Geometrıá Proyectiva - 2° cuatrimestre de 2018

Práctica 1

Funciones Cuadráticas y Cuádricas

Cuadrado nunca jugó con Redondo.

En esta guia, el cuerpo base es $\mathbb{R}$ salvo que se indique lo contrario.

1. Dados dos puntos p, $q \in \mathbb{R}^2$ y un número real a tal que $2a > d(p,q)$, definimos

$$\mathscr{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p) + d(x,q) = 2a\}.$$

   a) Demostrar que el conjunto $\mathscr{E}$ es una elipse. Llamamos a los puntos p y q sus focos.

   b) Ver que el punto medio entre los focos es el centro de la elipse.

   c) Pruebe que toda elipse puede obtenerse por esta construcción.

2. Mostrar que dada una elipse que refleja los rayos de luz como un espejo plano (es decir, con el mismo ángulo de incidencia que de reflexión), los rayos emitidos desde un foco pasan, luego de reflejarse, por el otro.

3. Si p, $q \in \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 < 2a < d(p,q)$, definimos

$$\mathscr{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |d(x,p) - d(x,q)| = 2a\}.$$

   Probar que el conjunto $\mathscr{H}$ es una hipérbola y que toda hipérbola puede obtenerse de esta forma.

4. Si $p \in \mathbb{R}^2$ y $L \subset \mathbb{R}^2$ es una recta que no contiene a p, sea

$$\mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p) = d(x,L)\}.$$

   a) Probar que el conjunto $\mathscr{P}$ es una parábola.

   b) Ver que toda parábola se obtiene de esta forma.

   c) Llamamos a p el *foco* de la parábola y a la recta L su *eje*. Supongamos que una parábola refleja la luz como un espejo plano, demuestre que los rayos que tienen dirección perpendicular al eje y que provienen del semiespacio que contiene al foco, se concentran, luego de reflejarse, en dicho foco.

5. Sea $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Encontrar una base B de V de modo que la matriz de β en B, $A = |\beta|_{BB}$, sea diagonal.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $|\beta|_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde E es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) $V = \mathbb{R}^4$, $\beta(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$.

   c) $V = \mathbb{R}^3$, $|\beta|_{B'B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $B' = \{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

6. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuadrática cuya expresión en la base canónica es

$$F(x) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - 10.$$

Encontrar la expresión de F en $\mathbb{R}^3_{(1,0,2)}$, $\mathbb{R}^3_{(1,1,5)}$ y $\mathbb{R}^3_{(0,0,1)}$.

7. Si $Q \neq 0$ y $H \subset C_Q$ es un hiperplano dado por una funcional $\varphi \in V^*$, entonces existe $\psi \in V^*$ tal que $Q = \varphi\psi$. Luego $C_Q = H \cup \tilde{H}$ donde $\tilde{H} = \ker \psi$ puede ser igual a H. En particular C_Q contiene a lo sumo dos hiperplanos.

8. Sean V un espacio vectorial y $\mathscr{C}$ una cuádrica. Probar que si $f \in GA(V)$ entonces $\mathscr{C}' = f(\mathscr{C})$ es una cuádrica.

9. Dado un polinomio de grado dos en n variables reales F probar que para cualquier transformación afín inversible f vale que:

   a) $\mathrm{cent}(F \circ f) = f^{-1}\mathrm{cent}(F)$.

   b) $\mathscr{C}(F \circ f) = f^{-1}\mathscr{C}(F)$.

   Al conjunto de centros de de $\mathscr{C}$ lo denotaremos $\mathscr{C}_C$.

10. Sea $\mathscr{C}$ la cuádrica dada por los ceros de $F(x) = \langle Tx, x\rangle + 2\langle b, x\rangle + k$.

    a) Si $c \in V$ es centro de $\mathscr{C}$, entonces $F(x) = Q(x-c)+F(c)$. Probar que la cuádrica tiene *algún* punto singular si y sólo si $F(c) = 0$.

    b) Considerar el sistema afín $Tx + b = 0, \langle b, x\rangle + k = 0$. Probar que $p \in V$ es solución del sistema si y sólo si es un punto singular de la cuádrica. Concluir que el conjunto de puntos singulares de $\mathscr{C}$ es una variedad afín.

11. En cada uno de los siguientes casos encontrar el conjunto de centros de la cuádrica $\mathscr{C} = \mathscr{C}(F)$.

    a) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)

    b) $x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x - 4x_2 - 5 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)

    c) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 3 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)

    d) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

    e) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

    f) $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

    g) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_3 - 7 = 0$ (en $\mathbb{R}^4$)

12. Determinar el conjunto de puntos singulares $\mathscr{C}_S = \mathscr{C}_C \cap \mathscr{C}$ para cada una de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$.

    a) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 3)$

    b) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + 4x_4 = 0$ $(n = 4)$

    c) $x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ $(n = 4)$

    d) $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ $(n = 5)$

    e) $x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $(n = 2)$

13. Determinar los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la cuádrica $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ de ecuación

$$x^2 + (a^2 + 3)y^2 + (a^2 - 3)z^2 + (2a + 4)xy + 2xz + x - 2y + 1 = 0$$

tiene centro único.

14. Sean L una recta y $\mathscr{C}$ una cuádrica. Probar que el conjunto $L \cap \mathscr{C}$ bien es vacío, tiene solo un punto, tiene solo dos puntos, o es todo L.

15. Probar que todo punto de la cuádrica $\mathscr{C}$ es singular si y sólo si $\mathscr{C}$ es una variedad lineal.

16. Sea $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^2$ la cónica de ecuación $F = 0$ y sea $p \in \mathbb{R}^2 - \mathscr{C}$. Determine los puntos $x \in \mathscr{C}$ tales que la recta tangente a $\mathscr{C}$ en x pasa por p.

17. Demostrar que por cada punto del hiperboloide de una hoja de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

pasan dos rectas contenidas en él.

18. *a*) Hallar las rectas tangentes a la cónica $\mathscr{C} : 3x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0$ que pasan por $p = (1, 1)$.

    b) Determinar todos los puntos p de la cónica $\mathscr{C} : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ tales que la tangente en p sea paralela a la recta $L : x_1 + x_2 = 3$.

19. Hallar la ecuación del hiperplano tangente a las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$ en los puntos indicados.

    a) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$ $\qquad P = (1, 0)$

    b) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 - 10 = 0$ $\qquad P = (-2, 0)$

    c) $3x_1^2 - 5x_3^2 + 3x_1x_2 + 6x_1 - x_2 = 0$ $\qquad P = (1, -2, 1)$

    d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ $\qquad P = (0, 0, 1)$

    e) $6x_1x_2 - 4x_1 + 9x_2 - 6 = 0$ $\qquad P = (-\frac{3}{2}, 0, 0)$

20. Sean V un espacio vectorial y $F : Q + 2\varphi + k = 0$ una función cuadrática. Dado $p \in V$ que no es centro de $\mathscr{C}(F)$, se llama *hiperplano polar* de p respecto de $\mathscr{C}$ a

$$P_p\mathscr{C} = \{x : \beta(p, x) + \varphi(x + p) + k = 0\}.$$

    a) ¿Qué ocurre si p es un centro?

    b) Dado $q \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_S$, probar que $p \in T_q\mathscr{C}$ sii $q \in P_p\mathscr{C}$.

    c) Calcular $P_p\mathscr{C}$ para $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ y $p = (-1, 4)$. Graficar.

21. Determinar la ecuación normal afín de las siguientes cuádricas en $\mathbb{R}^n$, indicando en cada caso el sistema de coordenadas afines utilizado, el rango y el índice. Esbozar un gráfico aproximado.

    a) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0$ $\qquad (n = 2)$

    b) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3 = 0$ $\qquad (n = 3)$

    c) $x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0$ $\qquad (n = 4)$

d) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 2)$

e) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4 = 0$ $(n = 3)$

f) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5 = 0$ $(n = 3)$

g) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 4x_1 + 4x_2 + 2 = 0$ $(n = 3)$

h) $3x_1^2 - 24x_1x_2 + 32x_1 + 40 = 0$ $(n = 2)$

i) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 18x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 6 = 0$ $(n = 2)$

j) $x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $(n = 2)$

k) $5x_1^2 + 20x_2^2 + 12x_1x_2 + 2x_2x_3 + 8x_1 + 8x_3 + 16 = 0$ $(n = 3)$

l) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 3x_1 - 2x_2 + 8 = 0$ $(n = 3)$

m) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + 3x_1 + 1 = 0$ $(n = 3)$

n) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 3x_1 + 1 = 0$ $(n = 3)$

ñ) $Q : (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = 1$ $(a, b \in \mathbb{R}, n = 2)$

o) $Q : 9(x_1 - a)^2 - 4(x_2 - b)^2 + 2x_3^2 = 1$ $(a, b \in \mathbb{R}, n = 2)$

22. Determinar, si es posible, todos los valores de a, para que la cuádrica de $\mathbb{R}^3$

$$Q : 2x^2 + 3y^2 + az^2 - 2xy + 4z - 5 = 0$$

a) sea un hiperboloide de una hoja.

b) sea un par de planos paralelos.

c) sea un cilindro parabólico.

d) sea un paraboloide elíptico.

e) sea un elipsoide.

f) sea un cono.

23. Dadas las cónicas de $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &: \quad 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ \mathscr{C}' &: \quad 5y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2 - 2y_1 + 4y_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

encontrar un isomorfismo afín f tal que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

24. Determinar la ecuación normal euclídea de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$.

a) $x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 2)$

b) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$ $(n = 2)$

c) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0$ $(n = 2)$

d) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 18x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 6 = 0$ $(n = 2)$

e) $2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1 + x_3 = 0$ $(n = 3)$

f) $3x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_1 + 20x_2 + 8x_3 - 17 = 0$ $(n = 3)$

g) $5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 1 = 0$ $(n = 3)$

h) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$ $(n = 3)$

25. Demuestre que las secciones planas de un cono en $\mathbb{R}^3$ son cónicas. Interprete la clasificación de las cónicas en términos de la posición del plano utilizado para la sección.