Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

OPTIMIZACIÓN

Primer Cuatrimestre 2018

Trabajo Práctico N° 2: Métodos de descenso.

Braquistocrona:

Considerar el problema de la *braquistocrona* consistente en hallar la curva que minimiza el tiempo de caída de una particula por efecto de la gravedad. Concretamente, buscamos una función $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$ tal que minimice el funcional:

$$T(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \varphi'(x)^2}{2g(1 - \varphi(x))}} dx,$$

donde g es la aceleración gravitatoria. Para resolver este problema se realiza una discretización en la variable x: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ y una discretización en φ: $1 = \varphi_0 > \varphi_1 > \ldots > \varphi_n > \varphi_{n+1} = 0$, de manera tal que φ_i será la aproximación de $\varphi(x_i)$. Por comodidad, asumiremos que la discretización en φ está fijada de antemano (por ejemplo: $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{1}{n+1}$), y que las x_i son las variables cuyo valor debe optimizarse.

a) Probar que si se asume que φ es lineal en los intervalos de la discretización, el funcional T puede escribirse:

$$\widetilde{T} = \sqrt{\frac{2}{g}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + \Big(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i}\Big)^2} \Big(\sqrt{1 - \varphi_{i+1}} - \sqrt{1 - \varphi_i}\Big).$$

b Calcular analíticamente el gradiente de la expresión anterior de $\widetilde{T}$.

c Implementar funciones que reciban como input el número n de incógnitas de la discretización y devuelvan el funcional $\widetilde{T}$ y su gradiente.

d Calcular la curva braquistocrona minimizando el funcional $\widetilde{T}$ a través de los distintos métodos estudiados hasta el momento: método de Newton, método de búsqueda compacta y método del gradiente con búsqueda lineal y por la razón de oro utilizando la condición de Armijo y la condición de Goldstein. Comparar los resultados.