UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Unfoldings y deformaciones de foliaciones racionales y logarítmicas

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Ariel Molinuevo

Director de tesis y Consejero de estudios: Fernando Cukierman

Buenos Aires, 2013

Unfoldings y deformaciones de foliaciones racionales y logarítmicas

Resumen

Para una foliación algebraica $\mathcal{F}$ de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$, hay una sucesión que relaciona las deformaciones y los unfoldings infinitesimales de primer orden de $\mathcal{F}$. Lo que hacemos es estudiar dicha sucesión en el caso particular en que $\mathcal{F}$ sea una foliación racional o logarítmica.

Para una foliación de este tipo, probamos que la cantidad de puntos aislados del lugar singular se puede calcular en base al polinomio de Hilbert de la homología en grado 1 del complejo $K^\bullet(d\omega)$, que introducimos en este trabajo.

En términos de los unfoldings de ω, podemos clasificar las foliaciones racionales y logarítmicas que son regulares. Por último, mostramos que el complejo corto que define la regularidad de ω se puede extender a un complejo largo $C^\bullet(\omega)$ cuya homología es isomorfa a la de $K^\bullet(d\omega)$.

Palabras clave: espacio proyectivo, foliación, codimensión 1, foliación racional, foliación logarítmica, deformación, unfolding, regularidad

Unfoldings and deformations of rational and logarithmic foliations

Abstract

For a codimension 1 foliation $\mathcal{F}$ in $\mathbb{P}^n$, there is a sequence that relates first order deformations and unfoldings of $\mathcal{F}$. We study this sequence in the particular case where $\mathcal{F}$ is a rational or logarithmic foliation.

For a foliation of this kind, we prove that the cardinality of the isolated points of the singular locus can be calculated in terms of the Hilbert polynomial of the degree one homology of the complex $K^\bullet(d\omega)$, wich we introduce in this work.

In terms of the unfoldings of ω, we can classify the rational and logarithmic foliations wich are regular. Last, we show that the short complex that defines the regularity of ω can be extended to a long complex $C^\bullet(\omega)$ whose homology is isomorphic to the one of $K^\bullet(d\omega)$.

Keywords: projective space, foliation, codimension 1, rational foliation, logarithmic foliation, deformation, unfolding, regularity

Índice general

Agradecimientos

A mi director de tesis *Fernando Cukierman* por todos estos años en los cuales he tenido la oportunidad de recibir de él múltiples enseñanzas.

A mis amigos y colegas del Seminario de Geometria Algebraica, principalmente a *Matias del Hoyo*, *Federico Quallbrunn*, *César Massri* y *Manuel Dubinsky*.

A *Alicia Dickenstein* por su interés y disposición.

A los jurados *Eduardo Cattani*, *Gabriel Larotonda* y *Marcio Soares* por sus observaciones y comentarios.

A toda mi familia, a mis hermanos, a mis tías y principalmente a mis padres *Héctor A. Molinuevo* y *Anna Peretti* por el apoyo constante y el ejemplo de una vida íntegra.

A *Lucía Argento* por estar conmigo.

Introducción

Una foliación en una variedad M es una partición de M en subvariedades de una dimensión fija. A cada una de estas subvariedades se las llama hojas de la foliación.

Un primer ejemplo de esta situación, se puede ver al considerar una sumersión entre variedades $F : M \to N$. Se puede dar una foliación en M al considerar la partición de M en las preimágenes de F, es decir, $M = \coprod_{p \in N} \{F^{-1}(p)\}$.

En el caso en que $M = \mathbb{A}^3$ es el espacio afín y F la proyección a la primer coordenada, tenemos una foliación de $\mathbb{A}^3$ en planos paralelos a los ejes y, z; decimos que dicha foliación es una foliación de dimensión 2 o codimensión 1, puesto que esa es la relación de la dimensión de las hojas con la del espacio ambiente.

Si en cambio, $M = S^2$ es la esfera de dimensión 2 y F es la proyección al eje vertical z, tenemos una partición de S^2 en círculos horizontales. La dimensión de las fibras es 1 para todo $|z| < 1$, pero para $|z| = 1$ la preimagen de la proyección tiene dimensión 0 puesto que está dada por los puntos del polo Norte y Sur de la esfera. En este caso, vamos a decir que la partición de S^2 en las preimágenes $\{\pi^{-1}(z)\}_{z \in [-1,1]}$ define una foliación singular y que el lugar singular de la foliación está dado por los polos Norte y Sur.

Otras formas más generales para definir foliaciones están dadas en términos de distribuciones $\mathcal{D} \subset T(M)$ del fibrado tangente a M o de ideales $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ del álgebra exterior de M.

Para replicar el primer ejemplo en estos términos, podemos caracterizar las hojas de la foliación con sus direcciones tangentes, tomando la distribución $\mathcal{D} \subset T(\mathbb{A}^3)$ tal que para $p \in \mathbb{A}^3$, $\mathcal{D}_p = \left(\frac{\partial}{\partial y}|_p, \frac{\partial}{\partial z}|_p\right)$; o bien, podemos caracterizar las hojas de la foliación con su dirección normal, tomando el ideal $\mathcal{I} \subset \Omega(\mathbb{A}^3)$ tal que $\mathcal{I}_p = (dx|_p)$.

En el ejemplo en S^2, geométricamente queda claro que la distribución $\mathcal{D}$ va a tener dimensión constante 1, salvo en los polos Norte y Sur, donde la distribución va a colapsar a 0. De la misma forma, el rango del ideal $\mathcal{I}$ va a ser 1 salvo en los polos donde se anula.

El Teorema de Frobenius garantiza que una distribución $\mathcal{D}$ va a definir una foliación siempre y cuando la distribución sea cerrada por el corchete de Lie, $[\mathcal{D},\mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$. La condición para ideales es que sean cerrados por el diferencial exterior $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

⋆

Sea X una variedad algebraica y L un fibrado lineal en X. Vamos a denotar $\mathcal{F}^1(X,L)$ al espacio de foliaciones de codimensión 1 de (X,L). Una foliación $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^1(X,L)$ está dada por una sección global $\omega \in H^0(\Omega^1_X(L))$ (una 1-forma diferencial twisteada) que satisface la condición de integrabilidad de Frobenius, que para foliaciones de codimensión 1 se puede ver que se reduce a la fórmula

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

El espacio tangente a $\mathcal{F}^1(X,L)$ en ω está dado por las deformaciones de primer orden de ω que preservan la condición de integrabilidad, módulo la perturbación trivial dada en la dirección de ω. En el caso en que ω sea un punto no singular del espacio de foliaciones, la dimensión del espacio tangente calcula la dimensión de la componente irreducible de ω.

Cuando la variedad es $X = \mathbb{P}^n$, el espacio proyectivo n dimensional, un parámetro discreto de las foliaciones de codimensión 1 está dado por el grado. El grado se calcula en base al orden de anulación de ω restringida a una recta genérica. En este contexto, se destacan 2 trabajos:

i) en [Jou79] se prueba que para $n \geq 3$ y grado 1, el espacio de foliaciones tiene 2 componentes irreducibles. Una componente racional y la otra logarítmica.

ii) en [CLN96] se prueba que para $n \geq 3$ y grado 2, el espacio de foliaciones tiene 6 componentes irreducibles. Dos componentes racionales, dos componentes logarítmicas, una componente pullback de foliaciones en $\mathbb{P}^2$ y una componente excepcional definida por la acción del grupo afín $\mathbb{C}$.

Para grados superiores a 2 no se conoce la descomposición del espacio de foliaciones. De cualquier manera, en base a acciones de grupos de Lie, se obtienen otras familias de foliaciones estables, que definen componentes del espacio de foliaciones, ver [CA03].

⋆

Sea $f : T \to D$ un morfismo de variedades sobre $\mathbb{C}$. Dado un punto (cerrado) $p \in D$, podemos mirar el pull-back (o la fibra de f en p)

$$\begin{tikzcd} T \times_D Spec(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "f"] \\ Spec(\mathbb{C}) \arrow[r, "j"'] & D \end{tikzcd}$$

donde j es la inclusión al punto $p \in D$.

Siempre vale que el espacio topológico subyacente $T \times_D Spec(\mathbb{C})$ es homeomorfo a la preimagen $f^{-1}(p)$. Pero si tomamos a $T = X \times D$ y $f = \pi$ la proyección, entonces la fibra $X_p := (X \times_D Spec(\mathbb{C}))_p$ es isomorfa a X.

Fijemos ahora a D como el entorno infinitesimal de orden 1 del origen. Es decir que D está dado por $Spec\,(\mathbb{C}[\varepsilon])$, donde $\mathbb{C}[\varepsilon]$ es el anillo $\mathbb{C}[t]/(t^2)$.

Dado el cuadrado pull-back

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \times D \arrow[d, "\pi"] \\ Spec(\mathbb{C}) \arrow[r, "j"'] & D \end{tikzcd}$$

vamos a decir que una deformación infinitesimal de orden 1 de una subvariedad $Y \subset X$ está dada por una subvariedad $Y' \subset X \times D$ de forma tal que $i^*Y' \simeq Y$.

Siguiendo el mismo diagrama, hay dos maneras de realizar perturbaciones de primer orden de una foliación $\mathcal{F}$ en X:

i) un unfolding de $\mathcal{F}$ es una foliación $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ en $X \times D$, de forma tal que $i^*\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \simeq \mathcal{F}$

ii) una deformación de $\mathcal{F}$ es una familia de foliaciones $\mathcal{F}_\varepsilon$ en X parametrizada por D, de forma tal que $i^*\mathcal{F}_\varepsilon \simeq \mathcal{F}$.

El espacio de unfoldings de ω está parametrizado por

$$U(\omega) = \{\ (h, \eta) \in H^0((\mathcal{O}_X \otimes \Omega^1_X)(L))\ /\ h\ d\omega = \omega \wedge (\eta - dh)\ \}/\big((0, \omega)\big)$$

y el espacio de deformaciones por

$$D(\omega) = \{\ \eta \in H^0(\Omega^1_X(L))\ /\ \omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta = 0\ \}/\big(\omega\big)\ .$$

Una deformación $\eta \in D(\omega)$ induce, de manera natural, una foliación en $X \times D$ agregando la condición $d\varepsilon = 0$. De esta manera, tiene asociada una foliación de codimensión 2, o de dimensión $dim(X) - 1$, en $X \times D$.

Así, una deformación de $\mathcal{F}$ en X define una foliación en $X \times D$ que preserva la dimensión de las hojas; en cambio, un unfolding de $\mathcal{F}$ en X define una foliación en $X \times D$ que preserva la codimensión de las hojas.

La relación entre unfoldings y deformaciones de ω, se encuentra sintetizada en la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K(\omega) \xrightarrow{i_1} U(\omega) \xrightarrow{\pi} D(\omega)$$

donde $K(\omega)$ es el espacio de funciones que son factores integrantes de ω.

$\star$

La manera en la que organizamos el desarrollo de los temas es la siguiente: en el primer capítulo damos las definiciones y propiedades básicas de foliaciones y variedades algebraicas que vamos utilizar mayormente a lo largo de este trabajo.

En el segundo capítulo probamos el primero de nuestros aportes a la teoría: calculamos el conúcleo de la aplicación $U(\omega) \xrightarrow{\pi} D(\omega)$ cuando ω define una foliación racional y logarítmica. En el primer caso, vemos que dicha aplicación es un epimorfismo - Teorema 2.4.7 pág. 25-.

Si ω es una forma logarítmica, se puede expresar como

$$\omega = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

donde $s \geq 3$ (para $s = 2$ ω es racional).

En este caso la imagén de la aplicación π (las deformaciones que provienen de unfoldings) está dada por las perturbaciones de las funciones f_i, en cambio las perturbaciones de los coeficientes λ_i generan el conúcleo de π - Teorema 2.4.18 pág. 30 -.

En [CSV06] se muestra que el lugar singular de una foliación racional o logarítmica se descompone como la unión disjunta $Sing(\omega) = Z \cup R$, donde Z tiene codimensión 2 y R está formada por N puntos aislados contados con multiplicidad.

En el tercer capítulo definimos el complejo

$$K^\bullet(d\omega) : \qquad T^1 \xrightarrow{d\omega\wedge} \Omega^1 \xrightarrow{d\omega\wedge} \Omega^3 \xrightarrow{d\omega\wedge} \dots$$

y probamos nuestros principales resultados, siempre para ω racional o logarítmica:

i) el polinomio de Hilbert de $H^1(K^\bullet(d\omega))$ es constante e igual a N, la cantidad de puntos aislados del lugar singular $Sing(\omega)$ - Teorema 3.4.4 pág. 42 -

ii) el $H^1(K^\bullet(d\omega))$ es isomorfo al grupo de clases de isomorfismo de unfoldings proyectivos graduados de ω - Corolario 3.4.5 pág. 43 -.

En el cuarto capítulo, retomamos la noción de regularidad definida en [CLN82] a través del complejo corto

$$\begin{array}{ccccc} T^1(b-a) & \xrightarrow{L(\omega)} & \Omega^1(b) & \xrightarrow{\omega\triangle} & \Omega^3(a+b) \\ X & \longmapsto & L_X(\omega) & & \\ & & \eta & \longmapsto & \omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta \end{array}$$

para $b < a$, donde ω es una 1-forma homogénea de grado a integrable.

En primer lugar extendemos dicho complejo a un complejo largo $C^\bullet(\omega)$, para cualquier $b \in \mathbb{N}$.

El primer resultado que obtuvimos en este contexto es que si $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$ y es integrable entonces

$$dim_{\mathbb{C}}\big(\ H^s(C^\bullet(\omega))(b)\ \big) \ = \ dim_{\mathbb{C}}\big(\ H^s(K^\bullet(d\omega)(b))\ \big)$$

para todo b distinto de a - Teorema 4.2.6 pág. 56 -.

Los unfoldings de ω se pueden ver a través de un ideal que llamamos $I(\omega)$. Los generadores de dicho ideal permiten clasificar, para ω racional o logarítmica, cuales foliaciones son regulares.
Cuando los grados de las funciones f_i son altos, mostramos que la noción de regularidad es equivalente a la de clases de isomorfismo de unfoldings.

Finalmente, el último resultado que exponemos, es de carácter puramente algebraico: para $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n+1$ variables, definimos familias de deformaciones de la estructura de S-módulos graduados de T^1 y $\Omega^r_{S|\mathbb{C}}$ - Definición 4.6 pág. 61 -. La idea de las deformaciones de estos objetos es la de linealizar operadores diferenciales entre ellos.

Tanto con los haces de partes principales - ver [Gro64] - como con los complejos de operadores diferenciales - ver [HL71] - se resuelven problemas de linealización. En estos trabajos la solución tiene carácter universal (en el sentido categórico) y, como parte de la construcción, cambia la estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial subyacente de los objetos en cuestión.

Nuestra construcción, en cambio, es *ad hoc* para algunos operadores diferenciales y la estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial permanece invariante en los objetos.

Dos deformaciones de estas estructuras resultan particularmente interesantes: una de ellas permite ver el complejo $C^\bullet(\omega)$ como un complejo de S-módulos en base a la nueva acción - Propiedad 4.3.7 pág. 64 y Propiedad 4.3.8 pág. 66 -; la otra permite ver al diferencial exterior usual como un operador lineal - Propiedad 4.3.10 pág. 67 -.

Lista de símbolos

$\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$	Espacio de foliaciones algebraicas de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$, irreducibles y de grado $a-2$, pp. 8
$\mathcal{R}(n,(r,s))$	Espacio de foliaciones racionales de multigrado (r,s) en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$, pp. 23
$\mathcal{L}(n,\overline{d})$	Espacio de foliaciones logarítmicas de multigrado $\overline{d}=(d_1,\ldots,d_s)$ en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$, pp. 23
$\mathcal{F}=(\omega)$	Foliación en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ definida por ω de grado a, pp. 4
$\mathcal{F}_\varepsilon$	Deformación de primer orden de $\mathcal{F}$, pp. 10
$\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$	Unfolding de primer orden de $\mathcal{F}$, pp. 12
$\mathcal{F}_h$	Germen de foliación holomorfa que define $\mathcal{F}=(\omega)$ en el origen de $\mathbb{A}^{n+1}$, pp. 17
$\mathcal{F}_{\mathbb{A}^{n+1},0}(\upsilon)$	Germen de foliación holomorfa en el origen de $\mathbb{A}^{n+1}$ definida por υ, pp. 16
Ω^1_X	Haz de 1-formas diferenciales de X
$T^1_X, T^1(X)$	Haz tangente de X
$L_X(\omega)$	Derivada de Lie de ω respecto del campo de vectores X, pp. 19
$i_X(\omega)$	Contracción de ω respecto del campo de vectores X
R	Campo de vectores radial $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$
S	Anillo de polinomios $\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$
$\Omega^r_{S\vert\mathbb{C}}$	Módulo de r formas diferenciales de S sobre $\mathbb{C}$
$\Omega_{S\vert\mathbb{C}}$	Álgebra exterior de S sobre $\mathbb{C}$

$T^1_{S\mid\mathbb{C}}$	Dual de $\Omega^1_{S\mid\mathbb{C}}$, campos de vectores sobre S
$M(b)$	componente homogénea de grado b de M
$\omega \triangle \eta$	Si ω y η son 1 formas $\omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta$, pp. 11. Caso contrario pp. 51
$\eta = \eta_r + \eta_d$	Descomposición de η en su parte radial η_r y exacta η_d, pp. 38
$D(\omega)$	Espacio de deformaciones proyectivas de ω, pp. 10
$D_a(\omega)$	Espacio de deformaciones algebraicas de ω, pp. 11
$D_h(\upsilon)$	Espacio de gérmenes de deformaciones holomorfas de υ en $(\mathbb{A}^{n+1}, 0)$, pp. 18
$U(\omega)$	Espacio de unfoldings proyectivos de ω, pp. 13
$U_a(\omega)$	Espacio de unfoldings algebraicos de ω, pp. 13
$U_h(\upsilon)$	Espacio de gérmenes de unfoldings holomorfos de υ en $(\mathbb{A}^{n+1}, 0)$, pp. 16
$\mathbb{U}(\omega)$	Espacio de unfoldings proyectivos graduados de ω, pp. 20
$\overline{A}$	Espacio de clases de isomorfismo de A, para $A = D_\bullet(\omega), U_\bullet(\omega), \mathbb{U}(\omega)$

Capítulo 1

Foliaciones

1.1 Preliminares

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $T^1(M)$ el fibrado tangente a M.

Definición 1.1. Una distribución $\mathcal{D}$ en M de dimensión r es un subfibrado vectorial de $T^1(M)$ de forma tal que $\forall p \in M$ la dimensión de $\mathcal{D}_p$ es igual a r.

Definición 1.2. Una subvariedad $N \subset M$ se dice que es una subvariedad integrable de $\mathcal{D}$ si $\forall p \in N$ resulta

$$T^1_p(N) = \mathcal{D}_p \ .$$

Definición 1.3. Vamos a decir que la distribución $\mathcal{D}$ es involutiva si para todo $p \in M$ vale

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}]_p \subset \mathcal{D}_p$$

donde $[-,-]$ indica el corchete de Lie.

La pregunta natural sobre cuando una distribución $\mathcal{D}$ admite subvariedades integrales para todo punto está respondida en el Teorema de Frobenius - ver [War83, Theorem 1.60, pp. 42] -:

Teorema de Frobenius. Sea $\mathcal{D}$ una distribución en una variedad diferenciable M. Entonces para todo $p \in M$ existe una subvariedad $N \subset M$ integrable de $\mathcal{D}$ si y sólo si $\mathcal{D}$ es involutiva.

Vamos a llamar $\Omega^1(M) = T^1(M)^*$ al fibrado de 1-formas diferenciales y $\Omega(M)$ a su álgebra exterior.

En base a la inclusión $\mathcal{D} \longrightarrow T^1(M)$ podemos armar la sucesión exacta corta de fibrados vectoriales

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow T^1(M) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

y la sucesión dual

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \Omega^1(M) \xrightarrow{\pi} \mathcal{D}^* \longrightarrow 0$$

donde $\mathcal{I}^1 := \mathcal{Q}^*$. También podemos ver a $\mathcal{I}^1$ como el espacio anulador de $\mathcal{D}$.

A su vez, podemos mirar al ideal $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ generado por $\mathcal{I}^1$.

Si d es el diferencial exterior usual, vamos a notar con $d\mathcal{I}$ al subfibrado del ideal $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ definido en cada punto por $(d\mathcal{I})_p = \{(d\omega)(p) \ / \ \forall\omega \in \mathcal{I}(U),$ con $p \in U$ abierto$\}$.

Definición 1.4. Vamos a decir que un ideal $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ es un ideal diferencial si $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

La relación entre ideales diferenciales y distribuciones involutivas está dada por la siguiente propiedad:

Propiedad 1.1.1. Sea $\mathcal{D}$ una distribución en M y $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ el ideal generado por el anulador de $\mathcal{D}$. Entonces la distribución $\mathcal{D}$ es involutiva si y sólo si el ideal $\mathcal{I}$ es diferencial.

Demostración. Ver [War83, Proposition 2.30, pp. 74]. □

Definición 1.5. Vamos a decir que un ideal $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ generado en $\Omega^1(M)$ tiene rango q si para todo $p \in M$ existe un abierto U de M con $p \in U$ de forma tal que la restricción $\mathcal{I}|_U$ es un ideal en $\Omega^1(M)|_U$ generado por q 1-formas linealmente independientes.

Definición 1.6. Vamos a decir $\mathcal{F}$ es una foliación regular de codimensión 1 en M si $\mathcal{F}$ define un ideal diferencial generado en $\Omega^1(M)$ de rango 1 en $\Omega(M)$. Vamos a llamar las *hojas de la foliación* a las subvariedades integrables de $\mathcal{F}$.

Propiedad 1.1.2. Sea $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ un ideal generado en $\Omega^1(M)$ de rango 1. Para $p \in M$ y $p \in U$ un abierto de M, podemos elegir una sección $\omega \in \mathcal{I}(U)$ de forma tal que $\mathcal{I}_p = \big(\omega(p)\big)$. Entonces $\mathcal{I}$ es un ideal diferencial si y sólo si

$$\omega(p) \wedge (d\omega)(p) = 0 \tag{1}$$

para todo $p \in M$.

Demostración. Ver [MM03, Remark, pp. 11]. □

1.1.3. La condición $\omega \wedge d\omega = 0$ es conocida como la *condición de integrabilidad de Frobenius*. Si una 1-forma verifica dicha ecuación se dice que es una forma integrable.

En el caso diferenciable la obstrucción topológica para que existan foliaciones regulares de codimensión 1 está dada por la característica de Euler de la variedad M; si $\chi(M) \neq 0$ no existen foliaciones regulares de codimensión 1 - ver [Thu76, Theorem 1, pp. 249] -.

En el caso holomorfo se tiene una condición de anulación de clases de Chern del fibrado normal de la foliación - ver [Bot72, Theorem (*)″, pp. 35] -.

Como veremos más adelante - 1.2.6 - en el espacio proyectivo no existen foliaciones algebraicas, regulares, de codimensión 1.

Esta situación nos lleva a introducir una noción más general de foliación.

Definición 1.7. Una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión 1 en M está dada por una familia $\{U_\alpha, \omega_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$ donde U_α define un cubrimiento abierto de M, $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ es una 1-forma integrable y $\varphi_{\alpha\beta}$ son funciones holomorfas no nulas definidas en $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ que verifican:

i) $\omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}\ \omega_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$

ii) $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta}\ \varphi_{\beta\gamma}$ en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq 0$ (condición de cociclo).

La diferencia de esta definición con la anterior es que en este caso puede suceder que una de las secciones ω_α se anule en un punto, haciendo que el ideal diferencial que generan no tenga rango constante.

Definición 1.8. Vamos a llamar *lugar singular* de $\mathcal{F}$ al conjunto

$$Sing(\mathcal{F}) = \{p \in M \ / \ \omega_\alpha(p) = 0, \text{ si } p \in U_\alpha\} \ .$$

Como lo que interesa de la foliación es la dirección normal que definen las ω_α vamos a decir que dos familias

$$\{U_\alpha, \omega_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A} \qquad \text{y} \qquad \{U'_\alpha, \omega'_\alpha, \varphi'_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$$

son equivalentes si existe una familia de funciones $\{U_\alpha, \rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que $\rho_\alpha \neq 0$ en U_α y

$$\omega_\alpha = \rho_\alpha \omega'_\alpha$$

para todo α.

Si éste es el caso tenemos que

$$\begin{aligned}
&\omega'_\alpha = \rho_\alpha\ \omega_\alpha = \rho_\alpha \varphi_{\alpha\beta}\ \omega_\beta = \rho_\alpha\ \varphi_{\alpha\beta}\ \rho_\beta^{-1}\ \omega'_\beta \\
&\omega'_\alpha = \varphi'_{\alpha\beta}\ \omega'_\beta \\
&\qquad \Rightarrow \qquad \varphi'_{\alpha\beta} = \rho_\alpha\ \varphi_{\alpha\beta}\ \rho_\beta^{-1}.
\end{aligned} \tag{2}$$

En el caso en que $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi'_{\alpha\beta}$ para todo α, β las funciones ρ_α representan una sección global nunca nula de M.

1.2 Foliaciones algebraicas

Tomando una variedad algebraica X sobre $\mathbb{C}$, la Definición 1.7 dice que una foliación algebraica $\mathcal{F}$ en X está dada por una sección global integrable del haz $\Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es un fibrado de linea generado por las funciones $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$. La condición (2) dice que dos fibrados de lineas isomorfos definen la misma foliación y que la foliación es invariante por el producto de secciones globales nunca nulas.

En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$, por un lado tenemos que todo haz de lineas es isomorfo a alguno de los haces twisteados $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$ para algún $a \in \mathbb{Z}$, ver [Har77, Corollary 6.17, pp. 145]; por otro lado, el espacio de secciones globales del haz estructural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ está dado por las funciones constantes definidas por los escalares $\mathbb{C}$, ver [Har77, Proposition 5.13, pp. 118].

De esta forma definimos:

Definición 1.9. Una foliación algebraica $\mathcal{F}$ de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ está dada, a menos de un escalar, por una sección global $\omega \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$ integrable, para algún $a \in \mathbb{Z}$. Vamos a notar $\mathcal{F} = (\omega)$ a dicha foliación.

Observación 1.1. Vamos a suponer, de ahora en más, $a \geq 2$ puesto que para $a < 2$ el haz $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)$ no tiene secciones globales.

Si F es un haz sobre una variedad X sobre $\mathbb{C}$, vamos a notar indistintamente $H^0(F)$ o $\Gamma(X, F)$ al $\mathbb{C}$-espacio vectorial de secciones globales de F.

1.2.1. Para ver que forma tiene una sección global de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)$ podemos usar la sucesión exacta corta de Euler - ver [Har77, Theorem 8.13, pp. 176] -:

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}^{n+1}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

de donde resulta que, luego de tensorizar la sucesión por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$, el pull-back de $\omega \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$ a $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ es de la forma

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} f_i \; dx_i$$

donde $gr(f_i) = a - 1$ y $\sum f_i x_i = 0$.

Esta última condición se puede expresar en términos de la anulación de la contracción de la forma ω por el campo de vectores radial $R = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Vamos a notar a dicha operación $i_R(\omega)$.

Dualizando la sucesión exacta anterior

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1}(1) \longrightarrow T^1_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

donde $T^1_{\mathbb{P}^n}$ es por definición $(\Omega^1_{\mathbb{P}^n})^*$, el haz tangente en $\mathbb{P}^n$. Al igual que antes, tensorizando por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$ y tomando secciones globales, obtenemos que una sección global de un campo de vectores X en $T^1_{\mathbb{P}^n}$ es una clase de equivalencia de campos de la forma

$$X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde $gr(X_i) = a + 1$, módulo el campo de vectores radial R.

1.2.2. Para una foliación $\mathcal{F} = (\omega)$ de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ hay dos maneras naturales de inducir una foliación en el espacio afín: se puede optar por mirar a ω en una de las cartas usuales $V(x_i = 0)^c = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n \;/\; x_i \neq 0\} \subset \mathbb{A}^n$; o bien, se puede mirar el cono de $\mathbb{P}^n$ unión el origen, $C(\mathbb{P}^n) \cup \{0\} = \mathbb{A}^{n+1}$, y ver a ω como una forma afín en $\mathbb{A}^{n+1}$.

Vamos a optar por esta última opción.

Sea $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n + 1$ variables. El módulo de diferenciales de Kähler de S sobre $\mathbb{C}$, $\Omega^1_{S|\mathbb{C}}$, - ver [Eis95, Definition, pp. 384] - es el módulo libre generado por $dx_0, \ldots, dx_n$.

Vamos a notar con $\Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$ a la componente homogénea de grado b y con $\Omega^r_{S|\mathbb{C}}$ a la potencia exterior r-ésima de $\Omega^1_{S|\mathbb{C}}$.

1.2.3. Sea entonces $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$. Por 1.2.1 y 1.2.2 podemos ver a ω en $\Omega^1_{S|\mathbb{C}}$ como una forma homogénea, radial e integrable.

De esta forma podemos asociarle a $\mathcal{F} = (\omega)$ el complejo de Koszul de ω:

$$K^\bullet(\omega): \quad \Omega^0_{S|\mathbb{C}} \xrightarrow{\omega\wedge} \Omega^1_{S|\mathbb{C}} \xrightarrow{\omega\wedge} \Omega^2_{S|\mathbb{C}} \xrightarrow{\omega\wedge} \ldots$$

donde vamos a indicar con $\omega\wedge^i$ al morfismo $\omega\wedge$ aplicado en grado i del complejo.

Definición 1.10. Vamos a decir que $\omega \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}$ es irreducible si cada vez que existen $f \in S$ y $\omega' \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}$ tales que $\omega = f\omega'$ entonces f es constante.

Propiedad 1.2.4. Sea $\omega \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}$. Entonces ω es irreducible si y sólo si $H^1(K^\bullet(\omega)) = 0$.

Demostración. Está claro que la imagen de $\omega\wedge^0$ está dada por $Im(\omega\wedge^0) = S.(\omega)$. Si $\omega = f\omega'$ con ω' irreducible entonces el núcleo de $\omega\wedge^1$ es $Ker(\omega\wedge^1) = S.(\omega')$. De esta forma tenemos que $H^1(K^\bullet(\omega)) = 0$ si y sólo si $\omega' = \omega$. $\square$

Propiedad 1.2.5. Sea $\omega \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}$ homogénea e integrable de grado $a \geq 2$. Entonces $H^2(K^\bullet(\omega)) \neq 0$.

Demostración. Como ω define una foliación, es una 1-forma integrable y vale la fórmula

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

lo que implica que $d\omega \in H^2(K^\bullet(\omega))$. Por otro lado, tenemos que

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\ dx_i \wedge dx_j$$

y $gr(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}) = a - 2$. En particular, como $a - 2 \geq 0$, $d\omega \neq 0$.

Sea η una 1-forma de la forma $\eta = \sum h_j dx_j$. Tenemos que

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i,j} (f_i h_j - f_j h_i)\ dx_i \wedge dx_j\ .$$

Como los polinomios f_i y h_i son homogéneos necesariamente se tiene que $gr(f_i h_j - f_j h_i) = gr(f_i) + gr(h_j) \geq a - 1$ ó $\omega \wedge \eta = 0$. En ambos cosas resulta $d\omega \neq \omega \wedge \eta$. $\square$

1.2.6. Como una foliación codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ está dada por una forma homogénea, la Propiedad 1.2.5 anterior y el siguiente Teorema eliminan la posibilidad de que existan foliaciones regulares en $\mathbb{P}^n$.

Teorema 1.2.7. Sea $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$. Son equivalentes:

i) $codim(Sing(\omega)) \geq k$

ii) $H^l(K^\bullet(\omega)) = 0$ para todo $l < k$.

Demostración. Ver [Mal76, Appendice, pp. 172] o [Mal77, Appendice, pp. 87] para dos demostraciones con distintos niveles de generalidad en el caso holomorfo y [Eis95, Theorem 17.4, pp. 424 y Proposition 18.4, pp. 450] para una demostración puramente algebraica. □

Corolario 1.2.8. Siguiendo las hipótesis del Teorema 1.2.7, vale $codim(Sing(\omega)) = 1$ si y sólo si ω no es irreducible.

Definición 1.11. Sea W una subvariedad de $\mathbb{P}^n$. Vamos a decir que W es invariante por la foliación $\mathcal{F} = (\omega)$ de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ si ω es normal a W para todo $p \in W \backslash Sing(\mathcal{F})$.

Definición 1.12. Vamos a llamar grado de la foliación de $\mathcal{F} = (\omega)$ de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$, $gr(\mathcal{F})$, al orden de anulación de ω restringida a una recta ℓ no invariante por $\mathcal{F}$.

Propiedad 1.2.9. Sea $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ donde $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$. Entonces el grado de $\mathcal{F}$ es $a - 2$.

Demostración. En base a la sucesión de Euler 1.2.1 sabemos que ω es de la forma

$$\omega = \sum f_i \; dx_i$$

con $gr(f_i) = a - 1$ y $i_R(\omega) = 0$.

Para calcular el orden de anulación de ω en una recta ℓ, podemos ver a ℓ como la imagen de una aplicación lineal $L : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ y calcular el orden de anulación del pullback de ω en $\mathbb{P}^1$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{L} & \mathbb{P}^n \\ L^*\omega & \longleftarrow\!\shortmid & \omega \ . \end{array}$$

Sea ℓ la imagen de la aplicación $L(x_0 : x_1) = (x_0 : x_1 : 0 : \ldots : 0)$. Si ℓ es invariante por la foliación, ω se anula en las direcciones tangentes $\frac{\partial}{\partial x_0}$ y $\frac{\partial}{\partial x_1}$ y entonces $f_0 = f_1 = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ω no es invariante en ℓ.

Por lo tanto

$$L^*\omega = \omega(L) = f_0 dx_0 + f_1 dx_1 \neq 0$$

con $f_0 = f_0(x_0, x_1)$ y $f_1 = f_1(x_0, x_1)$.

Como $L^*\omega$ es una forma proyectiva verifica $i_R(L^*\omega) = 0$, entonces

$$x_0 f_0 + x_1 f_1 = 0 \iff \begin{cases} f_0 = x_1 g \\ f_1 = -x_0 g \end{cases}$$

para algun polinomio g de grado $a-2$. De esta manera obtenemos que

$$\omega = g\ (x_1 dx_0 - x_0 dx_1)$$

y concluimos que el orden de anulación de ω en ℓ es $a-2$. □

1.2.10. Vamos a notar con $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ al espacio de parámetros, o de moduli, de foliaciones algebraicas de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$, de grado $a-2$ e irreducibles.

De esta forma, el espacio $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ está parametrizado por

$$\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a) = \{\omega \in \mathbb{P}(H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)))\ /\ \omega \wedge d\omega = 0 \text{ y } codim(Sing(\omega)) \geq 2\}$$

donde $\mathbb{P}(H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)))$ denota el espacio proyectivo asociado al espacio vectorial definido por $H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$.

Si indicamos con $T_x(X)$ al espacio tangente Zariski de una variedad X en el punto x, tenemos una identificación natural entre

$$T_{\pi(v)}\mathbb{P}(V) \simeq V/(v),$$

donde $\pi : V\backslash\{0\} \to \mathbb{P}(V)$ es la proyección y (v) es el espacio generado por el vector v.

Siguiendo [CPV09, Section 2.1. pp. 709], y omitiendo la escritura del morfismo de proyección, el espacio tangente $T_\omega\mathcal{F}(\mathbb{P}^n)(a)$ se puede describir como el espacio de las $\eta \in \mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))/(\omega)$, irreducibles, tales que $\omega + \varepsilon\eta$ es integrable módulo ε^2; es decir que

$$(\omega + \varepsilon\eta) \wedge d(\omega + \varepsilon\eta) = \omega \wedge d\omega + \varepsilon(\omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta) = 0\ . \tag{3}$$

1.2.11. Podemos escribir entonces

$$T_\omega\mathcal{F}(\mathbb{P}^n)(a) = \{\eta \in \mathbb{P}(H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)))\ /\ \omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta = 0\}/(\omega)\ .$$

Capítulo 2

Unfoldings y deformaciones

Introducción

En la primer sección damos las definiciones de deformaciones y unfoldings de foliaciones algebraicas, sus respectivas clases de isomorfismo y definiciones básicas. Luego, repasamos los mismos conceptos para gérmenes de foliaciones holomorfas, los cuales son totalmente análogos a los de foliaciones algebraicas.

Dada una foliación algebraica $\mathcal{F}$ *en* $\mathbb{P}^n$ *miramos el gérmen de foliación holomorfa que define en el origen de* $\mathbb{C}^{n+1}$*, lo llamamos* $\mathcal{F}_h$*. Vemos que todo unfolding (deformación) algebraico en* $\mathbb{P}^n$ *de* $\mathcal{F}$ *proviene de una componente homogénea del gérmen de un unfolding (deformación) holomorfo de* $\mathcal{F}_h$*.*

De esta forma, podemos utilizar los resultados de T. Suwa, sobre unfoldings holomorfos de formas racionales y logarítmicas, y traducirlos al contexto algebraico.

A las nociones clásicas de unfoldings proyectivos y unfoldings algebraicos le agregamos lo que definimos como unfoldings proyectivos graduados $\mathbb{U}(\omega)$*. Estos últimos permiten un pasaje directo entre la teoría holomorfa y algebraica.*

Finalizamos el capítulo calculando explícitamente la relación entre unfoldings y deformaciones algebraicas de formas racionales y logarítmicas.

2.1 Unfoldings y deformaciones

A diferencia de la sección anterior, donde una variedad ocupaba un rol absoluto, ahora vamos a necesitar considerar un enfoque relativo y vamos a plasmar esa diferencia en una pequeña generalización de la definición de foliación.

Sea X una variedad algebraica sobre T.

Definición 2.1. Vamos a decir que $\mathcal{F} = (\omega)$ es una foliación de codimensión 1 en X sobre T si $\mathcal{F}$ es un subhaz genéricamente libre de rango 1 de $\Omega^1_{X|T} \otimes \mathcal{L}$, ω es una sección global de $\Omega^1_{X|T} \otimes \mathcal{L}$, integrable, que genera $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$ es un haz inversible. Vamos a notar $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^1(X|T)(\mathcal{L})$.

En el caso en que estemos mirando una foliación $\mathcal{F}$ en X sobre $\mathbb{C}$, vamos a escribir $\Omega^1_X \otimes \mathcal{L}$ y $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^1(X)(\mathcal{L})$.

2.1.1. Vamos a llamar $\mathbb{C}[\varepsilon]$ al anillo $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ y $D = Spec\,(\mathbb{C}[\varepsilon])$ el entorno infinitesimal de orden 1 del origen.

2.1.2. Sea X una variedad algebraica sobre $\mathbb{C}$. Podemos construir el siguiente diagrama pull-back

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \times D \arrow[d, "\pi"] \\ Spec(\mathbb{C}) \arrow[r, "j"'] & D \end{tikzcd}$$

donde π es la proyección y j la inclusión.

Dado un haz $\mathcal{G}$ de módulos sobre $\mathcal{O}_{X\times D}$, podemos mirar a $\mathcal{G}$ como un haz sobre $\mathcal{O}_X$ en base al pull-back

$$i^*\mathcal{G} = i^{-1}\mathcal{G} \otimes_{i^{-1}D} Spec(\mathbb{C}) \ .$$

Definición 2.2. Sea $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación en $\mathcal{F}^1(X)(\mathcal{L})$. Vamos a decir que $\mathcal{F}_\varepsilon$ es una deformación infinitesimal de primer orden de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_\varepsilon$ es una foliación en $\mathcal{F}^1(X \times D|D)(\mathcal{L})$ de forma tal que

$$i^*\mathcal{F}_\varepsilon \simeq \mathcal{F} \ .$$

En el caso en que $X = \mathbb{P}^n$ vamos a decir que $\mathcal{F}_\varepsilon$ es una deformación proyectiva o simplemente una deformación de $\mathcal{F}$. Si $X = \mathbb{C}^{n+1}$ vamos a decir que $\mathcal{F}_\varepsilon$ es una deformación algebraica.

Sea entonces $X = \mathbb{P}^n$ y $\mathcal{F}_\varepsilon$ una deformación proyectiva de $\mathcal{F} = (\omega)$. Tenemos que $\mathcal{F}_\varepsilon$ está dada por una sección global $\omega_\varepsilon \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n \times D|D}(a))$. Una tal forma se escribe como

$$\omega_\varepsilon = \omega' + \varepsilon\eta$$

donde ω' y η son secciones globales de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)$. La condición $i^*(\mathcal{F}_\varepsilon) \simeq \mathcal{F}$ implica

$$(\omega') = (\omega)$$

como ideales diferenciales en $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}$, por lo tanto ω' y ω difieren en una unidad y podemos fijar $\omega' = \omega$.

La condición de integrabilidad aplicada a $\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon\eta$ la podemos calcular como

$$\begin{gathered}\omega_\varepsilon \wedge d\omega_\varepsilon = (\omega + \varepsilon\eta) \wedge d(\omega + \varepsilon\eta) = \omega \wedge d\omega + \varepsilon(d \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta) = 0 \\ \Updownarrow \\ \omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta = 0 \ . \end{gathered} \tag{1}$$

2.1.3. Vamos a escribir $\omega \vartriangle \eta$ a la fórmula $\omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta$.

2.1.4. Claramente la sección $\omega + \varepsilon\omega$ es integrable. Como $(1+\varepsilon)$ es una unidad entonces a nivel de ideales vale $(\omega + \varepsilon\omega) = (\omega)$, por lo que la deformación en la dirección ω es la deformación trivial.

Definición 2.3. Definimos el espacio de deformaciones de $\mathcal{F} = (\omega)$ como

$$D(\omega) = \{\eta \in H^0\big(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)\big) \ / \ \omega \vartriangle \eta = 0 \ \}\Big/ H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)\big).\omega \ .$$

2.1.5. Retomando 1.2.11, vemos que vale la igualdad $T_\omega\mathcal{F}(\mathbb{P}^n)(a) = D(\omega)$.

Supongamos ahora que $X = \mathbb{A}^{n+1}$, el espacio afín de dimensión $n+1$ sobre $\mathbb{C}$, y $\mathcal{F}_\varepsilon$ una deformación algebraica de $\mathcal{F} = (\omega)$. Es bien sabido - [Har77, Proposition 6.2, pp. 131, Corolary 6.16, pp. 145] - que todo haz inversible $\mathcal{L}$ es isomorfo al haz trivial, por lo tanto, $\mathcal{F}_\varepsilon$ está dada por una sección global $\omega_\varepsilon \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1}\times D|D})$. Por un razonamiento análogo al del caso anterior podemos escribir ω_ε como

$$\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon\eta$$

donde η es una sección global de $\Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1}}$ que verifica la condición $\omega \vartriangle \eta = 0$ módulo la dirección dada por ω.

Definición 2.4. Definimos el espacio de deformaciones algebraicas de $\mathcal{F} = (\omega)$ como

$$D_a(\omega) = \{\eta \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1}}) \ / \ \omega \vartriangle \eta = 0 \ \}\Big/ H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}).\omega \ .$$

Como ya dijimos en la sección anterior, dada una foliación $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ vamos a estar interesados en la foliación afín que $\mathcal{F}$ induce en el cono de $\mathbb{P}^n$ unión el origen. Al ser ω una forma homogénea el espacio $D_a(\omega)$ tiene una graduación natural en base al grado de las formas η, por lo tanto podemos descomponerlo como

$$D_a(\omega) = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} D_a(\omega)(b)$$

donde $D_a(\omega)(b) = \{\eta \in D_a(\omega) \ / \ \eta \text{ es homogénea de grado } b \ \}$.

2.1.6. Vamos a considerar un diagrama análogo a 2.1.2, salvo que ahora vamos a ver a $X \times D$ como variedad sobre $\mathbb{C}$. Construimos un nuevo diagrama pull-back

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \times D \arrow[d, "\pi"] \\ Spec(\mathbb{C}) \arrow[r, "j"'] & Spec(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

con π la proyección y j la identidad.

Definición 2.5. Vamos a decir que $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ es un unfolding infinitesimal de primer orden de $\mathcal{F}$ si $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ es una foliación en $\mathcal{F}^1(X \times D)(\mathcal{L})$ de forma tal que

$$i^* \widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \simeq \mathcal{F} \ .$$

En el caso en que $X = \mathbb{P}^n$ vamos a decir que $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ es un unfolding proyectivo o simplemente un unfolding. Si $X = \mathbb{A}^{n+1}$ vamos a decir que $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ es un unfolding algebraico.

Sea entonces $X = \mathbb{P}^n$ y $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ un unfolding proyectivo de $\mathcal{F} = (\omega)$. Tenemos que $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ va a estar dado por una sección global $\widetilde{\omega}_\varepsilon \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n \times D}(a))$ que verifica la condición de integrabilidad. Una tal forma se escribe como

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon = \omega' + \eta\varepsilon + hd\varepsilon$$

donde ω' y η son secciones globales de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)$ y h es una sección global del haz estructural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$.

Al igual que antes la condición $i^*(\mathcal{F}_\varepsilon) = \mathcal{F}$ nos permite tomar $\omega' = \omega$.

La condición de integrabilidad aplicada a $\widetilde{\omega}_\varepsilon = \omega + \eta\varepsilon + hd\varepsilon$ se calcula como

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_\varepsilon \wedge d\widetilde{\omega}_\varepsilon &= (\omega + \eta\varepsilon + hd\varepsilon) \wedge d(\omega + \eta\varepsilon + hd\varepsilon) = \\ &= \omega \wedge d\omega + (\omega \vartriangle \eta)\varepsilon + (\ hd\omega - \omega \wedge (\eta - dh)\ )\ d\varepsilon = 0 \ . \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon \wedge d\widetilde{\omega}_\varepsilon = 0 \iff \begin{cases} \omega \vartriangle \eta = 0 \\ hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh) \ . \end{cases} \tag{2}$$

Más aún, como veremos enseguida, la segunda ecuación implica la primera

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon \wedge d\widetilde{\omega}_\varepsilon = 0 \iff \left\{ hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh) \right. \ . \tag{3}$$

Propiedad 2.1.7. Los sistemas (2) y (3) son equivalentes.

Demostración. Si aplicamos el diferencial exterior a la ecuación del sistema (3) obtenemos

$$dh \wedge d\omega = d\omega \wedge (\eta - dh) - \omega \wedge d\eta \ .$$

Reacomodando lo podemos escribir como

$$2dh \wedge d\omega = -\omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta \ . \tag{4}$$

Si ahora tomamos de nuevo la ecuación del sistema (3), y la multiplicamos por $\eta - dh$ resulta

$$hd\omega \wedge (\eta - dh) = hd\omega \wedge \eta - hd\omega \wedge dh = 0 \ .$$

Reacomodando y dividiendo por h obtenemos

$$dh \wedge d\omega = d\omega \wedge \eta \ . \tag{5}$$

Operando con las ecuaciones (4) y (5) llegamos a la igualdad

$$\omega \vartriangle \eta = 0$$

como queríamos. □

De manera análoga a 2.1.4 las perturbaciones en la dirección de ω son triviales.

Definición 2.6. Definimos el espacio de unfoldings proyectivos de $\mathcal{F} = (\omega)$ como

$$U(\omega) = \Big\{(h,\eta) \in H^0\big((\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \times \Omega^1_{\mathbb{P}^n})(a)\big) \ / \ hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh)\Big\} \Big/ H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)\big).(0,\omega) \ .$$

Si tomamos $X = \mathbb{A}^{n+1}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ un unfolding algebraico tenemos que $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ va a estar dado por una sección global $\widetilde{\omega}_\varepsilon \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1}\times D})$ que se escribe como

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon = \omega + \eta\varepsilon + hd\varepsilon$$

donde η es una sección global de $\Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1}}$ y h una sección global de $\mathbb{A}^{n+1}$. Al igual que antes la condición de integrabilidad sobre $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ está dada por la ecuación

$$hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh) \ .$$

Definición 2.7. Definimos el espacio de unfoldings algebraicos de $\mathcal{F} = (\omega)$ como

$$U_a(\omega) = \Big\{(h,\eta) \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}} \times \Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1}}) \ / \ hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh)\Big\} \Big/ H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}).(0,\omega) \ .$$

De la misma forma a lo que hicimos con las deformaciones algebraicas tomamos $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ y miramos la foliación afín que define $\mathcal{F}$ en $\mathbb{A}^{n+1}$. Entonces podemos descomponer $U_a(\omega)$ como

$$U_a(\omega) = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} U_a(\omega)(b)$$

donde $U_a(\omega)(b) = \{(h, \eta) \in U_a(\omega) \; / \; h, \eta$ son homogéneos de grado b $\}$.

Sea un morfismo $\phi : X \times D \to X \times D$. Siempre en base al diagrama 2.1.6 tenemos que $i^*\mathcal{O}_{X\times D} = \mathcal{O}_X$, por lo tanto ϕ induce una aplicación

$$i^*\phi : X \to X \ .$$

Definición 2.8. Vamos a decir que 2 deformaciones (unfoldings) de primer orden $\mathcal{F}_\varepsilon$ y $\mathcal{F}'_\varepsilon$ ($\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ y $\widetilde{\mathcal{F}}'_\varepsilon$) son isomorfas si se tiene un isomorfismo $\phi : X \times D \to X \times D$ de forma tal que

$$i^*\phi = Id_X \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}_\varepsilon \simeq \phi^*\mathcal{F}'_\varepsilon \qquad \big(\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \simeq \phi^*\widetilde{\mathcal{F}}'_\varepsilon\big) \ .$$

Lo que queremos hacer ahora es poder caracterizar las relaciones de equivalencia definidas por los isomorfismos de deformaciones y unfoldings para el caso en que $X = \mathbb{P}^n$.

Es bien sabido - por ej. [Har77, Example 7.1.1, pp. 151] - que un isomorfismo de $\mathbb{P}^n$ es equivalente a un isomorfismo del anillo de coordenadas homogéneas $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ y que está dado por un elemento de $PGL(n, \mathbb{C})$, el grupo de matrices inversibles módulo la acción de $\mathbb{C}$.

Generalizando levemente ese hecho, tenemos que un isomorfismo $\phi : \mathbb{P}^n \times D \to \mathbb{P}^n \times D$ es equivalente a un isomorfismo

$$S[\varepsilon] \xrightarrow{\phi_\varepsilon} S[\varepsilon]$$

donde $S[\varepsilon] := S[t]/(t^2)$ y $\phi_\varepsilon = M_1 + \varepsilon M_2$ con $M_i \in PGL(n, \mathbb{C})$.

La condición $i^*\phi = Id$ se interpreta como que $\phi_\varepsilon|_S = M_1 = Id$. Entonces lo que queremos ver es como actúan los automorfismos de $\mathbb{P}^n \times D$ de la forma $\phi_\varepsilon = Id + \varepsilon M$ en los grupos $D(\omega)$ y $U(\omega)$. Para eso usamos las siguientes propiedades:

Propiedad 2.1.8. Sea $\mathcal{F}_\varepsilon = (\omega_\varepsilon)$ una deformación proyectiva de $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ de la forma $\omega_\varepsilon = \omega + \eta\varepsilon$ y sea $\phi_\varepsilon = Id + \varepsilon\ M$ un automorfismo de deformaciones. Entonces

$$\phi_\varepsilon^*\omega_\varepsilon = \omega + \big(\eta + L_{X_M}(\omega)\big)\ \varepsilon$$

donde X_M es un campo de vectores definido por M y $L_{X_M}(\omega)$ es la derivada de Lie[1] de ω respecto de X_M.

[1] Ver 2.3.4

Propiedad 2.1.9. Sea $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon = \widetilde{\omega}_\varepsilon$ un unfolding proyectivo de $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ de la forma $\widetilde{\omega}_\varepsilon = \omega + \eta\varepsilon + hd\varepsilon$ y sea $\phi_\varepsilon = Id + \varepsilon M$ un automorfismo de unfoldings. Entonces

$$\phi_\varepsilon^* \widetilde{\omega}_\varepsilon = \omega + (\eta + L_{X_M}\omega)\ \varepsilon + (h + i_{X_M}\omega)\ d\varepsilon$$

donde X_M es un campo de vectores definido por M.

Las demostraciones de ambas propiedades consisten de cálculos directos y se obtienen de los cálculos realizados en (A.1).

2.1.10. Si ϕ_ε es un isomorfismo de deformaciones o unfoldings algebraicos, vamos a tener que $\phi_\varepsilon = Id + \varphi\varepsilon$, donde φ es un automorfismo de $\mathbb{A}^n$. En este caso, valen las mismas relaciones, sólo que el campo de vectores que aparece en los pullbacks de ω se calcula respecto del operador lineal definido por el diferencial de φ.

2.1.11. De cualquier manera, dos deformaciones $\eta, \eta' \in D(\omega)$ o en $D_a(\omega)$, van a ser isomorfas si y sólo si $\eta - \eta' = L_X(\omega)$ para algún campo de vectores X. A su vez, dos unfoldings $(h, \eta), (h', \eta') \in U(\omega)$ o $U_a(\omega)$, van a ser isomorfos si y sólo si $h - h' = i_X\omega$ y $\eta - \eta' = L_X\omega$ para algún campo de vectores X.

Definición 2.9. Definimos los espacios de clases de equivalencia deformaciones y unfoldings de $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ por los cocientes

$$\overline{D}(\omega) := D(\omega)/C_D(\omega)$$
$$\overline{U}(\omega) := U(\omega)/C_U(\omega)$$

donde

$$C_D(\omega) = \big\{L_X(\omega)\ /\ \text{para } X \in H^0\big(T^1_{\mathbb{P}^n}(a)\big)\big\}\Big/ H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)\big).\omega$$
$$C_U(\omega) = \big\{(i_X(\omega), L_X(\omega))\ /\ \text{para } X \in H^0\big(T^1_{\mathbb{P}^n}(a)\big)\big\}\Big/ H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)\big).(0,\omega)\ .$$

De manera análoga se definen $\overline{D}_a(\omega)$ y $\overline{U}_a(\omega)$ y sus espacios de relaciones de equivalencia.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Decimos que F es un factor integrante de ω si

$$Fd\omega = dF \wedge \omega\ .$$

Vamos a llamar $K(\omega)$ al espacio de factores integrantes de ω

$$K(\omega) = \{F \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a))\ /\ Fd\omega = dF \wedge \omega\}\ .$$

Se deduce inmediatamente de la definición que si $h \in K(\omega)$ entonces $(h, 0) \in U(\omega)$. Por otro lado, en base a la Propiedad 2.1.7, podemos definir la aplicación natural

$$\begin{aligned} U(\omega) &\xrightarrow{\pi} D(\omega) \\ (h, \eta) &\longmapsto \eta \end{aligned}$$

y obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K(\omega) & \xrightarrow{i_1} & U(\omega) & \xrightarrow{\pi} & D(\omega) \\ & & h & \longmapsto & (h, 0) & & \\ & & & & (h, \eta) & \longmapsto & \eta\ . \end{array} \tag{6}$$

Nuevamente, directo de las definiciones, resulta que $\pi(C_U(\omega)) \subset C_D(\omega)$. Por lo tanto podemos ver la sucesión exacta anterior módulo isomorfismos

$$0 \longrightarrow \frac{K(\omega)}{K(\omega) \cap \pi_1(C_U(\omega))} \xrightarrow{i_1} \overline{U}(\omega) \xrightarrow{\pi} \overline{D}(\omega) \tag{7}$$

donde $\pi_1(C_U(\omega))$ es la proyección a la primer coordenada de $C_U(\omega)$.

2.2 Unfoldings holomorfos y proyectivos

2.2.1 Definiciones

Un repaso de la teoría de gérmenes de foliaciones holomorfas se puede encontrar en [Suw95].

Nos vamos a referir al entorno infinitesimal, analítico, alrededor del origen de $\mathbb{A}^{n+1}$ como $(\mathbb{A}^{n+1}, 0)$. Vamos a llamar $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0}$, $\Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1},0}$ y $T^1_{\mathbb{A}^{n+1},0}$ a los espacios de gérmenes de funciones, 1-formas y campos de vectores en $(\mathbb{A}^{n+1}, 0)$. Siguiendo la misma notación, vamos a indicar con $\mathcal{F}_{\mathbb{A}^{n+1},0}$ al germen de una foliación holomorfa en dicho espacio.

Al igual que en el caso algebraico, el germen de una foliación holomorfa $\mathcal{F}_{\mathbb{A}^{n+1},0}$ está dado, a menos de un escalar, por una 1-forma

$$\upsilon \in \Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1},0}$$

que verifica la condición de integrabilidad $\upsilon \wedge d\upsilon = 0$.

El espacio de unfoldings de $\mathcal{F}_{\mathbb{A}^{n+1},0} = (\upsilon)$ está dado por

$$U_h(\upsilon) = \left\{(h, \eta) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0} \times \Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1},0} \ / \ hd\upsilon = \upsilon \wedge (\eta - dh)\right\} \Big/ \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0}.(0, \upsilon)$$

y las clases de isomorfismo de unfoldings están dadas por el cociente

$$\overline{U}_h(v) := U_h(v)/C_{U_h}$$

donde C_{U_h} está definido como

$$C_{U_h} = \left\{(i_X(v), L_X(v)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0} \times \Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1},0} \;/\; \text{ para } X \in T^1_{\mathbb{A}^{n+1},0} \right\} \Big/ \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0}.(0,v) \ .$$

Fijemos $\mathcal{F}_{\mathbb{A}^{n+1},0} = (v)$ un germen de foliación en $(\mathbb{A}^{n+1},0)$, con v irreducible (en el mismo sentido que para una ω algebraica). Definimos el ideal de gérmenes

$$I_h(v) = \{h \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0} \;/\; hdv = v \wedge \widetilde{\eta} \text{ para alguna } \widetilde{\eta} \in \Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1},0} \} \ .$$

En base a la siguiente propiedad, los unfoldings de v se pueden mirar a través del ideal $I_h(v)$. La demostración es análoga a la que daremos más adelante para la Propiedad 2.3.11 en un contexto algebraico.

Propiedad 2.2.1. La proyección a la primer coordenada $\pi_1 : U_h(v) \to I_h(v)$ induce un isomorfismo

$$U_h(v) \simeq I_h(v) \ .$$

2.2.2 Unfoldings holomorfos y proyectivos

El anillo de gérmenes de funciones holomorfas $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0}$ está dado por el anillo de series convergentes $\mathbb{C}\{x_0,\ldots,x_n\}$. Se tienen aplicaciones naturales, los morfismos de k-jets,

$$\mathbb{C}\{x_0,\ldots,x_n\} \xrightarrow{j_k} \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$$

que consisten en quedarse con la expresión polinomial de grado k de una serie. Estos morfismos de jets, se extienden de manera canónica a $\Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1},0}$.

2.2.2. Una foliación algebraica en $\mathbb{A}^{n+1}$ va a definir un germen de foliación en $(\mathbb{A}^{n+1},0)$. Por lo tanto, podemos dar un paso más en la dirección tomada en la sección anterior - 1.2.2 -: dada una foliación proyectiva, miramos la foliación algebraica definida en el cono afín y luego el germen que define en el origen.

2.2.3. Sea $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Vamos a mirar el germen de foliación holomorfa que define en $(\mathbb{A}^{n+1},0)$. La expresión de ω no cambia, por lo que podemos notarla a esta foliación como $\mathcal{F}_h = (\omega)$.

Dado un unfolding holomorfo $(h, \eta) \in U_h(\omega)$, miramos la descomposición

$$h = \sum_{b \geq 0} h_b \qquad \text{y} \qquad \eta = \sum_{b \geq 0} \eta_b$$

donde $h_b = j_b(h) - j_{b-1}(h)$ y $\eta_b = j_b(\eta) - j_{b-1}(\eta)$ son las componentes homogéneas de grado b.

El par $(h, \eta) \in U_h(\omega)$ verifica la ecuación $hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh)$. Al ser ω una forma homogénea, dicha ecuación se descompone grado a grado en

$$h_b d\omega = \omega \wedge (\eta_b - dh_b)\ . \tag{8}$$

Contrayendo la ecuación anterior por el campo radial, resulta

$$a\ h_b\ \omega = -i_R(\eta_b)\ \omega + b\ h_b\ \omega\ . \tag{9}$$

En el caso en que $b = a$ se cancela el lado izquierdo de la igualdad y se obtiene que

$$i_R(\eta_a) = 0\ .$$

De esta forma tiene sentido definir la aplicación π_a

$$\begin{array}{rcl} U_h(\omega) & \xrightarrow{\pi_a} & U(\omega) \\ (h, \eta) & \longmapsto & (h_a, \eta_a) \end{array}$$

la cual es claramente suryectiva. Concluimos:

Teorema 2.2.4. Todo unfolding de primer orden de una foliación en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$, es la componente homogénea de grado a de algún germen de unfolding holomorfo en $(\mathbb{A}^{n+1}, 0)$.

2.2.5. Con un razonamiento totalmente análogo, y sabiendo que el espacio de deformaciones de $\mathcal{F}_{\mathbb{A}^{n+1},0} = (\upsilon)$ está dado por

$$D_h(\upsilon) = \left\{\eta \in \Omega^1_{\mathbb{A}^{n+1},0}\ /\ \upsilon \vartriangle \eta = 0\right\} \Big/ \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1},0}.\upsilon$$

obtenemos el resultado equivalente pero para deformaciones de foliaciones.

2.3 Unfoldings proyectivos graduados

A la luz del Teorema 2.2.4, lo que queremos hacer ahora es encontrar una manera fluida de pasar de unfoldings holomorfos a unfoldings proyectivos.

2.3.1. A lo largo de esta sección, vamos a fijar $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Es decir que $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$ es radial e integrable.

Sea M un S-módulo graduado, donde $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$. Vamos a indicar con $M(b)$ su componente homogénea de grado b.

Definición 2.11. Definimos el ideal graduado $I(\omega) \subset S$ como $I(\omega) = \bigoplus_{b \geq 0} I(\omega)(b)$ donde

$$I(\omega)(b) = \{h \in S(b) \ / \ hd\omega = \omega \wedge \widetilde{\eta} \text{ para alguna } \widetilde{\eta} \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}\} \ .$$

2.3.2. De esta forma, $I(\omega)$ no es más que la versión algebraica de su análogo holomorfo, es decir, $I(\omega) = I_h(\omega) \cap S$.

En el caso de variedades $\mathcal{C}^\infty$, es bien conocida la siguiente descomposición - ver [War83, Proposition 2.25, pp. 70] -:

Propiedad 2.3.3. Sea η una 1-forma y X un campo de vectores, entonces

$$L_X(\eta) = di_X\eta + i_Xd\eta \ .$$

2.3.4. La descomposición anterior la vamos a tomar como definición de la derivada de Lie en el contexto algebraico.

2.3.5. En el caso particular en que uno considere el campo de vectores radial R y $\eta \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$ es una forma homogénea de grado b vale la igualdad

$$L_R(\eta) = b\eta$$

ver [Jou79, Lemme 1.2, pp. 3].

2.3.6. Como la forma ω es una sección global de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a)$ verifica la condición $i_R(\omega) = 0$. De esta forma

$$L_R(\omega) = di_R(\omega) + i_Rd\omega = i_Rd\omega = a\ \omega \ .$$

Lo mismo sucede para una función $h \in S(b)$.

Definición 2.12. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Definimos el espacios de unfoldings proyectivos graduados $\mathbb{U}(\omega)$ como

$$\mathbb{U}(\omega) = \left\{(h,\eta) \in S \times \Omega^1_{S|\mathbb{C}} \ / \ L_R(h)\ d\omega = L_R(\omega) \wedge (\eta - dh)\right\} \Big/ S.(0,\omega)\ .$$

Así, cada componente homogénea $\mathbb{U}(\omega)(b)$ está dada por

$$\mathbb{U}(\omega)(b) = \left\{(h,\eta) \in S(b) \times \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b) \ / \ b\ h\ d\omega = a\ \omega \wedge (\eta - dh)\right\} \Big/ S(b-a).(0,\omega)\ .$$

2.3.7. Es importante observar que los grupos $\mathbb{U}(\omega)$ y $U_a(\omega)$ coinciden con $U(\omega)$ en su componente homogénea de grado a

$$\mathbb{U}(\omega)(a) = U_a(\omega)(a) = U(\omega)\ .$$

El nombre de unfoldings proyectivos graduados a $\mathbb{U}(\omega)$ proviene de la propiedad siguiente, que muestra que los elementos homogéneos de $\mathbb{U}(\omega)$ descienden al espacio proyectivo.

Propiedad 2.3.8. Si $(h,\eta) \in \mathbb{U}(\omega)(b)$ entonces $(h,\eta) \in H^0((\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \times \Omega^1_{\mathbb{P}^n})(b))$.

Demostración. Tomemos (h,η) tal que $b\ hd\omega = a\ \omega \wedge (\eta - dh)$. Aplicando la contracción con el campo radial

$$\begin{aligned} ab\ h\ \omega &= -a\ \omega \wedge i_R(\eta - dh) = -a\ \omega \wedge (i_R\eta - bh) = \\ &= -a\ i_R\eta\ \omega + ab\ h\ \omega\ . \end{aligned}$$

Cancelando términos llegamos a $i_R\eta\ \omega = 0$, por lo tanto $i_R\eta = 0$. $\square$

2.3.9. Por otro lado, resulta $\mathbb{U}(\omega)(b) \simeq U_a(\omega)(b)$. Si el par $(h,\eta) \in U_a(\omega)(b)$ entonces

$$\begin{aligned} hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh) &= \frac{a}{b}\ \omega \wedge \left[\left(\frac{b}{a}(\eta - dh) + dh\right) - dh\right] = \\ &= \frac{a}{b}\ \omega \wedge \left[\left(\frac{b\eta + (a-b)dh}{a}\right) - dh\right]\ . \end{aligned}$$

De esta manera concluimos el siguiente resultado:

Propiedad 2.3.10. La aplicación $\mu : U_a(\omega) \longrightarrow \mathbb{U}(\omega)$ definida en cada componente homogénea como

$$\begin{aligned} U_a(\omega)(b) &\xrightarrow{\mu_b} \mathbb{U}(\omega)(b) \\ (h,\eta) &\longmapsto (h, \tfrac{b\eta+(a-b)dh}{a}) \end{aligned} \tag{10}$$

define un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales entre ambos espacios.

Propiedad 2.3.11. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ una foliación irreducible. Entonces la proyección a la primer coordenada $\pi_1 : \mathbb{U}(\omega) \to I(\omega)$ induce isomorfismos

$$\mathbb{U}(\omega)(b) \simeq I(\omega)(b)$$

para todo $b \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la definición de $I(\omega)$ está claro que π_1 es un epimorfismo.

Sean ahora $(h,\eta_1),(h,\eta_2)$ tales que

$$\begin{aligned} b\ hd\omega &= a\ \omega \wedge (\eta_1 - dh) \\ b\ hd\omega &= a\ \omega \wedge (\eta_2 - dh)\ . \end{aligned}$$

Entonces $\omega \wedge (\eta_1 - \eta_2) = 0$. Como ω es irreducible existe $f \in S$ tal que $\eta_1 - \eta_2 = f\omega$. De esta forma podemos escribir

$$(h,\eta_1) = (0, f\omega) + (h,\eta_2)$$

de donde se ve que $Ker(\pi_1) = \overline{S.(0,\omega)} = 0$. □

La propiedad anterior, elemental, transforma la naturaleza del problema: de trabajar con unfoldings, pares de elementos desprovistos *a priori* de una estructura algebraica amigable, se pasa a mirar un ideal del anillo de polinomios.

2.3.12. Supongamos que queremos conocer $U(\omega)$ a través del ideal $I(\omega)$. Está claro que si se conoce un elemento $h \in I(\omega)(a)$ y se quiere conocer efectivamente el unfolding al cual corresponde, es necesario resolver la ecuación diferencial

$$hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh)\ .$$

Como nostros partimos de una ω que desciende al espacio proyectivo el ideal $I(\omega)$ es homogéneo. Por lo tanto, si los generadores de $I(\omega)$ tienen todos grados superiores al de ω, no van a haber unfoldings proyectivos. En cambio, si los grados de los generadores fuesen menores que el de ω, se necesitaría generar los elementos del grado igual al de ω para poder obtener los unfoldings proyectivos. En este último caso, es natural pensar que conviene resolver la ecuación anterior en grados bajos y luego subir el grado de los elementos al grado de ω en lugar de hacer al revés.

La siguiente propiedad le otorga una estructura de S-módulo graduado, no natural, a $\mathbb{U}(\omega)$ que permite resolver la situación recién mencionada.

Propiedad 2.3.13. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. El grupo $\mathbb{U}(\omega)$ tiene una estructura de S-módulo graduado en base a la siguiente acción de S:

$$f \cdot (h, \eta) := \left(\frac{b}{b+c}\; fh,\; f\eta + \frac{1}{b+c}\;(b\; hdf - c\; f\; dh) \right)$$

para $(h, \eta) \in \mathbb{U}(\omega)(b)$ y $f \in S(c)$.

Demostración. Sea entonces $(h, \eta) \in \mathbb{U}(\omega)(b)$ y $f \in S(c)$. Primero verifiquemos que efectivamente el par $f \cdot (h, \eta) \in \mathbb{U}(\omega)(b+c)$:

$$\begin{aligned}
(b+c)\left(\frac{b}{b+c}\; fh\right) d\omega &= a\; \omega \wedge \left[\left(\; f\eta + \frac{1}{b+c}\;(b\; hdf - c\; f\; dh)\right) - d\left(\frac{b}{b+c}\; fh\right)\right] \\
b\; fh\; d\omega &= a\; \omega \wedge (\; f\eta - fdh\;) \\
b\; fh\; d\omega &= a\; f\; \omega \wedge (\; \eta - dh\;) \\
&\Updownarrow \\
b\; hd\omega &= a\; \omega \wedge (\; \eta - dh\;)\; .
\end{aligned}$$

Para verificar la asociatividad, tomemos también $g \in S(e)$. Por un lado tenemos

$$(gf) \cdot (h, \eta) = \left(\frac{b}{b+c+e}\; gfh,\; gf\eta + \frac{1}{b+c+e}\;\; (b\; h\; d(gf) - (c+e)\; gf\; dh) \right)$$

y por otro lado, llamando $f \cdot (h, \eta) = (\widetilde{h}, \widetilde{\eta})$, resulta

$$g \cdot (f \cdot (h, \eta)) = g \cdot (\widetilde{h}, \widetilde{\eta}) = \left(\frac{b+c}{b+c+e}\; g\widetilde{h},\; g\widetilde{\eta} + \frac{1}{b+c+e}\left((b+c)\;\widetilde{h}dg - egd\widetilde{h}\right)\right).$$

Sustituyendo $\widetilde{h} = \frac{b}{b+c} fh$ se ve la igualdad en la primer coordenada. En la segunda coordenada, al sustituir $\widetilde{\eta}$ por $f\eta + \frac{1}{b+c}\;(b\; hdf - c\; fdh)$, tenemos

$$\begin{aligned}
&g\widetilde{\eta} + \frac{1}{b+c+e}\;\left((b+c)\;\widetilde{h}dg - e\; g\; d\widetilde{h}\right) = \\
&\quad = gf\eta + \frac{g}{b+c}\;\big(b\; hdf - c\; f\; dh\big) + \frac{1}{b+c+e}\;\left(b\; fhdg - \frac{eb}{b+c}\; g\; d(fh)\right) = \\
&\quad = gf\eta + \left[\left(\frac{b}{b+c} - \frac{eb}{(b+c+e)(b+c)}\right) hg\; df + \left(\frac{b}{b+c+e}\right) hf\; dg\right] + \\
&\qquad\quad + \left(-\frac{c}{b+c} - \frac{eb}{(b+c+e)(b+c)}\right) gf\; dh = \\
&\quad = gf\eta + \frac{1}{b+c+e}\big(\; b\; h\; d(gf) - \;(c+e)\; gf\; dh\big)
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Por último, observemos que la acción pasa al cociente por $S.(0, \omega)$ puesto que $g \cdot (0, f\omega) = (0, gf\omega)$ $\square$

2.4 Foliaciones racionales y logarítmicas

En [CLN96] se muestra que las foliaciones racionales y logarítmicas forman componentes del espacio de foliaciones $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$.

2.4.1. Una foliación racional en dicho espacio, queda definida por una 1-forma que se escribe como

$$\omega_{\mathcal{R}} = r\ FdG\ -\ s\ GdF$$

donde F y G son polinomios homogéneos de grados r y s respectivamente.

Vamos a denotar al espacio de foliaciones racionales de tipo (r, s) en $\mathbb{P}^n$ como $\mathcal{R}(n, (r, s))$.

A su vez, una foliación logarítmica en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$, queda definida por una 1-forma que se escribe como

$$\omega_{\mathcal{L}} = \left(\prod_{i=1}^{s} f_i\right) \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

donde se verifican las condiciones

i) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \Lambda(s) := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ / tales que $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_s d_s = 0\}$

ii) $f_i \in S(d_i)$ y $d_1 + \ldots + d_s = a$.

2.4.2. También vamos a usar la siguiente notación para una forma logarítmica

$$\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\ F_i\ df_i$$

donde $F_i = \prod_{j \neq i} f_j$. En general, para $I \subset \{1, \ldots, n\}$, vamos a notar con F_I al producto $\prod_{j \notin I} f_j$ y con df_I al producto exterior de los df_i con $i \in I$.

Vamos a denotar al espacio de foliaciones logarítmicas de tipo $\overline{d} \in \mathbb{N}^s$ en $\mathbb{P}^n$ como $\mathcal{L}(n, \overline{d})$.

De esta manera, de acuerdo con la Propiedad 1.2.9, las componentes racionales y logarítmicas del espacio de foliaciones de $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(2)$ están dadas por formas de grado 4 y los únicos casos posibles son $\mathcal{R}(n,(1,3))$, $\mathcal{R}(n,(2,2))$, $\mathcal{L}(n,(1,1,1,1))$ y $\mathcal{L}(n,(1,1,2))$.

2.4.1 Foliaciones racionales

Las perturbaciones infinitesimales de una foliación racional están estudiadas en [GMLN91] y [CPV09]. Citamos el siguiente resultado de [CPV09, Proposition 2.4, pp. 711].

Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(S(r)) \times \mathbb{P}(S(s)) & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{R}}} & \mathcal{R}(n,(r,s)) \\ (F,G) & \longmapsto & rFdG \ - \ sGdF \ . \end{array} \tag{11}$$

Queremos que las formas $\omega_{\mathcal{R}}$ verifiquen cierta condición de genericidad, para eso definimos el conjunto

$$\mathcal{U}_{\mathcal{R}} = \{\omega \in \mathcal{R}(n,(r,s)) \ / \ codim(Sing(d\omega)) \geq 3 \text{ y } codim(Sing(\omega)) \geq 2\} \ .$$

Propiedad 2.4.3. Sean $(F,G) \in \mathbb{P}(S(r)) \times \mathbb{P}(S(s))$ tales que $\Psi_{\mathcal{R}}(F,G) = \omega_{\mathcal{R}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$. Entonces el diferencial de la aplicación $\Psi_{\mathcal{R}}$ en el punto (F,G)

$$T^1_{(F,G)}\Big(\mathbb{P}(S(r)) \times \mathbb{P}(S(s))\Big) \xrightarrow{d\Psi_{\mathcal{R}}} T^1_{\omega_{\mathcal{R}}}\mathcal{R}(n,(r,s))$$

es suryectivo.

Siguiendo 1.2.11 tenemos que $T^1_{(F,G)}\Big(\mathbb{P}(S(r)) \times \mathbb{P}(S(s))\Big) \simeq S(r) \times S(s)/(F,G)$. Como también $T^1_{\omega_{\mathcal{R}}}(\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)) = D(\omega_{\mathcal{R}})$ entonces toda deformación de $\omega_{\mathcal{R}}$ se obtiene perturbando los parámetros F o G.

Por otro lado, sea $\upsilon \in \Omega^1_{\mathbb{A}^n,0}$ un germen de una forma racional holomorfa que se escribe como

$$\upsilon = f \ dg - g \ df \ .$$

De [Suw83b, Lemma 2.1, pp. 217] tenemos la siguiente propiedad:

Lema 2.4.4. Para la forma υ recién definida, si $codim(Sing(\upsilon)) \geq 2$, entonces $I_h(\upsilon) = (f,g)$.

2.4.5. Sea $\omega_{\mathcal{R}} = r\ FdG\ -\ s\ GdF$ una forma racional. Si miramos el germen de foliación holomorfa que define alrededor del origen podemos utilizar el Lema anterior y ver que

$$I_h(\omega_{\mathcal{R}}) = (F, G)\ .$$

Más aún, como F, G son polinomios tenemos una versión algebraica del Lema 2.4.4.

Propiedad 2.4.6. Sea $\mathcal{F} = (\omega_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{R}(n, (r, s))$ una foliación racional. Si $\omega_{\mathcal{R}} = rFdG - sGdF$, entonces

$$I(\omega_{\mathcal{R}}) = (F, G)\ .$$

Fijemos $\omega_{\mathcal{R}}$ como en la Propiedad 2.4.6 de grado a.

Si miramos a $F \in I(\omega)(r)$, por la Propiedad 2.3.11 existe θ_F que verifica $(F, \theta_F) \in \mathbb{U}(\omega_{\mathcal{R}})(r)$, es decir,

$$rF\ d\omega_{\mathcal{R}} = a\ \omega_{\mathcal{R}} \wedge (\theta_F - dF)\ .$$

Como $d\omega_{\mathcal{R}} = (r+s)dF \wedge dG = a\ dF \wedge dG$, podemos resolver la ecuación

$$raF\ dF \wedge dG = a\ (rFdG - sGdF) \wedge (\theta_F - dF)$$

tomando simplemente $\theta_F = 0$.

Sea g un polinomio de grado $s = a - r$. Actuando con g en el par $(F, 0)$ obtenemos

$$g \cdot (F, 0) = \left(\frac{r}{r+s} gF,\ \frac{1}{r+s} (rFdg - sgdF) \right) \in \mathbb{U}(\omega_{\mathcal{R}})(a) = U(\omega_{\mathcal{R}})\ .$$

Haciendo lo mismo para G, actuando con un polinomio g en el par $(G, 0)$ vamos a obtener

$$f \cdot (G, 0) = \left(\frac{s}{r+s} fG,\ \frac{1}{r+s} (rGdf - sfdG) \right) \in \mathbb{U}(\omega_{\mathcal{R}})(a) = U(\omega_{\mathcal{R}})\ .$$

De esta forma, vemos que la proyección

$$U(\omega_{\mathcal{R}}) \xrightarrow{\pi} D(\omega_{\mathcal{R}})$$

es un epimorfismo. Concluimos el siguiente resultado:

Teorema 2.4.7. Siguiendo la notación anterior, sea $\mathcal{F} = (\omega_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ una foliación racional tal que $\omega_{\mathcal{R}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$. Entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow K(\omega_{\mathcal{R}}) \xrightarrow{i_1} U(\omega_{\mathcal{R}}) \xrightarrow{\pi} D(\omega_{\mathcal{R}}) \longrightarrow 0\ .$$

Es decir que todas las deformaciones de una forma racional genérica provienen de unfoldings.

2.4.8. Una demostración alternativa de este hecho, independiente de la clasificación de los resultados de [GMLN91] o [CPV09], la damos en (A.2).

2.4.2 Foliaciones logarítmicas

Una manera natural de deformar una forma logarítmica $\omega_{\mathcal{L}}$ es deformando alguno de sus parámetros f_i o $\overline{\lambda}$. En base a esto, miramos las 1-formas

$$\overline{\eta}_{f_t'} = \left(\prod_{i\neq t} f_i\right)(f_t+\varepsilon f_t')\left(\sum_{i\neq t}\lambda_i\frac{df_i}{f_i} \;+\; \lambda_t\frac{d(f_t+\varepsilon f_t')}{f_t+\varepsilon f_t'}\right)$$
$$\overline{\eta}_{\overline{\lambda}'} = \left(\prod f_i\right)\left(\sum_i(\lambda_i+\varepsilon\mu_i)\frac{df_i}{f_i}\right)$$

donde en $\overline{\eta}_{f_t'}$ cambiamos la función f_t por $f_t+\varepsilon f_t'$ y en $\overline{\eta}_{\overline{\lambda}'}$ cambiamos cada escalar λ_i por $\lambda_i+\varepsilon\mu_i$.

Distribuyendo en ambos casos, es fácil ver que se llega a expresiones de la forma

$$\overline{\eta}_{f_t'} = \omega_{\mathcal{L}} + \varepsilon\ \eta_{f_t'} \qquad \overline{\eta}_{\overline{\mu}} = \omega_{\mathcal{L}} + \varepsilon\ \eta_{\overline{\mu}}$$

donde $\eta_{f_t'}$ y $\eta_{\overline{\mu}}$ son formas logarítmicas iguales a $\omega_{\mathcal{L}}$, salvo que tienen el parámetro f_t cambiado por f_t' y $\overline{\lambda}$ por $\overline{\mu}$ respectivamente. En (A.3) mostramos que efectivamente son deformaciones, es decir que valen las condiciones

$$\omega_{\mathcal{L}} \mathbin{\triangle} \eta_{f_t'} = 0$$
$$\omega_{\mathcal{L}} \mathbin{\triangle} \eta_{\overline{\mu}} = 0\ .$$

Continuando con la notación, podemos definir los espacios de deformaciones de $\omega_{\mathcal{L}}$ generados por las perturbaciones de estos parámetros

$$D(\omega_{\mathcal{L}},\overline{f}) = \left(\eta_{f_t'}\ /\ f_t'\in S(d_t)\Big/(f_t),\ t=1,\ldots,s\right)$$
$$D(\omega_{\mathcal{L}},\overline{\lambda}) = \left(\eta_{\overline{\mu}}\ /\ \overline{\mu}\in\Lambda(s)\Big/(\overline{\lambda})\right)\ .$$

Teniendo en cuenta que la dimensión de $S(d_i)/(f_i)$ está dada por $\binom{n+d_i}{d_i}-1$, la dimensión de $D(\omega_{\mathcal{L}},\overline{f})$ la podemos calcular como

$$\sum_{i=1}^{s}\binom{n+d_i}{d_i}-1 = \left(\sum_{i=1}^{s}\binom{n+d_i}{d_i}\right)-s\ .$$

La dimensión de $D(\omega_{\mathcal{L}},\overline{\lambda})$ es igual a $s-2$.

2.4.9. Para $\omega = \left(\prod_{i=1}^{s} f_i\right)\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\frac{df_i}{f_i}$, definimos el abierto genérico $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}\subset\mathcal{L}(n,\overline{d})$ en base a las condiciones

i) f_i son irreducibles y se intersecan transversalmente

ii) $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \notin \mathbb{R}$.

Podemos reescribir [CA94, Theorem 4.1, pp. 766] y [CA94, Corollary 4.2, pp. 766] de la siguiente manera:

Teorema 2.4.10. Si $n, s \geq 3$ y $\overline{d} = (d_0, \ldots, d_s) \in \mathbb{N}^s$ es tal que $\sum d_i = a > 1$, entonces el espacio $\mathcal{L}(n, \overline{d})$ es una componente irreducible del espacio de foliaciones $\mathcal{F}(\mathbb{P}^n)(a)$ y su dimensión es

$$\sum_{i=1}^{s} \binom{n+d_i}{d_i} - 2 \ . \tag{12}$$

Más aún, si $\omega_{\mathcal{L}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ entonces toda deformación de $\omega_{\mathcal{L}}$ se descompone como

$$D(\omega_{\mathcal{L}}) = D(\omega_{\mathcal{L}}, \overline{f}) \oplus D(\omega_{\mathcal{L}}, \overline{\lambda}) \ .$$

2.4.11. Sea ahora $\upsilon \in \Omega^1_{\mathbb{A}^n,0}$ un germen holomorfo de una forma logarítmica escrita como

$$\upsilon = \left(\prod_{i=1}^{s} h_i\right) \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{dh_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i H_i dh_i \ .$$

2.4.12. Fijemos las siguientes condiciones de genericidad

$$\begin{cases} codim(Sing(\upsilon)) \geq 2 \\ \text{las } h_i \text{ son reducidas y no tienen factores comunes} \\ ht((h_i, h_j, h_k)) = 3 \text{ para todo } i, j, k \text{ distintos 2 a 2} \end{cases}$$

donde $ht((h_i, h_j, h_k))$ denota la altura(^{2}) del ideal generado por h_i, h_j, h_k.

De [Suw83a, Proposition 1.7, pp. 102] obtenemos el siguiente resultado:

Propiedad 2.4.13. Sea $\upsilon \in \Omega^1_{\mathbb{A}^n,0}$ el gérmen de una forma logarítmica como en 2.4.11, de forma tal que verifica las condiciones 2.4.12 y $dh_1 \wedge \ldots \wedge dh_s \neq 0$. Entonces

$$I_h(\upsilon) = (H_1, \ldots, H_s) \ .$$

2.4.14. Haciendo un razonamiento análogo al que hicimos para el caso de una forma racional - Propiedad 2.4.6 - tenemos una versión algebraica de la Propiedad 2.4.13.

[2] La altura de un ideal I es el supremo de las longitudes de cadenas crecientes de ideales primos contenidas en I - ver [Eis95, pp. 225] -.

Propiedad 2.4.15. Sea $\mathcal{F} = (\omega_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}(n, \overline{d})$ una foliación logarítmica escrita como

$$\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \; F_i \; df_i \; .$$

Si $\omega_{\mathcal{L}}$ verifica las hipótesis de la Propiedad 2.4.13 entonces

$$I(\omega_{\mathcal{L}}) = (F_1, \dots, F_s) \; .$$

2.4.16. En particular, de la Propiedad 2.4.13 tenemos que necesariamente $s \leq n$.

Fijemos $\omega_{\mathcal{L}}$ como en la Propiedad 2.4.15 de grado a.

Al igual que antes, como las funciones F_i tienen grados $b_i = a - d_i$, vamos a buscar θ_i de forma tal que $(F_i, \theta_i) \in \mathbb{U}(\omega_{\mathcal{L}})(b_i)$.

Para $t \leq s$, tenemos que buscar θ_t que verifique

$$\begin{aligned} b_t \; F_t d\omega_{\mathcal{L}} &= a \; \omega_{\mathcal{L}} \wedge (\theta_t - dF_t) \\ b_t \; F_t \sum_{i,j=1}^{s} \lambda_j \; F_{ij} \; df_{ij} &= a \; \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i F_i df_i \right) \wedge (\theta_t - dF_t) \; . \end{aligned} \tag{13}$$

2.4.17. Si suponemos que las funciones f_i están dadas por las variables x_i, podemos contraer la ecuación anterior por el campo $\frac{\partial}{\partial x_t}$. La ecuación resultante tiene una fácil solución considerando $i_{\frac{\partial}{\partial x_t}}(\theta_t - dF_t) = i_{\frac{\partial}{\partial x_t}} \theta_t = 0$.

No solo eso, sino que suponiendo que $i_{\frac{\partial}{\partial x_t}} \theta_t = 0$ podemos resolver el sistema original.

Motivados por el comentario anterior, vamos a buscar una solución de la forma

$$\theta_t - dF_t = \sum_{j \neq t} \mu_j F_{jt} \; df_j$$

para la ecuación (13).

Reemplazamos dicha expresión en la ecuación

$$\begin{aligned} b_t \sum_{i,j} \lambda_j \; F_{ij} F_t \; df_{ij} = a \left(\sum_{i} \lambda_i F_i df_i \right) \wedge \left(\sum_{j \neq t} \mu_j F_{jt} \; df_j \right) \iff \\ \sum_{i,j \neq t} b_t \lambda_j \; F_{ij} F_t \; df_{ij} + \sum_{j \neq t} b_t (\lambda_t - \lambda_j) F_{jt} F_t \; df_{jt} = \\ = \sum_{i,j \neq t} a \lambda_i \mu_j F_{ij} F_t \; df_{ij} + \sum_{j \neq t} a \lambda_t \mu_j F_t F_{jt} \; df_{tj} \; . \end{aligned}$$

Esta última igualdad, la podemos reacomodar en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{i<j \\ i,j\neq t}} b_t(\lambda_j - \lambda_i)\ F_{ij}F_t\ df_{ij} = \sum_{\substack{i<j \\ i,j\neq t}} a(\lambda_i\mu_j - \lambda_j\mu_i)\ F_{ij}F_t\ df_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j\neq t} b_t(\lambda_j - \lambda_t)F_tF_{jt}\ df_{tj} = \sum_{j\neq t} a\lambda_t\mu_jF_tF_{jt}\ df_{tj}\ . \end{cases}$$

En base a la segunda ecuación, la única opción es tomar $\mu_j = \frac{b_t(\lambda_j-\lambda_t)}{a\lambda_t}$. Reemplazando este valor de μ_j en la primer ecuación comprobamos la compatibilidad del sistema en base a la igualdad

$$a\left[\lambda_i\left(\frac{b_t(\lambda_j-\lambda_t)}{a\lambda_t}\right) - \lambda_j\left(\frac{b_t(\lambda_i-\lambda_t)}{a\lambda_t}\right)\right] = b_t(\lambda_j-\lambda_i)\ .$$

Finalmente, si tomamos θ_t como

$$\theta_t = \frac{b_t}{a\lambda_t}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{s}(\lambda_j-\lambda_t)\ F_{jt}\ df_j\ +\ dF_t$$

obtenemos el par $(F_t,\theta_t)\in\mathbb{U}(\omega_{\mathcal{L}})(b_t)$ como buscábamos.

Tomamos ahora $g\in S(d_t)$. Queremos calcular $g\cdot(F_t,\theta_t)\in\mathbb{U}(\omega_{\mathcal{L}})(a)=U(\omega_{\mathcal{L}})$. En base a la definición tenemos

$$g\cdot(F_t,\theta_t) = \left(\frac{b_t}{a}gF_t,\ g\theta_t + \frac{1}{a}\ (\ b_tF_tdg - d_tgdF_t\ )\right)\ .$$

Reemplazamos θ_t en la segunda coordenada

$$\begin{aligned}
&\frac{b_t}{a\lambda_t}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{s}(\lambda_j-\lambda_t)\ gF_{jt}\ df_j\ +\ g\ dF_t\ +\ \frac{b_t}{a}F_t\ dg\ -\ \frac{d_t}{a}g\ dF_t = \\
&= \frac{b_t}{a\lambda_t}\sum_{j\neq t}(\lambda_j-\lambda_t)\ gF_{jt}\ df_j\ +\ \frac{b_t}{a}g\ dF_t\ +\ \frac{b_t}{a}F_t\ dg = \\
&= \frac{b_t}{a\lambda_t}\left(\sum_{j\neq t}(\lambda_j-\lambda_t)\ gF_{jt}\ df_j\ +\ \lambda_t\ g\ dF_t\ +\ \lambda_t\ F_t\ dg\right) = \\
&= \frac{b_t}{a\lambda_t}\left(\sum_{j\neq t}(\lambda_j-\lambda_t)\ gF_{jt}\ df_j\ +\ \sum_{j\neq t}\lambda_t\ gF_{jt}\ df_j\ +\ \lambda_t\ F_t\ dg\right) = \\
&= \frac{b_t}{a\lambda_t}\left(\sum_{j\neq t}\lambda_j\ gF_{jt}\ df_j\ +\ \lambda_t\ F_t\ dg\right) = \frac{b_t}{a\lambda_t}\ \eta_{g_t}
\end{aligned}$$

donde η_{g_t} pertenece al espacio de deformaciones de $\omega_{\mathcal{L}}$ correspondiente a la perturbación del parámetro f_t por $g_t = g$.

Así, vemos que la imagen de la proyección

$$U(\omega_{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\pi} D(\omega_{\mathcal{L}}) = D(\omega_{\mathcal{L}}, \overline{f}) \oplus D(\omega_{\mathcal{L}}, \overline{\lambda})$$

está dada por $D(\omega_{\mathcal{L}}, \overline{f})$. Concluimos entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.4.18. Siguiendo la notación anterior, sea $\mathcal{F} = (\omega_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ una foliación logarítmica tal que $\omega_{\mathcal{L}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ y verifica las condiciones 2.4.12. Entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow K(\omega_{\mathcal{L}}) \xrightarrow{i_1} U(\omega_{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\pi} D(\omega_{\mathcal{L}}) \longrightarrow D(\omega_{\mathcal{L}}, \overline{\lambda}) \longrightarrow 0 \ .$$

Es decir que las únicas deformaciones de una forma logarítmica genérica que provienen de unfoldings están dadas por las perturbaciones de las funciones f_i.

Capítulo 3

Complejo $K^\bullet(d\omega)$

Introducción

En la primera sección hacemos un repaso sobre los funtores que relacionan haces de módulos sobre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ y módulos graduados sobre el anillo de coordenadas homogéneas S. En la segunda sección, recordamos las propiedades básicas del polinomio de Hilbert de una variedad proyectiva, o de un módulo graduado.

Luego definimos el complejo $K^\bullet(d\omega)$ asociado a una foliación definida por la forma ω. Probamos que la homología de dicho complejo es isomorfa a la clase de isomorfismos de unfoldings proyectivos graduados $\overline{\mathbb{U}}(\omega)$ definidos en el capítulo anterior.

Sea $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación racional o logarítmica. Bajo ciertas condiciones de genericidad el lugar singular de ω se descompone como $Sing(\omega) = Z \cup R$, donde Z tiene codimensión 2 y R tiene dimensión 0 y consta de N puntos aislados. Probamos que el polinomio de Hilbert de $H^1(K^\bullet(d\omega))$ es constante e igual a N.

3.1 Variedades proyectivas y módulos graduados

Llamemos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-ch a la categoría de haces de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ módulos coherentes y S-mod$_{gr}$ a la categoría de S-módulos graduados.

Definición 3.1. Vamos a decir que 2 módulos M y N en S-mod$_{gr}$ son establemente isomorfos si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigoplus_{k \geq n_0} M(k) \simeq \bigoplus_{k \geq n_0} N(k) \ .$$

Vamos a notar $M \simeq_e N$, cuando M y N sean establemente isomorfos.

El funtor Γ_* definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\text{-ch} &\xrightarrow{\Gamma_*} S\text{-mod}_{gr} \\ F &\longmapsto \bigoplus_{b\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n, F(b)) \end{aligned}$$

define una equivalencia entre las categorías de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-ch y S-mod$_{gr}$, módulo la relación de equivalencia de ser establemente isomorfos, [Har77, Exercise 5.9, pp. 125]. El funtor “inverso” a Γ_* está dado por el funtor de hacificación $(\ )^{\sim}$.

A nivel de esquemas, una subvariedad $Y \subset \mathbb{P}^n$ se identifica con un cociente de S por un ideal homogéneo. Esta identificación se da a través de la construcción del esquema *Proj* de un anillo graduado.

3.1.1. La relación entre estos funtores se puede ver de la siguiente manera: si $I \subset S$ es un ideal, entonces $(S/I)^{\sim}$ se identifica con el haz estructural del esquema $Proj(S/I)$, visto como haz sobre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$.

En general, vamos a notar con $V(I)$ a la variedad $Proj(S/I)$ definida por el ideal I. En el caso en que $M \in S$-mod$_{gr}$, vamos a llamar $V(M)$ a la variedad definida por el ideal anulador de M, el cual está definido por $ann(M) = \{a \in S \ / \ am = 0 \ \forall m \in M\}$.

3.2 Polinomio de Hilbert

La función de Hilbert de un S-módulo graduado M se define como

$$\varphi_M(t) = dim_{\mathbb{C}}(M(t)) \ .$$

En el caso en que M sea finitamente generado, existe un polinomio $P_M \in \mathbb{Q}[t]$ que verifica

$$P_M(t) = \varphi_M(t)$$

para $t >> 0$; más aún, el grado de dicho polinomio es tal que

$$gr(P_M) = dim(V(M))$$

- ver [Har77, Theorem 7.5, pp. 51] -. Dicho polinomio P_M se denomina el polinomio de Hilbert de M.

Sea C una categoría y sea $\overline{C}$ el conjunto definido por la categoría C módulo isomorfismos.

Definición 3.2. Sea $(G,+)$ un grupo abeliano. Vamos a decir que una función $\overline{C} \xrightarrow{\chi} G$ es una función aditiva si para cualquier sucesión exacta corta en C del tipo

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

vale la relación $\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'')$.

Hacemos un pequeño abuso de notación y notamos indistintamente $M \in C$ o $M \in \overline{C}$.

3.2.1. Claramente la función dimensión es una función aditiva de la categoría de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales finitamente generados sobre el grupo $(\mathbb{Z},+)$. Como consecuencia de esto, el polinomio de Hilbert es una función aditiva de S-mód$_{gr}$ sobre $\mathbb{Q}[t]$. Más aún:

Propiedad 3.2.2. El polinomio de Hilbert P define una función aditiva

$$\begin{aligned} \overline{S\text{-mod}_{gr}} &\xrightarrow{P} \mathbb{Q}[t] \\ M &\longmapsto P_M \end{aligned}$$

donde la noción de isomorfismos en S-mod$_{gr}$ está dada por $\simeq_e$.

Demostración. Sean M y M' tales que $M \simeq_e M'$. Entonces existe $b_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M(b) \simeq M'(b)$ para todo $b \geq b_0$.

Por lo tanto, la $dim_{\mathbb{C}}(M(b)) = dim_{\mathbb{C}}(M'(b))$ para $b \geq b_0$. De esta forma $\varphi_M = \varphi_{M'}$ para $b >> 0$ lo que implica que $P_M = P_{M'}$.

□

Definición 3.3. Sea $M \in S$-mod$_{gr}$. Vamos a decir que un conjunto de S-mod$_{gr}$ $\{M^i\}_{i=0}^r$ es una cadena de descomposición de M si

$$0 = M^0 \subset \ldots \subset M^r = M$$

Vamos a llamar graduado asociado a (la cadena de descomposición de) M a

$$Gr(M) = \bigoplus_{i=1}^{r} M^i/M^{i-1} \ .$$

Propiedad 3.2.3. Sea $\chi : S\text{-mod}_{gr} \to G$ una función aditiva. Manteniendo la notación de recién tenemos

$$\chi(M) = \chi(Gr(M))$$

para cualquier cadena de descomposición de M.

Demostración. En primer lugar, tomando la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

vemos que $\chi(M \oplus N) = \chi(M) + \chi(N)$, por lo que cualquier función aditiva separa sumas directas.

Ahora fijemos $\{M^i\}_{i=0}^r$ una cadena de descomposición de M. Si miramos la cadena en un grado cualquiera

$$0 \longrightarrow M^{j-1} \longrightarrow M^j \longrightarrow M^j/M^{j-1} \longrightarrow 0$$

tenemos que $\chi(M^j/M^{j-1}) = \chi(M^j) - \chi(M^{j-1})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \chi(Gr(M)) = \bigoplus_{i=1}^r \chi(M^i/M^{i-1}) = \bigoplus_{i=1}^r \chi(M^i) - \chi(M^{i-1}) = \\ = \chi(M^r) - \chi(M^0) = M \ . \end{aligned}$$

□

Vamos a notar M_t al shift por t de M, es decir, $M_t(b) := M(t+b)$.

Un resultado clásico de la teoría de módulos sobre un anillo noetheriano es la existencia de la siguiente cadena de descomposición de M - ver [Har77, Proposition 7.4, pp. 50] -:

Propiedad 3.2.4. Sea M un módulo graduado finitamente generado sobre S. Existe una cadena de descomposición $\{M^i\}_{i=0}^r$ que verifica

$$M^i/M^{i-1} \simeq (S/p_i)_{\ell_i}$$

donde p_i es un ideal primo homogéneo y $\ell_i \in \mathbb{Z}$. La filtración no es única, pero valen

i) si q es un ideal primo homogéneo de S entonces $ann(M) \subset q$ si y sólo si $p_i \subset q$ para algún i. En particular, los primos minimales del conjunto $\{p_1, \ldots, p_r\}$ son los primos minimales de $ann(M)$

ii) para cada primo minimal de $ann(M)$, la cantidad de veces que ocurre en la descomposición es igual a la longitud $l(M_p)$ sobre S_p, por lo tanto es independiente de la descomposición.

En base a la proposición anterior introducimos la siguiente definición:

Definición 3.4. Sea p un primo minimal de $ann(M)$. Definimos la multiplicidad de M en p, $\mu_p(M)$, como la longitud $l_{S_p}(M)$ sobre S_p.

Sea M de forma tal que $dim(V(M)) = d$. Podemos descomponer el conjunto de primos minimales de $V(M)$ como la unión $\{q_1, \ldots, q_{r_1}\} \cup \{t_1, \ldots, t_{r_2}\}$ donde $dim(V(S/q_k)) = d$ y $dim(V(S/t_k)) < d$.

En base a la Propiedad 3.2.4 tenemos que M va a admitir un graduado asociado de la forma

$$Gr(M) = \left(\bigoplus_{i=1}^{r_1} (S/q_i)(\ell_i^1) \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r_2} (S/t_i)(\ell_i^2) \right) = Gr^1(M) \bigoplus Gr^2(M) \ .$$

El polinomio de Hilbert P_M lo podemos calcular en $Gr(M)$ y vemos que

$$P_M = P_{Gr^1(M)} + P_{Gr^2(M)}$$

donde $gr(P_{Gr^1(M)}) = d$ y $gr(P_{Gr^2(M)}) < d$.

Notemos con $cp(P)$ al coeficiente principal de un polinomio. Entonces

$$cp(P_M) = cp(P_{Gr^1(M)}) = \sum_{i=1}^{r_1} \mu_{q_i}(M_{q_i}) \ cp\left(P_{(S/q_i)(\ell_i^1)}\right) \ . \tag{1}$$

El siguiente caso particular va a ser de nuestro interés más adelante:

Propiedad 3.2.5. Sea $M \in S\text{-mod}_{gr}$ tal que $dim(V(M)) = 0$. Entonces $cp(P_M) = \#\{$ puntos de $V(M)$ contados con multiplicidad$\}$.

Demostración. En este caso las componentes irreducibles de $V(M)$ son puntos proyectivos por lo tanto los cocientes (S/r_j) son de la forma $\Gamma^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}[x]$.

De esta forma, podemos agregar a la ecuación (1) que $cp(P_{(S/r_j)(\ell_j^1)}) = 1$ y el resultado sigue. □

3.3 Homología y clases de unfoldings

Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Como vimos en 2.1.11 y en la Definición 2.9, la relación de equivalencia de clases de isomorfismo de unfoldings algebraicos está dada por el grupo $C_{U_a}(\omega)$. Un elemento de $C_{U_a}(\omega)(b)$ es de la forma $(i_X\omega, L_X(\omega))$ para $X \in T^1(b)$, donde $T^1(b)$ es el espacio de campos de vectores homogéneos de grado b en $\mathbb{C}^{n+1}$.

Si miramos la imagen de la aplicación $\mu : U_a(\omega) \to \mathbb{U}(\omega)$

$$\begin{array}{ccc} U_a(\omega)(b) & \xrightarrow{\mu_b} & \mathbb{U}(\omega)(b) \\ (h,\eta) & \longmapsto & \left(h, \frac{b\eta+(a-b)dh}{a}\right) \end{array}$$

restringida a $C_{U_a}(\omega)(b)$ resulta que va a estar dada por elementos de la forma

$$\left(i_X\omega,\ \frac{bL_X\omega + (a-b)di_X\omega}{a} \right)$$

para cualquier $b \in \mathbb{N}$. Usando la Propiedad 2.3.3 de la derivada de Lie podemos reescribir la segunda coordenada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{bL_X\omega + (a-b)di_X\omega}{a} &= \frac{b\ (\ di_X\omega + i_Xd\omega\ ) + (a-b)\ di_X\omega}{a} = \\ &= \frac{b\ i_Xd\omega + a\ di_X\omega}{a}\ . \end{aligned}$$

Definición 3.5. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Definimos el grupo graduado $C_{\mathbb{U}}(\omega) \subset \mathbb{U}(\omega)$ como

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{U}}(\omega)(b) &= \mu_b(C_{U_a}(\omega)(b)) = \\ &= \left\{ \left(i_X\omega, \frac{b\ i_Xd\omega + a\ di_X\omega}{a} \right)\ /\ \text{para } X \in T^1(b-a) \right\} \Big/ S(b-a).(0,\omega)\ . \end{aligned}$$

Propiedad 3.3.1. El grupo $C_{\mathbb{U}}(\omega)$ es un S-submódulo de $\mathbb{U}(\omega)$.

Demostración. Sea el par $\left(i_X\omega, \frac{b\ i_Xd\omega + a\ di_X\omega}{a}\right) \in C_{\mathbb{U}}(\omega)(b)$ y sea $f \in S(c)$. Queremos ver que existe un campo $Y \in T^1(b+c-a)$ de forma tal que

$$f \cdot \left(i_X\omega, \frac{b\ i_Xd\omega + a\ di_X\omega}{a} \right) = \left(i_Y\omega, \frac{(b+c)\ i_Yd\omega + a\ di_Y\omega}{a} \right)\ .$$

La acción de f en la primer coordenada va a resultar en $\frac{b}{b+c}\ fi_X\omega = i_{\left(\frac{b}{b+c}fX\right)}\omega$. Tomemos entonces el campo $Y = \frac{b}{b+c}fX$ y comprobemos que vale la igualdad

$$\begin{aligned} f\ \left(\frac{b\ i_Xd\omega + a\ di_X\omega}{a} \right) + \frac{1}{b+c}\left(b\ i_X\omega\ df - c\ fdi_X\omega\right) &= \\ = \frac{(b+c)\ i_Yd\omega + a\ di_Y\omega}{a}\ . \end{aligned}$$

Operamos en el lado izquierdo de la ecuación anterior

$$\frac{b(b+c)\ f\ i_X d\omega\ +\ a(b+c)\ f\ di_X\omega\ +\ ab\ i_X\omega\ df\ -\ ac\ f\ di_X\omega}{a(b+c)} =$$

$$= \frac{b(b+c)\ f\ i_X d\omega\ +\ ab\ f\ di_X\omega\ +\ ab\ i_X\omega\ df}{a(b+c)} =$$

$$= \frac{b(b+c)\ f\ i_X d\omega\ +\ ab\ d\,(f i_X\omega)}{a(b+c)} =$$

$$= \frac{(b+c)^2\ i_{\left(\frac{b}{b+c}fX\right)}d\omega\ +\ a(b+c)\ d\left(i_{\left(\frac{b}{b+c}fX\right)}\omega\right)}{a(b+c)} =$$

$$= \frac{(b+c)\ i_Y d\omega\ +\ a\ di_Y\omega}{a}$$

y llegamos a la expresión deseada. □

Vamos a notar $\overline{\mathbb{U}}(\omega)$ al cociente $\mathbb{U}(\omega)/C_{\mathbb{U}}(\omega)$. Tenemos entonces que:

Corolario 3.3.2. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. La aplicación $\mu : U_a(\omega) \longrightarrow \mathbb{U}(\omega)$ pasa al cociente por las clases de isomorfismo de unfoldings algebraicos $\overline{U}_a(\omega)$ y $\overline{\mathbb{U}}(\omega)$.

Si aplicamos el diferencial exterior a la condición de integrabilidad de ω llegamos a la expresión

$$d\omega \wedge d\omega = 0\ . \tag{2}$$

Como $i_R(\omega) = 0$, tenemos que $i_R d\omega = a\ \omega$. Aplicando nuevamente la contracción con el campo radial a la ecuación (2) llegamos a $i_R(d\omega \wedge d\omega) = 2a\ \omega \wedge d\omega = 0$. De esta manera vemos que ambas ecuaciones son equivalentes y podemos definir el siguiente complejo.

Definición 3.6. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Definimos el complejo de S-módulos graduados

$$K^\bullet(d\omega): \qquad T^1 \xrightarrow{d\omega\wedge} \Omega^1_{S|\mathbb{C}} \xrightarrow{d\omega\wedge} \Omega^3_{S|\mathbb{C}} \xrightarrow{d\omega\wedge} \dots \tag{3}$$

donde el primer diferencial está dado por $d\omega \wedge X := i_X d\omega$ para un campo de vectores X. De ser necesario, vamos a indicar $d^s\omega\wedge$ al morfismo aplicado en grado s del complejo.

Para $b \in \mathbb{Z}$ vamos a indicar con $K^\bullet(d\omega, b)$ a la componente homogénea del complejo que en grado 1 tiene $\Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$, es decir,

$$K^\bullet(d\omega, b): \qquad T^1(b-a) \xrightarrow{d\omega\wedge} \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b) \xrightarrow{d\omega\wedge} \Omega^3_{S|\mathbb{C}}(a+b) \xrightarrow{d\omega\wedge} \dots\ . \tag{4}$$

3.3.3. Dada $\eta \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$, siempre en base a la Propiedad 2.3.3, podemos descomponer η como

$$\eta = \eta_r + \eta_d$$

donde $i_R(\eta_r) = 0$ y $d\eta_d = 0$. Dicha descomposición es única y explícitamente está dada por

$$\eta_r = \frac{1}{b} i_R d\eta \qquad \eta_d = \frac{1}{b} d i_R(\eta) \ .$$

Nos va a resultar útil, también, escribir η_d como

$$\eta_d = -dh$$

para $h = -\frac{1}{b} i_R(\eta)$.

3.3.4. De esta forma, para una $\eta \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$ vamos a escribir frecuentemente

$$\eta = \eta_r + \eta_d = \eta_r - dh \ .$$

Teorema 3.3.5. Para $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Omega^1_{S|\mathbb{C}} & \xrightarrow{\phi} & S \times \Omega^1_{S|\mathbb{C}} \\ \eta = \eta_r - dh & \longmapsto & (h, \eta_r) \end{array} \tag{5}$$

induce isomorfismos entre

$$Ker(d^1\omega\wedge\ )\big/S.\omega \ \simeq \mathbb{U}(\omega) \qquad \text{y} \qquad Im(d^0\omega\wedge\ )\big/S.\omega \ \simeq C_{\mathbb{U}}(\omega) \ .$$

Por lo tanto $H^1(K^\bullet(d\omega)) \simeq \overline{\mathbb{U}}(\omega)$.

Demostración. Sea $\eta = \eta_r - dh \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$ de forma tal que $d\omega \wedge \eta = 0$. Contrayendo por el campo radial tenemos

$$\begin{aligned} i_R(d\omega \wedge (\eta_r - dh)) = 0 &\iff \\ a\ \omega \wedge (\eta_r - dh) - b\ h\ d\omega = 0 &\iff \\ &\quad b\ h\ d\omega = a\ \omega \wedge (\eta_r - dh) \ . \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $(h, \eta) \in \mathbb{U}(\omega)$ entonces

$$b\ h\ d\omega = a\ \omega \wedge (\eta - dh) \ .$$

Por la Propiedad 2.3.8 sabemos que $i_R(\eta) = 0$, por lo tanto, siempre siguiendo la notación 3.3.4, podemos escribir $\eta - dh = \eta_r - dh$.

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $\eta_r - dh$ el lado derecho se cancela y nos queda

$$\begin{gathered} b\ h\ d\omega \wedge (\eta_r - dh) = 0 \iff \\ d\omega \wedge (\eta_r - dh) = 0\ . \end{gathered}$$

Por lo tanto, la aplicación ϕ induce en $Ker(d^1\omega\wedge\ )/S.\omega \longrightarrow \mathbb{U}(\omega)$ define un isomorfismo entre ambos espacios.

Sea ahora $\left(i_X\omega, \frac{b\ i_X d\omega + a\ di_X\omega}{a}\right) \in C_{\mathbb{U}}(\omega)(b)$. En base a la igualdad

$$\frac{b\ i_X d\omega + a\ di_X\omega}{a} \ - \ di_X\omega \ = \ \frac{b}{a}\ i_X d\omega \ = \ d^0\omega \wedge \left(\frac{b}{a}X\right) \tag{6}$$

concluimos que ϕ también induce un isomorfismo en $Im(d^0\omega\wedge\ )/S.\omega \longrightarrow C_{\mathbb{U}}(\omega)$.
□

Utilizando este último resultado, y junto con el Corolario 3.3.2, resulta:

Corolario 3.3.6. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. La homología en grado 1 del complejo $K^\bullet(d\omega)$ es isomorfa a la clase de unfoldings algebraicos de ω

$$H^1(K^\bullet(d\omega)) \simeq \overline{U}_a(\omega)\ .$$

Definición 3.7. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Definimos el ideal $J(\omega) \subset S$ como

$$J(\omega) = \{i_X(\omega) \in S\ /\ \text{ para algún } X \in T^1\}\ .$$

Sea $X \in T^1$. Como ω es integrable, podemos contraer por el campo X la ecuación $\omega \wedge d\omega = 0$ y obtenemos

$$i_X\omega\ d\omega = \omega \wedge i_X d\omega\ .$$

Así vemos que $i_X\omega \in I(\omega)$ y entonces vale la inclusión

$$J(\omega) \subset I(\omega)\ .$$

Propiedad 3.3.7. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. La aplicación $\phi_1 = \pi_1 \circ \phi$

$$\begin{tikzcd} & S \times \Omega^1_{S|\mathbb{C}} \arrow[d, "\pi_1"] \\ \Omega^1_{S|\mathbb{C}} \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "\phi_1"] & S \\ \eta = \eta_r - dh \arrow[r, mapsto] & h \end{tikzcd} \tag{7}$$

induce isomorfismos entre

$$Ker(d^1\omega\wedge\ )/\omega \ \simeq\ I(\omega) \qquad \text{y} \qquad Im(d^0\omega\wedge\ )/\omega \ \simeq\ J(\omega)\ .$$

Por lo tanto $H^1(K^\bullet(d\omega)) \simeq I(\omega)/J(\omega)$.

Demostración. Usando la Propiedad 2.3.11 y el Teorema 3.3.5 podemos decir que $Ker(d^1\omega\wedge\ )/\omega \simeq I(\omega)$ y que $(\omega) = Ker(\phi_1)$.

La contracción $i_{\frac{1}{a}R} d\omega = \omega$ por lo que $\omega \in J(\omega)$. Por la ecuación (6) queda claro que $\phi_1(Im(d^0\omega\wedge\ )) = J(\omega)$, por lo tanto $Im(d^0\omega\wedge\ )/\omega \simeq J(\omega)$ como queríamos. □

Finalmente concluimos esta serie de isomorfismos con:

Corolario 3.3.8. En base a las hipótesis de la propiedad anterior resulta

$$\overline{\mathbb{U}}(\omega) \simeq I(\omega)/J(\omega)\ .$$

3.4 Polinomio de Hilbert de $H^1(K^\bullet(d\omega))$

Sea $\omega_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}(n, \overline{d})$ una forma logarítmica de tipo $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_s)$

$$\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\ F_i\ df_i\ .$$

Sea D_i la hipersuperficie definida por $V(f_i)$ para $i = 1, \ldots, s$, y sea D_{ij} la intersección $D_i \cap D_j$.

Si llamamos L_{ij} a los ideales definidos por (f_i, f_j), resulta $D_{ij} = V(L_{ij})$. Definimos también el ideal $L = \bigcap_{i<j} L_{ij}$ y a su variedad $Z = \bigcup D_{ij}$.

3.4.1. Vamos a pedir que la forma logarítmica $\omega_{\mathcal{L}}$ verifique la siguiente condición de genericidad:

$$\begin{cases} (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in (\mathbb{C}^*)^s \\ \text{que las variedades } D_i \text{ sean suaves y se intersequen transversalmente.} \end{cases} \tag{8}$$

Propiedad 3.4.2. Bajo las condiciones (8) recién mencionadas vale la igualdad $I(\omega) = L$.

Demostración. Como habíamos visto anteriormente en la Propiedad 2.4.15, sabemos que el ideal $I(\omega)$ está generado por

$$I(\omega) = (F_1, \ldots, F_s) \ .$$

También está claro que $F_k \in L_{ij}$ para toda elección de ij, de donde resulta la inclusión $I(\omega) \subset L$.

Para ver que $L \subset I(\omega)$ tomemos $H \in L$. Directamente de la definición podemos escribir

$$H = h_{ij}^i \ f_i \ + \ h_{ij}^j \ f_j$$
$$H = h_{ik}^i \ f_i \ + \ h_{ik}^k \ f_k \ .$$

para cualquier terna i, j, k. Si cancelamos el término con f_i, llegamos a la igualdad

$$h_{ik}^i \ h_{ij}^j \ f_j \ = \ h_{ij}^i \ h_{ik}^k \ f_k \ .$$

Supongamos que $f_j \nmid H$ para todo j. Por las condiciones (3.4.1) los polinomios f_i no tienen factores comunes, entonces $f_j \nmid h_{ij}^i$. De esta forma tenemos que necesariamente $f_j \mid h_{ik}^k$ para todo $k \neq i$. Resulta entonces

$$H = q_{ij}^i \ F_{ij} \ f_i \ + \ q_{ij}^j \ F_{ij} \ f_j \ = \ q_{ij}^i \ F_j \ + \ q_{ij}^j \ F_i \ \in I(\omega) \ .$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos ahora que $f_1, \ldots, f_t | H$. Por el mismo razonamiento anterior, vamos a tener que

$$\frac{H}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_t} = \ q_{ij}^i \ \frac{F_j}{f_1 \cdot \ldots f_t} \ + \ q_{ij}^j \ \frac{F_i}{f_1 \cdot \ldots f_t}$$

para todo $i, j \neq 1, \ldots, t$. Multiplicando por $f_1 \cdot \ldots \cdot f_t$ obtenemos $H \in I(\omega)$ como buscábamos.

□

En [CSV06, Theorem, pp. 3] obtienen la siguiente descomposición del lugar singular de una forma logarítmica $\omega_{\mathcal{L}}$:

Teorema 3.4.3. Sea $\mathcal{F} = (\omega_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}(n, \overline{d})$. Continuando con la notación anterior, si las variedades D_i verifican la condición 3.4.1 entonces el lugar singular $Sing(\omega_{\mathcal{L}})$ se descompone como la unión disjunta

$$Sing(\omega_{\mathcal{L}}) = Z \cup R$$

donde

$$Z = \bigcup_{i<j} D_{ij}$$

y R es un conjunto finito de puntos en $\mathbb{P}^n$ cuya cantidad está dada por

$$N(n, \overline{d}) = \text{coeficiente de } h^n \text{ en } \frac{(1-h)^{n+1}}{\prod_{i=1}^s (1 - d_i h)}$$

contados con multiplicidad. Más aún, si algún $d_i > 1$ entonces $N(n, \overline{d}) > 0$.

Observación 3.1. La demostración de este resultado está separada en dos partes: por un lado se calcula la cantidad de puntos aislados, dicho cálculo se prueba que vale para $s \geq 2$. Por otro lado, la demostración de la descomposición $Sing(\omega_{\mathcal{L}}) = Z \cup R$ se realiza para formas logarítmicas para las cuales $s > 2$; si bien no está explicitado en el artículo dicha demostración también es válida para el caso $s = 2$.

Atentos a esto último, vamos a fijar $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ una foliación racional o logarítmica.

Llamemos $\mathcal{O}_{Sing(\omega)}$, $\mathcal{O}_Z$ y $\mathcal{O}_R$ a los haces estructurales de las correspondientes variedades en $\mathbb{P}^n$. Como la unión entre Z y R es disjunta, $\mathcal{O}_R$ se identifica con el haz estructural del abierto $Sing(\omega)\backslash Z$ y podemos construir la sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{O}_{Sing(\omega)} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \ .$$

Aplicando el funtor de secciones globales a dicha sucesión obtenemos la sucesión exacta larga de cohomología

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_R) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{Sing(\omega)}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_R) \longrightarrow \dots \ .$$

Siendo $dim(R) = 0$ por [Gro57] sabemos que la homología en grados superiores se anula. Por lo tanto vamos a seguir teniendo una sucesión exacta corta en las secciones globales.

Dado que el producto tensorial por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$ es exacto, podemos aplicar el mismo razonamiento al funtor Γ_* y obtenemos

$$0 \longrightarrow \Gamma_*\mathcal{O}_R \longrightarrow \Gamma_*\mathcal{O}_{Sing(\omega)} \longrightarrow \Gamma_*\mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \ . \tag{9}$$

Teorema 3.4.4. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ una foliación racional o logarítmica, tal que verifica las condiciones de genericidad de 3.4.1. Entonces el polinomio de Hilbert de la homología en grado 1 del complejo $K^\bullet(d\omega)$, $P_{H^1(K^\bullet(d\omega))}$, es constante y verifica

$$P_{H^1(K^\bullet(d\omega))} \equiv N(n, \overline{d})$$

donde $N(n, \overline{d})$ es la cantidad de puntos aislados de $Sing(\omega)$.

Demostración. Podemos escribir a ω de las 2 siguientes maneras

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i \ dx_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \ F_i \ df_i \tag{10}$$

con $s \geq 2$.

El espacio de campos de vectores T^1 está generado por los campos de grado -1 de la forma $\frac{\partial}{\partial x_i}$, para $i = 0, \dots, n$.

En base a la primer expresión de ω, resulta que

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\omega) = A_i \ .$$

Por lo tanto el ideal $J(\omega)$ está generado por las funciones $A_0, \ldots, A_n$. Estas funciones, son justamente las funciones que definen el lugar singular de la foliación $\mathcal{F} = (\omega)$. Por lo tanto podemos ver $Sing(\omega)$ como $Proj(S/J(\omega))$. Así tenemos que

$$\Gamma_* \mathcal{O}_{Sing(\omega)} \simeq_e S/J(\omega) \ .$$

Similarmente, por la Propiedad 3.4.2 tenemos $I(\omega) = L = (F_1, \ldots, F_n)$. Por lo tanto podemos, ver a $\mathcal{O}_Z$ como $Proj(S/I(\omega))$ y entonces

$$\Gamma_* \mathcal{O}_Z \simeq_e S/I(\omega) \ .$$

Comparando la sucesión exacta (9) con la siguiente

$$0 \longrightarrow I(\omega)/J(\omega) \longrightarrow S/J(\omega) \longrightarrow S/I(\omega) \longrightarrow 0$$

y usando la aditividad del polinomio de Hilbert tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{O}_R} &= P_{Sing(\omega)} - P_{\mathcal{O}_Z} = P_{S/J(\omega)} - P_{S/I(\omega)} = \\ &= P_{I(\omega)/J(\omega)} \ . \end{aligned}$$

En base a la Propiedad 3.2.5 y el Teorema 3.4.3 podemos decir que el polinomio $P_{\mathcal{O}_R}$ tiene grado 0 y es igual a $N(n, \overline{d})$.

Finalmente, siguiendo la Propiedad 3.3.7 concluimos que

$$P_{\mathcal{O}_R} = N(n, \overline{d}) = P_{H^1(K^\bullet(\omega))} \ .$$

□

Corolario 3.4.5. Siguiendo las hipótesis del Teorema anterior podemos decir también que

$$I(\omega)/J(\omega) \simeq \overline{\mathbb{U}}(\omega) \simeq H^1(K^\bullet(d\omega)) \ .$$

Demostración. Basta con aplicar el Corolario 3.3.8 y la Propiedad 3.3.7 al Teorema 3.4.4. □

Por lo tanto, la cantidad de puntos aislados de $Sing(\omega)$ también se puede interpretar en términos del polinomio de Hilbert de las clases de isomorfismo de los unfoldings proyectivos graduados $\overline{\mathbb{U}}(\omega)$

$$P_{\overline{\mathbb{U}}(\omega)} = N(n, \overline{d}) \ .$$

3.5 Cálculos explícitos

Otra manera de expresar el Teorema 3.4.4 la podemos ver en el siguiente corolario:

Corolario 3.5.1. Bajo las mismas hipótesis que el Teorema 3.4.4, existe $b_\omega \in \mathbb{N}$ de forma tal que

$$dim_{\mathbb{C}}\big(\ H^1(K^\bullet(d\omega))(b)\ \big) = N(n, \overline{d})$$

para $b \geq b_\omega$.

Como $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$ siempre vale $H^1(K^\bullet(d\omega))(a) \simeq \overline{\mathbb{U}}(\omega)(a) = \overline{U}(\omega)$.
Por lo tanto, resulta interesante saber si la constante b_ω del Corolario 3.5.1 es mayor a $a = gr(\omega)$ o no. Es decir, si la cantidad de puntos aislados de la foliación coincide con la cantidad de clases de isomorfismo de unfoldings proyectivos

$$dim_{\mathbb{C}}\left(H^1(K^\bullet(d\omega)(a)\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\overline{U}(\omega)\right) \stackrel{?}{=} N(n, \overline{d})\ .$$

La respuesta a esta pregunta es que el b_ω puede ser estrictamente superior a a. La manera de verlo es en base al cálculo explícito de la homología en grado 1 del complejo $K^\bullet(d\omega)$.

Para eso, elegimos formas logarítmicas y racionales específicas, de distintos multigrados $\overline{d}$ que verifiquen las condiciones de genericidad 3.4.1, y calculamos las dimensiones de la homología en distintos grados $H^1(K^\bullet(d\omega))(k)$, para $k = 1, \ldots, 10$.

Los cálculos fueron realizados utilizando la librería de álgebra diferencial diffAlg sobre Singular - [DMM12] y [DGPS12] -.

Ponemos los resultados en la siguiente tabla de valores (Cuadro 3.1): encerrados por un cuadrado indicamos la dimensión de $\overline{U}(\omega) = H^1(K^\bullet(d\omega))(a)$ y en la última fila comparamos con $N(n, \overline{d})$, la cantidad de puntos aislados del lugar singular de ω.

(Sigue)

Cuadro 3.1: $dim_{\mathbb{C}}\left(\overline{U}(\omega)\right) \neq N(n, \overline{d})$

$\omega_{\overline{d}}$ racional o logarítmica de multigrado $\overline{d}$ en $\mathbb{P}^3$

$dim_{\mathbb{C}}\Big(H^1\big(K^\bullet(d\omega)\big)(k)\Big)$	$\omega_{(1,1,1,1)}$	$\omega_{(1,1,2)}$	$\omega_{(2,2)}$	$\omega_{(3,1)}$	$\omega_{(1,2,2)}$	$\omega_{(4,1)}$	$\omega_{(1,2,3)}$	$\omega_{(2,2,3)}$
1	0	1	2	4	0	4	0	0
2	0	2	4	7	2	10	1	0
3	0	2	4	8	5	17	5	1
4	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	7	23	11	6
5	0	2	4	8	$\boxed{7}$	$\boxed{26}$	17	14
6	0	2	4	8	7	27	$\boxed{21}$	23
7	0	2	4	8	7	27	22	$\boxed{31}$
8	0	2	4	8	7	27	22	36
9	0	2	4	8	7	27	22	37
10	0	2	4	8	7	27	22	37
$N(3, \overline{d})$	0	2	4	8	7	27	22	37

$$\boxed{} = dim_{\mathbb{C}}\Big(H^1\big(K^\bullet(d\omega_{\overline{d}})\big)\big(gr(\omega_{\overline{d}})\big)\Big) = dim_{\mathbb{C}}\big(\overline{U}(\omega_{\overline{d}})\big)$$

$$N(3, \overline{d}) = \#\{\text{puntos aislados de } Sing(\omega_{\overline{d}})\}$$

Las 1-formas $\omega_{\overline{d}}$ en (Cuadro 3.1) siguen la escritura

$$\omega = \left(\prod_{i=1}^{s} f_i\right) \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

y están definidas como:

$\omega_{(1,1,1,1)} \in \mathcal{L}(3,(1,1,1,1))$

$$f_i = x_i$$
$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -1 \quad \lambda_4 = -i$$

$\omega_{(1,1,2)} \in \mathcal{L}(3,(1,1,2))$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 \\ f_2 &= x_2 \\ f_3 &= x_1^2 - x_2^2 + ix_3^2 - ix_4^2 \\ \lambda_1 &= 1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -\frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

$\omega_{(2,2)} \in \mathcal{R}(3,(2,2))$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 - x_2^2 + ix_3^2 - ix_4^2 \\ f_2 &= (x_1 - x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 + i(x_3 - x_4)^2 - i(x_1 + x_4)^2 \end{aligned}$$

$\omega_{(1,3)} \in \mathcal{R}(3,(1,3))$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 - x_3 \\ f_2 &= x_1^2 x_2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_4 + x_3 x_4^2 \end{aligned}$$

$\omega_{(1,2,2)} \in \mathcal{L}(3,(1,2,2))$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 \\ f_2 &= (1+i)x_1^2 - x_2^2 + 2ix_3^2 - (2-i)x_4^2 \\ f_3 &= x_1^2 - x_2^2 + ix_3^2 - ix_4^2 \\ \lambda_1 &= 1 \quad \lambda_2 = \frac{i}{2} \quad \lambda_3 = -\frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

$\omega_{(1,4)} \in \mathcal{R}(3,(1,4))$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 \\ f_2 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 \end{aligned}$$

$\omega_{(1,2,3)} \in \mathcal{L}(3,(1,2,3))$

$$
\begin{aligned}
&f_1 = x_1\\
&f_2 = x_1^2 - x_2^2 + ix_3^2 - ix_4^2\\
&f_3 = x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_4 + x_3x_4^2\\
&\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -2\frac{1+i}{3}
\end{aligned}
$$

$\omega_{(2,2,3)} \in \mathcal{L}(3,(2,2,3))$

$$
\begin{aligned}
&f_1 = x_1^2 - x_2^2 + ix_3^2 - ix_4^2\\
&f_2 = (x_1 - x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 + i(x_3 - x_4)^2 - i(x_1 + x_4)^2\\
&f_3 = x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_4 + x_3x_4^2\\
&\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -2\frac{1+i}{3}
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Unfoldings y regularidad

Introducción

Empezamos este capítulo recordando la noción de regularidad de una forma homogénea ω*.*

En la siguiente sección, asociado a una foliación $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ *y motivados por la definición de regularidad, definimos el complejo* $C^\bullet(\omega)$*.*

Dicho complejo es un complejo de operadores diferenciales de orden 1. Nuestra primera observación es que la dimensión de la homología de $C^\bullet(\omega)(b)$ *es igual a la del complejo* $K^\bullet(d\omega)(b)$*, exceptuando el caso en que* $b = a$*.*

De esta forma, a través del complejo $K^\bullet(d\omega)$*, podemos relacionar la noción de regularidad con la de unfoldings de* ω*. Concluimos que una forma racional o logarítmica es regular si y sólo si todo unfolding proyectivo es trivial.*

En la última sección, definimos deformaciones de la estructura de módulo de los módulos graduados T^1 *y* $\Omega^r_{S|\mathbb{C}}$*. La idea de estas deformaciones es la de linealizar operadores diferenciales. La principal aplicación de este método es el de convertir el complejo* $C^\bullet(\omega)$ *en un complejo de* S*-módulos.*

4.1 Regularidad

Sea $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ y $\omega \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(a)$ una 1-forma integrable.

En [CLN82, pp. 17] se define la noción de regularidad para ω de la siguiente manera:

Definición 4.1. Vamos a decir que ω es una forma regular si, para $b < a$, la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} T^1(b-a) & \xrightarrow{L(\omega)} & \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b) & \xrightarrow{\omega\triangle} & \Omega^3_{S|\mathbb{C}}(a+b) \\ X & \longmapsto & L_X(\omega) & & \\ & & \eta & \longmapsto & \omega \triangle \eta \end{array} \qquad (1)$$

es exacta en grado 1, es decir que $Im(L(\omega)) = Ker(\omega \vartriangle\ )$.

Cabe observar que como $T^1(b) = 0$ para $b < -1$, la definición de regularidad de ω es equivalente a la implicación

$$\omega \vartriangle \eta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \eta = 0 & \text{si } gr(\eta) \leq a-2 \\ \eta = L_X(\omega) & \text{si } gr(\eta) = a-1 \ . \end{cases} \tag{2}$$

En el caso en que ω descienda al espacio proyectivo, por la Definición 2.3 y la Definición 2.9, la homología en grado 1 del complejo

$$T^1_{\mathbb{P}^n}(0) \xrightarrow{L(\omega)} \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a) \xrightarrow{\omega \vartriangle} \Omega^3_{\mathbb{P}^n}(2a)$$

es el espacio $\overline{D}(\omega)$ de clases de isomorfismo de deformaciones de la foliación definida por ω.

4.1.1. El complejo que define la noción de regularidad difiere de este último no sólo en el grado, sino en que las formas diferenciales son afines. Mirar un complejo análogo, pero para secciones que provienen del espacio proyectivo es trivial en base a las siguientes propiedades.

Propiedad 4.1.2. Sea $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$ y $\eta \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(b))$, $b \neq a$. Si $\omega \vartriangle \eta = 0$ entonces $\omega \wedge \eta = 0$.

Demostración. Tenemos que

$$d(\omega \vartriangle \eta) = d(\omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta) = 2d\omega \wedge d\eta = 0 \ .$$

Si cancelamos el 2 y aplicamos la contracción por el campo radial R, usando 2.3.5, obtenemos

$$a\ \omega \wedge d\eta + b\ d\omega \wedge \eta = 0 \ .$$

Como $a \neq b$, esta última ecuación junto con $\omega \vartriangle \eta = 0$ implica

$$\begin{cases} \omega \wedge d\eta = 0 \\ d\omega \wedge \eta = 0 \ . \end{cases}$$

Contrayendo una vez más por R, de la primera ecuación sale

$$i_R(\omega \wedge d\eta) = -b\ \omega \wedge \eta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega \wedge \eta = 0$$

como la propiedad requería. $\square$

Corolario 4.1.3. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Entonces $\omega \vartriangle \eta = 0$ implica $\eta = f\omega$ para $f \in S(b-a)$.

Demostración. Recordemos que las foliaciones en $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ son irreducibles. Entonces por la Propiedad 1.2.4 el H^1 del complejo de Koszul de ω se anula y el resultado sigue. □

Propiedad 4.1.4. Para $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ la homología en grado 1 del complejo

$$\Gamma_*(T^1_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{L(\omega)} \Gamma_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\omega\triangle} \Gamma_*(\Omega^3_{\mathbb{P}^n})$$

está concentrada en grado a y está dada por

$$H^1(\Gamma_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^n})) = H^1(\Gamma_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}))(a) = \overline{D}(\omega) \ .$$

Demostración. Escribamos $Ker(\omega \triangle\ ) = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} Ker(\omega \triangle\ )(b)$, donde $Ker(\omega \triangle\ )(b)$ es la componente homogénea de grado b. Por lo visto anteriormente podemos escribir

$$\begin{aligned} Ker(\omega \triangle\ )(a) &= D(\omega) + (\omega) \\ Ker(\omega \triangle\ )(b) &= S(b-a).(\omega) \ . \end{aligned}$$

Por otro lado, como $i_R(\omega) = 0$ tenemos

$$L_{fR}(\omega) = di_{fR}(\omega) + i_{fR}d\omega = fi_R d\omega = af\omega$$

de donde se deduce el enunciado. □

4.2 Complejo $C^\bullet(\omega)$

Vamos a notar $\Omega_{S|\mathbb{C}} = \bigoplus\limits_{r\geq 0} \Omega^r_{S|\mathbb{C}}$ al álgebra exterior de formas diferenciales.

Definición 4.2. Sea entonces $\omega \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(a)$. Definimos la aplicación $\omega \triangle : \Omega_{S|\mathbb{C}} \to \Omega_{S|\mathbb{C}}$ como

$$\omega \triangle \tau := \omega \wedge d\tau + \kappa(r)\ d\omega \wedge \tau$$

para $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}$ y $\kappa(r) := \frac{r+1}{2}$.

Propiedad 4.2.1. Sea $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(a))$, $n \geq 4$. Entonces ω es integrable si y sólo si

$$(\omega \triangle\ ) \circ (\omega \triangle\ ) \equiv 0 \ .$$

Demostración. Tomemos $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(c)$. Evaluando llegamos a

$$\omega \vartriangle (\omega \vartriangle \tau) = \big(2\kappa(r)+3\big)\ \omega \wedge d\omega \wedge d\tau + \ \big(\kappa(r)(\kappa(r)+2)\big)\ d\omega \wedge d\omega \wedge \tau \qquad (3)$$

de donde queda clara la primer implicación.

Para ver la otra implicación, igualamos la ecuación (3) a 0 y queremos ver que ω es integrable.

Si aplicamos a la ecuación (3) el diferencial exterior llegamos a $d\omega \wedge d\omega \wedge d\tau = 0$. Claramente $d\tau = d\tau_r$ siguiendo al escritura 3.3.3. Contrayendo ahora por el campo radial, siempre usando 2.3.5, vemos que

$$2a\ \omega \wedge d\omega \wedge d\tau_r + c\ d\omega \wedge d\omega \wedge \tau_r = 0\ .$$

Si elegimos la constante c de forma tal que los pares $(2\kappa(r)+3, \kappa(r)(\kappa(r)+2))$ y $(2a, c)$ sean linealmente independientes podemos despejar la ecuación

$$d\omega \wedge d\omega \wedge \tau_r = 0\ .$$

Contrayendo nuevamente por el campo radial, vemos que $\omega \wedge d\omega \wedge \tau_r = 0$ para cualquier r-forma τ_r que descienda al espacio proyectivo. Por lo tanto $\omega \wedge d\omega = 0$. $\square$

En el caso en que ω sea integrable, de 2.1.11, sabemos que vale $\omega \vartriangle L_X(\omega) = 0$, para cualquier campo de vectores X. Esto nos permite definir el siguiente complejo.

Definición 4.3. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Definimos el complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales

$$C^\bullet(\omega): \qquad T^1 \xrightarrow{\omega\vartriangle} \Omega^1_{S|\mathbb{C}} \xrightarrow{\omega\vartriangle} \Omega^3_{S|\mathbb{C}}(a+b) \xrightarrow{\omega\vartriangle} \dots\ .$$

donde, para un campo de vectores X, definimos $\omega \vartriangle X = L_X(\omega) = i_X d\omega + d i_X \omega$. De ser necesario, vamos a indicar $\omega \vartriangle^s$ al morfismo aplicado en grado s del complejo.

Para $b \in \mathbb{Z}$, vamos a indicar con $C^\bullet(\omega, b)$ al sumando directo del complejo que en grado 1 tiene $\Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$, es decir,

$$C^\bullet(\omega, b): \qquad T^1(b-a) \xrightarrow{\omega\vartriangle} \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b) \xrightarrow{\omega\vartriangle} \Omega^3_{S|\mathbb{C}}(a+b) \xrightarrow{\omega\vartriangle} \dots\ .$$

Sea η una forma homogénea en $\Omega^1_{S|\mathbb{C}}(b)$. Retomando la notación de 3.3.4, la descomponemos como

$$\eta = \eta_r + \eta_d \qquad (4)$$

donde $i_R(\eta_r) = 0$ y $d\eta_d = 0$.

El núcleo del operador $\omega \vartriangle$ para formas afines es no trivial y se descompone de manera natural en deformaciones, unfoldings y factores integrantes.

Propiedad 4.2.2. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. El núcleo de $\omega \vartriangle : \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(a) \to \Omega^3_{S|\mathbb{C}}(2a)$ está dado por

$$Ker(\omega \vartriangle)(a) = D(\omega) + K(\omega) \ .$$

Demostración. Sea $\eta \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}(a)$ tal que $\omega \vartriangle \eta = 0$. Siempre en base a 3.3.3, descomponemos a η como $\eta = \eta_r + \eta_d$ y vemos

$$\omega \vartriangle \eta = \omega \vartriangle \eta_r + d\omega \wedge \eta_d = 0 \ .$$

Aplicando el diferencial exterior resulta

$$d(\omega \vartriangle \eta) = 2d\omega \wedge d\eta_r = 0$$

y contrayendo con el campo radial

$$a \ \omega \wedge d\eta_r + a \ d\omega \wedge \eta_r = 0 \ .$$

De forma tal que si $\eta \in Ker(\omega \vartriangle)$ entonces $\eta_r \in Ker(\omega \vartriangle)$.

Faltaría ver cuáles son las formas exactas que están en el núcleo. Para eso escribimos $\eta_d = dh$ y contraemos la ecuación $\omega \vartriangle (dh) = d\omega \wedge dh = 0$ por el campo radial. Llegamos a

$$a \ \omega \wedge dh + a \ hd\omega = 0 \iff h \ d\omega = -\omega \wedge dh \iff h \in K(\omega)$$

como queríamos. ☐

Como vimos en 2.1.5

$$T_\omega \mathcal{F}(\mathbb{P}^n)(a) = D(\omega) \ .$$

Corolario 4.2.3. Podemos expandir la descomposición anterior a

$$\begin{aligned} Ker(\omega \vartriangle)(a) &= T^1_\omega \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n) + (\omega) + dK(\omega) \\ &= U(\omega) + D_0(\omega) + (\omega) + dK(\omega) \end{aligned}$$

donde $D_0(\omega)$ denota las deformaciones que no provienen de unfoldings y $dK(\omega)$ es el espacio de 1-formas dado por el diferencial exterior de factores integrantes de ω.

4.2.4. La componente $\Omega^r_{S|\mathbb{C}}(c)$ ocurre en los complejos $C^\bullet(\omega, b)$ y $K^\bullet(d\omega, b)$ en grado $s = \kappa(r) = \frac{r+1}{2}$ si y sólo si

$$c = a(s-1) + b = a\left(\frac{r-1}{2}\right) + b \ .$$

Vale la misma fórmula asignando el valor $r = -1$ a $T^1(c)$.

Propiedad 4.2.5. Sea $r, a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a > 0$, $r, b \geq 1$ y $b \neq a$. Sean s y c como en 4.2.4. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(c) & \xrightarrow{\varphi^s_b} & \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(c) \\ \tau = \tau_r + \tau_d & \longmapsto & \big(a\kappa(r) - c\big)\tau_r + a\kappa(r)\tau_d \end{array}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y verifica

$$\omega \vartriangle^s \tau = 0 \iff d\omega \wedge \varphi^s_b(\tau) = 0$$

para $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. En el caso $r = -1$, vale lo mismo definiendo

$$\begin{array}{ccc} T^1(c) & \xrightarrow{\varphi^0_b} & T^1(c) \\ X & \longmapsto & X \ . \end{array}$$

Demostración. Supongamos que $c = a\kappa(r)$. Por 4.2.4 $c = a\left(\frac{r-1}{2}\right) + b$, entonces

$$a\left(\frac{r+1}{2}\right) = a\left(\frac{r-1}{2}\right) + b \iff$$
$$a\left[\left(\frac{r+1}{2}\right) - \left(\frac{r-1}{2}\right)\right] = a = b$$

lo que es un absurdo puesto que por hipótesis $b \neq a$. De esta forma vemos que φ^s_b es un isomorfismo ya que los coeficientes $a\kappa(r) - c$ y $a\kappa(r)$ son no nulos.

Sea $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(c)$ tal que $\omega \vartriangle \tau = 0$, es decir

$$\omega \vartriangle \tau = \omega \wedge d\tau_r + \kappa(r)\ d\omega \wedge \tau_r + \kappa(r)\ d\omega \wedge \tau_d = 0 \ . \tag{5}$$

Aplicando el diferencial exterior y contrayendo obtenemos

$$a\ \omega \wedge d\tau_r + c\ d\omega \wedge \tau_r = 0 \ . \tag{6}$$

Multiplicando la ecuación (5) por a y restando la ecuación (6) llegamos a

$$\big(a\kappa(r) - c\big)\ d\omega \wedge \tau_r + a\kappa(r)\ d\omega \wedge \tau_d = 0 \ .$$

Podemos reescribir la última ecuación como

$$d\omega \wedge \Big(\big(a\kappa(r) - c\big)\tau_r + a\kappa(r)\tau_d\Big) = d\omega \wedge \varphi_b^s(\tau) = 0$$

de donde sale una implicación.

Sea ahora $\tau = \tau_r + \tau_d$ tal que $d\omega \wedge \tau = 0$.

Por un lado tenemos que si aplicamos el diferencial exterior y luego la contracción con el campo radial a dicha ecuación, obtenemos la igualdad

$$a\ \omega \wedge d\tau_r + c\ d\omega \wedge \tau_r = 0\ . \tag{7}$$

Por otro lado, si aplicamos la transformación inversa $(\varphi_b^s)^{-1}(\tau) = \frac{1}{a\kappa(r)-c}\tau_r + \frac{1}{a\kappa(r)}\tau_d$ y componemos con $\omega\ \triangle$ resulta la siguiente expresión

$$\omega \wedge \left(\frac{1}{a\kappa(r) - c} d\tau_r\right) + \frac{\kappa(r)}{a\kappa(r) - c} d\omega \wedge \tau_r + \frac{1}{a} d\omega \wedge \tau_d\ .$$

Como $d\omega \wedge d\tau_r = -d\omega \wedge \tau_d$, simplificando denominadores llegamos a

$$a\ \omega \wedge d\tau_r + a\kappa(r)\ d\omega \wedge \tau_r - \big(a\kappa(r) - c\big) d\omega \wedge \tau_r$$

que es igual a la ecuación (7). De esta forma tenemos que

$$\omega\ \triangle\ \Big((\varphi_b^s)^{-1}(\tau)\Big) = 0\ .$$

Consideremos el caso $r = -1$.
Tomemos un campo $X \in T^1(c)$, para $c = b - a \neq 0$, de forma tal que $L_X(\omega) = 0$. Contrayendo con el campo radial tenemos

$$\begin{aligned} i_R(L_X(\omega)) &= i_R d i_X \omega + i_R i_X d\omega = (a + c)\ i_X\omega - i_X i_R d\omega = \\ &= (a + c)\ i_X\omega - a\ i_X\omega = c\ i_X\omega\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto $d i_X \omega = 0$ y entonces

$$i_X d\omega = 0\ .$$

Por último, supongamos $i_X d\omega = 0$. Contrayendo de nuevo por el campo radial sale $-a i_X\omega = 0$, de donde $d i_X \omega = 0$. Sumando se obtiene el resultado. □

Como corolario de 4.2.5 podemos afirmar el siguiente resultado:

Teorema 4.2.6. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Entonces para todo $b \neq a$ vale

$$dim_{\mathbb{C}}\left(H^s(C^\bullet(\omega, b)\right) \;=\; dim_{\mathbb{C}}\left(H^s(K^\bullet(d\omega, b))\right) \;.$$

4.2.7. Vale recordar que el complejo $C^\bullet(\omega, b)$ es un complejo de operadores diferenciales. Es por eso que tener la dimensión de la homología igual a la de un complejo de módulos es llamativo, y es una justificación de porqué la familia de aplicaciones $\{\varphi_b^s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ no define un morfismo de complejos.

Definición 4.4. Vamos a decir que D es una derivación de grado k si

i) $D(\Omega^r_{S|\mathbb{C}}) \subset \Omega^{k+r}_{S|\mathbb{C}}$

ii) $D(\tau \wedge \pi) = D(\tau) \wedge \pi + (-1)^{kr}\ \tau \wedge D(\pi)$ para $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}$ y $\pi \in \Omega^s_{S|\mathbb{C}}$.

4.2.8. Otra manera de extender el operador $\omega\ \triangle$ a todo $\Omega_{S|\mathbb{C}}$ está dada por la fórmula

$$\omega \triangle \tau := \omega \wedge d\tau + r\ d\omega \wedge \tau$$

para $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}$.

4.2.9. Con esta definición sigue valiendo la Propiedad 4.2.1 y la aplicación $\omega\ \triangle$ es una derivación de grado 2 en $\Omega_{S|\mathbb{C}}$. Más aún, redefiniendo adecuadamente los operadores $\{\varphi_b^s\}$ también vale el Teorema 4.2.6. El motivo por el cual optamos por utilizar la función $\kappa(r)$ se debe a que con ese parámetro se verifican las condiciones (13) de la próxima sección.

4.2.10. Otra extensión posible se encuentra en [GKZ08, Definition 4.4, pp. 72], para $\alpha \in H^0\left(\Omega^r_{\mathbb{P}^n}(p)\right)$ y $\beta \in H^0\left(\Omega^s_{\mathbb{P}^n}(q)\right)$ definen

$$\alpha \star \beta = \begin{cases} \dfrac{p}{p+q}\alpha \wedge d\beta - (-1)^r \dfrac{q}{p+q} d\alpha \wedge \beta & \text{si } p, q \neq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario .} \end{cases}$$

Con esta multiplicación $\bigoplus_{r\geq 0} \Gamma_*\left(\Omega^r_{\mathbb{P}^n}\right)$ se vuelve un álgebra asociativa.

4.2.11. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. En base a la Propiedad 2.3.11 ω no tiene unfoldings no triviales si y sólo si

$$\left(I(\omega)/J(\omega)\right)(a) = 0$$

y, por el Teorema 4.2.6 y la Propiedad 3.3.7, ω es regular si y sólo si

$$(I(\omega)/J(\omega))\,(b) = 0$$

para $b < a$.

Supongamos que $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ es una foliación racional o logarítmica. De nuevo, escribimos a ω como

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i \; dx_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \; F_i \; df_i \tag{8}$$

con $s \geq 2$, $gr(f_i) = d_i$ y $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_s)$. Llamamos también $b_i = a - d_i$.

Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ tal que verifica las condiciones necesarias para usar la Propiedad 2.4.6 y la Propiedad 2.4.15. Por lo tanto vale

$$I(\omega) = (F_1, \ldots, F_s) \; .$$

4.2.12. Supongamos que $d_i = 1$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Como $df_1 \wedge \ldots \wedge df_s \neq 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f_i = x_i$. De esta forma $A_i = \lambda_i F_i$ y entonces

$$I(\omega) = J(\omega) \; .$$

Tenemos entonces que ω es regular y también $\overline{U}(\omega) = 0$.

En cambio, si existe k de forma tal que $d_k > 1$ resulta $F_k \in \big(I(\omega)/J(\omega)\big)(a - d_k) = I(\omega)(a-k)$ y entonces ω no es regular.

Propiedad 4.2.13. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ una foliación racional o logarítmica, escrita como en (8), de forma tal que valen las hipótesis de la Propiedad 2.4.6 y la Propiedad 2.4.15. Entonces ω es regular si y sólo si

$$\overline{d} = (1, \ldots, 1) \; .$$

Para ver que sucede con $\overline{U}(\omega)$, manteniendo la notación de (8), definamos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl} S(b_1) \times \ldots \times S(b_s) & \xrightarrow{\Psi_I} & I(\omega)(a) \\ (t_1, \ldots, t_s) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{s} t_i F_i \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} S(1) \times \ldots \times S(1) & \xrightarrow{\Psi_J} & J(\omega)(a) \\ (H_0, \ldots, H_n) & \longmapsto & \sum_{i,j} \lambda_i F_i H_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \; . \end{array}$$

Supongamos que tenemos una tira $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_s)$ tal que $\Psi_I(\bar{t}) = 0$. Tomando un índice k cualquiera podemos despejarlo y obtenemos

$$-t_k F_k = \sum_{i \neq k} t_i F_i \ .$$

Como $f_k | F_i$ para todo $i \neq k$ necesariamente vale $f_k | t_k F_k$. Por las condiciones de transversalidad de las f_i, necesariamente $f_k | t_k$ y entonces $t_k = \nu_k f_k$. Como esto sucede para un k cualquiera, tenemos que $\bar{t} \in Ker(\Psi_I)$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{s} \nu_i f_k F_k = F \sum_{i=1}^{s} \nu_i = 0 \ .$$

Así, vemos que la dimensión del núcleo de Ψ_I es igual a $s-1$ y entonces podemos calcular la dimensión de $I(\omega)(a)$ como

$$dim_{\mathbb{C}}(I(\omega)(a)) = \left(\sum_{i=1}^{s} \binom{n+b_i}{b_i} \right) - (s-1) \ . \tag{9}$$

Miremos ahora Ψ_J. Como $i_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \omega = \sum\limits_{i,j} \lambda_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ entonces por la definición de $J(\omega)$ - Definición 3.7 - queda claro que Ψ_J es un epimorfismo. Por lo tanto

$$dim_{\mathbb{C}}(J(\omega)(a)) \leq (n+1)^2 \ . \tag{10}$$

Propiedad 4.2.14. Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$ una foliación racional o logarítmica, escrita como en (8), de forma tal que valen las hipótesis de la Propiedad 2.4.6 y la Propiedad 2.4.15. Tenemos que:

i) si $\bar{d} = (1, \ldots, 1)$, entonces $\overline{U}(\omega) = 0$

ii) si existen d_{i_1}, d_{i_2} tales que $d_{i_1}, d_{i_2} \geq 2$ entonces $\overline{U}(\omega) \neq 0$.

Demostración. La primera parte la vimos más arriba en 4.2.12.

Para la segunda parte, si $m \geq 2$, es fácil ver que $\binom{n+m}{m} \geq \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}$.

Aplicando dicha la desigualdad en las fórmulas (9) y (10) resulta

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{C}}(I(\omega)(a)) &\geq (n+1)^2 + (n+1) - (s-1) = \\ &= (n+1)^2 + (n-s) + 2 > dim_{\mathbb{C}}(J(\omega)(a)) \end{aligned}$$

de donde concluimos $\overline{U}(\omega) \neq 0$. $\square$

4.2.15. En el caso en que uno solo de los parámetros d_k sea superior a 1 no sabemos cuanto vale $\overline{U}(\omega) = \overline{\mathbb{U}}(\omega)(a)$ pero podemos observar lo siguiente:

i) por la Propiedad 2.4.6 y la Propiedad 2.4.15 sabemos que $\overline{\mathbb{U}}(\omega)(a - d_k) > 0$

ii) por el Teorema 3.4.4 y por Corolario 3.4.5 sabemos que $N(n, \overline{d}) = P_{\overline{\mathbb{U}}(\omega)} > 0$.

4.3 Deformaciones de estructuras algebraicas

4.3.1 Motivación

Como vimos en las secciones anteriores, es de interés conocer el núcleo del operador $\omega \bigtriangleup$. Una manera de hacerlo es estudiar como cambia el núcleo en base a pullbacks lineales de ω.

Para eso, durante esta sección, supongamos que $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^{n-1}}(a))$ y denotemos con Ω^1_n y Ω^1_{n+1} a los diferenciales de Kähler de $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ y $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, respectivamente, sobre $\mathbb{C}$.

En base a la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^{n-1} \\ [x_0 : \ldots : x_n] & \longmapsto & [x_0 : \ldots : x_{n-1}] \end{array}$$

podemos pensar a ω como una uno forma en $\mathbb{P}^n$ a través del pullback por π.

Sea $\eta \in \Omega^1_{n+1}(b)$ una 1-forma homogénea de grado b. Queremos separar a η de su parte en variable x_n de las demás variables. Para eso, escribimos a η como

$$\eta = \eta^0 + \eta^1 = \sum_{k=1}^{b} x_n^{b-k}\, \eta_k^0 + \sum_{k=1}^{b} x_n^{b-k}\, \eta_k^1$$

donde $i_{\frac{\partial}{\partial x_n}}(\eta_k^0) = 0$ y, siempre y cuando $\eta_k^1 \neq 0$, $i_{\frac{\partial}{\partial x_n}}(\eta_k^1) \neq 0$.

A su vez, a cada una de estas η_k^0 y η_k^1 también las podemos descomponer en

$$\eta_k^0 = \sum_{i=0}^{n-1} g_{i,k}\, dx_i \qquad \text{y} \qquad \eta_k^1 = g_k^1\, dx_n$$

donde $gr(g_{i,k}) = k$ y $gr(g_k^1) = k - 1$.

La misma descomposición que hicimos con η la podemos aplicar a $\omega \vartriangle \eta$ para conocer el núcleo del operador $\omega \vartriangle$. Al hacer eso, cálculos directos dan como resultado que $\omega \vartriangle \eta = 0$ si y sólo si

$$\begin{cases} (\omega \vartriangle \eta)_k^0 = \omega \vartriangle \eta_k^0 = 0 & 1 \leq k \leq b \\ (\omega \vartriangle \eta)_1^1 = (\omega \wedge dg_1^1 + g_1^1 d\omega) \wedge dx_n = 0 & \\ (\omega \vartriangle \eta)_k^1 = \big(\omega \wedge dg_k^1 + g_k^1 d\omega - (b-k+1)\,\omega \wedge \eta_{k-1}^0\big) \wedge dx_n = 0 & 2 \leq k \leq b\ . \end{cases}$$

Contrayendo por el campo radial la tercer ecuación del sistema anterior, podemos despejar g_k^1 y obtenemos un nuevo sistema equivalente al anterior

$$\begin{cases} \omega \vartriangle \eta_k^0 = 0 & 1 \leq k \leq b \\ \omega \wedge dg_1^1 + g_1^1 d\omega = 0 & \\ g_k^1 = \dfrac{b-(k-1)}{a-(k-1)} i_R(\eta_{k-1}^0) & 2 \leq k \leq b\ . \end{cases}$$

De esta forma, la ecuación $\omega \vartriangle \eta = 0$ es equivalente a que η se escriba como

$$\begin{aligned} \eta = \eta_b^0 + &\left[\ x_n \eta_{b-1}^0 + \frac{1}{a-(b-1)} i_R(\eta_{b-1}^0) dx_n\ \right] + \\ + &\left[\ x_n^2 \eta_{b-2}^0 + \frac{2}{a-(b-2)} i_R(\eta_{b-2}^0) x_n\ dx_n\ \right] + \dots \\ \dots + &\left[\ x_n^{b-1} \eta_1^0 + \frac{b-1}{a-1} i_R(\eta_1^0) x_n^{b-2}\ dx_n\ \right] + \eta_1^1 \end{aligned} \tag{11}$$

donde $\omega \vartriangle \eta_k^0 = \omega \vartriangle \eta_1^1 = 0$, para todo $k = 1, \dots, b$.

Más aún, cada uno de los términos anteriores se anula independientemente por $\omega \vartriangle$.

Si escribimos al k-ésimo término de la expresión anterior (11) como

$$\begin{aligned} x_n^k\ \eta_{b-k}^0\ +\ &\frac{k}{a-(b-k)}\ i_R(\eta_{b-k}^0)\ x_n^{k-1}\ dx_n = \\ &= x_n^k\ \eta_{b-k}^0\ +\ \frac{1}{a-(b-k)}\ i_R(\eta_{b-k}^0)\ dx_n^k \end{aligned}$$

podemos concluir que, para $\eta \in \Omega_n^1$, vale que $\omega \vartriangle \eta = 0$ si y solo si

$$\omega \vartriangle \left(x_n^k \eta\ +\ \frac{1}{a-(b-k)}\ dx_n^k \wedge i_R(\eta) \right) = 0\ . \tag{12}$$

Ésa última expresión en términos de x_n y η motiva la Definición 4.6 de que vamos a dar en la siguiente sección.

4.3.2 Deformaciones

Definición 4.5. Sea $D : \Omega_{S|\mathbb{C}} \to \Omega_{S|\mathbb{C}}$ una aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Vamos a decir que D es un operador diferencial sobre S si $\forall a \in S$ el operador $[D, a] : \Omega_{S|\mathbb{C}} \to \Omega_{S|\mathbb{C}}$ definido como

$$[D, a](\alpha) = D(a\alpha) - aD(\alpha)$$

es S-lineal.

Sea $D : \Omega_{S|\mathbb{C}} \to \Omega_{S|\mathbb{C}}$ un operador diferencial sobre S y sea $\widetilde{\Omega}$ un álgebra de formas establemente isomorfa a $\Omega_{S|\mathbb{C}}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\widetilde{\Omega} = \bigoplus_{\substack{r \geq 0 \\ b \geq n_r}} \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(b)$$

para algún $n_r \in \mathbb{N}$.

Asociado a D, vamos a buscar deformaciones de la acción de S sobre $\widetilde{\Omega}$ que extiendan la acción usual de $\mathbb{C}$, de forma tal que el operador

$$\widetilde{\Omega} \xrightarrow{D} \widetilde{\Omega}$$

sea una aplicación S-lineal. Vamos a notar Ω_D a $\widetilde{\Omega}$ bajo la nueva acción de S.

Motivados por la estructura de (12) introducimos la siguiente definición:

Definición 4.6. Para $f \in S(c)$ y $\eta \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(b)$ definimos la siguiente acción de S en $\Omega^r_{S|\mathbb{C}}(b)$

$$f \cdot_D \eta \;=\; \alpha\, f\eta \;+\; \beta\, df \wedge i_R\eta$$

donde $\alpha = \alpha(r, b, c)$ y $\beta = \beta(r, b, c)$ verifican las condiciones

$$\begin{cases} \alpha(-, -, 0) \equiv 1 \\ D(f \cdot_D \eta) \;=\; f \;\cdot_D D(\eta) \\ (gf) \cdot_D \eta = g \cdot_D (f \cdot_D \eta) \;. \end{cases} \tag{13}$$

4.3.1. En el caso de que existan, está claro que Ω_D se convierte en un S-módulo graduado preservando la acción de $\mathbb{C}$ y

$$\Omega_D \xrightarrow{D} \Omega_D$$

es una aplicación S-lineal.

4.3.2. Cabe destacar que $\Omega^r_D \neq (\Omega^1_D)^{\wedge r}$. Basta desarrollar los siguientes productos

$$z \cdot_D (dx \wedge dy) \qquad (z \cdot_D dx) \wedge dy \qquad dx \wedge (z \cdot_D dy)$$

y se ve que son todos distintos.

4.3.3. De cualquier manera, como corolario de la propiedad siguiente, los módulos Ω^r_D son establemente libres del rango esperado $\binom{n+1}{r}$.

Propiedad 4.3.4. Sea $\Omega^r_D = \bigoplus\limits_{b \geq n_r} \Omega^r_D(b)$ con $n_r > n+1$ y sean $\alpha(r,b,c)$ y $\beta(r,b,c)$ como en (13). Vamos a llamar $\alpha = \alpha(r,b,1)$ y $\beta = \beta(r,b,1)$. Si para todo $b \geq n_r$ vale

$$\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$$

entonces Ω^r_D está finitamente generado por elementos de grado n_r.

Demostración. Sea γ un multi-índice $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0$ tal que $\sum_{i=0}^n \gamma_i = g+1 = b+1-r$ y sea $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{0, \ldots, n\}$.

Tomemos $b \geq n_r$. Todo elemento de $\Omega^r_D(b+1)$ es una suma de elementos de la forma

$$x^\gamma dx_I$$

done escribimos $x^\gamma = \prod\limits_{i=0}^n x_i^{\gamma_i}$ y $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$.

Sea $k \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $\gamma_k \neq 0$. Calculemos el siguiente producto

$$x_k \cdot_D \left(x^{\gamma - e_k} dx_I\right) = \alpha\, x^\gamma dx_I + \beta \sum_{j=1}^r x^{\gamma - e_k + e_{i_j}}\, dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}} dx_I \tag{14}$$

donde notamos con e_i al i-ésimo vector canónico.

Si $k \in I$, entonces (14) es igual a $(\alpha+\beta)\, x^\gamma\, dx_I$ y podemos despejar $x^\gamma\, dx_I$ puesto que $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$.

Por el contrario, supongamos que $\forall k$ tal que $\gamma_k \neq 0$ resulta $k \notin I$. Por hipótesis sabemos que $b \geq n_r > n+1$. Reemplazando $b = g - r$ tenemos $g > n+1-r$. Por lo tanto, necesariamente tiene que existir k tal que $\gamma_k \geq 2$.

Sea $\ell \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\ell \in I$ y k tal que $\gamma_k \geq 2$. Calculamos

$$\begin{aligned}
&x_\ell \cdot_D \left(x^{\gamma - e_k} dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_\ell}} dx_I\right) = \\
&\quad = \alpha\, x^{\gamma - e_k + e_\ell}\, dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_\ell}} dx_I + \beta \sum_{i_j \neq \ell} x^{\gamma - e_k + e_{i_j}}\, dx_\ell \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}} \left(dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_\ell}} dx_I\right) = \\
&\quad = \alpha\, x^{\gamma - e_k + e_\ell}\, dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_\ell}} dx_I + \beta\, x^\gamma\, dx_I - \beta \sum_{i_j \neq k} x^{\gamma - e_k + e_{i_j}}\, dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}} dx_I\ .
\end{aligned} \tag{15}$$

Operamos con (14) y (15)

$$\alpha\Big[x_k \cdot_D \big(x^{\gamma-e_k}\ dx_I\big)\Big] - \beta\Big[x_\ell \cdot_D \Big(x^{\gamma-e_k}\ dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_\ell}} dx_I\Big)\Big] =$$
$$= (\alpha^2-\beta^2)\ x^\gamma\ dx_I + (\alpha+\beta)\beta \sum_{i_j\neq k} x^{\gamma-e_k+e_{i_j}}\ dx_k \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_\ell}} dx_I\ . \tag{16}$$

Llamemos $J = (I\backslash\{\ell\}) \cup \{k\}$. En cada uno de los términos de la derecha de (16) tenemos que $k \in J$ y $\gamma_k \geq 2$. Entonces $(\gamma - e_k + e_{i_j})_k \neq 0$ y podemos despejar $(\alpha^2-\beta^2)x^\gamma dx_I$ como hicimos en (14).

De esta manera, todo elemento está generado por el grado anterior a partir de $b+1 \geq n_r$. Como $\Omega^r_D(n_r)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, y como la acción $\cdot_D$ extiende la acción usual de $\mathbb{C}$ y es asociativa, concluimos que Ω^r_D está finitamente generado por elementos de grado n_r. □

4.3.3 $\Omega_{\omega\triangle}$

Sea $\mathcal{F} = (\omega) \in \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^n)(a)$. Como antes, vamos a considerar el operador $\omega\ \triangle$

$$\begin{aligned} \Omega^r_{S|\mathbb{C}} &\xrightarrow{\ \omega\triangle\ } \Omega^{r+2}_{S|\mathbb{C}} \\ \eta &\longmapsto \omega \wedge d\eta + \kappa(r)\ d\omega \wedge \eta\ . \end{aligned}$$

4.3.5. Veamos que efectivamente $\omega\ \triangle$ es un operador diferencial. Sea $f \in S(c)$ y sea $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(p)$. Calculamos $[\omega\ \triangle\ , f](\tau)$

$$\begin{aligned} [\omega\ \triangle\ , f](\tau) &= \omega\ \triangle\ (f\tau) - f\ \omega\ \triangle\ \tau = \\ &= \big(\omega \wedge df \wedge \tau + f\ \omega \wedge d\tau + \kappa(r) f\ d\omega \wedge \tau\big) + \\ &\qquad - \big(f\ \omega \wedge d\tau + f\kappa(r)\ d\omega \wedge \tau\big) = \\ &= \omega \wedge df \wedge \tau \end{aligned}$$

y vemos que la última expresión es S-lineal en τ.

4.3.6. Para $f \in S(c)$ y $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(p)$ definimos

$$f \cdot_\triangle \tau := \frac{1}{p+c-\kappa(r)a}\ \Big[\ \big(p - \ \kappa(r)a\big) f\tau\ +\ df \wedge i_R\tau\ \Big]\ .$$

Llamemos
$$\Omega^r_{\omega\triangle} = \bigoplus_{p>\kappa(r)a} \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(p) \qquad \text{y} \qquad \Omega_{\omega\triangle} = \bigoplus_{r\geq 0} \Omega^r_{\omega\triangle}$$
a los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales dotados de esta acción de S.

Propiedad 4.3.7. La acción (4.3.6) de S en $\Omega^r_{\omega\triangle}$ verifica las condiciones (13), por lo tanto $\Omega^r_{\omega\triangle}$ tiene una estructura de S-módulos graduados, y la aplicación
$$\Omega_{\omega\triangle} \xrightarrow{\omega\triangle} \Omega_{\omega\triangle}$$
es un morfismo S-lineal.

Demostración. Si tomamos $f \in S(0)$ entonces $df = 0$ y
$$f \cdot_\triangle \tau = f\tau$$
por lo tanto $\alpha(-,-,0) \equiv 1$.

Para ver que $\omega\ \triangle$ es S-lineal, tomemos $f \in S(c)$ y $\tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(p)$. Por un lado tenemos que
$$f \cdot_\triangle (\omega \triangle \tau) = \frac{1}{p+c-\kappa(r)a}\Big[\big(p-\kappa(r)a\big)\ f(\omega \triangle \tau) + df \wedge i_R(\omega \triangle \tau)\Big]$$
puesto que $a - \kappa(r+2)a = \kappa(r)a$. Si desarrollamos por separado los 2 términos del numerador obtenemos
$$\begin{aligned}
\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\ (\omega \triangle \tau) = & \\
&= \big(p-\kappa(r)a\big)\ f\ \big(\omega\wedge d\tau + \kappa(r)\ d\omega\wedge\tau\big) = \\
&= \Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\ \omega\wedge d\tau\Big) + \Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\kappa(r)\ f\ d\omega\wedge\tau\Big)
\end{aligned} \tag{17}$$
y
$$\begin{aligned}
df\wedge & i_R(\omega \triangle \tau) = \\
&= df\wedge i_R\big(\omega\wedge d\tau + \kappa(r)\ d\omega\wedge\tau\big) = \\
&= -\ df\wedge\omega\wedge i_R d\tau + a\kappa(r)\ df\wedge\omega\wedge\tau + \kappa(r)\ df\wedge d\omega\wedge i_R\tau = \\
&= \Big(p\ \omega\wedge df\wedge\tau\Big) - \Big(\omega\wedge df\wedge d i_R\tau\Big) - \Big(a\kappa(r)\ \omega\wedge df\wedge\tau\Big) + \\
&\qquad\qquad + \Big(\kappa(r)\ d\omega\wedge df\wedge i_R\tau\Big) = \\
&= \Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\ \omega\wedge df\wedge\tau\Big) - \Big(\omega\wedge df\wedge d i_R\tau\Big) + \Big(\kappa(r)\ d\omega\wedge df\wedge i_R\tau\Big)
\end{aligned} \tag{18}$$
usando que $i_R\omega = 0$ y la Propiedad 2.3.3.

Calculemos ahora $\omega \vartriangle (f \cdot_\vartriangle \tau)$.

$$\begin{aligned}\omega \vartriangle (f \cdot_\vartriangle \tau) &= \omega \wedge d(f \cdot_\vartriangle \tau) + \kappa(r)\ d\omega \wedge (f \cdot_\vartriangle \tau) = \\ &= \frac{1}{p+c-\kappa(r)a}\Big\{ \omega \wedge d\Big[\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\tau + df \wedge i_R\tau\Big] + \\ &\qquad + \kappa(r)\ d\omega \wedge \Big[\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\tau + df \wedge i_R\tau\Big]\Big\}\ .\end{aligned}$$

Desarrollando también por separado los 2 términos del numerador resulta

$$\begin{aligned}&\omega \wedge d\Big[\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\tau + df \wedge i_R\tau\Big] = \\ &= \Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\ \omega \wedge df \wedge \tau\Big) + \Big(\big(p-\kappa(r)a\big) f\ \omega \wedge d\tau\Big) - \Big(\omega \wedge df \wedge di_R\tau\Big)\end{aligned} \tag{19}$$

y

$$\begin{aligned}&\kappa(r)\ d\omega \wedge \Big[\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\tau + df \wedge i_R\tau\Big] = \\ &\qquad = \Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\kappa(r)\ f\ d\omega \wedge \tau\Big) + \Big(\kappa(r)\ d\omega \wedge df \wedge i_R\tau\Big)\ .\end{aligned} \tag{20}$$

Ahora solo queda por observar que la suma (17) + (18) es igual a la suma (19) + (20).

Para comprobar la asociatividad, consideremos una nueva función $g \in S(e)$. Como $f \cdot_\vartriangle \tau \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(p+c)$, tenemos

$$g \cdot_\vartriangle (f \cdot_\vartriangle \tau) = \frac{1}{p+c+e-\kappa(r)a}\Big[\big(p+c-\kappa(r)a\big)\ g(f \cdot_\vartriangle \tau) + dg \wedge i_R(f \cdot_\vartriangle \tau)\Big]\ .$$

Al igual que antes, mirando los términos del numerador por separado vemos que

$$\begin{aligned}&\big(p+c-\kappa(r)a\big)\ g\ (f \cdot_\vartriangle \tau) = \\ &\qquad = \big(p+c-\kappa(r)a\big)\ g\ \left[\frac{1}{p+c-\kappa(r)a}\Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\tau + df \wedge i_R\tau\Big)\right] = \\ &\qquad = \Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\ gf\ \tau\Big) + \Big(g\ df \wedge i_R\tau\Big)\end{aligned} \tag{21}$$

y

$$\begin{aligned}&dg \wedge i_R(f \cdot_\vartriangle \tau) = \\ &\qquad = dg \wedge i_R\left[\frac{1}{p+c-\kappa(r)a}\Big(\big(p-\kappa(r)a\big)\ f\tau + df \wedge i_R\tau\Big)\right] = \\ &\qquad = \left(\frac{p-\kappa(r)a}{p+c-\kappa(r)a} f\ dg \wedge i_R\tau\right) + \left(\frac{c}{p+c-\kappa(r)a}\ f\ dg \wedge i_R\tau\right) = \\ &\qquad = f\ dg \wedge i_R\tau\ .\end{aligned} \tag{22}$$

Finalmente, sumando (21) + (22) queda claro que

$$\begin{aligned} g \cdot_\triangle (f \cdot_\triangle \tau) &= \frac{1}{p+c+e-\kappa(r)a}\Big[\big(p-\kappa(r)a\big)\ gf\ \tau + d(gf)\wedge i_R\tau\Big] = \\ &= (gf)\cdot_\triangle \tau \end{aligned}$$

□

Propiedad 4.3.8. Si llamamos $T^1_{\omega\triangle} = \bigoplus_{e\geq 1} T^1_{\omega\triangle}(e)$, donde $T^1_{\omega\triangle}(e)$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial dotado de la siguiente acción

$$f\cdot_\triangle X = \frac{e}{e+c}\ fX$$

para $X\in T^1(e)$, entonces $T^1_{\omega\triangle}$ es un S-módulo graduado y el complejo

$$T^1_{\omega\triangle} \xrightarrow{\ \omega\triangle\ } \Omega^1_{\omega\triangle} \xrightarrow{\ \omega\triangle\ } \Omega^3_{\omega\triangle} \xrightarrow{\ \omega\triangle\ } \dots$$

es un complejo de S-módulos.

Demostración. Tomemos $f\in S(c)$, $g\in S(b)$ y $X\in T^1(e)$. Entonces

$$\begin{aligned} g\cdot_\triangle(f\cdot_\triangle X) &= \frac{e+c}{e+c+b}\Big[g\ (f\cdot_\triangle X)\Big] = \\ &= \frac{e+c}{e+c+b}\left[g\ \left(\frac{e}{e+c}fX\right)\right] = \frac{e}{e+c}(gf)X = \\ &= (gf)\cdot_\triangle X \end{aligned}$$

por lo que la acción es asociativa y $T^1_{\omega\triangle}$ es un S-módulo graduado.

Como $\omega\triangle X\in\Omega^1_{\omega\triangle}(a+e)$ tenemos

$$\begin{aligned} f\cdot_\triangle(\omega\triangle X) &= \frac{1}{a+e+c-\kappa(1)a}\Big[\big(a+e-\kappa(1)a\big)f\ (\omega\triangle X) + df\wedge i_R(\omega\triangle X)\Big] = \\ &= \frac{1}{e+c}\Big[e\ f\ (\omega\triangle X) + df\wedge i_R(\omega\triangle X)\Big] \\ &= \frac{1}{e+c}\Big[ef\ \big(di_X\omega + i_X d\omega\big) + df\wedge i_R\big(di_X\omega + i_X d\omega\big)\Big] = \\ &= \frac{1}{e+c}\Big[ef\ \big(di_X\omega + i_X d\omega\big) + (a+e)\ i_X\omega\ df - a\ i_X\omega\ df\Big] = \\ &= \frac{e}{e+c}\Big[\Big(f\ di_X\omega\Big) + \Big(f\ i_X d\omega\Big) + \Big(i_X\omega\ df\Big)\Big]\ . \end{aligned} \tag{23}$$

Por otro lado, si calculamos $\omega \vartriangle (f \cdot_{\vartriangle} X) = \frac{e}{e+c}\, \omega \vartriangle (fX)$ resulta

$$\frac{e}{e+c}\Big(di_{fX}\omega + i_{fX}d\omega\Big) = \frac{e}{e+c}\Big(d(fi_X\omega) + i_{fX}d\omega\Big) =$$
$$= \frac{e}{e+c}\Big[\Big(i_X\omega\ df\Big) + \Big(f\ di_X\omega\Big) + \Big(f\ i_Xd\omega\Big)\Big] . \tag{24}$$

Comparando (23) con (24) queda claro que la acción conmuta con $\omega \vartriangle$ de donde se sigue el resultado. $\square$

Está claro que $T^1_{\omega\vartriangle}$ es libre de rango n.

En los otros casos, tenemos que $\alpha^2(r,b,1) - \beta^2(r,b,1) = 0$ si y sólo si

$$\left(\frac{b-\kappa(r)a}{b+1-\kappa(r)a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b+1-\kappa(r)a}\right)^2 = \frac{\big(b-\kappa(r)a\big)^2 - 1}{(b+1-\kappa(r)a)^2} = 0 \ .$$

Por lo tanto, para $b > \kappa(r)a + 1$ se verifican las condiciones de la Propiedad 4.3.4 y los módulos $\Omega^r_{\omega\vartriangle}$ son establemente libres de rango $\binom{n+1}{r}$.

4.3.4 Ω_d

Tomemos ahora el diferencial exterior usual $d : \Omega_{S|\mathbb{C}} \to \Omega_{S|\mathbb{C}}$. Haciendo un cálculo análogo a 4.3.5 se ve fácilmente que d define un operador diferencial en el sentido de la Definición 4.5.

4.3.9. Para $f \in S(c)$ y $\eta \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(b)$, definimos

$$f \cdot_d \eta := \frac{b-1}{b+c-1}\left(\ f\eta\ +\ \frac{1}{b}\ df \wedge i_R\eta\ \right) .$$

Llamemos

$$\Omega^r_d = \bigoplus_{b\geq 2} \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(b) \qquad \text{y} \qquad \Omega_d = \bigoplus_{r \geq 0} \Omega^r_d$$

a los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales dotados de esta acción de S.

Propiedad 4.3.10. La acción (4.3.9) de S en Ω^r_d verifica las condiciones (13), por lo tanto Ω^r_d tiene una estructura de S-módulo y el diferencial exterior

$$\Omega_d \xrightarrow{d} \Omega_d$$

es un morfismo S-lineal.

Demostración. Está claro que si $f \in S(0)$ entonces $df = 0$, $f \cdot_d \eta = f\eta$ y $\alpha(-,-,0) \equiv 1$.

Sea $\eta \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(b)$. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} d(f \cdot_d \eta) &= \frac{b-1}{b+c-1}\left(d(f\eta) + \frac{1}{b}\, d(df \wedge i_R\eta) \right) = \\ &= \frac{b-1}{b+c-1}\left(df \wedge \eta + f\; d\eta - \frac{1}{b}\, df \wedge di_R\eta \right) \end{aligned} \tag{25}$$

y por otro lado, usando la Propiedad 2.3.3,

$$\begin{aligned} f \cdot_d (d\eta) &= \frac{b-1}{b+c-1}\left(f\; d\eta + \frac{1}{b}\, df \wedge i_R(d\eta) \right) = \\ &= \frac{b-1}{b+c-1}\left(f\; d\eta + df \wedge \eta - \frac{1}{b}\, df \wedge di_R\eta \right) \end{aligned} \tag{26}$$

se ve claramente la igualdad entre (25) y (26).

Para la asociatividad, tomemos $g \in S(e)$. Como $f \cdot_d \eta \in \Omega^r_{S|\mathbb{C}}(b+c)$ resulta

$$g \cdot_d (f \cdot_d \eta) = \frac{b+c-1}{b+c+e-1}\left(g\; (f \cdot_d \eta) + \frac{1}{b+c}\, dg \wedge i_R(f \cdot_d \eta) \right) . \tag{27}$$

Si calculamos los 2 términos dentro del paréntesis por separado, vemos que

$$\begin{aligned} g\; (f \cdot_d \eta) &= g\; \left[\frac{b-1}{b+c-1}\left(f\eta + \frac{1}{b}\, df \wedge i_R\eta \right) \right] = \\ &= \frac{b-1}{b+c-1}\left(gf\; \eta + \frac{1}{b}\, g\; df \wedge i_R\eta \right) \end{aligned} \tag{28}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{b+c}\, dg \wedge i_R(f \cdot_d \eta) &= \frac{1}{b+c}\, dg \wedge i_R \left[\frac{b-1}{b+c-1}\left(f\eta + \frac{1}{b}\, df \wedge i_R\eta \right) \right] = \\ &= \frac{b-1}{b+c-1}\left(\frac{1}{b+c}\, f\; dg \wedge i_R\eta + \frac{c}{(b+c)b}\, f\; dg \wedge i_R\eta \right) = \\ &= \frac{b-1}{b+c-1}\left(\frac{1}{b}\, f\; dg \wedge i_R\eta \right) . \end{aligned} \tag{29}$$

Reemplazando (28) y (29) en (27) resulta

$$\begin{aligned} g \cdot_d (f \cdot_d \eta) &= \frac{b-1}{b+c+e-1}\left(gf\; \eta + \frac{1}{b}\, d(gf) \wedge i_R\eta \right) = \\ &= (gf) \cdot_d \eta \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

En este caso, $\alpha^2(r,b,1) - \beta^2(r,b,1) = 0$ si y sólo si

$$\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 - \left(\frac{b-1}{b^2}\right)^2 = \frac{(b-1)^2(b^2-1)}{b^4} = 0$$

Por lo tanto, tomando $b > 1$ tenemos satisfecha la condición de la Propiedad 4.3.4 y entonces Ω_d^r es establemente libre de rango $\binom{n+1}{r}$.

A

Apéndice

A.1 Pullbacks por isomorfismos

Propiedad A.1.1. Sea $\alpha \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}$ escrita como $\alpha = \sum f_i dx_i$, vista como una 1-forma en $\Omega^1_{S[\varepsilon]|\mathbb{C}[\varepsilon]}$. Sea $\overline{\phi}$ un automorfismo de $S[\varepsilon]$ de la forma $\overline{\phi} = Id + \varepsilon M$ donde M es la matriz $M = (m_{ij})$. Entonces

$$\overline{\phi}^* \alpha = \alpha(Id + \varepsilon M) = \alpha + \varepsilon \ L_{X_M} \alpha$$

donde $L_{\varepsilon X_M} \alpha$ denota la derivada de Lie de α respecto del campo

$$X_M = \sum m_{ij} \ x_j \ \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Demostración. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha(Id + \varepsilon M) &= \alpha(x) \ + \ \sum_i \ f_i(x + \varepsilon M x) \ d(x_i + M_i x) = \\ &= \alpha(x) \ + \ \sum_i \ f_i(x + \varepsilon M x) \ dx_i \ + \ \sum_{ij} \varepsilon \ m_{ij} \ f_i(x) \ dx_j = \\ &= \alpha \ + \ \sum_{ij} \varepsilon \ m_{jk} \ x_k \ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \ dx_i \ + \ \sum_{ij} \varepsilon \ m_{ij} \ f_i \ dx_j \ . \end{aligned}$$

Por otro lado, tomamos el campo de vectores $X_M = \sum m_{ij} \ x_j \ \frac{\partial}{\partial x_i}$ y, en base a 2.3.4, calculamos $L_{\varepsilon X_M} \alpha$ como $L_{\varepsilon X_M} \alpha = d i_{\varepsilon X_M} \alpha + i_{\varepsilon X_M} d\alpha$. El primer término está dado por

$$\begin{aligned} i_{\varepsilon X_M} \alpha &= \sum_{ij} \varepsilon \ m_{ij} \ x_j \ f_i \\ d i_{\varepsilon X_M} \alpha &= \sum_{ij} \ \varepsilon \ m_{ij} \ f_i \ dx_j \ + \ \sum_{ijk} \ \varepsilon \ m_{ij} \ x_j \ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \ dx_k \end{aligned} \tag{1}$$

y el segundo

$$d\alpha = \sum_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i$$

$$i_{\varepsilon X_M} d\alpha = \sum_{ijk} \varepsilon\, m_{jk}\, x_k\, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_i \;-\; \sum_{ijk} \varepsilon\, m_{ik}\, x_k\, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

de donde sale la igualdad. □

Corolario A.1.2. Bajo las mismas hipótesis que la propiedad anterior, sólo que ahora vemos a $\alpha \in \Omega^1_{S|\mathbb{C}}$ como una 1-forma en $\Omega^1_{S[\varepsilon]|\mathbb{C}}$, tenemos que

$$\overline{\phi}^* \alpha = \alpha(Id + \varepsilon M) = \alpha + \varepsilon\; L_{X_M}\alpha + i_{X_M}\alpha\; d\varepsilon\ .$$

Demostración. Lo único que cambia respecto de la demostración anterior es la fórmula (1) que ahora va a ser

$$\begin{aligned} d i_{\varepsilon X_M}\alpha &= \sum_{ij}\; \varepsilon\; m_{ij}\; f_i\; dx_j \;+\; \sum_{ijk}\; \varepsilon\; m_{ij}\; x_j\; \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\; dx_k \;+\; \sum_{ij} m_{ij}\; x_j\; f_i\; d\varepsilon \\ &= \sum_{ij}\; \varepsilon\; m_{ij}\; f_i\; dx_j \;+\; \sum_{ijk}\; \varepsilon\; m_{ij}\; x_j\; \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\; dx_k \;+ i_{X_M}\alpha\; d\varepsilon\ . \end{aligned}$$

□

A.2 Unfoldings de formas racionales

Sea $\mathcal{F} = (\omega)$ una foliación racional en $\mathcal{R}(n,(r,s))$

$$\omega = rFdG - sGdF\ .$$

Por el Lema 2.4.4 sabemos que el ideal $I_h(\omega)$ está dado por

$$I_h(\omega) = (F, G)\ .$$

Propiedad A.2.1. Toda deformación de $\mathcal{F} = (\omega)$ proviene de un unfolding.

Demostración. Sea η una deformación de ω, es decir que η verifica la ecuación

$$\omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta = 0\ . \tag{2}$$

Tenemos que $d\omega = (r+s)dF \wedge dG$. Si tomamos un punto p tal que $d\omega(p) \neq 0$ queda claro que alrededor de este punto F y G son transversales, entonces existe un sistema de coordenadas (U, φ) alrededor de p tal que $\varphi = (F, G, \varphi_1, \ldots, \varphi_\ell)$.

En este entorno η se puede escribir como

$$\eta = h_F\ dF + h_G\ dG + \sum_i h_i\ d\varphi_i$$

y $d\eta$

$$\begin{aligned} d\eta = &\left(\frac{\partial h_G}{\partial F} - \frac{\partial h_F}{\partial G}\right) dF \wedge dG + \sum_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial F} - \frac{\partial h_F}{\partial \varphi_i}\right) dF \wedge d\varphi_i + \\ &+ \sum_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial G} - \frac{\partial h_G}{\partial \varphi_i}\right) dG \wedge d\varphi_i + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial h_j}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial h_i}{\partial \varphi_j}\right) d\varphi_i \wedge d\varphi_j\ . \end{aligned}$$

Podemos reescribir la ecuación (2) como

$$\begin{aligned} &\omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta = \\ &= \sum_i \left[rF\ \left(\frac{\partial h_i}{\partial F} - \frac{\partial h_F}{\partial \varphi_i}\right) + sG\ \left(\frac{\partial h_i}{\partial G} - \frac{\partial h_G}{\partial \varphi_i}\right)\right] dF \wedge dG \wedge d\varphi_i + \\ &\qquad + \sum_{i,j} rF \left(\frac{\partial h_j}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial h_i}{\partial \varphi_j}\right) dG \wedge d\varphi_i \wedge d\varphi_j + \\ &\qquad - \sum_{i,j} sG \left(\frac{\partial h_j}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial h_i}{\partial \varphi_j}\right) dF \wedge d\varphi_i \wedge d\varphi_j = 0\ . \end{aligned}$$

De los últimos 2 términos tenemos que $\frac{\partial h_j}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial h_i}{\partial \varphi_j} = 0$, por lo tanto

$$\frac{\partial h_j}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial h_i}{\partial \varphi_j} \tag{3}$$

para todo i, j.

Definimos $h = \int h_k d\varphi_k$. Usando la igualdad (3) se deduce

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi_i} = \int \frac{\partial h_k}{\partial \varphi_i}\ d\varphi_k = \int \frac{\partial h_i}{\partial \varphi_k}\ d\varphi_k = h_i$$

de donde

$$dh = \frac{\partial h}{\partial F}\ dF + \frac{\partial h}{\partial G}\ dG + \sum_i h_i\ d\varphi_i\ .$$

Si consideramos ahora la 1-forma

$$\eta - dh = \left(h_F - \frac{\partial h}{\partial F}\right) dF + \left(h_G - \frac{\partial h}{\partial G}\right) dG$$

tenemos que $d\omega \wedge (\eta - dh) = 0$. De esta forma, el par (η, h) es un unfolding de ω que induce a η como deformación en el abierto U.

Por otro lado, la aplicación h es independiente de la carta (U, φ) elegida y entonces se puede extender al abierto donde $d\omega \neq 0$. Como el conjunto donde $d\omega = 0$ está dentro del lugar singular de ω, tiene codimensión menor a 2 y así h se puede extender a todo $\mathbb{P}^n$. $\square$

A.3 Formas logarítmicas

Sea $\omega_{\mathcal{L}} = (\prod_{i=1}^{s} f_i) \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ una forma logarítmica y sea $\eta_{f'_t} \in D(\omega, \overline{f})$. Si escribimos a ambas formas como

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathcal{L}} &= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \; F_i \; df_i = \sum_{i \neq t} \; \lambda_i \; F_i \; df_i \; + \; \lambda_t \; F_t \; df_t \\
\eta_{f'_t} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^{s} \lambda_k \; F_{kt} \; f'_t \; df_k \; + \; \lambda_t \; F_t \; df'_t
\end{aligned}$$

entonces los diferenciales están dados por

$$\begin{aligned}
d\omega_{\mathcal{L}} &= \sum_{i,j} \lambda_j \; F_{ij} \; df_{ij} \; = \sum_{i,j \neq t} \; \lambda_j \; F_{ij} \; df_{ij} \; + \; \sum_{j \neq t} \; (\lambda_t - \lambda_j) \; F_{jt} \; df_{jt} \\
d\eta_{f'_t} &= \sum_{j,k \neq t} \; \lambda_k \; F_{jkt} \; f'_t \; df_{jk} \; + \; \sum_{j \neq t} \; (\lambda_t - \lambda_j) \; F_{jt} \; df_j \wedge df'_t \; .
\end{aligned}$$

Propiedad A.3.1. $\omega_{\mathcal{L}} \vartriangle \eta_{f'_t} = 0$.

Demostración. Simplemente desarrollamos las expresiones

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathcal{L}} \wedge d\eta_{f'_t} = &\sum_{i,j,k \neq t} \; \lambda_i \lambda_k \; F_i F_{jkt} f'_t \; df_{ijk} \; + \sum_{i,j \neq t} \; \lambda_i (\lambda_t - \lambda_j) \; F_i F_{jt} \; df_{ij} \wedge df'_t \; + \\
&+ \sum_{j,k \neq t} \; \lambda_t \lambda_k \; F_t F_{jkt} \; f'_t \; df_{tjk} \; + \sum_{j \neq t} \; \lambda_t (\lambda_t - \lambda_j) \; F_t F_{jt} \; df_{tj} \wedge df'_t = \\
= &\sum_{i,j,k \neq t} \; \lambda_i \lambda_k \; F_i F_{jkt} f'_t \; df_{ijk} \; + \sum_{i,j \neq t} \; \lambda_i \lambda_t \; F_i F_{jt} \; df_{ij} \wedge df'_t \; + \\
&+ \sum_{j,k \neq t} \; \lambda_t \lambda_k \; F_t F_{jkt} \; f'_t \; df_{tjk} \; + \sum_{j \neq t} \; \lambda_t (\lambda_t - \lambda_j) \; F_t F_{jt} \; df_{tj} \wedge df'_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{\mathcal{L}} \wedge \eta_{f_t'} = &\sum_{i,j,k\neq t} \lambda_j\lambda_k\ F_{ij}F_{kt}f_t'\ df_{ijk}\ +\sum_{i,j\neq t} \lambda_j\lambda_t\ F_{ij}F_t\ df_{ij}\wedge df_t' + \\
&+\sum_{j,k\neq t}(\lambda_t-\lambda_j)\lambda_k\ F_{jt}F_{kt}f_t'\ df_{jtk}\ +\sum_{j\neq t}(\lambda_t-\lambda_j)\lambda_t\ F_{jt}F_t\ df_{jt}\wedge df_t'\ = \\
=-&\sum_{i,j,k\neq t}\lambda_i\lambda_k\ F_{ij}F_{kt}f_t'\ df_{ijk}\ -\sum_{i,j\neq t}\lambda_i\lambda_t\ F_{ij}F_t\ df_{ij}\wedge df_t' + \\
&-\sum_{j,k\neq t}\lambda_t\lambda_k\ F_{jt}F_{kt}f_t'\ df_{tjk}\ -\sum_{j\neq t}\lambda_t(\lambda_t-\lambda_j)\ F_{jt}F_t\ df_t\wedge df_t'\ .
\end{aligned}$$

Sumando se cancelan todos los términos (vale recordar que $df_{ij} = df_i \wedge df_j$, por lo tanto cualquier término simétrico en i, j se anula). □

Tomemos ahora $\eta_{\overline{\mu}} \in D(\omega, \overline{\lambda})$ como

$$\eta_{\overline{\mu}} = \sum_k \mu_k\ F_k\ df_k\ .$$

Su diferencial está dado por

$$d\eta_{\overline{\mu}} = \sum_k \mu_k\ F_{jk}\ df_{jk}\ .$$

Propiedad A.3.2. $\omega_{\mathcal{L}} \vartriangle \eta_{\overline{\mu}} = 0$.

Demostración. De nuevo, desarrollamos la fórmula $\omega_{\mathcal{L}} \vartriangle \eta_{\overline{\mu}}$ y obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathcal{L}} \wedge d\eta_{\overline{\mu}} &= \sum_{i,j,k} \lambda_i\lambda_k\ F_iF_{jk}\ df_{ijk} \\
d\omega_{\mathcal{L}} \wedge \eta_{\overline{\mu}} &= \sum_{i,j,k} \lambda_j\lambda_k\ F_{ij}F_k\ df_{ijk} \\
\omega_{\mathcal{L}} \vartriangle \eta_{\overline{\mu}} &= \sum_{i,j,k} (\lambda_i+\lambda_j)\mu_k\ F_iF_{jk}\ df_{ijk} = \\
&= \sum_{i<j<k} \{[(\lambda_i+\lambda_j)\mu_k - (\lambda_j+\lambda_i)\mu_k] + \\
&\quad -\ [(\lambda_i+\lambda_k)\mu_j - (\lambda_k+\lambda_i)\mu_j] + \\
&\quad +\ [(\lambda_j+\lambda_k)\mu_i - (\lambda_k+\lambda_j)\mu_i]\}\ F_iF_{jk}\ df_{ijk}\ =\ 0\ .
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[Bot72] Raoul Bott. Lectures on characteristic classes and foliations. In *Lectures on algebraic and differential topology (Second Latin American School in Math., Mexico City, 1971)*, pages 1–94. Lecture Notes in Math., Vol. 279. Springer, Berlin, 1972. Notes by Lawrence Conlon, with two appendices by J. Stasheff.

[CA94] Omegar Calvo-Andrade. Irreducible components of the space of holomorphic foliations. *Math. Ann.*, 299(4):751–767, 1994.

[CA03] Omegar Calvo Andrade. *El espacio de foliaciones holomorfas de codimensión uno*, volume 2 of *Monografías del Seminario Iberoamericano de Matemáticas [Monographs of the Seminario Iberoamericano de Matemáticas]*. Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamerica y Portugal, Tordesillas, 2003.

[CLN82] César Camacho and Alcides Lins Neto. The topology of integrable differential forms near a singularity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (55):5–35, 1982.

[CLN96] D. Cerveau and A. Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbf{C}\mathrm{P}(n)$, $n \geq 3$. *Ann. of Math. (2)*, 143(3):577–612, 1996.

[CPV09] F. Cukierman, J. V. Pereira, and I. Vainsencher. Stability of foliations induced by rational maps. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 18(4):685–715, 2009.

[CSV06] Fernando Cukierman, Marcio G. Soares, and Israel Vainsencher. Singularities of logarithmic foliations. *Compos. Math.*, 142(1):131–142, 2006.

[DGPS12] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 3-1-5 — A computer algebra system for polynomial computations. 2012. http://www.singular.uni-kl.de.

[DMM12] M. Dubinsky, C. D. Massri, and A. Molinuevo. diffAlg — A differential algebra library. 2012. https://savannah.nongnu.org/projects/diffalg.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[GKZ08] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Reprint of the 1994 edition.

[GMLN91] Xavier Gómez-Mont and Alcides Lins Neto. Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral. *Topology*, 30(3):315–334, 1991.

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. (2)*, 9:119–221, 1957.

[Gro64] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20):259, 1964.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Har10] Robin Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.

[HL71] M. Herrera and D. Lieberman. Duality and the de Rham cohomology of infinitesimal neighborhoods. *Invent. Math.*, 13:97–124, 1971.

[Jou79] J. P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[Mal76] B. Malgrange. Frobenius avec singularités. I. Codimension un. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (46):163–173, 1976.

[Mal77] B. Malgrange. Frobenius avec singularités. II. Le cas général. *Invent. Math.*, 39(1):67–89, 1977.

[Mic08] Peter W. Michor. *Topics in differential geometry*, volume 93 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[MM03] I. Moerdijk and J. Mrčun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Ser65] Jean-Pierre Serre. *Algèbre locale. Multiplicités*, volume 11 of *Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Suw83a] Tatsuo Suwa. Unfoldings of foliations with multiform first integrals. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(3):99–112, 1983.

[Suw83b] Tatsuo Suwa. Unfoldings of meromorphic functions. *Math. Ann.*, 262(2):215–224, 1983.

[Suw95] Tatsuo Suwa. Unfoldings of codimension one complex analytic foliation singularities. In *Singularity theory (Trieste, 1991)*, pages 817–865. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[Thu76] W. P. Thurston. Existence of codimension-one foliations. *Ann. of Math. (2)*, 104(2):249–268, 1976.

[War83] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.

Con mi deber he cumplido,
Y ya he salido del paso;
Pero diré, por si acaso,
Pa que me entiendan los criollos:
Todavía me quedan rollos
Por si se ofrece dar lazo.

Y con esto me despido
Sin espresar hasta cuándo;
Siempre corta por lo blando
El que busca lo siguro,
Mas yo corto por lo duro,
Y ansí he de seguir cortando.

José Hernández
Martín Fierro, versículos 7121, 7133