Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre 2018
Segunda Entrega

Ejercicio: Clasificación de cuádricas en el espacio proyectivo

Un conjunto $Q \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ se llama cuádrica proyectiva si existe F un polinomio homogéneo de grado 2 en $n+1$ variables tal que

$$Q = \{[v] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) : F(v) = 0\}.$$

Notar que esta definición no depende del representante v elegido, pues

$$F(\lambda v) = \lambda^2 F(v) = 0.$$

(*a*) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, probar que existe un isomorfismo proyectivo T tal que $T(Q) = \mathcal{C}(G_{p,r})$, con $G_{p,r}$ de la forma

$$G_{p,r} = \sum_{i=0}^{p} X_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} X_i^2, \quad 0 \leq p \leq r \leq n, \quad r \leq 2p+1. \tag{1}$$

Probar además que el par (p, r) no depende de la elección de T.

Sugerencia: *Notar que ya conocemos la clasificación afín en $\mathbb{R}^n$.*

(*b*) Sea $Q = \mathcal{C}(F)$ una cuádrica, donde

$$F = x^2 + y^2 - z^2.$$

Mostrar que la parábola, la hipérbola y la elipse son secciones de Q por planos afines.