K -TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2012
Práctica 4

En esta práctica, A es un anillo, R es un anillo con unidad, e $\iota : A \rightarrow M_n A$ e $\text{inc} : M_n A \rightarrow M_{n+1} A$ denotan los morfismos $\iota(a) = ae_{11}$, $\text{inc}(a) = a$. Si A y B son anillos, denotamos por $\text{hom}(A, B) = \text{hom}_{\text{Rings}}(A, B)$ al conjunto de homomorfismos de anillos de A en B y por $[A, B] = \text{hom}(A, B) / \sim$ al cociente por la relación de homotopía polinomial.

(1) Sean $(\phi_0, \phi_1) : A \rightrightarrows \mathcal{E} \triangleright I$ un casi-homomorfismo y $F : \text{Rings} \rightarrow \text{Ab}$ un functor exacto escindido. Probar:

- (a) Sean $B = \mathcal{E} \times_{\mathcal{E}/I} \mathcal{E}$ y $p : B \rightarrow \mathcal{E}$, $p(x, y) = x$ la proyección. Probar que p es retracción con sección $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow B$, $\Delta(e) = (e, e)$.
- (b) Sea $j : I \rightarrow B$, $j(x) = (0, x)$. Probar que $\text{im } F(j) = \ker F(p)$.
- (c) Sea $\phi : A \rightarrow B$, $\phi(a) = (\phi_1(a), \phi_0(a))$. Probar que $F(\phi_0, \phi_1) = F(j)^{-1} \circ (F(\phi) - F(\Delta \circ \phi_1))$.

(2) Sea $QA = A * A$ el coproducto de A consigo mismo y sea $j_i : A \rightarrow QA$ ($i = 1, 2$) la inclusión (ver el ejercicio 11 de la práctica 3).

- (a) Sea $\mu : QA \rightarrow A$ el único morfismo tal que $\mu \circ j_i = \text{id}_A$ para $i = 1, 2$, y sea $qA = \ker \mu$. Probar que qA es el ideal bilátero generado por los elementos $q(a) = j_1(a) - j_2(a)$ ($a \in A$).
- (b) Sea $(\phi_0, \phi_1) : A \rightrightarrows \mathcal{E} \triangleright I$ un casi-homomorfismo y sea $\psi : QA \rightarrow \mathcal{E}$ el morfismo determinado por $\phi \circ j_i = \phi_{i-1}$. Probar que $\psi(qA) \subset I$.
- (c) Probar que si $F : \text{Rings} \rightarrow \text{Ab}$ es un functor exacto escindido, entonces $F(\phi_0, \phi_1) = F(\psi|_{qA})F(j_1, j_2)$.
- (d) Sea $\pi : QA \rightarrow A$ el morfismo determinado por $\pi \circ j_1 = \text{id}_A$, $\pi \circ j_2 = 0$. Sea $\delta : qA \rightarrow A$ la restricción de π . Probar que si $F : \text{Rings} \rightarrow \text{Ab}$ es un functor exacto escindido, M_2 -estable e invariante homotópico, entonces $F(\delta)$ y $F(j_1, j_2)$ son isomorfismos inversos.
- (e) Probar que si (ϕ_0, ϕ_1) y ψ son como en (b) y F es como en (c), entonces $F(\phi_0, \phi_1) = F(\psi|_{qA}) \circ F(\delta)^{-1}$.

(3) Sea A un anillo.

- (a) Probar que hay una identificación natural $\text{Idem}(A) = \text{hom}(\mathbb{Z}, A)$.
- (b) Sea $1 = [p_1] \in K_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ el generador canónico. Cada casi-homomorfismo

$$(1) \quad (\phi_0, \phi_1) : \mathbb{Z} \rightrightarrows \mathcal{E} \triangleright M_\infty A$$

determina un elemento $x = K_0(\phi_0, \phi_1)(1) \in K_0 A$; decimos que x proviene del casi-homomorfismo (1). Probar que si $\mathcal{E}$ es unital y $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/M_\infty A$ es retracción, entonces todo elemento de $K_0(A)$ proviene de un casi-homomorfismo (1).

(4) Sean M, N y P grupos abelianos. Probar que las aplicación

$$\phi : \text{hom}(M \otimes N, P) \rightarrow \text{hom}(M, \text{hom}(N, P)), \phi(f)(m)(n) = f(m \otimes n)$$

es un isomorfismo de grupos.

(5) Sea $H : \text{Rings} \rightarrow \text{Ab}$ un functor, A y B anillos y R un anillo unital.

- (a) Si $\overline{H}$ es M_2 -estable y aditivo, la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Idem}_\infty R = \text{hom}(\mathbb{Z}, M_\infty R) &\rightarrow \text{hom}(H(B), H(M_\infty R \otimes B)) \\ f &\mapsto H(f \otimes \text{id}_B) \end{aligned}$$

induce un morfismo de grupos $K_0(R) \rightarrow \text{hom}(H(B), H(M_\infty R \otimes B))$.

- (b) Sea $\iota : B \rightarrow M_\infty B$ la inclusión canónica. Probar que el morfismo del ítem anterior envía $[p_1]$ en $H(\iota)$.
- (c) Si H es M_2 -estable y exacto escindido, hay un morfismo natural

$$K_0(A) \rightarrow \text{hom}(H(B), H(M_\infty(A \otimes B))).$$

Si además H es M_∞ -estable se obtiene un morfismo $K_0(A) \rightarrow \text{hom}(H(B), H(A \otimes B))$ y por tanto –en virtud del ejercicio (4)– un morfismo

$$\cdot : K_0(A) \otimes H(B) \rightarrow H(A \otimes B), \quad x \otimes y \mapsto x \cdot y.$$

- (d) Sea (1) un casi-homomorfismo con $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/M_\infty A$ retracción. Probar que $(\phi_0 \otimes id_B, \phi_1 \otimes id_B)$ define un casi-homomorfismo $B \rightrightarrows \mathcal{E} \otimes B \triangleright M_\infty(A \otimes B)$, y que si $x \in H(B)$ entonces

$$K_0(\phi_0, \phi_1)(1) \cdot x = H(\iota)^{-1} H(\phi_0 \otimes id_B, \phi_1 \otimes id_B)(x)$$

- (e) Aplicando el ítem (b) al functor $H = K_0$ se obtiene un producto $K_0(A) \otimes K_0(B) \rightarrow K_0(A \otimes B)$. Probar que estos productos son compatibles en el siguiente sentido. Si $x \in K_0(A)$, $y \in K_0(B)$ y $z \in H(C)$, entonces

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- (f) Probar que si A es un anillo conmutativo, entonces $m : A \otimes A \rightarrow A$ $m(a \otimes b) = ab$ es morfismo de anillos y

$$K_0(m) \circ \cdot : K_0(A) \otimes K_0(A) \rightarrow K_0(A)$$

define un producto que hace de $K_0(A)$ un anillo conmutativo que tiene unidad si A la tiene.

Notación. Una teoría de homología escisiva de anillos consiste de:

- Un functor $H_n : \underline{\text{Rings}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.
- Un morfismo $\partial_n^E : H_{n+1}C \rightarrow H_nA$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada sucesión exacta de anillos

$$E : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

de modo que la sucesión de grupos

$$H_{n+1}C \xrightarrow{\partial_n^E} H_nA \longrightarrow H_nB \longrightarrow H_nC$$

es exacta.

Se requiere que los morfismos ∂_n sean naturales en el sentido siguiente. Si

$$\begin{array}{ccccccc} E : 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ E' : 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo con filas exactas, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}C & \xrightarrow{\partial_n^E} & H_nA \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ H_{n+1}C' & \xrightarrow{\partial_n^{E'}} & H_nA' \end{array}$$

es conmutativo. En adelante escribiremos ∂ por ∂_n^E . La teoría de homología se dice M_p -estable, invariante homotópica, etc. si cada H_n lo es.

- (6) Sea $\{H_n\}$ una teoría de homología de anillos escisiva, M_∞ -estable e invariante homotópica polinomial.

- (a) Probar que hay isomorfismos canónicos $H_n(A) \cong H_0(\Omega^n A)$ y $H_{-n}(A) = H_0(\Sigma^n A)$ ($n \geq 0$).
 (b) Probar que la aplicación $\cdot$ del ejercicio (5) induce un morfismo

$$\cdot : KH_0(A) \otimes H_n(B) \rightarrow H_n(A \otimes B)$$

y por tanto un morfismo

$$\cdot : KH_m(A) \otimes H_n(B) = KH_0(\Omega^m A) \otimes H_n(B) \rightarrow H_{n+m}(A \otimes B)$$

En particular, dado que KH es una teoría de homología escisiva, M_∞ -estable e invariante homotópica, se tiene un producto

$$KH_n(A) \otimes KH_m(B) \rightarrow KH_{n+m}(A \otimes B)$$

- (c) Probar que los productos del ítem anterior son compatibles en el sentido de (5e).
 (d) Probar que si A es un anillo conmutativo entonces $KH_*(A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} KH_p(A)$ es un anillo y $H_*(A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(A)$ es un $KH_*(A)$ -módulo.

- (7) Probar que la relación de homotopía polinomial es compatible con la composición de morfismos; i.e. si A, B, C y D son anillos y $f \sim g \in \text{hom}(B, C)$ son morfismos homotópicos entonces $h \circ f \sim h \circ g$ y $f \circ k \sim g \circ k$ para todo $h \in \text{hom}(C, D)$ y todo $k \in \text{hom}(A, B)$. Deducir que la composición de morfismos define una ley de composición asociativa $\circ : [C, D] \times [A, B] \rightarrow [A, D]$.

- (8) Probar que las inclusiones $\iota_0, \iota_1 : A \rightarrow M_2A$, $\iota_0(a) = e_{11}a$, $\iota_1(a) = e_{22}a$ son homotópicas.

Notación. Un anillo B se dice M_2 -estable si existe un isomorfismo $\theta : M_2B \rightarrow B$ tal que $\theta\iota_0$ es homotópico a la identidad.

- (9) Sean A y B anillos. Probar:

(a) Si B es M_2 estable entonces $A \otimes B$ es M_2 -estable.

(b) ΓA es M_2 -estable, y se puede elegir θ de modo que $\theta(M_2(M_\infty A)) = M_\infty A$. En particular $M_\infty A$ es M_2 -estable.

- (10) Sean A y B anillos. Supóngase que B es M_2 -estable y sea $\theta : M_2B \rightarrow B$ como en la definición de estabilidad. Probar que $[A, B]$ es un monoide abeliano con la operación

$$[\phi] + [\psi] = \theta(\phi \oplus \psi) = \theta\left(\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}\right)$$

- (11) Sean A y B anillos,

$$QQ(A, B) := \{(\phi_0, \phi_1) : A \rightrightarrows \Gamma B \triangleright M_\infty B \text{ casi-homomorfismo}\}$$

y $[QQ](A, B) = QQ(A, B) / \sim$ el conjunto de clases de homotopía de casi-homomorfismos.

Probar:

- (a) $[QQ](A, B)$ es un grupo abeliano con la operación

$$[(\phi_0, \phi_1)] + [(\psi_0, \psi_1)] = [\theta \circ (\phi_0 \oplus \psi_0, \phi_1 \oplus \psi_1)]$$

- (b) Si $H : \underline{\text{Rings}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ es un funtor exacto escindido, M_∞ estable e invariante por homotopías polinomiales entonces hay un morfismo natural

$$[QQ](A, B) \otimes H(A) \rightarrow H(B), \quad [(\phi_0, \phi_1)] \otimes x \mapsto H(\phi_0, \phi_1)(x)$$

- (12) Sea A un anillo. Calcular $KH_*(A[G])$ en función de $KH_*(A)$ para cada uno de los siguientes grupos:

(a) $G = \mathbb{Z}^n$.

(b) $G = \{a/b \in \mathbb{Q} : \nu_p(b) \leq \nu_p(n) \text{ } p \text{ primo}\}$ donde n y ν son como en el ejercicio 13 de la práctica 1.

- (13) *Coproducto de grupos.*

(a) Sean G un grupo y $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$, $\epsilon(g) = 1$ ($g \in G$). Sea $IG = \ker \epsilon$. Probar que $\mathbb{Z}[G] \cong \widetilde{IG}$.

(b) Probar que para R un anillo con unidad y $R^* = \text{GL}_1(R)$, hay una biyección canónica $\text{hom}_{\underline{\text{Grp}}}(G, R^*) \cong \text{hom}_{\underline{\text{Rings}}_1}(\mathbb{Z}[G], R)$.

(c) El *coproducto* de G y H es el grupo $G \vee H$ dado por los siguientes generadores y las siguientes relaciones

$$G \vee H = \{x_g, y_h, g \in G, h \in H \mid x_{g_1 g_2} = x_{g_1} x_{g_2}, \quad y_{g_1 g_2} = y_{g_1} y_{g_2}\}$$

Sea $*$ el coproducto de anillos (como en el ejercicio 11 de la práctica 3). Probar que $I(G \vee H) = IG * IH$.

(d) Expresar $KH_*(\mathbb{Z}[G \vee H])$ en función de $KH_*(\mathbb{Z}[G])$ y $KH_*(\mathbb{Z}[H])$.

(e) Sea $\mathbb{F}_n$ el grupo no conmutativo libre en n letras. Calcular $KH_*(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_n])$ en función de $KH_*(\mathbb{Z})$.

- (14) Sean A un anillo, $\alpha : A \rightarrow A$ un automorfismo, y $B = A \rtimes \mathbb{Z} = A[t, t^{-1}; \alpha]$ el producto cruzado. Sean $\mathcal{T}$ el anillo de Toeplitz y $\mathcal{T}(A, \alpha)$ el anillo de Toeplitz torcido. Probar que $\mathcal{T}(A, \alpha)$ es isomorfo al subanillo de $\mathcal{T} \otimes B$ generado por los elementos $s \otimes t^{-1}$, $s^* \otimes t$ y $1 \otimes a$ ($a \in A$).

(15) Sean $A' \rightarrow A \rightarrow A''$ morfismos de anillos y α', α y α'' automorfismos de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \alpha' \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha'' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

sea conmutativo con filas exactas. Probar que el diagrama siguiente conmuta para todo n :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} KH_{n+1}A'' & \xrightarrow{\partial} & KH_nA' \\ \downarrow \alpha'' & & \downarrow \alpha' \\ KH_{n+1}A'' & \xrightarrow{\partial} & KH_nA' \end{array}$$

Sugerencia: seguir los siguientes pasos

(a) Probar –primero para el caso en que $A \rightarrow A''$ es unital y luego en general– que

$$\begin{array}{ccc} K_1A'' & \xrightarrow{\partial} & K_0A' \\ \downarrow \alpha'' & & \downarrow \alpha' \\ K_1A'' & \xrightarrow{\partial} & K_0A' \end{array}$$

es conmutativo.

(b) Probar que

$$\begin{array}{ccc} K_0A'' & \xrightarrow{\partial} & K_{-1}A' \\ \downarrow \alpha'' & & \downarrow \alpha' \\ K_0A'' & \xrightarrow{\partial} & K_{-1}A' \end{array}$$

es conmutativo.

(c) Probar que el diagrama (2) es conmutativo.

(16) Sean R un anillo unital y $u \in R^*$ un elemento inversible central (i.e. $ur = ru \forall r \in R$). Sea

$$S = R\{X, Y\} / \langle YX - uXY \rangle$$

la R -álgebra libre en X e Y sujetos a la relación $YX = uXY$.

(a) Sea $\phi : R[X, X^{-1}] \rightarrow R[X, X^{-1}]$, el automorfismo unital R -lineal definido por $\phi(X) = uX$.

Probar que $S = R[X, X^{-1}] \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}$.

(b) Sea $\psi : \Gamma R \rightarrow \Gamma R$, $\psi(a)_{i,j} = u^{i-j} a_{i,j}$. Probar que $\mathcal{T}R$, $\mathcal{T}_0R$ y M_{∞} son estables por ψ .

(c) Probar que $KH_n(\psi) : KH_n(M_{\infty}R) \rightarrow KH_n(M_{\infty}R)$ es el morfismo identidad.

(d) Probar que $KH_n(\psi) : KH_n(R[X, X^{-1}]) \rightarrow KH_n(R[X, X^{-1}])$ es el morfismo identidad.

(e) Calcular $KH_n(S)$ en función de $KH_n(R)$.