Geometría Proyectiva - 2° cuatrimestre de 2018

Práctica 4

Superficies: Primera Forma Fundamental y Geodésicas

Como lo primero es la métrica, la denotaremos ***I***

En esta guia, todas las superficies son regulares y de clase C^3.

1. La *proyección estereográfica* permite definir un sistema de coordenadas para la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sea $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ la esfera y sea $N = (0, 0, 1)$ su "polo norte". Se define $\pi : S^2 \to \mathbb{R}^2$ como $\pi(x, y, z) = q \in \mathbb{R}^2$ si q es (las primeras dos coordenadas de) la intersección de la línea que pasa por N y $P = (x, y, z)$ con el plano $z = 0$.

   a) Hallar una fórmula para $\pi(x, y, z)$ con (x, y, z) en esta esfera.

   b) Mostrar que una parametrización de S^2 está dada por

   $$\varphi(u, v) = \pi^{-1}(u, v) = (\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, 1 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}).$$

   c) Mostrar que, usando la proyección estereográfica es posible cubrir la esfera con dos parametrizaciones.

2. Sean S, M superficies regulares, probar que si $f : S \to M$ es de clase C^k en un par de parametrizaciones φ_1, ψ_1 de S, M respectivamente, entonces lo mismo vale para cualquier otro par de parametrizaciones φ_2, ψ_2.

3. Sean S, M superficies regulares, $f : S \to M$ de clase C^1. Para $p = \varphi(X) \in S$ y $\varphi : U \to S$ parametrización alrededor de p, definimos $Df_p : T_pS \to T_{f(p)}M$ como $Df_pv = D(f \circ \varphi)_X w$ si $v = D\varphi_X w \in T_pS$. Probar

   a) Para cualquier curva $\alpha \subset S$ de clase C^1 tal que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$, se tiene $Df_pv = (f \circ \alpha)'(0)$.

   b) Df_p no depende de la parametrización φ elegida para definirla.

   c) Df_p es transformación lineal, y es inversible si y sólo si f es localmente inversible y f^{-1} es de clase C^1.

   d) Si Df_p es inversible entonces existe un entorno $W \subset U$ tal que $f \circ \varphi : W \to M$ es parametrización regular de M en un entorno de $f(p)$.

4. Sean S, M superficies regulares, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y $f = F|_S$. Si $im(f) \subset M$, probar que f es C^1 entre superficies y que para todo $p \in S$, $Df_p = DF_p|_{T_pS}$.

5. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable, con S superficie regular parametrizada por φ. Sea $grad(f)_p$ el único vector tal que $\langle grad(f)_p, z\rangle = Df_p(z)$ para todo $z \in T_pS$. Si denotamos $f_u = \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}$, y lo mismo con v, probar que

   $$grad(f)_p = \frac{f_uG - f_vF}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{f_vE - f_uF}{EG - F^2}\varphi_v.$$

   En particular, si $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ con la parametrización usual $\varphi(x, y) = (x, y, 0)$ se tiene $grad(f) = f_xe_1 + f_ye_2$ donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

6. Sean X, Y campos en S de clase C^1. Probar que si α es el flujo de Y por $p \in S$, entonces $DX_p(Y_p) = (X \circ \alpha)'(0)$. Dar un ejemplo donde $DX_p(Y_p) \notin T_pS$.

7. Dada una superficie parametrizada por $\varphi(u,v)$, los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = \varphi_u \cdot \varphi_u$, $F = \varphi_v \cdot \varphi_u$, $G = \varphi_v \cdot \varphi_v$. Calcularlos para las siguientes superficies parametrizadas $(a,b,c > 0)$ y probar que se trata de superficies regulares restringiendo adecuadamente el dominio de φ:

   a) Plano

   b) Esfera de radio $R > 0$, usando coordenadas esféricas.

   c) Esfera de radio 1, usando las coordenadas de la proyección estereográfica.

   d) Elipsoide: $\varphi(u,v) = (a\,\mathrm{sen}(u)\cos(v), b\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v), c\cos(u))$

   e) Paraboloide elíptico: $\varphi(u,v) = \left(au\cos(v), bu\,\mathrm{sen}(v), u^2\right)$

   f) Paraboloide hiperbólico: $\varphi(u,v) = (au\cosh(v), bu\,\mathrm{senh}(v), u^2)$ (silla de montar)

   g) Hiperboloide de dos hojas: $\varphi(u,v) = (a\,\mathrm{senh}(u)\cos(v), b\,\mathrm{senh}(u)\,\mathrm{sen}(v), c\cosh(u))$.

8. Probar que si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es C^2, entonces su gráfico

$$Gr(f) = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in U\}$$

   es una superficie regular. Dar una parametrización, hallar su plano tangente y su primera forma fundamental en términos de f.

9. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución que se consigue rotando la curva $y = f(z) > 0$, para $z \in (a,b)$ alrededor del eje z. Probar que si f es C^2 entonces S es una superficie regular. Dar una parametrización, hallar su plano tangente y los coeficientes E,F,G.

10. La *pseudoesfera* es la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva tractriz alrededor del eje z. Dar una parametrización de la pseudoesfera y hallar sus coeficientes de la primera forma fundamental.

11. Mostrar que toda superficie de revolución ($y = f(z) > 0$ rotada alrededor del eje z) puede ser reparametrizada de manera que queden $E = E(v), F = 0$ y $G = 1$.

12. El toro de radios $a > r > 0$ centrado en el origen está dado por la superficie de nivel

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2\}$$

   Hacer un gráfico aproximado y verificar que $f : (0,2\pi) \times (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

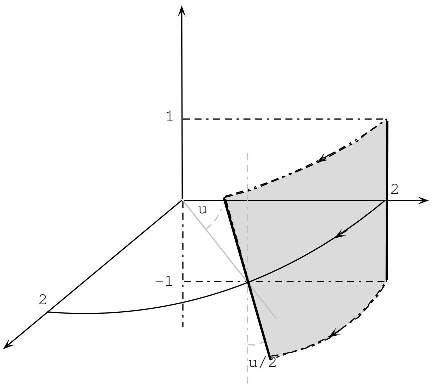
$$f(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\,\mathrm{sen}\,v, r\,\mathrm{sen}\,v)$$

   es una parametrización regular de T. Hallar E,F,G.

13. Sea $A = (0,2\pi) \times (-1,1)$ y $f_1, f_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= \left(\left[2 + v.\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{u}{2}\right)\right].\,\mathrm{sen}\,u, \left[2 + v.\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{u}{2}\right)\right].\cos u, v\cos\left(\tfrac{u}{2}\right)\right) \\ f_2(u,v) &= \left(\left[2 + v.\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right)\right].\cos u, -\left[2 + v.\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right)\right].\,\mathrm{sen}\,u, v\cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

   Sea $M = f_1(A) \cup f_2(A)$. Probar que M es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$. Se conoce como cinta de Möbius. Hallar E,F,G.



La cinta de Möbius se obtiene rotando el segmento $[(0,2,-1),(0,2,1)]$ en sentido horario alrededor de la circunferencia de ecuaciones $x^2+y^2=4$, $z=0$ de modo que, habiendo rotado dicho segmento en un ángulo u, éste se incline en un ángulo $u/2$ respecto de la vertical.

14. Las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi(u,v)$ forman una **red de Tchebyshev** si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Mostrar que si $\varphi \in C^2$, entonces una condición necesaria y suficiente para esto es que $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$.

15. Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi \in C^2$ forman una red de Tchebyshev entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean $E=1, F=\cos(\theta), G=1$, donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

16. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie simétrica respecto de un plano Π. Probar que $S \cap \Pi$ es una geodésica de S (si se recorre con velocidad constante).

17. Probar geométricamente que en cada caso, la curva indicada (recorrida con velocidad constante) es geodésicas de la superficie indicada.

    a) Π un plano, $L \subset \Pi$ una recta

    b) El cono $z^2 = x^2+y^2$, una recta del cono que parte del vértice.

    c) El paraboloide $z=x^2+y^2$, la parábola dada por $z=y^2, x=0$.

    d) El hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2=z^2-1$, la hipérbola $x=0, z^2-y^2=1$.

    e) La esfera unitaria S^2, los círculos máximos (corte de la esfera con un plano por el origen).

    f) Un cilindro circular: las circunferencias horizontales, y las rectas verticales inscriptas en el cilindro ¿Hay otras?

    g) Un hiperboloide de una hoja $x^2+y^2=z^2+1$: la circunferencia $z=0, x^2+y^2=1$. ¿Qué pasa si cortamos con $z=z_0 \neq 0$?

18. Probar que una curva $\alpha : [0,1] \to S^2$ es una geodésica si y sólo si verifica $\ddot{\alpha}+k^2\alpha = 0$, donde $k = L(\alpha)$ (recordar que las geodésicas tienen velocidad constante).

19. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar $y=f(z)>0$ alrededor del eje z.

    a) Probar que los meridianos de S son geodésicas.

    b) Dar una condición necesaria y suficiente para que un paralelo de S sea geodésica.

20. Hallar las ecuaciones diferenciales de las geodésicas de

a) un plano,	*b*) un cono,	*c*) un paraboloide
d) una esfera,	*e*) un cilindro,	*f*) un hiperboloide de dos hojas
g) la pseudoesfera,	*h*) silla de montar,	*i*) hiperboloide de dos hojas.

Verificar que las curvas halladas en el Ejercicio 17 cumplen estas ecuaciones.

21. Probar que toda hélice inscripta en un cilindro es una geodésica del mismo, y que, junto con las curvas mencionadas en el Ejercicio 17*f*), estas son todas las geodésicas del mismo.

22. Para cada una de las siguientes superficies, hallar geodésicas no triviales:

a) la pseudoesfera, *b*) silla de montar, *c*) hiperboloide de dos hojas.

23. Sea M superficie regular, con su distancia geodésica *dist*, sean $p, q \in M$. Decimos que $\gamma : [a, b] \to M$ curva continua es *minimal para L*, si $dist(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma)$.

   a) Probar que toda restricción de γ es minimal. ¿Es cierto esto si γ sólo es punto crítico de la funcional longitud?

   b) Probar que si $(M, dist)$ es un espacio métrico completo, entonces existe una curva continua minimal γ que une p, q (*sug: Teorema de Arzelá-Ascoli).*

24. Sea $\alpha : [a, b] \to M$ continua y $z : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ campo continuo a lo largo de α. probar que si $\int_a^b \langle z(t), \phi(t)\rangle dt = 0$ para todo campo $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ a lo largo de α *de clase* C^2, entonces $z(t) = 0$ en $[a, b]$.

25. Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\alpha : [0, 1] \to M$ regular a trozos con rapidez constante, μ campo a lo largo de α, regular a trozos. Tomemos la variación de α dada por la colección de geodésicas $v(s, t) = \gamma_{\alpha(t),\mu(t)}(s)$. Probar que $L(\alpha)\frac{d}{ds}\big|_{s=0} L(v_s)$ es igual a

$$-\int_0^1 \langle \nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha, \mu\rangle dt + \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(t_i), \dot\alpha(t_i^-) - \dot\alpha(t_i^+)\rangle + \langle \mu(1), \dot\alpha(1^-)\rangle - \langle \mu(0), \dot\alpha(0^+)\rangle.$$

26. Sea M superficie regular, $\gamma : [0, 1] \to M$. Probar que

   a) Si γ es geodésica, entonces es punto crítico de L para toda variación propia.

   b) Si γ es C^1 y punto crítico de L (en particular minimal), entonces es geodésica.

   c) Si γ es regular a trozos y punto crítico de L (en particular minimal), entonces γ es una reparametrización de una geodésica, en particular es suave en $[0, 1]$.

27. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to M$ curva regular inyectiva, sea $N = im(\gamma)$. Sea $p \in M \setminus N$, consideremos $f(q) = dist(q, p)$ con $q \in N$. Probar que existe $q_0 \in N$ que minimiza f, y que si α es una geodésica minimizante que une p, q_0, entonces α es ortogonal a N en q_0 (*sug: considerar una variación de α con un extremo fijo en p y el otro libre en N*).

28. El *funcional energía* se define, para curvas regulares a trozos $\gamma : [0, 1] \to M$, como

$$E(\gamma) = 1/2 \int_0^1 \|\dot\gamma\|_\gamma^2 dt.$$

Probar resultados análogos a los de los Ejercicios 25 y 26, para el funcional energía. Concluir que un mínimo del funcional energía *es* una geodésica (*sug: E no es invariante por reparametrizaciones*).

29. Probar que $L(\alpha)^2 \leq 2E(\alpha)$ para toda curva regular a trozos. Probar que los mínimos de la longitud son mínimos de la energía. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

30. Sea ∇ una derivada covariante en M, sin torsión ($\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es $\mathbb{R}$-bilineal y verifica sólo las tres primeras propiedades de la derivada de Levi-Civita).

    a) Probar que $2\nabla_X Y = [X, Y] + \nabla_X Y + \nabla_Y X$

    b) Probar que si se conoce el valor de $\nabla_X X$ para todo campo X, entonces se conoce el valor de $\nabla_X Y$ para todo par de campos X, Y *(sug: usar que ∇ es aditiva en las dos variables y que se conoce $\nabla_{X+Y}(X + Y)$ para todo X, Y).*