K-teoría
Primer Cuatrimestre, 2014
Práctica 1

(1) Sea A un anillo asociativo, no necesariamente unital. Sea $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{Z}$ equipado con la siguiente multiplicación:

$$(a, n)(b, m) = (ab + nb + ma, nm).$$

i) Probar que $\tilde{A}$ es un anillo asociativo unital y que la inclusión $A \to \tilde{A}$ es morfismo de anillos.
ii) Probar que si $f : A \to R$ es un morfismo de anillos con R unital entonces existe un único morfismo de anillos unitales $\tilde{f} : \tilde{A} \to R$ tal que $\tilde{f}_{|A} = f$.
iii) Probar que si R es un anillo unital y $R \times \mathbb{Z}$ es el producto cartesiano de anillos (con operaciones coordenada a coordenada) entonces $\tilde{R} \cong R \times \mathbb{Z}$.

(2) Sea A un anillo y sean $e, f \in \mathrm{Idem}A$. Decimos que e y f con *conjugados* si existe $g \in \tilde{A}$ inversible tal que $geg^{-1} = f$. Probar que si R es unital, y $e, f \in \mathrm{Idem}R$, entonces e y f son conjugados si y sólo si existe $g \in R$ inversible tal que $geg^{-1} = f$.

(3) Sea A un anillo y sean $e, f \in \mathrm{Idem}A$. Decimos que e y f son *algebraicamente equivalentes* si existen $x, y \in A$ tales que $xy = e$, $yx = f$.
(a) Probar que si $e, f \in \mathrm{Idem}A$ son conjugados entonces son algebraicamente equivalentes.
(b) Probar que si $e, f \in \mathrm{Idem}A$ son algebraicamente equivalentes entonces existen $x_1, y_1 \in A$ tales que $x_1y_1 = e$, $y_1x_1 = f$, $x_1 = ex_1 = x_1f = ex_1f$ y $y_1 = fy_1 = y_1e = fy_1e$.
(c) Sean x_1, y_1 como en el ítem anterior. Sea

$$z = \begin{bmatrix} 1-f & y_1 \\ x & 1-e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{bmatrix} \in M_2\tilde{A}$$

Probar que z es inversible y que $z(e \oplus 0)z^{-1} = (f \oplus 0)$.

(4) Sea R un anillo con unidad y sean $e, f \in \mathrm{Idem}_\infty R$. Probar que e y f pertenecen a la misma clase en $V(R)$ si y sólo si son algebraicamente equivalentes.

(5) Un anillo unital R se dice *local* si posee un único ideal a izquierda maximal. Sean R un anillo local y $\mathfrak{m}$ su único ideal a izquierda maximal. Probar
(a) El ideal $\mathfrak{m}$ es bilátero y es el único ideal a derecha maximal de R.
(b) El anillo $D = R/\mathfrak{m}$ es de división.
(c) Una matriz $g \in M_nR$ es inversible si y sólo si su imagen en D lo es.
(d) La aplicación $V(R) \to V(D)$ es un isomorfismo de monoides.

(6) Sean R un anillo unital y $n \geq 1$.
(a) Probar que la clase en $V(M_n(R))$ del idempotente $e_{i,i} \in \mathrm{Idem}_1(M_n(R))$ es independiente de $1 \leq i \leq n$.
(b) Probar que el isomorfismo canónico (el visto en clase) $V(M_n(R)) \cong V(R)$ manda la clase del idempotente $e_{1,1} \in \mathrm{Idem}_1 M_n(R)$ en la de $1 \in \mathrm{Idem}_1 R$.
(c) Sea

$$\Delta : R \to M_nR$$
$$\Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} ae_{i,i}$$

Probar que la composición de $V(\Delta)$ con el isomorfismo canónico $V(M_n(R)) \cong V(R)$ es el morfismo de multiplicación por n.

(7) Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y A una k-álgebra de dimensión finita. Probar:
(a) A es un anillo de división si y sólo si $\dim_k A = 1$.

(b) A es semismiple si y sólo si existen $r \geq 1$ y $n_1, \ldots, n_r \geq 1$ tales que

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i} k.$$

(8) Sean k un cuerpo y $m, n \in \mathbb{N}$. Probar:
   (a) Existe un morfismo de k-álgebras unital $M_m k \to M_n k \iff m \backslash n$.
   (b) Si $m \backslash n$ y $\alpha : M_m k \to M_n k$ es un morfismo unital, entonces existe $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ tal que para todo $x \in M_n k$ se tiene $\alpha(x) = g\Delta(x)g^{-1}$.

   Sugerencia general para todo el ejercicio: usar el teorema de Wedderburn.

(9) Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y sean R y S k-álgebras semisimples de dimensión finita. Probar:
   (a) Si $\alpha : V(R) \to V(S)$ es un morfismo que manda la clase del idempotente $1 = p_1 \in \mathrm{Idem} R$ en la clase de $p_1 \in \mathrm{Idem} S$, entonces existe un morfismo de k-álgebras $f : R \to S$ tal que $V(f) = \alpha$.
   (b) Las siguientes condiciones son equivalentes:
      (i) Existe un isomorfismo de monoides $V(R) \xrightarrow{\cong} V(S)$ que manda $[p_1]$ en $[p_1]$.
      (ii) Las álgebras R y S son isomorfas.

(10) Sean $n \geq 1$, k un cuerpo algebraicamente cerrado.
   (a) Caracterizar las matrices $T \in M_n k$ tales que la subálgebra $k[T] \subset M_n k$ generada por T es semisimple.
   (b) Calcular $V(k[T])$, primero para T como en el ítem anterior y luego para cualquier T.

(11) Sean k un cuerpo y

$$M_n k \supset T_n k = \{a : a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\}$$

la k-álgebra de matrices triangulares superiores. Calcular $V(T_n k)$.

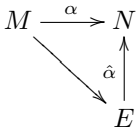
(12) Sean R un anillo con unidad y P un R-módulo a derecha finitamente generado. Sea $P^* = Hom_R(P, R)$. Probar que son equivalentes:
   (a) P es proyectivo.
   (b) Existen $x_1, \ldots, x_n \in P$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P^*$ tales que

$$p = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i(p) \quad (p \in P).$$

(13) Sea $f : R \to S$ un morfismo unital de anillos unitales. Si N es un S módulo a derecha llamamos $f^{\#}N$ al grupo abeliano N equipado con la siguiente estructura de R-módulo:

$$n \cdot r := nf(r)$$

Sea M un R módulo a derecha. Una *extensión de escalares de M a través de f* consiste de un S-módulo E y un morfismo de R-módulos $M \to f^{\#}E$ tal que si N es otro S-módulo y $\alpha : M \to f^{\#}N$ es un morfismo de R-módulos, entonces existe un único morfismo de S-módulos $\hat{\alpha} : E \to N$ de modo que el diagrama siguiente es conmutativo:



   (a) Consideremos el grupo abeliano

$$M \otimes_R S = \mathbb{Z}[M \times S]/\langle (mr, s) - (m, f(r)s) \rangle$$

   Llamemos $m \otimes s$ a la clase de (m, s) en $M \otimes_R S$. Probar que $M \otimes_R S$ equipado con la estructura de S-módulo inducida por $(m \otimes s)s' = m \otimes ss'$ y el morfismo $M \to f^{\#}(M \otimes_R S)$ $m \mapsto m \otimes 1$ es una extensión de escalares de M y que toda otra extensión de escalares es canónicamente isomorfa a esta.
   (b) Probar que $R \otimes_R S = S$.

(c) Probar que $\otimes_R S$ preserva sumas directas: $(\bigoplus_i M_i) \otimes_R S = \bigoplus_i (M_i \otimes_R S)$.
(d) Probar que si P es proyectivo entonces $P \otimes_R S$ es proyectivo.
(e) Probar que si $e \in \mathrm{Idem}_n R$ entonces $(eR^n) \otimes_R S \cong f(e)S^n$. Deducir que la identificación entre V y el monoide de clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados identifica $e \mapsto f(e)$ con $P \mapsto P \otimes_R S$.

(14) Sean $n \geq 2$, $P_n = \mathbb{Z}\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ el anillo de polinomios no conmutativo, y L_n el cociente de P_n por el ideal bilátero generado por los elementos $\delta_{ij} - y_i x_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ y $1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
(a) Sea $e_i = x_i y_i$. Probar que e_i es idempotente y que $e_i L_n \cong L_n$.
(b) $n \cdot [L_n] = [L_n]$ en $V(L_n)$.

(15) Sea M un monoide abeliano. Se considera la siguiente relación de equivalencia en el monoide $M \oplus M$:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff (\exists x \in M) \;\; m_1 + n_2 + x = m_2 + n_1 + x.$$

Probar que el monoide cociente $M/\sim$ es un grupo abeliano, que $\iota : M \to M/\sim$ es morfismo de monoides, y que el par $(M/\sim, \iota)$ es un grupo de Grothendieck de M.

(16) Si M y N son monoides abelianos entonces el morfismo canónico

$$(M \oplus N)^+ \to M^+ \oplus N^+$$

es un isomorfismo.

(17) Sea $R = C(S^1, \mathbb{R})$; consideremos las siguientes matrices en $M_2 R$:

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}, \quad e = \frac{1 + u}{2}.$$

Probar:
(a) $u \in Gl_2 R$, $e \in \mathrm{Idem}_2 R$.
(b) Para cada $(x, y) \in S^1$, $e(x, y)$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ en el subespacio de autovectores de autovalor 1 de $u(x, y)$.
(c) Si $v \in P = eR^2$ entonces existe $(x, y) \in S^1$ tal que $v(x, y) = 0$.
(d) P no es libre.