K-TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2019
Práctica 2

En esta práctica, A es un anillo, R es un anillo con unidad y $\iota = \iota_A : A \to M_2 A$ denota el morfismo $\iota(a) = ae_{11}$. Si $x \in A$ e $1 \le i \neq j$, escribimos $\epsilon_{i,j}(x) = 1 + e_{i,j}x$.

(1) Sea $n \ge 2$. Calcular $K_1(M_{n^\infty}\mathbb{C})$.

(2) Sea R conmutativo. Probar:
(a) El determinante induce una retracción $\det : K_1(R) \to R^*$.
Sea $SK_1(R) = \ker(\det : K_1(R) \to R^*)$.
(b) Si S es otro anillo conmutativo y $f : R \to S$ un morfismo unital, entonces $f(SK_1(R)) \subset SK_1(S)$.
(c) Si R es un dominio euclideano, entonces $SK_1(R) = 0$.

(3) Sean R un anillo unitario, $R^* = \mathrm{GL}_1(R)$, y R^*_{ab} el abelianizado. Se considera el morfismo canónico

$$\jmath : R^*_{ab} \to K_1(R)$$

Probar:
(a) Si R es local, $\jmath$ es suryectivo.
(b) Si R es local y conmutativo, $\jmath$ es un isomorfismo.
Nota: El morfismo $\jmath$ es inyectivo para todo anillo local R, pero la demostración no es trivial. Ver Thm. 2.2.5 del libro de J. Rosenberg.

(4) Sea $\mathrm{GL}(A) = \ker(\mathrm{GL}(\tilde{A}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{Z}))$. Probar que GL es *exacto a izquierda*: si

$$0 \to A' \to A \to A" \to 0$$

es una sucesión exacta de anillos, entonces la sucesión de grupos

$$1 \to \mathrm{GL}(A') \to \mathrm{GL}(A) \to \mathrm{GL}(A")$$

es exacta. Dar un ejemplo en que $A \to A"$ sea surjectiva pero $\mathrm{GL}(A) \to \mathrm{GL}(A")$ no.

(5) Sea $I \lhd R$ un ideal bilátero. Sea $E(R : I) \lhd E(R)$ el mínimo subgrupo normal que contiene a las matrices elementales $1 + e_{i,j}x$ con $x \in I$ $(i \neq j)$. Probar:
(a) $E(\tilde{I} : I) = E(\tilde{I}) \cap \mathrm{GL}(I)$
(b) $E(\tilde{I} : I) \subset E(R : I)$.
(c) Si $g = 1 + x \in \mathrm{GL}(I)$ entonces

$$g \oplus g^{-1} = \epsilon_{1,2}(x)\epsilon_{2,1}(1)\epsilon_{1,2}(-g^{-1}x)\epsilon_{2,1}(-1)\epsilon_{2,1}(-x) \in E(R : I).$$

(d) $E(R : I) \lhd \mathrm{GL}(I)$.
(e) El grupo $K_1(R : I) := \mathrm{GL}(I)/E(R : I)$ es abeliano, y hay una sucesión exacta

$$K_1(R : I) \to K_1(R) \to K_1(R/I)$$

(f) Si $R \to R/I$ es una retracción, entonces la aplicación $K_1(R : I) \to K_1(R)$ es inyectiva, y la sucesión

$$0 \to K_1(R : I) \to K_1(R) \to K_1(R/I) \to 0$$

es exacta.
(g) Definir $K_1(A : I)$ para cualquier anillo A (no necesariamente unitario) que contenga a I como ideal bilátero de modo que se satisfagan (e) y (f).

(6) (a) Sean k un cuerpo y $k[\epsilon] = k[x]/\langle x^2 \rangle$. Probar que el morfismo canónico $K_1(k\epsilon) \to K_1(k[\epsilon] : k\epsilon)$ es un isomorfismo.
(b) Sea k un cuerpo de más de 2 elementos y sea $T = T_2 k$ el álgebra de matrices triangulares superiores de 2×2. Sea $I = ke_{1,2} \lhd T$; observar que $I \cong k\epsilon$. Probar que $K_1(T : I) = 0$. Sug: si $\mu \in k \setminus \{0, 1\}$ y $\lambda \in k$, entonces $1 + \lambda e_{1,2} = [\mu e_{1,1} + 1, 1 + \frac{\lambda}{\mu - 1} e_{1,2}]$.

(7) Sea $R = \mathbb{C}[t^2, t^3] \subset \mathbb{C}[t]$. Probar:

(a) Hay cuadrados de Milnor

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathbb{C}[t] \arrow[d, "t^2=0"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, tail] & \mathbb{C}[\epsilon] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R[u] \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathbb{C}[t,u] \arrow[d, "t^2=0"] \\ \mathbb{C}[u] \arrow[r, tail] & \mathbb{C}[\epsilon][u] \end{tikzcd}$$

(b) El elemento $\partial(1+\epsilon u) \in \partial(K_1(\mathbb{C}[\epsilon,u])) \subset K_0(R[u])$ no está en la imagen del morfismo $K_0(R) \to K_0(R[u])$; en particular este morfismo no es suryectivo.

(8) Probar que la sucesión de Mayer-Vietoris es válida para cuadrados de Milnor de anillos no necesariamente unitarios.