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)$$

para toda $\alpha \in C_c^1(Q)$.
Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción regularizante tal que

$$sop(\rho_n) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{2n} < x_N < \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces $\rho_n * (\alpha\overline{u}) \to \alpha\overline{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (obsérvese que $\alpha\overline{u}$ extendidad por 0 fuera de Q pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$). Por otra parte,

$$sop(\rho_n * \alpha\overline{u}) \subset sop(\rho_n) + sop(\alpha\overline{u}) \subset Q_+$$

para n suficientemente grande. Por consiguiente

$$\rho_n * \alpha\overline{u} \in C_c^1(Q_+)$$

y entonces

$$\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+).$$

♣

Observación 3.4.4 *La demostración del Corolario 3.3.10 utiliza un operador de prolongación, y para eso se debe suponer que* Ω *es regular. Si se sustituye* $W^{1,p}(\Omega)$ *por* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, se dispone de la prolongación canónica por 0 fuera de* Ω*, que es válida para un abierto cualquiera (obsérvese que en la denostración de la Proposición 3.4.3, la implicacióm* $(1) \Rightarrow (3)$ *no utiliza ninguna hipótesis de regularidad sobre* Ω*). Resulta, en particular, que el Corolario 3.3.10 es cierto para* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *con* Ω *un abierto cualquiera; del Teorema 3.3.11 es cierto para* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *con* Ω *cualquier abierto acotado. Del Teorema 3.3.1 se deduce también que si* Ω *es un abierto cualquiera y si* $1 \leq p < N$ *entonces*

$$\|u\|_{p^*} \leq C(p,N)\|\nabla u\|_p$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Corolario 3.4.5 (Desigualdad de Poincaré) *Supongamos que* Ω *es un abierto acotado. Entonces existe una constante* C *(dependiente de* Ω *y de p) tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Observación 3.4.6 *Combinando el Teorema 3.3.11 y el Corolario 3.4.5, tenemos que, para todo* $1 \leq p < N$ *y todo* $1 \leq q < p^*$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|_q \leq C\|\nabla u\|_p \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definición 3.4.7 *Sean* $1 \leq p < N$ *y* $1 \leq q < p^*$ *definimos*

$$S_q = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^p}.$$

3.5. El Espacio Dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Notación 3.5.1 *Se designa por* $W^{-1,p}(\Omega)$ *el espacio dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$*,* $1 \leq p < \infty$ *y por* $H^{-1}(\Omega)$ *el dual de* $H_0^1(\Omega)$*.*

Se identifica $L^2(\Omega)$ y su dual, pero no se identifica $H_0^1(\Omega)$ y su dual. Se tiene el esquema

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

con inyecciones continuas y densas.
Si Ω no es acotado, se tiene

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega) \text{ si } \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2.$$

Los elementos de $W^{-1,p}(\Omega)$ se pueden caracterizar con la

Proposición 3.5.2 *Sea* $F \in W^{-1,p}(\Omega)$*, entonces existen* $f_0, f_1, \ldots, f_N$ *en* $L^{p'}(\Omega)$ *tales que*

$$F(v) = \int_\Omega f_0 v \,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x$$

y

$$\max_{1\leq i\leq N} \|f_i\|_{p'} = \|F\|.$$

Si Ω *es acotado, se puede tomar* $f_0 = 0$*.*

Demostración. Se dota al espacio $E = (L^p(\Omega))^{N+1}$ de la norma

$$\|h\| = \sum_{i=0}^N \|h_i\|_p \text{ donde } h = (h_0, h_1, \ldots, h_N).$$

La aplicación

$$T : W_0^{1,p}(\Omega) \to E$$

$$T(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$$

es una isometría de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en E. Se pone $G = T(W_0^{1,p}(\Omega))$, dotado de la norma inducida por E y $S = T^{-1} : G \to W_0^{1,p}(\Omega)$. La aplicación $h \in G \to F(S(h))$ es una forma lineal y continua sobre G. Gracias al Teorema de Hahn-Banach se la puede extender a una forma lineal y continua sobre E notada ϕ, con $\|\phi\|_{E'} = \|F\|$. Por el Teorema de Representación de Riesz se saben que existen $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ tales que

$$\phi(h) = \int_\Omega f_0 h \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N} f_i h_i \, \mathrm{d}x \ \forall h \in E.$$

Es fácil comprobar que $\|\phi\|_{E'} = \max_{0 \le i \le N} \|f_i\|_{p'}$.
Cuando Ω es acotado se dota $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la norma $\|\nabla u\|_p$ (ver Corolario 3.4.5). Se aplica el razonamiento anterior con $E = (L^p(\Omega))^N$ y $T : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \to \nabla u \in (L^p(\Omega))^N$. ♣

Capítulo 4

Ecuaciones Lineales Elípticas en Forma de Divergencia

En esta capitulo supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto, acotado y conexo y estudiaremos los operadores elípticos que tienen su parte principal en forma de divergencia. Consideremos el operador L de la forma

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u\right] + c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u \tag{4.1}$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i, c_i, d ($i, j= 1,\ldots, N$) son funciones medibles en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si $u \in H^1(\Omega)$ y las funciones $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u,\ c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u$ $i = 1,\ldots, N$ son integrables entonces decimos que u satisface $Lu = 0\,(\geq 0,\ \leq 0)$ en Ω si

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(u,v) &= \sum_{i=1}^{N}\left\{\int_\Omega \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u\right]\frac{\partial v}{\partial x_i} + \left[c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u\right]v\right\}\mathrm{d}x \\ &= 0\ (\leq 0, \geq 0)\end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $v \in C_0^1(\Omega)$.
Sea f integrable en Ω, $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de la ecuación

$$Lu = f \tag{4.3}$$

en Ω si

$$\mathfrak{L}(u,v) = F(v) := \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x\ \forall v \in C_0^1(\Omega). \tag{4.4}$$

Nuestro plan es estudiar el problema de Dirichlet para la ecuación (4.3). Supongamos que L es estrictamente elíptico en Ω, esto es, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \ \forall x \in \Omega \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{4.5}$$

También asumimos que L tiene coeficientes acotados, o sea que para algunas constantes Λ y $\nu \geq 0$ tenemos, para todo $x \in \Omega$

$$\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \ \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{N} |b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2 + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2. \tag{4.6}$$

Una función $u \in H^1(\Omega)$ se dice solución débil del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu &= f \text{ en } \Omega \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

si u es solución débil de (4.3) y $u \in H_0^1(\Omega)$.

Notar que por la condición de (4.6) tenemos

$$\begin{aligned} |\mathfrak{L}(u,v)| &\leq \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \left| a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} \right| + \left| b_i(x)u\frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}v \right| + \left| d(x)uv \right| \right\} \mathrm{d}x \\ &\leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \text{ por la desigualdad Schwarz.} \end{aligned} \tag{4.7}$$

De esto se deduce, para $u \in H^1(\Omega)$ fijo, que la aplicación $v \to \mathfrak{L}(u,v)$ es un funcional lineal y continuo en $H^1(\Omega)$. Por lo tanto la validez de la relación (4.2) para $v \in C_0^1(\Omega)$ implica su validez para $v \in H^1(\Omega)$. La estimación (4.7) también es significativa en la teoría de existencia para (4.3) y muestra que el operador L define a través de (4.2) una forma bilineal y continua sobre los espacios de Hilbert $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$.

Fijado $u \in H_0^1(\Omega)$, Lu define un elemento elemento del espacio dual de $H_0^1(\Omega)$ $Lu(v) = \mathfrak{L}(u,v)$, $v \in H_0^1(\Omega)$. Por el Teorema de Representación de Riesz, $H_0^1(\Omega)$ puede ser identificado con su dual, y en consecuencia el operador L induce una aplicación $H^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Mostraremos mas adelante que la solución del problema de Dirichlet para la ecuación (4.3) es reducida a la inversivilidad de esta aplicación.

4.1. Principio Débil del Máximo

Notación 4.1.1 *Sea $u \in H^1(\Omega)$ diremos que $u \leq 0$ en $\partial\Omega$ si la parte positiva* $u^+ = \text{máx}\{u, 0\} \in H_0^1(\Omega)$.

En lo que sigue supondremos que

$$\int_\Omega \left(d(x)v - \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x \leq 0 \ \forall v \in C_0^1(\Omega) \ v \geq 0. \tag{4.8}$$

Como b_i y d son acotados, la desigualdad (4.8) puede ser extendida a funciones no negativas $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$.

Teorema 4.1.2 (Principio Débil del Máximo) *Sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que $Lu \geq 0$ (≤ 0) en Ω. Entonces*

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \ \left(\text{ínf}_\Omega u \geq \text{ínf}_{\partial\Omega} u^- \right). \tag{4.9}$$

Demostración. Si $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$ entonces $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ y $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.
Podemos escribir la desigualdad $\mathfrak{L}(u, v) \leq 0$ en la forma

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^N [b_i(x) + c_i(x)] v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left\{ d(x)uv - \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} \right\} \mathrm{d}x \leq 0$$

para toda $v \geq 0$ tal que $uv \geq 0$, (por (4.8)). De aquí, por la acotación de los coeficientes (4.6), tenemos

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{d}x \leq 2\lambda\nu \int_\Omega v \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \mathrm{d}x \tag{4.10}$$

para todo $v \geq 0$ tal que $uv \geq 0$. En el caso especial $b_i + c_i = 0$ $1 \leq i \leq N$, la demostración es inmediata tomado $v = \text{máx}\{u - l, 0\}$ donde $l = \sup_{\partial\Omega} u^+$. Para el caso general, tomemos $k \in \mathbb{R}$ tal que $l \leq k \leq \sup_\Omega u$ y $v = (u - k)^+$. (Si no existe tal k hemos terminado). Por la regla de la cadena, tenemos que $v \in H_0^1(\Omega)$ y

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla u & \text{para} \quad u > k \text{ (i.e. } v \neq 0) \\ 0 & \text{para} \quad u \leq k \text{ (i.e. } v = 0). \end{cases}$$

En consecuencia obtenemos a partir de la formula (4.10)

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \leq 2\lambda\nu \int_\Gamma v\left[\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x$$

con $\Gamma = sop(\nabla v) \subset sop(v)$ y de aquí por la elipticidad estricta de L, (4.5),

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x &\leq 2\nu\int_\Gamma v\left[\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x\\ &\leq 2\nu\|v\|_{L^2(\Gamma)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

entonces

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\nu\|v\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Sobolev, para $N \geq 3$, obtenemos

$$\|v\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C|sop(\nabla v)|^{1/N}\|v\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}$$

donde $C = C(N,\nu)$ entonces

$$|sop(\nabla v)| \geq C^{-N}.$$

En el caso $N = 2$ se tiene una desigualdad de este tipo con $C = C(N,\nu,|\Omega|)$ se sigue también de la desigualdad de Sobolev reemplazando $\frac{2N}{N-2}$ por algún numero mas grande que 2. De esto se sigue que las desigualdades son independientes de k lo que muestra que no cambia cuando k tiende al $\sup_\Omega u$. Entonces la función u debe alcanzar su supremo en Ω sobre un conjunto de medida positiva, donde al mismo tiempo $\nabla u = 0$. Esto contradice la desigualdad precedente, entonces $\sup_\Omega u \leq l$. ♣

Corolario 4.1.3 *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $Lu = 0$ en Ω. Entonces $u = 0$ en Ω.*

4.2. Resolución del Problema de Dirichlet

Teorema 4.2.1 *Sea L un operador que satisface las condiciones (4.5), (4.6) y (4.8). Entonces para $f \in L^2(\Omega)$ el problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega\end{cases}$$

tiene una única solución.

Demostración. El Teorema 4.2.1 sera derivado de la alternativa de Fredholm para el operador L.
Definimos
$$F(v) = -\int_\Omega f v \, \mathrm{d}x$$
para $v \in H_0^1(\Omega)$. Observar que
$$|F(v)| \le \|f\|_2 \|v\|_{1,2},$$
entonces $F \in H^{-1}(\Omega)$.
Si la forma bilineal $\mathfrak{L}$ definida por (4.2) es coerciva entonces el problema de Dirichlet para L tiene una única solución por Lax-Milgram.

Relacionado con la coercividad de $\mathfrak{L}$ tenemos

Lema 4.2.2 *Sea L que satisface las condiciones (4.5) y (4.6). Entonces*
$$\mathfrak{L}(u,u) \ge \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \nu^2 \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Demostración.
$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(u,u) &= \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N [b_i(x) - c_i(x)] u \frac{\partial u}{\partial x_i} - d(x) u^2 \right\} \mathrm{d}x \\
&\ge \int_\Omega \left\{ \lambda \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - \lambda \nu^2 u^2 \right\} \mathrm{d}x \\
&\quad \text{(por la desigualdad de Schwarz)} \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x - \lambda \nu^2 \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

♣

Para $\sigma \in \mathbb{R}$ definimos el operador L_σ por $L_\sigma u = Lu - \sigma u$. Por el Lema 4.2.2 el operado L_σ es coerciva si σ es suficientemente grande o $|\Omega|$ es suficientemente chica.

Definimos una inclusión $I : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ por
$$Iu(v) = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.12}$$

Lema 4.2.3 *I es compacto.*

Demostración. Escribimos $I = I_1 I_2$ donde $I_2 : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es la inclusión natural e $I_1 : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ que es definida por (4.12). Por el Teorema de Rellich-Kondrachov, I_2 es compacto y, como I_1 es continua, se sigue que I es compacto. ♣

Tomamos σ_0 de manera que la forma $\mathfrak{L}_{\sigma_0}$ es continua y coerciva en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. La ecuación $Lu = F$, para $u \in H_0^1(\Omega)$ y $F \in H^{-1}(\Omega)$, es equivalente a la ecuación

$$L_{\sigma_0} u + \sigma_0 I u = F.$$

Como $L_{\sigma_0}^{-1}$ es continua, uno a uno de $H^{-1}(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$ y si, se la aplicamos a la ecuación, obtenemos la siguiente ecuación equivalente

$$u + \sigma L_{\sigma_0}^{-1} I u = L_{\sigma_0}^{-1} F. \tag{4.13}$$

La aplicación $T = -\sigma L_{\sigma_0}^{-1} I u$ es compacta por Lema 4.5 y de aquí por la alternativa de Fredholm, la existencia de una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la ecuación (4.13) es una consecuencia de la unicidad en $H_0^1(\Omega)$ de la solución trivial de la ecuación $Lu = 0$. El Teorema 4.2.1 se sigue del resultado de unicidad, Corolario 4.1.3. ♣

4.3. Principio Fuerte del Máximo

Definición 4.3.1 *Sea $u \in H^1(\Omega)$. Se dice que u es una supersolución (subsolución) de la ecuación (4.3) en Ω si*

$$\mathfrak{L}(u, v) \geq \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \quad \left(\mathfrak{L}(u, v) \leq \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \right)$$

para todo $v \in C_0^1(\Omega)$ $v \geq 0$.

Usaremos el siguiente resultado , el cual no demostraremos

Teorema 4.3.2 (Desigualdad Débil de Harnack) *Sea L un operador que satisface (4.5), (4.6) y supongamos que $f \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ para algún $q > N$. Entonces si $u \in H^1(\Omega)$ es una supersolución de la ecuación (4.3) en Ω, no negativa en una bola $B(y, 4R) \subset \Omega$ y $1 \leq p < \frac{N}{N-2}$ tenemos*

$$R^{\frac{-N}{p}} \|u\|_{L^p(B(y,2R))} \leq C \left(\inf_{B(y,R)} u + \lambda^{-1} R^{2(1-\frac{N}{q})} \|f\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} \right) \tag{4.14}$$

donde $C = C(N, \frac{\Lambda}{\lambda}, \nu R, q, p)$.

Demostración. Ver Gilbarg-Trudinger [14], Teorema 8.18. ♣

Teorema 4.3.3 (Principio Fuerte del Máximo) *Sean L un operador que satisface las condiciones (4.5), (4.6) y (4.8) y $u \in H^1(\Omega)$ tal que $Lu \geq 0$ en Ω. Entonces, si para alguna bola $B \subset \Omega$ tenemos*

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0 \tag{4.15}$$

la función u es constante en Ω y se tiene la igualdad en (4.8) cuando $u \neq 0$.

Demostración. Escribimos $B = B(y, R)$, y sin perdida de generalidad podemos suponer que $B(y, 4R) \subset \Omega$. Sea $M = \sup_\Omega u$ y aplicamos la Desigualdad Débil de Harnack (4.14) con $p = 1$ a la supersolución $v = M - u$. Obtenemos

$$R^{-N} \int_{B(y,2R)} (M - u) \, \mathrm{d}x \leq C \inf_{B(y,R)} (M - u) = 0.$$

Por lo tanto $u = M$ en $B(y, 2R)$. De donde se deduce que $\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ es un abierto relativo en Ω. Como $u \in H^1(\Omega)$, u es continua, entonces Ω_M es un cerrado relativo de Ω. Por la tanto $\Omega_M = \Omega$. ♣

4.4. Desigualdad de Harnack

Para una demostración de los siguientes resultados ver Gilbarg-Trudinger [14], Teorema 8.20 y Corolario 8.21.

Teorema 4.4.1 (Desigualdad Completa de Harnack) *Sean L un operador que satisface las condiciones (4.5) y (4.6), y $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ en Ω y $Lu = 0$ en Ω. Entonces si $B(y, 4R) \subset \Omega$ tenemos*

$$\sup_{B(y,R)} u \leq C \inf_{B(y,R)} u \tag{4.16}$$

donde $C = C(N, \frac{\Lambda}{\lambda}, \nu R)$.

Corolario 4.4.2 (Desigualdad de Harnack) *Sean L y u que satisfacen las hipótesis del Teorema 4.4.1. Entonces para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, tenemos*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u \tag{4.17}$$

donde $C = C(N, \frac{\Lambda}{\lambda}, \nu, \Omega', \Omega)$.

4.5. El Problema de Autovalores

La teoría de Fredholm, garantiza que un operador elíptico de la forma (4.1) tiene a lo sumo un conjunto numerable de autovalores. Probaremos en esta sección que un operador autoadjunto tiene autovalores y consideraremos algunas de sus propiedades básicas. Aunque la existencia de autovalores se sigue del análisis funcional standard, consideramos bueno hacer la demostración para este caso particular.

Supongamos ahora que el operador L es autoadjunto y que lo podemos escribir como

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u\right) - b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

donde (a_{ij}) es simétrica. La forma cuadrática asociada en $H_0^1(\Omega)$ es dada por

$$\mathfrak{L}(u,v) = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2b_i(x)u\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u^2\right\} \mathrm{d}x.$$

La relación

$$J(u) = \frac{\mathfrak{L}(u,u)}{\|u\|_{2,}^2} \qquad u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$$

es llamada el cociente de Rayleigh de L. Comencemos por estudiar el problema variacional de minimización de J. Primero, es claro por el Lema 4.2.2 que J es acotado inferiormente, entonces podemos definir

$$\sigma = \operatorname*{ínf}_{H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} J. \tag{4.18}$$

Es claro ahora que σ es el menor autovalor de L en $H_0^1(\Omega)$, que es, de existir una función no trivial $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$Lu + \sigma u = 0, \tag{4.19}$$

y σ es el numero mas pequeño para el cual esto es posible. Mostremos esto escogiendo una sucesión minimizante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $J(u_n) \to \sigma$. Por (4.5) y (4.6) tenemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H_0^1(\Omega)$, entonces tenemos una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en $L^2(\Omega)$ a una función u con $\|u\|_2 = 1$ (por la inclusión compacta $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, Teorema de Rellich-Kondrachov). Como $Q(u) = \mathfrak{L}(u,u)$ es cuadrática tenemos para todo l y n

$$Q(\frac{u_l - u_n}{2}) + Q(\frac{u_l + u_n}{2}) = \frac{1}{2}(Q(u_l) + Q(u_n))$$

entonces

$$Q(\frac{u_l - u_n}{2}) \leq \frac{1}{2}(Q(u_l) + Q(u_n)) - \sigma \Big\| \frac{u_l + u_n}{2} \Big\|_2^2 \underset{n,l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Usando nuevamente el Lema 4.2.2, vemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, y además $Q(u) = \sigma$. La verificación de la ecuación de Euler (4.19) es standard en el calculo de variaciones: Se sigue tomando

$$f(t) = J(u + tv)$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$ y calculando

$$f'(0) = 2\bigg(\mathfrak{L}(u, v) - \sigma \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x\bigg) = 0.$$

Es claro que σ es el menor autovalor, puesto que algún autovalor mas pequeño contradiciria la la formula (4.18). Si ordenamos los autovalores de L en forma creciente σ_1, σ_2, ..., y designamos sus correspondientes autoespacios por V_1, V_2, ..., podemos caracterizar los autovalores superiores de L por la forma

$$\sigma_m = \inf \bigg\{ J(u) : u \neq 0 \ \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x = 0 \ \forall v \in V_1, \ldots, V_{m-1} \bigg\}. \tag{4.20}$$

Las resoluciones de estos problemas variacionales esencialmente como en el caso $m = 1$ y, además, el procedimiento (4.20) muestra todos los posibles autovalores de L, las autofunciones resultantes forman un conjunto completo en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto tenemos el siguiente Teorema

Teorema 4.5.1 *Sea L un operador autoadjunto que satisface (4.5) y (4.6). Entonces L tiene un conjunto numerable de autovalores $\Sigma = \{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, dado por (4.20), cuyos subespacios generados por las autofunciones son densos en $H_0^1(\Omega)$.*

Para terminar con esta sección observemos una propiedad especial del primer autovalor

Teorema 4.5.2 *Sea L un operador autoadjunto que satisface (4.5) y (4.6). Entonces el primer autovalor es simple y tiene una autofunción positiva.*

Demostración. Si u es una autofunción de σ_1, se sigue de la formula (4.18) que $|u|$ también lo es. Por la Desigualdad de Harnack, Corolario 4.4.2, tenemos que $|u|$ es positiva en Ω, por lo tanto u tiene signo constante, y entonces σ_1 tiene una autofunción positiva. Este argumento también muestra que las autofunciones de σ_1 son positivas o negativas y por lo tanto es imposible que dos de ellas sean ortogonales, de donde V_1 tiene dimensión uno y σ_1 es simple. ♣

Capítulo 5

p-Laplaciano

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado de clase C^1 y $V \in L^q(\Omega)$ $(1 \leq q < \infty)$. Consideramos el operador H_V de la forma

$$H_V u = -\triangle_p u + V(x)|u|^{p-2}u. \tag{5.1}$$

Si asumimos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y que $q > \frac{N}{p}$, decimos que u satisface $H_V u = 0$ $(\geq 0,\ 0 \leq)$ en Ω si

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(u,v) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u|^{p-2}uw \,\mathrm{d}x \\ &= 0 \ (\leq 0,\ \geq 0) \end{aligned} \tag{5.2}$$

para todo $w \in C_0^1(\Omega)$.
Sea $f \in L^{p'}(\Omega)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es solución débil de la ecuación

$$H_V u = f \tag{5.3}$$

en Ω si

$$\mathfrak{D}(u,w) = G(w) = \int_\Omega f w \,\mathrm{d}x \ \ \forall w \in C_0^1(\Omega). \tag{5.4}$$

Estudiaremos el problema de Dirichlet para la ecuación (5.3).

Definición 5.0.3 *Una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se dice solución débil del problema de Dirichlet*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\triangle_p u + V(x)|u|^{p-2}u &=& f \ \ en\ \Omega \\ u &=& 0 \ \ en\ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{5.5}$$

si u es solución débil de (5.3) y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Notar que

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{D}(u,w)| &\leq \|\nabla u\|_p^{p-1}\|\nabla w\|_p + \int_\Omega (|V(x)|^{\frac{1}{p'}}|u|^{p-1})(|V(x)|^{\frac{1}{p}}|v|)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|\nabla u\|_p^{p-1}\|\nabla w\|_p + \left(\int_\Omega |V(x)||u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{p}}\left(\int_\Omega |V(x)||w|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{p}} \\
&\leq \|\nabla u\|_p^{p-1}\|\nabla w\|_p + C\|V\|_q\|u\|_{1,p}^{p-1}\|w\|_{1,p} \text{ por el Lema 3.3.14} \\
&\leq C\|u\|_{1,p}^{p-1}\|V\|_q.
\end{aligned}
$$

De esto se deduce, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fijo, que la aplicación $w \to \mathfrak{D}(u,w)$ es una funcional lineal y continua en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por lo tanto la validez de la relación (5.2) para $w \in C_0^1(\Omega)$ implica su validez para $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Observar que fijado $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $H_V u$ define un elemento del espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $H_V u(w) = \mathfrak{D}(u,w) = \mathfrak{D}(u,w)$, $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

5.1. Resolución del Problema de Direchlet

Teorema 5.1.1 *Sea $V \in L^q(\Omega)$, con $q > \frac{N}{p}$. Si $\|V\|_q < S_{pq'}^{-1}$, donde $S_{pq'}$ es la constante definida en la Definición 3.4.7, ó $V \geq 0$ el problema de Direchlet (5.5) tiene por lo menos una solución débil para toda $f \in L^{p'}(\Omega)$.*

Demostración.

1.- Definimos $\phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$
\phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega fu\,\mathrm{d}x.
$$

2.- ϕ es acotada inferiormente.
Si $V \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\phi(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega fu\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \|f\|_{p'}\|u\|_p \\
&\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \|f\|_{p'}C\|\nabla u\|_p
\end{aligned}
$$

Como la función $\alpha : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$
\alpha(t) = \frac{1}{p}t^p - \|f\|_{p'}Ct
$$

esta acotada inferiormente, entonces existe $K_1 > 0$ tal que

$$\phi(u) \geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \|f\|_{p'}C\|\nabla u\|_p \geq K_1 \, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Si $\|V\|_q < S_{pq'}^{-1}$

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega fu \, \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |V(x)||u|^p \, \mathrm{d}x - \|f\|_{p'}\|u\|_p \\ &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \|V\|_q\|u\|_{pq'}^p - \|f\|_p C\|\nabla u\|_p. \end{aligned}$$

Observemos que

$$pq' < p^* = \frac{pN}{N-p} \iff \frac{q}{q-1} < \frac{N}{N-p} \iff (N-p)q < (q-1)N \iff \frac{N}{p} < q.$$

Entonces $\|u\|_{pq'}^p \leq S_{pq'}\|\nabla u\|_p^p$. Por lo tanto

$$\phi(u) \geq \frac{1}{p}(1 - \|V\|_q S_{pq'})\|\nabla u\|_p^p - D\|\nabla u\|_p,$$

donde $D = \|f\|_{p'}C$.
Como, por hipótesis, $\|V\|_q S_{pq'} < 1$, la función $\mu : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\mu(t) = \frac{1}{p}(1 - \|V\|_q S_{pq'})t^p - Dt$$

esta acotada inferiormente, entonces existe $K_2 > 0$ tal que

$$\phi(u) \geq \frac{1}{p}(1 - \|V\|_q S_{pq'})\|\nabla u\|_p^p - D\|\nabla u\|_p \geq K_2 \, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

3.- Por el punto 1, $m = \operatorname{ínf}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \phi(u) > -\infty$. Veamos que se alcanza. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \phi(u_n) = m.$$

Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión minimizante, existe $C > 0$ tal que
Si $V \geq 0$

$$C \geq \phi(u_n) \geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - D\|\nabla u_n\|_p \geq K_1 \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $\|V\|_q < S_{pq'}^{-1}$

$$C \geq \phi(u_n) \geq \frac{1}{p}(1 - \|V\|_q S_{pq'})\|\nabla u_n\|_p^p - D\|\nabla u_n\|_p \geq K_2 \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, en cualquiera de los dos casos, $(\|\nabla u_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, o sea que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la cual también notaremos con $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega), \tag{5.6}$$

$$u_n \to u_0 \text{ en } L^p(\Omega), \tag{5.7}$$

$$u_n \to u_0 \text{ en } L^{pq'}(\Omega). \tag{5.8}$$

Por (5.7),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f u_n \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f u_0 \, \mathrm{d}x$$

puesto que $f \in L^{p'}(\Omega)$.
Por (5.8) y el Teorema 2.3.7

$$|u_n|^p \to |u_0|^p \text{ en } L^{q'}(\Omega),$$

con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega V(x)|u_n|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega V(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x$$

por que $V \in L^q(\Omega)$.
Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, \mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u_n|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f u_n \, \mathrm{d}x = m$$

resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, \mathrm{d}x = m + \int_\Omega f u_0 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x.$$

Por otro lado, usando (5.6),

$$m + \int_\Omega f u_0 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x,$$

con lo cual

$$m \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f u_0 \, \mathrm{d}x.$$

Como $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, resulta que $m = \phi(u_0)$.

4.- u_0 es una solución débil del problema (5.5).
Sea $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ definimos

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$i(t) = \phi(u_0 + tw).$$

Por el punto 3 i tiene un mínimo en 0. Entonces $i'(0) = 0$. Usando el Teorema de Convergencia Mayorada, se puede ver que

$$i'(0) = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla w \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^{p-2} u_0 w \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f w \, \mathrm{d}x.$$

Entonces tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla w \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^{p-2} u_0 w \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f w \, \mathrm{d}x \, \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

por lo tanto u es solución débil del problema (5.5). ♣

Teorema 5.1.2 *Si $V \in L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^{p'}(\Omega)$, toda solución débil del problema de Dirichlet (5.5) es acotada.*

Demostración. Es analógo Gilbarg-Trudinger [14], Teorema 8.15. ♣

5.2. Principio del Máximo

Teorema 5.2.1 (Principio Débil del Máximo) *Sean $V \in L^q(\Omega)$, con $q > \frac{N}{p}$, $f \in L^{p'}(\Omega)$ y u una solución débil del problema de Dirichlet (5.5). Si $\|V\|_q < S_{pq'}^{-1}$ ó $V \geq 0$, y además $f \geq 0$, entonces $u \geq 0$ en Ω.*

Demostración. Hacemos la demostración para el caso $\|V\|_q \leq S_{pq'}^{-1}$. Como u es solución débil del problema de Dirichlet (5.5), tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u|^{p-2} u w \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f w \, \mathrm{d}x \, \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tomemos $w = u^-$, entonces

$$-\int_\Omega |\nabla u^-|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega V(x)|u^-|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f u^- \, \mathrm{d}x \geq 0 \text{ (por ser } f u^- \geq 0)$$

o sea que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_\Omega |\nabla u^-|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u^-|^p \, \mathrm{d}x \\
&\geq \|\nabla u^-\|_p^p - \int_\Omega |V(x)||u^-\|^p \, \mathrm{d}x \\
&\geq \|\nabla u^-\|_p^p - \|V\|_q \|u^-\|_{pq'}^p \\
&\geq \|\nabla u^-\|_p^p - \|V\| S_{pq'} \|\nabla u^-\|_p^p \ \text{(por que } \ q > N/p) \\
&= (1 - \|V\| S_{pq'}) \|\nabla u^-\|_p^p.
\end{aligned}$$

Como $\|V\|_q < S_{pq'}^{-1}$, tenemos que

$$0 \geq \|\nabla u^-\|_p^p \geq C\|u^-\|_p^p$$

entonces $\|u^-\|_p = 0$, y por lo tanto $u^- \equiv 0$ en Ω. Luego $u \geq 0$ en Ω.

El caso $V \geq 0$ es análogo. ♣

Teorema 5.2.2 (Desigualdad de Harnack) *Sea u una solución débil de (5.5) en un cubo $K = K(3\rho) \subset \Omega$, con $0 \leq u < M$ en K. Entonces*

$$\max_{K(\rho)} u \leq C \min_{K(\rho)} u,$$

donde $C = C(N, M, \rho)$.

Demostración. Ver Trudinger [22]. ♣

Teorema 5.2.3 (Principio Fuerte del Máximo) *Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución débil del problema (5.5). Entonces,si $f > 0$ tenemos*

$$u > 0 \ \textit{en} \ \Omega.$$

Demostración. Se deduce de los Teorema 5.2.1 y 5.2.2. ♣

5.3. El Problema de Autovalores

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado de clase C^1 y $V \in L^q(\Omega)(1 < q < \infty)$. Tenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{en } \ \Omega \\ u = 0 & \text{en } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.9}$$

El primer autovalor asociado a este problema es

$$E(V) = \text{ínf}\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u|^p \,\mathrm{d}x : u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_p = 1 \right\}.$$

Veremos que existe u_0 solución débil de (5.9) cuando $\lambda = E(V)$, u_0 se llamara una autofunción asociada al autovalor $E(V)$, y demostraremos algunas propiedades interesantes de u_0.

Definición 5.3.1 *Sea $V \in L^q(\Omega)$ definimos $J_V : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como*

$$J_V(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u|^p \,\mathrm{d}x.$$

Observación 5.3.2 *De acuerdo a la ultima definición tenemos que*

$$E(V) = \text{ínf}\left\{ J_V(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_p = 1 \right\}.$$

En el próximo teorema mostraremos la existencia de una autofunción.

Teorema 5.3.3 *Si $q > \frac{N}{p}$, entonces dado $V \in L^q(\Omega)$, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E(V) & = & \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x \\ ||u_0||_p & = & 1. \end{array} \right.$$

Demostración. Sean $V \in L^q(\Omega)$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante. Por ser una sucesión minimizante, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x \leq C \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $D_\varepsilon > 0$ tal que

$$(1-\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - \|V\|_q D_\varepsilon \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x \leq C$$

para todo n.
En efecto, como $q > \frac{N}{p}$, por el Lema 3.3.14 se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe D_ε tal que

$$\begin{array}{rcl} \left| \int_\Omega V(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x \right| & \leq & \|V\|_q \left\{ \dfrac{\varepsilon}{\|V\|_q} \|\nabla u_n\|_p^p + D_\varepsilon \|u_n\|_p^p \right\} \\ & \leq & \varepsilon \|\nabla u_n\|_p^p + \|V\|_q D_\varepsilon \|u_n\|_p^p \end{array}$$

para todo n.
Entonces tenemos que

$$(1-\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - \|V\|_q D_\varepsilon \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x \leq C$$

para todo n.
Tomando $\varepsilon < 1$ tenemos, para todo n,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x \leq \frac{C + \|V\|_q D_\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

y por lo tanto $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Observemos que

$$pq' < p^* = \frac{pN}{N-p} \Longleftrightarrow \frac{q}{q-1} < \frac{N}{N-p} \Longleftrightarrow (N-p)q < (q-1)N \Longleftrightarrow \frac{N}{p} < q.$$

Entonces existe una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la cual también notaremos con $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega), \tag{5.10}$$

$$u_n \to u_0 \text{ en } L^p(\Omega), \tag{5.11}$$

$$u_n \to u_0 \text{ en } L^{pq'}(\Omega). \tag{5.12}$$

Por (5.11) se tiene $\|u_0\|_p = 1$, con lo cual $u_0 \neq 0$.
Por (5.12) y el Teorema 2.3.7

$$|u_n|^p \to |u_0|^p \text{ en } L^{q'}(\Omega),$$

con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega V(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega V(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x$$

por que $V \in L^q(\Omega)$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x = E(V)$$

resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x = E(V) - \int_\Omega V(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x.$$

Por otro lado, usando (5.10),

$$E(V) - \int_\Omega V(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x$$

con lo cual
$$E(V) \geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x$$
Como $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\|u_0\|_p = 1$ resulta que
$$E(V) = \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x.$$

♣

En el siguiente teorema demostraremos que u_0 es solución débil del problema 5.9 con $\lambda = E(V)$.

Teorema 5.3.4 *Sean $V \in L^q(\Omega)$, con $q > \frac{N}{p}$ y $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} E(V) & = & \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(X)|u_0|^p \,\mathrm{d}x \\ ||u_0||_p & = & 1. \end{array} \right. \tag{5.13}$$
Entonces u_0 es solución débil de
$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u & = & E(V)|u|^{p-2}u \text{ en } \Omega \\ u & = & 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{5.14}$$

Demostración. Sean
$$I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$I(u) = \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x$$
y
$$\mathfrak{A} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : I(u) = 1\}.$$
Entonces $J_V(u_0) = \min_{u \in \mathfrak{A}} J_V(u)$.
Sea $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 w \,\mathrm{d}x \neq 0$, pues $u_0 \neq 0$.
Dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ definimos
$$j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$j(t,s) = I(u_0 + tu + sw) - 1.$$
Observemos que $j(0,0) = I(u_0) - 1 = 0$.
Calculemos $\frac{\partial j}{\partial s}(0,0)$.
Como
$$\lim_{s \to 0} \frac{|u_0 + sw|^p - |u_0|^p}{s} = p|u_0|^{p-2}u_0 w$$

y
$$\frac{|u_0+sw|^p-|u_0|^p}{s}\le p|w|(|u_0+sw|^{p-1}+|u_0|^{p-1})\in L^1(\Omega),$$
ya que $|w|\in L^p(\Omega)$, $|u_0+sw|^{p-1}$ y $|u_0|^{p-1}\in L^{p'}(\Omega)$. Por el Teorema De Convergencia Mayorada
$$\frac{\partial j}{\partial s}(0,0)=\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0w\,\mathrm{d}x\neq 0.$$
Entonces por el Teorema De La Función Implícita existe $\phi\in C^1(\Omega)$ tal que
$$\phi(0)=0,$$
$$j(t,\phi(t))=0$$
para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ y
$$\phi'(0)=-\frac{\frac{\partial j}{\partial t}(0,0)}{\frac{\partial j}{\partial s}(0,0)}=-\frac{\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0u\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0w\,\mathrm{d}x}.$$
Sea $z(t)=tu+\phi(t)w$, entonces $u_0+z(t)\in\mathfrak{A}$ para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Definimos $i(t)=J_V(u_0+z(t))$. Luego $i(t)$ tiene un mínimo en $t=0$, entonces
$$\begin{aligned}
0 &= i'(0)=\frac{\partial}{\partial t}J_V(u_0+z(t))\bigg|_{t=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\bigg(\int_\Omega |\nabla(u_0+z(t))|^p\,\mathrm{d}x+\int_\Omega V(x)|u_0+z(t)|^p\,\mathrm{d}x\bigg)\bigg|_{t=0}\\
&= \int_\Omega |\nabla(u_0+z(t))|^{p-2}\nabla(u_0+z(t))(\nabla u+\phi'(t)\nabla w)\,\mathrm{d}x\bigg|_{t=0}\\
&+ \int_\Omega V(x)|u_0+z(t)|^{p-2}(u_0+z(t))(u+\phi'(t)w)\,\mathrm{d}x\bigg|_{t=0}\\
&= \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0(\nabla u+\phi'(0)\nabla w)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega V(x)|u_0|^{p-2}u_0(u+\phi'(0)w)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla u\,\mathrm{d}x+\int_\Omega V(x)|u_0|^{p-2}u_0u\,\mathrm{d}x\\
&+ \int_\Omega \phi'(0)\Big[(|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla w+V(x)|u_0|^{p-2}u_0w)\Big]\,\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla u\,\mathrm{d}x+\int_\Omega V(x)|u_0|^{p-2}u_0u\,\mathrm{d}x\\
&- \frac{\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0u\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0w\,\mathrm{d}x}\int_\Omega(|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla w+V(x)|u_0|^{p-2}u_0w)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tomando

$$\lambda = \frac{\int_\Omega (|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla w + V(x)|u_0|^{p-2}u_0 w)\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 w\,\mathrm{d}x},$$

se tiene

$$0 = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^{p-2}u_0 u\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 u\,\mathrm{d}x.$$

Por tanto u_0 es solución débil de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u & = & \lambda|u|^{p-2}u \,\text{en}\ \Omega \\ u & = & 0 \ \text{en}\ \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{5.15}$$

Para terminar veamos que $\lambda = E(V)$.
Como u_0 es dolución débil de (5.15) vale que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^p\,\mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega |u_0|^p\,\mathrm{d}x = \lambda,$$

entonces

$$E(V) = \int_\Omega |\nabla u_0|^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^p\,\mathrm{d}x = \lambda.$$

♣

Luego u_0 se llama la autofunción asociada al autovalor $E(V)$.

Teorema 5.3.5 *Si $V \in L^\infty(\Omega)$ entonces u_0 tiene signo constante.*

Demostración. Como u_0 es solución débil del problema (5.14), $|u_0|$ también lo es. Dado que $V \in L^\infty(\Omega)$, por el Teorema 5.1.2, $|u_0| \in L^\infty(\Omega)$. Entonces por el Teorema 5.2.3 $|u_0| > 0$ en Ω, por lo tanto u_0 tiene signo constante. ♣

Proposición 5.3.6 *$E(V)$ es el primer autovalor para el problema (5.9).*

Demostración. Sea λ otro autovalor del problema (5.9), i.e. existe $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que w es solución débil de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u & = & \lambda|u|^{p-2}u \,\text{en}\ \Omega \\ u & = & 0 \ \text{en}\ \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Entonces

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla w|^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|w|^p\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega |w|^p\,\mathrm{d}x} \geq E(V).$$

♣

Enunciaremos algunos resultados adicionales, a modo informativo, sobre este problema. Los mismos no serán usados en lo que resta de esta tesis.

Proposición 5.3.7 *Si $q > \frac{N}{p}$, entonces dado $V \in L^q(\Omega)$, existe una suseción creciente y no acotada de autovalores para el problema (5.9).*

Demostración. Es análoga a García Azorero-Peral Alonso [12], [13]. ♣

Proposición 5.3.8 *Si $V \in L^\infty(\Omega)$, el primer autovalor del problema (5.9) es aislado.*

Demostración. Es análoga a Cuesta [7]. ♣

5.4. El Espacio de Autofunciones Asociado al Primer Autovalor

Acontinuación demostraremos que el espacio de autofunciones de $E(V)$ esta generado por u_0. Para esto necesitaremos el siguiente resultado

Teorema 5.4.1 (Identidad de Picone) *Sean $v > 0$, $u \geq 0$ diferenciables y $p \geq 1$. Definimos*

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\ R(u,v) &= |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v. \end{aligned}$$

Entonces

$$L(u,v) = R(u,v).$$

Además

1. $L(u,v) \geq 0$.
2. *$L(u,v) = 0$ c.t.p. Ω si solo si $\nabla(\frac{u}{v}) = 0$ c.t.p. Ω, i.e. $u = kv$ para alguna constante k en cada componente conexa de Ω.*

La siguiente demostración esta basada en la hecha por Allegreto-Hunag [1].

Demostración.

1.- $L(u,v) = R(u,v)$.
Basta ver que

$$\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v = p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v - (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p.$$

Como, para todo $1 \leq i \leq N$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right) = \frac{pu^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}v^{p-1} - (p-1)u^p v^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}}{v^{2(p-1)}} = p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\frac{\partial u}{\partial x_i} - (p-1)\frac{u^p}{v^p}\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Entonces

$$\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right) = p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u - (p-1)\frac{u^p}{v^p}\nabla v.$$

Por lo tanto

$$\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v = p\frac{u^{p-1}}{vp-1}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v - (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p.$$

2.- $L(u,v) \geq 0$.
Usando la Desigualdad de Young

$$|\nabla u|\left(\frac{u|\nabla v|}{v}\right)^{p-1} \leq \frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{p-1}{p}\left(\frac{u|\nabla v|}{v}\right)^p.$$

Entonces

$$p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u| \leq |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p.$$

Luego

$$\begin{aligned}
L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\
&\geq p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u| - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\
&= p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla v|^{p-2}(|\nabla v||\nabla u| - \nabla u\nabla v) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

3.- $L(u,v) = 0$ $c.t.p$ Ω si y solo si $\nabla(\frac{u}{v})$.

$$\begin{aligned}
L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\
&= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| \\
&+ p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\
&= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| \\
&+ p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}(|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u).
\end{aligned}$$

Observar que

$$\begin{aligned}|\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| &\geq 0\\ p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}(|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u) &\geq 0.\end{aligned}$$

Sea $x \in \Omega$ tal que $u(x) \neq 0$, entonces $L(u, v)(x) = 0$ si y solo si

$$|\nabla u(x)|^p + (p-1)\frac{u(x)^p}{v(x)^p}|\nabla v(x)|^p - p\frac{u(x)^{p-1}}{v(x)^{p-1}}|\nabla v(x)|^{p-1}|\nabla u(x)| = 0 \quad (5.16)$$

y

$$p\frac{u(x)^{p-1}}{v(x)^{p-1}}|\nabla v(x)|^{p-2}(|\nabla v(x)||\nabla u(x)| - \nabla v(x)\nabla u(x)) = 0. \quad (5.17)$$

Ahora, la ecuanción (5.17) es equivalente a $|\nabla u(x)||\nabla v(x)| = \nabla u(x)\nabla v(x)$ y esto ocurre si solo si existe $k \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\nabla v(x) = k\nabla u(x)$.
Entonces (5.16) se convierte en

$$|\nabla u(x)|^p\left[1 + (p-1)\left(\frac{u(x)}{v(x)}k\right)^p - p\left(\frac{u(x)}{v(x)}k\right)^{p-1}\right] = 0.$$

Tengo dos posibilidades:

a.- $|\nabla u(x)| = 0$

Entonces u y v son constante en un entorno de x y por lo tanto $\nabla(\frac{u}{v})(x) = 0$

b.- $1 + (p-1)(\frac{u(x)}{v(x)}k)^p - p\frac{u(x)}{v(x)}k^{p-1} = 0.$

O sea que $\frac{u(x)}{v(x)}k$ es un cero de

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$$

$$f(t) = 1 + (p-1)t^p - pt^{p-1}.$$

Para terminar veamos que el único cero de f es $t = 1$.
Si $t > 1$ entonces $f(t) > 1 + (p-1) - p = 0$.
Si $t < 1$ entonces $f'(t) = (p-1)pt^{p-2}(t-1) < 0$ y por lo tanto f es decreciente en $[0, 1)$.
Luego $t = 1$ es el único cero de f entonces $\frac{u(x)}{v(x)}k = 1$, y por lo tanto existe un entorno de x en el cual $\frac{u}{v} = \frac{1}{k}$, lo que nos dice que $\nabla(\frac{u}{v})(x) = 0$. ♣

Corolario 5.4.2 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, conexo y acotado con frontera regular, $V \in L^q(\Omega)$ ($q > \frac{N}{p}$) y $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} E(V) &= \int_\Omega |\nabla u_0|^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^p\,\mathrm{d}x\\ ||u_0||_p &= 1.\end{cases}$$

Entonces para toda autofunción w asociada a $E(V)$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $w = ku_0$ c.t.p. en Ω.

Demostración. Podemos asumir que $u_0 \geq 0$ y $w \geq 0$. Entonces, dados n y $M \in \mathbb{N}$, $u_0 + \frac{1}{n} > 0$ y $w_M = \text{mín}\{w, M\} \geq 0$. Luego

$$\begin{aligned}\int_\Omega L(w_M, u_0 + \frac{1}{n})\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega R(w_M, u_0 + \frac{1}{n})\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left[|\nabla w_M|^p - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla\left(\frac{w_M^p}{(u_0 + \frac{1}{n})^{p-1}}\right)\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Por Hipótesis y como $\frac{w_M^p}{(u_0+\frac{1}{n})^{p-1}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega L(w_M, u_0 + \frac{1}{n})\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left[|\nabla w_M|^p - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla\left(\frac{w_M^p}{(u_0 + \frac{1}{n})^{p-1}}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |\nabla w_M|^p\,\mathrm{d}x - E(V)\int_\Omega w_M^p \frac{u_0^{p-1}}{(u_0 + \frac{1}{n})^{p-1}}\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega V(x) w_M^p \frac{u_0^{p-1}}{(u_0 + \frac{1}{n})^{p-1}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Por el Teorema de Convergencia Mayorada, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla w_M|^p\,\mathrm{d}x - E(V)\int_\Omega w_M^p \frac{u_0^{p-1}}{(u_0 + \frac{1}{n})^{p-1}}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x) w_M^p \frac{u_0^{p-1}}{(u_0 + \frac{1}{n})^{p-1}}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \int_\Omega |\nabla w_M|^p\,\mathrm{d}x - E(V)\int_\Omega w_M^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x) w_M^p\,\mathrm{d}x.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega L(w_M, u_0 + \frac{1}{n})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla w_M|^p\,\mathrm{d}x - E(V)\int_\Omega w_M^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x) w_M^p\,\mathrm{d}x.$$

Por el Lema de Fatou

$$\int_\Omega L(w_M, u_0)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla w_M|^p\,\mathrm{d}x - E(V)\int_\Omega w_M^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x) w_M^p\,\mathrm{d}x.$$

Por el Teorema de Convergencia Mayorada,

$$\lim_{M\to\infty}\int_\Omega L(w_M, u_0)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla w|^p\,\mathrm{d}x - E(V)\int_\Omega w^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x) w^p\,\mathrm{d}x.$$

Por el Lema de Fatou

$$\int_\Omega L(w,u_0)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla w|^p\,\mathrm{d}x - E(V)\int_\Omega w^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)w^p\,\mathrm{d}x.$$

Entonces, si w es autofunción de $E(V)$,

$$\int_\Omega L(w,u_0)\,\mathrm{d}x \le 0.$$

Como $L(w,u_0)\ge 0$ en Ω, resulta que $L(w,u_0)=0$ *c.t.p.* en Ω entonces existe $k\in\mathbb{R}_{>0}$ tal $w=ku$ *c.t.p.* en Ω. ♣

Para ver otras aplicaciones interesantes de la Identidad de Picone ver Allegreto-Huang [1].

Capítulo 6

Potenciales Críticos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, conexo y acotado con frontera regular. Consideramos el operador diferencial

$$H_V = -\triangle_p + V(x)$$

con $V \in L^q(\Omega)$ y $1 < p < \infty$. Sea $E(V)$ el primer autovalor de H_V, tenemos los siguientes problemas: Si $B \subset L^q(\Omega)$ es convexo, cerrado y acotado.

1. ¿Cual es el supremo de $E(V)$ sobre el conjunto B y para que V lo alcanza, si hay alguno?
2. ¿Cual es el ínfimo de $E(V)$ sobre el conjunto B y para que V lo alcanza, si hay alguno?

En este Capítulo responderemos estas preguntas, siguiendo lo hecho por Harrell [16] y Ashbaugh-Harrell [4] para el caso $p = 2$ y $1 \leq N \leq 3$.

6.1. Propiedades de $E(\cdot)$

Acontnuación demostramos alguna propiedades importantes de la función $E(\cdot)$.

Lema 6.1.1 $E : B \to \mathbb{R}$ *es cóncava.*

Demostración. Sean V_1, $V_2 \in B$ y $0 \leq t \leq 1$. Definimos

$$E(tV_1 + (1-t)V_2) \quad = \quad \text{ínf}\left\{ J_{tV_1+(1-t)V_2}(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_p = 1 \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\left\{tJ_{V_1}(u)+(1-t)J_{V_2}(u) : u\in W_0^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_p=1\right\}\\
&\geq \inf\left\{tJ_{V_1}(u) : u\in W_0^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_p=1\right\}\\
&\quad + \inf\left\{(1-t)J_{V_2}(u) : u\in W_0^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_p=1\right\}\\
&= tE(V_1)+(1-t)E(V_2).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto E es cóncava. ♣

En lo que sigue denotamos con M a la cota de B (i.e. $\|V\|_q \leq M$ para todo $V\in B$).

Proposición 6.1.2 *Existe una constante $C>0$, dependiendo sólo de p, q, M y Ω tal que*

$$E(V)\leq C$$

para todo $V\in B$.

Demostración. Sea $u_0\in C_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_0\|_p=1$ fija.

$$
\begin{aligned}
E(V) &\leq \int_\Omega |\nabla u_0|^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u_0|^p\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^p\,\mathrm{d}x + \|u_0\|_\infty^p\int_\Omega V(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_\Omega |\nabla u_0|^p\,\mathrm{d}x + \|u_0\|_\infty^p|\Omega|^{1/q'}\|V\|_q \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^p\,\mathrm{d}x + \|u_0\|_\infty^p|\Omega|^{1/q'}M\\
&= C(p,q,M,\Omega).
\end{aligned}
$$

♣

6.2. Potencial Maximal

En esta sección demostraremos que existe un único $V^*\in B$ tal que

$$E(V^*)=\sup\{E(V) : V\in B\}$$

y lo caracterizaremos.

Teorema 6.2.1 *Si $q>\frac{N}{p}$, existe un $V^*\in B$ que maximiza $E(V)$. Ademas si V_1 y $V_2\in B$ son dos potenciales maximales en B y u_2 y u_2 son las autofunciones de $E(V_1)$ y $E(V_2)$ respectivamente, entonces $u_1=u_2$ y $V_1=V_2$ c.t.p. en* $\mathrm{sop}(u_1)$.

Demostración. Sean $E^* = \sup\{E(V) : V \in B\}$ y $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ sucesión maximizante, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} E(V_n) = E^*.$$

Notar que, por la Proposición 6.1.2, E^* es finito.
Tenemos que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ y B es acotado entonces $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^q(\Omega)$ y como $L^q(\Omega)$ es reflexivo, existe $V^* \in L^q(\Omega)$ y una subsucesión de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la cual también notaremos con $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$V_n \rightharpoonup V^* \text{ en } L^q(\Omega).$$

Por el Teorema de Mazur (ver Yosida [24]) un conjunto cerrado y convexo en un espacio de Banach es cerrado débil, y entonces $V^* \in B$.
Veamos que $E^* = E(V^*)$.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $u_0 \in C_0^1(\Omega)$ tal que

$$E(V^*) \geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V^*(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Como $u_0 \in C_0^1(\Omega)$ y Ω es acotado resulta que $|u_0|^p \in L^{q'}(\Omega)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega V_n(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega V^*(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
E(V^*) + \varepsilon &\geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V^*(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega V_n(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V_n(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&\geq \lim_{n\to\infty} E(V_n) = E^*.
\end{aligned}$$

Luego, como $V^* \in B$, $E(V^*) = E^*$.
Acabamos de demostrar la existencia, veamos ahora la unicidad.
Supongamos ahora que hay dos potenciales maximales V_1 y V_2 y sea $V_3 = \frac{V_1+V_2}{2}$ su promedio. Como B es convexo y $E(\cdot)$ es concavo se tiene que $V_3 \in B$ y $E(V_3) \geq \frac{E(V_1)+E(V_2)}{2} = E^*$, por lo tanto V_3 es un potencial maximal.
Denotamos las correspondientes autofunciones por u_1, u_2 y u_3. Si u_3 es distinta de u_1 o u_2, como existe una única autofunción positiva en *c.t.p.* de norma

$L^p(\Omega)$ uno asociada al primer autovalor, tenemos que

$$\begin{aligned}
E^* &= E(V_3) = \int_\Omega |\nabla u_3|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_3(x)|u_3|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\nabla u_3|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_1(x)|u_3|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_3|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_2(x)|u_3|^p \,\mathrm{d}x \Big) \\
&> \frac{E(V_1) + E(V_2)}{2} \\
&= E^* \text{absurdo.}
\end{aligned}$$

Luego $u_1 = u_2 = u_3$

$$-\Delta_p u_1 + V_1(x)|u_1|^{p-2}u_1 = E^*|u_1|^{p-2}u_1 \; c.t.p. \tag{6.1}$$
$$-\Delta_p u_1 + V_2(x)|u_1|^{p-2}u_1 = E^*|u_1|^{p-2}u_1 \; c.t.p. \tag{6.2}$$

Si a (6.1) le resto (6.2) tenemos

$$(V_1(x) - V_2(x))|u_1|^{p-2}u_1 = 0 \; c.t.p.$$

Entonces

$$V_1 = V_2 \; c.t.p. \text{ en } \mathrm{sop}(\mathrm{u}_1).$$

♣

Observación 6.2.2 *En la demostración del ultimo teorema se usa que $q > \frac{N}{p}$ sólo en la unicidad para poder asegurar que hay una autofunción asociada al primer autovalor.*

Teorema 6.2.3 *Si $B = \overline{B(0,M)} \subset L^q(\Omega)$, el potencial maximal es único.*

Demostración. Sea $E^* : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

$$E^*(M) = \max\{E(V) : V \in L^q(\Omega) \|V\|_q \leq M\}.$$

Veamos que $E^*(\cdot)$ es estrictamente creciente.
Sean $0 \leq M_1 < M_2$, existe $V_1 \in \overline{B(0, M_1)}$ tal que $E^*(M_1) = E(V_1)$. Como $\|V_1\|_q \leq M_1 < M_2$, existe $t \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|V_1 + t\|_q \leq M_2$. Entonces dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_p = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (V_1(x) + t)|u|^p \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_1(x)|u|^p \,\mathrm{d}x + t \\
&\geq E(V_1) + t.
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo tenemos que

$$E(V_1 + t) \geq E(V_1) + t > E(V_1).$$

Como $(V_1 + t) \in \overline{B(0, M_2)}$,

$$E^*(M_2) \geq E(V_1 + t) > E(V_1) = E^*(M_1).$$

Luego E^* es estrictamente creciente.
Sean $V^* \in B$ un potencial maximal y u la autofunción asociada a $E(V^*)$. Si $V^* \neq 0$ en un subconjunto de medida positiva de $\Omega \setminus \mathrm{sop(u)}$, definimos

$$V_*(x) \begin{cases} V^*(x) & \text{si } x \in \mathrm{sop(u)} \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \mathrm{sop(u)}. \end{cases}$$

Observar que $\|V_*\|_q < \|V^*\|_q$ y $E(V^*) = E(V_*)$, lo que contradice el hecho que E^* es estrictamente creciente. Luego $V^* = 0$ en *c.t.p.* de $\Omega \setminus \mathrm{sop(u)}$. Ahora usando el Teorema 6.2.1 tenemos la unicidad. ♣

Sea $q > \frac{N}{p}$ y consideremos el caso $B = \overline{B(0, M)} \subset L^q(\Omega)$, para simplificar las cuentas tomaremos $M = 1$. Es claro que B es convexo, cerrado y acotado. Sean $V^* \in B$ tal que $E(V^*) = \max\{E(V) : V \in B\}$ y $V_0 = \frac{|V^*|}{\|V^*\|_q} \in \partial B = S$. Sea $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|u_0\|_p = 1$ y

$$E(V_0) = \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{|V^*(x)|}{\|V^*\|_q} |u_0|^p \,\mathrm{d}x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} E(V_0) &\geq \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V^*(x) |u_0|^p \,\mathrm{d}x \\ &\geq E(V^*) = E^*. \end{aligned}$$

Luego, por la unicidad, $V_0 = V^*$ de donde $\|V^*\|_q = 1$ y $V^* \geq 0$.

Por lo tanto si tomamos $S = \partial B(0, 1)$, existe $V_0 \geq 0$ en S tal que

$$E(V_0) = \max\{E(V) : V \in S\} = \max\{E(V) : V \in B\}.$$

Ahora trataremos de caracterizar V_0.

Sea $\alpha : (-1, 1) \to S$ diferenciable tal que

$$\alpha(0) = V_0 \text{ y } \dot{\alpha}(0) = W \in T_{V_0} S.$$

Observamos que

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = V_0 \,\text{en}\;\; L^q(\Omega)$$

y

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)-\alpha(0)}{t} = W \,\text{en}\;\; L^q(\Omega)$$

Notamos con $V_t = \alpha(t)$ y $\lambda(t) = E(\alpha(t))$.
Sea u_t la autofunción asociada a $\lambda(t)$, i.e. $\|u_t\|_p = 1$ y

$$\lambda(t) = \int_\Omega |\nabla u_t|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_t(x)|u_t|^p \,\mathrm{d}x.$$

Lema 6.2.4 *Si $q > \frac{N}{p}$, λ es continua en 0, i.e.*

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t) = \lambda(0) = E(V_0) = E^*.$$

Demostración. Por la Proposición 6.1.2, existe $C = C(\Omega, q, p) > 0$ tal que

$$C > \int_\Omega |\nabla u_t|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_t(x)|u_t|^p \,\mathrm{d}x$$

y como $q > \frac{N}{p}$, por el Lema 3.3.14, dado $\varepsilon > 0$ existe D_ε tal que

$$\left| \int_\Omega V_t(x)|u_t|^p \,\mathrm{d}x \right| \le \varepsilon \|\nabla u_t\|_p^p + D_\varepsilon \|u_t\|_p^p$$

para todo t. Luego si tomo $\varepsilon < 1$ resulta que

$$\|\nabla u_t\|_p^p \le \frac{C + D_\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Entonces $(u_t)_{t\in(-1,1)}$ es acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y por lo tanto es acotada en $L^{pq'}(\Omega)$. Como

$$\lim_{t\to 0} V_t = V_0 \,\text{en}\;\; L^q(\Omega)$$

resulta que

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_t|^p \,\mathrm{d}x = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \int_\Omega |\nabla u_t|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_t(x)|u_t|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u_t|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_0(x)|u_t|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_t|^p \,\mathrm{d}x \\
&\ge \lambda(0) + \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_t|^p \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lambda(0) &= \int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V_0(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V_t(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (V_0(x) - V_t(x))|u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&\geq \lambda(t) + \int_\Omega (V_0(x) - V_t(x))|u_0|^p \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

entonces

$$\lambda(0) + \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_0|^p \, \mathrm{d}x \geq \lambda(t) \geq \lambda(0) + \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_t|^p \, \mathrm{d}x.$$

Luego,

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t) = \lambda(0).$$

♣

Lema 6.2.5 *Si* $q > \frac{N}{p}$, $\lambda(t)$ *es derivable en 0 y*

$$\dot{\lambda}(0) = \int_\Omega W(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x.$$

Demostración. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, como $(u_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, existe una subsucesión $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y

$$u_{t_{n_k}} \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{6.3}$$

$$u_{t_{n_k}} \to u \text{ en } L^p(\Omega). \tag{6.4}$$

$$u_{t_{n_k}} \to u \text{ en } L^{pq'}(\Omega). \tag{6.5}$$

Veamos que $u = u_0$.
Por (6.4) se tiene $\|u\|_p = 1$.
Usando (6.3), tenemos que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{t_{n_k}}|^p \, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x.$$

Por (6.5) y el Teorema 2.3.7

$$|u_{t_{n_k}}|^p \to |u|^p \text{ en } L^{q'}(\Omega),$$

y como

$$V_{t_{n_k}} \to V_0 \,\text{en}\ \ L^q(\Omega)$$

resulta que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega V_{t_{n_k}}(x)|u_{t_{n_k}}|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega V_0(x)|u|^p \,\mathrm{d}x.$$

Por el Lema 6.2.4

$$\lambda(0) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{t_{n_k}}|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_{t_{n_k}}(x)|u_{t_{n_k}}|^p \,\mathrm{d}x.$$

Entonces

$$\lambda(0) - \int_\Omega V_0(x)|u|^p \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{t_{n_k}}|^p \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x,$$

o sea

$$\lambda(0) \geq \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_0(x)|u|^p \,\mathrm{d}x.$$

Por lo tanto

$$\lambda(0) = \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_0(x)|u|^p \,\mathrm{d}x.$$

Y como existe una única autofunción asociada al autovalor $E(V_0)$ de norma uno y positiva en *c.t.p.*, resulta que $u = u_0$.
Entonces para toda $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, existe $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{t_{n_k}} \to u_0 \ \text{ en } \ L^{pq'}(\Omega),$$

por el Teorema 2.3.7,

$$|u_{t_{n_k}}|^p \to |u_0|^p \ \text{ en } \ L^{q'}(\Omega),$$

con lo cual

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{V_{t_{n_k}}(x) - V_0(x)}{t_{n_k}} \right) |u_{t_{n_k}}|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega W(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x.$$

Com para toda suceción que tiende a cero tengo una subsucesión convergente a $\int_\Omega W(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \left(\frac{V_t(x) - V_0(x)}{t} \right) |u_t|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega W(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x.$$

Recuerdo que

$$\lambda(0) + \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_0|^p \,\mathrm{d}x \geq \lambda(t) \geq \lambda(0) + \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))(x)|u_t|^p \,\mathrm{d}x$$

o lo que es lo mismo

$$\int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_0|^p \,\mathrm{d}x \geq \lambda(t) - \lambda(0) \geq \int_\Omega (V_t(x) - V_0(x))|u_t|^p \,\mathrm{d}x$$

por lo tanto

$$\int_\Omega \left(\frac{V_t(x) - V_0(x)}{t}\right)|u_0|^p \,\mathrm{d}x \geq \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t} \geq \int_\Omega \left(\frac{V_t(x) - V_0(x)}{t}\right)|u_t|^p \,\mathrm{d}x$$

entonces $\lambda(t)$ es derivable en 0 y

$$\dot{\lambda}(0) = \int_\Omega W(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x.$$

♣

Luego como λ tiene un máximo en 0 tengo que

$$\int_\Omega W(x)|u_0|^p \,\mathrm{d}x = 0 \,\forall W \in T_{V_0}S. \tag{6.6}$$

Proposición 6.2.6 $\mathrm{sop}(u_0) \subseteq \mathrm{sop}(V_0)$.

Demostración. Supongamos que es falso.
Sea $x \in \mathrm{sop}(u_0)$ tal que $x \notin \mathrm{sop}(V_0)$. Como el $\mathrm{sop}(V_0)$ es cerrado existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \subset \Omega \text{ y } B(x,r) \cap \mathrm{sop}(V_0) = \emptyset$$

entonces $W = \chi_{B(x,r)} \in T_{V_0}S$ ya que $\int_\Omega |V_0|^{q-2}V_0\chi_{B(x,r)} \,\mathrm{d}x = 0$.
Luego por (6.6)

$$\int_{B(x,r)} |u_0|^p \,\mathrm{d}x = 0,$$

entonces

$$u_0 = 0 \text{ en } c.t.p.\ B(x,r).$$

Como $x \in \mathrm{sop}(u_0)$, $u_0 \neq 0$ en un subconjunto de medida positiva de $B(x,r)$, lo que es una contradicción. Luego $\mathrm{sop}(u_0) \subseteq \mathrm{sop}(V_0)$. ♣

Observación 6.2.7 *Si* $V \in L^\infty(\Omega)$, *por el Principio Fuerte del Máximo* $u_0 > 0$, *y por lo tanto* $\mathrm{sop}(u_0) = \Omega$. Luego por la Proposición 6.2.6 tenemos que $\Omega \subset \mathrm{sop}(V_0)$.

Proposición 6.2.8 *Sean V_0 un potencial maximal y u_0 la autofunción asociado a $E(V_0)$. Entonces existe una constante k tal que*

$$|u_0|^p = k|V_0|^{q-1} \tag{6.7}$$

en Ω.

Demostración. Sean T_1 y T_2 dos subconjuntos del $\mathrm{sop}(V_0)$ definimos

$$W(x) = \frac{\chi_{T_1}(x)}{\int_{T_1} |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x} - \frac{\chi_{T_2}(x)}{\int_{T_2} |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x}.$$

Veamos que $W \in T_{V_0}S$. Como V_0 es un potencial maximal, sabemos que V_0 es positiva entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |V_0|^{q-2}V_0 W\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega V_0^{q-1} W\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\int_{T_1} V_0^{q-1}\,\mathrm{d}x}{\int_{T_1} V_0^{q-1}\,\mathrm{d}x} - \frac{\int_{T_2} V_0^{q-1}\,\mathrm{d}x}{\int_{T_2} V_0^{q-1}\,\mathrm{d}x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces por el Teorema 2.6.1 $W \in T_{V_0}S$. Ahora, usando (6.6), se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega W|u_0|^p\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\int_{T_1} |u_0|^p\,\mathrm{d}x}{\int_{T_1} |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x} - \frac{\int_{T_2} |u_0|^p\,\mathrm{d}x}{\int_{T_2} |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\int_{T_1} |u_0|^p\,\mathrm{d}x}{\int_{T_1} |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_{T_2} |u_0|^p\,\mathrm{d}x}{\int_{T_2} |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x}.$$

Luego, existe una constante k tal que

$$\frac{\int_{T} |u_0|^p\,\mathrm{d}x}{\int_{T} |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x} = k$$

para todo T subconjunto del $\mathrm{sop}(V_0)$. En particular si tomamos

$$T = \{x \in \mathrm{sop}(V_0) : k|V_0(x)|^{q-1} > |u_0(x)|^p\}$$

tenemos que

$$\int_T |u_0|^p\,\mathrm{d}x = k\int_T |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x$$

o sea que

$$k\int_T |V_0|^{q-1}\,\mathrm{d}x - \int_T |u_0|^p\,\mathrm{d}x = 0.$$

Como $k|V_0(x)|^{q-1} > |u_0(x)|^p$ para todo $x \in T$, la medida de T es cero.
De manera similar se ve que la medida de

$$\{x \in \mathrm{sop}(V_0) : k|V_0(x)|^{q-1} < |u_0(x)|^p\}$$

es cero.
Luego

$$|u_0|^p = k|V_0|^{q-1} \text{ en } \textit{c.t.p. sop}(V_0).$$

Por la Proposición 6.2.6

$$|u_0|^p = k|V_0|^{q-1} \text{ en } \Omega.$$

♣

De (6.7) tenemos una relación puramente algebraica entre el potencial maximal y su autofunción asociada. Notar que la ecuación del autovalor es homogénea de grado p en la autofunción, entonces puedo elegir la constante en (6.7) igual a 1, esto se logra tomando como atuofunción $\frac{u_0}{k^p}$ en lugar de u_0. Reemplazando en la ecuación (5.9) tenemos que la autofunción asociada al autovalor maximal satisfaces

$$-\Delta_p u + u^\alpha = Eu^{p-1} \tag{6.8}$$

donde E es el autovalor asociado al potencial maximal y $\alpha = \frac{pq-q+1}{q-1}$ y la ecuación puede ser escrita en términos de la autofunción asociada.
Una interesante consecuencia del Teorema 6.2.1 es, en estos términos, una demostración de existencia y ciertas propiedades de la solución de la ecuación (6.8). Más precisamente,

Corolario 6.2.9 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con frontera regular, $1 < p < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Para todo $\lambda > E(0)$, donde $E(0)$ es el autovalor principal del operador $-\Delta_p$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, el problema de autovalores no lineales*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^\alpha &= \lambda u^{p-1} \ \ en\ \Omega \\ u &> 0 \ \ en\ \Omega \\ u &= 0 \ \ en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{6.9}$$

tiene una solución en los siguientes casos:

1. *Si $1 < p < 2$, tomando $\alpha < \max\{\frac{2p-2}{2-p}, \frac{(p-1)N}{N-p}\}$.*

2. Si $p \geq 2$, tomando $\alpha > 1$.

Demostración. La existencia de un potencial V_0 maximizante de $-\Delta_p + V$ sujeto a $\|V\|_q = M$, para algún $M > 0$ es conocida del Teorema 6.2.1, con $\alpha = \frac{pq-q+1}{q-1}$. Si el autovalor maximal es $E^* = E(V_0)$, entonces la condición necesaria (6.8) se convierte en (6.9) con u igual a la autofunción asociada a E^* y $\lambda = E^*$.
El corolario quedara probado si vemos que E^* crece continuamente de $E(0)$ a ∞ cuando M va de 0 a ∞.
En la demostración del Teorema 6.2.3 mostramos que $E^*(\cdot)$ es estrictamente creciente, entonces nos resta demostrar la continuidad.
Notemos con V_0^M al potencial máximo asociado a $E^*(M)$. Sea $t > 0$, entonces

$$E(V_0^{M+t}) = E^*(M+t) \geq E^*(M).$$

Tomemos $V = \frac{M}{M+t} V_0^{M+t}$, notar que $\|V\|_q = M$, entonces $E(V) \leq E^*(M)$.
Dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_p = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u|^p \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{M}{M+t} V_0^{M+t}(x)|u|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M}{M+t}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_0^{M+t}(x)|u|^p \,\mathrm{d}x\right) \\
&\quad +(1 - \frac{M}{M+t}) \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{M}{M+t}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_0^{M+t}(x)|u|^p \,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo tenemos que

$$E(V) = E(\frac{M}{M+t} V_0^{M+t}) \geq \frac{M}{M+t} E(V_0^{M+t}) = \frac{M}{M+t} E^*(M+t)$$

entonces, por ser $E(V) \leq E^*(M)$,

$$\frac{M}{M+t} E^*(M+t) \leq E^*(M) \leq E^*(M+t). \tag{6.10}$$

Análogamente,

$$E^*(M-t) \leq E^*(M) \leq \frac{M-t}{M} E^*(M-t). \tag{6.11}$$

Entonces, pasando al limite en (6.10) y (6.11),

$$\lim_{t \to 0} E^*(M+t) = E^*(M).$$

♣

6.3. Potencial Minimal

En esta sección demostraremos que existe un $V_* \in B$ tal que

$$E(V_*) = \text{ínf}\{E(V) : V \in B\}$$

y lo caracterizaremos.

Teorema 6.3.1 *Si $q > \frac{N}{p}$, existe $V_* \in B$ que minimiza $E(V)$.*

Demostración. Sean $E_* = \text{ínf}\{E(V) : V \in B\}$ y $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ sucesión minimizante, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} E(V_n) = E_*.$$

Tenemos que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ y B es acotado entonces $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^q(\Omega)$ y $L^q(\Omega)$ es reflexivo, existe $V_* \in L^q(\Omega)$ y una subsucesión de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la cual también notaremos con $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$V_n \rightharpoonup V_* \, \text{en } L^q(\Omega).$$

Por el Teorema de Mazur (ver Yosida [24]) un conjunto cerrado y convexo en un espacio de Banach es cerrado débil, y entonces $V_* \in B$.
Veamos que $E_* = E(V_*)$
Por el Teorema 5.3.3 existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} E(V_n) &= \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx + \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \, dx \\ ||u_n||_p &= 1. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx + \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \, dx = E_*.$$

Por la Existe $C > 0$ que no depende de n tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx + \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \, dx \leq C.$$

Veamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $D_\varepsilon > 0$, que no depende de n, tal que

$$(1-\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - MD_\varepsilon \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx + \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \, dx \leq C$$

para todo n.
En efecto, como $q > \frac{N}{p}$, por el Lema 3.3.14 se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe D_ε tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x \right| &\leq \|V_n\|_q \left\{ \frac{\varepsilon}{M} \|\nabla u_n\|_p^p + D_\varepsilon \|u_n\|_p^p \right\} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla u_n\|_p^p + M D_\varepsilon \|u_n\|_p^p \end{aligned}$$

para todo n.
Entonces tenemos que

$$(1-\varepsilon) \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - M D_\varepsilon \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x \leq C$$

para todo n.
Luego $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $pq' < \frac{pN}{N-p}$ por ser $q > \frac{N}{p}$ tengo una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la cual también notaremos con $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $u_* \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_* \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \tag{6.12}$$

$$u_n \to u_* \text{ en } L^p(\Omega) \tag{6.13}$$

$$u_n \to u_* \text{ en } L^{pq'}(\Omega) \tag{6.14}$$

Por 6.13 tenemos que $\|u_*\|_p = 1$.
Por 6.14 y por el Teorema 2.3.7

$$|u_n|^p \to |u_*|^p \ \text{ en } \ L^{q'}(\Omega).$$

Como $V_n \rightharpoonup V_*$ en $L^q(\Omega)$ resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega V_*(x)|u_*|^p \,\mathrm{d}x.$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} E(V_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_n(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x = E_*$$

entonces

$$E_* - \int_\Omega V_*(x)|u_*|^p \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x \geq E(V_*)$$

luego

$$E_* \geq \int_\Omega |\nabla u_*|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V_*(x)|u_*|^p \,\mathrm{d}x \geq E(V_*).$$

Ósea que $E_* = E(V_*)$ y u_* es la autofunción asociada. ♣

Sea $q > \frac{N}{p}$ y consideremos el caso $B = \overline{B(0,M)} \subset L^q(\Omega)$, para simplificar las cuentas tomaremos $M = 1$. Es claro que B es convexo, cerrado y acotado.

Como una función cóncava sobre un convexo alcanza su mínimo en el borde, existe $V_0 \in \partial B$ tal que $E(V_0) = \min\{E(V) : V \in \partial B\} = \min\{E(V) : V \in B\}$. Además como $-|V_0| \leq V_0$ y $E(\cdot)$ es no decreciente podemos suponer que $V_0 \leq 0$.

Ahora trataremos de caracterizar V_0. Sea $\alpha : (-1,1) \to S$ diferenciable tal que

$$\alpha(0) = V_0 \text{ y } \dot{\alpha}(0) = W \in T_{V_0}S.$$

Observamos que

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = V_0 \text{ en } L^q(\Omega)$$

y

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} = W \text{ en } L^q(\Omega).$$

Notamos con $V_t = \alpha(t)$ y $\mu(t) = E(\alpha(t))$.
Sea u_t la autofunción asociada a $\mu(t)$, i.e. $\|u_t\|_p = 1$ y

$$\mu(t) = \int_\Omega |\nabla u_t|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega V_t(x)|u_t|^p \, \mathrm{d}x.$$

Lema 6.3.2 *Si $q > \frac{N}{p}$, μ es continua en 0, i.e.*

$$\lim_{t\to 0} \mu(t) = \mu(0).$$

Demostración. Análoga a la demostración del Lema 6.2.4. ♣

Lema 6.3.3 *Si $q > \frac{N}{p}$, $\mu(t)$ es derivable en 0 y*

$$\dot{\mu}(0) = \int_\Omega W(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x.$$

Demostración. Análoga a la demostración del Lema 6.2.5. ♣

Luego como μ tiene un mínimo en 0 tengo que

$$\int_\Omega W(x)|u_0|^p \, \mathrm{d}x = 0 \, \forall W \in T_{V_0}.S \tag{6.15}$$

Proposición 6.3.4 $\text{sop}(u_0) \subseteq \text{sop}(V_0)$.

Demostración. Análoga a la demostración del Lema 6.2.6. ♣

Proposición 6.3.5 *Sean V_0 un potencial minimal y u_0 la autofunción asociado a $E(V_0)$. Entonces existe una constante k tal que*

$$|u_0|^p = k|V_0|^{q-1} \tag{6.16}$$

en Ω.

Demostración. Análoga a la demostración del Lema 6.2.8. ♣

De (6.16) tenemos una relación puramente algebraica entre el potencial minimal y su autofunción asociada. Notar que la ecuación del autovalor es homogénea de grado p en la autofunción, entonces puedo elegir la constante en (6.16) igual a 1, esto se logra tomando como atuofunción $\frac{u_0}{k^p}$ en lugar de u_0. Reemplazando en la ecuación (5.9) tenemos que la autofunción asociada al autovalor minimal satisfaces

$$-\Delta_p u - u^\alpha = E u^{p-1} \tag{6.17}$$

donde E es el autovalor asociado al potencial minimal y $\alpha = \frac{pq-q+1}{q-1}$ y la ecuación puede ser escrita en términos de la autofunción asociada.
Una interesante consecuencia del Teorema 6.3.1 es, en estos términos, una demostración de existencia y ciertas propiedades de la solución de la ecuación (6.17). Más precisamente,

Corolario 6.3.6 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con frontera regular, $1 < p < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Para todo $\lambda < E(0)$, donde $E(0)$ es el autovalor principal del operador $-\Delta_p$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, el problema de autovalores no lineales*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - u^\alpha &= \lambda u^{p-1} \text{ en } \Omega \\ u &> 0 \text{ en } \Omega \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.18}$$

tiene una solución en los siguientes casos:

1. *Si $1 < p < 2$, tomando $\alpha < \frac{(p-1)N}{N-p}$.*
2. *Si $p \geq 2$, tomando $\alpha > 1$.*

Demostración. Análoga a la demostración del Corolario 6.2.9. ♣

Bibliografía

[1] W. Allegreto; Y. X. Huang: *A Picone's identity for the p-lapacian and applications*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Amplications, Vol. 32, No. 7, pp. 819-830 (1989).

[2] A. Anane: *Simplicité et isolation de la premiére valeur prope du p-lapacien avee poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305, pp. 725-728 (1987).

[3] D. Arcoya; J. I. Diaz; L. Tello: *s-shaped bifurcation branch in a quasi-linear multivalue modelarising in climatology*, J. Differential Equations, Vol. 150 (1), pp. 215-225 (1998).

[4] M. S. Ashbaugh; E. M. Harrell: *Maximal and minimal eigenvalues and their associated nonlinear equations*, J. Math. Phys. 28, 1770 (1987).

[5] C. Atkinson; K. E. Kalli: *Some bundary value problems for the Bingham model,* J. Non-Newtonian Fluit Mech, Vol. 41, pp. 339-363 (1992).

[6] H. Brézis: *Analyse functionnelle*, Masson Editeur (1983)(Trad. español, Alianza Editorial 1984).

[7] M. Cuesta: *Eigenvalue Problems for the p-Laplacian with Indefinite Weights*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2001, No. 33, pp. 1-9 (2001).

[8] J. Dieudonné: *Fondements de l'Analyse moderne*, Gauthier Villars (1963).

[9] N. Dunford; J. T. Schwartz: *Linear Operators. Parts I, II y III.* Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[10] L. Evans; R. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC.

[11] N. Fava; F. Zó: *Medida e Integral de Lebesgue*, Red Olimpica (1996).

[12] J. García Azorero; I. Peral Alonso: *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations 12, no. 12, pp. 1389-1430 (1987).

[13] J. García Azorero; I. Peral Alonso: *Comportement asymptotique des valeurs propres du p -laplacien*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 307, no. 2, pp. 75-78 (1998).

[14] D. Gilbarg; N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (1998).

[15] C. Goulaouic: *Calcul differential et Analyse Fonctionelle*, Cours de l'Ecole Polytechnique (1981).

[16] E. M. Harrell: *Hamilton operators with maximal eignvalues*, J. Math. Phys. 25, 48 (1984); 27, 419 (E) (1986).

[17] A. N. Kolmogórov; S.V. Fomín: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial Mir-Moscu (1975).

[18] J. L. Lions; E. Magenes: *Problèms aux limites non homogènes*, Dounod (1968).

[19] P. Malliavin: *Intégration et Probabilités. Analyse de Fourier et Analyse spectral*, Masson (1982).

[20] W. Rudin: *Function Analysis*, Mac Graw Hill (1984)(Trad. español, Reverte 1979).

[21] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, Mac Graw Hill (2^a edición 1974)(Trad. español, Alhambra 1979).

[22] N. S. Trudinger: *On Harnack Inequalites and Their Application to Quailinear Elliptic Equations*, Comm. on Pure and Applied Math., Vol. XX, pp. 721-747 (1967).

[23] R. Wheeden; A. Zygmund: *Measure and Integral*, Dekker (1977).

[24] K. Yosida: *Functional Analisis*, Springer (1980).