GEOMETRÍA PROYECTIVA
Segundo Cuatrimestre — 2022

Práctica 4: Subvariedades de $\mathbb{R}^n$

Recuerdo: Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto y d un entero no negativo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para cada punto $x \in M$ existen abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tales que $x \in U$ y

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times 0^{n-d}) = \{y \in V : y_{d+1} = \cdots = y_n = 0\}.$$

(ii) Para todo punto $x \in M$ existen abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^d$ y una función diferenciable inyectiva $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$x \in U, \qquad \phi(W) = M \cap U,$$
$$\phi'(y) \text{ tiene rango } d \text{ para todo } y \in W, \quad \phi^{-1} : \phi(W) \to W \text{ es continua.}$$

A la función lineal $\phi'(y)$ también se la denota $d\phi(y)$.

Cuando se cumplen, decimos que M es una *subvariedad de dimensión* d *de* $\mathbb{R}^n$. Si $x \in M$, $W \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ satisfacen las condiciones de (*ii*), decimos que (ϕ, W) es una *parametrización regular de* M *alrededor de* x o un *sistema de coordenadas de* M *alrededor de* x.

1. Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión d y $N \subseteq M$ es un abierto relativo, entonces N es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d.

2. Sean (W_1, ϕ_1) y (W_2, ϕ_2) sistemas de coordenadas de M tales que $U = \phi_1(W_1) \cap \phi_2(W_2)$ sea no vacío. Demostrar que

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(U) \to \phi_2^{-1}(U)$$

es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^d$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y sea $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in \mathbb{R}^n\}$ su gráfico. Entonces Γ_f es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimensión n si y solamente si f es diferenciable.

4. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto y sean d, e números naturales. Supongamos que existen dos colecciones de sistemas de coordenadas para X, uno de dimensión d y otro de dimensión e. Demostrar que $d = e$.

5. Probar que $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es una subvariedad diferencial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1.

6. Sea $f : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u, v) = \left(\left(1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u\right) \cos u, \left(1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u\right) \sin u, \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} u\right)$$

Probar que $M = \operatorname{Im}(f)$ es una subvariedad de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$. Es la cinta de Möbius.

Sugerencia: considerar las restricciones de f *a los conjuntos*

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1, 1), \quad (0, \pi) \times (-1, 1), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times (-1, 1) \ \ y \ (\pi, 2\pi) \times (-1, 1).$$

.

Funciones diferenciables

7. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión d y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para cada $x \in M$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $g : U \to \mathbb{R}$ tales que $x \in U$ y $g|_{U\cap M} = f$.

(ii) Para cada $x \in M$ existe una parametrización regular $\phi : W \to M$ de M alrededor de x tal que la composición $f \circ \phi : W \to \mathbb{R}$ es diferenciable,

(iii) Para cada $x \in M$ y cada parametrización regular $\phi : W \to M$ de M alrededor de x, la composición $f \circ \phi : W \to \mathbb{R}$ es diferenciable,

Cuando estas condiciones se cumplen, decimos que f es *diferenciable*.

8. Si $M \subseteq \mathbb{R}^m$ y $N \subseteq \mathbb{R}^n$ son subvariedades y $f : M \to N$ es una función, decimos que f es *diferenciable* si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la composición $p_i \circ f : M \to \mathbb{R}$ de f con la proyección i-ésima $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Muestre que si $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ y $P \subseteq \mathbb{R}^p$ son subvariedades y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables, entonces $g \circ f : M \to P$ es también diferenciable.

9. Sea M la cinta de Möbius y $f : S^1 \to M$ la función definida por $f(x, y) = (x, y, 0)$ para $(x, y) \in S^1$. Probar que f es diferenciable.

Espacio tangente

10. Sea $x \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ un punto y (W, ϕ) un sistema de coordenadas con $x \in \phi(W)$. Sea $w \in W$ el único punto tal que $x = \phi(w)$. Consideramos la derivada $d\phi(w) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ y definimos el *espacio tangente* a M en x como el subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$

$$TM(x) := d\phi(w)(\mathbb{R}^d)$$

Demostrar que si $x = \psi(v)$ donde (V, ψ) es otro sistema de coordenadas de M entonces vale que $d\phi(w)(\mathbb{R}^d) = d\psi(v)(\mathbb{R}^d)$ de modo que $TM(x)$ es independiente del sistema de coordenadas elegido.

11. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ subvariedades diferenciales de respectivas dimensiones d y e. Sean $f : X \to Y$ una función diferenciable, $x_0 \in X$, $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto con $x_0 \in U$ y $F : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que F y f coinciden en $X \cap U$.

(a) Demostrar que la derivada $dF(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ satisface $dF(x_0)(TX(x_0)) \subset TY(F(x_0))$ y por lo tanto induce por restricción una aplicación lineal

$$df(x_0) : TX(x_0) \to TY(f(x_0))$$

a la cual denominamos como la *derivada de* f *en* x_0.

(b) Demostrar que $df(x_0)$ no depende de la F elegida como extensión de f.

(c) Describir $df(x_0)$ en términos de la derivada de una expresión local de f.

(d) (Regla de la cadena). Demostrar que si $Z \subset \mathbb{R}^p$ es otra subvariedad y $g : Y \to Z$ es diferenciable entonces $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

12. Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, $q \leq m$ y $F : U \to \mathbb{R}^q$ una función diferenciable tales que $0 \in \mathbb{R}^q$ es un valor regular de F (o sea, para todo $x \in U$ tal que $F(x) = 0$ vale que $dF(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ es sobreyectiva). Sea $X = F^{-1}(0)$. Demostrar:

(a) X es una subvariedad diferencial de dimensión $d = m - q$.
En el caso $q = 1$ decimos que X es la hipersuperficie definida por F.

(b) $TX(x) = \ker dF(x)$, para todo $x \in X$. O sea, escribiendo $F = (F_1, \ldots, F_q)$ se tiene

$$TX(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \sum_j \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} y_j = 0, \forall i \right\}$$

(c) Sea $V \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $F : V \to \mathbb{R}^q$ una función diferenciable. Consideramos el conjunto $F^{-1}(0) \subset V$. Sea $S(F) \subset V$ el conjunto de puntos singulares de F (o sea, puntos donde la derivada de F no es sobreyectiva). Demostrar que $S(F)$ es un cerrado y que $X = F^{-1}(0) - S(F)$ (si es no vacío) es una subvariedad de dimensión $m - q$.

(d) Para todo $x \in V$ definimos $TF(x) = \ker dF(x)$; es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensión $\geq m - q$. Si $x \in X = F^{-1}(0) - S(F)$ entonces $TF(x)$ tiene dimensión $m - q$ y $TF(x) = TX(x)$.

Sugerencia: Utilizar el teorema de la función implícita.

13. Probar que la esfera $S^2 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una subvariedad diferencial de dimensión 2. Calcular su espacio tangente en el punto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

14. (a) Probar que toda cuádrica sin puntos singulares, es decir de tipo B o C, es una subvariedad diferencial de dimensión $n - 1$.

(b) Demostrar que los puntos regulares de una cuádrica de tipo A forman una subvariedad diferencial de dimensión $n - 1$-

15. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^6$ la función $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$.

(a) Verifique que si $q \in Im(f)$, entonces $f^{-1}(q)$ consta de dos puntos antipodales.

(b) Pruebe que la derivada $df(p)$ es inyectiva para todo $p \in S^2$.

(c) Concluya que la imagen de f es una superficie regular.

Comentario: la superficie $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := Im(f)$ es conocida como el plano proyectivo real.

16. (a) Sea M, N dos subvariedades de igual dimensión de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, con M compacto. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable e $y \in N$ un valor regular. Probar que $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito.

(b) En base a lo probado en (a), podemos definir una función h que a cada valor regular y de f le asigna $h(y) = \#f^{-1}(y)$. Probar que h es localmente constante (o sea, que para cada y valor regular existe un entorno abierto $V \subset N$ de y tal que $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$ si $y' \in V$).

17. Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ un abierto conexo y sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, inyectiva y regular. ¿Es verdad que $X = \varphi(U)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^m$?

18. (a) Hallar una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = C$ no es una variedad.

(b) Hallar una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = C$ es una variedad de dimensión distinta de $m - 1$.

(c) Sea $C \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto cerrado cualquiera. Demostrar que existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = C$.

19. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n \times n}$ de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales. Sea $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ la función determinante. Definimos

$$\begin{aligned}
GL(n, \mathbb{R}) &= \{a \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \det(a) \neq 0\} = \mathbb{R}^{n \times n} - \Delta, \\
SL(n, \mathbb{R}) &= \{a \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \det(a) = 1\}, \\
O(n, \mathbb{R}) &= \{a \in \mathbb{R}^{n \times n},\ a.a^t = 1\}.
\end{aligned}$$

(a) Probar que $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo con el producto usual de matrices y verificar que $SL(n, \mathbb{R})$ y $O(n, \mathbb{R})$ son dos de sus subgrupos.

(b) Demostrar que $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$ y $O(n,\mathbb{R})$ son subvariedades diferenciales de $\mathbb{R}^{n x n}$ de dimensiones respectivas n^2, n^2-1 y $n(n-1)/2$. *Sugerencia: Expresar a los dos segundos como imágenes inversas de valores regulares.*

(c) Denotemos por $I_n \in \mathbb{R}^{n x n}$ a la matriz identidad. Probar que los espacios tangentes de las subvariedades $SL(n,\mathbb{R})$ y $O(n,\mathbb{R})$ sobre el punto I_n son

$$\begin{aligned} T\,SL(n,\mathbb{R})(I_n) &= \{a \in \mathbb{R}^{n x n} : tr(a) = 0\} \\ T\,O(n,\mathbb{R})(I_n) &= \{a \in \mathbb{R}^{n x n} : a^t = -a\}. \end{aligned}$$

20. (a) Probar que $\det : \mathbb{R}^{n x n} \to \mathbb{R}$ es un polinomio irreducible de grado n en n^2 variables.

(b) Consideremos el subconjunto de matrices singulares

$$\Delta = \Delta(n,\mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \det(a) = 0\}.$$

Demostrar que el conjunto de ceros regulares Δ_{reg} de det consiste de las matrices de rango $n-1$ y que es una subvariedad diferencial de dimension n^2-1.

(c) Sea $U \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ el conjunto de las matrices con autovalores distintos (nos referimos a todos los autovalores, reales y complejos). Demostrar que U es un abierto denso en $\mathbb{R}^{n\times n}$.