Geometría Proyectiva - 2° cuatrimestre de 2018

Práctica 3

Curvas

Ayrton Senna se fue por la tangente

1. Dibujar las siguientes curvas planas, que están dadas en coordenadas polares, de manera aproximada.

   a) $r = 1 + \cos(\theta)$ (*cardioide*) *b*) $r^2 = 4\cos(2\theta)$ (*lemniscata*)
   c) $r = \theta$ (*espiral de Arquimedes*) *d*) $r = e^{\theta}$ (*espiral logaritmica*)
   e) $r = \operatorname{sen}(3\theta)$ (*flor de 3 pétalos*).

2. Probar que las siguientes curvas parametrizan las dadas en el ejercicio previo:

   a) $\alpha(t) = ((1 + \cos(t))\cos(t), (1 + \cos(t))\operatorname{sen}(t))$ *b*) $\alpha(t) = (\frac{2\cos(t)}{1+\operatorname{sen}^2(t)}, \frac{2\operatorname{sen}(t)\cos(t)}{1+\operatorname{sen}^2(t)})$
   c) $\alpha(t) = (t\cos(t), t\operatorname{sen}(t))$ *d*) $\alpha(t) = (e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t))$
   e) $\alpha(t) = (\operatorname{sen}(3t)\cos(t), \operatorname{sen}(3t)\operatorname{sen}(t))$.

3. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = \left(\dfrac{3at}{1+t^3}, \dfrac{3at^2}{1+t^3}\right)$. Probar

   a) α es tangente al eje x en $t = 0$, $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t) = (0,0)$ y $\lim_{t\to+\infty}\alpha'(t) = (0,0)$.
   b) Cuando $t \to -1$ esta curva y su tangente se aproximan a la recta $x + y + a = 0$.

   La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta $y = x$ se llama *folio de Descartes*. Graficarla.

4. Si $n \in \mathbb{N}$, dar una expresión en coordenadas polares y una parametrización de una curva cuyo trazo sea una flor de n pétalos.

5. *a*) Probar que, en la espiral logarítmica, el ángulo entre el radio vector r (que une el origen con un punto P de la curva) y el vector tangente en P es constante.
   b) Dado $\gamma \in (0, \pi)$, hallar una curva tal que el ángulo entre el radio vector y el vector tangente sea exactamente γ (dar una expresión en coordenadas polares y una parametrización).

6. *a*) Probar que, en la espiral de Arquímedes, la distancia entre vueltas es constante si se mide a lo largo del radio vector r.
   b) Dado $a > 0$, hallar una curva donde la distancia entre vueltas sea exactamente a (dar una expresión en coordenadas polares y una parametrización).

7. Dadas las siguientes curvas C, hallar dos parametrizaciones que las orienten que manera distinta:

   a) C el arco de parábola de ecuación $y = x^2$ entre los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.
   b) C la circunferencia de radio 2 con centro en $(2, 1)$.
   c) C la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con a, $b > 0$.
   d) C el segmento de $\mathbb{R}^3$ que une $(2, 3, -1)$ con $(3, 2, 1)$.
   e) $C \subset \mathbb{R}^3$ la intersección de $y = x^2$ con $x + z = 2$ en el primer octante.

f) C la intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8. Sea C una curva plana en el primer cuadrante, con la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje de las y es constantemente 1, esta curva es la *tractriz*.

   a) Probar que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de C, entonces se verifica la ecuación diferencial
   $$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \pm\frac{\sqrt{1 - x(t)^2}}{x(t)}$$
   (haciendo un gráfico aproximado se verifica que debe tomarse el signo $-$).

   b) Probar que si C es el gráfico de $y = y(x)$, entonces y verifica la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

   c) Probar que $y = y(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1 - x^2}$ es una tractriz.

   d) Probar que $\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\frac{\theta}{2})))$ es una tractriz.

9. Calcular la longitud $L(C) = \int_a^b \|\alpha'\|$ de todas las curvas del ejercicio 7. En el caso de la elipse, dejar planteada la integral (no tiene primitiva elemental).

10. Dada una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua dada por $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, definimos $W = \int_a^b \alpha \in \mathbb{R}^n$ como el vector que se obtiene al integrar cada coordenada, es decir
    $$\int_a^b \alpha = (\int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt).$$

    a) Si $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b (\lambda\alpha + \beta) = \lambda \int_a^b \alpha + \int_a^b \beta$.

    b) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ es transformación lineal, entonces $\int_a^b T\alpha = T \int_a^b \alpha$.

    c) Para todo $V \in \mathbb{R}^n$, vale $\langle \int_a^b \alpha, V\rangle = \int_a^b \langle\alpha, V\rangle$.

    d) $\| \int_a^b \alpha\| \leq \int_a^b \|\alpha\|$ para cualquier norma en $\mathbb{R}^n$.

    e) Probar que si α es C^1 entonces $\int_a^b \dot{\alpha} = \alpha(b) - \alpha(a)$.

11. Hallar una parametrización por longitud de arco de las curvas:

    a) hélice, b) espiral logarítmica, c) tractriz.

12. Probar que si todas las rectas tangentes a una curva C son paralelas a una recta dada L, entonces la curva C en cuestión es una recta (se puede suponer que C está parametrizada por longitud de arco).

13. Probar que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ está contenida en una esfera si y sólo si $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha(t)$ para todo $t \in I$.

14. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ y κ su curvatura (signada). Probar que si α está p.x.l.a., entonces $\kappa(t) = -\frac{x''(t)}{y'(t)}$ cada vez que $y'(t) \neq 0$. Hallar una fórmula equivalente para cuando $x'(t) \neq 0$. *Sugerencia: derivar* $(x')^2 + (y')^2 = 1$.

15. Calcular la curvatura de las curvas del Ejercicio 1, y la de la tractriz (Ejercicio 8).

16. Dada una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, parametrizarla, calcular su curvatura κ y hallar los máximos y mínimos de $\kappa(t)$. Interpretar geométricamente.

17. Un disco circular de radio 1 rueda en el plano xy sin resbalar sobre el eje x. La figura descripta por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama *cicloide*,

    a) Probar que $\alpha(t) = (t - \mathrm{sen}(t), 1 - \cos(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$ es una cicloide.

    b) Hacer un gráfico aproximado y calcular $L_0^{2\pi}(\alpha)$ *(ayuda:* $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}dt = 4$*)*.

    c) Calcular el área encerrada por la curva α y el eje de las x usando el Teorema de Green.

18. Dada una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, y $s \in I$, el vector **tangente unitario** en $\alpha(s)$ es $\mathbf{t}(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$. Si $\mathbf{t}'(s) \neq 0$, el vector **normal** es $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}$, y el vector **binormal** es $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$.

    a) Probar que $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$, que $\|\mathbf{b}\| = 1$ y que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ forman una base ortonormal orientada positivamente de $\mathbb{R}^3$.

    b) Probar que el plano generado por $\{\alpha'(s), \alpha''(s)\}$ coincide con el plano generado por $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$. Este es el plano *osculador* en el punto $\alpha(s)$ de la curva α.

    c) Probar que $\alpha' \times \alpha''$ es paralelo al vector binormal $\mathbf{b}$.

19. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es regular, entonces donde $\kappa \neq 0$ vale

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \qquad \tau(t) = -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = -\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

    Hallar la curvatura y torsión de las siguientes curvas en $\mathbb{R}^3$.

$$a)\ x = u,\ y = u^2,\ z = u^3 \qquad b)\ x = u,\ y = \frac{1+u}{u},\ z = \frac{1-u^2}{u}$$

$$c)\ \alpha(u) = (a(u - \sin(u)), a(u - \cos(u)), bu) \quad d)\ \beta(u) = (a(3u - u^3), 3au^2, a(3u + u^3)).$$

20. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$. Probar que para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$ vale la identidad

$$A^t((Av) \times (Aw)) = \det(A)\, v \times w.$$

    En particular si U es ortogonal, $Uv \times Uw = \pm U(v \times w)$, con signo positivo si U preserva la orientación, y negativo si la invierte. Probar con esto que la curvatura y la torsión son invariantes por movimientos rígidos.

21. Dadas las fórmulas de Frenet $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}$, $\mathbf{b}' = \tau\mathbf{n}$, verificar que pueden escribirse como $\mathbf{t}' = \mathbf{R} \times \mathbf{t}$, $\mathbf{n}' = \mathbf{R} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{b}' = \mathbf{R} \times \mathbf{b}$, donde $\mathbf{R}$ es la curva definida por $\mathbf{R} = -\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$.

22. Si α una curva en $\mathbb{R}^3$ con curvatura y torsión nunca nulas, entonces α está contenida en una esfera si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$R^2 + (R')^2 T^2 = A, \qquad \text{donde } R = 1/\kappa, \quad T = 1/\tau.$$

23. Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura nunca nula. Se llama **centro de curvatura de α en s_0** a:

$$\beta(s_0) = \alpha(s_0) + {}^{1}\!/_{\kappa(s_0)}\, \mathbf{n}(s_0)$$

y se llama **círculo osculador a α en** s_0 al círculo de centro $\beta(s_0)$ y radio $\rho(s_0) = |\kappa(s_0)|^{-1}$, contenido en el plano osculador a $\alpha(s_0)$. Probar:

a) Una expresión paramétrica para el circulo oscilador en $\alpha(s_0)$ es

$$\alpha(s_0) + {}^{1}\!/_{\kappa(s_0)}\, [\cos(\theta)\mathbf{t}(s_0) + (\sin(\theta) + 1)\, \mathbf{n}(s_0)]$$

b) La curva α y el círculo osculador a α en s_0 tienen contacto de segundo orden.

c) La curva β es la **evoluta** de α y α es la **evolvente** de β. Probar que las tangentes a la evoluta son normales a la evolvente en los puntos respectivos.

24. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, con curvatura y torsión nunca nulas. Sea P un plano que satisface las siguientes condiciones:

a) P contiene la recta tangente en s_0.

b) Para todo entorno $I \subset \mathbb{R}$ de s_0, existen puntos de $\alpha(I)$ a ambos lados de P.

Probar que P es el plano osculador de α en s_0.

25. Probar que bajo cualquiera de las siguientes condiciones ($\kappa > 0$), la curva es plana:

a) Todos los planos osculadores de la curva pasan por un punto fijo.

b) Todos los planos osculadores son paralelos a un plano dado.

26. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es llamada **hélice** si las tangentes de α forman un ángulo constante con alguna dirección fija. Asumiendo que $\kappa, \tau \neq 0$, probar que:

a) Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) α es una hélice.
2) $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante.
3) Las rectas que contienen $n(s)$ son paralelas a un plano fijo.
4) Las rectas que contienen $b(s)$ tienen un ángulo constante con una dirección fija.

b) Probar que $\alpha(s) = (a\cos({}^{s}\!/_{c}), a\sin({}^{s}\!/_{c}), {}^{bs}\!/_{c})$, con $s \in \mathbb{R}$ y a, b, c constantes tales que $c^2 = a^2 + b^2$ es una hélice parametrizada por longitud de arco con $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{b}{a}$.

27. Probar que si la cubica $x = at$, $y = bt^2$, $z = t^3$ satisface la condición $2b^2 = 3a$, entonces es una hélice trazada sobre un cono cuyo eje está en el plano xz y forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje x. Hallar la ecuación del cono.

28. Probar que las tangentes a una hélice cortan un plano normal a su cilindro proyectante en puntos de la evolvente de la base del cilindro.