K-TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2012
Práctica 3

En esta práctica, A es un anillo, R es un anillo con unidad, $\iota : A \rightarrow M_n A$ e $\text{inc} : M_n A \rightarrow M_{n+1} A$ denotan los morfismos $\iota(a) = ae_{11}$, $\text{inc}(a) = a$. Un álgebra sobre un anillo conmutativo unitario k es un anillo A con una estructura de k -módulo tal que si $a, b \in A$ y $\lambda \in k$, entonces

$$\lambda \cdot (ab) = (\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b)$$

El ejercicio 3) utiliza resultados básicos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert y está pensado para quienes hayan cursado una materia (Análisis Funcional, e.g.) en la que se hayan dado. El ejercicio 6) está destinado a quienes no estén familiarizados con el producto tensorial.

- (1) Sean $F : \underline{\text{Rings}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ un functor y A un anillo. Probar:
- (a) Son equivalentes:
 - Para todo $n, p \in \mathbb{N}$, F es M_p -estable en $M_n A$.
 - Para todo $n \in \mathbb{N}$, F es M_2 -estable en $M_n A$
 En particular, un functor M_2 -estable es M_n -estable, para todo n .
 - (b) Si F es M_∞ -estable tanto en A como en $M_n A$, entonces F es M_n -estable en A . En particular, si F es M_∞ -estable, entonces es M_n -estable para todo n .

- (2) (a) Sea L un R -módulo libre, finitamente generado de rango n . Eligiendo una base $\mathfrak{B}$ de L se obtiene un isomorfismo $\phi = \phi_{\mathfrak{B}} : M_n R \rightarrow \text{End}_R L$. Probar que $K_j(\phi)$ es independiente de la elección de $\mathfrak{B}$ ($j = 0, 1$).
- (b) Supongamos que R es un cuerpo. Si $e \in \text{End}_R L$ es idempotente, entonces $\iota_e : R \rightarrow \text{End}_R L$, $x \mapsto xe$ es un morfismo de anillos. Probar que si $e \in \text{End}_R L$ es de rango 1, entonces $K_j(\iota_e) = K_j(\phi \iota)$. En particular, $K_j(\iota_e)$ es independiente de la elección del idempotente e de rango 1.
- (c) Sean H un espacio de Hilbert complejo separable (e.g. $H = \ell^2(\mathbb{N})$) y $\mathcal{F}$ el anillo de operadores $T : H \rightarrow H$ con $\dim \text{im } T < \infty$. Si $V \subset W \subset H$ son subespacios de dimensión finita y $U = V^\perp \cap W$ entonces la descomposición $W = V \oplus U$ induce una inclusión $\text{End}_{\mathbb{C}}(V) \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$. Probar que

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\dim V < \infty} \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

- (d) Probar que si $e \in \mathcal{F}$ es cualquier idempotente autoadjunto y de rango 1, entonces la inclusión $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F}$, $x \mapsto xe$, induce un isomorfismo $K_j(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} K_j(\mathcal{F})$. Probar más aún que este isomorfismo es independiente de la elección de e .
- (3) Sean H como en el ejercicio anterior y sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ el anillo de operadores acotados $H \rightarrow H$; i.e.

$$\mathcal{B} = \{T : H \rightarrow H : \text{lineal tal que } \|T\| := \sup_{\|h\|=1} \|T(h)\| < \infty\}$$

- (a) $\mathcal{F} \triangleleft \mathcal{B}$.
- (b) Sea $\mathcal{K} \triangleleft \mathcal{B}$ la clausura de $\mathcal{F}$; los elementos de $\mathcal{K}$ son los operadores *compactos*. Un resultado clásico de Calkin establece que si $I \triangleleft \mathcal{B}$ es un ideal propio, entonces $\mathcal{F} \subset I \subset \mathcal{K}$. Sea $R_I = R_I = \mathbb{C} \oplus I/\mathcal{F}$; probar que R_I es un anillo local (sug. usar el teorema de Riesz-Schauder).
- (c) Probar que hay un diagrama con filas exactas y columnas exactas escindidas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I/\mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C} \oplus I & \longrightarrow & R_I \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathbb{C} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C}
 \end{array}$$

- (d) Probar que $K_0(I/\mathcal{F}) = 0$. Deducir que $K_0(\mathcal{F}) \rightarrow K_0(I)$ es suryectivo y que $K_1(I/\mathcal{F}) \rightarrow K_0\mathcal{F}$ se factoriza a través de $K_1(R_I) \rightarrow K_0\mathcal{F}$.
- (e) $K_1(\mathbb{C} \oplus I) \rightarrow K_1(R_I)$ es suryectivo.
- (f) $K_0(\mathcal{F}) \rightarrow K_0(I)$ es un isomorfismo.
- (g) Sea $\mathcal{Q} = \mathcal{B}/\mathcal{F}$ y sea $T \in \mathcal{B}$ tal que su imagen $\bar{T} \in \text{GL}_1(\mathcal{Q})$. Probar que T es un operador de Fredholm.
- (h) Probar que si T es como en el ítem anterior y $\theta : K_0(\mathcal{F}) \cong K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ es el isomorfismo del ejercicio anterior, entonces la imagen por $\theta\partial$ de la clase de $\bar{T}$ en $K_1(\mathcal{Q})$ coincide con el índice $\text{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \text{im } T$:

$$\theta\partial[\bar{T}] = \text{ind}(T)$$

- (i) ¿Qué pasa si reemplazamos $\mathcal{F}$ por un ideal propio cualquiera I en los dos ítems anteriores?

- (4) Dados $a, b \in A$, sea $[a, b] = ab - ba$. Sea

$$[A, A] = \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i, b_i] : a_i, b_i \in A \quad (1 \leq i \leq n) \right\}$$

Sea

$$HH_0(A) := A/[A, A]$$

Probar:

- (a) La aplicación $Tr : M_\infty A \rightarrow HH_0(A)$, $Tr(a) = [\sum_i a_{i,i}]$ es una suryección con $\ker T \supset [M_\infty A, M_\infty A]$.
- (b) Si $A^2 = A$ entonces $\ker T = [M_\infty A, M_\infty A]$ y HH_0 es M_∞ -estable en A .
- (c) HH_0 conmuta con colímites filtrantes.
- (d) HH_0 es un funtor aditivo.
- (5) Sea L_2 el anillo del ejercicio 16 de la práctica 1. Probar:
- (a) $HH_0(L_2) \neq 0$.
- (b) L_2 no es un anillo con sumas directas infinitas.

- (6) Sean k un anillo conmutativo unital y sean M, N y P módulos sobre k . Sea

$$M \otimes_k N = \mathbb{Z}[M \times N] / \langle (\lambda m, n) - (m, \lambda n) : m \in M, n \in N \rangle$$

Sea $m \otimes n$ la clase de (m, n) en $M \otimes_k N$. Probar:

- (a) Hay una única estructura de k -módulo en $M \otimes_k N$ tal que $\lambda \cdot (m \otimes n) = (\lambda \cdot m) \otimes n$.
- (b) La aplicación $b : M \times N \rightarrow M \otimes_k N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ es k -bilineal.
- (c) Si $f : M \times N \rightarrow P$ es bilineal, entonces existe un único morfismo de k -módulos $\bar{f} : M \otimes_k N \rightarrow P$ tal que $\bar{f}(m \otimes n) = f(m, n)$.
- (d) Hay isomorfismos canónicos $(M \otimes_k N) \otimes_k P \cong M \otimes_k (N \otimes_k P)$ y $M \otimes_k N \cong N \otimes_k M$.
- (e) $M \otimes_k k \cong M$.
- (f) El funtor $M \otimes_k : k\text{-Mod} \rightarrow k\text{-Mod}$ conmuta con colímites filtrantes y sumas directas arbitrarias.
- (g) Si A y B son k -álgebras entonces $A \otimes_k B$ tiene una única estructura de k -álgebra tal que

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$$

- (h) Si A es una k -álgebra y $1 \leq n \leq \infty$ entonces $M_n A \cong M_n k \otimes_k A$.

- (7) Sean $\Gamma = \Gamma\mathbb{Z}$ y A un anillo. Probar:

- (a) Existe un morfismo de anillos canónico $f : \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \Gamma A$ que envía $\gamma \otimes a$ en γa (recordar que $\Gamma A \triangleleft \Gamma \tilde{A} \supset \Gamma$)
- (b) Sean $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ las proyecciones. La función característica $\chi_S \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ de un subconjunto $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ está en Γ si y sólo si

$$S \in \Theta = \{T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists N)(\forall n \in \mathbb{N}), \#(\pi_i^{-1}(n) \cap T) \leq N, i = 1, 2\}$$

- (c) Si $a \in \Gamma A$, entonces

$$a = f\left(\sum_{\lambda \in \text{im } a} \lambda \otimes \chi_{\{(i,j): a_{i,j}=\lambda\}}\right)$$

En particular, f es suryectiva.

(d) Cada elemento $x \in \Gamma \otimes A$ puede escribirse de la forma

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes \chi_{S_i}$$

con $S_1, \dots, S_n \in \Theta$, $S_i \neq S_j$ si $i \neq j$.

(e) Sea $S = \cup_{i=1}^n S_i$. Si $F \subset \{1, \dots, n\}$, sea

$$S_F = \left(\bigcap_{i \in F} S_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \notin F} (S \setminus S_j) \right)$$

Tenemos

$$S_F \in \Gamma, \quad S_F \cap S_{F'} = \emptyset \text{ si } F \neq F',$$

$$\chi_{S_i} = \sum_{i \in F} \chi_{S_F} \quad y \quad x = \sum_F \left(\sum_{i \in F} a_i \right) \otimes \chi_{S_F}$$

(f) f es un isomorfismo.

(g) f induce un isomorfismo $\Sigma \otimes A \cong \Sigma A$.

(8) Un resultado clásico de Karoubi establece que $K_{-1}(\mathcal{K}) = 0$. Asumiendo ese resultado, probar que $K_{-1}(I) = 0$ para todo ideal propio $I \triangleleft \mathcal{B}$.

(9) (Sucesión de Mayer-Vietoris para K^{top}) Probar que si

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \end{array}$$

es un cuadrado de Milnor en Banalg, entonces hay una sucesión exacta ($n \geq 0$)

$$\begin{array}{ccccccc} K_{n+1}^{\text{top}}(\mathfrak{A}) & \longrightarrow & K_{n+1}^{\text{top}}(\mathfrak{B}) \oplus K_{n+1}^{\text{top}}(\mathfrak{C}) & \longrightarrow & K_{n+1}^{\text{top}}(\mathfrak{D}) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & K_n^{\text{top}}(\mathfrak{D}) & \longleftarrow & K_n^{\text{top}}(\mathfrak{B}) \oplus K_n^{\text{top}}(\mathfrak{C}) \longleftarrow K_n^{\text{top}}(\mathfrak{A}) \end{array}$$

(10) Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unitaria. Calcular $KU(S^n)$ usando periodicidad de Bott.

(11) Sean A_1 y A_2 anillos, sea $P = \{x_a : a \in A_i, i = 1, 2\}$ el anillo no conmutativo de polinomios sin término constante y sea

$$A_1 * A_2 := P / \langle x_{ab} - x_a x_b : a, b \in A_i, i = 1, 2 \rangle$$

Sea $F : \underline{\text{Rings}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ un funtor. Probar:

(a) La aplicación $j_i : A_i \rightarrow A_1 * A_2$, $j_i(a) = [x_a]$ es morfismo de anillos. Si $f_1 : A_1 \rightarrow B$ y $f_2 : A_2 \rightarrow B$ son morfismos de anillos entonces existe un único morfismo de anillos $f : A_1 * A_2 \rightarrow B$ tal que $f \circ j_i = f_i$ ($i = 1, 2$).

(b) Sea $\pi : A_1 * A_2 \rightarrow A_1 \oplus A_2$ el morfismo canónico y sea $\text{diag} : A_1 \oplus A_2 \rightarrow M_2(A_1 * A_2)$, $\text{diag}(a, b) = ae_{1,1} + be_{2,2}$. Si F es M_2 -estable entonces $F(M_2\pi)F(\text{diag})$ es un isomorfismo. En particular, $F(\pi)$ es suryectivo. Sug: encontrar elementos $u, v \in M_3(A_1 * A_2)$ tales que $vu = 1$, $u(\text{inc}(M_2(A_1 * A_2)))v \subset \text{inc}(M_2(A_1 * A_2))$ e $\text{inc}(M_2(\pi)(\text{diag}(x))) = u(xe_{3,3})v$.

(c) Si además F es invariante por homotopías polinomiales, entonces $F(\text{diag})F(\pi)$ es un isomorfismo. En particular $F(\pi)$ es un isomorfismo. Sug: considerar el morfismo $H : A_1 * A_2 \rightarrow M_3(A_1 * A_2)[t]$ determinado por

$$H(j_i(a)) = a(1 - t^2)^2 e_{i,i} + at(t^2 - 1)e_{3,i} + a(1 - t^2)(t^3 - 2t)e_{i,3} - at(t^3 - 2t)e_{3,3}$$

(12) Probar que los morfismos canónicos $\mathbb{Z}[t] \otimes A \rightarrow A[t]$, $P\mathbb{Z} \otimes A \rightarrow PA$ y $\Omega\mathbb{Z} \otimes A \rightarrow \Omega A$ son isomorfismos.

(13) Probar que KV satisface Mayer-Vietoris para cuadrados de Milnor de anillos

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

tales que p sea una GL-fibración. Probar que todo morfismo de anillos f se puede sumergir en un tal cuadrado con $B = PD$ y $p = \text{ev}_1$.

(14) Probar que KH satisface Mayer-Vietoris para todos los cuadrados de Milnor de anillos.