K-TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2019
Práctica 1

(1) Sea A un anillo. Probar que $V(A) = V(A^{op})$.

(2) Sean R un anillo unital y $1 \le n \le \infty$. Probar que la inclusión $R \to M_n R$, $a \mapsto e_{1,1}a$ induce un isomorfismo de monoides $V(R) \xrightarrow{\cong} V(M_n R)$.

Decimos que un anillo unital R tiene la *propiedad de la base invariante* (PBI) si el número de elementos de una base de un R-módulo libre no depende de la base elegida. En otras palabras, R tiene PBI si $R^n \cong R^m$ implica $n = m$.

(3) Probar:
   i) Si $\phi : R \to S$ es morfismo unital y S tiene PBI, entonces R tiene PBI.
   ii) Todo anillo conmutativo unital tiene PBI.
   iii) Sea $\iota : \mathbb{N}_0 = V(\mathbb{Z}) \to V(R)$ el morfismo de monoides inducido por el morfismo unital canónico de anillos $\mathbb{Z} \to R$. Probar que R tiene PBI si y sólo si ι es inyectivo.
   iv) Sea $n \ge 1$. Probar que R tiene PBI si y sólo si $M_n R$ la tiene.

(4) Sea M un monoide abeliano. Se considera la siguiente relación de equivalencia en el monoide $M \oplus M$:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff (\exists x \in M) \;\; m_1 + n_2 + x = m_2 + n_1 + x.$$

Probar que el monoide cociente $M/\sim$ es un grupo abeliano, que $\iota : M \to M/\sim$ es morfismo de monoides, y que el par $(M/\sim, \iota)$ es un grupo de Grothendieck de M.

(5) Si M y N son monoides abelianos entonces el morfismo canónico

$$(M \oplus N)^+ \to M^+ \oplus N^+$$

es un isomorfismo.

(6) Sean k un cuerpo y

$$M_n k \supset T_n k = \{a : a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\}$$

la k-álgebra de matrices triangulares superiores. Calcular $K_0(T_n k)$.

(7) Un anillo unital R se dice *local* si posee un único ideal a izquierda maximal. Sea R un anillo local y $\mathfrak{m}$ su único ideal a izquierda maximal. Probar
   (a) El ideal $\mathfrak{m}$ es bilátero y es el único ideal a derecha maximal de R.
   (b) El anillo $D = R/\mathfrak{m}$ es de división.
   (c) Una matriz $g \in M_n R$ es inversible si y sólo si su imagen en D lo es.
   (d) La aplicación $V(R) \to V(D)$ es un isomorfismo de monoides.

(8) Sean R un anillo unital y $n \ge 1$. Se consideran las inclusiones

$$\iota, \Delta : R \to M_n R$$
$$\iota(a) = a e_{1,1}$$
$$\Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} a e_{i,i}$$

Probar:
   (a) $K_0(\iota)$ es un isomorfismo.
   (b) $K_0(\iota)^{-1} K_0(\Delta)$ es el morfismo de multiplicación por n, i.e. manda $x \mapsto n \cdot x$.

(9) Sea A un anillo tal que $A^n = 0$. Calcular $K_0(A)$.

(10) Sea $(M_i)_{i\in I}$ un sistema dirigido de monoides abelianos y sea M su colímite en <u>Sets</u>. Probar que M tiene una estructura natural de monoide abeliano de modo que las aplicaciones canónicas $M_i \to M$ son morfismos de monoides y que M junto con tales aplicaciones es un colímite del sistema en la categoría de monoides abelianos.

(11) Sean I un conjunto ordenado dirigido, (M'_i, σ'), (M_i, σ) y $(M"_i, \sigma")$ sistemas de grupos abelianos dirigidos por I y sean M', M y $M"$ sus colímites. Sean $f_i : M'_i \to M_i$, $g_i : M_i \to M"_i$ morfismos compatibles con los morfismos de transición σ, σ' y $\sigma"$, y $f : M' \to M$, $g : M \to M"$ los morfismos inducidos. Probar que si para cada $i \in I$ la sucesión

$$0 \to M'_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M"_i \to 0$$

es exacta, entonces la sucesión

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M" \to 0$$

también es exacta.

(12) Sean M un grupo abeliano y $n \in \mathbb{Z}$. Sea

$$M[1/n] := \operatorname{colim}(M \overset{n}{\to} M \overset{n}{\to} M \overset{n}{\to} \cdots)$$

Probar
- (a) El grupo $M[1/n]$ es *unívocamente divisible por* n, i.e., el morfismo $M[1/n] \to M[1/n]$, $x \mapsto n \cdot x$ es un isomorfismo.
- (b) Si N es un grupo abeliano unívocamente divisible por n y $\alpha : M \to N$ es un morfismo de grupos, entonces existe un único morfismo $\hat\alpha : M[1/n] \to N$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & N \\ & M[1/n] \arrow[u, "\hat\alpha"'] \end{tikzcd}$$

(13) Sea R un anillo con unidad. Sea

$$M_{n^\infty} R := \operatorname{colim}(M_n R \overset{\Delta}{\to} M_{n^2} R \overset{\Delta}{\to} M_{n^3} R \overset{\Delta}{\to} \cdots)$$

Probar que $K_0(M_{n^\infty} R) = K_0(R)[1/n]$.

(14) Sean k un cuerpo y $m, n \in \mathbb{N}$. Probar:
- (a) Existe un morfismo de k-álgebras unital $M_m k \to M_n k \iff m \backslash n$.
- (b) Si $m\backslash n$ y $\alpha : M_m k \to M_n k$ es un morfismo unital, entonces existe $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ tal que para todo $x \in M_n k$ se tiene $\alpha(x) = g\Delta(x)g^{-1}$.

  Sugerencia general para todo el ejercicio: usar el teorema de Wedderburn.

(15) Sea (d_i) una sucesión de números naturales ≥ 2. Para cada $i \geq 1$ sea $n_i = d_1 \cdots d_i$, y sea $n = (n_i)$. Para cada primo p la *valuación p-ésima* de n es

$$\mathbb{N} \cup \{0, \infty\} \ni \nu_p(n) = \sup\{e : (\exists i) \;\; p^e \backslash n_i\}$$

Sean k un cuerpo, $f_i : M_{n_i} k \to M_{n_{i+1}} k$ un morfismo unital de k-álgebras ($i \geq 1$), y $R = \operatorname{colim}_i M_{n_i} k$ el correspondiente colímite. Probar

$$K_0(R) \cong \{a/b \in \mathbb{Q} : \nu_p(b) \leq \nu_p(n) \; p \text{ primo}\}$$

(16) Sea A un anillo tal que para todo subconjunto $F \subset A$, existe $n \geq 1$ tal que el conjunto $F^n := \{x_1 \cdots x_n : x_i \in F\}$ es cero. Probar que $K_0(A) = 0$.

(17) Sea $f : R \to S$ un morfismo unital de anillos unitales. Si N es un S módulo a derecha llamamos $f^{\#}N$ al grupo abeliano N equipado con la siguiente estructura de R-módulo:

$$n \cdot r := nf(r)$$

Sea M un R módulo a derecha. Una *extensión de escalares de M a través de f* consiste de un S-módulo E y un morfismo de R-módulos $M \to f^{\#}E$ tal que si N es otro S-módulo y $\alpha : M \to f^{\#}N$ es un morfismo de R-módulos, entonces existe un único morfismo de S-módulos $\hat{\alpha} : E \to N$ de modo que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & N \\ & E \arrow[u, "\hat{\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

(a) Consideremos el grupo abeliano

$$M \otimes_R S = \mathbb{Z}[M \times S]/\langle (mr, s) - (m, f(r)s) \rangle$$

Llamemos $m \otimes s$ a la clase de (m, s) en $M \otimes_R S$. Probar que $M \otimes_R S$ equipado con la estructura de S-módulo inducida por $(m \otimes s)s' = m \otimes ss'$ y el morfismo $M \to f^{\#}(M \otimes_R S)$ $m \mapsto m \otimes 1$ es una extensión de escalares de M y que toda otra extensión de escalares es canónicamente isomorfa a esta.

(b) Probar que $R \otimes_R S = S$.

(c) Probar que $\otimes_R S$ preserva sumas directas: $(\bigoplus_i M_i) \otimes_R S = \bigoplus_i (M_i \otimes_R S)$.

(d) Probar que si P es proyectivo entonces $P \otimes_R S$ es proyectivo.

(e) Probar que si $e \in \mathrm{Idem}_n R$ entonces $(eR^n) \otimes_R S \cong f(e)S^n$. Deducir que la identificación entre V y el monoide de clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados identifica $e \mapsto f(e)$ con $P \mapsto P \otimes_R S$.

(18) Sean $n \geq 2$, $P_n = \mathbb{Z}\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ el anillo de polinomios no conmutativo, y L_n el cociente de P_n por el ideal bilátero generado por los elementos $\delta_{ij} - y_i x_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ y $1 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

(a) Sea $e_i = x_i y_i$. Probar que e_i es idempotente y que $e_i L_n \cong L_n$.

(b) $(n-1) \cdot [L_n] = 0$ en $K_0(L_n)$.