Geometriá Proyectiva - 2° cuatrimestre de 2018

Práctica 0

Transformaciones lineales y afines

La base está.

En estas guias, $\mathbb{K}$ denota el cuerpo base, y en todos los casos, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno que hace de la base canónica un sistema ortonormal, sean v, w son vectores en $\mathbb{R}^n$. Verificar que si pensamos v, w como matrices de $n \times 1$, entonces
$$\langle v, w \rangle = w^t \cdot v = v^t \cdot w = \langle w, v \rangle$$
donde pensamos a sus traspuestos v^t, w^t como matrices de $1 \times n$.

   · ¿Cómo hay que modificar esta afirmación para el caso de $\mathbb{C}^n$ y el producto interno sesqui-lineal canónico?

2. Sean T_1, T_2 matrices de $n \times n$. Probar que si para todo par de vectores v, w de $\mathbb{K}^n$ se tiene $\langle T_1 v, w \rangle = \langle T_2 v, w \rangle$, entonces $T_1 = T_2$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una $\mathbb{R}$-transformación lineal que escribimos como matriz A en las bases canónica de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, sea A^t la matriz transpuesta que se obtiene cambiando las filas de A por las columnas de A. Probar que

   a) $(A^t)^t = A$.

   b) $(Av)^t = v^t \cdot A^t$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$.

   c) $\langle Av, w \rangle = w^t \cdot A \cdot v = (A^t w)^t \cdot v = \langle v, A^t w \rangle$ para todo par de vectores $v \in \mathbb{R}^n, w \in R^m$.

      · ¿Cómo hay que modificar estas afirmaciones para el caso una $\mathbb{C}$-t.l.?

      · La transformación lineal $T^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ inducida por la matriz traspuesta (o traspuesta conjugada) se denomina **adjunta** de T.

      · Extender los resultados de este ejercicio para el caso de un espacio vectorial E con producto interno $\langle , \rangle$.

4. Dado un hiperplano $S \subset \mathbb{R}^n$ y $N \in \mathbb{R}^n$ su normal unitaria ($||N|| = 1$), definimos $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como
$$E(V) = V - \langle V, N \rangle N.$$

   a) Probar que E es una transformación lineal, que $\mathrm{Ran}(E) = S$, y que $\ker(E) = T^{\perp} = gen\{N\}$.

   b) Probar que $E^2 = E = E^*$, es decir que E es un *proyector ortogonal*.

   c) Pobar que E es el único proyector ortogonal con rango S.

   d) Probar que $1 - E$ es una proyección ortogonal sobre $S^{\perp}$.

5. Sea $(H, \langle , \rangle)$ un espacio con producto interno y $A \subset H$ convexo y cerrado, sea $d = \mathrm{dist}(x, A) \geq 0$.

   a) Probar usando la ley del paralelogramo que para todo $a, b \in A$ y $x \in H$,
$$||a - b||^2 = 2||x - a||^2 + 2||x - b||^2 - 4\left\|x - \frac{a + b}{2}\right\|^2 \leqslant 2||x - a||^2 + 2||x - b||^2 - 4d^2.$$

b) Probar que existe un único $a_0 \in A$ que realiza la distancia $d(x, A)$, esto es $\|a_0 - x\| \leqslant \|a - x\|$ para todo $a \in A$.

c) Denotando $a_0 = \Pi_A(x)$, probar que $\|\Pi_A(x) - \Pi_A(y)\| \leqslant \|x - y\|$ para todo $x, y \in H$.

6. Sean E, F espacios con producto interno y T una t.l. entre ellos. Si T^* denota la t.l. adjunta, probar que

$$\begin{array}{llll} i) & \mathrm{Ran}(T)^\perp = \ker(T^*) & ii) & \mathrm{Ran}(T^*)^\perp = \ker(T) \\ iii) & \mathrm{Ran}(T) = \ker(T^*)^\perp & iv) & \mathrm{Ran}(T^*) = \ker(T)^\perp. \end{array}$$

7. Una t.l. $T : E \to E$ es **normal** si $T^*T = TT^*$. Probar que

a) $\ker(T) = \ker(T^*)$

b) Autovectores de T correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

c) Si $T^* = T$ decimos que T es **autoadjunta** (simétrica en el caso real, Hermitiana en el caso complejo). Probar que toda matriz simétrica es diagonalizable en una base ortonormal.

8. Una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una **transformación ortogonal** si $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$. Probar que son equivalentes:

a) U es una transformación ortogonal.

b) U es una isometría, o sea U es lineal y $\|Uv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

c) U es inversible y su inversa se calcula como su traspuesta, es decir $U^{-1} = U^t$.

· Enunciar y probar un lema análogo para transformaciones $\mathbb{C}$-lineales (usualmente llamadas **transformaciones unitarias**).

9. Probar que toda transformación ortogonal verifica $\det(U) = \pm 1$. ¿Es cierta la recíproca? (dar una prueba o un contraejemplo). ¿Cómo es el determinante de una transformación unitaria?

10. Probar que $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que U es una simetría alrededor de la recta $y = x$. ¿Qué determinante tiene U? ¿Preserva la orientación de $\mathbb{R}^2$?

11. Si $\theta \in [0, 2\pi]$, y $U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, probar que U_θ es ortogonal y preserva la orientación. Mostrar que U es una rotación de ángulo θ alrededor del origen, en sentido positivo.

12. Probar que $\det(v, w) = \pm area(R) = \pm\|v\|\,\|w\| \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2}$, donde R es el paralelogramo generado por v, w, y θ es el ángulo formado por v, w.

13. Sean $V, W, Z \in \mathbb{R}^3$. Probar que

a) $\langle Z, V \times W \rangle = \det(Z, V, W)$ (*sugerencia: basta probar la igualdad para* $Z = E_1, E_2, E_3$ *con* E_i *los vectores de la base canónica de* $\mathbb{R}^3$).

b) Probar la propiedad cíclica del triple producto:

$$\langle Z, V \times W \rangle = \langle V, W \times Z \rangle = \langle W, Z \times V \rangle.$$

c) $||V \times W|| = area(R) = ||V|| ||W|| \operatorname{sen}\theta$, donde R es el paralelogramo generado por V, W y θ es el ángulo entre V y W

(*sugerencia: girando la figura basta probarlo para V, W en el plano $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$, usar entonces el ejercicio 12*).

d) $\det(V, W, Z) = \pm vol(P) = ||V \times W|| ||Z|| \operatorname{sen}\mu$ donde P es el paralelepípedo generado por V, W, Z y μ es el ángulo subtendido por Z y la base generada por V, W.

14. Analizar si los siguientes son sistemas de coordenadas afines en V:

- $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(2, 1, 3); (0, -1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 2)\}$
- $V = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{2X + 3; X^2, 2X, 3X + 4\}$
- $V = \mathbb{R}$, $S = \{-2; 2\}$
- $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $S = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$

15. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$ un sistema de coordenadas afines en V. Dado $v \in V$, notaremos con $[v]_S$ al vector de coordenadas de v respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V_A.

a) Hallar $[v]_S$ en los casos siguientes:

- $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(2, 1, 0); (0, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 0, -3)\}$, $v = (0, 0, 0)$
- $V = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{X^2; X + 1, X^2 + 3X, X^2 + 2\}$, $v = 2X$
- $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $S = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

b) Sea $S = \{(0, -2, 1); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Calcular el vector v , sabiendo que $[v]_S = (-2, 0, 4)$.

c) Sean $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$ y $S' = \{B, w_1, \ldots, w_n\}$ dos sistemas afines en V. Si $v \in V$, expresar $[v]_{S'}$ en función de $[v]_S$.

16. Sea $v_1, \ldots, v_m \in V$, $m \geq 2$. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $v_1, \ldots, v_m$ son afinmente independientes.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$ con $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$, implica que $\lambda_i = 0$ para $1 \leq i \leq m$.

17. Sea V un espacio vectorial y $M \subset V$. Probar que son equivalentes:

a) M es una variedad lineal.

b) Para todo $B \in M$, M es un subespacio de V_B.

c) Si $C \in V$, existe un único subespacio W de V_C tal que $M = A +_C W$, cualquiera sea $A \in M$.

18. Sea V un espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_k \in V$. Llamamos

$$\sigma(v_1, \ldots, v_k) = \{v \in V : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \text{ con } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

al conjunto de las combinaciones afines de $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Probar que $\sigma(v_1, \ldots, v_k)$ es una variedad lineal y que es la menor que incluye a $\{v_1, \ldots, v_n\}$. ¿Qué dimensión tiene?

19. Hallar un conjunto de generadores afinmente independientes de las siguientes variedades lineales:

 - $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 2\ ,\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
 - $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 = 0\}$
 - $M = \{x \in R^2 : x_1 - x_2 = 2 \quad 2x_1 - 3x_2 = 1\}$
 - $M = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2\}$
 - $M = \sigma(4X^2 + 2X, 2X^2 + X, 3X^2 + X + 1, 5X^2 + 2X + 1) \in \mathbb{R}_2[X]$

20. Una función $f : V \longrightarrow W$ es una transformación afín si $f = g + B$, con $B \in W$ y $g : V \longrightarrow W$ lineal. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface $f(\lambda \cdot_x y) = \lambda \cdot_{f(x)} f(y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es una transformación afín.

21. Probar que son equivalentes:

 - f es afín.
 - Existe $A \in V$ tal que $f : V_A \longrightarrow W_{f(A)}$ es lineal.
 - Para todo $C \in V$, $f : V_C \longrightarrow W_{f(C)}$ es lineal.

22. Sea $GA(V) = \{f : V \longrightarrow V$ tales que f es isomorfismo afín$\}$.

 a) Probar que $GA(V)$ es un grupo con la composición, el **grupo de transformaciones afines**.

 b) Un **movimiento rígido en** V es la composición de una translación seguida por una transformación ortogonal con determinante positivo; mostrar que los movimientos rígidos forman un grupo con la composición, denominado **grupo de Euclides** $E(V)$, subgrupo de $GA(V)$.

 c) Mostrar que la norma de un vector y el ángulo θ entre dos vectores ($0 \leq \theta \leq \pi$) son preservados por transformaciones ortogonales.

 d) Mostrar que si $V = \mathbb{R}^3$, entonces $T(u) \times T(v) = T(u \times v)$ para transformaciones ortogonales con determinante positivo (*sugerencia: usar el segundo item del Ejercicio 13*). ¿Qué ocurre con las transformaciones ortogonales de determinante negativo?

 e) Probar que los movimientos rígidos preservan el volumen de los paralelepípedos.

 f) El conjunto de movimientos rígidos que preservan la orientación se denota $SE(3)$ y se denominan **propios**. Probar que forman un subgrupo de $E(3)$.