Matemática

Leandro M. Del Pezzo
ldelpezzo@utdt.edu

Teóricas– 1er. Semestre 2022

Fundamentos

Fundamentos

Conjuntos–Definición

Definición.

Un conjunto es una colección de objetos y estos objetos se denominan elementos del conjunto.

Fundamentos
Conjuntos-Definición

Definición.

- Si x es un elemento de un conjunto C decimos que x pertenece a C y notamos $x \in C$.
- Si x no es un elemento del conjunto C decimos que x no pertenece a C y notamos $x \notin C$.
- El conjunto que no tiene elementos se denomina conjunto vacío y se denota por $\emptyset$.

Fundamentos
Conjuntos-Operaciones

Definición.

Sean A y B dos conjuntos.

- La unión de A y B es el conjunto $A \cup B$ que consta de todos los elementos que están en A o en B.

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

- La intersección de A y B es el conjunto $A \cap B$ que consta de todos los elementos que están tanto en A como en B.

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Fundamentos

Conjuntos-Operaciones

Definición.

Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A esta incluido en B si todo elemento de A también pertenece a B. Notación $A \subseteq B$.

Fundamentos
Conjuntos-Operaciones

Observación.

Si A y B son dos conjuntos entonces

- $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.
- $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

Fundamentos

Conjuntos–Operaciones

Definición.

Sean A y B dos conjuntos. La resta de A menos B es el conjunto A menos B que consta de todos los elementos de A que no son elementos de B.

$$A \setminus B := \{x \in A \colon x \notin B\}.$$

Fundamentos
Conjuntos-Operaciones

Observación.

- Si $A \subseteq B$ entonces $A \setminus B = \emptyset$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \setminus B = A$.

Fundamentos
Los números

Comencemos por recordar los número naturales

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Otro conjunto importante de números con el que trabajaremos en clase es el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Observar que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Fundamentos
Los números

Los números racionales se construyen al formar cocientes con números enteros

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{-2}, \frac{3}{7}, 8 = \frac{8}{1}, -0.07 = \frac{-7}{100}.$$

En otras palabras, r es un número racional si existen dos números enteros m y n tales que $n \neq 0$ y

$$r = \frac{m}{n}.$$

Es decir que el conjunto de los números racionales es

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0 \right\}.$$

Fundamentos

Los números

Observación.

En la definición anterior n tiene que ser distinto de cero porque no se puede dividir por cero.

Notar que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Fundamentos

Los números

Sabemos que existen números que no pueden se escritos como cocientes de números enteros, por ejemplo

$$\sqrt{2}, e, \pi.$$

Estos números se denominan números irracionales.

El conjunto de todos los números es el conjunto de los números reales y se denota

$$\mathbb{R}.$$

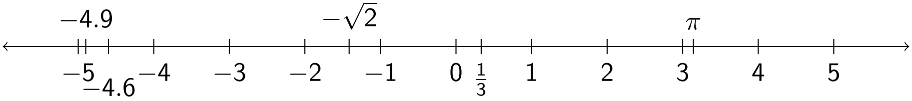
Observar que de la definición de $\mathbb{R}$ podemos inferir que

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Fundamentos

La recta numérica

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta.



Los números reales están ordenados. Decimos que a es menor que b si $b - a$ es un número positivo. Desde el punto de vista geométrico esto quiere decir que a queda a la izquierda de b en la recta numérica, por lo que escribimos $a < b$. Esto es lo mismo que decir que b es mayor que a y escribir $b > a$.

Fundamentos

La recta numérica

Notación.

En algunos casos escribimos $a \leq b$ (o $b \geq a$) que significa que $a < b$ o $a = b$ y se lee como "a es menor o igual que b".

Fundamentos

La recta numérica

Los conjuntos con los que vamos a trabajar más a menudo son los intervalos. Dados dos números reales a y b tales que a es menor que b tenemos los siguientes intervalos

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ Intervalo abierto.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ Intervalo cerrado.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\}$.
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x\}$.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\}$.
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Las operaciones básicas entre los números reales son: la suma, la resta, el producto y la división. A continuación vamos a listar la propiedades elementales para estas operaciones.

Propiedad (Propiedades conmutativas).

Sean a y b dos números reales, entonces

- $a + b = b + a$.
- $ab = ba$.

Cuando se suman o multiplican dos números, no importa el orden.

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Propiedad (Propiedades asociativas).

Sean a b y c tres números reales, entonces

- $(a+b)+c=a+(b+c)$. Cuando se suman 3 números, no importan cuales dos se suman primero.
- $(ab)c=a(bc)$. Cuando se multiplican 3 números, no importan cuales dos se multiplican primero.

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Propiedad (Propiedades distributiva).

Sean a b y c tres números reales, entonces

$$a(b+c) = ab + ac$$

Cuando se multiplica un número por la suma de otros dos, se obtiene el mismo resultado al multiplicar dicho número por cada uno de los términos y luego sumar los resultados.

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Propiedad.

- Elemento neutro para suma. El número 0 es especial para la suma ya que si a es un número real entonces

$$a + 0 = a.$$

- Inverso aditivo. Todo número real a tiene asociado un número real negativo $-a$ que cumple que

$$a + (-a) = 0.$$

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Observemos que la resta, operación inversa a la suma, puede escribirse como la suma de un número y el inverso aditivo del otro. Por definición:

$$a - b = a + (-b).$$

Propiedad.

Sean a y b dos números reales, entonces

- $(-1)a = -a$.
- $-(-a) = a$.
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- $-(a+b) = -a - b$.
- $-(a-b) = -a + b = b - a$.

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Propiedad.

- Elemento neutro para el producto. El número 1 es especial para el producto ya que si a es un número real entonces

$$1 \cdot a = a.$$

- Inverso multiplicativo. Todo número real distinto de cero a tiene un inverso multiplicativo, $\frac{1}{a}$ que tiene la siguiente propiedad

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Notemos que la división, operación inversa a la multiplicación, puede escribirse como la multiplicación de un número y el inverso multiplicaltivo del otro. Por definición:

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Fundamentos

Operaciones básicas de los números reales

Propiedad.

Sean a, b, c, d números reales.

- Si b y d son distintos de cero entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

- Si b, c y d son distintos de cero entonces $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.
- Si c es distinto de cero entonces $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
- Si b y d son distintos de cero y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$.

Funciones

Funciones
Nociones Básicas

En muchos casos una cantidad depende de otra. Por ejemplo

- El costo de enviar un paquete por correo depende del peso del mismo.
- El área de un círulo depende del radio del mismo.
- El precio de un artículo depende de la demanda del mismo

La idea es darle una estructura a este comportamiento, para esto introducimos la noción de función. Basicamente una función es una regla que relaciona dos conuntos.

Funciones

Nociones Básicas

Definición.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Una **función** f de A en B es una regla que a cada elemento de A le asigna <u>exactamente un elemento</u> de B.

Funciones

Nociones Básicas

Notación.

El conjunto A se denomina el **dominio** de f y se denota

$$D(f) = \mathrm{Dom}(f) = A.$$

Mientras que el conjunto B se denomina **codominio** de f y se denota

$$\mathrm{Cod}(f) = B.$$

Denotamos a una función f de A en B como $f\colon A \to B$, y si $a \in A$, $f(a)$ indica el único elemento de B que la función f le asigna al elemento $a \in A$.

Funciones

Nociones Básicas

Definición.

Dada una función $f : A \to B$ se define la imagen de f como el conjunto

$$\operatorname{Im}(f) = I(f) = \{y \in B : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Observación.

Si $f : A \to B$ es una función entonces $\operatorname{Im}(f) \subseteq B$.

Funciones

Nociones Básicas

Definición.

Sea f una función dada por una expresión algebraica. Definimos el dominio natural de f como el conjunto de números reales para los cuales la expresión tiene sentido (a menos que se nos mencione explícitamente otro) es decir

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \text{ está definida}\}.$$

Mientras que el $\mathrm{Cod}(f) = \mathbb{R}$

Funciones

Nociones Básicas

Observación.

Sean $f: A \to B$ y $g: C \to B$ dos funciones. Entonces $f = g$ si y solo si

$$A = C \text{ y } f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in A = C.$$

Funciones

Nociones Básicas

Definición.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ definimos

- El conjunto de ceros o raíces de f

$$C_0(f) := \{x \in \mathrm{Dom}(f)\colon f(x) = 0\}.$$

- El conjunto de positividad de f

$$C_+(f) := \{x \in \mathrm{Dom}(f)\colon f(x) > 0\}.$$

- El conjunto de negatividad de f

$$C_-(f) := \{x \in \mathrm{Dom}(f)\colon f(x) < 0\}.$$

Funciones

Nociones Básicas

Observación.

$C_0(f), C_+(f)$ y $C_-(f)$ son subconjuntos del dominio de f. Además

- $C_0(f) \cup C_+(f) \cup C_-(f) = \mathrm{Dom}(f)$;
- $C_+(f) \cap C_-(f) = \emptyset$, $C_+(f) \cap C_0(f) = \emptyset$, y $C_-(f) \cap C_0(f) = \emptyset$.

Funciones

Nociones Básicas

Recuerdo.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac \geq 0$ entonces

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El Plano

El Plano

Definición

Definición.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (o plano) es el conjunto de todo los pares de números reales $(x; y) \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 := \{(x; y) \colon x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

El Plano

Gráfico de una función

Definición.

Dada una función $f : A \to B$ se define el grafico de f como el conjunto

$$\mathrm{Graf}(f) := \{(a; f(a)) : a \in D(f)\}.$$

El Plano

Gráfico de una función

Criterio (Criterio de recta vertical).

Una curva en el plano es el gráfico de una función si toda recta vertical toca a lo sumo una vez a la curva.

Rectas y Funciones Lineales

Rectas y Funciones Lineales

La pendiente de una recta

Definición.

La pendiente de una recta L que no es vertical y pasa por los puntos $P = (x_1; y_1)$ y $Q = (x_2; y_2)$ es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

Observación.

La pendiente de una recta vertical no está definida.

Rectas y Funciones Lineales

La pendiente de una recta

En general cualquier recta no vertical L se puede escribir de la siguiente manera

$$L = \{(x; y) \colon y = mx + b\}.$$

Decimos que $y = mx + b$ es la ecuación de la recta L, mientras que b se denomina la ordenada al origen de L.

Rectas y Funciones Lineales

Definición.

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la siguiente expresión algebraica

$$f(x) = mx + b \quad \text{donde } m, b \in \mathbb{R}$$

se denomina función lineal.

Rectas y Funciones Lineales

Propiedad.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función lineal entonces f a la sumo tiene un solo cambio de signo.

Rectas y Funciones Lineales

Sea $f(x) = mx + b$ una función lineal. Si $m \neq 0$ entonces

- $C_0(f) = \{-\frac{b}{m}\}$.
- Si $m > 0$ entonces
$$C_+(f) = (-\tfrac{b}{m}, +\infty) \quad \text{y} \quad C_-(f) = (-\infty, -\tfrac{b}{m});$$
- Si $m < 0$ entonces
$$C_+(f) = (-\infty, -\tfrac{b}{m}) \quad \text{y} \quad C_-(f) = (-\tfrac{b}{m}, +\infty).$$

Rectas y Funciones Lineales

Sea $f(x) = mx + b$ una función lineal. Si $m = 0$ tenemos tres posibidades:

- Si $b > 0$ entonces $C_0(f) = C_-(f) = \emptyset$ y $C_+(f) = \mathbb{R}$;
- Si $b < 0$ entonces $C_0(f) = C_+(f) = \emptyset$ y $C_-(f) = \mathbb{R}$;
- Si $b = 0$ entonces $C_0(f) = \mathbb{R}$ y $C_+(f) = C_-(f) = \emptyset$.

Funciones cuadráticas

Funciones cuadráticas

Definición.

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la siguiente expresión algebraica

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{(forma polinomica)}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se denomina una función cuadrática. El valor a se llama coeficiente principal y el valor c coeficicnete independiente.

Funciones cuadráticas

Definición.

Una función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ puede expresarse de la siguiente forma

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v \quad \text{(forma canónica)}$$

donde $(x_v; y_v)$ es el vértice de la parábola.

Funciones cuadráticas

Observación.

Sea $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ una función cuadrática.

- Si $a > 0$ entonces $Im(f) = [y_v, +\infty)$;
- Si $a < 0$ entonces $Im(f) = (-\infty, y_v]$.

Funciones cuadráticas

Propiedad.

Una función cuadrática a lo sumo tiene dos cambios de signo.

Tenemos una formula para hallar las raíces de una función cuadrática.

Propiedad.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Si $b^2 - 4ac \geq 0$ entonces

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Funciones cuadráticas

Propiedad.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ entonces

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad y_v = f(x_v) = -\frac{b - 4ac}{4a}.$$

Además si r_1 y r_2 son dos raíces de f entonces

$$x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Funciones cuadráticas

Definición.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática. Si r_1 y r_2 son dos raíces de f entonces $f(x)$ puede expresarse de la siguiente forma

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \quad \text{(forma factorizada).}$$

Operaciones de funciones

Operaciones de funciones

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ están definidas como sigue

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) & \mathrm{Dom}(f+g) &= D(f) \cap \mathrm{Dom}(g);\\
(f-g)(x) &:= f(x) - g(x) & \mathrm{Dom}(f-g) &= D(f) \cap \mathrm{Dom}(g);\\
(f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) & \mathrm{Dom}(f \cdot g) &= \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g);\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} & \mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) &= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)\colon g(x) \neq 0\}.
\end{aligned}
$$

Funciones homográficas

Funciones homográficas

Definición.

Sean a, b, c y d cuatro números reales tales que $c \neq 0$ y $ad \neq bc$. Una función f dada por la expresión algebraica

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

se denomina una función homográfica.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

Funciones homográficas

Propiedad.

Sean a, b, c y d cuatro números reales tales que $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, y la función homográfica

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Entonces

$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{a}{c} \right\}.$$

Además si $a \neq 0$ entonces

$$C_0(f) = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Funciones homográficas

Definición.

Sean a, b, c y d cuatro números reales tales que $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, y

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Definimos el eje horizontal de f como

$$\left\{(x;y) : y = \frac{a}{c}\right\}$$

y el eje vertical de f como

$$\left\{(x;y) : x = -\frac{d}{c}\right\}.$$

Función raíz cuadrada

Función raíz cuadrada

Definición.

Sean a, b dos números reales, con $a \neq 0$. Una función f definida por la siguiente expresión algebraica

$$f(x) = \sqrt{ax + b}$$

Se denomina función raíz cuadrada.