

MÓDULOS, PRÁCTICA 1

Algunas definiciones.

En esta práctica todos los anillos tienen unidad. Sea A un anillo. El *centro* de A es el subconjunto

$$\mathcal{Z}(A) := \{a \in A \mid ax = xa, \text{ para todo } x \in A\}.$$

Un elemento $a \in A$ se dice *invertible* si tiene inversa bilátera (i.e. existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$). Decimos que A es *anillo de división* si todo elemento no nulo es invertible. Cuando no se aclare otra cosa, A -módulo significará A -módulo a izquierda.

Un A -módulo M se dice *fiel* si $aM = 0, a \in A \implies a = 0$.

Ejercicios

1. Sean K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Probar lo siguiente.
 - Sean $V \subseteq K^n$ un subespacio vectorial e I_V el subconjunto de $M_n(K)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a V . Probar que I_V es un ideal a izquierda de $M_n(K)$.
 - Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(K)$ es de la forma del definido en el ítem anterior. (Sugerencia: tomar V como el conjunto formado por todas las filas de todas las matrices del ideal y probar que es un subespacio).
 - Probar que $M_n(K)$ es *simple* (i.e. no tiene ideales biláteros no triviales).
 - Probar que $\mathcal{Z}(M_n(K)) = K \cdot I$.
2. Hallar todos los ideales de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}[X]$.
3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\langle a, b \rangle = \langle \text{mcd}(a, b) \rangle$.
4. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados.
 - a) Probar que si $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ con $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, entonces $a = a'$ y $b = b'$.
 - b) Probar que si d es impar, $\{a + b\sqrt{d} \mid a \equiv b \pmod{2}\}$ es un ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
5. Hallar un ideal de $\mathbb{Z}[X]$ que no pueda generarse por un único elemento.
6. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A .
7. Determinar en cada uno de los siguientes casos si la acción $\cdot$ de A sobre M define en M una estructura de A -módulo a izquierda.
 - a) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$, $a \cdot m = am$.

- b) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot m = am$, $(n \in \mathbb{N})$.
- c) $A = M_n(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot m = am$, $(n \in \mathbb{N})$.
- d) $A = M_n(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}$, $a \cdot m = \det(a)m$, $(n \in \mathbb{N})$.
- e) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot (m_1, m_2, \dots, m_n) = (a(1)m_1, a(2)m_2, \dots, a(n)m_n)$, $(n \in \mathbb{N})$.
- f) $A = \mathbb{Z}_{nk}$, $M = \mathbb{Z}_n$, $a \cdot m = r_n(am)$, $(n, k \in \mathbb{N})$.
8. Decidir cuáles de los A -módulos del ejercicio anterior son fieles.
9. Sean A y B anillos, M un B -módulo y $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot m = \varphi(a) \cdot m$ define sobre M una estructura de A -módulo, que denotamos φ^*M .
10. Determinar en cada uno de los siguientes casos si S es un submódulo del A -módulo M .
- a) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$, $S = \mathbb{R}i$.
- b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M \mid \det(a_{ij}) = 0\}$, $(n \in \mathbb{N})$.
- c) A un anillo cualquiera, $M = A^n$, $S = \{(a_1, \dots, a_n) \in M \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$, $(n \in \mathbb{N})$.
- d) $A = \mathbb{Z}[X]$, $M = \mathbb{Z}[X]$, $S = \{f \in M \mid f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\}$.
11. Sean M un A -módulo, S un subconjunto de M y N un submódulo de M . Probar que $(N : S) = \{a \in A \mid as \in N \forall s \in S\}$ es un ideal a izquierda de A .
12. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en el $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z}$ un sistema de generadores minimal con n elementos.
13. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $2 < n < m$. Probar en cada uno de los siguientes casos que f es un morfismo de A -módulos.
- a) $A = \mathbb{Z}$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a) = 2a$.
- b) $A = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$.
- c) A un anillo cualquiera, $f : A^n \rightarrow A^m$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$.
- d) A un anillo cualquiera, $f : A^m \rightarrow A^n$, $f(a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_n)$.
- e) A un anillo cualquiera, $f : A^n \rightarrow A^2$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1 + a_n, a_n)$.
- f) A un anillo cualquiera, $f : A^n \rightarrow A^n$, $f(a_1, \dots, a_n) = (a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n)$.
- g) A un anillo cualquiera, fijo $a_0 \in A$, $f : A[X] \rightarrow A$, $f(g) = g(a_0)$.
14. En cada uno de los ítems del ejercicio anterior, hallar el núcleo, la imagen y determinar si f es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción y/o isomorfismo.
15. Sean V y W dos $\mathbb{Q}$ -módulos y $f : V \rightarrow W$ una función. Probar que f es un morfismo de $\mathbb{Q}$ -módulos si y sólo si es un morfismo de grupos.

16. Sean M y N dos A -módulos a izquierda. Probar lo siguiente.
- (a) $\text{Hom}_A(M, N)$ tiene estructura de (A) -módulo a izquierda vía: $(a \cdot f)(m) = a \cdot f(m)$.
 - (b) $\text{Hom}_A(A, N) \simeq N$ como (A) -módulos.
 - (c) Si además M es un *bimódulo* - es decir M es también un A -módulo a derecha y $(am)b = a(mb)$, $(a, b \in A, m \in M)$ - entonces $\text{Hom}_A(M, N)$ tiene estructura de A -módulo a izquierda mediante la acción $(a * f)(m) = f(ma)$.
 - (d) Observar que A es un A -bimódulo y probar que la acción de A en $\text{Hom}_A(A, N)$ mediante $*$ extiende a la acción de (A) del ítem (a).
 - (e) $\text{Hom}_A(A, N) \simeq N$ como A -módulos.
17. Caracterizar en cada uno de los siguientes casos el A -módulo cociente M/S .
- a) $M = A^n$, $S = \{(a_1, \dots, a_n) \in M \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$.
 - b) $M = A[X]$, $S = \{f \in M \mid f(1) = 0\}$.
 - c) $M = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij}) \in M \mid a_{i1} = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n\}$.
18. Sean M, N A -módulos y $f : M \rightarrow N$ una función. Probar que f es un morfismo si y sólo si el *gráfico de f* , $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ es un submódulo de $M \oplus N$.
19. Sea k un cuerpo. Una k -álgebra es un anillo A junto con un morfismo de anillos $\iota : k \rightarrow (A)$. Probar lo siguiente.
- a) Si A es una k -álgebra, la fórmula $\lambda \cdot a := \iota(\lambda)a$, $(\lambda \in k, a \in A)$ define en A una estructura de k -espacio vectorial con la propiedad: $(\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b)$, $(\lambda \in k, a, b \in A)$.
 - b) Si A es un anillo con una estructura de k -espacio vectorial que verifica la propiedad del ítem anterior, entonces A es una k -álgebra vía el morfismo $\iota : k \rightarrow (A)$, $\iota(\lambda) := \lambda \cdot 1$.
 - c) Si A es una k -álgebra y M es un módulo entonces el producto: $\lambda * m := \iota(\lambda)m$ define en M una estructura de k -espacio vectorial. Más aún, para esta estructura se tiene que la imagen del morfismo canónico $\rho : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}} M$, $a \mapsto (m \mapsto am)$ está contenida en el subanillo $\text{End}_k M \subset \text{End}_{\mathbb{Z}} M$.
 - d) Sea M un grupo abeliano. Probar que es lo mismo darle una estructura de A -módulo a M que darle una estructura de k -espacio vectorial y dar un morfismo de anillos $\rho : A \rightarrow \text{End}_k(M)$ que además es k -lineal.
20. Sean A y B k -álgebras. Un *morfismo de k -álgebras* $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos que es también una transformación k -lineal. Probar lo siguiente.
- a) Las aplicaciones ι y ρ del ejercicio anterior son morfismos de k -álgebras.

- b) Sea $\rho : A \rightarrow \text{End}_k(A)$ el morfismo de k -álgebras que le corresponde al A -módulo A via la correspondencia dada más arriba. Probar que ρ es inyectivo. Concluir que toda k -álgebra de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra de $M_n(k)$ para algún $n \leq \dim_k A$.

21. Sea M un A -módulo.

- a) Probar que si $f \in \text{End}_A(M)$ verifica $f^2 = f$, entonces $M = \ker f \oplus \text{im } f$.
- b) Probar que si M_1 y M_2 son submódulos de M tales que $M = M_1 \oplus M_2$, entonces existe $f \in \text{End}_A(M)$ tal que $f^2 = f$, $M_1 = \ker f$ y $M_2 = \text{im } f$.