

Notas de Análisis I

Gabriel Larotonda

Parte 8: Teorema de cambio de variables

1. El método de sustitución

Nuestro objetivo para terminar con estas notas es entender como funciona el teorema de cambio de variables en dimensiones 2 y 3, teorema que generaliza la idea del método de sustitución para integrales en \mathbb{R} .

Recordemos que si f es una función continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, y g es una función C^1 en $[a, b]$ tal que se puede hacer la composición $f \circ g$ en $[a, b]$, entonces $h(x) = f(g(x))g'(x)$ es una función integrable y además

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \quad (1)$$

En efecto, si F es una primitiva de f , es decir $F'(t) = f(t)$ para todo t en el intervalo I , entonces se chequea fácilmente (derivando) que $H(x) = F(g(x))$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$. Si aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo Integral a la función f en el intervalo con extremos $g(a), g(b)$, obtenemos

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

puesto que F es primitiva de f . Por otro lado, aplicando el mismo teorema a la función H' en el intervalo $[a, b]$ obtenemos

$$F(g(b)) - F(g(a)) = H(b) - H(a) = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx,$$

lo que prueba la igualdad (1).

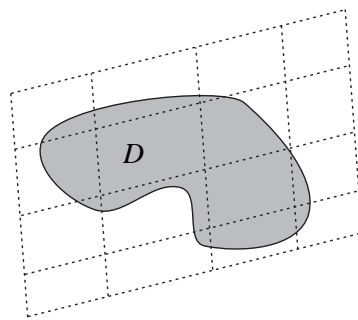
2. Particiones generales

Empecemos por una consideración general que no demostraremos con gran detalle, pero que es razonable y permite simplificar los razonamientos que seguirán. Para calcular integrales

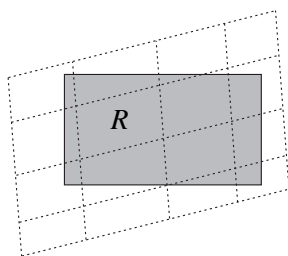
dobles, dado un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ con una frontera buena, lo que hacemos es subdividir el dominio en rectángulos, de lados paralelos a los ejes. Mientras más pequeños sean los rectángulos, mejor es la aproximación del dominio, y una integral la pensamos como límite de las sumas

$$\lim \sum f(P_i)\mu(R_i)$$

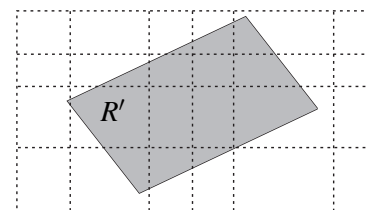
donde $P_i \in R_i$. En particular, el área de D se calcula sumando las áreas de los rectángulos. Sin embargo, la elección de estas figuras (rectángulos de lados paralelos a los ejes) es en cierta medida arbitraria. Es consecuencia de que el área de un rectángulo es fácil de calcular. Pero esto último también es cierto para muchas otras figuras, y nada impide calcular integrales usando estas figuras, es decir, enmarcando al dominio D con estas figuras, particionándolo y calculando las sumas como arriba, y luego tomando el límite al refinar la partición. Un caso concreto es el siguiente: podemos tomar paralelogramos, es decir, figuras de lados paralelos dos a dos, y hacer una partición de D como indica la figura:



Puede probarse que existe la integral de f en D usando rectángulos comunes si y sólo si existe la integral usando estos paralelogramos. La idea de por qué funciona esto es la siguiente: dado un rectángulo R de lados paralelos a los ejes, puede tomarse una partición del mismo usando paralelogramos, que aproxime tanto como uno quiera al rectángulo R .



Y recíprocamente, dado un paralelogramo general R' , se lo puede aproximar tanto como uno quiera usando rectángulos de lados paralelos a los ejes.



Vamos a usar este hecho: si f es integrable en D , entonces su integral se puede calcular como

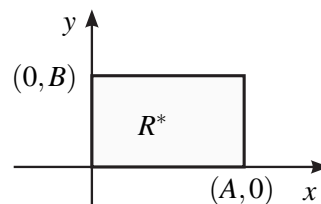
$$\int \int_D f = \lim \sum f(P_i)\mu(R'_i)$$

donde R'_i es una familia de paralelogramos que aproxima la región D , y $P_i \in R'_i$.

3. Transformaciones lineales

Observemos primero que ocurre en el plano, con una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ inversible. Dados dos vectores linealmente independientes, estos van a parar por T a otros dos vectores linealmente independientes. Y entonces todo rectángulo (o mejor dicho, todo paralelogramo) va a parar a otro paralelogramo. Veamos la relación entre las áreas de R^* y $R = T(R^*)$, razonando primero sobre un caso particular.

Dado un rectángulo de lados paralelos a los ejes, su área se calcula como base por altura, $\mu(R^*) = AB$. Podemos suponer que el rectángulo tiene uno de sus vértices en el origen, como indica la figura de abajo, pues una traslación no modifica su área. Es decir, los lados miden exactamente A y B .



Si la transformación lineal T está dada por la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en la base canónica, entonces se tiene

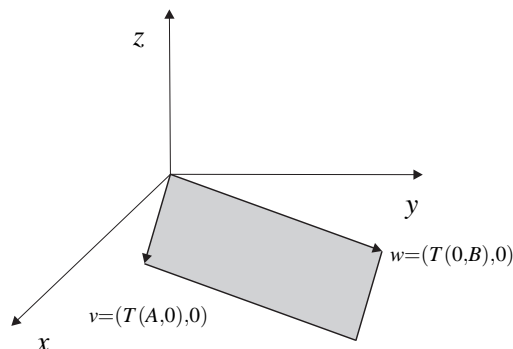
$$T(A,0) = T(A(1,0)) = AT(1,0) = A(a,c) = (Aa,Ac)$$

mientras que

$$T(0,B) = BT(0,1) = B(b,d) = (Bb,Bd).$$

Entonces nuestro rectángulo R^* va a parar al paralelogramo $R = T(R^*)$ que está generado por $T(A,0)$ y $T(0,B)$.

Ahora recordemos que dados dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^3$, el área del paralelogramo determinado por v, w se puede calcular como la norma del producto vectorial entre v y w , es decir $area = \|v \times w\|$. Tomemos entonces el paralelogramo imagen, pero pensado en el plano xy en \mathbb{R}^3 como indica la figura de la derecha. Los vectores son simplemente $v = (Aa, Ac, 0)$, $w = (Bb, Bd, 0)$.



El área de $R = T(R^*)$ es entonces

$$\|v \times w\| = \left\| \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ Aa & Ac & 0 \\ Bb & Bd & 0 \end{vmatrix} \right\| = \|(0,0, AaBd - AcBb)\| = |AB| |ad - bc| = \mu(R^*) |\det T|.$$

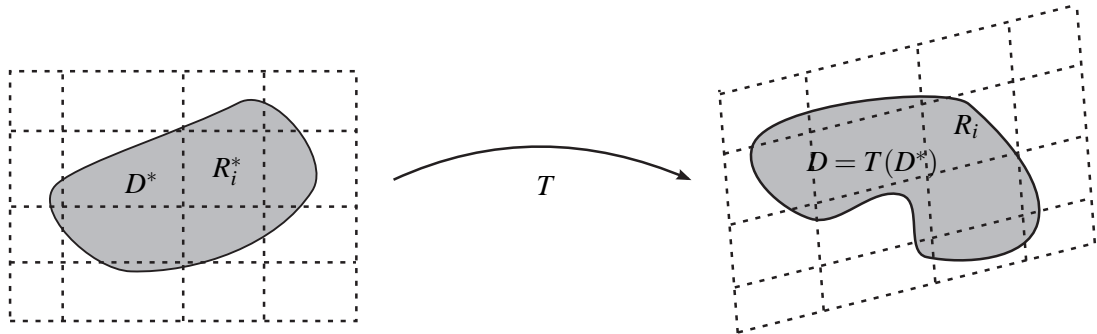
Hemos descubierto el siguiente hecho fundamental:

Proposición 3.1. Si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal inversible, y R^* es un rectángulo de lados paralelos a los ejes, entonces el área del paralelogramo $R = T(R^*)$ que se obtiene como

la imagen de R por T es

$$\mu(R) = |\det T| \mu(R^*).$$

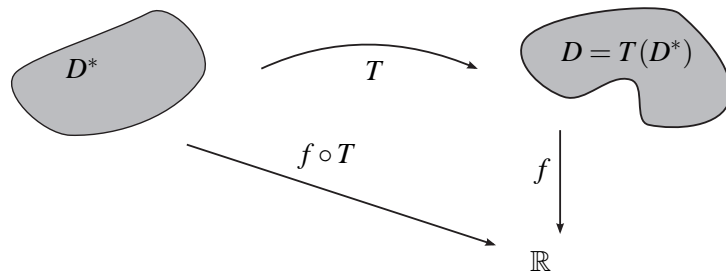
Pero entonces, dada cualquier figura $D^* \subset \mathbb{R}^2$ que sea medible, si $D = T(D^*)$ indica la imagen de D^* por una transformación lineal T inversible, podemos cubrir D^* con rectángulos R_i^* que aproximen la figura, y así estaremos llenando $D = T(D^*)$ con paralelogramos $R_i = T(R_i^*)$ que aproximan esa figura, como en el dibujo:



En consecuencia, $\mu(D) = \mu(T(D^*)) = |\det T| \mu(D^*)$. En efecto,

$$\mu(T(D^*)) = \lim \sum \mu(R_i) = \lim \sum \mu(T(R_i^*)) = \lim \sum |\det T| \mu(R_i^*) = |\det T| \mu(D^*).$$

Esto mismo se puede aplicar para calcular integrales. Observemos en la figura que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida en $D = T(D^*)$, entonces $f \circ T$ está definida en D^* :



Teorema 3.2 (Cambio de variable, versión lineal). Si $D^* \subset \mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal inversible y $f : D = T(D^*) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces

$$\int_D f = \int_{D^*} (f \circ T) |\det T|.$$

Demostración. Tomamos R_i^* rectángulos que aproximen D^* , de manera que $R_i = T(R_i^*)$ aproximen $D = T(D^*)$. Entonces, si $P_i \in R_i$, se puede escribir $P_i = T(Q_i)$ con $Q_i \in R_i^*$, luego

$$\begin{aligned} \int_{T(D^*)} f &= \lim \sum f(P_i) \mu(R_i) = \lim \sum (f \circ T)(Q_i) \mu(T(R_i^*)) \\ &= \lim \sum |\det T| (f \circ T)(Q_i) \mu(R_i^*) = \int_{D^*} (f \circ T) |\det T|. \end{aligned}$$

□

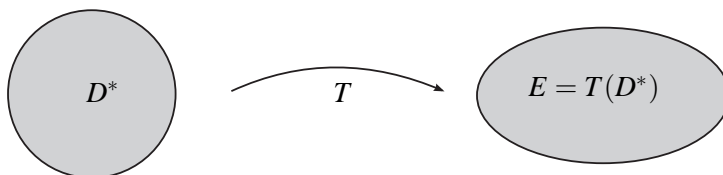
Ejemplo 3.3. Supongamos sabido que el área de un disco de radio R en el plano es πR^2 . Se quiere calcular el área de una elipse E de radios $a, b > 0$ dada por la parte interna de la curva de ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Si consideramos $T(x, y) = (ax, by)$, es una transformación lineal cuya matriz es simplemente

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Como $a, b \neq 0$, T es invertible y en particular $|\det T| = |ab| = ab$. Observemos que la circunferencia unitaria $D^* = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ va a parar a E si le aplicamos T :

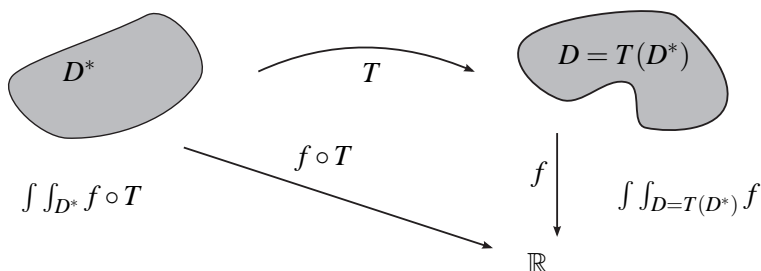


Entonces

$$\mu(E) = \int_E 1 = \int_{T(D^*)} 1 = \int_{D^*} 1 |\det T| = \mu(D^*) |\det T| = \pi ab.$$

4. Cambio de variable

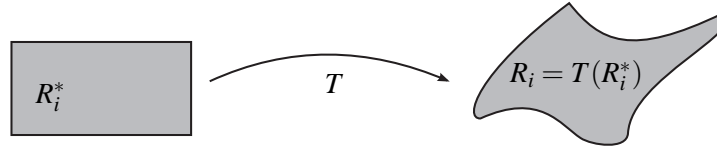
Observemos la analogía en la fórmula del Teorema 3.2 con la fórmula (1), que representa el caso de una variable: $|\det T|$ juega el papel de g' . Por ahora este teorema tiene utilidad limitada. Lo que queremos es extender el resultado a funciones inyectivas cuya diferencial sea invertible salvo un conjunto muy pequeño (de medida nula). Es decir, dado un dominio D^* y una función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva, queremos hallar primero la relación entre $\mu(D^*)$ y $\mu(T(D^*)) = \mu(D)$,



y luego ver cuál es la relación entre la integral de f en un dominio y la de $f \circ T$ en el otro.

Si T es inyectiva, el dominio $D = T(D^*)$ se puede pensar cubierto con las imágenes de los rectángulos que cubren D^* , es decir si $\cup R_i^*$ aproximan D^* entonces $\cup T(R_i^*)$ aproximan $D = T(D^*)$.

¿Cómo calcular la medida de cada $T(R_i^*)$? En principio es un problema difícil, ya que T no es lineal y cada $R_i = T(R_i^*)$ está deformado como indica la figura:



La idea ahora es la siguiente. Podemos escribir, dado $P_i \in \mathbb{R}^2$, una expresión aproximada

$$T(X) = T(P_i) + DT(P_i)X + O(X),$$

donde $O(X)$ es simplemente "lo que falta después del término lineal". Esta afirmación es imprecisa y luego haremos una demostración formal, pero por ahora pensemos que T se puede escribir así. Tenemos como hipótesis que DT es inversible, salvo tal vez un conjunto de medida nula. Entonces podemos imaginar que, como el primer término es sólo un desplazamiento por un vector fijo $T(P_i) \in \mathbb{R}^2$, que no modifica el área, mientras que $O(X)$ es suficientemente pequeño, y no aporta nada sustancial al área, entonces para un rectángulo pequeño R_i^* con vértice en P_i ,

$$\mu(T(R_i^*)) \approx \mu(DT(P_i)R_i^*) = |\det DT(P_i)|\mu(R_i^*).$$

Siguiendo con esta línea de pensamiento, se tendría para un dominio D^* y un conjunto de rectángulos R_i^* que aproximen D^* ,

$$\begin{aligned} \mu(T(D^*)) &= \lim \sum \mu(T(R_i^*)) \approx \lim \sum \mu(DT(P_i)R_i^*) \\ &= \lim \sum |\det DT(P_i)|\mu(R_i^*) = \int_{D^*} |\det DT|, \end{aligned}$$

es decir

$$\mu(D) = \mu(T(D^*)) = \int_{D^*} |\det DT|.$$

Mientras que si $f : D = T(D^*) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, con un razonamiento análogo también se tendría

$$\int_D f = \int_{T(D^*)} f = \int_{D^*} (f \circ T) |\det DT|.$$

Vamos a llamar a $JT = |\det DT|$ el **determinante Jacobiano** de la función T .

Antes de pasar a una demostración veamos unos ejemplos para ver como se usa este resultado, conocido como **teorema de cambio de variable**.

Ejemplo 4.1. Una transformación que se usa frecuentemente es la dada por el cambio de coordenadas polares, donde

$$T(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

En este caso se tiene

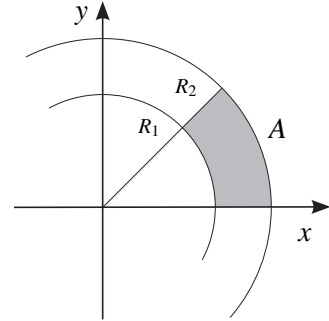
$$DT = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

con lo cual $JT = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$.

1. Calculamos el área del disco B_R de radio $R > 0$. Se tiene que, si $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq r < R$, entonces $T(r, \theta)$ recorre la circunferencia. Esto es $D^* = [0, R] \times [0, 2\pi]$ mientras que $T(D^*) = B_R$. En consecuencia,

$$\mu(B_R) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \pi R^2.$$

2. Se quiere integrar la función $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$ en la región anular A de arco $\pi/4$ entre R_1 y R_2 según indica la figura de la derecha. Luego $D^* = [R_1, R_2] \times [0, \frac{\pi}{4}]$, mientras que $T(D^*) = A$, con lo cual



$$\begin{aligned} \iint_A f &= \iint_{D^*} (f \circ T) JT = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r \cos(\theta) r \sin(\theta)}{r^5} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{4R_1 R_2}. \end{aligned}$$

Pasemos ahora a la demostración del teorema. La idea central está extraída del libro “Cálculo en variedades”, de M. Spivak [3].

Teorema 4.2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva y C^1 . Sea $D^* \subset \mathbb{R}^2$ acotado y $f : D = T(D^*) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Si DT es invertible en D^* y $JT = |\det DT|$, entonces

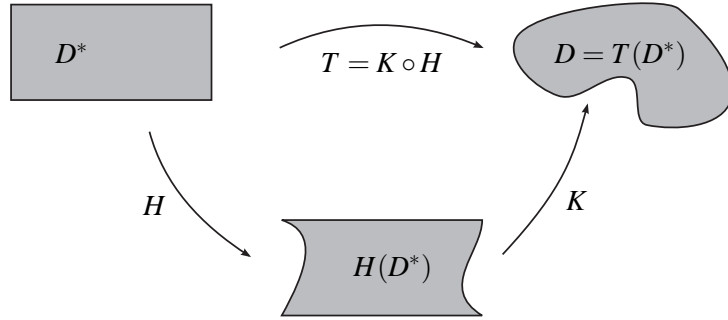
$$\int_D f = \int_{D^*} (f \circ T) JT.$$

Demostración. Basta probar, dado $P \in D^*$, que existe un entorno de R^* de P donde vale el teorema es decir

$$\int_{T(R^*)} f = \int_{R^*} (f \circ T) JT.$$

En efecto, si esto es cierto entonces dividiendo D^* en un conjunto finito de entornos R_i^* donde vale el teorema, y sumando las integrales, se tiene el resultado en el conjunto total D^* .

La idea de la demostración es descomponer a la función T como la composición de dos funciones, cada una moviendo una sola variable, y usar sustitución en una variable en cada una de las funciones.



Sea $P = (a, b) \in D^*$, y $T(x, y) = (t_1(x, y), t_2(x, y))$ y supongamos primero que $DT(P) = I_2$. En particular $\nabla t_1(P) = (1, 0)$. Si ponemos $H(x, y) = (t_1(x, y), y)$, H es una función C^1 y también se tiene $DH(P) = I_2$, puesto que

$$DH = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x} & \frac{\partial t_1}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $JH = |\det DH| = \left| \frac{\partial t_1}{\partial x} \right| = \frac{\partial t_1}{\partial x}$ pues como esta derivada parcial vale uno en P , y es una función continua pues T es C^1 , podemos suponer que estamos en un entorno donde es positiva. Es decir

$$JH = \frac{\partial t_1}{\partial x}.$$

Como $DH(P) = I_2$, por el teorema de la función inversa existe un entorno U (que vamos a suponer que es un rectángulo abierto) de P donde H es inversible. Ahora ponemos

$$K(x, y) = (x, t_2(H^{-1}(x, y)))$$

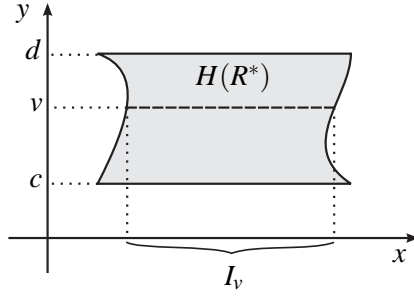
definida en un entorno de $H(P)$. Reemplazando se ve que $K \circ H = (t_1(x, y), t_2(x, y)) = T$. Observemos que $DT = DK_H \circ DH$, donde por DK_H queremos decir la diferencial de K evaluada en $H(X)$. Luego $\det DT = \det DK_H \det DH$, con lo cual

$$JT = JK_H \cdot JH.$$

Tomemos un conjunto $W^* \subset U$ alrededor de P , y una función g integrable allí. Podemos suponer que W^* es suficientemente pequeño para que se pueda tomar un rectángulo $R^* = [a, b] \times [c, d] \subset U$ que contenga W^* , y extendemos g como cero en $R^* - W^*$ como es habitual. Entonces por el Teorema de Fubini,

$$\int_{H(W^*)} g = \int_{[c, d]} \int_{I_v} g(u, v) du dv,$$

donde I_v es el intervalo dado por la imagen de $[a, b]$ via $g_1(u, v)$ con $v \in [c, d]$ fijo, según indica la figura, pues H fija $[c, d]$:



Ahora hacemos la sustitución $u = u_v(x) = t_1(x, v)$. Derivando respecto de x se tiene

$$du = \frac{\partial t_1}{\partial x}(x, v)dx,$$

y cuando x recorre $[a, b]$, u recorre I_v . Entonces

$$\int_{I_v} g(u, v)du = \int_{[a, b]} g(t_1(x, v), v) \frac{\partial t_1}{\partial x}(x, v)dx,$$

con lo cual

$$\int_{H(W^*)} g = \int_{[c, d]} \int_{[a, b]} g(t_1(x, v), v) \frac{\partial t_1}{\partial x}(x, v) dx dv = \int_{W^*} (g \circ H) JH.$$

Con una cuenta análoga se tiene, para cualquier entorno abierto V^* de $H(P)$ suficientemente pequeño,

$$\int_{K(V^*)} f = \int_{V^*} (f \circ K) JK.$$

Luego

$$\int_{T(R^*)} f = \int_{K \circ H(R^*)} f = \int_{H(R^*)} (f \circ K) JK.$$

LLamando $g = (f \circ K) JK$ y usando que $\int_{H(W^*)} g = \int_{W^*} (g \circ H) JH$ se deduce que

$$\int_{H(R^*)} (f \circ K) JK = \int_{W^*} (f \circ K \circ H) JK_H JH.$$

Como $DT(X) = DK_{H(X)} DH(X)$, tomando determinante se tiene $JK_H JH = JT$ (donde con JK_H queremos indicar al Jacobiano de K , evaluado en H), y juntando las últimas dos ecuaciones se tiene

$$\int_{T(R^*)} f = \int_{R^*} (f \circ T) JT.$$

Por último, si $DT(P) \neq I_2$, basta llamar $A = DT(P)$ que es una transformación lineal invertible, y llamando $\bar{T} = A^{-1} \circ T$, se tiene

$$\int_{T(R^*)} f = \int_{A \circ \bar{T}(R^*)} f = \int_{\bar{T}(R^*)} (f \circ A) |\det A|,$$

usando el resultado para transformaciones lineales A . Si aplicamos lo que probamos en el párrafo de arriba a la función \bar{T} (que ahora verifica $D\bar{T}(P) = I_2$), se tiene entonces

$$\int_{\bar{T}(R^*)} (f \circ A) |\det A| = \int_{R^*} (f \circ A \circ A^{-1} \circ T) J\bar{T} |\det A| = \int_{R^*} (f \circ T) JT$$

pues $J\bar{T} = |\det(A^{-1})| |\det T| = |\det A|^{-1} JT$. □

Terminemos esta sección con un ejemplo sutil.

Ejemplo 4.3. Se quiere calcular el volumen encerrado bajo el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y sobre el piso $z = 0$, pero en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$ del primer cuadrante. En resumen, se quiere calcular

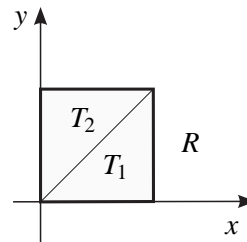
$$\int \int_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Presenta ciertas dificultades la integral en coordenadas cartesianas, luego hacemos el cambio de variable a coordenadas polares, es decir $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. El integrando queda como

$$(f \circ T) JT = rr = r^2,$$

muy sencillo de integrar.

El problema es el dominio R . Tenemos que identificar el dominio D^* dado en coordenadas polares tal que $T(D^*) = R$. Para ello es conveniente dibujar R y partirlo al medio por la diagonal, como en la figura de la derecha:



Se tienen dos triángulos T_1, T_2 de igual área, y por la forma del cono sabemos que el volumen lo podemos calcular como

$$vol = \int \int_{T_1} f + \int \int_{T_2} f.$$

El triángulo T_1 está determinado por las condiciones $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$. En coordenadas polares, se observa que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, mientras que para cada θ fijo r se mueve entre cero y la recta vertical $x = 1$. Pero esta recta en coordenadas polares es $r \cos(\theta) = 1$, es decir

$$r = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Luego debe ser D_1^* el dominio en (r, θ) dado por las condiciones

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\cos(\theta)}, \text{ mientras que } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Se tiene entonces

$$\frac{1}{2}vol = \int \int_{T_1} f = \int \int_{T(D_1^*)} f = \int \int_{D_1^*} (f \circ T)JT = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{1/\cos(\theta)} r^2 dr d\theta.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}vol &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3(\theta)} d\theta = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}(r) + \ln(\sec(r) + \tan(r)) \cos^2(r)}{\cos^2(r)} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})), \end{aligned}$$

donde usamos una tabla para calcular la primitiva.

4.1. Cambio de variable en \mathbb{R}^3

Para el espacio, se tiene un resultado análogo. En primer lugar, no es difícil probar que si R^* es un paralelogramo sólido en \mathbb{R}^3 , y T es una transformación lineal inversible, entonces $R = T(R^*)$ es otro paralelogramo sólido y además

$$\mu(R) = |\det T| \mu(R^*).$$

Con esto, se tiene un enunciado equivalente al del Teorema 3.2, con una demostración análoga:

Teorema 4.4. Si $D^* \subset \mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal inversible, entonces si D^* es medible, $D = T(D^*)$ es medible y además

$$\mu(D) = |\det T| \mu(D^*).$$

Finalmente, usando las mismas ideas que antes, toda función inyectiva $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con diferencial inversible nos permite hacer un cambio de variable que transforma una integral en D^* en una integral en $D = T(D^*)$, de la siguiente manera.

Teorema 4.5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y C^1 . Sea $D^* \subset \mathbb{R}^3$ acotado y $f : D = T(D^*) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Si DT es inversible en D^* y $JT = |\det DT|$, entonces

$$\int_D f = \int_{D^*} (f \circ T)JT.$$

La demostración usa las mismas ideas que el caso $n = 2$ y la omitimos. El único comentario a tener en cuenta es que ahora hay que descomponer a T como una aplicación que primero mueve dos variables y después una, y usar el resultado que ya tenemos para dos variables. Es decir, es una demostración por inducción.

Para terminar, algunos ejemplos.

Ejemplo 4.6. 1. *Coordenadas cilíndricas.* La transformación T está dada por

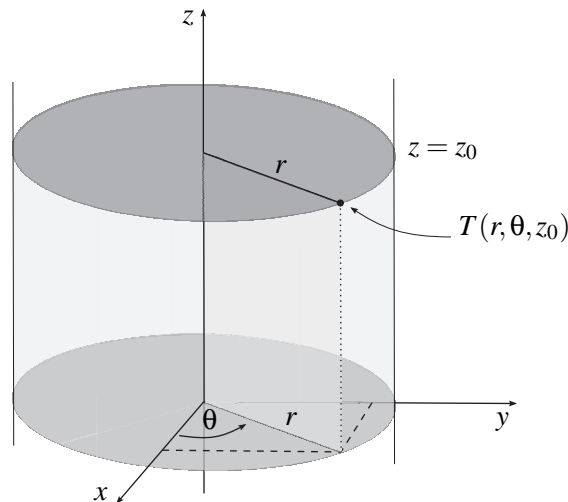
$$T(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), z).$$

Esto es $x = r \cos(\theta)$, $y = r \operatorname{sen}(\theta)$, $z = z$.

Es muy conveniente cuando la región D a integrar presenta simetría alrededor de un eje, el “eje de rotación”. En este caso alrededor del eje z , pero con pequeñas modificaciones pueden considerarse otras rectas como eje de rotación. Aquí

$$DT = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego $JT = |\det T| = r$. Esta transformación manda un ladrillo vertical, en el espacio (r, θ, z) (de lados $r, 2\pi, z_0$) en un cilindro vertical en el espacio (x, y, z) (de radio r y altura z_0) como indica la figura:



Si fijamos la altura $z = z_0$, la transformación $T(r, \theta, z_0)$ recorre una circunferencia horizontal de radio r en la altura del plano $z = z_0$, donde x e y se pueden calcular observando que en la figura, el vector $T(r, \theta, z_0)$ mirado en el piso tiene componentes

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \operatorname{sen}(\theta).$$

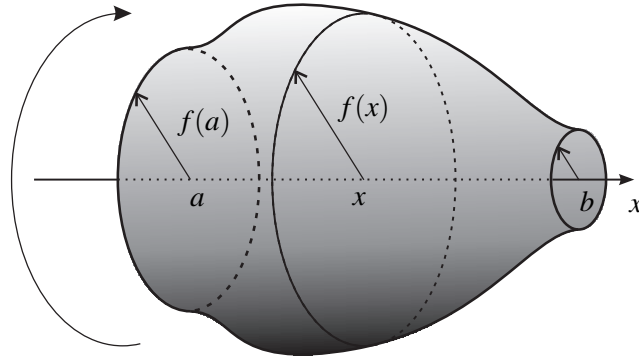
El ángulo θ se mide desde el eje x , en contra del reloj como si mirásemos el plano xy desde arriba. El número $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nos da la distancia del punto (x, y, z) al punto $(0, 0, z)$, es decir, la distancia al eje z .

Aquí z está libre, pero θ debe ser un número entre $[0, 2\pi]$ para que sea una función inyectiva (sino estamos pasando dos veces por el mismo ángulo), y r un número positivo pues representa una distancia.

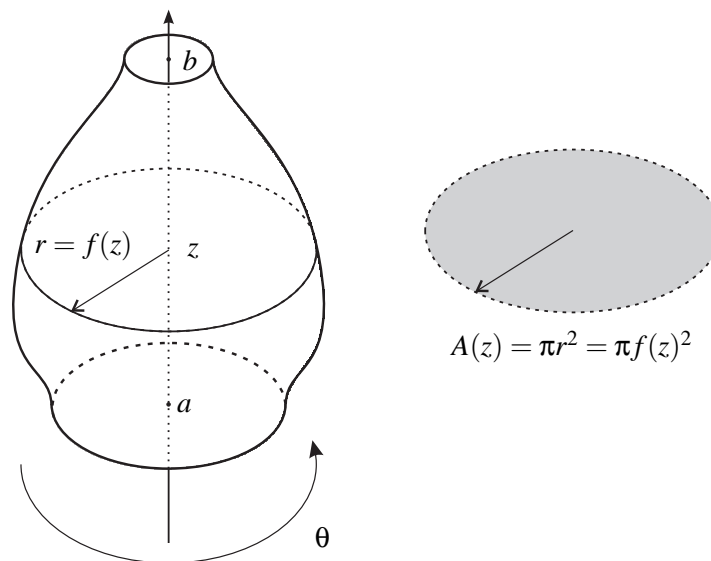
Es decir, si (r, θ, z) viven en $[0, +\infty] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, entonces $T(r, \theta, z)$ recorre todo el espacio en forma inyectiva, con una salvedad: si $r = 0$, y $z = z_0$ está dado, cualquiera sea el ángulo

θ no nos moveremos del punto $(0,0,z_0)$. Esto no es un problema pues $r = 0$ representa la recta del eje z , que es una región que no tienen ningún volumen que pueda afectar el cálculo de una integral.

- a) Se quiere calcular el volumen del **sólido de revolución** que se obtiene al girar el área bajo el gráfico de una función f en el intervalo $[a,b]$. Se supone que f es positiva allí, de manera que se obtiene una figura sólida:



El volumen es independiente de la posición, así que para aprovechar las coordenadas cilíndricas pensamos a f como función de z , en el plano yz , es decir $y = f(z) > 0$ como indica la figura:



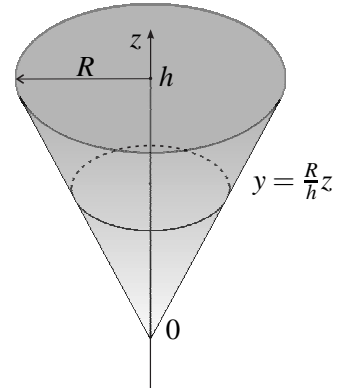
Al hacerla girar alrededor del eje z obtenemos el sólido de revolución. Fijado un z concreto entre a y b , el corte con el sólido está dado por la circunferencia $0 \leq r \leq f(z)$. Luego integrando en coordenadas polares se tiene

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_0^{f(z)} r dr dz d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b \frac{1}{2} f^2(z) dz = \int_a^b \pi f^2(z) dz,$$

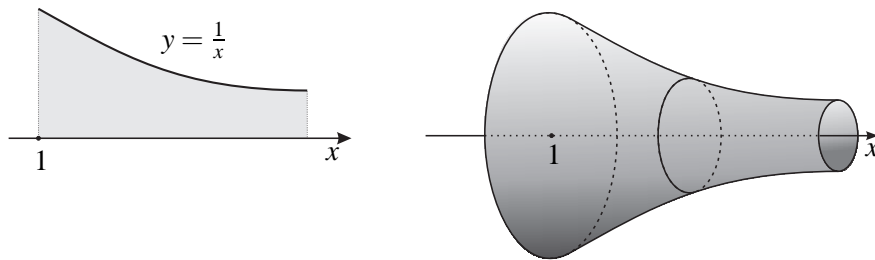
fórmula general que también puede interpretarse como que integramos entre a y b las superficies de los discos de radio $f(z)$, que valen exactamente $\pi f(z)^2$.

- 1) Calculemos el volumen de un cono sólido de base R y altura h . Dibujado con eje en el eje z , el cono se obtiene girando el área bajo la recta $y = \frac{R}{h}z$, con z entre 0 y h . Luego



$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{cono}) &= \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \text{vol}(\text{cilindro}). \end{aligned}$$

- 2) Calculamos el volumen del sólido no acotado que se obtiene al girar el área bajo la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, para $x \geq 1$:



Se tiene

$$\text{vol} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_1^r \pi \frac{1}{z^2} dz = \pi \lim_{r \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{z} \right|_1^r = \pi \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{r} + 1 \right) = \pi.$$

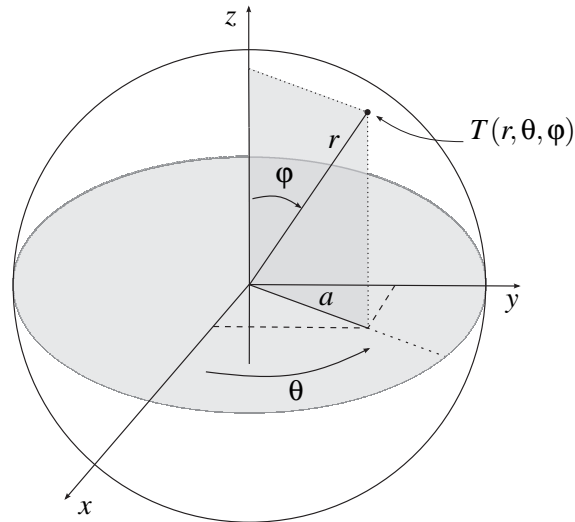
Sorprendentemente, aunque el sólido es no acotado, ¡su volumen es finito! Resulta más sorprendente aún si recordamos que el área bajo la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ no es finita pues la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ **no es convergente**.

2. **Coordenadas esféricas.** En este caso se trata de una transformación que es útil para regiones que presentan simetrías alrededor de un punto del espacio, el caso más sencillo es una esfera. La transformación T está dada por

$$T(r, \theta, \varphi) = (r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\varphi)).$$

Para interpretarla, hay que considerar que un cubo de lado $r, 2\pi, \pi$ se transforma en una esfera de radio r en el espacio (x, y, z) . Para leer estas coordenadas en una esfera, es conveniente entender su representación gráfica: r representa el radio, es decir, la distancia al

origen. Debe ser entonces un número positivo. El ángulo θ una vez más se mide desde el eje x en sentido antihorario, es un número entre 0 y 2π . Por último, el ángulo φ se mide desde el eje z en forma vertical, **pero basta tomar un número entre 0 y π** para recorrer todo el espacio, ya que los ángulos mayores se alcanzan tomando θ entre π y 2π .



Se observa que $a = r \operatorname{sen}(\varphi)$ representa la distancia de $(x, y, 0)$ al origen, mientras que $r \cos(\varphi)$ es la altura o coordenada z del punto.

La diferencial de T es la matriz

$$DT = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & -r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & r \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -r \operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix},$$

luego desarrollando por la última fila se tiene

$$\begin{aligned} JT = |\det T| &= |\cos(\varphi) [-r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi) - r^2 \cos^2(\theta) \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi)] \\ &\quad - r \operatorname{sen}(\varphi) [r \cos^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\varphi) + r \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\varphi)]| \\ &= |r^2 \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) + r^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi)| = |r^2 \operatorname{sen}(\varphi)|. \end{aligned}$$

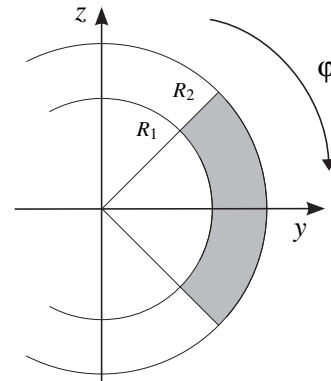
Como en $[0, \pi]$ el seno es positivo, se tiene

$$JT = r^2 \operatorname{sen}(\varphi).$$

a) Para empezar, calculamos el volumen de una esfera de radio R .

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(B_R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \operatorname{sen}(\varphi) dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \frac{1}{3} R^3 \int_0^\pi \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi = \frac{2}{3} \pi R^3 (-\cos(\varphi)|_0^\pi) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

b) De acuerdo a las leyes del electromagnetismo, la carga total eléctrica Q_T de un objeto es simplemente la suma de las cargas puntuales. Al igual que en el caso de la masa, en el caso de un objeto sólido D provisto de una densidad de carga ρ , la carga total se consigue integrando ρ en el sólido D . Queremos calcular la carga total de una cáscara esférica según las restricciones $0 < R_1 < r < R_2$, $|z| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ cuya densidad de carga es $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} / (x^2 + y^2 + z^2)$. La segunda ecuación es la de un cono, luego en el corte con el plano yz veremos la región anular encerrada por las rectas $z = \pm y$.



Entonces, como $\rho(r, \theta, \phi) = \frac{r \operatorname{sen} \phi}{r^2} = \frac{\operatorname{sen} \phi}{r}$,

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\operatorname{sen} \phi}{r} r^2 \operatorname{sen} \phi dr d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^2 \phi d\phi \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) = \pi (R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Ocurre aquí un fenómeno curioso. Observemos que la densidad de carga tiende a infinito cuando $r \rightarrow 0$. Sin embargo las esferas de radio pequeño aportan poca carga total, con lo cual, haciendo tender $R_1 \rightarrow 0$, se tiene

$$Q_T = \pi R_2^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

que nos dice que la carga total es finita aún en el caso de que la región toque el origen.

¿FIN? ¡Esto es sólo el comienzo!

Referencias

- [1] R. Courant, F. John, *Introducción al cálculo y el análisis matemático*. Vol. 2, Ed. Limusa-Wiley, México, 1998.
- [2] S. Lang, *Introducción al álgebra lineal*. Ed. Addison-Wesley iberoamericana, Argentina, 1990.
- [3] M. Spivak, *Cálculo en variedades*. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.
- [4] J.E. Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo vectorial*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1991.