Logística

Juan Pablo Pinasco

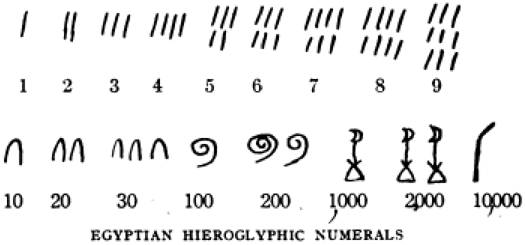
Departamento de Matematicas
FCEyN - UBA

2018

Parte I

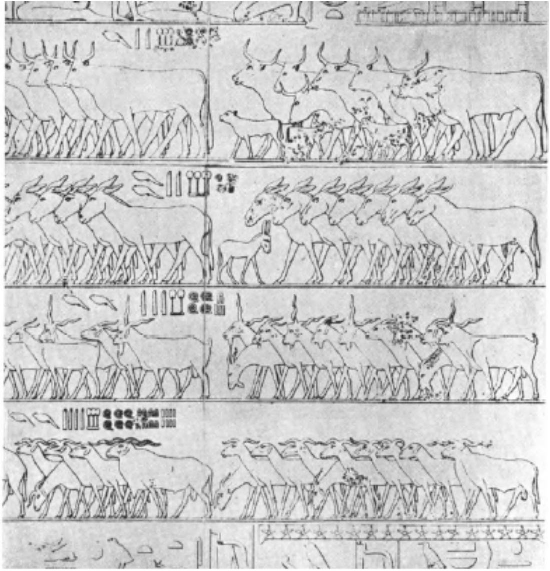
Antigüedad

Numeración en base diez, jeroglíficos



100 es una cuerda de medicion, de cien unidades
1000 una flor de loto
10000 un dedo
100 mil es un renacuajo
1 millón es un hombre con los brazos abiertos

Inventario en una tumba



37x11 y 407/37

$$\begin{array}{rr|rr} 37 & 1 & 37 & 1 \\ 74 & 2 & 74 & 2 \\ 148 & 4 & 148 & 4 \\ 296 & 8 & 296 & 8 \\ & & 594 & 16 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 37 \times 11 &= 37 \times (1 + 2 + 8) \\ &= 37 + 74 + 296 \\ &= 407 \end{aligned}$$

La división es igual, me fijo cuando me pasé, le resto el anterior y sigo reduciendo.

Parte fraccionaria

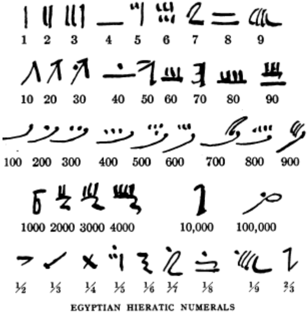
Usaban tambien potencias de 2 (negativas) cuando la división no era entera.

Curiosidad: todas sus fracciones eran de la forma $1/n$, o el $2/3$.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{2}{3}\frac{1}{12}$$

(sin símbolo de suma)

Hieráticos (=sagrados)



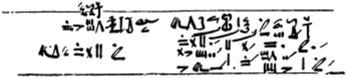
Los sacerdotes tenían un sistema mas avanzado, se usó hasta el s. III dC.

Operaciones con fracciones

$37 \times 11\frac{5}{8}$

$$\begin{array}{rrcrr} 37 & 1 & || & 18\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 74 & 2 & || & 9\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 148 & 4 & || & 4\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 296 & 8 & || & & \end{array}$$

Como $11\frac{5}{8} = 1 + 2 + 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, sumando los de 1, 2, 8, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$, queda $430\frac{1}{8}$.



ALGEBRAIC PROBLEM FROM THE AHMES PAPYRUS

Read from right to left, to the central blank space. First line: unknown and its seventh makes 19.

Just at the right of the central blank space $2\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$ is multiplied by 7, by taking the number itself, the double ($4\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$), and the double of the double ($9\frac{1}{2}$). These added give the value of the unknown.

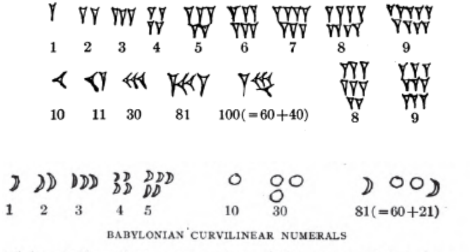
At the extreme top is the Egyptian symbol for the unknown quantity, our x. Under it is $16\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$ which when $\frac{1}{7}$ of it is added, $2\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$, gives 19.

La incógnita y su séptimo hacen 19

$$\begin{array}{rr} 2\frac{1}{4}\frac{1}{8} & 1 \\ 4\frac{1}{2}\frac{1}{4} & 2 \\ 9\frac{1}{2} & \end{array}$$

7 veces $2\frac{1}{4}$ suman $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$, que es la incógnita. Sumado con su séptima parte $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$, da 19.

Babilonia


1 2 3 4 5 6 7 8 9
10 11 30 81 100(=60+40) 8 9
1 2 3 4 5 10 30 81(=60+21)
BABYLONIAN CURVILINEAR NUMERALS

Babilonia

Es una mezcla de decimal y sexagesimal.

No se conservan textos largos, solo tabletas sueltas.

Una tiene una tabla de productos, la tabla del 18. Están 18×1,... hasta 18×20, y luego salta a 18×30, 18×40 y 18×50. Los intermedios los obtendrían sumando.

Se encontraron simbolos especiales para el 600, 3600 y 216000.

En la época de Tales los números eran

$$\begin{array}{ccr} | & 1 & \\ \Gamma & 5 & \pi\epsilon\nu\tau\epsilon \\ \Delta & 10 & \delta\epsilon\kappa\alpha \\ H & 100 & \epsilon\kappa\alpha\tau o\nu \\ X & 1000 & \chi i\lambda i\alpha \\ M & 10000 & \mu\nu\rho i\alpha \end{array}$$

Cerca del 500 aC se reemplazan por otros donde los dígitos del 1 al 9, las decenas del 10 al 90, y las centenas del 100 al 900 se representan con una letra cada uno.

El sistema es similar al que usaban los hebreos y los árabes, usado hasta el 900 dC. (en uso todavía entre cabalistas).

Se les colocaba una línea arriba para distinguirlos de palabras.

Griegos

Según Platón, distinguían entre *aritmética*, la teoría de números, y la *logística*, “útil en la vida y los negocios”, y estudiaban los métodos egipcios para multiplicar, dividir, y descomponer fracciones.

Esta división continúa en el s. V dC, según Proclo.

Romanos

Mas conocidos, salvo que $1000 = \Phi$, y 500 era la mitad, una D pero con una barra. M se refería a una milla, mil pasos.

Menos conocido, $1000000 = |\bar{X}|$, $50 = \perp$. 100 000 era una especie de candelabro invertido con 7 brazos (y 50 000 era la mitad).

También escribían $80 = XXC$, $800 = CC\Phi$.

Se ven rastros en latín, 18 es *duo de viginti*.

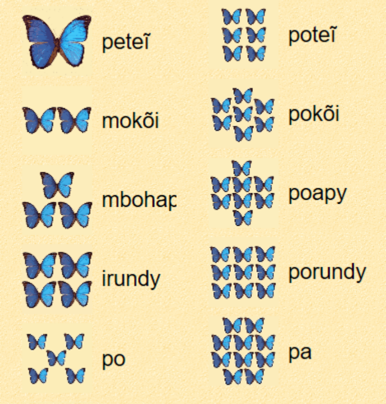
América

Muchos no contaban más que hasta 2 o 3,

- Abipones (Chaco), Yonoamas (Venezuela).
- Kamilaroi (Australia)

América

Los Bakairi, en el Caribe, lo reflejan. Los guaraníes, en cambio, tenían un sistema mucho más complejo:



América

Los números sirven para comparar distancias entre idiomas, por ejemplo:

German	eins	zwei	drei	vier	funf
Dutch	een	twee	drie	vier	vijf
English	one	two	three	four	five
Hebrew	echad	shtayim	shalosh	arba	chamesh
Arabic	wachid	ithnan	thalatha	arba'a	chamsa
Maltese	wiehed	tnejn	tlieta	gherba	hamsa
Ojibwe	bezhig	niizh	niswi	niiwin	naanan
Algonquin	pejig	nìj	niswi	new	nànan
Cree	peyak	nîso	nisto	newo	nîyânan

América

Los Mayas, Aztecas, y muchos pueblos de México, costa oeste de Norteamérica, y Centroamérica usaban la base 20. Un punto era 1, y una raya era 5. La notación Maya era posicional, con el cero. Los números se escribían verticalmente.

En muchos lenguajes de la zona, 20 era *hombre*, y 5 *mano*.

Los Incas usaban base 10 (hay indicios de una base 40), mientras que en Norte y Sudamérica, la mayoría usaba base 4.

Parte II

Medioevo-Renacimiento

Dígitos

Noviomagus, *De Numeris*, Colonia 1544.

Similares en Recorde, y Luca Pacioli (1494).

Antes, en Beda el Venerable $\sim$ 750 dC.

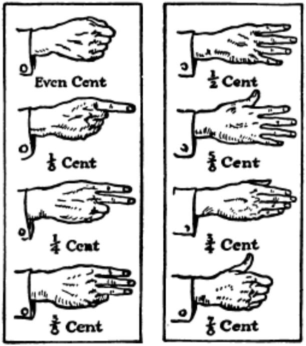
Dígitos

Hay sistemas de numeración completamente diferentes basados en los dedos, las manos, etc.

Todavía se usan como códigos en deportes, en los lenguajes por señas, y se usan en algunas bolsas de valores.

Googleen "trading pit hand signals". El Chicago Board of Trade, en funcionamiento desde 1848 (mercado de granos, soja, futuros, etc.) realiza muchas de estas transacciones mediante señales con algunos dedos que indican cuántos centavos subir.

Dígitos



Even Cent
$\frac{1}{8}$ Cent
$\frac{1}{4}$ Cent
$\frac{3}{8}$ Cent
$\frac{1}{2}$ Cent
$\frac{5}{8}$ Cent
$\frac{3}{4}$ Cent
$\frac{7}{8}$ Cent

Abacos

Romanos: columnas para I, V, X,... A veces para números intermedios si eran frecuentes. Incluso las piedras podían estar numeradas del 1 al 9.

El Papa Gerberto (asume en 999, antes era matemático) tenía uno de 27 columnas, pese a que también utilizaba los dígitos arábigos.

Cuentas en hilos verticales, cada hilo representa una cifra en base 10 del número.

Muchos de los métodos se han perdido, pero aún hoy los orientales son rápidos en el uso del ábaco para cálculos de toda clase.

Antes del ábaco, utilizaban palitos para representar los números, tanto en China como en Korea y Japón.

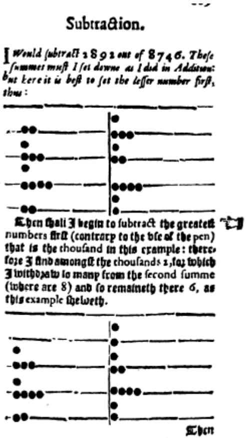
Europa

El ábaco europeo tenía líneas paralelas horizontales, y una cuenta en una línea representaba cinco unidades de la línea anterior

Las cuentas se llamaban *jetons* en francés, *projectilia* o *calculi* en latín. Hoy dá serían fichas, cospeles, tokens.

Ejercicio

Robert Recorde's explanation of subtraction, employing counters. At the right is represented 8746; 1 is on the lowest line and 5 in the space above it, represented by one counter there; four counters on the second line give 40; two on the third line for 200, with one above for 500; three counters on the fourth line for 3000, and a counter in the space above for 5000.
At the left, 2892; below, the first step in the subtraction has been performed.



Subtraction.

I Would subtract 2892 out of 8746. These summes must I set downe as I did in Addition: but here it is best to set the lesser number first, thus:

Then shall I begin to subtract the greatest numbers first (contrary to the use of the pen) that is the thousand in this example: therefore I find amongst the thousands 2, for which I withdraw so many from the second summe (where are 8) and so remaineth there 6, as this example sheweth.

Then

Robert Recorde.

Los ingleses usaban un tablero, *checkerboard*, como los de ajedrez (un juego similar existe desde el s V dC, mencionado en el *Maginobion*).

De allí se derivan las palabras chequear, y cheque.

Cifras

El siguiente paso fue hacer las cuentas en base 10, tal como se hacen hoy. Pero el paso clave para hacerlas fue la introducción del cero.

- En Babilonia se usó un símbolo para representar una cantidad nula.
- Los griegos usaron la inicial de “vacante”, cuando querían indicar que una cantidad no estaba.
- En el s. VIII, en latín, se usaba un punto para indicarla.
- Los mayas también tenían un símbolo para el cero, pero cuando los europeos lo descubren, ya no es novedad para ellos.

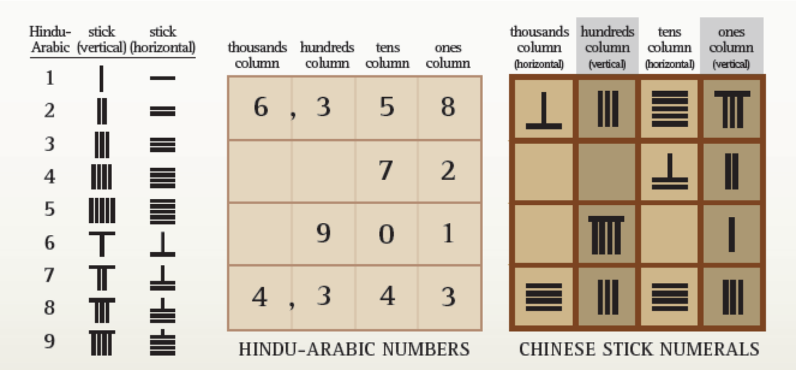
Cifras

Los hindúes usaron el cero para la notación en base 10, pero no usando un nuevo símbolo para el 10, sino "corriendo" el 1, indicando el lugar vacante, y luego completando ahí con las unidades.

En el ábaco, es completar una línea y retirarlas poniendo una en la siguiente, e indicaron con un punto o un pequeño círculo que esa línea estaba vacante, *sunya* en sánscrito.

Los árabes traducen *vacante* como *sifr*, y en la traducción al latín usaron su sonido y no su significado, pasó como *cyfra*, *tziphra*, *zephirum*, y otras.
Lentamente pasó a *cero* y *cifra*, y versiones similares en los distintos lenguajes europeos.

China


Hindu-Arabic
stick (vertical)
stick (horizontal)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
thousands column
hundreds column
tens column
ones column
6 , 3 5 8
7 2
9 0 1
4 , 3 4 3
HINDU-ARABIC NUMBERS
thousands column (horizontal)
hundreds column (vertical)
tens column (horizontal)
ones column (vertical)
CHINESE STICK NUMERALS

Hindúes

- Brahmagupta s VII dC, 20 operaciones y 8 determinaciones ($\rightarrow$ luego *especies*, en latin).
- Mahavir, 925 dC: muchos más ejemplos, cuentas estéticas (multiplicar 142857143 por 7).
- Bhaskara s XII dC, problemas clásicos, Lilavati.

Los griegos traducen las obras griegas, pero también las hindúes, al siríaco:

- Severus Sebokht (575-667), Obispo de la Iglesia Ortodoxa Siríaca, traduce al siríaco a Aristóteles, y la primera referencia a los numerales fuera de la India aparece en sus obras.

Desde ahí, los árabes traducen del siríaco o del griego al árabe.

Más árabes

Entre el s. IX y el XV dC aparecen textos de aritmética entre los árabes que introducen los nuevos numerales y la forma de operar con ellos.

Los difunden, dado que los usan en las operaciones comerciales, y son más fáciles las operaciones con ellos.

Recordemos que desde el s. XI los árabes controlaban la ruta del comercio con Asia, y tenían fuerte presencia en el Mediterráneo.

Más árabes

Hubo otros caminos:

- Rabbi Ibn Ezra (1089-1167), nacido en Navarra, España. Emigra por la persecución a los judíos de los Almohadíes, viaja a Egipto, Palestina, Italia, luego Francia, Londres, y vuelve a Francia.
  Escribe en hebreo, principalmente sobre religión, y tres tratados sobre los números y fracciones decimales hindúes. También escribe tablas astronómicas, sobre el calendario, el astrolabio, y una decena de obras de astrología.

Los árabes habían entrado en España en el 772.

Traducciones

- Raimundo de Toledo, monje benedictino, crea la escuela de traductores en la catedral, Arzobispo de 1125 al 1152.
- Gerardo de Cremona (1114-1187, italiano) viaja a Toledo para traducir el Almagesto de Ptolomeo.
  Termina traduciendo 87 obras, entre ellas *Los Elementos* de Euclides, *Sobre el Cielo* de Aristóteles, *Sobre la medida del círculo* de Arquímedes, y *sobre el cálculo por al-jabr y al-muqabala* de al-Khwarizmi.
- Alfonso X (1221-1284), el Sabio. Crea una escuela en su corte de Castilla, y traducen al castellano (incluso los que están en latín).
- Robert de Chester es el responsable de traducir "jb" por *sinus*.

Tratados

Las traducciones eran difíciles de leer, entonces aparecen tratados originales:

- Fibonacci, o Leonardo de Pisa (c. 1175 - c. 1250) *Liber Abaci*, de 1202. Aplica el sistema decimal a la contabilidad, conversión de monedas y medidas, cálculo de intereses, etc. Influye sobre comerciantes y banqueros de Italia y Alemania.
- Johannes de Sacrobosco / John of Holywood (c. 1195 - c. 1256), *Algorismus*, o *De Arte Numerandi*, entre 1225 y 1230, se convierte en el texto usual en las universidades.
- Alexandre de Villedieu (c. 1175 - c. 1240), Normandía. *Algorismus*, o *Carmen de algorismo*, poema. "Extrahe radicem semper sub parte sinistra" [ver archivo].

Textos

En el s XVI comienzan a aparecer tratados originales de aritmética en lengua vulgar (inglés, español, francés, holandés).

Se destacan la *Summa* de Luca Pacioli (1494), *Ars Magna* de Cardano (1545), *Arithmetique* de Trenchant (1558), *L' Algebra* de Bombelli (1472), *Tafelent van Interest*, *The Thiende* y *L Arithmetique* de Simon Stevin (1556, 1558, 1580)

Los primeros textos de América son de Juan Diez Freyle, de 1556, y de Pedro Paz de 1623, ambos de México.

Parte III

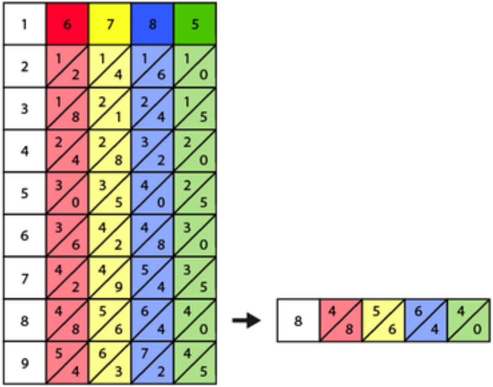
Moderna-Contemporánea

Dos problemas generaron nuevos cambios:

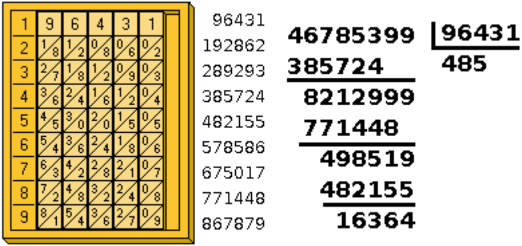
- había que multiplicar o dividir números cada vez más *grandes*: la solución serían los logaritmos [Neper 1614, Burgi 1618, Briggs]
- había que hacer *muchas* cuentas: aparecen formas automáticas de cómputo, *Napier bones*, la regla de cálculo, y la máquina de calcular.

Napier bones

Eran varillas con un dígito arriba, y luego la tabla de multiplicar asociada debajo. Si se quería multiplicar un número de varias cifras, se colocaban las varillas correspondientes a los dígitos y luego se leían en diagonal los productos buscados.



Napier bones



Una varilla extra permitía extraer raíces cuadradas.

William Oughtred (entre 1620 y 1630) inventa la regla de cálculo agregando otras varillas con una escalas logaritmicas.

La regla típica tiene una varilla con los números, otras dos con los logaritmos del número, y se suma desplazando la 3ra varilla sobre la 2da, buscando el punto correspondiente a la suma en la 1ra (el producto).

A principios del s XIX aparecen escalas log-log (para trabajar con potencias, en especial fraccionarias), y reglas con escalas trigonométricas y otras varillas con sus logaritmos.

Calculadoras mecánicas

- Wilhelm Schickard (1624) diseña la primera, pero estaba incompleta, tenía errores cuando arrastraba más de un dígito (99+1).
- Pascal (1642) construye una que funciona, con discos engranados que arrastraban de una posición a la siguiente al llegar a diez.
- Leibniz (1670) la perfecciona, y sirve para multiplicar y dividir.

Wang Lab, la primera en 1965. Se especializaron en software de edición e impresión, y fueron destrozados por IBM y HP, entraron tarde al mercadode las computadoras personales.

Hewlett-Packard produjo la siguiente en 1968, la primera que calculaba funciones trigonométricas, hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas, basada en las subrutinas CORDIC. Rápidamente fue mejorandolos modelos, que pasaron de 400 dolares en 1972, a 25 en 1976.

Revisen CORDIC en wikipedia, el algoritmo para el coseno y seno de un ángulo da una cifra binaria por iteración. Comienza con el vector (1,0), y va multiplicando por matrices de rotación con ángulos γ_i tales que su tangente es $\pm 2^{-i}$, lo cual permite normalizar fácil. El método fue desarrollado para los bombarderos.

Computadoras

Finalmente, las computadoras.

Aparecen en los '40, durante la WW II, en USA, Inglaterra y Alemania.

Hasta los '60, eran usadas sólo en aplicaciones científicas y militares, desde entonces han ido ocupando más espacio, primero en grandes empresas, luego en el comercio y la contabilidad, la administración pública, y hoy llegan a todos los niveles, desde el entretenimiento hasta la educación.

Computadoras

Entre 1830 y 1870 Charles Babbagge propone la *máquina analítica*, mejora de la *máquina diferencial* para calcular tablas, inspirado en la automatización de los telares en la revolución industrial.

Ada Lovelace traduce una descripción en francés y agrega comentarios.

En 1890 Herman Hollerith inventa una máquina tabuladora, utilizada para el censo en USA.

Esperaban 10 años de trabajo para procesar los datos, y sólo tarda 6 semanas. Funda una empresa que luego se fusiona con otras y hoy es IBM.

Leonardo Torres Quevedo (1852-1936) construirá autómatas que juegan ajedrez, un *telekino* (control remoto), y el aritmómetro, con una máquina de escribir para entrar los datos, un sistema de engranajes para calcular, y otra máquina de escribir para los resultados. Opera en punto flotante, una de las innovaciones más recientes en sistemas de notación.

Computadoras

En el s XX, y motivados por la WW II, aparecen varias máquinas:

- Las *Bombas*, ideadas y construidas en Polonia, 1939, luego en Inglaterra en 1942. Leía caracteres, no era programable.
- *Konrad Zuse, Z1*, Alemania, 1938, *Z3*, 1941; *Z4* Marzo de 1945. Operaba en binario, por punto flotante.
- Colossus, Inglaterra 1943.
- Harvard Mark 1, IBM USA, 1944
- ENIAC, USA 1946.

...y el resto es historia conocida, o futurología.

Parte IV

Tablas

Acá habría que desarrollar un poco ese tema, no es la logística pero sí un gran auxiliar.

- Tabletas babilónicas, como Plimpton 322.
- Almagesto: contiene tablas trigonométricas para calcular las posiciones astronómicas.
- Burgi, Briggs, Napier: tablas logarítmicas.
- Tablas de senos y cosenos, funciones de Bessel, y otras, hasta fines del s. XX.
- RAND Corporation ('40s): tablas de números aleatorios.

Bibliografía

Laura Redish, Director. Native Languages of the Americas
`http://www.native-languages.org/numbers.htm`

M. Woods, M. Woods. *Ancient computing technologies*. Twenty First Century Books, 2011.