Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2022
Práctica 1: Curvas planas

Algunas curvas con nombre propio

1. Un disco circular de radio 1 contenido en el plano xy rueda sobre el eje x sin deslizar. La figura descripta por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama *cicloide*.

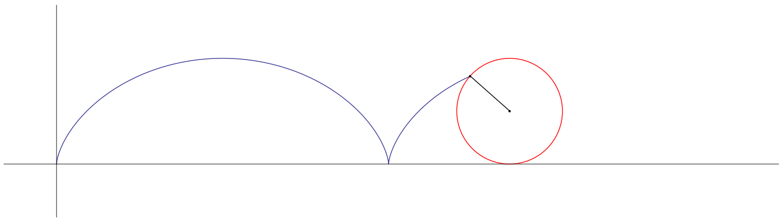

Figura 1: Cicloide

(*a*) Obtener una parametrización del cicloide y determinar sus puntos singulares.
(*b*) Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

2. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\theta/2))).$$

La curva parametrizada por α es llamada *tractriz*.

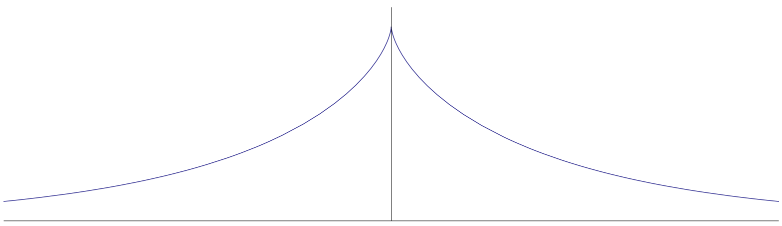

Figura 2: Tractriz (traspuesta)

(*a*) Probar que la función α es diferenciable pero no regular.
(*b*) Sea P un punto de la tractriz, L la recta tangente que pasa por P, y Q la intersección de L con el eje y. Probar que la distancia de P a Q es 1.

3. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right),$$

y sea $\mathscr{C}$ la curva que parametriza. Probar que:

(*a*) el origen pertenece a $\mathscr{C}$, y en ese punto su tangente es el eje x;
(*b*) se tiene que $\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = (0, 0)$ y $\lim_{t \to +\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$;

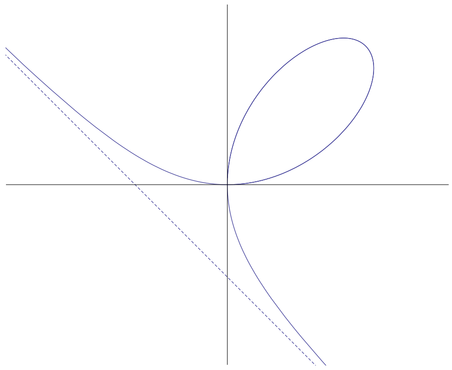

Figura 3: Folio de Descartes y su asíntota

(*c*) la recta $x + y + a = 0$ es una asíntota de $\mathscr{C}$.

La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta $y = x$ se llama *folio de Descartes*.

4. Sean $b < 0 < a$, y consideremos la función $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t)).$$

La curva parametrizada por esta función se llama *espiral logarítmica*.

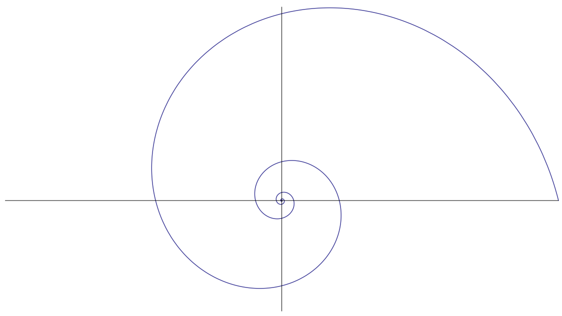

Figura 4: Espiral Logarítmica

(*a*) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0,0)$, y que cuando $t \to +\infty$ la curva sigue una trayectoria que envuelve al origen infinitas veces (sí, el enunciado es vago... parte del ejercicio es precisar esta noción de "envolver el origen").

(*b*) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0,0)$ y $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t |\alpha'(\tau)|\,d\tau$ es finito. Concluir que la espiral logarítmica tiene longitud de arco finita.

5. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función

$$\alpha(t) = \left(\frac{(1+t^2)t}{1+t^4}, \frac{(1-t^2)t}{1+t^4}\right).$$

La curva parametrizada por α se llama *lemniscata*.

(*a*) Probar que la función α es diferenciable, regular y simple.

(*b*) Determinar $\lim_{t\to-\infty} \alpha(t)$ y $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t)$ y concluir que α no es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y la lemniscata.

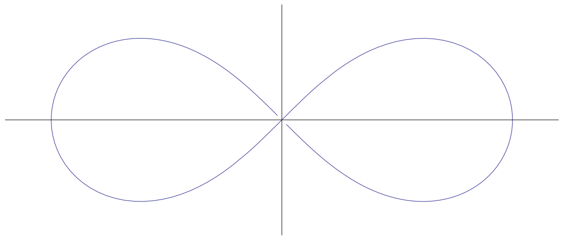

Figura 5: Lemniscata

Normales, tangentes y curvaturas

Sea $\mathscr{C}$ una curva parametrizada por longitud de arco por la función α. El vector *tangente* a $\mathscr{C}$ en $P = \alpha(s)$ es $t(s) = \alpha'(s)$; el vector *normal* a $\mathscr{C}$ en P es el vector unitario $n(s)$ tal que $(t)'(s) = \kappa(s)n(s)$ para un escalar positivo κ que llamamos la curvatura de $\mathscr{C}$ en P. La función $\widetilde{\kappa}(s)$ será la curvatura signada de $\mathscr{C}$.

Todas las curvas de aquí en adelante son parametrizables.

6. Calcular la curvatura de un círculo de radio r.

7. Sea $\mathscr{C}$ una curva que no pasa por el origen y sea P el punto de $\mathscr{C}$ más próximo al origen. Probar que la tangente a $\mathscr{C}$ en P es ortogonal al vector P.

8. Probar que si todas las normales a una curva pasan por un punto fijo entonces la curva está contenida en un círculo.

9. *Otra definición para la curvatura.* Sea $\mathscr{C}$ una curva y α una parametrización por longitud de arco.

(*a*) Probar que $\alpha''(s)$ es ortogonal a $\alpha'(s)$ para todo $s \in (a, b)$. En particular $t'(s) = \alpha''(s)$ es paralelo al vector $\widetilde{n}(s) = Jt(s)$, donde J es la transformación ortogonal de rotación en 90 grados en sentido antihorario.

(*b*) Sea $\widetilde{k}(s)$ el único escalar tal que $t'(s) = \widetilde{k}(s)\widetilde{n}(s)$. Probar que $|\widetilde{k}(s)| = \kappa(s)$. Llamamos a $\widetilde{k}(s)$ la curvatura con signo de α.

(*c*) Probar que $\kappa(s)$ es el área del rectángulo formado por los vectores $t(s), t'(s)$.

(*d*) Probar que si κ es constante e igual a $1/r$ entonces $\mathscr{C}$ está contenida en una circunferencia de radio r.

10. Sea $\mathscr{C}$ una curva y sea α una parametrización cualquiera (no necesariamente por longitud de arco). Demostrar que la curvatura con signo de $\mathscr{C}$ está dada por

$$\widetilde{k} = \frac{\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_2'\alpha_1''}{[(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2]^{3/2}}.$$

11. Sea $\widetilde{k} : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Fijemos $s_0 \in I$ y definamos una nueva función $\theta : I \to \mathbb{R}$ como $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \widetilde{k}(\sigma)\, d\sigma$ para cada $s \in I$. Probar que la curva $\mathscr{C}$ parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, donde

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)\, d\sigma, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\sigma)\, d\sigma\right)$$

tiene curvatura con signo $\widetilde{k}$, y que cualquier otra curva cuya curvatura con signo esté dada por $\widetilde{k}$ es congruente a $\mathscr{C}$ (es decir, se obtiene aplicando una transformación lineal ortogonal que preserva orientación y una traslación a $\mathscr{C}$).

12. Sea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva tal que $\|c'(t)\| = 2$ con curvatura (con signo) $\widetilde{\kappa} > -\frac{1}{2}$ constante. Notamos $\{t(t), \widetilde{n}(t)\}$ a sus campos tangente y normal respectivamente. Consideramos la curva

$$\alpha(t) = t(t) + \int_0^t \widetilde{n}(s)ds$$

Calcular el campo tangente y el campo normal asociados a α y la curvatura con signo de α.

13. Consideremos una curva dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, con $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable. Probar que la longitud de la curva es

$$\int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$$

y que su curvatura con signo, como función de θ, es

$$\widetilde{k} = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Centros de curvatura

Sea $\mathscr{C}$ una curva cuya curvatura nunca se anula y sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud de arco. Si $s \in (a, b)$, se llama *centro de curvatura de $\mathscr{C}$ en* $P = \alpha(s)$ al punto

$$x(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s)$$

y se llama *círculo osculador a α en* s al círculo centrado en $x(s)$ cuyo radio es $\kappa(s)^{-1}$.

14. Mostrar que la curva $\mathscr{C}$ y el círculo osculador se cortan en P, y en ese punto tienen la misma tangente y la misma curvatura.

15. Determinar los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

16. La *evoluta* de $\mathscr{C}$, que notamos $e(\mathscr{C})$, es la curva formada por los centros de curvatura de $\mathscr{C}$; la función $x(s)$ es una parametrización de $e(\mathscr{C})$.

(*a*) Probar que la tangente a $e(\mathscr{C})$ en $Q = x(s)$ es paralela a la normal a $\mathscr{C}$ en $P = \alpha(s)$.

(*b*) Supongamos que la curvatura de $\mathscr{C}$ es monótona. Probar que la longitud de arco de $e(\mathscr{C})$ entre dos puntos Q y Q' es igual a la diferencia de los radios de curvatura en los correspondientes puntos P y P' de $\mathscr{C}$.

Envolventes

Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denotemos $\mathscr{C}(f) = f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$. Suponemos que f satisface las hipótesis del teorema de la función implícita en todo punto de $\mathscr{C}(f)$. Decimos que $\mathscr{C}(f)$ es la curva implícita definida por f.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ denotamos $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $F_t(x, y) = F(t, x, y)$. Denominamos *familia uniparamétrica de curvas implícitas* definida por F a la colección de curvas implícitas $\{\mathscr{C}(F_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Similarmente definimos familias uniparamétricas de curvas paramétricas.

Una *envolvente* para una familia de curvas planas $\{\mathscr{C}_t\}$ es una curva $\mathscr{C}$ que no pertenece a la familia y tal que para cada $p \in \mathscr{C}$ existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_t$ son tangentes en p. Por ejemplo, la *evoluta* de una curva es una envolvente de sus rectas normales.

17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funcion continua y localmente Lipschitz en su segunda variable. Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(0) = t. \end{cases}$$

(*a*) Probar que las soluciones de estos sistemas forman una familia uniparamétrica de curvas en $\mathbb{R}^2$.

(*b*) Probar que una envolvente de dicha familia también es solución de la misma ecuación. Se la denomina *solución singular*.

18. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y sea $\{\mathscr{C}(F_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ la familia de curvas implícitas definida por F. Considere los siguiente conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \bigcup_{\mathscr{C} \text{ envolvente de } \mathscr{C}_t} \mathscr{C},$$

$$D = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : \exists t_p \in \mathbb{R} \text{ tal que } F(x, y, t_p) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t_p) = 0 \right\},$$

$$I = \left\{ p = \lim_{n\to\infty} p_n : p_n \in \mathscr{C}_{t_n} \cap \mathscr{C}_{t'_n} \text{ tal que } 0 < |t_n - t'_n| \to 0 \right\},$$

$$B = \partial \left(\bigcup_t \mathscr{C}_t \right).$$

Investigar las posibles contenciones entre dichos conjuntos.

19. Usando que $E \subseteq D$, hallar una envolvente para las siguientes familias de curvas, escribir la ecuación diferencial asociada y dibujar las curvas integrales junto con las soluciones singulares.

(*a*) La familia de círculos definida por $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1$.

(*b*) La familia de rectas definida por $F(x, y, t) = y - 2tx - t^2$.

20. Dada la ecuación diferencial $y = xy' + \frac{1}{y'}$, hallar una familia de curvas integrales que sean soluciones y esbozar un dibujo con las curvas integrales. Hallar una envolvente para tal familia, dibujarla y verificar que es una solución singular para la ecuación diferencial.

Más detalles en Rey Pastor-Pi Calleja-Trejo, vol. 3 o https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope$_(mathematics)$