Euler

Juan Pablo Pinasco

Departamento de Matematicas
FCEyN - UBA

2018

Lean a Euler, lean a Euler, es el maestro de todos nosotros.

Dicen que dijo Pierre Simon de Laplace.

Euler archive
Math Association of America,
http://eulerarchive.maa.org/index.html

Tiene todo en el idioma original (latin, francés, o alemán). Hay material suplementario y traducciones de muchos.

Son 866 items, los últimos notas, y extractos de cartas. Las cartas están aparte.

Enestrom index:

http://eulerarchive.maa.org/index/enestrom.html
http://eulerarchive.maa.org/enestrom.php?topic=all

Material adicional: How Euler Did it, de Ed Sandifer
http://eulerarchive.maa.org/hedi/index.html
Son unas 60 columnas, en cada una explica uno o más trabajos de Euler.

Especiales

Mecánica E 15, E 16
Luna E 187, E 418
Artillería E 77 [la *no traducción* del tratado de Benjamin Robins]
Navegación E 110
Veleros E 426
Fluídos E 375, E 396

(largos, son *libros*)

Cuerpo rígido: E 289 (rotaciones, ejes de Euler, inercia)
Planos inclinados: E 160, E 161
Rozamiento: E 143, E144, E 257, E 382, E 585 [de su *no traducción* de la artillería]
Péndulo: E 439, E 468, E 503, E 516, E 533, E 534, E 544,
Vibraciones de un tambor: E 82, E 302

Elasticidad y fluidos

Oscilaciones: E 8, E 40, E 49, E 126
Cuerpos flexibles: E 159, E 174
Sonido, música: E 2, E 33, E 151, E 314, E 315
Fluidos: E 225-227
Cuerda vibrante: E 119, E 136, E 140, E 286, E 287, E 317, E 318, E 439-432

E 201, E 313: juegos de azar.
E 738: combinatoria.
E 338, E 412, E 600, E 812, E 813: loterías.
E 334, E 335: tablas de mortalidad y seguros de vida.
E 448, E 628: errores de medición.

Cartas con Federico el Grande:
http://cerebro.xu.edu/math/Sources/Euler/index.html

E 167: un problema difícil de Fermat.
E 445: $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ para todo n natural.
E 241: todo número de forma $4n + 1$ es suma de dos cuadrados.
E 152, E 175: $S(n)$, suma de los divisores de n (números amigos).
E 407: existencia de matrices ortogonales (el término matriz es de Sylvester, 1850; las ortogonales las usó Hermite en 1854).

E 247: series divergentes.
E 41, E 63: Basel, $\sum \frac{1}{n^2}$.
E 72: función Zeta de Riemann (antes de que nazca Riemann). Y que $\sum 1/p$ sobre los primos diverge (probando el Teorema de los números primos antes de que nazca Gauss).
E 25: fórmula de sumación de Euler-MacLaurin
E 47: constante γ de Euler-Mascheroni.

E 212: Fundamentos del cálculo diferencial.
E 10: introduce e para resolver una ecuación ordinaria (el p-laplaciano).
E xxx: casi todos los de oscilaciones, cuerda vibrante, elasticidad...
E 332: mecánica de fluídos, líneas de flujo.
E 339: Series de Fourier (antes de que nazca Fourier).
E 71, E 101: irracionalidad de e.
E 63: otro enfoque para Basel, $\sum 1/n^2$.

Raros

E 634: oscilaciones de una superficie colgada agitada por el viento (cómo se mueve una sábana en la soga de colgar la ropa)
E 262: caso particular del Teorema de Lagrange para grupos y demostración del Pequeño Teorema de Fermat ($a^{p-1} \equiv 1(p)$).
E 693: centro de similitud, idea de punto fijo.
E 333 curvatura de superficies.
E 34: fuego.
E 150: Meditationes in quaestionem observationibus temporis momentum determinandi
E 340: eco.
E 411: explosivos.

Raros

E 393: más interesante por las conexiones que hace que por el resultado [esto pasa muchas veces].
E 230, 231: $V - E + F = 2$.
E 309: recorrido de un caballo de ajedrez.
E 530: cuadrados mágicos.
E 326: se equivoca.

Un par de ejemplos

Análisis, tres libros:

- Pre-cálculo (series)
- Cálculo diferencial.
- Cálculo integral.

Son (casi) 3000 páginas [2982]...

Un ejercicio

356. Calcular el valor de esta integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ cuando $x = 1$.

¿Por dónde empezar? Recordemos el análisis de Plimpton 322.

- Es una integral indefinida, pero por otros trabajos de Euler, está hablando de una antiderivada, evaluada en $x = 1$.
- Para el otro borde, Euler no dejaría la raíz de un negativo, siempre ponía $\sqrt{-1}$, así que tiene que estar entre 0 y 1.
- La antiderivada tenía que valer 0 en el otro borde, así que nos pide

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

No quiere eso: viene de entrenar con integración por partes, así que calcula $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-xx}}$, y le queda:

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{m+1}{m} \int \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-xx}}$$

En particular,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} &= \frac{2}{1} \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}} \\ &= \frac{2}{1}\frac{4}{3} \int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}} \\ &= \frac{2}{1}\frac{4}{3}\frac{6}{5} \int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-xx}} \end{aligned}$$

Finalmente, *cuando i es infinito*, obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2i}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)} \int \frac{x^{2i}dx}{\sqrt{1-xx}}$$

Algunos comentarios:

- Si creen que va a igualar el lado izquierdo a $\pi/2$, se equivocan.
- El producto de números diverge, es $a = \prod \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)$, y

$$\log(a) = \sum log\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \sim \sum \frac{1}{2n+1}.$$

- La integral de la derecha va a 0 [puntual + mayorada].

¿Qué hace, entonces?

Dibuja:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2i}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-1)} \int \frac{x^{2i}dx}{\sqrt{1-xx}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2i+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2i} \int \frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{1-xx}}$$

(y la segunda integral vale 1, fácil).

Para i infinito las dos integrales son iguales.

[inserte aquí su meme favorito]

En realidad, está bien, y queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} : \int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2i}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2i-1)} : \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2i+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2i}$$

de donde deduce la Fórmula de Wallis (1656):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2i\cdot 2i}{(2i-1)\cdot(2i+1)}$$

Ejercicio: ¿Cómo demostrar que ese cociente de integrales va a 1?

Ejercicio: ¿Por qué este producto sí converge?

Veamos **Specimen de usu observationum in mathesi pura**.

Analiza números de la forma $2aa + bb$.
http://eulerarchive.maa.org//docs/originals/E256.pdf

Por si falla internet:

- **1ra parte:** mira una tabla de los números de esa forma, y comienza a hacer deducciones [ej: los primos están una sola vez; si x está, $2x$ también; si está una sola vez es primo o potencia de un primo; si x e y están, xy también...]
- **2da parte:** enuncia y demuestra algunos de estos resultados; asocia la existencia de esta escritura para los primos con su forma $8n \pm 1$, $8n \pm 3$; caracteriza qué primos son de esa forma...