Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre — 2022

Práctica 2: Curvas en el espacio

Recuerdo: Sea $\mathscr{C}$ una curva parametrizada por longitud de arco por α. Definimos el vector tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $\alpha(s)$ como $T(s) = \alpha'(s)$, el vector normal $N(s) = \alpha''(s)/|\alpha''(s)|$, y el binormal $B(s) = T(s) \times N(s)$. La curvatura de $\mathscr{C}$ es $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$, y su torsión es el único número $\tau(s)$ tal que $B'(s) = -\tau(s)N(s)$.

El plano generado por T, B se llama *plano rectificante*; el generado por N, B, *plano normal*; y el generado por T, N, *plano osculador*.

1. Probar que si una curva satisface una de las siguientes condiciones, es una recta:

(*a*) Existe un punto por el que pasan todas las tangentes a la curva.

(*b*) Todas las tangentes a la curva son paralelas entre sí.

(*c*) Todos los planos normales son paralelos entre sí.

2. Probar que si una curva satisface una de las siguientes condiciones, entonces es plana:

(*a*) La intersección de todos sus planos osculadores es no vacía;

(*b*) Todos sus planos osculadores son paralelos.

3. Sea $\mathscr{C}$ la curva parametrizada por $t \mapsto (a\sin^2(t), a\sin(t)\cos(t), a\cos(t))$. Probar que

(*a*) $\mathscr{C}$ está contenida en la superficie de una esfera;

(*b*) Todos sus planos normales pasan por el origen.

4. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

(*a*) Probar que la curva es diferenciable y regular.

(*b*) Calcular los puntos de curvatura 0 de la curva.

(*c*) Calcular los planos osculadores de la curva cuando t tiende a 0.

(*d*) Probar que la torsión de la curva es 0, pero la curva no es plana.

(*e*) Construir una curva β plana que tenga la mismas funciones curvatura y torsión que α. ¿De qué modo se compatibiliza esto con el teorema fundamental de las curvas?

5. Mostrar que si κ es la curvatura de una curva α parametrizada por longitud de arco, entonces su torsión es

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\kappa^2(s)}.$$

6. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva no necesariamente parametrizada por la longitud de arco y sea $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de α por la longitud de arco $s = s(t)$ medido desde $t_0 \in I$. Sea $t = t(s)$ la función inversa de s y denotemos $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$ y $\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \alpha'''$. Entonces

(*a*) $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'|}$ y $\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4}$;

(*b*) la curvatura de α en t es $\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}$;

(*c*) la torsión de α en t es $\tau(t) = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$.

7. Para cada curva parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, calcule la curvatura y la torsión (notar que las curvas *no* están parametrizadas por longitud de arco).

(*a*) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, con $I = \mathbb{R}$;

(*b*) $\alpha(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$, con $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(*c*) $\alpha(t) = (t, f(t), g(t))$, con $I = \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables;

(*d*) $\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(t - \cos(t)), bt)$, con $I = \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$;

(*e*) $\alpha(t) = (a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3))$, con $I = \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

8. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con $\kappa > 0$ y torsión nunca nula. Probar que si la distancia de los planos osculadores al origen es constante, entonces los planos rectificantes pasan por el origen.

9. Una función $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *translación* si existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $A(x) = x + v$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Una función lineal $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *transformación ortogonal* si $\langle \rho(u), \rho(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para cada par de vectores u, $v \in \mathbb{R}^3$. Finalmente, una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un *movimiento rígido* si es la composición de una transformación ortogonal de determinante positivo y una translación.

(*a*) La norma de un vector y el ángulo entre dos vectores son preservados por transformaciones ortogonales de determinante positivo.

(*b*) Si T es una transformación ortogonal con determinante positivo, entonces el producto vectorial de dos vectores cumple que

$$T(u) \times T(v) = T(u \times v)$$

¿Qué ocurre si T tiene determinante negativo?

(*c*) La longitud, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por transformaciones rígidas.

10. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una *hélice* si existe una dirección con la cual todas sus tangentes forman un ángulo constante.

(*a*) Si $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) la curva α es una hélice;

(ii) el cociente $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante;

(iii) las rectas normales —aquéllas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector normal— son todas paralelas a un plano fijo;

(iv) las rectas binormales —aquéllas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector binormal— forman un ángulo constante con una dirección fija.

(*b*) Si $s \in \mathbb{R}$ y a, b, c son tales que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces la curva

$$\alpha(s) = (a\cos(\tfrac{s}{c}), a\sin(\tfrac{s}{c}), b\tfrac{s}{c})$$

es una hélice parametrizada por longitud de arco con $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{b}{a}$.

11. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco, la *indicatriz esférica* de α es la curva $\beta = T_\alpha : I \to \mathbb{R}^3$.

(*a*) La curvatura de la indicatriz esférica de α es $\kappa_\beta = \sqrt{1 + (\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha})^2}$ donde $\tau_\alpha, \kappa_\alpha$ son la curvatura y la torsión de la curva α.

(*b*) Determine la indicatriz de una recta, de una hélice circular y de una curva plana.

(*c*) La indicatriz esférica de una curva es una circunferencia si y sólo si la curva es una hélice.

12. Supongamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco tal que κ y τ nunca se anulan. Entonces la curva trazada por α está contenida en una esfera si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$R^2 + (R')^2T^2 = A,$$

con $R = \frac{1}{\kappa}$ y $T = \frac{1}{\tau}$.

13. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una parametrización suave y por longitud de arco de una curva regular que satisface $\kappa(t) \neq 0, \tau(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Supongamos que existe $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $||\alpha(t) - p||^2 = t^2 + 2$ para todo $t \in I$. Probar que $t^2\kappa^2 = 2\tau^2$.

14. Sean $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado no trivial, $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$.

(*a*) Si v es un vector unitario, entonces

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v ds \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt.$$

(*b*) En particular, si $v = \frac{q-p}{|q-p|}$, tenemos que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt$$

y, por lo tanto, la curva con menor longitud de arco que une los puntos p y q es la línea recta.

15. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura y torsión nunca nulas. Sea $s_0 \in \mathbb{R}$ y sea P un plano que satisface las siguientes condiciones:

- el plano P contiene la recta tangente en s_0, y
- para todo entorno $I \subset \mathbb{R}$ de s_0, existen puntos de $\alpha(I)$ a ambos lados de P.

Entonces P es el plano osculador de α en s_0.

16. Una curva de curvatura nunca nula, cuyos planos osculadores o bien pasan todos por un punto fijo, o bien son todos paralelos es plana.

17. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco con curvatura y torsión nunca nulas. Decimos que α es una *curva de Bertrand* si existe una curva $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las rectas normales de α y β en puntos correspondientes de I coinciden, y en ese caso β es la *compañera de Bertrand* de α y puede escribirse en la forma

$$\beta(t) = \alpha(t) + rn(t).$$

(*a*) En esa expresión para β, r es constante.

(*b*) α es una curva de Bertrand si y sólo si existe una relación lineal

$$A\kappa + B\tau = 1$$

con A y B constantes no nulas.

(*c*) Si α tiene más de una compañera de Bertrand, entonces tiene infinitas y esto ocurre si y sólo si α es una hélice circular.