UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Departamento de Matemática.

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE GRADO: APLICACIONES A LA TOPOLOGIA Y AL ANÁLISIS.

Tesis de Licenciatrura en Ciencias Matemáticas
de la Universidad de Buenos Aires.

Autor: Déboli, Alberto Fernando.

Director de tesis: Dr. Amster, Pablo.

Buenos Aires, Diciembre de 2005.

Agradezco a todos aquellos que han oficiado de maestros y que mediante sus ejemplos me han transmitido el amor por la matemática a través del vivo deseo de recrearla permanentemente, en particular a mi director de tesis, Dr. Pablo Amster, por su calidez y estímulo.

Finalmente quiero agradecerle a mi padre por haberme armado de infinita paciencia y perseverancia.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

El objetivo de esta tesis consiste en hacer una presentación más o menos sintética de los elementos básicos de la teoría del grado topológico de Brouwer y su extensión a espacios vectoriales normados de dimensión infinita. Asimismo destacamos una serie de consecuencias y aplicaciones de dicha teoría en las ramas de la topología y el análisis.

La bibliografía relativa al tema en cuestión es muy extensa y los primeros artículos pueden ubicarse a fines del siglo xix; en particular sus antecedentes se refieren al trabajo de Kronecker [Kronecker,1878]. No obstante, el primer autor que dió una definición del grado de una función continua fue Brouwer en un artículo publicado en el año 1911 [Brouwer, L. E. J. 1911], a partir de allí fue denominado grado topológico de Brouwer. El enfoque que utilizó Brouwer fue el de la `topología simplicial` [Alexandroff P. and H. Hopf, 1935]. En el texto de Alexandroff se trata la teoría de grado como un caso particular de `la teoría de la intersección` y presenta consecuencias ligadas con los resultados de Kronecker.

En un célebre trabajo realizado por Leray y Schauder [Leray L. and Schauder, 1934] se define el grado topológico para ciertas funciones definidas sobre conjuntos abiertos y acotados de un espacio de Banach arbitrario. La clase de funciones para las cuales se definió fueron llamada a posteriori transformaciones de Leray-Schauder (L-S) y resultan ser perturbaciones compactas de la identidad, es decir $f = I - F$ con F compacta. Este tema será tratado en el capítulo 5 de la presente tesis. La idea central de la definición 5.1.0.27 referida al grado de Leray-Schauder consiste en aproximar la transformación compacta mediante transformaciones de rango finito y posteriormente utilizar la teoría del grado topológico de Brouwer, válida para un espacio de Banach de dimensión finita.

En 1951 Nagumo presenta un nuevo enfoque para definir el grado topológico de una función continua. Este tratamiento del tema suele llamarse `enfoque diferencial` y nosotros lo desarrollaremos en el capítulo 2, siguiendo en general los lineamientos dados por Lloyd y Amman [Lloyd N. G. 1978; Amann H. 1990.] El enfoque simplicial, y en particular el cómputo directo del grado, para el caso de polinomios en una y dos variables reales, puede encontrarse en el texto de Cronin [Cronin, J. 1964]. También destacamos siguiendo a Rothe, observación 5.1.0.29, que es posible definir el grado para una clase de funciones más generales aún, las llamadas transformaciones de Leray-Schauder generalizadas [Rothe, E. H. 1984, pag. 69]. Este texto, que aborda el tema a través del enfoque diferencial, cuenta además con una muy buena introducción. con notas y referencias históricas de interés.

El segundo capítulo comienza con la sección 2.1 en la que se dan una serie de definiciones y notaciones básicas, en particular en las definiciones 2.1.0.5 y 2.1.0.6 se fija la clase de funciones y de puntos para los cuales se definirá el grado. Se aborda en primera instancia el caso $X = \mathbb{R}^n$. El resto del capítulo se destina a la construcción del concepto. Organizaremos esa tarea, a través de cuatro fases; en la primera fase se define el grado para funciones de clase C^1 y para valores regulares (definición 2.2.0.9); en la segunda, sección 2.3, se presenta una serie de resultados auxiliares que permiten levantar la restricción de que el punto sea regular, a condición de introducir funciones de clase C^2, en la tercera se define el grado para funciones de clase C^1 y para cualquier tipo de valores (definicición 2.4.0.24) y en la cuarta se define, via el proceso de límite, el grado para las funciones continuas (definición 2.5.0.4). De esta forma la diferenciabilidad resulta ser un recurso auxiliar para abordar un concepto esencialmente topológico: el grado de Brouwer.

De acuerdo a este comentario y con las notaciones que introduciremos en la primer sección del siguiente capítulo, organizamos el trabajo a través del siguiente esquema:

1. Subsección 2.2. Definición del grado topológico para funciones $\phi \in A^r_{\mathbf{p},1}$.

2. Subsección 2.3. Resultados auxiliares previos a la definición el grado para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},1}$.

3. Subsección 2.4. Definición del grado topológico para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},1}$.

4. Subsección 2.5. Definición del grado topológico para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$.

La hipótesis de que $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$ es esencial, no así el hecho de que $\mathbf{p}$ sea un valor regular de ϕ.

La definición permite considerar al grado, denotado $\mathtt{d}$, como una función de las variables ϕ, Ω y $\mathbf{p}$. Más aún, se verá que fijado Ω, la función $\mathtt{d}$ es continua en las variables ϕ y $\mathbf{p}$. Esta función continua, bajo determinadas condiciones, da una cota inferior de la cantidad de ceros de la ecuación $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$, teorema 2.6.1.10 y corolario 2.6.1.11.

Por otro lado señalamos que la definición del grado puede darse para dominios Ω no necesariamente acotados [Nagumo, M. 1951].

En las sección 2.6 presentaremos las principales propiedades que resultan ser fundamentales para las aplicaciones de la teoría de grado; destacamos en particular los teoremas: 2.2.0.10 (normalización), 4.4.1.7 (propiedad de solución), 2.6.1.3 (punto 1: $\mathtt{d}(\cdot, \Omega, \mathbf{p})$ es localmente constante en la primer variable y punto 2: invariancia bajo homotopias), 2.6.1.5 (la función $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p})$ es localmente constante), 2.6.1.6 (dependencia de los valores sobre el borde), 2.6.1.7 (Poincaré-Bölh), y 2.6.1.8 (traslación).

En en la sección 2.7 definimos el índice de Poincaré, (definición 2.7.0.6) y en la sección 2.8 una generalización del concepto de grado para funciones continuas definidas sobre conjuntos abiertos y acotados de espacios de Banach de dimiensión finita y destacamos el teorema 2.8.0.15 de existencia y unicidad de la función grado así definida [Amann H. and Weiss, 1973].

En el tercer capítulo daremos una interpretación geométrica del concepto de grado. Más precisamente en la sección 3.1 hacemos presentes algunos conceptos referidos a formas diferenciales y resultados fundamentales necesarios para la tarea posterior. En la sección 3.2 tratamos la relación entre formas cerradas, exactas e integrales 1-formas. En ambas secciones se omitirán en general las demostraciones y su lectura podrá omitirse si se recuerdan los resultados fundamentales.

En la sección 3.3 definiremos el número de vueltas para curvas continuas en $\mathbb{R}^2$. Para ello comenzaremos definiendo una `función ángulo` asociada a una curva diferencial como la solución de un problema de valores iniciales, (3.2.2.3). Luego establecemos la definición 3.2.2.3, referida a la `variación total del ángulo de una curva diferenciable` . A continuación se define el número de vueltas alrededor de un punto para una curva diferenciable a trozos (definición 3.2.4.1). Finalmente a través de los conceptos de función ángulo y sector angular abordamos la definición 3.2.4.2, relativa al `número de vueltas alrededor de un punto` para una curva continua. Como anticipación del íntimo vínculo que existe entre los conceptos de número de vueltas y grado, se descata que el número de vueltas tiene, entre otras, las propiedades de invariancia bajo homotopías, traslación, constancia sobre componentes conexas, y además vale en ese contexto el teorema de Poincaré-Böhl, etc. Todas estas propiedades son análogas a las del grado demostradas en el segundo capítulo.

En la sección 3.4 generalizamos el concepto de `número de vueltas de un campo` de Clase C^1 definido sobre el borde $\partial\Omega$ de un conjunto $\overline{\Omega}$ abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, (definición 3.3.0.13). Eligiendo $\omega|_{S^{n-1}}$ un elemento de volúmen de la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ y su pull-back via la retracción $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, teorema 3.1.5.2, el número de vueltas del campo ϕ relativo al borde $\partial\Omega$ y alrededor del origen, mide la cantidad de veces que $\partial\Omega$ envuelve a S^{n-1} via el pull-back de $\mathbf{r} \circ \phi$.

Esta definición se realiza mediante una integral denominada `integral de Kronecker` , (definición 3.3.0.14). A continuación se prueba el resultado mas importante del capítulo, a saber la coincidencia de las nociones de número de vueltas de una campo y grado topólógico, teorema 3.3.0.15. Esta igualdad pone de manifiesto, en forma directa, que el grado sólo depende de los valores que el campo asume sobre el borde $\partial\Omega$. La propiedad de dependencia del grado respecto de los valores que asume el campo sobre el borde permite definir el `grado global` del campo, denotado `deg`, como se indica en la observación 3.3.0.16 y se formaliza en el cuarto capítulo.

Por último en la sección 3.5, luego de una serie de resultados preliminares referidos al índice de curvas continuas definidas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, se establece el grado para un campo identificado con una función holomorfa, teorema 3.4.2.1.

En la primera sección del cuarto capítulo se establece la completa analogía de la definición del grado topológico, y por lo tanto del número de vueltas, de un campo dada por el enfoque diferencial y el cohomológico de Rham. En la definición 4.3.3.1 se pone de manifiesto dicha coincidencia.

En la segunda se trata de la noción del `grado módulo 2` (definición 4.2.2.2), propiedad de congruencia análoga a la establecida con anterioridad en el corolario 2.6.1.11 pero en el contexto de las variedades; además se realiza la extensión del grado de Brouwer a funciones C^∞ definidas sobre variedades compactas, conexas, finito dimensionales (defnción 4.1.0.4), completamente análoga a la definición 2.2.0.9.

El desarrollo de las dos primeras secciones se hace en forma esquemática y no es central en esta tesis. Los asteríscos que llevan estas secciones en el índice general indican que el tratamiento de los temas respectivos es sumario. No obstante, constituyen lineas fundamentales de estudio e investigación. En los todos los demás casos el asterístico siempre indica que se trata de preliminares y que su lectura puede eventualmente omitirse.

La sección 4.3 tiene por objeto probar algunos teoremas clásicos de punto fijo, usando teoría de grado, en particular el teorema 4.4.1.6 del punto fijo de Brouwer. En la sección 4.4 retomamos la relación teoría de grado e integración compleja y veremos algunas aplicaciones al cálculo de variable compleja: el principio del argumento, (teorema4.5.0.4), teoremas 4.5.0.6 y 4.5.0.7 de Rouche, el teorema fundamental del álgebra (teorema 4.5.0.8), etc.

Finalizamos el capítulo con la sección 4.5 en la que aplicaremos la teoría de grado para probar la existencia de `soluciones T-periódicas` de sistemas asintóticamente lineales, teorema 4.6.2.1 y corolario 4.6.2.2 y el **`método de guiding`** para probar la existencia de soluciones T-periódicas de sistemas de ecuaciones ordinarias de primer orden $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$, fundamentalmente a través de teorema 4.6.3.15 de Krasnosel'skii. Finalmente se hacen algunos comentarios referidos a la utilización de la teoría de grado para probar la no existencia de órbitas periódicas no críticas de flujos planos, proposición 4.6.3.20.

El quinto capítulo está orientado a construir la extensión del grado de Brouwer a campos definidos sobre abiertos y acotados de espacios vectoriales normados de cualquier dimensión. A través del clásico ejemplo 5.0.3.22 de Leray; se muestra que tal extensión no puede realizase sobre la clase de las funciones continuas y como lo hemos anunciado anteriormente esta extensión se hace para perturbaciones compactas de la identidad, las deno minadas transformaciones de Leray-Schauder. Para realizar la definición se utiliza algunos resultados clásicos de análisis funcional tal como que toda transformación compacta definida sobre un conjunto abierto y acotado se aproxima mediante transformaciones de rango finito, teorema 5.1.0.25 y la teoría del grado de Brouwer desarrollada en el segundo capítulo. En la sección 5.2 veremos que esta extensión preserva esencialmente las propiedades que habremos desarrollado en el segundo capítulo.

En el último capítulo, el sexto, veremos algunas aplicaciones al análisis de la teoría del grado Leray-Schauder. En la sección 6.1 se probarán algunos teoremas de punto fijo, entre los cuales se encuentran el clásico teorema del punto fijo de Schuader. En la sección 6.2 demostraremos, bajo diferentes condiciones, la existencia de soluciones T-periódicas para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. En la sección 6.3 vincularemos la teoría de grado con las nociones de sub y supersoluciones para probar la existencia de soluciones T-periodicas de problemas de valores iniciales del tipo 6.3.1.1 y 6.3.2.1 en los contextos de funciones de clase C^2 y $W^{2,1}(0, 2\pi)$ respectivamente a través de los teoremas 6.3.1.2 y 6.3.2.8. Finalmente aplicamos la teoría del grado al caso del péndulo forzado en el teorema 6.3.2.9 denominado teorema de las tres soluciones.

Capítulo 2

Teoría del grado topológico de Brouwer: enfoque diferencial.

En el presente capítulo abordaremos la teoría de grado topológico desde una perspectiva analítica, debida fundamentlamente a Naguno y seguiremos en líenas generales el texto de Lloyd N.N. [Lloyd N.N., 1978]. En primer lugar se definirá el grado para funciones diferenciables con continuidad y para valores regulares, luego levantaremos la restricción de la hipótesis relativa a que el valor sea regular a expensas de suavizar las funciones y finalmente a través de un proceso de aproximación definiremos el grado para funciones continuas. Comenzaremos estudiando el caso $X = \mathbb{R}^n$ con la norma $\|\mathbf{x}\| \doteq \|\mathbf{x}\|_\infty = \text{máx}_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}$. Los resultados se podrán interpretar en el contexto de cualquier espacio normado de dimensión finita. Para espacios de dimensión finita el grado topológico se denomina de `grado de Brouwer`.

2.1. Notaciones y definiciones previas.

Comnezamos con una serie de definiciones previas, precisando cierto lenguaje con el objeto de simplificar la notación.

Trabajaremos con funciones definidas sobre la clausura de conjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Designamos esas clases mediante $\beth \doteq \{\Omega \subset \mathbb{R}^n / \Omega \texttt{ es un conjunto abierto }\}$ y $\beth_c \doteq \{\Omega \in \beth / \Omega \texttt{ es un conjunto acotado}\}$.

Definición 2.1.0.1 *Definimos el conjunto*

$$
\begin{aligned}
C^1(\overline{\Omega}) \doteq C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \doteq \{\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n : \exists \tilde{\phi} \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R}^n) \\
\textit{tal que} \quad \Omega_1, \Omega \in \beth_c, \quad \overline{\Omega} \subset \Omega_1 \quad \textit{y} \ \tilde{\phi}|_{\overline{\Omega}} = \phi\}.
\end{aligned}
\tag{2.1.0.1}
$$

Definición 2.1.0.2 *Sea $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$. Definimos la norma $\|\cdot\|_1$ en $C^1(\overline{\Omega})$ de la siguiente manera*

$$\|\phi\|_1 \doteq \sup_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}, 1\leq i\leq n} \{\|\phi_i(\boldsymbol{x})\|\} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}, 1\leq i,j\leq n} \{\left\|\frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right\|\}. \tag{2.1.0.2}$$

La bola correspondiente a la norma $\|\cdot\|_1$ con centro en ϕ y radio δ la denotaremos $B^1(\phi,\delta) \doteq \{\psi \in C^1(\overline{\Omega}) : \ \|\psi - \phi\|_1 < \delta\}$.

En ocasiones utizaremos la siguiente notación: si $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ entonces $\phi_{,i}$ o $\phi_{\mathbf{x}_i}$ designará la i-ésima derivada parcial de ϕ y si $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ entonces como es usual $\phi_{i,j} \doteq \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}_j}$ designará la derivada j-ésima del componente ϕ_i.

Análogamente podemos definir para cada k natural mayor que 1 el conjunto $C^k(\overline{\Omega})$ y a posteriori $C^k_0(\overline{\Omega})$ como el subconjunto de las funciones pertenecientes a $C^k(\overline{\Omega})$ con soporte compacto en Ω. En el caso particular que consideramos aquí, Ω acotado, el soporte es compacto de inmediato si $\mathtt{sop}(\phi) = \overline{\{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) \neq 0\}} \subset \Omega$. También podemos definir para los espacios $C^k(\overline{\Omega})$ la norma $\|.\|_k$ de manera análoga.

Definición 2.1.0.3 *Sea $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$.*

1. *Se dice que $\boldsymbol{x} \in \Omega$ es un* ***p-punto de*** *ϕ sii $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}$, sii $\boldsymbol{x} \in \phi^{-1}(\{\boldsymbol{p}\})$.*

2. *Se dice que $\boldsymbol{x} \in \Omega$ es un* ***punto crítico*** *de ϕ sii $J_\phi(\boldsymbol{x}) = \det D\phi(\boldsymbol{x}) = 0$. Un punto $\boldsymbol{x} \in \Omega$ se dice* ***regular*** *si no es crítico.*

3. *Se dice que $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ es un* ***valor regular*** *de ϕ si $\forall \boldsymbol{x} \in \phi^{-1}(\{\boldsymbol{p}\})$ $D\phi(\boldsymbol{x})$ es sobre. Un punto $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ que no es valor regular se llama* ***valor crítico*** *de ϕ.*

A continuación le daremos nombre a una serie de conjuntos con los cuales trabajaremos a lo largo de toda la construcción.

En primer lugar denotamos el conjunto de todos los puntos críticos de ϕ de la siguiente manera:

$$C_\phi \doteq C_\phi(\overline{\Omega}) \doteq \{\mathbf{x} \in \overline{\Omega} : \ \mathtt{x\ \ es\ un\ punto\ crítico\ de}\ \phi\} \tag{2.1.0.3}$$

A los efectos de hacer más compacta la notación a utilizar, damos la siguiente:

Definición 2.1.0.4 *Si $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ diremos que ϕ es "C^k* ***p-admisible*** *" si $\phi \in C^k(\overline{\Omega})$ y además $\boldsymbol{p} \notin \phi(\partial\Omega)$.*

En la definición previa podemos centrarnos en la función ϕ, su dominio Ω, o bien en el valor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$; en este sentido definimos.

Definición 2.1.0.5 *Sea $\phi \in C^k(\overline{\Omega})$ con $k \in \mathbb{N}_0$. Definimos los conjuntos:*

$$\begin{array}{l} A_{\boldsymbol{p},k}(\overline{\Omega}) \doteq \{\phi \in C^k(\overline{\Omega}) / \ \phi \ \texttt{ es } \boldsymbol{p} - \texttt{admisible}\} \ \ y \ si \ \ k \geq 1 \\ A^r_{\boldsymbol{p},k}(\overline{\Omega}) \doteq \{\phi \in A_{\boldsymbol{p},k}(\overline{\Omega}) / \ \boldsymbol{p} \ \texttt{ es un valor regular de } \phi\} \end{array} \tag{2.1.0.4}$$

Siempre que el contexto lo permita omitiremos la referencia al dominio $\overline{\Omega}$ escribiendo:

$$A_{\mathbf{p},k} \doteq A_{\mathbf{p},k}(\overline{\Omega}) \text{ y } A^r_{\mathbf{p},k} \doteq A^r_{\mathbf{p},k}(\overline{\Omega}) \tag{2.1.0.5}$$

Además para $k = 0$ podemos escribir $A_{\mathbf{p}} \doteq A_{\mathbf{p},0}$ omitiendo la referencia a la clase; sin embargo en alguna ocasión recordaremos la continuidad de la función con el subíndice 0.

Definición 2.1.0.6 *Para $k \in \mathbb{N}_0$, $\phi \in C^k(\overline{\Omega})$ fijos definimos los conjuntos:*

$$\begin{array}{rl} \mathbb{R}^n_{\phi,k} \doteq \mathbb{R}^n_{\phi(\partial\Omega),k} & \doteq \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n / \ \phi \ \texttt{ es } C^k \ \boldsymbol{p} \texttt{ - admisible } \} \\ & = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n / \ \phi \in A_{\boldsymbol{p},k}\} \ \ y \ si \ k \geq 1 \\ \mathbb{R}^n_{r,\phi,k} \doteq \mathbb{R}^n_{r,\phi(\partial\Omega),k} & \doteq \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n_{\phi(\partial\Omega),k} / \boldsymbol{p} \ \texttt{ es un valor regular de } \phi\} \\ & = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n / \ \phi \in A^r_{\boldsymbol{p},k}\} \end{array} \tag{2.1.0.6}$$

Nuevamente, si el contexto lo permite, simplificaremos la notación escribiendo:

$$\mathbb{R}^n_{r,\phi,k} \doteq \mathbb{R}^n_{r,\phi(\partial\Omega),k} \text{ y } \ \mathbb{R}^n_{\phi,k} \doteq \mathbb{R}^n_{\phi(\partial\Omega),k} \tag{2.1.0.7}$$

Además también podremos omitir el subíndice k que se refiere a la clase de ϕ si el contexto lo permite.

Observemos que

$$\mathbb{R}^n_{\phi,k} = [\phi(\partial\Omega)]^c$$

y

$$\mathbb{R}^n_{r,\phi,k} = \mathbb{R}^n_{\phi(\partial\Omega),k} - \phi(C_\phi) = [\phi(\partial\Omega)]^c \cap [\phi(C_\phi)]^c = [\phi(C_\phi) \cup \phi(\partial\Omega)]^c.$$

También es claro que para $k \geq 1$

$$A^r_{\mathbf{p},k} \subset A_{\mathbf{p},k} \subset C^k(\overline{\Omega}) \ \text{ y } \ \mathbb{R}^n_{r,\phi,k} \subset \mathbb{R}^n_{\phi,k} \subset \mathbb{R}^n.$$

Asimismo se ve que si $k = 0$ entonces

$$A_{\mathbf{p}} \subset C^0(\overline{\Omega}) \ \texttt{y} \ \mathbb{R}^n_\phi \subset \mathbb{R}^n.$$

Con esta notación enunciados tales como: ⌜Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase $C^k(\overline{\Omega})$ y $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$ `entonces` P⌝. se simplifican escribiendo ⌜`Si` $\phi \in A_{\mathbf{p},k}$ entonces P.⌝, etc.

Para nuestros fines la referencia a la diferenciabilidad es auxiliar y trabajeremos con $k = 1$ y $k = 2$ para abordar el caso $k = 0$.

Ahora comenzamos a desarrollar el esquema (1) de las cuatro fases que hemos presentado en la introducción para definir el grado de una función $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$.

2.2. Definición del grado topológico para funciones $\phi \in \boldsymbol{A}^r_{\mathbf{p},1}$.

La primera fase es directa y se basa en el siguiente hecho: si $\mathbf{p}$ es un valor crítico entonces el conjunto de los $\mathbf{p}$-puntos puede ser infinito, pero si $\mathbf{p}$ es un valor regular, entonces el conjunto de los $\mathbf{p}$-puntos es finito.

Teorema 2.2.0.7 *(La preimagen de un valor regular es finita).*
Sea $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ y $\boldsymbol{p}$ un valor regular de ϕ. Entonces el conjunto $\phi^{-1}(\{\boldsymbol{p}\})$ es finito.

Demostración. Puesto que $\phi^{-1}(\mathbf{p})$ es cerrado en $\overline{\Omega}$ que es compacto bastará con ver que que si $\mathbf{x}_0 \in \phi^{-1}(\mathbf{p})$ entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto aislado. Supongamos que no; entonces existe una sucesión $\{\mathbf{x}_n\} \subset \phi^{-1}(\mathbf{p})$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}_0$. El desarrollo de Taylor de orden uno permite escribir:

$$0 = \phi(\mathbf{x}_n) - \phi(\mathbf{x}_0) = D\phi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|)$$

esto significa que

$$D\phi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0) = o(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|)$$

y por lo tanto para todo $r > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\|D\phi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)\| < \frac{1}{2} r \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|$$

Ahora bien, siendo $\mathbf{p}$ un valor regular $D\phi(\mathbf{x}_0)$ es inversible de manera que existe $r > 0$ tal que para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vale que $\|D\phi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\| \geq r \|\mathbf{u}\|$ y esto contradice lo anterior. ■

Observación 2.2.0.8 Más brevemente, el resultado del teorema 2.2.0.7 se obtiene como consecuencia del teorema de la función inversa. Para cada $\mathbf{x} \in \phi^{-1}(\mathbf{p})$ existe un entorno $V_\mathbf{x}$ difeomorfo a $W_\mathbf{p} \doteq \phi(V_\mathbf{x})$, de forma tal que en cada entorno $V_\mathbf{x}$ existe un sólo $\mathbf{p}$-punto de ϕ; esto demuestra que los $\mathbf{p}$-puntos son aislados. Luego se observa que $\{V_\mathbf{x}\}_{\mathbf{x}\in\phi^{-1}(\mathbf{p})}$ cubre a $\phi^{-1}(\mathbf{p}) \subset \overline{\Omega}$. Finalmente siendo $\overline{\Omega}$ compacto lo es $\phi^{-1}(\mathbf{p})$ y podemos extraer un subcubrimiento finito de $\phi^{-1}(\mathbf{p})$.

Ahora estamos en condiciones de definir el grado relativo a Ω para funciones C^1 $\mathbf{p}$-admisibles con $\mathbf{p}$ un valor regular.

Definición 2.2.0.9 *Si $\phi \in A^r_{\boldsymbol{p},1}$ definimos el* **`grado topológico de` ϕ `relativo a` Ω `en p`** *de la siguiente manera*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\phi^{-1}(\{\boldsymbol{p}\})} \texttt{sig} J_\phi(\boldsymbol{x}), \tag{2.2.0.8}$$

donde `sig` *designa la función signo y $J_\phi(\boldsymbol{x}) \doteq \det D\phi(\boldsymbol{x})$.*

Aunque su demostración es elemental la siguiente propiedad es de suma importancia para establecer la existencia de soluciones de la ecuación $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$. Posteriormente se verá el lugar que ocupa en la teoría y sus aplicaciones.

Teorema 2.2.0.10 *`(Propiedad de normalización).`*
Si $\phi = I$ es la función identidad entonces.

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \begin{cases} 1 \; si & \boldsymbol{p} \in \Omega \\ 0 \; si & \boldsymbol{p} \notin \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.2.0.9}$$

Demostración. Es claro que si $\mathbf{p} \notin \overline{\Omega}$ entonces $\phi^{-1}(\{\mathbf{p}\}) = \varnothing$ y por lo tanto $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = 0$. Por otro lado si $\mathbf{p} \in \Omega$ entonces $\phi^{-1}(\{\mathbf{p}\}) = \{\mathbf{p}\}$ y $J_\phi(\mathbf{p}) = 1$; luego $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = 1$. ■

Algunos ejemplos elementales.
Finalizamos esta sección con una serie de comentarios básicos. Desde luego que excluiremos el cálculo del grado en los valores críticos; pero esta limitación será superada en las subsecciones siguientes.

Ejemplo 2.2.0.11 Sea $\Omega = (-1, 1)$ y $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $f(x) = x^2$. En este caso $\partial\Omega = \{-1, 1\}$ y $\phi(\partial\Omega) = \{1\}$; por otro lado $C_\phi = \{0\}$ y por lo tanto $\phi(C_\phi) = \{0\}$. Entonces $\mathbb{R}_{r,\phi,1} = \mathbb{R}/\{0, 1\}$ y la función grado está definida, de acuerdo a 2.2.0.9, para todo valor $p \notin \{0, 1\}$. Luego extenderemos la definición de modo que el grado también estará definido en el valor 0. Se ve fácilmente que para dichos valores $\mathtt{d}(\phi, \Omega, p) = 0$.

Notemos, por ejemplo, que la ecuación $\phi(x) = \frac{1}{2}$ tiene exactamente dos soluciones: $\phi^{-1}\{\frac{1}{2}\} = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$; sin embargo

$$0 = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \frac{1}{2}) = \mathtt{sig}(\phi'(-\frac{1}{\sqrt{2}})) + \mathtt{sig}(\phi'(-\frac{1}{\sqrt{2}})) = -1 + 1 = 0.$$

Los signos se compensan y el grado pierde la noción de cantidad de soluciones, puesto que su cálculo es una medida orientada.

Ejemplo 2.2.0.12 Sea $\Omega = (0,1)$ y $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $\phi(x) = x^2$. Por un lado $C_\phi = \emptyset$ de manera que $\phi(C_\phi) = \emptyset$ Por otro lado $\partial\Omega = \{0,1\}$ y por lo tanto $\phi(\partial\Omega) = \{0,1\}$. Luego en este caso para todo $p \in \mathbb{R}_{r,\phi,1} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$ está definido el grado de ϕ y se ve fácilmente que

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & \mathtt{si}\ p \in (0,1) \\ 0 & \mathtt{si}\ p \in (-\infty, 0) \cup (1,\infty) \end{cases} \tag{2.2.0.10}$$

Es claro, a partir del hecho de que la función $\phi : (0,1) \longrightarrow (0,1)$ es biyectiva, que para cada $p \in (0,1)$ la ecuación $\phi(x) = p$ tiene una única solución. Esto se ve reflejado en el valor del grado. Ahora si fijamos $p \in (0,1)$, es fácil observar en este caso que tras una pequeña perturbación de la función ϕ, digamos ϕ_ε con $\varepsilon \ll 1$ de forma tal que permanezca cerca de ϕ, la ecuación $\phi_\varepsilon(x) = p$ también tiene una única solución.

Veremos más adelante que el grado es invariante bajo pequeñas perturbaciones de la variable ϕ. Esta propiedad se utiliza estratégicamente para obtener información acerca de la existencia de soluciones de una ecuación $\phi_\varepsilon = p$ y eventualmente de la unicidad. Si de alguna manera pudieramos calcular $\mathtt{d}(\phi, \Omega, p)$ aunque no así $\mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega, p)$ entonces con base en la invariancia bajo perturbaciones, es decir en el hecho de que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, p) = \mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega, p)$ se puede obtener la información buscada. Bajo determinadas condiciones, que precisaremos más adelante, esto es lo que sucede. Uno de nuestros objetivos es establecer esta propiedad en un contexto más general y menos restrictivo, es decir para $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$.

También señalamos que estos dos ejemplos triviales muestran que el grado es efectivamente relativo al dominio Ω. Para ciertos valores p, más precisamente para $p \in (0,1)$, en el primer ejemplo el grado vale 0 y en el segundo vale 1.

Otra cuestión que trabajaremos en la próxima sección y que resulta fundamental es el hecho de que el grado permanece invariante en las componentes conexas del complemento de los valores criticos.

Ejemplo 2.2.0.13 Sea $\Omega = (-1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y $\phi : \ \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $\phi(x) = x^3 - x + \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Entonces $\partial\Omega = \{-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ y $\phi(\partial\Omega) = \{0, \frac{2}{3\sqrt{3}}\}$. Por otro lado $C_\phi = \{-\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ y $\phi(C_\phi) = \{\frac{4}{3\sqrt{3}}\}$. Luego para $p \notin \{0, \frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}\}$ está definido el grado. En este caso

$$\begin{gathered} \mathbb{R}_\phi = (-\infty, 0) \cup (0, \tfrac{2}{3\sqrt{3}}) \cup (\tfrac{2}{3\sqrt{3}}, \infty) \ \text{ y} \\ \mathbb{R}_{r,\phi} = \mathbb{R}_\phi - \phi(C_\phi) = \mathbb{R}_\phi - \{\tfrac{4}{3\sqrt{3}}\} = \\ (-\infty, 0) \cup (0, \tfrac{2}{3\sqrt{3}}) \cup (\tfrac{2}{3\sqrt{3}}, \tfrac{4}{3\sqrt{3}}) \cup (\tfrac{4}{3\sqrt{3}}, \infty) \end{gathered} \tag{2.2.0.11}$$

y aplicando la definición se ve que

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, p) = \begin{cases} 0 & \mathtt{si} \ p \in (-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3\sqrt{3}}, \infty) \\ -1 & \mathtt{si} \ p \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}}) \\ 0 & \mathtt{si} \ p \in (\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}) \end{cases} \tag{2.2.0.12}$$

El conjunto $\mathbb{R}_{r,\phi}$ tiene 4 componentes conexas, y en cada uno de elllos el valor del grado es constante. Por otro lado $\mathbb{R}_\phi$ tiene sólamente tres. Desde luego que el grado aún no lo tenemos definido en $p = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ pero si la extensión de la función grado fuera constante en las componentes conexas de $\mathbb{R}_\phi$ entonces el grado en $p = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ debiera ser 0 y en efecto esto es lo que sucede. En la próxima sección trataremos precisamente ese tema.

También resulta inmediato de la definición dada que si la función ϕ es regular e inyectiva entonces el valor del grado es ± 1 o bien 0; si $\mathbf{p}$ está en la imagen entonces el grado vale exactamente 1 si preserva la orientación y -1 si la invierte, en el otro caso, cuando $\mathbf{p}$ no está en la imagen, el grado vale cero. Ahora proseguimos la tarea de la construcción del grado para funciones continuas.

Para extender la noción de grado a una función continua necesitamos establecer tres resultados fundamentales:

1. Si $\phi \in A^r_{\cdot,1}$ entonces existe $\delta \ll 1$ tal que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \cdot)|_{B^1(\phi,\delta)}$ es constante. La constante δ depende en general tanto de $\mathbf{p}$ como de ϕ.

2. Si $\phi \in A^r_{\cdot,1}$ entonces $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \cdot)$ es constante sobre los valores regulares de cada componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$.

3. Si $\phi \in A_{\cdot,1}$ entonces $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \cdot)$ es constante sobre cada componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$.

Observación 2.2.0.14 Luego de establecer el segundo resultado fundamental podremos definir el grado para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},1}$ y luego de establecer el tercero podremos definir el grado para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$.

2.3. Resultados auxiliares previos a la definición del grado para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},1}$. Primer y segundo resultados fundamentales.

De acuerdo al comentario anterior esta sección es una etapa de transición pues acerca los resultados necesarios para la definición del grado de una función $\phi \in A_{\mathbf{p},1}$; para ello demostraremos los dos primeros resutaldos.

La demostración del primer resultado no requiere de resultados previos. Para el segundo se necesitarán además del clásico teorema de Sard de tres lemas y una representación integral de la función grado.

Teorema 2.3.0.15 *(Primer resultado fundamental.)*
Sea $\phi \in A^r_{\boldsymbol{p},1}$. Existe $\delta = \delta(\phi, \boldsymbol{p}) > 0$ tal que si $\psi \in B^1(\phi, \delta)$ entonces $\psi \in A^r_{\boldsymbol{p},1}$ y

$$\mathtt{d}(\psi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}). \tag{2.3.0.13}$$

Demostración. En primer lugar consideraremos el caso en el que $\phi^{-1}(\mathbf{p})$ es vacío y luego el caso correspondiente a $\phi^{-1}(\mathbf{p})$ no vacío.

1. Supongamos que $\phi^{-1}(\mathbf{p}) = \emptyset$. En tal caso elegimos $\delta = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{p}; \phi(\overline{\Omega}))$ donde ρ designa la distancia asociada a la norma infinito en $\mathbb{R}^n$ notada $\|\cdot\|$, de manera que para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ se tiene que

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| \geq 2\delta.$$

Por otro lado si $\psi \in B^1(\phi, \delta)$ entonces para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ se tiene

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\| \leq \|\phi - \psi\|_1 < \delta.$$

Ahora de la desigualdad

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| \leq \|\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\| + \|\psi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\|$$

se deduce que para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ vale

$$\|\psi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| \geq \|\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| - \|\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\| > 2\delta - \delta = \delta.$$

Esto muestra que $\psi \in A^r_{\mathbf{p},1}$ y en particular que ψ no tiene $\mathbf{p}$-puntos en $\overline{\Omega}$ y en consecuencia vale el resutado:

$$\mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = 0.$$

2. Si la preimagen no es vacia entonces de acuerdo al teorema 2.2.0.7 podemos suponer que

$$\phi^{-1}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, ..., \mathbf{x}_n\}.$$

Elegimos r de forma tal que las bolas $B(\mathbf{x}_i, r)$ sean disjuntas y no corten al conjunto $\partial\Omega \cup C_\phi$

Consideramos ahora la unión de todas las bolas $B(r) \doteq \bigcup_{i=1}^n B(\mathbf{x}_i, r)$, $L_i = |J_\phi(\mathbf{x}_i)|$ y

$$L = \min_{\{1 \leq i \leq n\}} \{L_i\}.$$

Podemos elegir r tal que si $\mathbf{x} \in B(r)$ entonces

$$|J_\phi(\mathbf{x})| \geq \frac{2}{3} L$$

de la siguiente manera: por la conservación del signo de la función $|J_\phi|$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ existe r_i tal que si $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_i, r_i)$ entonces

$$|J_\phi(\mathbf{x})| \geq \frac{2}{3} L_i \geq \frac{2}{3} L,$$

luego basta con elegir $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$.

También teniendo en cuenta la definición de la norma $\|\cdot\|_1$, la compacidad de $\overline{\Omega}$ y la continuidad de $J.$, podemos elegir δ_1 de forma tal que si $\psi \in B^1(\phi, \delta_1)$ entonces para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ se tenga

$$|J_\phi(\mathbf{x}) - J_\psi(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{3} L.$$

De lo anterior concluimos que si $\mathbf{x} \in B(r)$ y $\psi \in B^1(\phi, \delta_1)$ entonces

$$|J_\psi(\mathbf{x})| \geq |J_\phi(\mathbf{x})| - |J_\phi(\mathbf{x}) - J_\psi(\mathbf{x})| \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) L = \frac{1}{3} L.$$

En particular se deduce que para todo $i = 1, 2, ..., n$ $\psi(B(\mathbf{x}_i, r))$ es un conjunto de valores regulares.

El resto de la prueba consiste en aplicar el teorema de contracción para probar que efectivamente ψ tiene un solo $\mathbf{p}$-punto en cada $B(\mathbf{x}_i, r)$.

Es claro que basta con probarlo para una bola $B(\mathbf{x}_i, r)$ arbitraria, de manera que fijamos un ínidice i y hacemos los siguientes cambios de variables

$$\mathbf{x}_0 \doteq \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{z} \doteq \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \text{y} \quad \mathbf{h} \doteq \phi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0)$$

para simplificar la notación.

Queremos estudiar las soluciones de la ecuación $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$ es decir

$$\psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_0) = \phi(\mathbf{x}_0) + \psi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0) = \psi(\mathbf{x}_0) + \phi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0) = \psi(\mathbf{x}_0) + \mathbf{h}$$

o equivalentemente las soluciones de

$$\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{h} \tag{2.3.0.14}$$

en $B \doteq B(\mathbf{x}_0, r)$.

Veremos que esta ecuación representa un problema de punto fijo.

En primer lugar reescribimos la ecuación (2.3.0.14) de la siguiente forma

$$\psi(\mathbf{z} + \mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0) - D\psi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{z} + D\psi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{h}$$

y poniendo

$$T(\mathbf{z}) \doteq \psi(\mathbf{z} + \mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0) - D\psi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{z}$$

podemos expresarla así

$$T(\mathbf{z}) + D\psi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{h}.$$

$D\psi(\mathbf{x}_0)$ es un operador lineal inversible puesto que $|J_\psi| \geq \frac{1}{3}L$ en $B(r)$. Si denotamos a su inversa con U entonces la ecuación se transforma en

$$U(\mathbf{h} - T(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$$

y si ponemos

$$W(\mathbf{z}) = U(\mathbf{h} - T(\mathbf{z}))$$

la ecuación (2.3.0.14) representa en definitiva un problema de punto fijo

$$W(\mathbf{z}) = \mathbf{z}. \tag{2.3.0.15}$$

Ahora veremos que $W(B) \subset B$ y más aún que W es una contracción, luego por el teorema de la contracción habrá un único punto fijo y ψ tendrá un único **p**-punto.

Veamos que W es una contracción y que B es invariante. Consideremos la identidad

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{d\theta}\psi_i(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{z} + (1-\theta)\mathbf{y}) &= D\psi_i(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{z} + (1-\theta)\mathbf{y})(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)\psi_{i,j}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{z} + (1-\theta)\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{2.3.0.16}$$

e integremos sobre el segmento $[0,1]$

$$\begin{gathered} \psi_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) - \psi_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) \\ = \textstyle\int_0^1 \frac{d}{d\theta}\psi_i(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{z} + (1-\theta)\mathbf{y})d\theta \\ = \textstyle\sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)\int_0^1 \psi_{i,j}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{z} + (1-\theta)\mathbf{y})d\theta. \end{gathered} \tag{2.3.0.17}$$

Ahora teniendo en cuenta la definición de T obtenemos

$$\begin{gathered} (T(\mathbf{z}) - T(\mathbf{y}))_i = T_i(\mathbf{z}) - T_i(\mathbf{y}) \\ = \psi_i(\mathbf{z} + \mathbf{x}_0) - \psi_i(\mathbf{x}_0) - D\psi_i(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{z} - \psi_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) + \psi_i(\mathbf{x}_0) + D\psi_i(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{y} \\ = \psi_i(\mathbf{z} + \mathbf{x}_0) - \psi_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - D\psi_i(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \\ = \psi_i(\mathbf{z} + \mathbf{x}_0) - \psi_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - \textstyle\sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)\int_0^1 \psi_{i,j}(\mathbf{x}_0)d\theta \\ = \textstyle\sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)\int_0^1 \psi_{i,j}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{z} + (1-\theta)\mathbf{y})d\theta - \sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)\int_0^1 \psi_{i,j}(\mathbf{x}_0)d\theta \\ = \textstyle\sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)\int_0^1[\psi_{i,j}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{z} + (1-\theta)\mathbf{y}) - \psi_{i,j}(\mathbf{x}_0)]d\theta. \end{gathered} \tag{2.3.0.18}$$

Consideremos el operador lineal acotado U inverso de $D\psi(\mathbf{x}_0)$, con norma $\|U\| = \{\|U(\mathbf{h})\| : \|h\| = 1\}$. Entonces $\|U(\mathbf{h})\| \leq \|U\|\cdot\|\mathbf{h}\|$. En particular considerando $\psi \in B^1(\phi, \delta_1)$ se verifica que $\|U(\mathbf{h})\| = \|U(\phi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0))\| \leq \|U\|\,\|(\phi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0))\| < \|U\|\,\delta_1$. Luego si $\psi \in B^1(\phi, \delta)$ con $\delta < \delta_1$ y $\|\mathbf{z}\|, \|\mathbf{y}\| \leq r$ podemos acotar la ecuación (2.3.0.18) y obtener:

$$\|T(\mathbf{z}) - T(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|\,[O(\delta) + O(r)] \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|\,K[\delta + r]$$

donde $K = K(\mathbf{x}_0, \phi)$ es una constante positiva independiente de δ y r.

Entonces

$$\|W(\mathbf{z}) - W(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|\,K[\delta + r]\,\|U\| \tag{2.3.0.19}$$

y con $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ obtenemos

$$\|W(\mathbf{z})\| \leq K[\delta + r]\,\|U\|\,\|\mathbf{z}\| \leq \{K\delta\,\|U\| + Kr\,\|U\|\}\,\|\mathbf{z}\| \leq C\,\|\mathbf{z}\| \tag{2.3.0.20}$$

donde $C = K\delta\,\|U\| + Kr\,\|U\|$ es constante.

Ahora eligiendo r suficientemente pequeño de forma tal que $Kr\,\|U\| < \frac{1}{3}$, $\delta \leq \delta_1$ y $K\delta\,\|U\| < \frac{1}{3}$ se deduce que $C < 1$. Luego de acuerdo a las ecuaciones (2.3.0.19) y de (2.3.0.20) se concluye B es invariante y que W es una contracción. Finalmente observando que $J_\phi(\mathbf{x}_i) = J_\psi(\mathbf{x}_i)$ y que el argumento no depende del índice i se obtiene el resultado buscado. ■

Observación 2.3.0.16 De este resultado se deduce que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \cdot)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^n_{r,\phi,1}$. En ocasiones aplicaremos el resultado en este sentido.

Ahora comenzamos el trabajo preliminar a la demostración del segundo resultado fundamental.

Los `tres lemas` que siguen son técnicos, aunque en sí mismos de interés.

Lema 2.3.0.17 *Sea $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ y $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ tal que **sop**$\psi \cap \phi(\partial\Omega) = \emptyset$. Entonces existe una función $\varphi \in C^1_0(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\boldsymbol{div}(\varphi)(\boldsymbol{x}) = J_\phi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{div}(\psi))(\phi(\boldsymbol{x})) \tag{2.3.0.21}$$

Demostración. Consideremos la matriz $M = \{\phi_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n}$ y el cofactor asociado al elemento $\phi_{i,j}$, es decir $A_{ij}(\mathbf{x}) = (-1)^{i+j}\det(M(i|j))$, donde $M(i|j)$ designa la matriz obtenida de M suprimiendo la fija i y la columna j.

Para cada $j = 1, 2, ..., n$ se define

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\phi(\mathbf{x}))A_{ij}(\mathbf{x})$$

y se propone la función $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$.

Con esta definición se tiene que $\varphi \in C^1_0(\overline{\Omega})$ puesto que ϕ tiene soporte en Ω y cada ψ_i es de soporte compacto.

Ahora probaremos el lema

$$\begin{gathered}\mathtt{div}(\varphi)(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{j=1}^n \varphi_{j,j} = \\ \textstyle\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi_i(\phi\mathbf{x})A_{ij}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}_j} = \\ \textstyle\sum_{j=1}^n \{\sum_{i=1}^n \{\sum_{k=1}^n \psi_{i,k}(\phi(\mathbf{x}))\phi_{k,j}(\mathbf{x})A_{ij}(\mathbf{x})\} + \psi_i(\phi(\mathbf{x}))A_{ij,j}(\mathbf{x})\} = \\ \textstyle\sum_{i,j,k=1}^n \psi_{i,k}(\phi(\mathbf{x}))\phi_{k,j}(\mathbf{x})A_{ij}(\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^n \psi_i(\phi(\mathbf{x}))A_{ij,j}(\mathbf{x})\}\end{gathered} \tag{2.3.0.22}$$

Por un lado se puede ver [Deimling K., 1980] que para cada $i = 1, 2, ..., n$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij,j}(\mathbf{x}) = 0,$$

de manera que se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{n} \psi_i(\phi(\mathbf{x}))A_{ij,j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \psi_i(\phi(\mathbf{x})) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} A_{ij,j}(\mathbf{x})}_{=0} \right\} = 0.$$

Por otro lado si desarrollamos el determinante por la fila i obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_{k,j}(\mathbf{x})A_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ki}J_\phi$$

de forma tal que obtenemos en definitiva que vale (2.3.0.21)

$$\begin{aligned} \mathtt{div}(\varphi)(\mathbf{x}) &= \textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n} \psi_{i,k}(\phi(\mathbf{x}))\phi_{k,j}(\mathbf{x})A_{ij}(\mathbf{x}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\{\psi_{i,k}(\phi(\mathbf{x}))\phi_{k,j}(\mathbf{x})A_{ij}(\mathbf{x})\} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\{\psi_{i,k}(\phi(\mathbf{x}))\sum_{j=1}\{\phi_{k,j}(\mathbf{x})A_{ij}(\mathbf{x})\}\} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\{\psi_{i,k}(\phi(\mathbf{x}))\delta_{ki}J_\phi\} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \psi_{i,i}(\phi(\mathbf{x}))J_\phi(\mathbf{x}) = J_\phi(\mathbf{x})(\mathtt{div}\psi)(\phi\mathbf{x}). \ \blacksquare \end{aligned} \tag{2.3.0.23}$$

Lema 2.3.0.18 *Sea $f \in C_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $K = \boldsymbol{sop} f$ y supongamos para algún $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se tiene que el tubo*

$$A \doteq \{k + t\cdot\boldsymbol{x}_0 : \quad k \in K, \quad t \in [0,1]\} = \bigcup_{t\in[0,1]} K + t\cdot\boldsymbol{x}_0 \subset \Omega.$$

Entonces existe $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\boldsymbol{div}(\psi)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \tag{2.3.0.24}$$

Demostración. Definimos la función $F : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^1 f(\mathbf{x} - t\cdot\mathbf{x}_0)dt,$$

y proponemos la función

$$\psi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_0 = (F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_0^1, F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_0^2, ..., F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_0^n)$$

En primer lugar verificaremos que $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ y para ello observamos que si $t \in [0,1]$ y $\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{x}_0 \notin K$ entonces $f(\mathbf{x} - t\mathbf{x}_0) = 0$ pues $K =$ sop f. Luego si $\mathbf{x} \notin \bigcup_{t\in[0,1]} K + t \cdot \mathbf{x}_0$ entonces $F(\mathbf{x}) = 0$ y por lo tanto sop $F \subset A \subset \Omega$ y $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Ahora verificaremos que se cumple la igualdad (2.3.0.24) a través del cálculo

$$\begin{aligned} \mathtt{div}(\psi)(\mathbf{x}) &= \textstyle\sum_{i=1}^n F_{,i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_0^i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n (\int_0^1 f_{,i}(\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{x}_0)dt)\mathbf{x}_0^i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n (\int_0^1 f_{,i}(\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0^i dt) \\ &= \textstyle\int_0^1 \left\{\sum_{i=1}^n f_{,i}(\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0^i\right\} dt \\ &= \textstyle\int_0^1 \left[-\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right] dt \\ &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{2.3.0.25}$$

Lema 2.3.0.19 *Sea $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $K =$ **sop**f. Supongamos que para algún arco γ se tiene que el tubo*

$$A \doteq \{k + \gamma(s) : \quad k \in K, \quad s \in [0,1]\} = \bigcup_{s\in[0,1]} K + \gamma(s) = \bigcup_{s\in[0,1]} K_s \subset \Omega.$$

Entonces existe $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\boldsymbol{div}(\psi)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \gamma(0)) - f(\boldsymbol{x} - \gamma(1)) \tag{2.3.0.26}$$

Demostración. Para $s, t \in [0,1]$ se define la siguiente relación de equivalencia: $s \sim t$ sii existe $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\mathtt{div}(\psi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \gamma(s)) - f(\mathbf{x} - \gamma(t)).$$

Si se prueba que las clases son abiertas, por la conexión del conjunto $[0,1]$, se tendrá que existe una sóla clase y en definitiva $0 \sim 1$. Finalmente de esto se deduce la tesis.

Para probar que cada clase es abierta fijamos s y definimos la función $f_s(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \gamma(s))$ de manera que el sop$f_s = K_s \subset \Omega$. Además, para dicho s, definimos el conjunto $K_s' = k + \theta \cdot h_t : k \in K_s, \theta \in [0,1]$ donde $h_t = \gamma(t) - \gamma(s)$.

Como K_s es un compacto de Ω entonces $\rho(K_s, \partial\Omega) > 0$ y por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|t - s| < \varepsilon$ entonces $|h_t| < \frac{1}{2}\rho(K_s, \partial\Omega)$ y $K_s' \subset \Omega$.

Ahora aplicando el lema 2.3.0.18 obtenemos que existe $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que si $|s-t| < \varepsilon$ entonces

$$\begin{array}{c} \mathtt{div}(\psi)(\mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}) - f_s(\mathbf{x} - h_t) = f(\mathbf{x} - \gamma(s)) - f(\mathbf{x} - h_t - \gamma(s)) = \\ f(\mathbf{x} - \gamma(s)) - f(\mathbf{x} - \gamma(t) + \gamma(s) - \gamma(s)) = f(\mathbf{x} - \gamma(s)) - f(\mathbf{x} - \gamma(t)) \end{array} \tag{2.3.0.27}$$

En definitiva las clases son abiertas y cerradas a la vez y de ahí el resultado. ■

El próximo paso es dar una representación integral del grado. Señalamos que tal representación puede ser utilizada como punto de partida para definir el grado; este enfoque puede verse en el texto de Heinz [Heinz E. 1959].

Teorema 2.3.0.20 ***(Una repesentación integral del grado).***
Sean $\phi \in A^r_{\boldsymbol{p},1}$ y

$$f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua tal que $K_\varepsilon \doteq \boldsymbol{sop} f \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1.$$

Entonces existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\phi, \boldsymbol{p})$, tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ entonces

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \int_\Omega f_\varepsilon(\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}) J_\phi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{2.3.0.28}$$

Demostración. Observemos en primer lugar que existen funciones $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas con $\mathtt{sop} f \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ [(1) Spivak, M 1979]. Si $\mathbf{p}$ es un valor regular de ϕ entonces $\phi^{-1}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño podemos elegir entornos abiertos de los puntos $\mathbf{x}_i$, $N_i \doteq N_i(\mathbf{x}_i, \varepsilon)$, $\quad i = 1, 2, ..., n$ disjuntos con $\partial\Omega$ de forma tal que $\phi(N_i) = B(p, \varepsilon)$, y que $\phi|_{N_i}$ sea inyectiva. En consecuencia $J_{\phi|_{N_i}} \neq 0$.

Teniendo en cuenta que

$$\mathtt{sop} f_\varepsilon(\phi(\cdot) - \mathbf{p}) \subset \bigcup_{i=1}^n N_i$$

el resultado se sigue del cálculo pues en primer lugar

$$\int_\Omega f_\varepsilon(\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}) J_\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \int_{N_i} f_\varepsilon(\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}) J_\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

y luego haciendo un cambio de variable y teniendo en cuenta que J_ϕ es de signo constante en cada N_i se tiene que

$$\begin{array}{c}\int_\Omega f_\varepsilon(\phi(\mathbf{x})-\mathbf{p})J_\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\\ \sum_{i=1}^n \int_{N_i} f_\varepsilon(\phi(\mathbf{x})-\mathbf{p})J_\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\\ \sum_{i=1}^n \mathrm{sig}J_\phi(\mathbf{x}_i)\int_{K_\varepsilon} f_\varepsilon(\mathbf{y})d\mathbf{y}=\\ \sum_{i=1}^n \mathrm{sig}J_\phi(\mathbf{x}_i)=\mathtt{d}(\phi,\Omega,\mathbf{p}).\ \blacksquare\end{array} \tag{2.3.0.29}$$

Finalmente estamos en condiciones de probar el segundo resultado fundamental. La pregunta a la cual responde este teorema es la siguiente: ¿Cómo varia el grado si se perturba la variable referida al punto $\mathbf{p}$ sin escapar de la componente conexa en $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$ a la que pertenece.? Mientras que el primer resultado fundamental implica que la función grado $\mathtt{d}(\phi,\Omega,\cdot)$ es constante en cada componente conexa del conjunto $\mathbb{R}^n_{r,\phi,1}$ el segundo muestra que es constante en cada componente conexo del conjunto $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$. Desde luego que estamos considerando el grado en valores regulares, de manera que lo que afirma el resultado es que el grado es constante sobre todos los valores regulares que están en la misma componente de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$. Además observemos que en el contexto del teorema de representación recién demostrado puede ocurrir que $\varepsilon_0 \longrightarrow 0$ cuando $\mathbf{p}$ tiende a un punto del cunjunto $\phi(C_\phi)$; esto muestra que la demostración no es inmediata a partir de tal representación.

Teorema 2.3.0.21 *(Segundo resultado fundamental).*
Si $\phi \in A^r_{\boldsymbol{p}_1,1} \cap A^r_{\boldsymbol{p}_2,1}$ tal que $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1$ son dos puntos que están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$ entonces

$$\boldsymbol{d}(\phi,\Omega,\boldsymbol{p}_0)=\boldsymbol{d}(\phi,\Omega,\boldsymbol{p}_1) \tag{2.3.0.30}$$

Observación 2.3.0.22 *Este teorema afirma que si Θ designa una componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$ y Θ^r el conjunto de todos los valores regulares de ϕ que están en Θ entonces $\boldsymbol{d}(\phi,\Omega,\cdot)|_{\Theta^r}$ es constante.*

Demostración. El teorema se probará en dos etapas.

1. Para una función $\phi \in A^r_{\mathbf{p}_1,2} \cap A^r_{\mathbf{p}_2,2}$ en las condiciones de la hipótesis.

Siendo que $[\phi(\partial\Omega)]^c$ es abierto, sabemos que sus componentes conexos son arcoconexos. Sea Θ el componente conexo de $[\phi(\partial\Omega)]^c$ que contiene a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \Theta$ y $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Theta$ un camino que los une, $\gamma(0)=\mathbf{p}_0; \gamma(1)=\mathbf{p}_1$. Teniendo en cuenta que la traza de γ es compacta existe un N_{ϵ_1}-entorno en Θ que contiente a $\gamma([0,1])$.

Ahora consideramos $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, y representaciones integrades de los grados $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_0)$, $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1)$ dadas por el teorema 2.3.0.20. Obsérvese que puede elegirse la misma función f_ε para ambas representaciones.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y consideramos para todo $s \in [0,1]$ $K_{s,\varepsilon} \doteq \{z + \gamma(s) : z \in \mathtt{sop}(f_\varepsilon)\} \subset \Omega$. Entonces $\bigcup_{s\in[0,1]} K_{s,\varepsilon} \subset \Omega$ y de acuerdo al lema 2.3.0.19 existe $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ con $\mathtt{sop}(\psi) \subset \Theta$ tal que

$$\mathtt{div}(\psi)(\mathbf{x}) = f_\varepsilon(\mathbf{x}-\gamma(0)) - f_\varepsilon(\mathbf{x}-\gamma(1)) = f_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{p}_0) - f_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{p}_1) \quad (2.3.0.31)$$

A su vez, por el lema 2.3.0.17 existe una función $\xi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\mathtt{div}(\xi)(\mathbf{x}) = \mathtt{div}(\psi)(\phi(\mathbf{x}))J_\phi(\mathbf{x}) \quad (2.3.0.32)$$

con $\mathtt{sop}\xi \cap \phi(\partial\Omega) = \emptyset$.

Multiplicando por $J_\phi(\mathbf{x})$ ambos miembros de la ecuación (2.3.0.31) evaluada en $\phi(\mathbf{x})$ e integrando sobre Ω obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathtt{div}(\psi)(\phi(\mathbf{x}))J_\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\Omega f_\epsilon(\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_0)J_\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_\Omega f_\epsilon(\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_1)J_\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \\ = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_0) - \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1)\end{aligned} \quad (2.3.0.33)$$

Finalmente reordenando los términos y usando la ecuación (2.3.0.32) se obtiene el resultado

$$\begin{aligned}\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_0) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1) + \int_\Omega \mathtt{div}(\psi)(\phi(\mathbf{x}))J_\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \\ = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1) + \int_\Omega \mathtt{div}(\xi)(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1).\end{aligned} \quad (2.3.0.34)$$

La última igualdad se justifica teniendo en cuenta que por el teorema de la divergencia $\int_\Omega \mathtt{div}(\xi)(\mathbf{y})d\mathbf{y} = 0$. Esto concluye la prueba de la primer etapa.

2. Para funciones $\phi \in A^r_{\mathbf{p}_1,1} \cap A^r_{\mathbf{p}_2,1}$ en las condiciones de la hipótesis.

En este caso consideramos una sucesión de funciones $\{\phi_n\}_{n\geq 1} \subset C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\|\phi_n - \phi\|_1 \longrightarrow 0$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Consideremos γ como antes y $\delta = \rho(\gamma[0,1], \phi(\partial\Omega)) > 0$. Entonces si tomamos $\|\phi_n - \phi\|_1 < \frac{1}{2}\delta$, $\mathbf{x} \in \partial(\Omega)$ y $s \in [0,1]$ entonces dado que $\|\phi(\mathbf{x}) - \gamma(s)\| \leq \|\phi(\mathbf{x}) - \phi_n(\mathbf{x})\| + \|\phi_n(\mathbf{x}) - \gamma(s)\|$ se tiene que

$$\|\phi_n(\mathbf{x}) - \gamma(s)\| \geq \|\phi(\mathbf{x}) - \gamma(s)\| - \|\phi(\mathbf{x}) - \phi_n(\mathbf{x})\| > \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta.$$

Entonces para n suficientemente grande por el primer resultado fundamental, teorema 2.3.0.15, vale que

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_0) = \mathrm{d}(\phi_n, \Omega, \mathbf{p}_0)$$

y

$$\mathtt{d}(\phi_n, \Omega, \mathbf{p}_1) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1).$$

Ahora por la primera parte del presente teorema se tiene que:

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_0) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1). \blacksquare \tag{2.3.0.35}$$

Por ultimo para continuar con la construcción necesitamos del importante teorema de Sard cuya demostración puede verse en los textos de Spivak y Milnor [(2) Spivak M. 1979; Milnor J. W. 1965,]

Teorema 2.3.0.23 `(Teorema de Sard.)` *Si $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ entonces $\phi(C_\phi)$ tiene medida cero.*

Es claro que este teorema afirma que el conjunto de valores regulares de una función $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en $\mathbb{R}^n$ y en este sentido utilizaremos en ocasiones el teorema de Sard.

2.4. Definición del grado topológico para funciones $\phi \in \boldsymbol{A}_{\mathbf{p},1}$.

Ahora podemos levantar la restricción de que $\mathbf{p}$ sea un valor regular.

Usaremos la siguiente notación: $\eta \doteq \rho(\mathbf{p}, \phi(\partial\Omega))$ donde ρ denota la distancia asociada a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Cuando existan más de un punto $\mathbf{p}$ en juego, notaremos para cada $\mathbf{p}_i$ correspondiente $\eta_i = \rho(\mathbf{p}_i, \phi(\partial\Omega))$.

Definición 2.4.0.24 *Sea $\phi \in A_{\boldsymbol{p},1}$. Elegimos $\boldsymbol{q} \in B(\boldsymbol{p}, \eta)$ valor regular de ϕ de forma tal que $\psi \in A^r_{\boldsymbol{p},1}$ y definimos el grado de ϕ en $\boldsymbol{p}$ relativo a Ω de la siguiente forma:*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) \doteq \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{q}).$$

Teorema 2.4.0.25 *La definición 2.4.0.24 es correcta.*

Demostración. Por el teorema de Sard 2.3.0.23 cada bola $B(\mathbf{0}, \mathbf{p})$ contiene puntos $\mathbf{q}$ que resultan ser valores regulares de la función ϕ. Por ser conexa, la bola $B(\mathbf{p},\eta)$ está contenida en la componente conexa de $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$ y de acuerdo al segundo resultado fundamental 2.3.0.21 la definición no depende del punto $\mathbf{q}$ elegido. ■

En la siguiente subsección probaremos el tercer resultado fundamental de la construcción; este teorema muestra que la extensión preserva dos propiedades ya probadas para el grado de funciones $\phi \in A^r_{\mathbf{p},1}$ y además que la función grado es efectivamente invariante bajo homotopías, es decir el grado permanece constante a través de deformaciones continuas en la variable ϕ.

2.4.1. Algunas propiedades fundamentales del grado de una función $\phi \in \boldsymbol{A}_{\mathbf{p},1}$ para la extensión del concepto. Tercer resultado fundamental.

En primer lugar precisamos el concepto de homotopóia.

Definición 2.4.1.1 *(Homotopías de clase C^k p-admisibles). Una homotopía de clase C^k entre las funciones $\phi,\ \psi \in C^k(\overline{\Omega})$ es una función*

$$H:\ [0,1]\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

tal que si denotamos $H_t(\boldsymbol{x}) = H(t,\boldsymbol{x})$ entonces para todo $t\in[0,1]$ se tiene que $H_t \in C^k(\overline{\Omega})$,

$$H_0=\phi,\quad H_1=\psi$$

y además

$$\|H_t-H_s\|_1\longrightarrow 0,\ \ \textit{si}\ \ |t-s|\longrightarrow 0$$

Además diremos que la homotopía H es $\boldsymbol{p}$-admisible si para todo $t\in[0,1]$ vale que $\boldsymbol{p}\notin H_t(\partial\Omega)$.

Seguiremos utilizando las notaciones establecidas en este capítulo; es decir ⌜ para todo $t\in[0,1], H_t\in A_{\mathbf{p},1}$⌝ indica que toda función H_t con $0\le t\le 1$ es C^k $\mathbf{p}$-admisible. Análogas notaciones se usan para el complemento de los valores $\mathbf{p}$-admisibles, regulares o no, etc.

Teorema 2.4.1.2 *(Tercer resultado fundamental.)*

1. *Si $\phi\in A_{\boldsymbol{p},1}$ entonces $\boldsymbol{d}(\phi,\Omega,\cdot)$ es constante sobre cada componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$.*

2. *Si $\phi\in A_{\boldsymbol{p},1}$ entonces existe $\delta=\delta(\phi,\boldsymbol{p})>0$ tal que si $\psi\in B^1(\phi,\delta)$ entonces $\psi\in A_{\boldsymbol{p},1}$ y además*

$$\boldsymbol{d}(\phi,\Omega,\boldsymbol{p})=\boldsymbol{d}(\psi,\Omega,\boldsymbol{p}). \qquad (2.4.1.1)$$

3. ***(Invariancia bajo homotopías para funciones en $A_{p,1}$)*** *Si H es una homotopía entre las funciones ϕ y ψ tal que para todo $t \in [0,1]$ $H_t \in A_{p,1}$ entonces para todo $t \in [0,1]$*

$$\mathtt{d}(H_t, \Omega, \boldsymbol{p}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}). \tag{2.4.1.2}$$

Observación 2.4.1.3 El primer punto dice que el segundo resultado fundamental vale para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},1}$, y podemos expresarlo de la siguiente manera: si Θ designa un componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$ entonces $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \cdot)|_\Theta$ es constante. El segundo punto dice que el primer resultado fundamental vale asimismo para funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},1}$ y yl tercer que el grado es independiente de la deformación continua producida por la homotopía H.

Demostración.

1. Consideremos $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \Theta$ una componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$. Elegimos $\mathbf{q}_i$ para $i = 1,2$ valores regulares de ϕ tal que $\|\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i\| < \eta_i$. Con esta elección se tiene que $\mathbf{q}_i \in \Theta$ para $i = 1,2$. Luego por la definición 2.4.0.24 se tiene para cada $i = 1,2$

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_i) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{q}_i). \tag{2.4.1.3}$$

Ahora observamos que $\phi \in A^r_{\mathbf{q}_1,1} \cap A^r_{\mathbf{q}_2,1}$ y que $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ son dos puntos que están en la misma componente conexa Θ de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$, luego por el segundo resultado fundamental 2.3.0.21 $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{q}_1) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{q}_2)$ y de ahí el resutlado

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_1) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_2).$$

2. Por el teorema de Sard 2.3.0.23 podemos elegir $\mathbf{q}$ valor regular de ϕ tal que $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| < \frac{1}{2}\eta = \delta$.

Ahora si $\psi \in B^1(\phi, \delta)$ entonces por el primer resultado fundamental 2.3.0.15 se tiene que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{q}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{q})$.

Por la elección del punto $\mathbf{q}$ se observa que $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ están en la misma componente conexa Θ de $\mathbb{R}^n_{\phi,1}$ y por el primer punto del presente teorema $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{q})$ y $\mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{q})$.

Finalmente combinando ambos resultados se obtiene

$$\mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{q}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{q}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) \blacksquare \tag{2.4.1.4}$$

3. Por el punto 2 del presente teorema, la función $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida $u(t) = \mathtt{d}(H_t, \Omega, \mathbf{p})$ es continua de manera que debe ser constante. $\blacksquare$

2.5. Definición del grado topológico para funciones $\phi \in \boldsymbol{A}_{\mathbf{p},0}$.

Ahora completaremos el esquema (1). La idea es definir el grado de una función continua ϕ sobre $\overline{\Omega}$ a través de una función $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ que esté suficientemente cerca en la norma (2.1.0.2).

Se debe notar que independizándonos de la diferenciabilidad, abordamos el concepto de grado en términos topológicos; esto significa que en el enfoque analítico la diferenciabilidad aparece, en verdad, como un recurso auxiliar.

Definición 2.5.0.4 *Sea $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$. Elegimos $\psi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap B(\phi, \eta)$ de forma tal que $\psi \in A_{\boldsymbol{p},1}$ y definimos el grado de ϕ en $\boldsymbol{p}$ relativo a Ω de la siguiente manera:*

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) \doteq \mathtt{d}(\psi, \Omega, \boldsymbol{p})$$

Teorema 2.5.0.5 *La definición 2.5.0.4 es correcta.*

Demostración. En primer lugar observemos que $\eta > 0$ y $C^1(\overline{\Omega}) \cap B(\phi, \eta) \neq \varnothing$. Ahora cosideremos dos funciones $\psi_1,\ \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega}) \cap B(\phi, \eta)$ y la homotopía inducida por la combinación convexa

$$H_t(\mathbf{x}) = t\psi_1(\mathbf{x}) + (1-t)\psi_2(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ y $t \in [0, 1]$.

Se comprueba fácilmente que para todo $t \in [0, 1]$ se tiene $H_t \in A_{\mathbf{p},1}$. Luego por el punto 3 del tercer resultado fundamental 2.4.1.2 se verifica que $\mathtt{d}(\psi_1, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi_2, \Omega, \mathbf{p})$.

En definitiva hemos visto que el grado es constante en $B(\phi, \eta) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y por lo tanto la definición no depende de la elección de ψ. ■

El proceso de aproximación utilizado en la construcción del concepto se puede realizar `simultáneamente` en las dos variables ϕ y $\mathbf{p}$; más precisamente se tiene el siguiente:

Teorema 2.5.0.6 *En la definición 2.5.0.4 podemos elegir $\psi \in A^r_{\boldsymbol{p},1}$.*

Demostración. Consideramos $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap B(\phi, \frac{1}{2}\eta)$; con esta elección $\rho(\mathbf{p}, \varphi(\partial\Omega)) > \frac{1}{2}\eta > 0$, de manera que $\mathbf{p} \notin \varphi(\partial\Omega)$ y el grado de φ está bien definido. Ahora elegimos $\mathbf{q} \in B(\mathbf{p}, \frac{1}{2}\eta) \cap [\varphi(C_\varphi)]^c$ y consideramos

$$\psi = \varphi + \mathbf{p} - \mathbf{q}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\phi-\psi\| \leq \|\phi-\varphi\|+\|\varphi-\psi\| \leq \\ \|\phi-\varphi\|+\|\varphi-(\varphi+\mathbf{p}-\mathbf{q})\| \\ = \|\phi-\varphi\|+\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| < \eta. \end{aligned} \tag{2.5.0.5}$$

Ahora bien

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \text{ } sii \text{ } \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$$

y por construcción si $\mathbf{x} \in \psi^{-1}(\mathbf{p})$ entonces $J_\psi(\mathbf{x}) = J_\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ de manera que $\mathbf{p}$ no es un valor crítico de ψ. ■

2.6. Algunas propiedades de la función grado topológico: $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p})$.

En esta sección estudiaremos cómo se comporta la función grado respecto de los parámetros de los cuales depende: la función ϕ, el dominio Ω y el punto $\mathbf{p}$.

2.6.1. Perturbación de la función grado respecto de la variable ϕ y $\mathbf{p}$.

De acuerdo a la construcción es fácil ver que se cumple la propiedad de `normalización` enunciada en el teorema 2.2.0.10 y su demostración en este contexto es inmediata.

La siguiente propiedad, aunque elemental, es clave en muchas aplicaciones de la teoría del grado al análisis.

Teorema 2.6.1.1 *(Propiedad de solución).*
Sea $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$. Si $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) \neq 0$, entonces existe $\mathbf{q} \in \Omega$ tal que $\phi(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$.

Demostración. Si $\mathbf{p} \notin \phi(\overline{\Omega})$ entonces podemos elegir $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\|\phi - \psi\| < \rho(\mathbf{p}, \phi(\overline{\Omega})) < \eta$. Luego se deduce que $\mathbf{p} \notin \psi(\overline{\Omega})$ de manera que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = 0$ y esto contradice la hipótesis. ■

Observación 2.6.1.2 Los dos teoremas siguientes muestran que el tercer resultado fundamental se extiende a funciones $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$.

Teorema 2.6.1.3 *(La función $d(\cdot, \Omega, p)$ es localmente constante en la primer variable e invariante bajo homotopías).*
Sean $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$

1. *Existe* $\delta = \delta(\phi, \boldsymbol{p}) > 0$ *tal que si* $\psi \in B(\phi, \delta)$ *entonces* $\psi \in A_{\boldsymbol{p},0}$ *y además*
$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \boldsymbol{p}). \tag{2.6.1.1}$$

2. *Si* H *es una homotopía y para todo* $t \in [0,1]$, $H_t \in A_{\boldsymbol{p},0}$ *entonces*
$$\mathtt{d}(H_t, \Omega, \boldsymbol{p}) = \mathtt{d}(H_0, \Omega, \boldsymbol{p}). \tag{2.6.1.2}$$

Demostración. 1. Si $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$ y $\psi \in B(\phi, \frac{1}{2}\eta)$ entonces $\mathbf{p} \notin \psi(\partial\Omega)$, pues $\|\psi - \mathbf{p}\| \geq \|\phi - \mathbf{p}\| - \|\psi - \phi\| \geq \eta - \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta > 0$. Luego el grado, $d(\psi, \Omega, \mathbf{p})$ está bien defindo.

Si definimos $\delta = \eta - \|\psi - \phi\|$ y elegimos una función $\chi \in B^1(\psi, \delta)$ entonces $\|\phi - \chi\| \leq \|\phi - \psi\| + \|\psi - \chi\| \leq \eta - \|\psi - \phi\| + \|\psi - \phi\| = \eta$.

Luego se tiene simultáneamente que $\|\chi - \psi\| < \eta$, $\|\chi - \phi\| < \eta$ y usando la definición 2.5.0.4 se deduce que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p})$.

2. De acuerdo a la hipótesis el grado $d(H_t, \Omega, \mathbf{p})$ está definido para todo $t \in [0,1]$. La demostración es análoga a la que dimos en el teorema 2.4.1.2 para funciones de clase $C^1(\overline{\Omega})$. Nuevamente es suficiente con observar que por el punto 1 del presente teorema la función $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida $u(t) = \mathtt{d}(H_t, \Omega, \mathbf{p})$ es continua y por lo tanto debe ser constante. ■

Observación 2.6.1.4 Geométricamente el segundo punto del teorema 2.6.1.3 muestra que si no existen p-puntos en el borde de Ω entonces a lo largo de la deformación los p-puntos aparecen y desaparecen de a pares de forma tal que se compensan los signos y no aportan al grado.

Teorema 2.6.1.5 *(La función* $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p})$ *constante en cada compomente conexa de* $\mathbb{R}^n_{\phi,0}$*).*

Sea $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$. *Si* $\boldsymbol{p}_0$ *y* $\boldsymbol{p}_1$ *están en la misma compomente conexa de* $\mathbb{R}^n_{\phi,0}$ *entonces*
$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}_0) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}_1).$$

Demostración. Sean $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1 \in \Theta$ componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\phi,0}$. Por ser arcoconexo existe una curva continua $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Theta$ que los une, es decir $\gamma(0) = \mathbf{p}_0$, $\gamma(1) = \mathbf{p}_1$. Siendo que $\tau = \rho(\gamma[0,1], \partial\Omega) > 0$ se puede elegir $\psi \in A^r_{\mathbf{p}_0,1} \cap A^r_{\mathbf{p}_1,1}$ tal que para $i = 1, 2$ $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}_i) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}_i)$. Ahora teniendo en cuenta que los puntos $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_1$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^n_{\psi,1}$ el resultado se sigue del tecer resultado fundamental, teorema 2.4.1.2. ■

El siguiente resultado, como veremos más adelante en el tercer y cuarto capítulo, resulta fundamental para definir el grado global de una función.

Teorema 2.6.1.6 *(Dependencia del grado respecto de los valores del campo sobre el borde).*

Supongamos que $\phi, \psi \in A_{\boldsymbol{p},0}$ tal que $\phi|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega}$. Entonces

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\psi, \Omega, \boldsymbol{p}) \tag{2.6.1.3}$$

Demostración. Consideramos la homotopía C^0-**p**-admisible inducida por las combinaciones convexas de ϕ y ψ, es decir para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ y $t \in [0,1]$ definimos

$$H(t, \mathbf{x}) = t\phi(\mathbf{x}) + (1-t)\psi(\mathbf{x}).$$

Observemos que de acuerdo a la hipótesis como ambas coinciden sobre el borde de Ω se tiene que si $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ y $t \in [0,1]$ entonces $H(t, \mathbf{x}) = \phi$. Luego para todo $t \in [0,1]$ vale que $\mathbf{p} \notin H(t, \partial\Omega)$ y el grado está bien definido a lo largo de la deformación. El resultado se sigue ahora por la invariancia de la homotopía establecida en el segundo punto del teorema 2.6.1.3. ■

Teorema 2.6.1.7 *(Poincaré-Bohl).*

Sean ϕ, $\psi \in C(\overline{\Omega})$ y supongamos que para todo $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ se tiene que $\boldsymbol{p} \notin [\phi(\boldsymbol{x}); \psi(\boldsymbol{x})]$ donde $[\phi(\boldsymbol{x}); \psi(\boldsymbol{x})]$ denota el segmento que une el punto $\phi(\boldsymbol{x})$ con $\psi(\boldsymbol{x})$. Entonces $\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\psi, \Omega, \boldsymbol{p})$.

Demostración. Se trata esencialmente de la misma demostración dada para el teorema 2.6.1.6. Nuevamente, consideramos la homotopía continua inducida por las combinaciones convexas de ϕ y ψ, es decir para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ y $t \in [0,1]$ definimos

$$H(t, \mathbf{x}) = t\phi(\mathbf{x}) + (1-t)\psi(\mathbf{x}).$$

Es fácil comprobar que la hipótesis $\ulcorner \mathbf{p} \notin [\phi(\mathbf{x}); \psi(\mathbf{x})]$ para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega \urcorner$ implica que para todo $t \in [0,1]$ vale que $\mathbf{p} \notin H(t, \partial\Omega)$ y el resultado se sigue nuevamente por la invariancia de la homotopía 2.6.1.3. ■

El próximo teorema establece la invariancia bajo traslación.

Teorema 2.6.1.8 *(Invariancia bajo traslaciones).*
Sea $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$. Entonces para todo $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \mathtt{d}(\phi - \boldsymbol{q}, \Omega, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \tag{2.6.1.4}$$

Demostración. Cosideremos la función $\Phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida $\Phi(t) = \mathtt{d}(\phi - t \cdot \mathbf{q}, \Omega, \mathbf{p} - t \cdot \mathbf{q})$. Observemos en primer lugar que Φ está bien definida puesto que si $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$ entonces para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $p - t \cdot \mathbf{q} \notin (\phi - t \cdot \mathbf{q})(\partial\Omega)$. Ahora resulta que Φ es continua por 2.6.1.3 y a valores enteros por lo tanto constante y de ahí el resultado. ■

Como consecuencia del teorma de la invariancia bajo traslaciones podemos dar una primer generalización de la invariancia bajo homotopía que establece que el grado se mantiene constante bajo deformaciones simultáneas e independientes de la función y el punto; más precisamente:

Teorema 2.6.1.9 *Sea $p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino continuo y H una homotopía C^0 $\boldsymbol{p}_t$-admisible para todo $t \in [0,1]$, es decir para todo $t \in [0,1]$ se tiene $\boldsymbol{p}_t \notin H_t(\partial\Omega)$. Entonces $\mathtt{d}(H_t, \Omega, \boldsymbol{p}_t)$ es independiente de $t \in [0,1]$.*

Demostración. Consideremos K la homotopía inducida por H y la curva $\mathbf{p}$ definida para todo $t \in [0,1]$ y $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ como $K(t, \mathbf{x}) = H(t, \mathbf{x}) - \mathbf{p}_t$. Ahora para cada $t \in [0,1]$ se aplica la invariancia bajo traslaciones, teorema 2.6.1.8, y se obtiene

$$\mathtt{d}(K_t, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_t - \mathbf{p}_t, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_t, \Omega, \mathbf{p}_t)$$

Finalmente por el teorema (2.6.1.3), invariancia bajo homotopía, el grado $\mathtt{d}(K_t, \Omega, \mathbf{0})$ es independiente de t y por lo tanto $\mathtt{d}(H_t, \Omega, \mathbf{p}_t)$ es independiente para todo $t \in [0,1]$. ■

Cerramos esta subsección indicando en qué sentido la función grado da una cota inferior de la cantidad de ceros de la ecuación $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$. La información que brinda el teorema 2.6.1.10 se volverá a encontrar en el cuarto capítulo en el contexto de las variedades, teorema 4.2.2.1.

Teorema 2.6.1.10 *Sea $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$. Sea $\Theta \subset \mathbb{R}^n_{\phi,0}$ una componente conexa. Existe un conjunto $C = \phi(C_\phi \cap \Theta) \subset \Theta$ de medida cero tal que si $\boldsymbol{p} \in \Theta - C$ entonces $\phi^{-1}(\{\boldsymbol{p}\})$ es un conjunto finito que consta de m puntos, con $m \geq \mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p})$ y además*

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = m \ (mod.\ 2)$$

A veces se utiliza el teorema en la versión del siguiente

Corolario 2.6.1.11 *En el contexto del teorema 2.6.1.10 si $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n_{\phi,0}$ entonces existe un entorno $N(\boldsymbol{p}, \varepsilon)$ del punto $\boldsymbol{p}$ y un conjunto $C \subset N(\boldsymbol{p}, \varepsilon)$ de medida cero tal que si $\boldsymbol{p}' \in N(\boldsymbol{p}, \varepsilon) - C$ entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}') = \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p})$$

y además $\phi^{-1}(\boldsymbol{p}')$ es un conjunto finito de m puntos con $m \geq \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}')$ y

$$m = \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) \text{ (mod. 2)}$$

2.6.2. Perturbación de la función grado respecto de la variable Ω.

La propiedades más importantes al respecto son dos; la primera dice que el grado es aditivo respecto de la variable Ω y la segunda que es invariante, bajo determinadas condiciones, respecto de la sustracción de conjuntos cerrados.

Teorema 2.6.2.1 *(Aditividad respecto del dominio y propiedad de escisión).*
Sea $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$

1. *Sea $\{\Omega_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Omega$ una sucesión finita de abiertos disjuntos de a dos tal que $\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Omega_i$ y para todo i, $\phi_i \doteq \phi|_{\Omega_i}$. Entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \boldsymbol{d}(\phi_i, \Omega_i, \boldsymbol{p}) \qquad (2.6.2.1)$$

2. *Si $K \subset \overline{\Omega}$ es cerrado y $\boldsymbol{p} \notin \phi(K)$. Entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi, \Omega - K, \boldsymbol{p}) \qquad (2.6.2.2)$$

Observación 2.6.2.2 *La propiedad de escisión dice que en tal caso el conjutno K no aporta $\boldsymbol{p}$ puntos.*

Demostración. 1. En primer lugar veamos que para todo $i = 1, 2, ..., n$ se tiene que $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$.

Para ello supongamos que no, es decir que existe $\mathbf{x} \in \partial\Omega_i$ tal que $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$. Entonces teniendo en cuenta que $\partial\Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \overline{\Omega}$ debe ser que $\mathbf{x} \in \Omega$. Por la hipótesis existe algún $j \neq i$ tal que $\mathbf{x} \in \Omega_j$ y por lo tanto alguna bola tal que $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega_j$. Luego como $\mathbf{x} \in \partial\Omega_i$ entonces $\Omega_i \cap B(\mathbf{x}, r) \neq \emptyset$ y así existen i, j tal que $i \neq j$ y $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Elegimos una función $\psi \in A_{\mathbf{p},1}$ con $\|\phi - \psi\| < \eta$. Luego como $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ se tiene que $\mathbf{p} \notin \psi(\partial\Omega_i)$ y para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}_i$ que $\|\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\| < \eta$. Luego por definición 2.5.0.4 se tiene $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p})$.

Ahora si designamos $\psi_i \doteq \psi|_{\Omega_i}$ entonces para todo i tenemos que $\mathtt{d}(\psi_i, \Omega_i, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_i, \Omega_i, \mathbf{p})$ y el resultado se sigue del cálculo directo:

$$\begin{array}{c} \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x}\in\psi^{-1}\{\mathbf{p}\}} \mathrm{sig}(J_\psi(\mathbf{x})) = \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{x}\in\psi_i^{-1}\{\mathbf{p}\}} \mathrm{sig}(J_{\psi_i}(\mathbf{x})) = \\ \sum_{i=1}^{n} \mathtt{d}(\psi_i, \Omega_i, \mathbf{p}) = \\ \sum_{i=1}^{n} \mathtt{d}(\phi_i, \Omega_i, \mathbf{p}) \ \blacksquare. \end{array} \tag{2.6.2.3}$$

2. Teniendo en cuenta que K es compacto entonces $\phi(K)$ es compacto y podemos considerar una función $\psi \in A_{\mathbf{p},1}$ que cumple simultaneamoente con las dos desigualdades siguientes $\|\phi - \psi\| < \eta$ y $\|\phi - \psi\| < \rho(\mathbf{p}, \phi(K))$. Observemos que por hipótesis $\mathbf{p} \notin \psi(K)$ de manera que $\psi^{-1}\{\mathbf{p}\} \cap K = \emptyset$.

Comprobaremos en primer lugar que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega - K, \mathbf{p})$ y luego que $\mathtt{d}(\psi, \Omega - K, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega - K, \mathbf{p})$.

La primer igualdad se sigue del cálculo

$$\begin{array}{c} \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x}\in\psi^{-1}\{\mathbf{p}\}} \mathrm{sig}(J_\psi(\mathbf{x})) \\ = \sum_{\mathbf{x}\in\psi^{-1}\{\mathbf{p}\}\cap(\Omega-K)} \mathrm{sig}(J_\psi(\mathbf{x})) \\ = \mathtt{d}(\psi, \Omega - K, \mathbf{p}). \end{array} \tag{2.6.2.4}$$

Para la segunda sencillamente observemos en primer lugar que $\phi(\partial\Omega) \supset \phi(\partial\Omega - K)$ y por lo tanto $\rho(\mathbf{p}, \phi(\partial\Omega)) \leq \rho(\mathbf{p}, \phi(\partial\Omega - K))$. Luego por la elección de ψ vale que $\|\phi - \psi\| < \rho(\mathbf{p}, \phi(\partial\Omega - K))$ y por definición 2.5.0.4 se tiene que $\mathtt{d}(\psi, \Omega - K, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega - K, \mathbf{p})$ de ahí el resultado. $\blacksquare$

Ahora damos una segunda generalización de la invariancia bajo homotopías. Fijamos el punto $\mathbf{p}$ para una familia de funciones de clase C^0 $\mathbf{p}$-admisibles y en segundo lugar para el grado definido para puntos a lo largo de un camino y para una familia de funciones de clase C^0 $\mathbf{p}_t$ admisibles para todo t. Estas generalizaciones resultan ser consecuencias de la invariancia bajo homotopías 2.6.1.3 y del teorema 2.6.2.1 referido a las propiedades de aditividad del dominio y escisión.

Teorema 2.6.2.3 *Sea* $\Omega \subset [0,1] \times \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y acotado y* $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. *Para cada* $t \in [0,1]$ *definimos las funciones* $\phi_t : \Omega_t \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$\phi_t(\boldsymbol{x}) \doteq \phi(t, \boldsymbol{x})$ donde $\Omega_t \doteq \{\boldsymbol{x} : (t, \boldsymbol{x}) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado. Observemos que $\Omega \doteq \bigcup_{t\in[0,1]} \Omega_t$. Luego si para todo $t \in [0, 1]$, $\phi_t \in A_{\boldsymbol{p},0}(\overline{\Omega}_t)$ entonces $\boldsymbol{d}(\phi_t, \Omega_t, \boldsymbol{p})$ es independiente de t.

Finalmente combinando las hipótesis y resultados de los teormas 2.6.2.3 y 2.6.1.9 tenemos:

Teorema 2.6.2.4 *Invariancia generalizada bajo homotopías).*
Sea $\Omega \subset [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Para cada $t \in [0, 1]$ definimos las funciones $\phi_t : \Omega_t \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_t(\boldsymbol{x}) \doteq \phi(t, \boldsymbol{x})$ donde $\Omega_t \doteq \{\boldsymbol{x} : (t, \boldsymbol{x}) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado. Sea $\boldsymbol{p} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino continuo. Entonces, si para todo $t \in [0, 1]$, $\phi_t \in A_{\boldsymbol{p}_t,0}(\overline{\Omega}_t)$ entonces $\boldsymbol{d}(\phi_t, \Omega_t, \boldsymbol{p}_t)$ es independiente de t.

2.7. El índice de Poincaré.

El teorema 2.6.1.5 afirma que la función grado es constante en cada componente conexa del conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que hacen C^0 $\boldsymbol{p}$-admisible a ϕ. A partir de este resultado podemos dar la siguiente definición que usaremos en breve:

Definición 2.7.0.5 *Si $B \subset \mathbb{R}^n_{\phi,0}$ es conexo definimos*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, B) \doteq \{\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) : \quad \boldsymbol{p} \in B\}$$

Ahora podemos definir el `índice de un campo` y su relación con el grado, usalmente llamado `índice de Poincaré`.

Definición 2.7.0.6 *(Indice de Poincaré).*
*Sea $\phi \in C(\overline{\Omega})$ y $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ un $\boldsymbol{p}$-punto de ϕ aislado. Consideremos la colección $\Gamma_{\boldsymbol{x}_0}$ todos los abiertos que contienen $\boldsymbol{x}_0$ y a ningún otro $\boldsymbol{p}$-punto de ϕ. Claramente si $U_1,\ U_2 \in \Gamma_{\boldsymbol{x}_0}$ entonces $U_1 \cup U_2 \in \Gamma_{\boldsymbol{x}_0}$. Por la propiedad de escisión establecida en el teorema 2.6.2.1 se comprueba que $\boldsymbol{d}(\phi, U_1, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi, U_2, \boldsymbol{p})$ de manera que $\boldsymbol{d}(\phi, U, \boldsymbol{p})$ es el mismo para todo $U \in \Gamma_{\boldsymbol{x}_0}$. Se define el **indice del campo ϕ en el punto $\boldsymbol{x}_0$**, denotado $\boldsymbol{i}(\phi, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p})$ como $\boldsymbol{d}(\phi, U, \boldsymbol{p})$ para algún $U \in \Gamma_{\boldsymbol{x}_0}$.*

Observación 2.7.0.7 Para verificar que la definción es correcta sólo debemos comprobar que $\mathtt{d}(\phi, U_1, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, U_2, \mathbf{p})$. Teniendo en cuenta que U_1 y U_2 son abiertos podemos considerar una bola $U = B(\mathbf{x}_0, r) \subset U_1,\ U_2$ y los cerrados $K_1 = \overline{U_1 - U} \subset \overline{U}_1$, y $K_2 = \overline{U_2 - U} \subset \overline{U}_2$. Es fácil ver que $U = U_1 - K_1 = U_2 - K_2$ de manera que por la propiedad de escisión se tiene que

$$\mathtt{d}(\phi, U_1, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, U_1 - K_1, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, U_2 - K_2, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, U_2, \mathbf{p}).$$

Si la preimagen de ϕ del punto p es finita entonces sus puntos son aislados y podemos expresar el grado a través de la suma de sus índices; más precisamente se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.7.0.8 *(El grado como suma de índices).*

1. *Si $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$ y $\phi^{-1}\{\boldsymbol{p}\}$ finito entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \phi^{-1}\{\boldsymbol{p}\}} \boldsymbol{i}(\phi, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \tag{2.7.0.5}$$

2. *Si $\phi \in C^1(\Omega)$, $\boldsymbol{x} \in \phi^{-1}\{\boldsymbol{p}\}$ y $J_\phi(\boldsymbol{x}) \neq 0$ entonces $\boldsymbol{i}(\phi, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (-1)^m$, donde m es el número de autovalores reales negativos de la diferencial $D\phi(\boldsymbol{x})$, contados con su multiplicidad algebraica.*

Demostración. 1. Supongamos que $\phi^{-1}\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$. Consideremos entornos abiertos disjuntos de a dos $\{U_j\}_{1 \leq j \leq n}$ de los $\mathbf{p}$-puntos tal que $\mathtt{d}(\phi, U_j, \mathbf{x}_j) = \mathtt{i}(\phi, \mathbf{x}_j, \mathbf{p})$ para $j = 1, 2, ..., n$. Ahora el resultado se sigue de la aditividad y la esición, teorema 2.6.2.1.

2. Consideremos la matriz $D\phi(\mathbf{x})$ no singular y sus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no necesariamente distintos. Entonces $J_\phi(\mathbf{x}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$. Los autovalores complejos aparecen de a pares conjugados y por lo tanto $\mathtt{sig} J_\phi(\mathbf{x}) = (-1)^m$ y de ahí el resultado puesto que $\mathtt{i}(\phi, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathtt{sig} J_\phi(\mathbf{x})$. ■

Observación 2.7.0.9 El cálculo del grado de una composición, bajo determinadas condiciones, hace uso de la invariancia del grado en los componentes conexos. La demostación requiere de cierto trabajo técnico y puede verse en el texto de LLoyd [LLoyd N. G, 1978]. En algún sentido nos recuerda la regla de la cadena.

Teorema 2.7.0.10 *(El teorema de la multiplicación).*
Sea $\phi \in C(\overline{\Omega})$ y $\Omega_1 \supset \phi(\overline{\Omega})$ acotado. Sea $\Theta = \Omega_1 - \phi(\partial\Omega)$ y supogamos que sus componentes conexos son Θ_i, $i \in \mathbb{N}$. Entonces si $\psi \in C(\overline{\Omega_1})$ y $\boldsymbol{p} \notin \psi(\phi(\partial\Omega)) \cup \psi(\partial\Omega_1)$ se cumple que

$$\boldsymbol{d}(\psi \circ \phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \sum_i \boldsymbol{d}(\psi, \Theta_i, \boldsymbol{p}) \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \Theta_i). \tag{2.7.0.6}$$

2.8. Definición del grado para funciones ϕ C^0 p-admisibles definidas sobre conjuntos abiertos y acotados de un $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) espacio de Banach finito dimensional.

A continuación veremos la cuestión de como definir la función grado sobre funciones C^0 **p** admisibles definidas en abiertos y acotados de un $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) espacio de Banach finito dimensional. Trataremos en primer lugar el caso X $\mathbb{R}$-espacio de Banach y luego X un $\mathbb{C}$-espacio de Banach.

El siguiente resultado muestra que la función grado es invariante bajo cambios de coordenadas de clase C^1, es decir bajo difeomorfismos.

Teorema 2.8.0.11 *(Invariancia del grado bajo un cambio de coordenadas).*
Sea $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$. Entonces $\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p})$ es invariante bajo un cambio de coordenadas de clase C^1.

Demostración. Comprobemos en primer lugar la invariancia para una función $\phi \in A^r_{\mathbf{p},1}$.

Dado $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeo de clase C^1, existen abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f : U \longrightarrow V$ con $U \supset \overline{\Omega}$ y $V \supset \phi(\overline{\Omega})$. Esto se puede lograr dado que $\overline{\Omega}$ y $\phi(\overline{\Omega})$ son compactos. Entonces podemos considerar las restricciones $f_1 \doteq f|_{\overline{\Omega}} : \overline{\Omega} \longrightarrow f(\overline{\Omega})$ y $f_2 \doteq f|_{\phi(\overline{\Omega})} : \phi(\overline{\Omega}) \longrightarrow f(\phi(\overline{\Omega}))$ que resultan ser de inmediato difeos de clase C^1.

Ahora tomamos la expresión local de ϕ, via f_1 y f_2, es decir

$$\phi_{f_1,f_2} \doteq f_2 \circ \phi \circ f_1^{-1}$$

y observamos que los jacobianos $J_{f_1^{-1}}$ y J_{f_2} son no nulos y del mismo signo. Luego si $\mathbf{x} \in \Omega$ es un punto regular de ϕ entonces $J_\phi(\mathbf{x})$ y $J_{\phi_{f_1,f_2}}(f_1(\mathbf{x}))$ son no nulos y del mismo signo. Entonces por la definición de grado se tiene que

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{x}) = \mathtt{d}(\phi_{f_1,f_2}, f_1(\Omega), f_1(\mathbf{x}))$$

Por último teniendo en cuenta la construcción del concepto de grado, se concluye lo mismo si $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$ y se cambia el sistema de coordenadas. ■

Ahora consideremos $\phi : \Omega \subset X \longrightarrow X$ una función continua con X un $\mathbb{R}$-espacio de Banach de diminsión finita, $n \in \mathbb{N}$ y Ω un conjunto abierto y acotado. Seguiremos utilizando las notaciones que hemos empleado para el caso $\mathbb{R}^n$ con las modificaciones del espacio ambiente que corresponden. En primer lugar seguiremos diciendo que ϕ es C^0 **p**- admisible si $\phi:\ \overline{\Omega}\subset X\longrightarrow X$ es continua y $\mathbf{p}\notin\phi(\partial\Omega)$ y luego notamos:

$$A^X_{\mathbf{p},0}(\overline{\Omega})=\{\phi:\overline{\Omega}\subset X\longrightarrow X:\phi\ \text{ es } C^0\ \mathbf{p}\text{ - admisible}\}. \tag{2.8.0.7}$$

De nuevo si el contexto lo permite omitimos la referencia al dominio $A^X_{\mathbf{p}}\doteq A^X_{\mathbf{p},0}(\overline{\Omega})$. En primer lugar damos la siguiente:

Definición 2.8.0.12 *Sea $\phi\in A^X_{\boldsymbol{p}}$. Si $T:\ X\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal, $T\in L(X,\mathbb{R}^n)$, definimos el grado de ϕ en el punto $\boldsymbol{p}$ relativo a Ω de la siguiente manera:*

$$\mathtt{d}(\phi,\Omega,\boldsymbol{p})\doteq\mathtt{d}(\phi_T,T(\Omega),T(\boldsymbol{p})) \tag{2.8.0.8}$$

donde $\phi_T\doteq T\circ\phi\circ T^{-1}$

Debemos probar que la definición es independiente del isomorfismo T utilizado. Haremos la cuenta para $\mathbf{p}=\mathbf{0}$ de manera que probaremos que

$$\mathtt{d}(\phi,\Omega,\mathbf{0})=\mathtt{d}(\phi_T,T(\Omega),\mathbf{0}).$$

Proposición 2.8.0.13 *La definición 2.8.0.12 es correcta.*

Demostración. Consideremos otro isomorfismo lineal $S\in L(X,\mathbb{R}^n)$. Entonces usando la misma notación $\phi_S\doteq S\circ\phi\circ S^{-1}$ podemos escribir

$$\begin{gathered}\phi_T=\{T\circ S^{-1}\}\circ\phi_S\circ\{S\circ T^{-1}\}=\\ R\circ\phi_S\circ R^{-1}\end{gathered} \tag{2.8.0.9}$$

donde $R\doteq S\circ T^{-1}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es un automorfismo de $\mathbb{R}^n$, es decir $R\in GL(\mathbb{R}^n)$.

Ahora se aplica el teorema 2.8.0.11, referido a la invariancia del grado bajo un cambio de coordenadas de clase C^1. Más precisamente si $\phi:\ \Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es C^1 **p**-admisible y $R\in GL(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$\mathtt{d}(\phi,\Omega,\mathbf{0})=\mathtt{d}(\phi_R,R(\Omega),\mathbf{0}).$$

Observemos que en este caso, si $\phi\in A^r_{\mathbf{p},1}$, entonces se tiene nuevamente

$$\begin{gathered}\mathtt{d}(\phi_R,R(\Omega),\mathbf{0})=\sum_{\mathbf{x}\in(R\circ\phi\circ R^{-1})^{-1}\{\mathbf{0}\}}\mathtt{sig}J_{R\circ\phi\circ R^{-1}}(\mathbf{x})=\\ \sum_{\mathbf{x}\in\phi^{-1}\{\mathbf{0}\}}\mathtt{sig}J_{\phi}(\mathbf{x})=\mathtt{d}(\phi,\Omega,\mathbf{0})\end{gathered} \tag{2.8.0.10}$$

En definitiva la independencia de los isomorfismos lineales es una consecuencia de la invariancia bajo cambios de coordenadas suaves. y por lo tanto

$$\mathtt{d}(\phi_T, T(\Omega), \mathbf{0}) = \mathtt{d}(\phi_S, S(\Omega), \mathbf{0}). \blacksquare$$

Observación 2.8.0.14 1. Considerando isomorfismos adecuados es claro como se puede definir el grado de una función ϕ C^0 $\mathbf{p}$-admisible $\phi : \Omega \subset X \longrightarrow Y$ con Ω un conjunto abierto y acotado, X e Y espacios de Banach de dimensión n.

2. Si el X es un $\mathbb{C}$-espacio de Banach de dimensión finita entonces se puede extender la definición. En primer lugar se observa que X es topológicamente isomórfico a $\mathbb{C}^n$ y como lo hemos hecho para caso $\mathbb{R}^n$ basta probar que

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(\phi_T, T(\Omega), \mathbf{0})$$

para $T \in L(\mathbb{C}^n)$ y $\phi \in A^r_{\mathbf{p},1}$ donde $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Ahora como $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$ podemos considerar el homeo $h : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definido $h(z) = (x, y)$ si $z = x + iy$ y el homeo inducido sobre el espacio de las transformaciones lineales $H : L(\mathbb{C}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n)$ definido

$$H(T) = \begin{pmatrix} R & -S \\ S & R \end{pmatrix}$$

si $T(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) + iS(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $S, R \in L(\mathbb{R}^n)$ automorfismos. Luego se define para toda $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ C^0 0-admisible

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, 0) = \mathtt{d}(\phi_H, H(\Omega), 0).$$

Cerramos este capítulo señalando que se puede demostrar [Amann H. and Weiss, 1973, Deimling K., 1980] que existe una única función, llamada grado topológico de Brower, que satisface un conjunto determinado de propiedades. En este sentido el siguiente teorema pone de manifiesto cuales son las propiedades fundamentales que cumple la función grado.

Teorema 2.8.0.15 ***(Unicidad y existencia de la función grado).***
Sean X un $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)- espacio de Banach finito dimensional, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado y $\boldsymbol{p} \in X$. Entonces ***existe una única función d****, llamada* grado de Brouwer

$$\boldsymbol{d}(\cdot, \Omega, \boldsymbol{p}) : \ A^X_{\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{2.8.0.11}$$

con las siguientes propiedades

1. **(Propiedad de Normalización).** *Si* $\boldsymbol{p} \in \Omega$ *entonces* $\boldsymbol{d}(I, \Omega, \boldsymbol{p}) = 1$

2. **(Propiedad de Aditividad respecto del dominio).** *Sea* $\{\Omega_i\}_{1 \le i \le n}$ *una partición de* Ω *de abiertos disjuntos tal que* $\boldsymbol{p} \notin \phi(\overline{\Omega} - \bigcup_{1 \le i \le n} \Omega_i)$ *con* $\phi \in C(\overline{\Omega})$*. Entonces si escribimos* $\phi_i = \phi|_{\overline{\Omega}_i}$ *entonces para cada* $i = 1, 2, ..., n$ $\phi_i \in A^X_{\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega}_i)$ *y además*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \sum_{1 \le i \le n} \boldsymbol{d}(\phi_i, \Omega_i, \boldsymbol{p}).$$

3. **(Continuidad de la función grado).** *La función* $\boldsymbol{d}(\cdot, \Omega, \boldsymbol{p})$ *es continua*

4. **(Invariancia bajo traslaciones).** *Para toda* $\phi \in A^X_{\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ *se tiene que*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi - \boldsymbol{p}, \Omega, \boldsymbol{0}).$$

En primer lugar observemos que estas propiedades fundamentales son satisfechas por la función grado definida sobre funciones C^0 **p** admisibles, relativa a conjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^n$ de acuerdo a nuestra construcción. También se puede verificar que las cumple la función grado definida sobre funciones C^0 **p**-admisibles, relativa a conjuntos abiertos y acotados de espacios de Banach finito dimensionales, de acuerdo a la extensión recién realizada.

Ahora las propiedades de escisión, solución, invariancia bajo homotopías y dependencia de los valores sobre el borde resultan ser consecuencias del teorema de existencia y unicidad.

En el próximo capítulo daremos cierta interpretación geométrica de la función grado y en el cuarto algunas consecuencias topológicas y aplicaciones al análisis.

Capítulo 3

Teoría de grado y número de vueltas de un campo

En este capítulo definiremos el número de vueltas de un campo en $\mathbb{R}^n$ generalizando el concepto usual de número de vueltas de una curva en $\mathbb{R}^2$ tal generalización resulta ser la integral de Kronecker. Luego veremos que los conceptos de número de vueltas de un campo y grado topológico coinciden. En particular se pondrá de manifiesto de manera evidente, un resultado que ya hemos probado en el capítulo anterior, esto es, que el grado topológico de un campo sólo depende de sus valores sobre el borde del conjunto abierto y acotado en el que está definido. A posteriori, basándonos en ese hecho, definimos el grado global de un campo y lo interpretaremos geométricamente como una medida de la cantidad de veces que $\partial\Omega$ gira alrededor de S^{n-1} via ϕ, es decir la cantidad de veces que $\phi(\partial\Omega)$ envuelve a la esfera S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. Al final de este capítulo abordamos el número de vueltas y por tanto el grado de un campo en $\mathbb{R}^2$ en el contexto del cálculo de variable compleja.

Para abordar la integral de Kronecker será necesario fijar alguna terminología específica acerca de integrales de formas, como asimismo tener presente una serie de conceptos y propiedades básicas y puede omitirse si se tiene presente el tema. Nosotros no daremos las demostraciones de estos resultados previos que pueden encontrarse en cualquier texto de geometría diferenccial, por ejemplo en Spivak o Boothy [Spivak, M. 1979; Boothby, W. M. 1975]. Asimismo señalamos que los resultados referidos a integrales de 1-formas en $\mathbb{R}^2$ y en especial las consideraciones realizadas acerca de la relación entre formas cerradas y exactas pueden consultarse en los textos de referencia [Alhlfors L. V., 1966; Cartan H. 1995; Lang S. 1993].

En la primer sección se realiza la tarea preliminar y en la segunda se recuerda la definición del número de vueltas de una curva continua en $\mathbb{R}^2$

y en las subsiguientes, tercera y cuarta, se da la generalización del número de vueltas a un campo, su relación con la función grado y se trata el caso particular en el que un campo se identifica con una función holomorfa.

3.1. * Formas e Integrales de formas. Definiciones previas y propiedades básicas.

3.1.1. Definición de k-formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-e-v y $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{V} \doteq \mathbb{V} \times ...\mathbb{V}$ el producto cartesiano de k-factores iguales a $\mathbb{V}$.

Definición 3.1.1.1 *Un* `tensor de orden k` *es una función $T : \prod_{i=1}^{k} V \to \mathbb{R}$ multilineal, es decir lineal en cada una de sus variables. Denotamos al conjunto de k-tensores*

$$I^k(\mathbb{V}) \doteq \{T : \prod_{i=1}^{k} V \to \mathbb{R} : T \text{ es multilineal } \}.$$

La suma y el producto por un escalar en $I^k(\mathbb{V})$ se definen de la manera ususal. Si $T \in I^k(\mathbb{V})$ y $G \in I^l(\mathbb{V})$ se define el producto tensorial $T \otimes G(v_1, ...v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}) = T(v_1, ..., v_k) \cdot G(v_{k+1}, ..., v_{k+l})$ de forma tal que $T \otimes G \in I^{k+l}(\mathbb{V})$.

Con base en las propiedades fundamentales de la función determinante, necesitamos considerar `funciones que son multilineales y alternadas`. Mas precisamente

Definición 3.1.1.2 *Un tensor $T \in I^k(\mathbb{V})$ de orden k se dice* `alternado` *si $T(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., -\boldsymbol{v}_i, ..., \boldsymbol{v}_n) = -T(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_i, ..., \boldsymbol{v}_n)$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Denotamos al conjunto de todos los tensores alternados, funciones multilineales y alternadas, de la siguiente manera:*

$$\bigwedge^k(V) \doteq \{T \in I^k(\mathbb{V}) : T \;\; \texttt{es alternada} \;\}.$$

Para alternar un tensor se recurre al operador alternación, denotado Alt, y definido así:

Definición 3.1.1.3 *si $T \in I^k(\mathbb{V})$ entonces*

$$Alt(T)(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k) \doteq \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \boldsymbol{sig}(\sigma) \cdot T(v_{\sigma(1)}, \boldsymbol{v}_{\sigma(2)}, ..., \boldsymbol{v}_{\sigma(k)})$$

donde S_k es el grupo de permutaciones de la sección inicial $\{1, 2, ..., k\}$ y ***sig***(σ) *designa el signo de la permutación definido como el número $(-1)^m$ con m el número de transposiciones de σ.*

Con esta definición se prueba que $Alt(T) \in \bigwedge^k(\mathbb{V})$ y que $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$. En adelante utilizaremos las letras ω, η, etc, para denotar los elementos del conjunto $\bigwedge^k(\mathbb{V})$. Es fácil ver también que si $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{V})$ entonces $Alt(\omega) = \omega$.

Definición 3.1.1.4 *Si $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{V})$ y $\eta \in \bigwedge^l(\mathbb{V})$ se define el* ***producto exterior*** *de ω con η de la siguiente manera*

$$\omega \wedge \eta \doteq \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta).$$

Con esto se tiene que $\omega \wedge \eta \in \bigwedge^{k+l}(\mathbb{V})$.

Destacamos algunas de las propiedades más empleadas del producto exterior

Proposición 3.1.1.5 ***(Propiedades del producto exterior).*** *Si $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^k(\mathbb{V})$, $\eta_1, \eta_2 \in \bigwedge^l(\mathbb{V})$, $\theta \in \bigwedge^m(\mathbb{V})$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces:*

i. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$.

ii. $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$.

iii. $a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta)$.

iv. $\omega \wedge \eta = (-1)^{k \cdot l} \eta \wedge \omega$.

v. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

Otro resultado que se sigue de las definiciones dadas es el siguiente

Teorema 3.1.1.6 ***(Base de k-formas).***
Si $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ la base asociada al dual, es decir para todo i, j, $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, entonces ***una base de*** *$\bigwedge^k(\mathbb{V})$ viene dada por el conjunto $\{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_k}\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$. Luego la dimensión de $\bigwedge^k(\mathbb{V})$ es $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.*

Si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p} \in U$ denotamos con $T_{\mathbf{p}}(U)$ el espacio tangente a U en $\mathbf{p}$ que resulta ser isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Los puntos de dicho espacio serán denotados cuando sea necesario $\mathbf{v_p}$. Consideramos ahora $\mathbb{V} = T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ y definimos

$$\bigwedge^k(U) \doteq \bigcup_{\mathbf{p}\in U}\left\{\{p\} \times \bigwedge^k(T_{\mathbf{p}}(U))\right\}.$$

Este conjunto tiene estructura de variedad diferencial y podemos definir un campo de k formas exteriores o diferenciales, de la siguiente manera:

Definición 3.1.1.7 *Un* `campo de k-formas exteriores de clase` C^m `sobre` *U es una función $\omega : U \to \bigwedge^k(U)$, diferenciable de clase C^m tal que para cada $p \in U$ se tiene $\omega(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{p}, \omega_{\boldsymbol{p}}) \in \bigwedge^k(U)$ con $\omega \circ \pi = id|_U$. En tal caso escribiremos $\omega \in \bigwedge^k_m(U)$.*

Si el contexto lo permite identificaremos $\omega(\mathbf{p})$ con $\omega_{\mathbf{p}}$.

Si ω es una k-forma diferencial de clase C^m y para cada $\mathbf{p} \in U$ consideramos una carta (V, ϕ) alrededor de $\mathbf{p}$ y

$$\{d\phi_1(\mathbf{p}), d\phi_2(\mathbf{p}), ..., d\phi_n(\mathbf{p})\}$$

la base dual asociada a la base $\{v_{1,\mathbf{p}}, v_{2,\mathbf{p}}, ..., v_{k,\mathbf{p}}\}$ del espacio tangente $T_{\mathbf{p}}(U)$, entonces localmente ω se escribe de la siguiente manera:

$$\omega = \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n} a_{i_1,i_2,...,i_k} d\phi_{i_1} \wedge d\phi_{i_2} \wedge ...d\phi_{i_k}$$

para ciertas funciones $a_{i_1,i_2,...,i_k} \in C^m(V)$ con $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$. Esta caracterización es local pero siendo U una variedad abierta se puede elegir una única carta para dar una representación global.

En lo que sigue denotaremos la proyección j-ésima $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante x_j y $\mathbf{v}_p = (v_1, v_2, ..., v_j, ..., v_n)$. Con esta notación su diferencial $dx_j(\mathbf{p})(\mathbf{v}_p) = v_j$. Si consideramos $\{e_{1,\mathbf{p}}, e_{2,\mathbf{p}}, ..., e_{n,\mathbf{p}}\}$ la base canónica de $T_{\mathbf{p}}(U)$ entonces el conjunto de diferenciales $\{dx_1(\mathbf{p}), dx_2(\mathbf{p}), ..., dx_n(\mathbf{p})\}$ forman una base de $(T_{\mathbf{p}}U)^*$. Luego la forma puede escribirse de la siguiente manera

$$\omega = \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n} a_{i_1,i_2,...,i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ...dx_{i_k}$$

para ciertas funciones $a_{i_1,i_2,...,i_k} \in C^m(U)$ con $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$.

Destacamos en particular que si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ define un campo de 1-formas de la clase correspondiente a la de f.

El teorema 3.1.1.6 muestra que $\bigwedge^n(\mathbb{R}^\ltimes)$ tiene dimensión 1, de manera que una n-forma no nula constituye una base. A partir de esto se ve que la n-forma det es una base de $\bigwedge^n(\mathbb{R}^\ltimes)$. De alguna manera la medida de la distorsión que sufre la n-forma al cambiar la base viene dada por el determinante en el sentido del siguiente teorema, de utilidad para establecer algunas propiedades referidas a elementos de volúmen, como veremos más adelante.

Teorema 3.1.1.8 *(relacion fundamental n-formas y determinante).*
Sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$ *y* $\omega \in \bigwedge^n(\mathbb{V})$. *Dados* n *vectores* $\boldsymbol{w}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\boldsymbol{v}_j$, $i = 1, 2, ..., n$ *en* $\mathbb{V}$ *entonces*

$$\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n).$$

3.1.2. Los operadores f_* y f^*.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y consideremos su diferencial en $\mathbf{p}$ notada $f_{*,\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \to T_{f(\mathbf{p})}\mathbb{R}^m$ y definida $f_{*,\mathbf{p}}(\mathbf{v}_p) = df(\mathbf{p})(\mathbf{v}_p)$. El operador lineal $f_{*,\mathbf{p}}$ induce otra transformación lineal $f^*_{\mathbf{p}}$ que permite definir el pullback de formas. Más precisamente:

Definición 3.1.2.1 *(Definición de pullback). Se define la transformación lineal* $f^*_{\boldsymbol{p}} : \bigwedge^k(T_{f(\boldsymbol{p})}\mathbb{R}^m) \to \bigwedge^k(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n)$ *de la siguiente manera: si* $\omega(\boldsymbol{p}) \in \bigwedge^k(T_{f(\boldsymbol{p})}\mathbb{R}^m)$ *se define*

$$\begin{gathered} f^*(\omega)(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v}_{1,\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{v}_{2,\boldsymbol{p}}, ..., \boldsymbol{v}_{k,\boldsymbol{p}}) = \\ (\omega)(f(\boldsymbol{p}))(f_{*,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{v}_{1,\boldsymbol{p}}), f_{*,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{v}_{2,\boldsymbol{p}}), ..., f_{*,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{v}_{k,\boldsymbol{p}})). \end{gathered} \tag{3.1.2.1}$$

Es fácil ver que $f^*(\omega)(\boldsymbol{p}) \in \bigwedge^k(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n)$.

Ahora teniendo en cuenta la diferenciabilidad del fibrado podemos definir un morfismo

$$f^* : \bigwedge^k(\mathbb{R}^m) \to \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$$

de clase C^k, *de manera que si* $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^m)$ *entonces* $f^*(\omega) \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$. *La forma* $f^*(\omega)$ *se llama el* ***pull-back*** *de la forma* ω.

Este morfismo satisface las siguientes propiedades que se deducen de la definición:

Proposición 3.1.2.2 *(Propiedades del pullback).*
Sean $\omega_1, \omega_2, \eta \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^m)$ *entonces*

i $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$

ii $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\omega)$

iii $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$

iv $f^*(dx_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$.

Para definir el número de vueltas de una curva diferenciable en $\mathbb{R}^2$ necesitaremos calcular el pull back de una 1-forma $\omega(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ de claes C^1 definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to U$, es un camino diferenciable con continuidad (salvo en los extremos en los que se toman las derivadas laterales correspondientes), con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entonces sobre la base $\{dx, dy\}$ el pull back viene dado por $\gamma^*(dx) = x'(t)dt$, y $\gamma^*(dy) = y'(t)dt$. Luego

$$\begin{gathered}\gamma^*(\omega) = \gamma^*(pdx + qdy) = \gamma^*(pdx) + \gamma^*(qdy) \\ (p \circ \gamma)\gamma^*(dx) + (q \circ \gamma)\gamma^*(dy) \\ (p \circ \gamma)dx + (q \circ \gamma)dy.\end{gathered} \tag{3.1.2.2}$$

En definitiva si $v_t \in T_t(I)$ se tiene $\gamma^*(\omega)(t)(v_t) = \omega(\gamma(t))(d\gamma(t)(v_t)) = \{p(x(t), y(t))x'(t) + q(x(t), y(t))y'(t)\}dt$.

El siguiente teorema, también es consecuencia de la definición

Teorema 3.1.2.3 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial entonces*

$$f^*(g \cdot dx_1 \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_n) = (g \circ f)(\det Df)dx_1 \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

3.1.3. Diferenciación exterior.

En los textos de referencia se prueba la existencia de un operador llamado `diferenciación exterior.` Nosotros sólamente recordaremos su caracterización y algunas propiedades fundamentales.

Definición 3.1.3.1 ***(Operador diferenciacion).***
Dada la k-forma

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} p_{i_1, i_2, ..., i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... dx_{i_k}$$

se define **la diferencial exterior de** ω *como la* $k+1$ *forma* $d\omega$*:*

$$\begin{aligned} d\omega \doteq \textstyle\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} dp_{i_1,i_2,...,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ...dx_{i_k} = \\ \textstyle\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_{i_1,i_2,...,i_k}}{x_j} \cdot dx_j \right\} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ...dx_{i_k}. \end{aligned} \tag{3.1.3.1}$$

El operador diferenciación satisface las siguientes propiedades:

Proposición 3.1.3.2 *(Propiedades del operador diferenciacion).*
Sen $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}})$*,* $\eta \in \bigwedge^l(\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}})$ *y* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable, entonces:*

i $d(\omega+\eta) = d(\omega) + d(\eta)$.

ii $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{kl}\omega \wedge d\eta$.

iii $d^2(\omega) \doteq d(d\omega) = 0$.

iv $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$.

3.1.4. N-cubos, cadenas y bordes.

A los efectos de establecer los elementos básicos para la definición de integrales de formas damos los conceptos de n-cubos y n-cadenas singulares.

Definición 3.1.4.1 *Un* **n-cubo singular** *en* U *es una función* $c: [0,1]^n \to U$ *donde* $[0,1]^n \doteq [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...[0,1]$.

Por ejemplo un 0-cubo singular en U resulta ser un punto y un 1-cubo singular en U una curva en U. El concepto generaliza la noción de un cubo típico en $\mathbb{R}^n$, pues si se toma $I^n: [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ definido $I^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ se ve que un cubo en $\mathbb{R}^n$ es efectivamente un n-cubo singular en $\mathbb{R}^n$. Consideraremos solamente n cubos diferenciables.

Definición 3.1.4.2 *Una* n**-cadena singular** *es una suma formal de n-cubos singulares ponderada con enteros, es decir expresiones de la forma*

$$n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k \tag{3.1.4.1}$$

donde $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{Z}$ *y* $c_1, c_2, ..., c_k$ *son n-cadenas.*

Las n-cadenas pueden sumarse y multiplicarse por enteros de "manera natural": se define $n \cdot (n_ic_i) = (n \cdot n_i)c_i$ y $n_1c_i + n_2c_i = (n_1+n_2)c_i$ y luego se extiende linealmente.

Definición 3.1.4.3 *Dada la n-cadena c se define una (n-1)-cadena asociada, llamada* **borde de la cadena** *c, y denotada ∂c, como suma de (n-1)-cubos singulares de la siguiente manera.*

En primer lugar definiremos el borde del n-cubo singular típico I^n, es decir ∂I^n; para ello considerados dos tipos de n-1 cubos singulares asociados

$$\begin{aligned} I^n_{(i,0)}(\boldsymbol{x}) &= I^n(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \quad \boldsymbol{y} \\ I^n_{(i,1)}(\boldsymbol{x}) &= I^n(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n). \end{aligned} \tag{3.1.4.2}$$

El n-1 cubo $I^n_{(i,0)}$ se llama la $(i,0)$-cara de I^n y $I^n_{(i,1)}$ la $(i,1)$-cara de I^n. Definimos el borde del cubo típico

$$\partial I^n \doteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0,1} (-1)^{i+j} I^n_{(i,j)} \tag{3.1.4.3}$$

En segundo lugar definimos el borde de un n-cubo $c: \ I^n \to U$ via la composición $c_{(i,j)} = c \circ I^n_{(i,j)}$ para $j = 0, 1$ de manera que

$$\partial c \doteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0,1} (-1)^{i+j} c_{(i,j)} \tag{3.1.4.4}$$

Finalmente definimos el borde de una n-cadena $\partial(\sum_{i=1}^n n_i c_i) \doteq \sum_{i=1}^n n_i \partial(c_i)$ de forma tal que el operador borde, ∂, resulte ser lineal. Se puede probar que el operador ∂, satisface $\partial^2 = 0$, propiedad análoga a la del operador diferenciación exterior $d^2 = 0$.

3.1.5. Elemento de volúmen.

Recordemos que para orientar a un $\mathbb{V}$ $\mathbb{R}$-espacio vectorial se requiere de una base ordenada $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$. Ahora bien si $B' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, ..., \mathbf{v}'_n\}$ es otra base ordenada entonces existen escalares a_{ij} con $1 \leq i, j \leq n$ tal que para todo $j = 1, 2, ...n$ se tiene $\mathbf{v}'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{v}_i$. La matriz, $C(B', B) = (a_{ij})_{\ 1 \leq i,j \leq n}$, del cambio de base de B' a B, es no singular y por lo tanto $\det C(B', B) \neq 0$. En este contexto se dice que ambas bases dan la misma orientación si $\det C(B', B) > 0$. Esto permite establecer una relación de equivalencia definida sobre el conjunto de todas las bases ordenadas y observar que existen sólamente dos clases. De las dos orientaciones posibles se elige una como postiva.

Este proceso está construido a partir de la n-forma determinante, $\det \in \bigwedge^n(\mathbb{V})$. La orientación a la que pertenece $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ se nota $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n] = \mu$ y la contraria $-[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n] = -\mu$.

Por el teorema 3.1.1.8 una n-forma no nula (arbitraria) ω tiene el mismo signo sobre dos bases con la misma orientación; esto sugiere que para definir una oritenación sobre $\mathbb{V}$ es suficiente elegir una n-forma suave no nula, $\omega \neq 0$.

En el caso de $\mathbb{R}^n$ existe una única n-forma no nula tal que sobre la base ortonormal $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ vale 1; esta forma es por definición $\det$. Ahora supongamos que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno Φ arbitrario y que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, ..., \mathbf{v}'_n\}$ son dos bases ortonormales con respecto a Φ. Entonces

$$\delta_{ij} = \Phi(\mathbf{v}'_i; \mathbf{v}'_j) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki}a_{lj}\Phi(\mathbf{v}_i; \mathbf{v}_j) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki}a_{lj}.$$

Luego $A^t \cdot A = I$ y $\det(A) = \pm 1$. Así, de acuerdo al teorema 3.1.1.8 se tiene que si $\omega \in \bigwedge^n(\mathbb{V})$ y $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = \pm 1$ entonces $\omega(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, ..., \mathbf{v}'_n) = \pm 1$ y por lo tanto si se ha dado una orientación μ para $\mathbb{V}$ se deduce que existe una única $\omega \in \bigwedge^n(\mathbb{V})$ tal que $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) = 1$ siempre que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ sea tal que $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n] = \mu$.

Esta única n-forma ω suave y no nula se llama `elemento de volúmen` de $\mathbb{V}$ determinado por el producto interno Φ y la orientación μ. En este sentido det es el elemento de volúmen en $\mathbb{R}^n$ determinado por el producto interno ususal y la base canónica. El hecho de ser llamado elemento de volúmen queda justificado por el hecho de que $|\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)|$ es el volúmen del paralelepípedo formado por vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$

Observación 3.1.5.1 Se verifican algunos hechos básicos:

1. Cada $\omega \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$ suave no nulo es el elemento de volúmen determinado por algún producto interno Φ y alguna orientación μ
2. Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal entonces $f^* : \bigwedge^n(\mathbb{V}) \to \bigwedge^n(\mathbb{V})$ es la multiplicación por la constante, más precisamente por $k = \det f$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{V}$ un isomorfismo y ω el elmento de volúmen de $\mathbb{V}$ asociado al producto interno Φ y la orientación μ. Si $[f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), ..., f(\mathbf{e}_n)] = \mu$ entonces $f^*(\omega) = \det$
4. Sea $\omega \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$ el elemento de volúmen determinado por Φ y μ. Si $\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \in \mathbb{V}$ entonces $|\omega(\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n)| = \sqrt{\det g_{ij}}$ donde $g_{ij} = \Phi(\mathbf{w}_i; \mathbf{w}_j)$.

Ahora podemos relacionar el elemento de volúmen con el producto vectorial usual de $\mathbb{R}^3$ generalizado a $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ entonces definimos una función ϕ -producto vectorial en $\mathbb{R}^n$- de la siguiente manera; para todo

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ponemos $\phi(\mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{v}_{n-1} \end{pmatrix}$. De acuerdo a la definición, ϕ es una 1-forma o funcional, $\phi \in \bigwedge^1(\mathbb{R})$, y por lo tanto existe un único vector $\mathbf{z}$ tal que $\phi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}; \mathbf{z} \rangle = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{v}_{n-1} \end{pmatrix}$. Luego se puede definir un elemento de volúmen a partir del producto vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Elemento de volúmen de la esfera S^{n-1}.

Para el trabajo posterior es clave definir un elemento de volúmen de la esfera.

Sea $\mathbf{p} \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\}$ y consideramos una base $B = \{\mathbf{v}_{1,\mathbf{p}}, ..., \mathbf{v}_{n-1,\mathbf{p}}, \mathbf{v}_{n,p}\}$ del espacio tangente de la bola unitaria en el punto $\mathbf{p}$ con orientación positiva y la base inducida $B' = \{\mathbf{v}_{1,\mathbf{p}}, \mathbf{v}_{2,\mathbf{p}}, ..., \mathbf{v}_{n-1,\mathbf{p}}\}$ del espacio tangente $T_{\mathbf{p}}(S^{n-1})$.

Sea ω' la (n-1)-forma modelizada sobre el producto vectorial en $\mathbb{R}^n$, es decir

$$\omega'(\mathbf{p})(\mathbf{v}_{1,\mathbf{p}}, \mathbf{v}_{2,\mathbf{p}}, ..., \mathbf{v}_{n-1,\mathbf{p}}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v}_{1,\mathbf{p}} \\ \mathbf{v}_{2,\mathbf{p}} \\ \cdots \\ \mathbf{v}_{n-1,\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \tag{3.1.5.1}$$

La forma $\omega' > 0$ da una orientación positiva de la esfera S^{n-1}. Desarrollando el determinante por la última fila se ve que ω' es la restricción a S^{n-1} de la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n$$

definida sobre $\mathbb{R}^n$ es decir $\omega' \doteq i^*(\omega)$ siendo $i: \; S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Notaremos $\omega_{S^{n-1}} \doteq \omega'$

Ahora consideremos la retracción radial $\mathbf{r}: \; \mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\} \to S^{n-1}$ definida $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. ¿Cómo es el pull back via $\mathbf{r}$ de la forma $\omega_{S^{n-1}}$?

Podemos hacer un cálculo directo de $\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$ para $n = 2$ y $n = 3$.

Para $n = 2$ se tiene la retracción radial $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2/\{\mathbf{O}\} \to S^1$ definida $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ con $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$. En este caso $\omega = -x_2dx_1 + x_1dx_2$ y $\omega_{S^1} = i^*(-x_2dx_1 + x_1dx_2)$ es el elemento de volúmen de la 1-esfera $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Luego teniendo en cuenta que $dr_i = \frac{dx_i}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|^3}\sum_{j=1}^{2} x_jdx_j$ para $i = 1, 2$ y las propiedades de cálculo del pull back, la proposición 3.1.2.2, se sigue que

$$\mathbf{r}^*(\omega_{S^1}) = -r_2dr_1 + r_1dr_2 = \frac{-x_1dx_2 + x_2dx_1}{x_1^2 + x_2^2} \tag{3.1.5.2}$$

Una cuenta análoga, un poco más laboriosa, muestra que para $n = 3$ el resultado es

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}^*(\omega_{S^2}) = \tfrac{xdy\wedge dz - ydx\wedge dz + zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &\tfrac{1}{\nu^3}\left\{xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy\right\} \end{aligned} \tag{3.1.5.3}$$

El próximo teorema generaliza estas ideas caracterizando la forma $\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$

Teorema 3.1.5.2 `Pullback de la retraccion.`
Sea $\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_idx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n$ *definida sobre* $\mathbb{R}^n$ *y* $\omega_{S^{n-1}} \doteq i^*(\omega)$ *la restricción de* ω *a* S^{n-1}*. Si* $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\} \to S^{n-1}$ *es la retracción radial, entonces*

$$\boldsymbol{r}^*(\omega_{S^{n-1}})(\boldsymbol{p}) = \frac{\omega(\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{p}\|^n}.$$

Luego

$$\boldsymbol{r}^*(\omega_{S^{n-1}}) = \frac{1}{\nu^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_idx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \tag{3.1.5.4}$$

donde $\nu^n(\boldsymbol{p}) \doteq \|\boldsymbol{p}\|^n$.

A veces usaremos la notación $\omega_{\mathbf{O}} \doteq \mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$ dejando la lado la referencia explícita a la dimensión n.

3.1.6. Integrales de k-formas sobre n-cadenas.

En esta subsección damos la fefinición de intergral de formas y recordamos el teorema de Stokes

Definición 3.1.6.1 *Si ω es una k-forma sobre I^k, entonces $\omega = f\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge ...dx_k$ y definimos*

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_k \doteq \int_{[0,1]^k} f\ dx_1 dx_2 ... dx_k = \int_{[0,1]^k} f. \tag{3.1.6.1}$$

Si ω es una k-forma definida en U y $c : [0,1]^k \to U$ es un k-cubo singular en U entonces definimos

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*(\omega) \tag{3.1.6.2}$$

donde $c^*(\omega)$ es el pull back de la forma ω. Observemos que una 0 forma es una función; en tal caso definimos $\int_c \omega = \omega(c(0))$.

Por último si ω es una k-forma definida en U y $\sum_{i=1}^n n_i c_i$ una k-cadena entonces en U se define

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^n n_i \int_{c_i} \omega \tag{3.1.6.3}$$

Clásicamente las integrales de 1-formas sobre 1-cadenas singulares se denominan integrales de línea; las integrales de 2-formas sobre 2-cadenas singulares se denominan integrales de superficie. Nosotros usaremos la siguiente notación: si ω es una k-forma definida sobre U y c una k-cadena singular entonces en U escribiremos la integral de ω sobre c así: $\int_c \omega \doteq I_\gamma(\omega)$.

También recordamos la importante generalización del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 3.1.6.2 *(Teorema de Stokes).*

Si M es una variedad orientada k-dimensional con borde ∂M, con la orientación inducida y ω es una $k-1$ forma en M con soporte compacto, entonces $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.

En particular si ω es una $k-1$ forma en U y c es una k-cadena en U entonces $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$. El teorema de la divergencia de Green es un caso particular de Stokes para n=2 y el de la divergencia de Gauss una consecuencia directa del mismo:

Teorema 3.1.6.3 *(Teorema de la divergencia).*

Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ variedad compacta con frontera, $\boldsymbol{n}$ la normal exterior unitaria en ∂M y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial diferenciable definido sobre M. Entonces $\int_M Div\boldsymbol{F} dV = \int_{\partial M} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$.

3.1.7. Formas cerradas y exactas.

Definición 3.1.7.1 *Una k-forma ω se llama* `cerrada` *sii $d\omega = 0$ y* `exacta` *sii existe una $k-1$-forma η tal que $d\eta = \omega$.*

Si $d\eta = \omega$ en U entonces se dice que la función η es una **primitiva** de ω en U. Teniendo en cuenta que $d^2 = 0$ se ve que toda forma exacta es cerrada. Es de interés caracterizar el tipo de conjuntos bajo los cuales una forma cerrada resulta ser exacta; en esta subsección señalamos algunos tipos fundamentales.

Si $\omega = pdx + qdy$ una 1-forma en $\mathbb{R}^2$, entonces de acuerdo a la proposición referida a las propiedades del operador diferenciación exterior,

$$\begin{gathered} d\omega = d(pdx + qdy) = (p_x dx + p_y dy) \wedge dx + (q_x dx + q_y dy) \wedge dy = \\ p_x dx \wedge dx + p_y dy \wedge dx + q_x dx \wedge dy + q_y dy \wedge dy = p_y dy \wedge dx + q_x dx \wedge dy = \\ -p_y dx \wedge dy + q_x dx \wedge dy = (q_x - p_y) dx \wedge dy. \end{gathered} \tag{3.1.7.1}$$

Luego ω es cerrada sii $p_y = q_x$ y se ve que una `condición necesaria` para que ω sea exacta es que $p_y = q_x$. Veremos que en general no es suficiente.

Análogamente, para que una 1-forma $\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ definida en $\mathbb{R}^n$ sea cerrada es necesario y suficiente que se satisfagan las identidades $p_{i,j} = p_{j,i}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Luego si se quiere integrar la ecuación $\omega = df$, es decir encontrar una función f definida en el dominio de ω tal que $f_{x_i} = p_i$ para $i = 1, 2, ..., n$ es necesario que se cumplan las relaciones $p_{i,j} = p_{j,i}$ para $1 \leq i, j \geq n$.

Para que una 2-forma ω sea exacta se requieren más condiciones sobre las derivadas parciales de los coeficientes de la forma.

Por ejemplo si $\omega = Ady \wedge dz - Bdx \wedge dz + Cdx \wedge dy$ es una 2- forma definida en $\mathbb{R}^3$ entonces una cuenta sencilla muestra que $d\omega = 0$ sii

$$A_x + B_y + C_z = 0.$$

Por otro lado $\omega = d(Pdx + Qdy + Rdz)$ para ciertas funciones suaves P, Q y R sii

$$R_y - Q_z = A,\ P_z - R_x = B,\ R_x - Q_y = C.$$

Admás observamos que si se identifica la forma ω con el campo inducido por sus componentes $\mathbf{F}_1 = (A, B, C)$ y se pone $\mathbf{F}_2 = (P, Q, R)$ entonces se ve que ω es exacta sii $\mathbf{F}_1 = \nabla \times \mathbf{F}_2$ para cierto campo suave $\mathbf{F}_2$ y que es cerrada sii $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = 0$.

Asimismo se verifica que si $\omega = pdx + qdy$ es una 1-forma cerrada definida en `todo` $\mathbb{R}^2$, es decir satisface $q_y = p_x$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$, entonces se puede encontrar una función h definida en $\mathbb{R}^2$ tal que $\omega = dh$. Más aún, el teorema de Poincaré, enunciado más adelante, muestra que toda forma definida sobre $\mathbb{R}^n$ cerrada es exacta.

Sin embargo esto no ocurre en general. Usaremos la forma $\omega_{S^{n-1}}$ para mostrar que existe una (n-1)-forma cerrada sobre $\mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\}$ que no es exacta. Más precisamente la n-1 forma $\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$ definida en $\mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\}$ es cerrada pero no es exacta.

Por un lado sabemos que $\omega_{S^{n-1}}$ es cerrada pero no exacta pues como $\omega_{S^{n-1}} > 0$ se tiene que $\int_{S^{n-1}} \omega_{S^{n-1}} > 0$; luego por Stokes, teorema 3.1.6.2, se tiene que $\omega_{S^{n-1}}$ no es exacta.

Por otro lado si consideramos $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\}$ la inclusión entonces $\mathbf{r} \circ i = id : \ S^{n-1} \to S^{n-1}$ es la identidad. Luego $\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$ es cerrada pues $d(\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})) = \mathbf{r}^* d(\omega_{S^{n-1}}) = 0$ pero, si fuera exacta, se tendría $\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}}) = d\eta$ luego tomando pull-back de la inclusión se llegaría a la conclusión de que $\omega|_{S^{n-1}} = i^*(d\eta) = d(i^*\eta)$ es exacta lo cual sabemos que no es cierto.

3.2. El número de vueltas para caminos en $\mathbb{R}^2$.

Antes de abordar el concepto de número de vueltas en el plano enunciaremos una serie de resultados clásicos relacionados con integrales de líneas, formas exactas y cerradas.

3.2.1. * Integrales de 1-formas. Formas cerradas y exactas en $U \subset \mathbb{R}^2$

Ahora definiremos un dominio en el que la 1-forma $\omega_{\mathbf{O}}$ definida en $\mathbb{R}^2/\{\mathbf{0}\}$ resulta ser exacta y daremos explícitamente una primitiva definida en dicho dominio.

Para ello consideremos $f : U \doteq \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida

$$f(r, \theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta)).$$

Se verifica fácilmente que la función f es inyectiva y $Df(r, \theta) \neq 0$ para todo $(r, \theta) \in U$. Además se puede ver que $f(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)) = \mathbb{R}^2_+$ donde $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}^2/\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, \ x \geq 0\}$ es el abierto definido como el plano al que se le sustrae el eje real no negtivo. Entonces la función $f : U \to \mathbb{R}^2_+$ es inversible y podemos definir

$$f^{-1} = p : \ \mathbb{R}^2_+ \to U.$$

En este contexto la función $p(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$ se llama `coordenadas polares`. Claramente se ve que la `función radio` está definida $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Además si elegimos $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ podemos definir explícitamente

$$\theta(x,y) = \begin{cases} arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{si} \quad x > 0, \quad y > 0 \\ \pi/2 \quad \text{si} \quad x = 0, \quad y > 0 \\ \pi + arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{si} \quad x < 0 \\ 3\pi/2 \quad \text{si} \quad x = 0, \quad y < 0 \\ 2\pi + arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{si} \quad x > 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{3.2.1.1}$$

Teniendo en cuenta que $D\theta(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y}; \frac{x}{x^2+y^2})$ se ve que

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \omega_{\mathbf{O}}. \tag{3.2.1.2}$$

Luego θ es una primitiva de $\omega_{\mathbf{O}}$ en $\mathbb{R}^2_+$.

Observemos que la función θ se ha definido sólamente en el conjunto $\mathbb{R}^2_+$ y que su valor está determinado `salvo un múltiplo de` 2π; además cualquiera de esos números denota el ángulo del punto $\mathbf{P}$. Por otro lado para todo punto $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2_+$ la función radio r, que designa la distancia de $\mathbf{P}$ al origen $\mathbf{O}$, está definida unívocamente.

Hemos visto en general que la n-1 forma $\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$ definida sobre $\mathbb{R}^n/\{\mathbf{O}\}$ es cerrada pero no exacta. Ahora podemos verificar, para el caso particular $n = 2$, ese resultado a partir de la definición de θ. ¿Podría existir una función continua $g : \mathbb{R}^2/\{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ tal que $dg = \omega_{\mathbf{O}}$.? De ser así $g = \theta + k$ y por lo tanto el eje x positivo sería de discontinuidad. Luego no es posible definir una primitiva en todo su dominio natural.

La siguiente proposición da un criterio para desestimar la exactitud. Su demostración es consecuencia inmediata del teorema de Stokes.

Proposición 3.2.1.1 *Sean ω una 1-forma exacta en U y γ un camino diferenciable con traza en U. Entonces $I_\gamma(\omega) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.*

Usando este criterio nuevamente podemos corroborar que $\omega_{\mathbf{O}}$ no es exacta en $\mathbb{R}^2/\{\mathbf{O}\}$. Para ello basta considerar la circunsferencia $C_{\mathbf{O},1}$ de radio 1 centrada en el origen, parametrizada por $\gamma_{\mathbf{O},1}(t) = (cos(t), sen(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$, y hacer el cálculo $I_{\gamma_{\mathbf{O},1}}(\omega_{\mathbf{O}}) = 2\pi \neq 0$.

El resultado previo afirma que las integrales de formas exactas sobre curvas suaves son independientes del camino que une los puntos extremos, $P_a = \gamma(a)$ y $P_b = \gamma(b)$.

Observación 3.2.1.2 También señalamos una serie de hechos elementales de interés, que relacionan la propiedad de conexión y las formas cerradas:

1. Una función f definida en un abierto U es localmente constante sii es constante en cada componente conexo. En particular es constante si U es un abierto conexo.

2. Si f es una función diferenciable con continuidad en U entonces f es localmente constante sii $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, es decir sii $df = 0$; en particular si U es un abierto conexo entonces f es constante sii $df = 0$.

3. Del ítem anterior se deduce inmediatamente que $df = dg$ sobre U sii $f - g$ es localmente constante.

4. Como corolario del punto anterior se obtiene que el conjunto U es conexo sii toda función diferenciable con continuidad tal que $df = 0$ es constante.

Más generalmente consideraremos integrales de 1-formas definidas sobre caminos diferenciables de a trozos.

Definición 3.2.1.3 *Sea* $\{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ *una partición del intervalo* $[a, b]$. *Consideremos* $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ $\; i = 1, 2, .., n$ *y* $\gamma_i : \; I_i \to U$ *caminos diferenciables con continuidad en* (t_{i-1}, t_i) *de forma tal que* $\gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i)$ *para* $i = 1, 2, ..., n-1$. *Definimos el camino* ***diferenciable con continuidad de a trozos*** $\gamma : [a, b] \to U$ *de la siguiente manera: dado* $t \in [a, b]$ *consideramos un índice i tal que* $t \in I_i$ *y ponemos* $\gamma(t) = \gamma_i(t)$.

Claramente la función γ está bien definida y es diferenciable con continuidad salvo tal vez en los puntos t_i; $\; i = 0, 1, 2, ..., n-1, n$. Asimismo dada una 1-forma ω definida sobre U definimos su integral γ de la siguiente manera:

$$I_\gamma(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n-1} I_{\gamma_i}(\omega) \tag{3.2.1.3}$$

Para un camino diferenciable con continuidad de a trozos escribiremos

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i.$$

Con esta notación se tiene

$$I_{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i}(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n-1} I_{\gamma_i}(\omega).$$

Observación 3.2.1.4 La proposición 3.2.1.1 se puede generalizar: si γ es un camino diferenciable con continuidad de a trozos en U y ω es una 1-forma exacta en U, $\omega = df$, entonces $I_\gamma(\omega) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, pues los términos intermedios se cancelan.

La propiedad de que la integral de una 1-forma sea independiente del camino caracteriza a las formas exactas. Este es un resultado clásico del análisis en varias variables reales o de variable compleja y su demostración puede consultarse en los textos de referencia.

Proposición 3.2.1.5 *Sea ω una 1-forma definida en U. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $I_\gamma(\omega) = I_\delta(\omega)$ *para todo par de caminos γ y δ diferenciables con continuidad de a trozos en U con iguales puntos extremos.*

2. $I_\varphi(\omega) = 0$ *para todo camino φ diferenciable con continuidad de a trozos cerrado en U.*

3. $\omega = df$ *para alguna función f diferenciable con continuidad en U.*

Observación 3.2.1.6 Recordemos también el criterio de exactitud enunciado al comienzo de esta sección: $\omega = pdx + qdy$ es exacta sii $p_y = q_x$. Ahora señalamos que frecuentemente se usa la equivalencia entre los puntos 2 y 3 de la proposición 3.2.1.5 como criterio de exactitud, es decir, ω es exacta en el abierto U sii $I_\gamma(\omega) = 0$ para todo camino γ con traza en U. En particular, usando el teorema de Stokes se puede ver que las 1-formas cerradas en un rectángulo U tienen integral nula sobre el borde del rectángulo:

Lema 3.2.1.7 *Si ω es una 1-forma cerrada definida en un rectángulo U entonces $I_{\partial R}(\omega) = 0$.*

Ahora veremos explícitamente la construcción de una primitiva para formas cerradas en algunos casos especiales.

Comenzamos viendo que eso puede realizarse al menos para `rectángulos en un sentido amplio`, en particular para 1-formas cerradas en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 3.2.1.8 *Sea $U = [a, b] \times [c, d]$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty, \infty \leq c < d \leq \infty$. Si $\omega = pdx + qdy$ es una 1-forma cerrada en U entonces es exacta en U.*

Demostración. Fijamos un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) \in U$.

En primer lugar consideremos cualquier $\mathbf{P} = (x, y) \in U$ con $x \geq x_0$, $y \geq y_0$ y definimos la función

$$f(x, y) = I_\gamma(\omega)$$

donde $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ es el camino compuesto por el lado vertical izquierdo y horizontal superior, es decir $\gamma_1(t) = (x_0, y_0 + t)$ con $0 \leq t \leq y - y_0$ y $\gamma_2(t) = (x_0 + t, y)$ con $0 \leq t \leq x - x_0$. Entonces se verifica que $\frac{\partial f}{\partial x} = p$.

Lo mismo es cierto si $y < y_0$ reemplazando γ_1 por $\gamma_1(t) = (x_0, y_0 - t)$ con $0 \leq t \leq y_0 - y$ y análogamente si $x < x_0$ reemplazando γ_2 por $\gamma_2(t) = (x_0 - t, y)$ con $0 \leq t \leq x_0 - x$.

De manera similar definimos la función

$$g(x, y) = I_{\gamma^*}(\omega)$$

con $\gamma^* = \gamma_1^* + \gamma_2^*$ donde γ_1^* es el camino horizontal inferior que une (x_0, y_0) con (x, y_0) y γ_2^* el vertical derecho que une (x, y_0) con (x, y). También se verifica que $\frac{\partial g}{\partial y} = q$.

De acuerdo al lema 3.2.1.7, consecuencia de Stokes, se ve que $f(x, y) = g(x, y)$ y teniendo en cuenta que $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ y $\frac{\partial g}{\partial y} = q$ se tiene que $\omega = df$. ■

Observación 3.2.1.9 La proposición 3.2.1.8 vale sobre una clase más amplia de conjuntos.

1. Si ω es una 1-forma cerrada definida sobre una bola abierta U arbitraria entonces es exacta en U. Tambien sigue siendo válido para conjuntos abiertos convexos.

2. Si ω es una 1-forma cerrada definida sobre el abierto U arbitrario entonces, si bien no es necesariamente exacta, por la proposición 3.2.1.8, o bien por el punto anterior, es localmente exacta.

3. No es difícil verlo para unión de dos rectángulos con intersección conexa. Más precisamente:

Sean U_1, U_2 rectángulos abiertos en el sentido amplio tal que $U = U_1 \cap U_2$ es conexa. Si ω es una 1-forma cerrada en U entonces es exacta en U.

Para ver esto, observemos que existen de acuerdo a 3.2.1.8, funciones diferenciables con continuidad f_i, $i = 1, 2$ tal que $\omega|_{U_i} = df_i$ para $i = 1, 2$.

Ahora como $d(f_1 + f_2) = \omega - \omega = 0$ sobre $U_1 \cap U_1$ conexo entonces por el punto 3 de la observación 3.2.1.2 existe una constante c tal que $f_1 = f_2 + c$. En particular podemos elegir de entrada f_2 para que coincida con f_1 sumándole la constante adecuada. Luego si definimos f sobre U como f_1 sobre U_1 y f_2 sobre U_2, se verifica que $df = \omega$ sobre U.

Esta última observación permite probar con cierta facilidad los dos siguientes lemas.

Lema 3.2.1.10 *Sean U_1 y U_2 abiertos y $U_1 \cap U_2$ conexa. Sea $U = U_1 \cup U_2$. Si ω es una 1-forma definida sobre U tal que para $i = 1, 2$ $\omega|_{U_i}$ es exacta entonces ω es exacta sobre U.*

Además esta propiedad se puede generalizar para una unión finita de abiertos.

Lema 3.2.1.11 *Sean U_i $i = 1, 2, ..., n$ abiertos, y $U = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$. Si ω es una 1-forma definida sobre U tal que $\omega|_{U_i}$ es exacta y $\left\{\bigcup_{j=1}^{i} U_j\right\} \bigcap U_{i+1}$ es conexo para cada $i = 1, 2, ..., n-1$, entonces ω es exacta en U.*

Todos los casos anteriores son explicados por el teorema de Poincaré quien ha descubierto una condición suficiente más general para que una forma cerrada sea exacta; esta condición es que el conjunto en cuestión sea contractil. En particular son contráctiles los conjuntos estrellados respecto de un punto, digamos del origen.

Un abierto U con la propiedad de que si $\mathbf{x} \in U$ entonces el segmento $[\mathbf{0}, \mathbf{x}] \subset U$ se llama `estrellado respecto del` $\mathbf{0}$ y el teorema de Poincaré prueba que si ω es cerrada sobre un conjunto estrellado respecto del $\mathbf{0}$ entonces es exacta, es decir $d(I_\omega) = \omega$ para alguna forma I_ω suave.

Podemos esbozar la heurística para el caso de una 1-forma. Supongamos que $\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ es exacta, es decir $\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} dx_i$. Para ello podemos suponer que $f(\mathbf{0}) = 0$ y escribir

$$\begin{array}{c} f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t\mathbf{x}) dt = \\ \int_0^1 \{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(t\mathbf{x}) x_i\} dt = \\ \int_0^1 \{\sum_{i=1}^{n} p_i(t\mathbf{x}) x_i\} dt. \end{array} \tag{3.2.1.4}$$

Esta cuenta sugiere que se busque una función f tal que

$$I_\omega(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t\mathbf{x}) x_i \right) dt.$$

Notemos que la integral está bien definida pues U es un abierto estrellado. La demostración es técnica [Spivack M, 1979] y la idea consiste en asociar a cada l-forma

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} p_{i_1,i_2,...,i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ...dx_{i_k}$$

una $l-1$-forma

$$I_\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \left\{ \int_0^1 t^{l-1} p_{i_1,i_2,...,i_k}(t\mathbf{x}) dt \right\} dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

donde $\widehat{dx_{i_j}}$ significa que el factor ha sido suprimido. Se prueba que la forma I_ω satisface que $I_\omega(\mathbf{0}) = 0$ y además $\omega = I(d\omega) + d(I_\omega)$; luego se obtiene el resultado teniendo en cuenta la hipótesis $d\omega = 0$.

También señalamos que la proposición 3.2.1.8 permite reducir el cálculo de una integral de una 1-forma a una suma de diferencias. Más precisamente.

Proposición 3.2.1.12 *Si ω es cerrada definida en un abierto U y $\gamma : [a, b] \to U$ es un camino suave entonces existe una partición del intervalo [a,b], $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ y una colección de abiertos U_i, $i = 1, 2, ..., n$ tal que para cada i $\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ y $\omega|_{U_i} = df_i$ para ciertas funciones f_i suaves. Luego*

$$I_\gamma(\omega) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\gamma(t_i)) - f_i(\gamma(t_{i-1}))].$$

Demostración. Siendo U abierto, por la proposición 3.2.1.8 podemos elegir para cada $\mathbf{P} \in U$ un entorno abierto $U_\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P} \in U_\mathbf{P} \subset U$ sobre el cual la 1-forma sea exacta. Luego los conjuntos $\{\gamma^{-1}(U_\mathbf{P})\}_{\mathbf{P}\in U}$ forman un cubrimiento por abiertos del compacto $[a, b]$. Por el lema de Lebesgue, dado un cubrimiento por abiertos de un compacto existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquier subconjunto del compacto de diámetro menor que ε está contenido en algún conjunto del cubrimiento, de manera que podemos construir una partición y un cubrimiento finito por abiertos con la propiedad de que para $i = 1, 2, ..., n$ se tenga que $\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$. Ahora fijada tales colecciones elegimos funciones suaves f_i $i = 1, 2, ..., n$ tales que $\omega|_{U_i} = df_i$ y consideramos $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ de manera que

$$I_\gamma(\omega) = \sum_{i=1}^{n} I_{\gamma_i}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\gamma(t_i)) - f_i(\gamma(t_{i-1}))]. \blacksquare$$

Los siguientes lemas cuyas demostraciones se siguen de la proposición 3.2.1.8 serán utilizados en el próximo capítulo para vincular el grado con el grupo de cohomología de Rham.

Lema 3.2.1.13 *Sean* $U = \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$*. Si* ω *es una 1-forma cerrada definida sobre el abierto* U *y si además* $I_{\gamma_{\boldsymbol{P},r}}(\omega) = 0$ *para toda* $\gamma_{\boldsymbol{P},r}(t) = \boldsymbol{P} + (cos(2t\pi), sen(2t\pi))$ *con* $r > 0$ *entonces* ω *es exacta sobre* U*.*

Lema 3.2.1.14 *Sean* $U = \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$*. Si* ω *es una 1-forma cerrada sobre* U *y además* $I_{\gamma_{\boldsymbol{P},r}}(\omega) = 0$*,* $I_{\gamma_{\boldsymbol{Q},r}}(\omega) = 0$ *para todas las curvas* $\gamma_{\boldsymbol{P},r}$ *y* $\gamma_{\boldsymbol{Q},r}$ *con* $r > 0$ *definidas como en el lema 3.2.1.13 entonces* ω *es exacta sobre* U*.*

Finalmente cerramos esta subsección con el enunciado de una proposición que vincula el concepto de homotopías entre curvas con el de 1-formas cerradas. La demostración de esta proposición puede encararse en forma analítica o topológica [Fulton, W., 1997]. Optamos por la demostración de tipo topológico teniendo en cuenta que la misma técnica será utilizada posteriormente.

Proposición 3.2.1.15 *Si* γ *y* δ *son dos caminos homotópicos (o bien como caminos con iguales extremos o bien como caminos cerradas) y* ω *es una 1-forma cerrada entonces*

$$I_\gamma(\omega) = I_\delta(\omega).$$

Demostración. Damos la demostración correspondiente al caso de curvas con iguales extremos fijos. Consideramos la homotopía H definida sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [a, b]$. Podemos considerar que cada punto de la imagen $H(R)$ tiene un entorno sobre el cual la 1-forma ω es exacta. Ahora utilizando el lema de cubrimiento de Lebesgue consideramos particiones de los lados del rectángulo $\{t_i\}$, $\{s_j\}$ con $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$ de forma tal que cada subrectángulo $R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ es enviado por H en un abierto U_{ij} sobre el cual $\omega = df_{ij}$ para cierta función suave f_{ij}. Luego $I_{\partial R_{ij}}(\omega) = 0$. Ahora el resultado se sigue de la igualdad $I_\gamma(\omega) - I_\delta(\omega) = I_{\partial R}(\omega) = \sum_{i,j} I_{\partial R_{ij}}(\omega) = 0$. ■

3.2.2. Variación total del ángulo para caminos suaves.

Con el trabajo realizado en la subsección anterior estamos en condiciones de abordar la definición del número de vueltas; para ello comenzamos estudiando la variación total del ángulo que forma un camino suave cuando el vector posición recorre su traza desde el punto inicial al final; esta medida es signada y el signo depende de la orientación. Posteriormenbte definiremos el número de vueltas para caminos suaves y suaves de a trozos y finalmente abordaremos el caso continuo.

Consideremos nuevamente la 1-forma $\omega_{\mathbf{O}} = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ definida en $\mathbb{R}^2/\{\mathbf{O}\}$. Si tomamos, por ejemplo, $\mathbf{P}_0 = (2,2)$ y $\mathbf{P}_1 = (1,-1)$ entonces para `cualquier arco diferenciable` γ que une ambos puntos con traza en el dominio de θ vale que

$$\begin{array}{c} I_\gamma(\omega_0) = I_\gamma(d\theta) = \theta(1,-1) - \theta(2,2) = \\ 2\pi + arctg(\frac{-1}{1}) - arctg(\frac{2}{2}) = \\ 2\pi + arctg(-1) = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}. \end{array} \tag{3.2.2.1}$$

justamente la medida del ángulo que se forma entre el segmento inicial $\overline{\mathbf{OP}}_0$ y el final $\overline{\mathbf{OP}}_1$.

En primer lugar si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2/\{\mathbf{O}\}$ es un camimo suave que en coordenadas cartesianas se expresa así $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ deseamos expresar la curva γ en coordenadas polares, esto es, a través de funciones suaves que denotaremos $r(t)$ y $\theta(t)$; más precisamente como

$$\gamma(t) = r(t)(cos(\theta(t)), sen(\theta(t))) \tag{3.2.2.2}$$

para $t \in [a,b]$.

Como ya lo hemos señalado la función radio está unívocamente definida $r(t) = \|\gamma(t)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, no así la `función ángulo` $\theta(t)$ pues existen infinitas elecciones módulo 2π. Si tomáramos el único valor que se encuentra en el intervalo $(0, 2\pi]$ entonces la elección sería unívoca pero no continua al atravesar el semieje no negativo correspondiente a x.

Con base en las observaciones anteriores podemos ahora encarar la definición de la función ángulo mediante otro enfoque. Comenzamos eligiendo arbitrariamente un `ángulo inicial` $\theta(a) = \theta_a$ de manera que

$$\gamma(a) = r(a)(cos(\theta_a), sen(\theta_a)).$$

Ahora teniendo en cuenta la construcción de la primitiva de $\omega_{\mathbf{O}}$ y su interpretación definimos la función ángulo como la única solución del siguiente problema de valores iniciales (p.v.i):

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta'(t) = \frac{-y(t)x'(t)+x(t)y'(t)}{x^2(t)+y^2(t)} = \frac{-y(t)x'(t)+x(t)y'(t)}{r^2(t)} \\ \theta(a) = \theta_a. \end{array} \right. \tag{3.2.2.3}$$

es decir, definimos la función ángulo integrando la ecuación diferencial ordinaria

$$\theta(t) = \theta(a) + \int_a^t \frac{-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)}{r^2(t)} dt \tag{3.2.2.4}$$

La siguiente proposición muestra la buena definición de las funciones r y θ.

Proposición 3.2.2.1 *Si γ es $C^\infty(I)$ entonces las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$ son $C^\infty(I)$ y satisfacen la ecuación (3.2.2.2).*

Demostración. Como γ es $C^\infty(I)$ entonces $r(t)$ es $C^\infty(I)$ por ser composición de funciones de esa clase y $\theta(t)$ es $C^\infty(I)$ por ser la integral de una función de esa clase.

Ahora comprobaremos que se cumple la ecuación (3.2.2.2). Sea

$$\mathbf{u}(t) = (cos(\theta(t)), sen(\theta(t))).$$

Verificaremos que

$$\frac{1}{r(t)}\gamma(t) = \mathbf{u}(t).$$

En primer observamos que ambas funciones coinciden en $t = a$. Si ponemos

$$\mathbf{w}(t) = (-sen(\theta(t)), cos(\theta(t)))$$

entonces resulta que $\mathbf{w}(t) \perp \mathbf{u}(t)$ para cada t; en particular los vectores $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$ son linealmente independientes para cada t, de manera que si probamos que la diferencia

$$\mathbf{z}(t) \doteq \frac{1}{r(t)}\gamma(t) - \mathbf{u}(t)$$

es ortogonal a $\mathbf{u}(t)$ y a $\mathbf{w}(t)$ para cada t entonces deberá ser cero y de ahí el resultado. Ahora bien, se verifica directamente del cálculo que para todo t vale $\mathbf{z}(t) \perp \mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{z}(t) \perp \mathbf{w}(t)$. ■

Observación 3.2.2.2 Si θ es la única función $C^\infty(I)$ que satisface (3.2.2.2) y si además se reemplaza el valor ángulo inicial θ_a por $\theta_a + 2n\pi$ entonces la única función $C^\infty(I)$ que satisface el correspondiente p.v.i es $\theta + 2n\pi$.

Definición 3.2.2.3 *Dada un camino suave $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{O}\}$ se define la* ***variación total del ángulo*** *formado por el vector radial $\boldsymbol{r} = (x, y)$*

cuando recorre el traza del camino γ, designada como $\triangle_\gamma \boldsymbol{ang}(\boldsymbol{r})$ mediante la diferencia $\theta(b)-\theta(a)$, o sea

$$\begin{array}{c} \triangle_\gamma \boldsymbol{ang}(\boldsymbol{r}) = \int_\gamma \omega_{\boldsymbol{O}} = \\ \int_a^b \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \\ \int_a^b \frac{-y(t)x'(t)+x(t)y'(t)}{r^2(t)} dt = \\ \theta(b)-\theta(a). \end{array} \tag{3.2.2.5}$$

Observación 3.2.2.4 Teniendo en cuenta la definición de θ (3.2.2.4) es claro que la definición de la variación total es independiente del valor inicial.

3.2.3. El número de vueltas de caminos suaves de a trozos.

Motivados por el anterior desarrollo podemos dividir la variación total del ángulo asociado a un camino suave por 2π para medir el número de vueltas que da el camino alrededor del origen; es decir

Definición 3.2.3.1 *Dado un camino suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{O}\}$ se define el* ***número de vueltas o índice de*** γ ***alrededor del origen O****, y denotado $W(\gamma, \boldsymbol{O})$, de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} W(\gamma, \boldsymbol{O}) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega_{\boldsymbol{O}} = \tfrac{1}{2\pi} \triangle_\gamma \boldsymbol{ang}(\boldsymbol{r}) \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_\gamma \tfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} \end{aligned} \tag{3.2.3.1}$$

Además si γ es un camino suave por partes entonces existen caminos suaves γ_i $i = 1, 2, ..., n$ tal que $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ y en tal caso se define el número de vueltas de γ alrededor del $\boldsymbol{O}$ así:

$$W(\gamma, \boldsymbol{O}) = \sum_{i=1}^n W(\gamma_i, \boldsymbol{O}) \tag{3.2.3.2}$$

Se espera que para el caso de caminos cerrados suaves por partes el número de vueltas sea entero y efectivamente se tiene el siguiente:

Teorema 3.2.3.2 *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{O}\}$ es un camino cerrado suave de a trozos entonces $W(\gamma, \boldsymbol{O}) \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{P}_a = \gamma(a)$ y $\mathbf{P}_b = \gamma(b)$. En primer lugar elegimos arbitrariamente un ángulo para el punto $\mathbf{P}_a$, digamos θ_a.

La demostración consiste en probar la siguiente: `Afirmación:` $\theta_b = \theta_a + 2\pi W(\gamma, \mathbf{O})$ es un ángulo para el punto $\mathbf{P}_a$.

Observemos que si esto es así se probará el resultado puesto que $\mathbf{P}_a = \mathbf{P}_b$ y dos ángulos deben diferir en un múltiplo entero de 2π, es decir como $2n\pi = \theta_b - \theta_a = 2\pi W(\gamma, \mathbf{O})$ entonces $W(\gamma, \mathbf{O}) = n$. Por otro lado siendo γ suma de caminos diferenciables con continuidad, podemos probar la afirmación para caminos diferenciables con continuidad, pues en tal caso el número de vueltas sería una suma de números enteros. Supongamos entonces que γ es un camino suave. Ahora, la afirmación se sigue inmediatamente de la definición de función ángulo (3.2.2.4) con valor inicial $\theta(a) = \theta_a$, pues en tal caso

$$\theta_b = \theta(b) = \theta_a + 2\pi W(\gamma, \mathbf{O}). \blacksquare$$

Desde luego que el origen $\mathbf{O}$ no cumple ningún papel esencial en la definición del número de vueltas. Dado un punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ arbitrario que no pertenezca a la traza de un camino suave γ podemos dar la siguiente:

Definición 3.2.3.3 *Sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$, $\gamma = (x(t), y(t))$ *un camino suave por partes y* $\omega_{\boldsymbol{P}}$ *la* 1*-forma*

$$\omega_{\boldsymbol{P}} = \frac{-(y-y_0)dx + (x-x_0)dy}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Se define el número de vueltas de γ *alrededor del punto* $\boldsymbol{P}$ *así:*

$$W(\gamma, \boldsymbol{P}) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega_{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{-(y-y_0)dx+(x-x_0)dy}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{3.2.3.3}$$

3.2.4. El número de vueltas de caminos continuos.

El próximo paso consiste en definir el número de vueltas de un camino continuo alrededor de un punto $\mathbf{P}$ arbitrario. Se verá que las propiedades que cumple el número de vueltas de un camino continuo son, en principio, análogas a las que hemos probado en el segundo capítulo para el grado. Más adelante, luego de la generalización del número de vueltas para campos, veremos que en verdad ambos conceptos coinciden de forma tal que son las mismas.

En primer lugar damos el concepto de sector angular sobre el cual la función ángulo resulta ser continua por definición.

Definición 3.2.4.1 *Sea*

$$S = \{(r, \theta) : r > 0,\ \theta_1 < \theta < \theta_2\} \tag{3.2.4.1}$$

con $0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$, *y* $f_{\boldsymbol{P}}(r, \theta) = \boldsymbol{P} + (rcos(\theta); rsen(\theta))$. *El conjunto* $f_{\boldsymbol{P}}(S)$ *se llama un* ***sector angular con vértice en el punto*** *P.*

Ahora daremos la definición del número de vueltas de un camino continuo alrededor de un punto $\mathbf{P}$.

Definición 3.2.4.2 *Sea* $\gamma :\ [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$ *un camino continuo.*

1. *Por el lema del cubrimiento de Lebesgue, elegimos una partición del intervalo* $[a, b]$, $\{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ *tal que para todo* $i = 1, 2, ..., n$ *la traza restringida* $\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ *con* U_i *un sector angular con vértice en* $\boldsymbol{P}$.

2. *En segunda instancia elegimos una función ángulo* $\theta_i,\ i = 1, 2, ..., n$ *definida en cada sector angular. Luego si denotamos* $\boldsymbol{P}_i \doteq \gamma(t_i)$ *entonces se define el número de vueltas de* γ *alrededor de* $\boldsymbol{P}$ *de la siguiente manera:*
$$W(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \{\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})\} \tag{3.2.4.2}$$

El punto fundamental es probar que la definición no depende de la colección de los sectores angulares elegidos y de las funciones ángulo asociadas.

Proposición 3.2.4.3 *En las condiciones anteriores se tiene que:*

1. *La definición 3.2.4.2 es correcta.*

2. *Si* γ *es un camino cerrrado entonces* $W(\gamma, P) \in \mathbb{N}$.

Demostración. 1. Consideremos dos colecciones de sectores y funciones ángulos asociadas $\{(U_i, \theta_i)\}$ $i = 1, 2, ..., n$ y $\{(U_i', \theta_i')\}$ $i = 1, 2, ..., n$. Entonces θ_i y θ_i' difieren en un múltiplo de 2π en la intersección de $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i \cap U_i'$ de manera que esa diferencia no altera la suma de diferencias. Es suficiente por lo tanto mostrar que la definición es independiente de la partición.

Supongamos que refinamos una partición dada intercalando un punto $t' \in [t_{i-1}, t_i]$. Entonces elegimos el par $(U_i; \theta_i)$ para los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $[t_{i-1}, t']$ y $[t', t_i]$. Luego si $\gamma(t') = \mathbf{P}'$ entonces

$$[\theta_i(t_i) - \theta_i(t')] + [\theta_i(t') - \theta_i(t_{i-1})] = \theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})$$

y por esto la suma no cambia. Lo mismo vale, es decir la suma no varía, para un número finito de puntos intercalados. Pero entonces dada dos particiones consideramos una que refine a ambas y esto muestra que la suma dada por ellas no varía y así el número de vueltas.

Por otro lado la demostración del punto punto 2 es inmediata teniendo en cuenta que para todo $i = 1, 2, ..., n-1$ las diferencias $\theta_i(t_i) - \theta_{i+1}(t_i)$ y $\theta_n(t_n) - \theta_1(t_0)$ son múltiplos de 2π. ■

Observación 3.2.4.4 1. Cuando el camino es suave, existen dos definiciones del número de vueltas, 3.2.4.1 y 3.2.4.2, y ambas coinciden.

2. Si γ es un camino continuo cerrado en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\}$ donde la función ángulo es continua, entonces $W(\gamma, \mathbf{P}) = 0$. Esto es inmediato pues la suma en 3.2.4.2 es telescópica y los puntos extremos del camino coinciden.

3. Análogamente a las consideraciones hechas para caminos suaves señalamos que si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\}$ es un camino continuo entonces existen funciones $r : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ y $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas tal que $\gamma(t) = \mathbf{P} + (r(t) \cdot cos(\theta(t)), r(t) \cdot sen(\theta(t)))$ para todo $a \leq t \leq b$. La función r está unívocamente determinada, $r(t) = \|\gamma(t) - P\|$ y θ está definida salvo una constante de integración múltiplo entero de 2π.

4. Si $\gamma^t = \gamma|_{[a,t]}$ y $\theta(a) = \theta_a$ es un ángulo inicial para el punto $\mathbf{P}_a = \gamma(a)$ entonces se puede tomar $\theta(t) = \theta_a + 2\pi W(\gamma^t, \mathbf{P})$.

También es claro como a partir de esto se puede definir el número de vueltas para una 1-cadena arbitraria.

Definición 3.2.4.5 *Sea $\gamma = \sum_{i=1}^{n} n_i\gamma_i$ un 1-cadena con $\boldsymbol{P} \notin \gamma[0, 1]$. Se define el* **`número de vuelta de la 1-cadena`** γ **`alrededor de un punto P`** *de la siguiente manera:*

$$W(\gamma, \boldsymbol{P}) = \sum_{i=1}^{n} n_i W(\gamma_i, \boldsymbol{P}) \tag{3.2.4.3}$$

3.2.5. Algunas propiedades del número de vueltas.

Es claro que la noción de número de vueltas todavía no ha sido establecida para campos, esto lo haremos en la próxima sección; por ello aún no podemos estudiar la relación entre los conceptos de grado y número de vueltas. No obstante, como ya adelantamos, en esta subsección estableceremos algunas propiedades y consecuencias fundamentales de la definición del número de vueltas 3.2.4.2 análogas a las propiedades que caracterizan la función grado (teorema 2.8.0.15). En este sentido hay que interpretar los comentarios que siguen.

Definición 3.2.5.1 *Si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$ *y* $\boldsymbol{Q}$ *es un vector de* $\mathbb{R}^2$ *entonces la curva desplazada* $\gamma + \boldsymbol{Q} : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}\}$ *se define como* $(\gamma + \boldsymbol{Q})(t) = \gamma(t) + \boldsymbol{Q}$.

El número de vueltas, tanto como el grado (teorema 2.6.1.8), es invariante bajo traslaciones; más precisamente:

Proposición 3.2.5.2 *(Invariancia bajo traslaciones para el número de vueltas).*

Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$ *es una curva continua y* $\boldsymbol{Q}$ *es un vector de* $\mathbb{R}^2$ *entonces*

$$W(\gamma + \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) = W(\gamma, \boldsymbol{P}).$$

Demostración. Sea $\{(U_i, \theta_i)\}$ $i = 1, 2, ..., n$ con U_i un sector angular con vértice en $\mathbf{P}$ y una θ_i una función angular asociada conforme a 3.2.4.2 para definir $W(\gamma, \mathbf{P})$. Elegimos $\{(U_i', \theta_i')\}$ $i = 1, 2, ..., n$ con $U_i' \doteq U_i + \mathbf{Q}$ un sector angular con vértice en $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ de forma tal que si $\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ entonces $(\gamma + \mathbf{Q})[t_{i-1}, t_i] \subset U_i'$. Luego como U_i' para $i = 1, 2, ..., n$ son sectores angulares definidos por traslaciones, elegimos $\theta_i' \doteq \theta_i$ y el resultado es inmediato. ■

Ahora veremos que el concepto de número de vueltas es también invariante bajo homotopías, como lo es el grado topológico.

Consideremos el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y una función continua $\Gamma : R \to \mathbb{R}^2$. La restricción de Γ sobre el borde ∂R determina cuatro caminos en $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma(\partial R) = \begin{cases} \Gamma(t, c) = \Gamma(\gamma_1) = \delta_1 \text{ para } a \le t \le b \\ \Gamma(b, t) = \Gamma(\gamma_2) = \delta_2 \text{ para } c \le t \le d \\ \Gamma(t, d) = \Gamma(\gamma_3) = \delta_3 \text{ para } a \le t \le b \\ \Gamma(a, t) = \Gamma(\gamma_4) = \delta_4 \text{ para } c \le t \le d. \end{cases} \tag{3.2.5.1}$$

Con el mismo procedimiento que se utiliza para demostrar 3.2.1.15 se prueba el siguiente teorema.

Teorema 3.2.5.3 *(Número de vueltas del borde de un rectángulo* $W(\Gamma(\partial R), P)$ *).*

Si $\boldsymbol{P} \notin \Gamma(\partial R)$ *entonces*

$$W(\delta_1, \boldsymbol{P}) + W(\delta_2, \boldsymbol{P}) = W(\delta_3, \boldsymbol{P}) + W(\delta_4, \boldsymbol{P}) \tag{3.2.5.2}$$

Demostración. Se divide al rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ en rectángulos R_{ij} de forma tal que Γ envie cada rectángulo R_{ij} en un abierto U_{ij} con vértice en el punto $\mathbf{P}$, en el cual exista una función ángulo continua θ_{ij}. Luego observamos que para todo i, j se tiene que $W(\Gamma|_{R_{ij}}, \mathbf{P}) = 0$. Finmalmente teniendo en cuenta que $W(\Gamma|_R, \mathbf{P}) = W(\delta_1, \mathbf{P}) + W(\delta_2, \mathbf{P}) - W(\delta_3, \mathbf{P}) - W(\delta_4, \mathbf{P})$ que $W(\Gamma|_R, \mathbf{P}) = \sum_{i,j} W(\Gamma|_{R_{ij}}, \mathbf{P})$ se deduce el resultado. ■

Así como el grado resulta ser invariante bajo homotopías (teorema 2.6.1.3), también lo es el número de vueltas.

Corolario 3.2.5.4 *(Invariancia bajo homotopías para el número de vueltas.)*
Dadas dos caminos γ y δ in $\mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$ homotópicos (o bien como caminos con iguales puntos extremos o bien como caminos cerrados) entonces

$$W(\gamma, \boldsymbol{P}) = W(\delta, \boldsymbol{P}) \tag{3.2.5.3}$$

Demostración. Es una consecuencia del teorema 3.2.5.3 aplicado a la homotopía $H = \Gamma$. ■

Observación 3.2.5.5 Es fácil probar los siguientes resultados referidos a caminos homotópicos.

1. Sea U es abierto convexo entonces dos caminos con trazas en U, o bien ambos cerrados o bien con iguales puntos extremos, son homotópicos.

2. Vale la recíproca del corolario 3.2.5.4, es decir: Si γ y δ son dos caminos con iguales puntos extremos en $\mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\}$ o bien ambos caminos cerrados entonces son equivalentes:

i γ y δ son homotópicas en $\mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\}$.

ii $W(\gamma, \mathbf{P}) = W(\delta, \mathbf{P})$.

Una consecuencia de la invariancia bajo homotopías es el comportamiento del número de vueltas de un camino continuo bajo un cambio continuo del parámetro, análogamente a lo que hemos planteado para caminos suaves.

Corolario 3.2.5.6 *Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$ y $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ continuas. Entonces*

1. *Si $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$ entonces*

$$W(\varphi \circ \gamma, \boldsymbol{P}) = W(\gamma, \boldsymbol{P})$$

2. *Si $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$ entonces*

$$W(\varphi \circ \gamma, \boldsymbol{P}) = -W(\gamma, \boldsymbol{P})$$

En particular si $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$ para $t \in [a, b]$, es decir si γ^{-1} designa el camino γ con la orientación inversa, entonces

$$W(\gamma^{-1}, \boldsymbol{P}) = -W(\gamma, \boldsymbol{P}).$$

Demostración. Para el primer punto consideramos la homotopía $\Gamma : R \to \mathbb{R}^2$. definida $\Gamma(s,t) = \gamma(\text{mín}\{t + \varphi(s) - a, b\})$. En este caso $\delta_1 = \gamma$ y $\delta_4 = \gamma \circ \varphi$, con δ_2 y δ_3 constantes iguales a $\gamma(b)$. El resultado se sigue alicando el teorema 3.2.5.3. El segundo punto se prueba de manera análoga a través de la homotopía definida $\Gamma(s,t) = \gamma(\text{máx}\{t + \varphi(s) - b, a\})$; en este caso $\delta_1 = \gamma$ y $\delta_2 = \gamma \circ \varphi$, con δ_3 y δ_4 constantes. ■

Otra consecuencia de la invariancia bajo homotopías es el teorema denominado "Dog-on-a-Leash."Este nombre se justifica a partir de la siguiente interpretación del corolario 3.2.5.8: si un persona pasea un perro de forma tal que su distancia al paseador es siempre menor o igual que su distancia a un punto determinado entonces ambos dan la misma cantidad de vueltas alrededor de dicho punto. Este teorema no es otro que el teorema 2.6.1.7 de Poincaré-Böhl demostrado en el contexto de la teoría de grado en el segundo capítulo.

Teorema 3.2.5.7 *(Poincaré-Böhl:Dog-on-a-Leash.)*
Supongamos que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$ y $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\}$ son caminos cerrados continuos tal que $\boldsymbol{P} \notin [\gamma(t); \delta(t)]_{a \leq t \leq b}$, es decir el punto $\boldsymbol{P}$ no está en la unión de los segmentos determinados punto a punto por las trazas de γ y δ. Entonces

$$W(\gamma, \boldsymbol{P}) = W(\delta, \boldsymbol{P})$$

Demostración. Consideramos la homotopía $H : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ como caminos cerrados definida por combinaciones convexas de los dos caminos $H(s,t) = (1 - s)\gamma(t) + s\delta(t)$. El resultado se sigue de la invariancia bajo homotopías, corolario 3.2.5.4. ■

La interpretación del teorema "Dog-on-a-Leash"se pone de manifiesto en la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 3.2.5.8 *Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ y $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ son caminos cerrados continuos tal que $\|\delta(t) - \gamma(t)\| \leq \|\gamma(t) - \boldsymbol{P}\|$ para todo t en $[a, b]$. Entonces*

$$W(\gamma, \boldsymbol{P}) = W(\delta, \boldsymbol{P}).$$

Demostración. Por la desigualdad de la hipótesis el punto $\mathbf{P} \notin [\gamma(t); \delta(t)]_{a\leq t\leq b}$ de manera que es consecuencia directa del terorema 3.2.5.7. ■

Nos proponemos estudiar como varía el número de vueltas de un camino continuo y cerrado si variamos el punto $\mathbf{P}$, con tal que éste no se sitúe en su traza.

Sabemos, por el teorema 2.6.1.5, que el grado de una función continua $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es constante en cada componente conexo de $[\phi(\partial\Omega)]^c$ Esta propiedad también se cumple para el número de vueltas y como veremos es una consecuencia de la invariancia bajo traslaciones y homotopías.

Proposición 3.2.5.9 *(La función $W(\gamma, \cdot)$ es localmente constante).* *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ un camino cerrado. Entonces la función $W(\gamma, \cdot)$ es constante en cada componente conexo de $\mathbb{R}^2/\gamma[a, b]$. Además es cero en el componente no acotado.*

Demostración. Consideremos un disco abierto $D = D(\mathbf{P}, r)$ alrededor de $\mathbf{P}$ tal que $D \subset \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ el componente conexo al que pertenece $\mathbf{P}$. Es suficiente probar que para todo $\mathbf{P}' \in D$ se tiene que $W(\gamma, \mathbf{P}') = W(\gamma, \mathbf{P})$. Para eso consideremos $\mathbf{Q} = \mathbf{P}' - \mathbf{P}$. Por un lado por la invariancia bajo traslaciones, establecida en la proposición 3.2.5.2, se tiene

$$W(\gamma, \mathbf{P}) = W(\gamma + \mathbf{Q}, \mathbf{P} + \mathbf{Q}) = W(\gamma + \mathbf{Q}, \mathbf{P}').$$

Por otro lado los caminos cerrados γ y $\gamma + \mathbf{Q}$ son homotópicos via $H(s, t) = \gamma(t) + s\mathbf{Q}$ $0 \leq s \leq 1$ con $\mathbf{P}' \notin H(R)$, luego por 3.2.5.4, se tiene

$$W(\gamma + \mathbf{Q}, \mathbf{P}') = W(\gamma, \mathbf{P}').$$

En definitiva de las dos últimas ecuaciones se deduce que que $W(\gamma, \mathbf{P}') = W(\gamma, \mathbf{P})$.

Para probar que $W(\gamma, \cdot) \equiv 0$ en el componente conexo no acotado basta probar que se anula en algún punto. Consideremos un punto $\mathbf{P} = (p_1, p_2)$ en el componente conexo no acotado y el semiplano abierto $U = \{\mathbf{X} : x_1 > p_1\}$. Entonces U es un sector angular sobre el que se define una función angular continua y de acuerdo al punto 2 de la observación 3.2.4.4 se tiene que $W(\gamma, \mathbf{P}) = 0$. ■

En ambas partes de la demostración anterior hemos usado que los componentes conexos de un abierto son arcoconexos, y que dados dos puntos la traza del arco que los une puede recubrirse por una colección finita de discos en los que la función $W(\gamma, \cdot)$ es constante.

3.3. Número de vueltas para un campo en $\mathbb{R}^n$ y su relación con el grado topológico.

A partir de ahora hablaremos de curvas en vez de caminos. Comenzaremos con el caso de un campo definido en $\mathbb{R}^2$.

Sea γ una curva suave y $\phi = (\phi_1, \phi_2) = (p, q)$ un campo de vectores continuo definido sobre γ, $\phi \in C(\gamma, \mathbb{R}^2/\{\mathbf{O}\})$. Es fácil interpretar en términos de integrales de 1-formas los conceptos de circulación y flujo del campo. Consideremos $\omega = pdx + qdy$ y $\omega = qdx - pdy$.

En el primer caso la integral de linea $I_\gamma(\omega)$ representa `la circulación del campo a lo largo de la curva` y se interpreta como la integral de la proyección del campo aplicado a la curva en la dirección de su velocidad.

$$\begin{array}{c} I_\gamma(\omega) = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ \int_a^b \left(\phi(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right) ||\gamma'(t)||dt \end{array} \tag{3.3.0.4}$$

En este contexto si $\omega = -df$ entonces $\phi = -\nabla f$ y f se llama `potencial del campo` ϕ.

En el segundo caso si $\mathbf{n}(t) = \frac{(-\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt})}{||\gamma'(t)||}$ designa el vector normal unitario a la curva γ entonces la integral de linea $I_\gamma(\omega)$ representa el `flujo del campo a través de la curva` γ

$$\begin{array}{c} I_\gamma(\omega) = \int_\gamma (qdx - pdy) = \int_a^b \left(q(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} - p(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right) dt = \\ \int_a^b \phi(\gamma(t)) \cdot \mathbf{n}(t)||\gamma'(t)||dt \end{array} \tag{3.3.0.5}$$

Análogamente a como lo hemos hecho anteriormente definiremos una única función continua $\theta_\phi \in C(\gamma, \mathbb{R})$, llamada `función ángulo` del campo vectorial ϕ no nulo a lo largo de la curva γ.

Definición 3.3.0.10 *Dado el campo ϕ consideramos*

$$cos(\theta_\phi(\boldsymbol{x})) = \frac{\phi_1(\boldsymbol{x})}{\|\phi\|}, \quad sen(\theta_\phi(\boldsymbol{x})) = \frac{\phi_2(\boldsymbol{x})}{\|\phi\|}. \tag{3.3.0.6}$$

Luego se define θ_ϕ de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_\phi(\boldsymbol{x}) = arctg\left\{\frac{\phi_2(\boldsymbol{x})}{\phi_1(\boldsymbol{x})}\right\} & \texttt{si} \ \ \phi_1(\boldsymbol{x}) \neq 0 \\ \theta_\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\pi}{2} & \texttt{si} \ \ \phi_1(\boldsymbol{x}) = 0. \end{array} \right. \tag{3.3.0.7}$$

En esta definición elegimos arbitrariamente, como antes, un ángulo inicial $\theta_\phi(\gamma(a)) \in [0, 2\pi)$.

La función θ_ϕ mide el ángulo que se forma entre el semieje positivo x considerado en el punto de la curva y el vector del campo ϕ definido en dicho punto.

La variación total del ángulo que forma el campo a lo largo de la curva γ se define de manera análoga a como lo hemos hecho anteriormente

$$\triangle_\gamma \mathtt{ang}(\phi) = \theta_\phi(\gamma(b)) - \theta_\phi(\gamma(a)). \tag{3.3.0.8}$$

Asimismo definiremos el número de vueltas nuevamente dividiendo por 2π la variación total del ángulo del campo sobre la curva γ:

Definición 3.3.0.11 *Sea $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C^1(\gamma, \mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{O}\})$, no nulo. Se define el* ***número de vueltas o índice del campo ϕ a lo largo la curva suave*** *γ de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{c} W(\phi, \gamma, \mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi}\triangle_\gamma \boldsymbol{ang}(\phi) = \frac{1}{2\pi}[\theta_\phi(\gamma(b)) - \theta_\phi(\gamma(a))] = \\ \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{-\phi_2.d\phi_2 + \phi_2.d\phi_1}{\|\phi\|} = \\ \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \phi^*(\omega_{\boldsymbol{O}}) \end{array} \tag{3.3.0.9}$$

Observación 3.3.0.12 1. Si $\phi \in C^1(\gamma, S^1)$ es un campo de vectores unitarios tangentes a γ una curva de Jordan de clase C^2 entonces considerando la parametrización por longitud de arco $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ se tiene $\phi = \dot{\alpha} \circ \alpha^{-1}$ de manera que si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ entonces $\phi^*(\omega_{\mathbf{O}}) = -\phi_2 d\phi_1 + \phi_1 d\phi_2 = [\phi_1.\dot{\alpha_2} + \alpha_2.\dot{\alpha_1}]dt = \kappa(t)dt$ donde κ denota la curvatura de γ. En particular $\int_\gamma \kappa(t)dt = 2\pi$ es la curvatura total de γ de manera que en este caso se tiene $W(\phi, \gamma, \mathbf{0}) = 1$.

2. Recordando que $\omega_{\mathbf{O}} = \mathbf{r}^*(\omega_{S^1})$ podemos expresar el número de vueltas a través del pull-back de la composición del campo en cuestión con el campo radial:

$$\begin{array}{c} W(\phi, \gamma, \mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \phi^*(\omega_{\mathbf{O}}) = \\ \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \phi^*(\mathbf{r}^*(\omega_{S^1})) = \\ \frac{1}{vol(S^1)}\int_\gamma (\mathbf{r} \circ \phi)^*(\omega_{S^1}) \end{array} \tag{3.3.0.10}$$

Con base en esta última observación y en el teorema 3.1.5.2, que generaliza el caso $n = 2$, podemos definir ahora el número de vueltas para campos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.3.0.13 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, ϕ un campo de clase C^1 definido sobre $\partial\Omega$ y $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^n/\{\boldsymbol{O}\} \to S^{n-1}$ la retracción definida $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$. Se define el* ***`número de vueltas del campo`*** *ϕ a lo largo del borde $\partial\Omega$ y alrededor del $\mathbf{0}$ de la siguiente manera*

$$W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0}) = \frac{1}{vol(S^{n-1})} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{r} \circ \phi)^*(\omega_{S^{n-1}}) \tag{3.3.0.11}$$

Observación 3.3.0.14 Señalamos algunos hechos básicos:

1. Hemos definido el número de vueltas del campo, así como su grado, respecto del origen $\mathbf{O}$ pero puede, claramente, realizarse para cual quier punto $\mathbf{P}$ no perteneciente a la traza de la curva.

2. De acuerdo al teorema 3.1.5.2

$$\begin{gathered}\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}}) = \mathbf{r}^* \left\{ \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j \widehat{\omega}_j \right\} = \\ \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|^n} \widehat{\omega}_j\end{gathered} \tag{3.3.0.12}$$

donde $\widehat{\omega}_j = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \widehat{dx}_j \wedge ... \wedge dx_n$ como siempre indica que el factor diferencial dx_j se ha suprimido y que $(\mathbf{r} \circ \phi)^*(\omega_{S^{n-1}}) = \phi^*(\mathbf{r}^* \omega_{S^{n-1}})$ se puede dar una expresión explícita para el número de vueltas

$$\begin{gathered}W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0}) = \tfrac{1}{vol(S^{n-1})} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \circ \phi)^*(\omega_{S^{n-1}}) \\ \tfrac{1}{vol(S^{n-1})} \int_{\partial\Omega} \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{\phi_j}{\|\phi\|^n} d\phi_1 \wedge d\phi_2 \wedge ... \widehat{d\phi}_j \wedge ... \wedge d\phi_n\end{gathered} \tag{3.3.0.13}$$

La última expresión se llama `integral de Kronecker` [Amann, H. 1990; Polymilis at all].

3. Intuitivamente $W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0})$ mide como es cubierta la esfera S^{n-1} por la imagen del borde $\partial\Omega$ via la función $\mathbf{r} \circ \phi : \partial\Omega \to S^{n-1}$.

Cerramos esta sección con el resultado fundamental según el cual el concepto de grado topológico coincide con el de número de vueltas. En la demostración seguimos los lineamientos de H. Amann [Amann H. 1990, pp 343-345].

Teorema 3.3.0.15 ***`(Coincidencia entre el grado y el número de vueltas de un campo).`***

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\mathbf{0} \notin \phi(\partial\Omega)$. Entonces

$$W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0}) = \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}) \tag{3.3.0.14}$$

Demostración. Vamos a probar en primer instancia que si $\psi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap B^1(\phi, \delta)$ con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ valor regular de ψ y δ suficientemente chico entonces

$W(\phi, \Omega, \mathbf{0}) = W(\psi, \Omega, \mathbf{0})$. Luego aplicando el tercer resultado fundamental reduciremos la prueba para el caso de funciones $\psi \in A^r_{\mathbf{p},1}$ con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, pues si vale para esa clase, por un agumento de aproximación, también vale para la clase $A_{\mathbf{p},1}$.

Comenzamos con la n-1 forma no nula, anteriormente definida, $\omega_{\mathbf{O}} \doteq r^*(\omega_{S^{n-1}})$ donde $\omega_{S^{n-1}}$ es un elemento de volumen de la esfera S^{n-1}. Sabemos que $d\omega_{S^{n-1}} = 0$ de manera que $d(\omega_{\mathbf{O}}) = \mathbf{r}^*(d\omega_{S^{n-1}}) = 0$ y por lo tanto $\omega_{\mathbf{O}}$ es cerrada.

Ahora consideramos la homotopía de clase C^1 $\mathbf{0}$-admisible definida por las combinaciones convexas de ϕ y ψ y observamos que $d(H_0^*(\omega_{\mathbf{O}}) - H_1^*(\omega_{\mathbf{O}})) = (\phi^* - \psi^*)(d\omega_{\mathbf{O}}) = 0$ de manera que $H_0^*(\omega_{\mathbf{O}}) - H_1^*(\omega_{\mathbf{O}}) = (\phi^* - \psi^*)(\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}}))$también es cerrada.

Luego por el teorema de Stokes los números de vueltas de los campos coinciden:

$$0 = \int_{\partial\Omega} (\phi^* - \psi^*)(\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})) = W(\phi, \Omega, \mathbf{0}) - W(\psi, \Omega, \mathbf{0}).$$

En consecuencia la propiedad puede probarse para $\mathbf{0}$ valor reglar $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$.

1 Consideramos dos casos $\phi^{-1}\{\mathbf{0}\} = \emptyset$ y $\phi^{-1}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m\}$ finito.

Supongamos primero que $\phi^{-1}\{\mathbf{0}\} = \emptyset$. Para simplificar denotamos con β el pull-back de ϕ de la forma $\omega_{\mathbf{O}}$, es decir $\beta \doteq (\mathbf{r} \circ \phi)^*(\omega_{S^{n-1}}) = \phi^*(\omega_{\mathbf{O}})$. La forma β es cerrada pues $d\beta = \phi^*(d\omega_{\mathbf{O}}) = 0$. Y nuevamente por Stokes

$$vol(S^{n-1}) W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0}) = \int_{\partial\Omega} \beta = \int_{\Omega} d\beta = 0 = d(\phi, \Omega, \mathbf{0})$$

de manera que $W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0})$.

2. Ahora sea $\phi^{-1}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m\}$. Elegimos τ suficientemente chico tal que para $j = 1, 2, ..., m$ se tiene bolas $\overline{B}_j = \overline{B}(\mathbf{x}_j, \tau) \subset \Omega$ disjuntas de a dos, cada una de ellas conteniendo un único cero de ϕ.

Consideramos $\overline{M} = \overline{\Omega} / \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ la variedad de clase C^2 con borde $\partial M = \partial\Omega \cup \bigcup_{j=1}^{m} \partial B_j^-$ donde $\partial B_j^- \doteq \{\mathbf{x}_j + \tau S_-^{n-1}\}$ y S_-^{n-1} denota la esfera S^{n-1} con orientación negativa. Por Stokes se tiene que

$$0 = \int_M d\beta = \int_{\partial\Omega} \beta - \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial B_j^-} \beta,$$

es decir

$$\int_{\partial\Omega} \beta = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial B_j^-} \beta. \tag{3.3.0.15}$$

Observemos que la integral izquierda es el número de vueltas salvo el factor $\frac{1}{Vol(S^{n-1})}$. El objetivo es mostrar que para cada $j = 1, 2, ..., m$ se tiene que $\int_{\partial B_j^-} \beta = \mathtt{sig} J_{\phi_j}(\mathbf{x}_j) Vol(S^{n-1})$ donde $\phi_j = \phi|_{B_j^-}$. Luego el resulado se obtiene sumando sobre j. La prueba de ese hecho es más o menos técnica.

Podemos elegir τ suficientemente chico como para que $\phi_j : \overline{B_j} \longrightarrow N_j \doteq \phi(\overline{B_j})$ sea un difeomorfismo de clase C^1 que preserva o invierte la orientación de B_j según $\mathtt{sig} J_{\phi_j}(\mathbf{x}_j) = \pm 1$.

De esta forma N_j es una variedad orientada con borde $\partial N_j = \partial\phi(\overline{B_j}) = \phi(\partial B_j)$. Luego integrando y haciendo un cambio de variable se tiene que

$$\int_{\partial B_j^-} \beta = \int_{\partial B_j^-} \phi^* \circ \omega_{\mathbf{O}} = \mathtt{sig} J_{\phi_j}(\mathbf{x}_j) \int_{\partial N_j} \omega_{\mathbf{O}} \tag{3.3.0.16}$$

Ahora nuestro objetivo es mostrar que $\int_{\partial N_j} \omega_{\mathbf{O}} = Vol(S^{n-1})$. Veremos que podemos achicar el dominio de integración de la integral $\int_{\partial N_j} \omega_{\mathbf{O}}$ sin alterar su valor.

Para ello consideramos $0 < \eta \ll 1$ de forma tal que $\eta\overline{B} = \eta\overline{B}(\mathbf{0}, 1) \subset N_j$ y que la forma $\omega_{\mathbf{O}}$ esté definida sobre la variedad $N_j - \eta B$. Aplicando Stokes obtenemos

$$0 = \int_{N_j/\eta B} d\omega_{\mathbf{O}} = \int_{\partial N_j} \omega_{\mathbf{O}} - \int_{\eta S^{n-1}} \omega_{\mathbf{O}},$$

es decir

$$\int_{\partial N_j} \omega_{\mathbf{O}} = \int_{\eta S^{n-1}} \omega_{\mathbf{O}}.$$

Luego reemplazando en (3.3.0.16) obtenemos

$$\int_{\partial B_j^-} \beta = \mathtt{sig} J_{\phi_j}(\mathbf{x}_j) \int_{\eta S^{n-1}} \omega_{\mathbf{O}}$$

y sumando sobre $j = 1, 2..., m$ por (3.3.0.15)

$$\int_{\partial\Omega} \beta = \sum_{j=1}^{m} \mathtt{sig} J_{\phi_j}(\mathbf{x}_j) \int_{\eta S^{n-1}} \omega_{\mathbf{O}}. \qquad (3.3.0.17)$$

Por otro lado teniendo en cuenta que $\mathbf{r} : \eta S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ es un difeomorfismo se tiene que

$$\int_{\eta S^{n-1}} \omega_{\mathbf{O}} = \int_{\eta S^{n-1}} \mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}}) = \int_{S^{n-1}} \omega_{S^{n-1}} = vol(S^{n-1})$$

de manera que finalmente obtenemos

$$W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0}) = \frac{1}{vol(S^{n-1})} \int_{\partial\Omega} \beta = \sum_{j=1}^{m} \mathtt{sig} J_{\phi_j}(\mathbf{x}_j) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}). \blacksquare$$

Observación 3.3.0.16 Este teorema pone de manifiesto de manera inmediata la propiedad que hemos visto en el segundo capítulo, a saber: si $\phi,\ \psi \in A_{\mathbf{p},0}$ tal que $\phi|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega}$ entonces

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}). \qquad (3.3.0.18)$$

Luego `el grado depende sólamente de los valores que asume` ϕ `en el borde de` Ω, es decir de la función restringida $\phi|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$.

Esta propiedad permite definir el `grado global` de ϕ como el grado de cualquier extensión $\overline{\phi} \in C(\overline{\Omega})$, es decir

$$\mathtt{deg}(\phi) = \mathtt{deg}(\phi, \partial\Omega, S^{n-1}) \doteq \mathtt{d}(\overline{\phi}, \Omega, \mathbf{0}).$$

El teorema que permite expresar el grado a través de la integral de Kronecker también permite dar una definición del `grado global` para funciones definidas en el contexto de las variedades. Esto lo haremos en el próximo capítulo. Por ahora señalemos que de acuerdo a lo que hemos visto

$$\int_{\partial\Omega} \phi^*\omega_{S^{n-1}} = \mathtt{deg}(\phi) \int_{S^{n-1}} \omega_{S^{n-1}}.$$

3.4. El grado y su relación con la integral compleja.

En la primer subsección pondremos de manifiesto la coincidencia del índice de una curva continua en $\mathbb{C}$ con su número de vueltas, como curva continua en $\mathbb{R}^2$. En la siguiente subsección, via la identificación $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, expresaremos el grado de un campo en $\mathbb{R}^2$ inducido por una función holomorfa a través de cierta integral compleja. Los conceptos que desarrollamos aquí son tópicos regulares de un curso de cálculo complejo y el lector pueden encontrarlos en los textos de referencia. Observemos que en general el índice y el número de vueltas se consideran como sinónimos, justificadamente puesto que designan la misma cosa.

3.4.1. Indice de una curva continua en el plano complejo y número de vueltas de un curva continua en $U \subset \mathbb{R}^2$.

Para poder comparar los conceptos necesitamos recordar el proceso de integración en el campo complejo y la definición de índice de una curva continua.

Preliminares: integración compleja e indice de una curva continua.

Definición 3.4.1.1 *Si* $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es holomorfa, con* U *un abierto, y* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *una curva suave diferenciable a trozos entonces se define* ***la integral de líneal*** *de la siguiente manera*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \tag{3.4.1.1}$$

y en particular si $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ *con* $z_0 \in \mathbb{C}$ *un punto que no pertence a su traza entonces se define* ***el índice*** *de* γ *alrededor de* z_0 *de la siguiente manera:*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt \tag{3.4.1.2}$$

No es difícil ver que el índice así definido coincide con el concepto de número de vueltas para una curva diferenciable a trozos en $\mathbb{R}^2$. Antes de verificar ese hecho observemos que en el contexto de $\mathbb{R}^2$ hemos definido el número de vueltas para curvas continuas. Veremos que también podemos definir en el campo complejo la integral de linea de una función holomorfa definida sobre una curva continua y por lo tanto el índice de una curva continua.

Comenzamos con un lema de fácil demostración.

Lema 3.4.1.2 *Sea* $\gamma : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$ *continua con* U *abierto, entonces existe* $r > 0$ *tal que* $\rho(\gamma[0,1], \partial U) \geq r$

Demostración. Basta con observar que los conjuntos $\gamma[a,b]$ y ∂U son compactos disjuntos y por lo tanto $\rho(\gamma[a,b], \partial U) > 0$. ■

Para la construcción necesitamos la siguiente definicción:

Definición 3.4.1.3 *Dada una curva* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *consideramos una partición* $\pi_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ *del intervalo* $[a,b]$ *y designamos los subintervalos inducidos como* $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ *para* $i = 0, 1, ..., n-1$. *Se dice que* $\{D_0, D_1, ..., D_{n-1}\}$ *es una* `secuencia de discos conectados a lo largo de` γ, *si los discos se solapan de a dos y en forma consecutiva de forma tal que para todo* $i = 0, 1, ..., n-1$ *se tiene que* $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset D_i$.

La existencia de una sucesión de discos conectados a lo largo de γ se puede probar de la siguiente forma: Sea $\epsilon < \frac{\rho(\gamma[a,b], \partial U)}{2} = \frac{r}{2}$. Como γ es uniformemente continua podemos elegir $\delta > 0$ de forma tal que si $|t - t'| < \delta$ con $t, t' \in [a,b]$ entonces $|\gamma(t) - \gamma(t)| < \epsilon$. Ahora elegimos una partición π_n con n suficientemente grande tal que para todo $i = 0, 1, ..., n-1$ se tenga $|t_{i+1} - t_i| < \delta$. Luego obtenemos que $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset D(\gamma(t_i), \epsilon) = D_i \subset U$.

Ahora teniendo en cuenta que toda función holomorfa tiene una primitiva local definimos el concepto de la integral sobre una curva continua.

Definición 3.4.1.4 *Sea* $\gamma : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$ *continua con* U *abierto,* f *una función holomorfa en* U *y* π_n *una partición del intervalo* $[a,b]$ *suficientemente fina de forma tal que para cada* $i = 0, 1, ..., n-1$ *exista una primitiva de* f *en* D_i. *Para cada* i *designamos con* g_i *a tal primitiva, con* $\gamma_i = \gamma|_{I_i}$ *a la restricción de* γ *sobre cada subintervalo* I_i *y con* $\gamma(t_i) = z_i$ *cada centro de* D_i. *Entonces se define la integral de* f *a lo largo de la curva* γ *de la siguiente manera:*

$$\int_\gamma f(z)dz \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} f(z)dz \doteq \sum_{i=0}^{n-1} [g_i(z_{i+1}) - g_i(z_i)] \qquad (3.4.1.3)$$

Observación 3.4.1.5 Para establecer la buena definición basta ver que esta no depende de la partición elegida, y para ello basta con ver que no varía para dos particiones una de las cuales refina a la otra mediante un sólo punto.

Podemos traducir lo anterior en el lenguaje de las 1- formas complejas $\omega = fdz$.

Definición 3.4.1.6 *Se define* **una primitiva de ω a lo largo de** $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{C}$ *como una función continua $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que para cada $t_0 \in [a, b]$ existe un entorno del punto $\gamma(t_0)$, $N_{\gamma(t_0)}$, y una primitiva F_{t_0} de ω en $N_{\gamma(t_0)}$ tal que $F_{t_0}(\gamma(t)) = g(t)$ para t cercano a t_0. Se prueba fácilmente que tal primitiva existe y que dos difieren en una constante.*

Ahora, a partir de esta definición, dada una curva γ continua y cerrada alrededor de un punto z_0 que no pertenece a su traza consideramos una primitiva local de la función $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$, por ejemplo $\log(z - z_0)$. Luego se trata de encontrar una función continua g definida sobre el segmento $[a, b]$ tal que $\log(\gamma(t) - z_0) = g(t)$ cerca de t_0, es decir $e^{g(t)} = \gamma(t) - z_0$ cera de t_0.

Definición 3.4.1.7 ***(Indice de una curva continua en $U \subset \mathbb{C}$).*** *Teniendo en cuenta que la suma de la definición es telescópica se tiene*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{g(b) - g(a)}{2\pi i}. \qquad (3.4.1.4)$$

Ya hemos estudiado la invariancia del número de vueltas y en consecuencia del grado, respecto de las deformaciones continuas. En el contexto de la integración compleja podemos definir el concepto de curvas cercanas y homólogas. La integral es un invariante bajo la relación de equivalencia que inducen esos conceptos. Luego el índice permanece constante para curvas de ese tipo.

Definición 3.4.1.8 *Se dice que dos curvas continuas $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ están* **cerca una de la otra** *si $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ y además existe una partición π_n de $[a, b]$ y una secuencia de discos $\{D_0, D_1, ..., D_{n-1}\} \subset U$ tal que para todo $i = 0, 1, ..., n - 1$ se tiene que $\gamma_1|_{I_i}$, $\gamma_2|_{I_i} \subset D_i$.*

Con esta definición se cumple el siguiente hecho:

Proposición 3.4.1.9 *Si γ_1, γ_2; $[a, b] \to U$ son dos curvas continuas que están cerca y f es holomorfa en U entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \qquad (3.4.1.5)$$

Demostración. Por definición de curvas cercanas podemos considerar una sucesión $\{D_0, D_1, ..., D_{n-1}\} \subset U$ tal que para todo $i = 0, 1, ..., n-1$ se tenga $\gamma_1|_{I_i},\ \gamma_2|_{I_i} \subset D_i$. con g_i una primitiva de f en D_i. Ponemos $\gamma_1(t_i) = z_i$ y $\gamma_2(t_i) = w_i$.

Entonces $g_{i+1},\ g_i$ son primitivas de f en el conexo $D_{i+1} \cap D_i$ de manera que $g_{i+1} - g_i$ es constante. Ahora $z_i,\ w_i \in D_{i+1} \cap D_i$ de manera que

$$g_{i+1}(z_i) - g_i(z_i) = g_{i+1}(w_i) - g_i(w_i)$$

y por lo tanto

$$g_{i+1}(z_i) - g_{i+1}(w_i) = g_i(z_i) - g_i(w_i).$$

El resultado es una consecuencia de que la diferencia $\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$ es una suma telescópica y los puntos extremos de las curvas coinciden, es decir

$$\begin{gathered}\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = \\ \{g_{n-1}(z_n) - g_{n-1}(w_n)\} - \{g_0(z_0) - g_0(w_0)\} = 0\end{gathered} \tag{3.4.1.6}$$

pues $z_0 = w_0$ y $z_n = w_n$. ■

Una definición análoga de cercanía se puede dar para curvas cerradas y también se prueba que la integral es invariante por cencanía de curvas cerradas.

Más aún podemos establer una relación de equivalencia que resulta ser invariante para el índice:

Definición 3.4.1.10 *Una curva γ cerrada y continua es* `homóloga a` 0 `en` *U sii $I(\gamma, z) = 0$ para todo $z \notin U$. Luego establecemos una relación de equivalencia dicendo que: $\gamma \sim_H \delta$* `en` *U sii $I(\gamma, z) = I(\delta, z)$ para todo $z \notin U$.*

El teorema de Cauchy prueba que si $f: U \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $\gamma \sim_H \delta$ `en` U entonces $\int_\gamma f dz = \int_\delta f dz$. En particular si $\gamma,\ \delta$ son curvas cerradas homotópicas en U entonces son homólogas en U y también si dos curvas cerradas en U están cerca entonces son homólogas en U. Luego la invariancia del índice se cumple también en tales casos. Además señalamos [Alhlfors L. V. 1966] que estas ideas se extienden a n-cadenas cerradas, llamadas `ciclos`.

Ahora estamos en condiciones de establecer la relación de ambos conceptos.

La relación entre índice y número de vueltas.

En principio tenemos dos construcciones referidas a curvas continuas en el plano complejo, definición 3.4.1.7 y en el plano real, definición 3.2.4.2.

Pondremos de manifiesto la coincidencia de la definición del índice de una curva continua en $U \subset \mathbb{C}$ con la definición del número de vueltas de un camino contino en $U \subset \mathbb{R}^2$. Suponemos que el punto aldededor del cual gira la curva, z_0, no pertenece a su traza.

Sea $f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ una función holomorfa y $dz = dx + idy$ entonces se define la forma

$$\begin{gathered}\omega = fdz = (p(x,y) + iq(x,y))(dx + idy) = \\ (p(x,y)dx - q(x,y)dy) + i(p(x,y)dy + q(x,y)dx).\end{gathered} \tag{3.4.1.7}$$

La parte imaginaria de la 1-forma compleja fdz coincide sobre U con $\omega_{\mathbf{O}}$ si elegimos $f(z) = \frac{1}{z}$. Más precisamente

$$\begin{gathered}\tfrac{dz}{z} = \tfrac{dx+idy}{x+iy} = \\ \tfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + i\tfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.\end{gathered} \tag{3.4.1.8}$$

Luego integrando a lo largo de una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que 0 no pertence a su traza obtenemos

$$\begin{gathered}I(\gamma, \mathbf{O}) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{1}{z}dz = \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left\{\tfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + i\tfrac{xdx-ydy}{x^2+y^2}\right\} = \\ \tfrac{1}{2\pi}\int_\gamma \tfrac{xdx-ydy}{x^2+y^2} = \\ \tfrac{1}{2\pi}\triangle_\gamma \texttt{arg}(z) = W(\gamma, \mathbf{O})\end{gathered} \tag{3.4.1.9}$$

de manera que identificando $\mathbf{P} = (x, y) \sim z$ la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ mide `el número de vueltas de la curva alrededor del origen`.

Las mismas propiedades que hemos probado para el número de vueltas de un camino continuo en $\mathbb{R}^2$ se prueban en el contexto del cálculo de una variable compleja.

En la próxima subsección estudiamos la relación entre el grado de un campo en $\mathbb{R}^2$ `proveniente de la identificación con una función holomorfa` y la integración en el campo de los complejos.

3.4.2. El grado topológico para funciones holomorfas.

Consideremos $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con U abierto, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ podemos asociar a la función holomorfa f el campo $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido $\phi = (u, v)$ en $\mathbb{R}^2$. El siguiente teorema da una representación integral del número de vueltas y por tanto del grado del campo, más precisamente:

Teorema 3.4.2.1 *(Número de vueltas de una función holomorfa).*
Sea $\gamma \subset U \subset \mathbb{R}^2$ una curva C^1-Jordan, con U abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ análitica en U tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \gamma$. Entonces si identificamos la función holomorfa f con el campo ϕ se tiene

$$W(f, \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \qquad (3.4.2.1)$$

Demostración. Sea $f = u + iv$, $z_0 \in U$ y $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Entonces

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - (\alpha + i\beta)(\zeta + i\eta) = o(h)$$

cuando $h = \zeta + i\eta \to 0$.

Con la identificación $\phi = (u, v)$ podemos escribir esa relación de la siguiente manera:

$$\phi(x_0 + \zeta; y_0 + \eta) - \phi(x_0; y_0) - D\phi(x_0; y_0)(\zeta; \eta) = o(\|(\zeta; \eta)\|)$$

cuando $(\zeta; \eta) \to 0$. Ahora si identificamos $z = a + ib \sim \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ entonces en el lenguaje de matrices se tiene

$$D\phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

de donde se deducen las ecuaciones de Riemann-Cauchy $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ y además que $f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$.

Luego

$$\begin{array}{c} \frac{f'dz}{f} = \frac{\overline{f} \cdot f'dz}{\overline{f} \cdot f} = \frac{\overline{f} \cdot f'dz}{|f|^2} = \\ \frac{(u-iv)(u_x-iu_y)(dx+idy)}{u^2+v^2} = \\ \frac{udu+vdv}{u^2+v^2} + i\frac{udv-vdu}{u^2+v^2} \end{array} \qquad (3.4.2.2)$$

Ahora consideremos las 1-formas $\zeta \doteq xdx + ydy$ y $\omega_{S^1} = -ydx + xdy$. Entonces $\zeta = d\eta$ con $\eta \doteq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ de manera que ζ es exacta y si $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2/\{\mathbf{0}\} \to S^1$, como siempre, es la retracción radial $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ entonces

$$\begin{array}{c} \frac{f'dz}{f} = \frac{udu+vdv}{u^2+v^2} + i\frac{udv-vdu}{u^2+v^2} = \\ \phi^* r^*(\zeta) + i\phi^* r^*(\omega_{S^1}) = \\ (r \circ \phi)^*(\zeta) + i(r \circ \phi)^*(\omega_{S^1}) \end{array} \tag{3.4.2.3}$$

y en consecuencia teniendo en cuenta la exactitud de ζ

$$\begin{array}{c} \int_\gamma \frac{f'dz}{f} = \int_\gamma (r \circ \phi)^*(\zeta) + i\int_\gamma (r \circ \phi)^*(\omega_{S^1}) = \\ i\int_\gamma (r \circ \phi)^*(\omega_{S^1}) = i2\pi W(f, \gamma). \ \blacksquare \end{array} \tag{3.4.2.4}$$

Ahora el corolario siguiente es una consecuencia inmediata de los teoremas 4.4.1.6 y 3.4.2.1.

Corolario 3.4.2.2 *(Consecuencia de la representación).*
Sea $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ análitica y Ω un C^2-dominio acotado tal que $\overline{\Omega} \subset U$ y $\mathbf{0} \notin f(\partial\Omega)$. Entonces

$$\mathrm{d}(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \tag{3.4.2.5}$$

Observación 3.4.2.3 Usualmente se escribe

$$\mathtt{d}(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'z}{fz} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} d(\mathtt{arg}(fz)).$$

En tal caso hay que recordar que $d(\mathtt{arg}(fz))$ no es exacta en $\mathbb{R}^2/\{\mathbf{0}\}$.

Este vínculo anticipa alguna de las aplicaciones que el grado pudiera tener en el campo del cálculo en variable compleja.

3.4.3. Funciones holomorfas definidas sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ abierto y acotado.

Trataremos, brevemente, el caso del grado de una función holomorfa $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ donde Ω es un conjunto abierto y acotado. Como siempre podemos identificar a $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ muñido de la estructura de los complejos.

Notaremos los puntos de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbf{z} = (z_1, z_2, .., , z_n)$ y usaremos la norma $|\mathbf{z}| = \max\{|z_1|, |z_2|, ..., |z_n|\}$. Para una función $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ holomorfa con Ω abierto y acotado y $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$ usaremos una notación análoga a la empleada en el segundo capítulo $\phi \in \mathcal{H}_{\mathbf{p}}(\Omega)$.

De acuerdo a la identificación, podemos escribir $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ con Ω abierto y acotado y $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$ y considerar el grado $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p})$. El primer resultado que destacamos es que el grado en tal caso es no negativo.

Teorema 3.4.3.1 *Si* $\phi \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{p}}(\Omega)$ *entonces* $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) \geq 0$

Demostración. Veremos que una transformación holomorfa preserva la orientación. Es suficiente probar esto suponiendo que $\mathbf{p}$ es un valor regular pues de lo contrario podemos usar alguna aproximación de ese tipo.

Sean $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$, $z_j = x_j + iy_j$ y $\phi_j = u_j + iv_j$ para $j = 1, 2, ..., n$. Cada $\phi_j : \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa de n variables complejas a valores complejos. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene para $k = 1, 2, ..., n$ que

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial y_j}, \ \frac{\partial u_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j}.$$

Ahora consideramos $\mathbf{x}$ un $\mathbf{p}$-punto de ϕ, es decir $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$. Supongamos que $A \doteq (\alpha_{kj})$ es la matriz de $\phi'(\mathbf{x})$ como transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en la base usual, o sea $\alpha_{kj} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - i\frac{\partial u_k}{\partial y_j}$. Usando la forma normal de Jordan podemos verificar que $\det(\phi'(\mathbf{x})) \geq 0$. Dado que supusimos que $\phi'(\mathbf{x})$ es no singular entonces $\mathtt{i}(\phi, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 1$ y de ahí el resutado. Si el punto no fuera un valor regular obtendríamos $\mathtt{i}(\phi, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0$. ■

Definición 3.4.3.2 *Si* $\boldsymbol{x}_0$ *es una solución aislada de la ecuación* $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}$ *se define el* ***índice*** $\mathtt{i}(\phi, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p})$ *como la* ***multiplicidad del p-punto*** $\boldsymbol{x}_0$. *Si* $\mathtt{i}(\phi, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}) = 1$ *se dice que la solución es* ***simple***.

Se finaliza esta subsección con el enunciado de un teorema que relaciona la multiplicidad con el carácter crítico o no del punto en cuestión; su demostración se esboza en Lloyd [Lloyd N. G., 1978, pp 146] y el cómputo específico del índice se puede consultar en Cronin [Cronin J. 1964, pp33-55].

Teorema 3.4.3.3 *La multiplicidad de* $\boldsymbol{x}_0$ *como* $\boldsymbol{p}$ *punto de* ϕ *es siempre al menos 1 y mayor que 1 sii* $\boldsymbol{x}_0$ *es un punto crítico de* ϕ.

En el próximo capítulo veremos algunas aplicaciones de esta extensión.

Capítulo 4

Algunas consecuencias topológicas y aplicaciones de la teoría del grado de Brouwer.

4.1. * Definición del grado de Brouwer para funciones definidas sobre variedades.

Aquí damos una definición directa del grado de Brouwer para el caso de variedades diferenciales C^{∞}, definido sólo para valores regulares, que es esencialmente la definición 2.2.0.7 que hemos establecido en el segundo capítulo.

Definición 4.1.0.4 *Sean M y N variedades n-dimensionales C^{∞} orientadas sin borde, compacta y conexa respectivamente, de iguales dimensiones. Sea $f : M \longrightarrow N$ una función C^{∞}. Consideremos $\boldsymbol{x} \in M$ un punto regular y el isomorfismo inducido $df(\boldsymbol{x}) : T_{\boldsymbol{x}}(M) \longrightarrow T_{f(\boldsymbol{x})}(N)$. Los espacios tangentes están orientados por las cartas fijadas a priori. Definimos el signo de la diferencial en $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{sig}(df(\boldsymbol{x}))$, como 1 si preserva la orientación y como -1 si lo invierte. Entonces si $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p} \in N$, definimos el* **grado de Brouwer** *de la siguiente manera*

$$\boldsymbol{d}(f; M; \boldsymbol{p}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in f^{1}\{\boldsymbol{p}\}} \boldsymbol{sig}(df(\boldsymbol{x})) \qquad (4.1.0.1)$$

Observación 4.1.0.5 1. Omitiremos la referencia a la variedad diferencial M en la notación del grado.

2. Sean X e Y espacios topológicos localmente compactos. Se dice que una función : $X \to Y$ es propia si para todo compacto $K \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(K)$ es un compacto en X. El grado de Brouwer puede establecerse para

funciones propias $f : M \to N$ con M y N variedades diferenciales de clase C^∞, orientadas, de la misma dimensión, localmente compactas, con N conexa [Lima Elon L., 2005]. En el caso de que M sea compacta, si f es continua entonces es de inmediato propia.

3. Como lo hemos visto en el segundo capítulo el grado es constante sobre el conjunto de los valores regulares de pertenencen a una misma componente conexa del complemento de la imagen del campo sobre el borde. Veremos que si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son valores regulares de f entonces $\mathtt{d}(f; M, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(f; M, \mathbf{p})$.

4. Para probar que el grado es independiente de los valores regulares probaremos en primer lugar que, en este contexto, se verifica la propiedad de invariancia bajo homotopías y a posteriori un lema llamado de homogeneidad.

La invariancia bajo homotopías es consecuencia casi inmediata del siguiente lema que vincula bajo determinadas condiciones la posibilidad de extensión de un campo con el valor de su grado:

Lema 4.1.0.6 *Sean X y N dos varieriedades diferenciales orientadas, M compacta con borde y N conexa. Si $M = \partial X$ es la vieredad diferncial orientada de borde inducida por X y $f : M \longrightarrow N$ se extiende C^∞ a una función $F : X \longrightarrow N$ entonces $\mathtt{d}(f; \mathbf{p}) = 0$ para cualquier $\mathbf{p}$ valor regular de f.*

Demostración. 1. En primer lugar consideramos el caso en el que el punto $\mathbf{p}$ es también un valor regular de F.

Teniendo en cuenta que $F^{-1}\{\mathbf{p}\}$ es una variedad 1-dimensional compacta entonces debe ser unión de arcos y círculos cuyo borde esta conformado únicamente por los extremos de los arcos que están en $M = \partial X$. Sea $\Gamma \subset F^{-1}\{\mathbf{p}\}$ un arco con $\partial\Gamma = \{\mathbf{x}_1\} \cup \{\mathbf{x}_2\}$.

Veremos que $\mathtt{sig}(df(\mathbf{x}_1)) + \mathtt{sig}(df(\mathbf{x}_2)) = 0$ de manera que si sumamos sobre todos los arcos se tiene que $\mathtt{d}(f, \mathbf{p}) = 0$.

Las orientaciones de X y N determinan una orientación sobre Γ de la siguiente manera: Dado $\mathbf{x} \in \Gamma$ consideramos una base de $T_{\mathbf{x}}X$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n+1}\}$, orientada positivamente con $\mathbf{v}_1$ tangente a Γ. Entonces $\{\mathbf{v}_1\}$ determina una orientación para el espacio tangente $T_{\mathbf{x}}\Gamma$ si la diferencial $dF(\mathbf{x})$ manda el conjunto $\{\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n+1}\}$ en una base de $T_{\mathbf{p}}N$ orientada positivamente.

Luego para cada $\mathbf{x} \in \Gamma$ consideramos $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$ el vector unitario definido por el proceso anterior. Entonces $\mathbf{v}_1$ es una función C^∞ y apunta hacia fuera digamos en $\mathbf{x}_1$ y para dentro en el punto $\mathbf{x}_2$, o la revés, en definitiva en un caso u otro en un punto el signo de la diferencial es 1 y en el otro -1, de manera que la suma es cero.

2. Ahora supongamos que $\mathbf{p}$ es un valor regular de f pero no de F. Teniendo en cuenta que $\mathtt{d}(f,\mathbf{p})$ es constante, en algún entorno V podemos elegir algún valor regular $\mathbf{q} \in V$ para F y obtener de acuerdo a lo probado en la primera parte del lema, que $\mathtt{d}(f,\mathbf{p}) = \mathtt{d}(f,\mathbf{q}) = 0$. ■

Observación 4.1.0.7 El lema 4.1.0.6 sigue siendo cierto para funciones continuas en los contextos en los cuales hemos definido el grado; por ejemplo para $\mathbb{R}^2$ el enunciado correspondiente es el siguiente: Si C denota el borde del disco $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ y la función continua $\phi : C \longrightarrow \mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\}$ se extiende continuamente a $\overline{D}$ entonces $W(\phi,\mathbf{P}) = 0$.

Ahora como consecuencia se tiene:

Teorema 4.1.0.8 *(Invariacia bajo homotopía).*
Si f y g son homotópicas entonces $\mathtt{d}(f;\boldsymbol{p}) = \mathtt{d}(g;\boldsymbol{p})$

Demostración. Consideremos una homotopía C^∞ $H : [0,1] \times M \longrightarrow N$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Veremos que si $\mathbf{p}$ es un valor regular de f y g entonces $\mathtt{d}(f,\mathbf{p}) = \mathtt{d}(g,\mathbf{p})$.

En primer lugar orientamos la variedad producto $[0,1] \times M$ cuyos bordes son $\{0\} \times M$ y $\{1\} \times M$ orientados respectivamente de manera negativa y positiva. Entonces el grado de $F|_{\partial([0,1]\times M)}$ en un valor regular $\mathbf{p}$ es igual a la diferencia $\mathtt{d}(g,\mathbf{p}) - \mathtt{d}(f,\mathbf{p})$ y de acuerdo al lema 4.1.0.6 es cero. ■

Otro resultado que necesitaremos requiere del concepto de una isotopía C^∞ entre dos funciones de la misma clase.

Definición 4.1.0.9 *Sean $f, g : M \longrightarrow N$ difeomorfismos C^∞. Se dice que el difeomorfismo f es C^∞-**isotópico** a g si existe una función $H : [0,1] \times M \longrightarrow N$ C^∞ tal que para cada $t \in [0,1]$ se tiene que H_t es un difeomorfismo C^∞ de M en N.*

Enunciamos el siguiente resultado, cuya demostración se puede ver en Milnor [Milnor J. W. 1965; pp 21].

Lema 4.1.0.10 *(Homogeneidad).*
Sean $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ puntos interiores de una variedad diferencial N, C^∞ y conexa. Entonces existe un difeomorfismo $h : N \longrightarrow N$ que es C^∞-isotópico a la identidad tal que $h(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}$.

Finalmente ahora se puede probar:

Teorema 4.1.0.11 *La función* $\mathtt{d}(f;\cdot)$ *definida sobre el conjunto de los valores regulares de* f *es constante.*

Demostración. Si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son valores regulares de f entonces, por homogeneidad, elegimos un difeomorfismo $h : N \longrightarrow N$ isotópico a la identidad tal que $h(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$. Ahora teniendo en cuenta la definición de grado, que h preserva la orientación y que $f \circ h$ es homotópica a f se obtiene $\mathtt{d}(f, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(h \circ f, h(\mathbf{p})) = \mathtt{d}(h \circ f, \mathbf{q}) = \mathtt{d}(f, \mathbf{q})$. ■

Observación 4.1.0.12 1. Otros enfoques para probar esta independencia se pueden encontrar en los textos de Lima E. y Spivak M. [Lima E. L., 2005 pag 34-36; (2) Spivak M.1979, pag 373.].

2. A partir de 4.1.0.4 y como consecuencia del teorema 4.1.0.11 podemos definir el `grado global de` f denotado $\mathtt{deg}(f)$ como $\mathtt{deg}(f, \mathbf{p})$ para cualquier valor regular $\mathbf{p}$ de f.

3. Nosotros ya hemos señalado en el segundo capítulo que como consecuencia de la dependencia del grado respecto de los valores del campo sobre el borde, representación integral de Kronecker, también se puede definir el grado global; esto lo retomaremos en 4.3.3.1.

El siguiente teorema será útil para establecer la proposición 4.1.0.15 que sigue a continuación

Teorema 4.1.0.13 *Sean* M*,* N *y* P *variedades diferenciales n-dimensionales orientadas, con* M *y* N *compactas y* N *y* P *conexas. Si* $f : M \to N$ *y* $g : N \to P$ *son* C^∞ *entonces* $\mathtt{deg}(g \circ f) = \mathtt{deg}(g) \cdot \mathtt{deg}(f)$

Demostración. Por el teorema de Sard podemos considerar un punto $\mathbf{p} \in P$ que sea valor regular tanto de g como de $g \circ f$. Supongamos que $g^{-1}\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$. Ahora para cada $i = 1, 2, ..., n$ $\mathbf{x}_i$ es valor regular de f y podemos suponer que $f^{-1}\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}_{i,1}, \mathbf{x}_{i,2}, ..., \mathbf{x}_{i,m_i}\}$ de forma tal que $(g \circ f)^{-1}\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{x}_{i,j} : 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m_i\}$.

Ahora consideremos $\varepsilon_i = \mathtt{sig}(dg(\mathbf{x}_i))$, $\eta_{i,j} = \mathtt{sig}(df(\mathbf{x}_{i,j}))$ y $\rho_{i,j} = \mathtt{sig}(d(g \circ f)(\mathbf{x}_{i,j}))$. Por definición se tiene que

$$\mathtt{deg}(g) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

,

$$\mathtt{deg}(f) = \sum_{j=1}^{m_i} \eta_{i,j}$$

independientemente de i por el teorema 4.1.0.11, y

$$\mathtt{deg}(g \circ f) = \sum_{i,j} \rho_{i,j}.$$

Finalmente teniendo en cuenta que $\rho_{i,j} = \varepsilon_i \cdot \eta_{i,j}$ se obtiene

$$\begin{gathered}\mathtt{deg}(g \circ f) = \textstyle\sum_{i,j} \rho_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m_i} \eta_{i,j}) \varepsilon_i = \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathtt{deg}(f) \varepsilon_i = \mathtt{deg}(f) \mathtt{deg}(g). \ \blacksquare\end{gathered} \tag{4.1.0.2}$$

También podemos calcular el grado de una función producto de la siguiente forma:

Corolario 4.1.0.14 *Sean M, N variedades diferenciales n-dimensionales orientadas, con M compacta y N conexa y P y Q variedades diferenciales r-dimensionales orientadas, con P compacta y Q conexa. Consideremos $M \times P$ y $N \times Q$ con las estructuras de variedades diferenciales productos orientadas. Si $f : M \to N$ y $g : P \to Q$ son funciones C^∞ y $f \times g : M \times P \to N \times Q$ al función producto asociada entonces $\mathtt{deg}(f \times g) = \mathtt{deg}(g) \cdot \mathtt{deg}(f)$.*

Demostración. Observamos que $\mathtt{deg}(f \times g) = \mathtt{deg}(f \times j) \circ \mathtt{deg}(i \times g)$ donde $i : M \to M$ y $j : Q \to Q$ son las identidades definidas sobre M y Q respectivamente. Ahora se ve que $\mathtt{deg}(f \times j) = \mathtt{deg}(f)$ y $\mathtt{deg}(i \times g) = \mathtt{deg}(g)$ y el resultado se sigue del teorema 4.1.0.13. $\blacksquare$

Cerramos esta sección con una consecuencia del teorema 4.1.0.13 que caracteriza la existencia de campos tangentes no nulos definidos sobre S^n en función de la paridad de n:

Proposición 4.1.0.15 *Sea $\varrho : S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow S^n$ la función antipodal, definida $\varrho(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$.*

i *Si n es par entonces ϱ no es C^∞-homotópica a la identidad, y*

ii *$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ admite un campo de vectores tangentes C^∞ nunca nulo sii n es impar.*

Demostración. i. Claramente, si $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo entonces $\mathtt{deg}(f) = \pm 1$ de acuerdo a que preserve o no la orientación, como $\mathtt{deg}(id) = 1$ si el difeomorfismo invierte la orientación entonces no puede ser homotópico a la identidad.

Consideremos $\varrho_i : S^n \longrightarrow S^n$ la reflexión en la coordenada i-ésima, es decir $\varrho_i(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = \varrho_i(x_1, x_2, ..., -x_i, ..., x_{n+1})$. Entonces $\mathtt{deg}(\varrho_i) = -1$. Ahora la función antipodal ϱ es composición de $n+1$ reflexiones $\varrho = \varrho_1 \circ \varrho_2 \circ ...\varrho_{n+1}$ de manera que, por el teorema de la composición, 4.1.0.13, $\mathtt{deg}(\varrho) = (-1)^{n+1}$. Luego si n es par entonces la función antipodal no es C^∞-homotópica a la identidad. Esta consecuencia no se sigue del concepto de grado módulo 2, que se verá en la próxima sección.

ii. Ahora veamos que S^n admite un campo de vectores tangentes C^∞ nunca nulo sii n es impar.

Supongamos la existencia de un campo tal; es decir $\mathbf{v} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ nunca nulo tal que para todo $\mathbf{x} \in S^n$ se tiene $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}S^n$. Esto es equivalente a que para todo $\mathbf{x} \in S^n$ se tenga que el producto interno $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0$ y además siendo $\mathbf{v}$ nunca nulo podemos considerar que $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ es unitario para cada $\mathbf{x}$ redefiniéndolo si fuera necesario como el campo $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}$. Luego interpretamos a $\mathbf{v}$ como una función C^∞ de S^n en S^n.

Sea $H : [0, \pi] \times S^n \longrightarrow S^n$ la homotopía entre la identidad y la función antipodal definida $H(t, \mathbf{x}) = cos(t) \cdot \mathbf{x} + sen(t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Observamos que efectivamente $\|H(t, \mathbf{x})\| = 1$ para todo $t \in [0, \pi]$ y todo $\mathbf{x} \in S^n$.

Ahora siendo $H_0 = id$ y $H_\pi = \varrho$ resulta que la identidad es homotópica a la función antipodal y esto es sólo posible de acuerdo al punto i de la presente observación si $n = 2k - 1$ es impar de manera que la dimensión del espacio debe ser par $n + 1 = 2k$. Por otro lado si $n = 2k - 1$ entonces efectivamente existe un tal campo: explícitamente

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, ..., x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, ..., x_{2k}, -x_{2k-1})$$

es un campo de vectores tangentes y nunca nulo definido sobre S^n. ■

4.2. * El grado módulo 2 de una función definida sobre una variedad compacta a valores en una variedad conexa.

Ahora -siguiendo a Milnor [Milnor J. W. 1965; pp 21-25]- daremos los conceptos de grado módulo 2.

Más precisamente, sean M y N variedades diferenciales C^∞ n-dimensionales, M compacta sin borde y N conexa. Dada $f : M \longrightarrow N$ una función C^∞ y

$\mathbf{p} \in N$ un valor regular de f denotamos con

$$\sharp f^{-1}\{\mathbf{p}\}$$

el `número de soluciones` de la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$. Probaremos que si $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son valores regulares de f entonces

$$\sharp f^{-1}\{\mathbf{p}_1\} \equiv \sharp f^{-1}\{\mathbf{p}_2\} \ \texttt{(mod.2)} \tag{4.2.0.3}$$

4.2.1. Invariancias bajo homotopias e isotopías.

En esta subsección establecermos los preliminares para definir el grado módulo dos

Lema 4.2.1.1 *(Invariancia bajo homotopías.)*
Consideremos M y N en las condiciones anteriores. Sean $f, g : M \longrightarrow N$ funciones C^∞-homotópicas. Si $\boldsymbol{p} \in N$ es un valor regular de ambas funciones f y g entonces

$$\sharp f^{-1}\{\boldsymbol{p}\} \equiv \sharp g^{-1}\{\boldsymbol{p}\} \ \textit{(mod.2)}.$$

Demostración. Sea $H : [0,1] \times M \longrightarrow N$ una homotopía C^∞ entre f y g.

1. En primer lugar supondremos que $\mathbf{p}$ es un valor regular también de H.

Observemos en primer lugar que vale la siguiente igualdad de conjuntos

$$H^{-1}(\mathbf{p}) \cap \{(\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M)\} = \{0\} \times f^{-1}\{\mathbf{p}\} \cup \{1\} \times g^{-1}\{\mathbf{p}\}$$

y por lo tanto la cantidad de $\mathbf{p}$-puntos de H en el borde de $[0,1] \times M$ es igual a la suma $\sharp f^{-1}\{\mathbf{p}\} + \sharp g^{-1}\{\mathbf{p}\}$. Ahora teniendo en cuenta el resultado [Milnor J. W. 1965; pp 11] según el cual una 1-variedad compacta siempre tiene un número par de $\mathbf{p}$-puntos en su borde se obtiene el resultado buscado.

2. Ahora se prueba el resultado para $\mathbf{p}$-puntos que no son necesariamente valores regulares de H.

Un resultado clásico de la geometría diferencial establece que $\sharp f^{-1}\{\mathbf{p}'\}$ y $\sharp g^{-1}\{\mathbf{p}'\}$ son localmente constantes como funciones de $\mathbf{p}'$ [Milnor J. W. 1965; pp 8]. De acuerdo a esto existe un entorno $\mathbf{p} \in V_f \subset N$ en donde para todo $\mathbf{p}' \in V_f \subset N$ se tiene que $\sharp f^{-1}\{\mathbf{p}'\} = \sharp f^{-1}\{\mathbf{p}\}$. Análogamente existe un entorno $\mathbf{p} \in V_g \subset N$ tal que para todo $\mathbf{p}' \in V_g$ se tiene $\sharp g^{-1}\{\mathbf{p}'\} = \sharp g^{-1}\{\mathbf{p}\}$.

Ahora se elige un valor regular de H, $\mathbf{q} \in V_f \cap V_g$ y teniendo en cuenta que para valores regulares de H se cumple (punto 1) entonces se obtiene la tesis pues

$$\sharp f^{-1}\{\mathbf{p}\} = \sharp f^{-1}\{\mathbf{q}\} \equiv \sharp g^{-1}\{\mathbf{q}\} = \sharp g^{-1}\{\mathbf{p}\}(\mathtt{mod.2}). \blacksquare$$

4.2.2. Definición del grado módulo 2.

Ahora podemos probar el resultado fundamental de esta sección y definir como consecuencia el grado módulo 2.

Teorema 4.2.2.1 *Si* $\boldsymbol{p}$ *y* $\boldsymbol{q}$ *son valores regulares de* $f : M \longrightarrow N$ C^∞ *entonces*

$$\sharp f^{-1}\{\boldsymbol{p}\} \equiv \sharp f^{-1}\{\boldsymbol{q}\} \ (\mathtt{mod.2}) \tag{4.2.2.1}$$

Demostración. Consideremos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ valores regulares de f y de acuerdo al lema 4.1.0.10 $h : N \longrightarrow N$ un difeomorfismo isotópico a la identidad tal que $h(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$.

Observemos que $\mathbf{q}$ es un valor regular de $h \circ f$. Ahora bien como $h \circ f$ es homotópica a f entonces por la invariancia de la homotopía, teorema 4.2.1.1 se tiene:

$$\sharp(h \circ f)^{-1}\{\mathbf{q}\} \equiv \sharp f^{-1}\{\mathbf{q}\} \ \ (\mathtt{mod.2}). \tag{4.2.2.2}$$

Pero como $(h \circ f)^{-1}\{\mathbf{q}\} = f^{-1}(h^{-1}\{\mathbf{q}\}) = f^{-1}\{\mathbf{p}\}$ entonces

$$\sharp(h \circ f)^{-1}\{\mathbf{q}\} = \sharp f^{-1}\{\mathbf{p}\} \tag{4.2.2.3}$$

y así

$$\sharp f^{-1}\{\mathbf{p}\} \equiv \sharp f^{-1}\{\mathbf{q}\} \ (\mathtt{mod.2}). \blacksquare \tag{4.2.2.4}$$

Definición 4.2.2.2 *Definimos el grado de la función* f *módulo 2 denotado* $\boldsymbol{deg}_2(f)$ *como el resto común a la clase a la que pertenece* f.

Observación 4.2.2.3 1. La definición sólo depende de la clase de homotopia de f, puesto que si g es C^∞-homotópica a f por el teorema de Sard existe un valor regular $\mathbf{p} \in N$ tanto de f como de g y entonces se tiene

$$\mathtt{deg}_2 f \equiv \sharp f^{-1}\{\mathbf{p}\} \equiv \sharp g^{-1}\{\mathbf{p}\} \equiv \mathtt{deg}_2 g \ \ (\mathtt{mod.2}) \tag{4.2.2.5}$$

2. Sea M una variedad diferencial compacta sin borde. Si $f : M \longrightarrow M$ es constante entonces su grado módulo 2 es par. Por otro lado la identidad

$I : M \longrightarrow M$ tiene grado módulo 2 impar. Como consecuencia inmediata del lema 4.2.1.1 la identidad no es homotópica a una constante.

3. En particular si $M = S^n$ entonces ninguna función C^∞ del disco D^{n+1} a la esfera S^n deja a todos los puntos de la esfera fijos, dicho de otra manera no hay un retracto C^∞ del disco a la esfera. Si existiera una retracción, digamos $\mathbf{r}$, podríamos definir la homotopía $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n$ entre S^n y una constante de la siguiente forma $H(t, \mathbf{p}) = \mathbf{r}(t \cdot \mathbf{p})$ lo cual contradice la observación del segundo punto.

4.3. * El concepto de grado y la cohomología de Rham.

En esta sección presentamos de manera esquemática la relación que existe entre los conceptos de grado topológico de Brouwer y el grupo de cohomología de Rham [Fulton W., 1991]. El trabajo realizado en el capítulo anterior, específicamente a partir de la ecuación (3.3.0.11) y del teorema 3.3.0.15, permite precisar cuales son los puntos claves para establecer esa relación.

Comenzaremos considerando el caso $\mathbb{R}^2$, posteriormente trataremos el caso $\mathbb{R}^n$ y finalmente daremos una generalización para variedades.

4.3.1. Relación entre el grado de un campo continuo definido en $\gamma_{\mathbf{P},r} \subset \mathbb{R}^2$ y el grupo de cohomología $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\})$

Para abordar esta relación señalaremos algunos hechos elementales referidos a los grupos de cohomología de Rham a través de tres apartados: I, II y III.

I. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es abierto definimos el `cero grupo de Rham`, como el conjunto $\mathsf{H}^0(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ es localmente constante en } U\}$. Es fácil ver $H^0(U)$ es un espacio vectorial. Una función localmente constante se identifica con n constantes si U tiene n componentes conexas $U_1, U_2, ..., U_n$. Más precisamente si consideramos $e_i = \chi|_{U_i}$ la función definida como 1 sobre U_i y 0 sobre $U - U_i$ entonces el conjunto $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base de $H^0(U)$. Similarmente si U tiene infinitos componentes conexas entonces H^0 es un espacio vectorial de dimensión infinita.

II. Las 1-formas cerradas sobre U constituyen un espacio vectorial y las 1-formas exactas un subespacio del mismo. Ahora se define el `primer grupo` `de cohomología de Rham` como el espacio cociente

$$\mathsf{H}^1(U) \doteq \frac{\mathsf{C}^1(U)}{\mathsf{E}^1(U)}$$

donde $\mathsf{C}^1(U)$ es el conjunto de las 1-formas cerradas sobre U y $\mathsf{E}(U)$ es el conjunto de las 1-formas exactas sobre U. Con $[\omega]$ denotamos la clase a la que corresponde $\omega \in \mathsf{C}^1(U)$.

III. Dado $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ consideramos, $\frac{1}{2\pi}\omega_{\mathbf{P}}$. Para simplificar la notación seguieremos denotándola $\omega_{\mathbf{P}}$:

$$\omega_{\mathbf{P}} = \frac{1}{2\pi}\frac{-(y-y_0)dx + (x-x_0)dy}{(x-x_2)^2 + (y-y_0)^2} = \frac{1}{2\pi}\mathbf{r}^*(\omega|_{S^1_{\mathbf{P}}})$$

que es una 1-forma cerrada en $U/\{\mathbf{P}\}$.

El siguiente resultado es clave para establecer la relación que se busca:

Proposición 4.3.1.1 **i** *Si U es un rectángulo entonces $\mathsf{H}^1(U) = 0$.*

ii *$[\omega_{\boldsymbol{P}}]$ es una base de $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}\})$*

iii *Si $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{Q}$ entonces $\{[\omega_{\boldsymbol{P}}], [\omega_{\boldsymbol{Q}}]\}$ es una base de $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\})$.*

iv *Si A es un conjunto cerrado conexo del plano y $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in A$ entonces $[\omega_{\boldsymbol{P}}] = [\omega_{\boldsymbol{Q}}]$ en $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/A)$*

Demostración. i. Es inmediato puesto que, en tal caso, sabemos que toda forma cerrada en U es exacta 3.2.1.8.

ii. Fijemos $r > 0$ y consideremos, $\gamma_{\mathbf{P},r}$, la circunferencia de centro $\mathbf{P}$ y radio $r > 0$ orientada positivamente. Claramente $[\omega_{\mathbf{p}}] \neq 0$ pues de lo contrario $\omega_{\mathbf{p}}$ debiera ser exacta en $U = \mathbb{R}^2/\{P\}$ y $\int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \omega_{\mathbf{p}} = 0$, lo cual es falso dado que $\int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \omega_{\mathbf{p}} = 1$. Ahora sea ω una forma cerrada arbitraria. Para probar el resultado bastará ver que existe una constante c tal que $[\omega] = c \cdot [\omega_{\mathbf{P}}]$ lo cual es equivalente a probar que $\omega - c \cdot \omega_{\mathbf{P}}$ es exacta. Ahora bien, si consideramos $c = \int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \omega$ entonces $\int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} (\omega - c \cdot \omega_{\mathbf{P}}) = 0$ y como $d(\omega - c \cdot \omega_{\mathbf{P}}) = 0$ en U entonces por el lema 3.2.1.13 se obtiene que $\omega - c \cdot \omega_{\mathbf{P}}$ es exacta.

iii. Fijamos $r > 0$ tal que $r < \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\|$. Para ver que el sistema de clases $\{[\omega_{\mathbf{P}}], [\omega_{\mathbf{Q}}]\}$ es linealmente independiente supongamos que para algunas constantes a y b se tiene que $a \cdot [\omega_{\mathbf{P}}] + b \cdot [\omega_{\mathbf{Q}}] = 0$. Ahora integrando sobre $\gamma_{\mathbf{P},r}$ se obtiene que $0 = a \cdot \int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \omega_{\mathbf{P}} + b \cdot \int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \omega_{\mathbf{Q}} = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$ y de manera análoga integrando sobre $\gamma_{\mathbf{Q},r}$ se obtiene que $b = 0$. Ahora veremos que el sistema genera $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/\{\mathbf{P},\mathbf{Q}\})$. Para eso basta ver que si ω es cerrada en $U = \mathbb{R}^2/\{\mathbf{P},\mathbf{Q}\}$ entonces $\eta \doteq \omega - a\cdot\omega_{\mathbf{P}} - b\cdot\omega_{\mathbf{Q}}$ es exacta. Para ello tomamos $a = \int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \omega$ y $b = \int_{\gamma_{\mathbf{Q},r}} \omega$. Entonces $\int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \eta = 0$ y $\int_{\gamma_{\mathbf{Q},r}} \eta = 0$ y de acuerdo al lema 3.2.1.14 resulta que η es exacta.

iv. Hay que ver que $\omega = \omega_{\mathbf{P}} - \omega_{\mathbf{Q}}$ es exacta en $U = \mathbb{R}^2/A$. De acuerdo a la proposición 3.2.1.5 basta ver que para todo camino γ, cerrado en A, se tiene que $\int_\gamma \omega = 0$. Ahora bien

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_{\mathbf{P}} - \int_\gamma \omega_{\mathbf{Q}} = W(\gamma,\mathbf{P}) - W(\gamma,\mathbf{Q})$$

y como $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \gamma[a,b]$ entonces por proposición 3.2.5.9 se obtiene el resultado. ∎.

Observación 4.3.1.2 Puede probarse que si A se toma como en la proposición 4.3.1.1 y $\mathbf{P} \in A$ entonces $[\omega_{\mathbf{P}}] = 0$ en $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/A)$ si y sólo si A no es acotado.

Ahora veremos como se vincula el grado de un campo definido sobre una curva de $\mathbb{R}^2$ con el generador $[\omega_{\mathbf{P}}]$ de $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\})$.

Sean U, V abiertos de $\mathbb{R}^2$ y $\phi : U \longrightarrow V$ es una función continua con $\phi(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$ tal que para todo $\mathbf{P}_1 \in D(\mathbf{P}, r)$ si $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}$ se tiene que $\phi(\mathbf{P}_1) \neq \phi(\mathbf{P})$. Consideramos el morfismo $\phi^* : \mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/\{\mathbf{Q}\}) \longrightarrow \mathsf{H}^1(\mathbb{R}^2/\{\mathbf{P}\})$ inducido por ϕ y $\phi|_{\gamma_{\mathbf{P},r}} : \gamma_{\mathbf{P},r} \longrightarrow \mathbb{R}^2/\{\mathbf{Q}\}$ la restricción del campo a la curva $\gamma_{\mathbf{P},r}$, borde del disco $\overline{D}(\mathbf{P}, r) \subset U$.

Por un lado, de acuerdo a lo establecido en la ecuación (3.3.0.11) del segundo capítulo:

$$W(\phi, \gamma_{\mathbf{P},r}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \phi^*(\omega_{\mathbf{P}}).$$

Por otro lado por el punto ii de la proposición 4.3.1.1 se tiene que existe una constante c tal que

$$[\phi^*(\omega_{\mathbf{P}})] = c \cdot [\omega_{\mathbf{P}}].$$

Entonces integrando sobre $\gamma_{\mathbf{P},r}$ se tiene

$$\int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \phi^*(\omega_{\mathbf{P}}) = c \int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \omega_{\mathbf{P}} = c \cdot 2\pi$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathtt{d}(\phi, D(\mathbf{P}, r), \mathbf{P}) = W(\phi, \gamma_{\mathbf{P},r}, \mathbf{P}) = \\ = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{\mathbf{P},r}} \phi^*(\omega_{\mathbf{P}}) = c. \end{aligned} \tag{4.3.1.1}$$

Con esto se muestra que el grado es la coordenada del pull back de $\omega_{\mathbf{P}}$ via ϕ en la base $\{[\omega_{\mathbf{P}}]\}$.

Observación 4.3.1.3 Introduciendo el mapa de cobordismo y utilizando las ideas anteriores se puede probar una serie de resultados, entre los que se destacan, el teorema de Jordan y la invariancia del dominio. [Fulton W. 1991, pp. 69-77]. Para una demostración del teorema de Jordan que utiliza el concepto de grado, en la perspectiva del enfoque diferencial, se puede consultar Lloyd [Lloyd N. G., 1978, pp. 47].

4.3.2. Relación entre el grado de un campo C^1 definido en $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ y el grupo de cohomología $H^{n-1}(\mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\})$.

Podemos generalizar estas ideas a $\mathbb{R}^n$. Consideremos de acuerdo al teorema 3.1.5.2, el pull back de la retracción definida sobre el elemento de volúmen de la esfera:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}}) = \mathbf{r}^* \left\{ \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_j \widehat{\omega}_j \right\} = \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|^n} \widehat{\omega}_j \end{aligned} \tag{4.3.2.1}$$

donde $\widehat{\omega}_j = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \widehat{dx}_j \wedge ... \wedge dx_n$. La $n-1$ forma $\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$ está definida en $\mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\}$.

Recurriendo a un teorema de la topología algebraica, el teorema de Mayer-Vietoris [Fulton, W 1991; pp-326-331], se prueba que $\{\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})\}$ es una base de $H^{n-1}(\mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\})$.

Ahora consideremos $\phi : \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\}$ diferenciable con continuidad. Restringimos el campo a $S^{n-1} = \partial B(\mathbf{0}, 1)$. Teniendo en cuenta que $\{\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})\}$ es base existe una constante c tal que $[\phi^*(\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}}))] = c \cdot [\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})]$. Luego integrando sobre S^{n-1} se obtiene que

$$\begin{aligned} vol(S^{n-1}) \cdot W(\phi, S^{n-1}, \mathbf{0}) = \textstyle\int_{S^{n-1}} (\mathbf{r} \circ \phi)^*(\omega_{S^{n-1}}) = \\ = \textstyle\int_{S^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\phi_j}{\|\phi\|^n} \widehat{\omega}_j = c \cdot vol(S^{n-1}). \end{aligned} \tag{4.3.2.2}$$

y por lo tanto

$$\mathtt{d}(\phi, B(\mathbf{0}, 1), \mathbf{0}) = W(\phi, S^{n-1}, \mathbf{0}) = c \tag{4.3.2.3}$$

4.3.3. Generalización para un campo $\phi : X \longrightarrow Y$ suave con X e Y variedades n-dimensionales, compactas, conexas y orientadas.

El próximo paso consiste en adapatar el desarrollo anterior para definir el grado en el contexto de las variedades. Sea X una variedad compacta de clase C^∞.

Consideramos los conjuntos $\mathsf{C}^n(X)$ y $\mathsf{E}^n(X)$ de las k-formas cerradas y exactas respectivamente. Definimos el k-ésimo grupo de cohomología de Rham de X como el espacio cociente

$$\mathsf{H}^n(X) \doteq \frac{\mathsf{C}^n(X)}{\mathsf{E}^n(X)}.$$

En particular $\mathsf{H}^0(X) \sim \mathbb{R}^v$ donde v es el número de componentes conexas de X. También destacamos el siguiente resultado de la teoría de cohomología: si X es una variedad n-dimensional, compacta, conexa y orientada entonces $\mathsf{H}^n(X) \sim \mathbb{R}$ [(2) Spivak M, 1979].

Ahora sean X e Y dos variedades n-dimensionales compactas, conexas y orientadas y $\phi : \ X \longrightarrow Y$ un campo suave. Entonces se induce, via el pull-back, un morfismo de los grupos de cohomología $\phi^* : \mathsf{H}^j(Y) \longrightarrow \mathsf{H}^j(X)$. Teniendo en cuenta los isomorfismos $\mathsf{H}^n(Y) \approx \mathbb{R} \approx \mathsf{H}^n(X)$ se tiene que $\phi^* : \mathsf{H}^n(Y) \longrightarrow \mathsf{H}^n(X)$ es el isomorfismo multiplicar por una constante.

En primera instancia se considera ω_0 una n-forma no nula sobre Y de forma tal que $\int_Y \omega_0 > 0$. Luego existe una constante c tal que

$$\int_X \phi^*(\omega_0) = c \cdot \int_Y \phi^*(\omega_0).$$

Veremos que esto mismo se cumple para cualquier n-forma ω definida en Y.

Para ello definimos el isomorfismo

$$T_X : \mathsf{H}^n(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

como $T_X([\omega]) = \int_X \omega$ y de manera análoga T_Y. Los operadores T_X y T_Y están bien definidos y teniendo en cuenta que $[\omega_0]$ genera $\mathsf{H}^n(Y)$ se tiene que para cada clase $[\omega]$ definida por una n-forma ω sobre Y existe una constante λ tal que $[\omega] = \lambda[\omega_0]$.

Trabajando con los representantes se ve que

$$T_X\phi^*(\omega) = \int_X \phi^*(\omega) = \lambda \int_X \phi^*(\omega_0) = \lambda \left\{ c \cdot \int_Y \omega_0 \right\} = c \cdot \int_Y \omega = c \cdot T_Y(\omega).$$

En definitiva para toda n-forma ω sobre Y se cumple que

$$\int_X \phi^*(\omega) = c \cdot \int_Y \omega.$$

Luego si fijamos cualquier n-forma ω_0 entonces la constante c se puede escribir para cualquier n-forma ω

$$c = \frac{1}{\int_Y \omega_0} \int_X \phi^*(\omega_0).$$

Definición 4.3.3.1 *De acuerdo al desarrollo anterior se puede:*

i *Elegir ω_0 una n-forma tal que $\int_Y \omega_0 = 1$ y definir el* **`grado global`** *de ϕ de la siguiente manera*

$$\boldsymbol{deg}(\phi) \doteq c = \int_X \phi^*(\omega_0)$$

, o bien

ii *Elegir ω_0 una n-forma de volúmen y definir el* **`grado global`** *de ϕ como*

$$\boldsymbol{deg}(\phi) \doteq \frac{1}{Vol(Y)} \int_X \phi^*(\omega_0).$$

Observación 4.3.3.2 1. Si Y es una variedad diferencial n-dimensional compacta conexa y ortientada entonces la n-forma ω sobre Y es exacta sii $\int_Y \omega = 0$ [Taylor M. E. 1996, pag 99]. Este resultado permite ver que la definición dada en **??** punto i no depende de la n-forma elegida. Más precisamente si ω_0' es otra n-forma tal que $\int_Y \omega_0' = 1$ entonces $\int_Y(\omega_0 - \omega_0') = 0$ y por lo tanto existe una n-1 forma β definida sobre Y tal que $\omega_0 - \omega_0' = d\beta$. Luego

$$\begin{array}{c} \int_X \phi^*(\omega_0) - \int_X \phi^*(\omega_0') = \int_X \phi^*(\omega_0 - \omega_0') \\ = \int_X \phi^*(d\beta) = \int_X d\phi^*(\beta) = 0 \end{array} \tag{4.3.3.1}$$

2. También podemos observar que la definición dada en 4.3.3.1 punto ii coincide con la definición 3.3.0.13 dada en el segundo capítulo.

Para ello consideremos $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1 con $\mathbf{0} \notin \phi(\partial\Omega)$ y $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\} \longrightarrow S^{n-1}$ la retracción radial definida $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Ahora elegimos, como siempre, la n-forma de volúmen $\omega_0 = \mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})$ definida sobre S^{n-1}. Entonces tomando $X = \partial\Omega$ y $Y = S^{n-1}$ resulta que son dos variedades n-1 dimensionales compactas, conexas, y orientadas. Luego si consideramos el campo restringido $\mathbf{r} \circ \phi|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \longrightarrow S^{n-1}$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}) = W(\phi, \partial\Omega, \mathbf{0}) = \tfrac{1}{\mathrm{Vol}(S^{n-1})} \int_{\partial\Omega} \phi^*(\mathbf{r}^*(\omega_{S^{n-1}})) = \\ = \tfrac{1}{\mathrm{Vol}(Y)} \int_X \phi^*(\omega_0) = \mathtt{deg}(\phi) \end{aligned} \tag{4.3.3.2}$$

3. Supongamos que X es una variedad diferencial $n+1$-dimensional compacta con borde, conexa y orientada e Y una variedad n-dimensional compacta, conexa y orientada. Sea $\Phi : X \longrightarrow Y$ suave y consideremos el campo restringido $\phi = \Phi|_{\partial X} : \partial X \longrightarrow Y$. En tal caso se tiene que $\mathtt{deg}(\phi) = 0$. Para ver esto se aplica Stokes, 3.1.6.2 y observamos que como Y es n-dimensional entonces $d\omega_0 = 0$.

$$\int_\partial X\phi^*(\omega_0) = \int_X d\Phi^*(\omega_0) = \int_X \Phi^*(d\omega_0) = 0.$$

4. A partir de la definición 4.3.3.1 es facil ver que el grado es invariante bajo homotopías , pues si $\phi, \psi : X \longrightarrow Y$ son dos campos C^∞ homotópicos entonces las transformaciones $\phi^*, \psi^* : \mathsf{H}^n(Y) \longrightarrow \mathsf{H}^n(X)$ coinciden [(2) Spivak M 1979, pag 376] y por lo tanto $\mathtt{deg}(\phi) = \mathtt{deg}(\psi)$.

4.4. Teoremas de punto fijo para funciones definidas sobre un espacio normado X, de dimensión finita.

En esta sección nosotros abordaremos algunas consecuencias topológicas del concepto de grado referidas a teoremas de punto fijo, más preciasamente, probaremos el teorema del punto fijo de Brouwer, el teorema de Borsuk y el corolario de Borsuk-Ulam.

4.4.1. Teorema del punto fijo de Brouwer.

Definición 4.4.1.1 *Sea X un conjunto y $\phi : X \longrightarrow X$ una función. Se dice que $\boldsymbol{x} \in X$ es un* **`punto fijo`** *de ϕ si $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, o bien si $\boldsymbol{x}$ es un cero de $\psi_1 = id - \phi$.*

Como lo hemos señalado anteriormente en el segundo capítulo la teoría del grado topológico nos permite decidir, bajo determinadas circunstancias, cuando existe una solución de una ecuación del tipo $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$ o equivalentemente al existencia de algún cero de $\psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}$. En particular la existencia de algún punto fijo de ϕ se traduce en la existencia de algún cero de la función $\psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$.

Definición 4.4.1.2 *Sea X un espacio normado (e-v-n), $S \subset X$. Se dice que S tiene la* **`propiedad del punto fijo`** *si cada función $\phi : S \longrightarrow S$ continua tiene un punto fijo.*

Si S tiene tal propiedad escribiremos S-ppf.

Observación 4.4.1.3 Supongamos que Ω es un abierto tal que $\overline{\Omega}$ es homeomorfo a $\overline{B} \doteq \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ es decir existe una función $h : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{B}$ continua con inversa h^{-1} continua. Entonces es fácil probar que $\overline{\Omega}$-ppf sii $\overline{B}$-ppf. Más precisamente si $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ continua consideramos $\varphi = h \circ \phi \circ h^{-1} : \overline{B} \to \overline{B}$ y entonces resulta que: $\mathbf{y} \in \overline{B}$ es punto fijo de φ sii $\mathbf{x} = h^{-1}(\mathbf{y})$ es punto fijo de ϕ.

Teorema 4.4.1.4 *(`Teorema de Brouwer`).*
Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{\Omega}$ es homeomorfo a $\overline{B}$. Entonces $\overline{\Omega}$-ppf.

Demostración. Por la observación 4.4.1.3 basta probar que $\overline{B}$-ppf.

Sea $\phi : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ continua. Si ϕ tiene algún punto fijo en el borde, ∂B, no hay nada que probar. Supongamos por tanto que para todo $\mathbf{x} \in \partial B$ se tiene que $\phi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$. Ahora definimos la homotopía $H(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - t \cdot \phi(\mathbf{x})$ de manera que $H_0 = id$ y $H_1 = id - \phi$. Observemos que si $\mathbf{x} \in \overline{B}$ entonces para todo $t \in [0, 1)$ se tiene que $t \cdot \phi(\mathbf{x}) \in B$ de manera que para todo $t \in [0, 1)$ vale que $\mathbf{0} \notin H_t(\partial B)$. Luego por la invariancia bajo homotopía, punto 2 del teorema 2.6.1.3, y la propiedad de normalización 2.2.0.10 se tiene

$$1 = \mathtt{d}(id, B, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(id - \phi, B, \mathbf{0}).$$

El resultado se sigue del teorema aplicado a la función $\phi_1 = id - \phi$. ■

Observación 4.4.1.5 El teorema de Brouwer vale para conjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacio.

Teorema 4.4.1.6 *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y convexo de interior no vacio entonces K-ppf.*

Demostración. Por las observaciones 4.4.1.3 y el teorema sólo debemos definir un homemorfismo entre K y $\overline{B}$. Sea $\mathbf{x}_0$ en el interior de K. Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ entonces la semirecta con origen $\mathbf{x}_0$ que contiene al segmento $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ corta al borde ∂K en un punto $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Es fácil ver que $h : K \longrightarrow \overline{B}$ definida

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\|f(\mathbf{x})-\mathbf{x}_0\|} \text{ si } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{4.4.1.1}$$

realiza el homeomorfismo buscado. ■

El próximo teorema establece que si una función continua ϕ sobre $\overline{\Omega}$ tiene la propiedad de que para algún origen $\mathbf{w}$ en Ω y para todo punto $\mathbf{x}$ de su borde, $\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{w}$ `no es una dilatación` del punto $\mathbf{x} - \mathbf{w}$ entonces ϕ tiene un punto fijo.

Teorema 4.4.1.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $\phi \in C(\overline{\Omega})$. Si existe $\boldsymbol{w} \in \Omega$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ y para todo $c > 1$ se tiene que $\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w} \neq c \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w})$ entonces ϕ tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que ϕ no tiene puntos fijos y consideremos la homotopía

$$H(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{w} - t \cdot (\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{w})$$

para $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ y $t \in [0, 1]$.

Veamos que $\mathbf{0} \notin H_t(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$. Es claro para $t = 1$. Si para algún $0 < t < 1$ existe $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ tal que $H_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ entonces $t^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{w}) = \phi(\mathbf{x}) - \mathbf{w}$ contradiciendo la hipótesis. Luego nuevamente por la invariancia por homotopía, punto 2 del teorema 2.6.1.3, se tiene

$$\mathtt{d}(H_0, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_1, \Omega, \mathbf{0})$$

es decir

$$\mathtt{d}(id - \mathbf{w}, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(id - \phi, \Omega, \mathbf{0}).$$

Como $\mathbf{w} \in \Omega$ entonces $1 = \mathtt{d}(id - \mathbf{w}, \Omega, \mathbf{0})$ y por el teorema concluimos que $id - \phi$ tiene un $\mathbf{0}$-punto y en consecuencia ϕ un punto fijo. ■

Teorema 4.4.1.8 *Sea $\mathbb{R}^n$ de dimensión impar y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado tal que $\mathbf{0} \in \Omega$. Si $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$ con $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ entonces existe $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ y $c \neq 0$ tal que $\phi(\boldsymbol{x}) = c \cdot \boldsymbol{x}$, es decir ϕ tiene un punto fijo en el borde o bien actúa sobre algún punto del borde como si fuera una contracción o bien una dilatación.*

Demostración. Definimos un par de homotopías para todo $t \in [0,1]$ y $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$

$$\begin{cases} H(t,\mathbf{x}) = (1-t)\phi + t\mathbf{x} \\ K(t,\mathbf{x}) = (1-t)\phi - t\mathbf{x}. \end{cases} \tag{4.4.1.2}$$

Si no existe $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ en las condiciones del teorema entones para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $\mathbf{0} \notin H_t(\partial\Omega), K_t(\partial\Omega)$ de manera que los grados correspondientes están definidos y nuevamente por el punto 2 del teorema 2.6.1.3 se tiene que

$$1 = \mathtt{d}(id, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(-id, \Omega, \mathbf{0}) = (-1)^n \tag{4.4.1.3}$$

de donde $1 = (-1)^n$ y por lo tanto n debe ser par contradiciendo la hipótesis. ∎

4.4.2. Teorema de Borsuk.

Para esta subsección requerimos del concepto de conjunto simétrico respecto del origen y de función impar. Consideremos un X e-v-n. Diremos que el $A \subset X$ es simétrico respecto del origen si cada vez que $\mathbf{x} \in A$ se tiene que $-\mathbf{x} \in A$ y se dice que $\phi : A \to X$ es impar si para todo $\mathbf{a} \in A$ se tiene $\phi(-\mathbf{a}) = -\phi(\mathbf{a})$. Para probar el teorema de Borsuk, necesitamos del siguiente lema cuya demostración puede verse en Amann [Amann, H., 1990].

Lema 4.4.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ simétrico y $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$ impar con $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\psi \in A^r_{\boldsymbol{p},1}$ con $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ impar tal que $\|\phi - \phi\| < \varepsilon$.*

Una vez probado este lema es fácil dar una demostración del teorema de Borsuk, lo que significa que toda la carga técnica de la demostración está en verdad en el lema anterior.

Teorema 4.4.2.2 `Teorema de Borsuk.` *Sea $\Omega \subset X$ un entorno abierto acotado y simétrico del cero y $\phi \in A_{\boldsymbol{p},0}$. Si $\phi|_{\partial\Omega}$ es impar entonces el grado $\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0})$ es impar.*

Demostración. Basta probar el teorema para $X = \mathbb{R}^n$. Consideremos la función $\varphi \in A_{\mathbf{p},0}$ definida $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x}) - \phi(-\mathbf{x})}{2}$ que es impar y además coincide sobre el borde $\partial\Omega$ con ϕ, es decir $\varphi|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}$. Luego por el teorema de la dependencia del grado sobre los valores del borde, 2.6.1.6, se tiene $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(\varphi, \Omega, \mathbf{0})$. Ahora usando la continuidad del grado en la primer variable, 2.6.1.3, y el lema 4.4.2.1 existe una función impar $\psi \in A^r_{\mathbf{p},1}$ tal que $\|\psi - \phi\| < \rho(\mathbf{0}, \partial\Omega)$ y por definición

$$\mathtt{d}(\varphi, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{x} \in \psi^{-1}\{\mathbf{0}\}} \mathtt{sig} J_\psi(\mathbf{x}).$$

Finalmente teniendo en cuenta que $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y que cada vez que $h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se tiene que $h(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se concluye que el grado $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0})$ es impar. ■

Corolario 4.4.2.3 *Teorema de Borsuk-Ulam. Sea $\Omega \subset X$ un entorno simétrico del cero y $\psi \in C(\partial\Omega)$. Si $\psi(\partial\Omega)$ está contenido en un subespacio vectorial propio $X_0 \subset X$ entonces existe un punto $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ tal que $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(-\boldsymbol{x})$ o sea ψ tiene la misma imagen sobre al menos un par de puntos antipodales.*

Demostración. Podemos probar el corolario para el caso en que $X = \mathbb{R}^m$ y $X_0 = \mathbb{R}^n$ con $n < m$. Por el teorema de Tietze podemos extender a ψ a una función $\overline{\psi}$ y deffinir $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ $\phi(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\psi}(\mathbf{x}) - \overline{\psi}(-\mathbf{x})}{2}$ parto todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Así ϕ resulta ser impar con $\phi(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^n$. Ahora si para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ vale que $\phi(\mathbf{x}) \neq \phi(-\mathbf{x})$, entonces de acuerdo al teorema de Borsuk 4.4.2.2 se tendría en particular que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}) \neq 0$. Luego $\phi(\Omega)$ contendría un entorno abierto del origen y esto contradice que $\phi(\partial\Omega)$ está contenido en un subespacio propio de $\mathbb{R}^m$. ■

4.5. Algunas aplicaciones al cálculo de variable compleja.

Daremos una demostración a partir de teoría de grado de resultados clásicos del cálculo de variable compleja; específicamente del principio del argumento, el teorema de Rouche y el teorema fundamental del álgebra.

La definición 2.7.0.6, los teoremas 2.7.0.8, 3.3.0.15, 3.4.2.1 y el corolario 3.4.2.2 sintetizan el siguiente:

Teorema 4.5.0.4 *(Principio del argumento).*
Sea $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ análitica y Ω un C^2-dominio acotado tal que $\overline{\Omega} \subset U$ y $\mathbf{0} \notin f(\partial\Omega)$. Entonces

$$\mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = W(f, \partial\Omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N \qquad (4.5.0.1)$$

donde N es el número de ceros de f en Ω contados con su multiplicidad.

Demostración. Si z_0 es un cero de f entonces es aislado y por lo tanto existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $z \in B^*(z_0, \varepsilon) = B(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$ entonces $f(z) \neq 0$. Luego teniendo en cuenta que f es C^0 p-admisible, con $p = 0$, el grado está definido como el índice 2.7.0.6; más precisamente si $\varepsilon < \varepsilon_0$ entonces $\mathtt{d}(f, B(z_0, \varepsilon), 0) = \mathtt{i}(f, z_0, 0)$.

Ahora supongamos que $z_1, z_2, ..., z_n$ son todos los ceros de f; entonces de acuerdo al punto 1 del teorema 2.7.0.8 existen entornos abiertos y disjuntos de a dos $B_j \doteq B(z_j, \varepsilon)$ con $j = 1, 2, ..., n$ tal que

$$\mathtt{d}(f, \Omega, 0) = \sum_{j=1}^{n} \mathtt{i}(f, z_j, 0) \tag{4.5.0.2}$$

Por otro lado los entornos se pueden elegir de forma tal que para cada j=1,2,...,n exista g_j holomorfa en B_j tal que si $z \in B_j$ entonces $f(z) = (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$ con $g_j(z) \neq 0$ y m_j la multiplicidad del cero z_j.

Ahora tomamos derivada logarítmica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j}{z - z_j} + \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} \tag{4.5.0.3}$$

e integramos. Teniendo en cuenta que $\frac{g_j'(z)}{g_j(z)}$ es analítica en B_j por el teorema de Cauchy se tiene que $\int_{\partial B_j} \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz = 0$ de manera que para todo $j = 1, 2, ..., n$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{m_j}{z - z_j} dz = \\ m_j \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{1}{z - z_j} dz \right\} = m_j \end{array} \tag{4.5.0.4}$$

Luego teniendo en cuenta la ecuación (4.5.0.4), el teorema 3.4.2.1, el corolario 3.4.2.2 y la definición de índice 2.7.0.6 se tiene para cada $j = 1, 2, ..., n$ la igualdad

$$\mathtt{i}(f, z_j, 0) = \mathtt{d}(f, B_j, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_j.$$

Finalmente sumando sobre j se obtiene el resultado. ■

A partir de este resultado y el hecho de que la función grado es constante en cada componente conexo de $\mathbb{R}^2_{f,0}$, teorema 2.6.1.5, se deduce de inmediato que la función $\varphi_f(a,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)-a}$ es constante en cada componente conexo Θ de $\mathbb{R}^2_{f,0}$ con γ una curva en Θ y $a \in \Theta$ un punto que no pertenece a la traza de γ. Esto desde luego se traduce en el hecho de que el número de soluciones (contadas con su multipliccidad) de la ecuación $f(z) = a$ permanece invariante bajo pequeñas perturbaciones $f(z) = a + \delta$. Más precisamente.

Teorema 4.5.0.5 *Sea z_0 una raíz de orden k de la equación $f(z) = a$ donde f es una función no constante y holomorfa en un entorno de z_0. Entonces para todo entorno V suficientemente pequeño de a vale que para b en V*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-b}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

y por lo tanto la ecuación $f(z) = b$ tiene k soluciones simples.

Demostración. Sea Θ la componente conexa de $\mathbb{R}^2/f(\partial\Omega)$ que contine a z_0 y $\gamma = C_{z_0,r}$ de forma tal que z_0 es la única solución de $f(z) = a$ contenida en el disco $D(z_0, r)$. Elegimos $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Theta$. Luego para todo $b \in V \doteq D(z_0, r)$ se tiene que

$$\mathtt{d}(f, \Omega, b) = \mathtt{d}(f, \Omega, a)$$

y por el teorema 2.6.1.8 de traslación,

$$\mathtt{d}(f - b, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(f - a, \Omega, \mathbf{0}).$$

Ahora usando el teorema 4.5.0.4

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-b}dz = \mathtt{d}(f - b, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(f - a, \Omega, \mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz.$$

Además, podemos considerar $r > 0$ suficientemente pequeño de manera que $f'(z) \neq 0$ excepto en el centro z_0 de manera que para $b \neq z_0$ la ecuación $f(z) - b = 0$ tedrá k raices simples. ■

Ahora damos un prueba directa usando teoría de grado del clásico teorema de Rouche.

Teorema 4.5.0.6 *(Teorema de Rouche).*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un C^2-dominio acotado y U un abierto tal que $\overline{\Omega} \subset U$. Si f, g son analíticas en U tales que

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

para todo $z \in \partial\Omega$ entonces f y g tienen la misma cantidad de ceros contados con sus multiplicidades en Ω.

Demostración. Es una consecuencia del teorema 4.5.0.4 y de la invariancia del grado bajo homotopía.

De acuerdo a la hipótesis se tiene que para todo $t \in [0,1]$ y $z \in \partial\Omega$

$$|(1-t)f(z) + tg(z)| = |f(z) - t(f(z) - g(z))| \geq |f(z)| - t\,|f(z) - g(z)| > 0.$$

Luego si $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ con $H(t,z) = (1-t)f(z) + tg(z)$ se tiene que para todo $t \in [0,1]$ $\mathbf{0} \notin H(\partial\Omega)$ y su grado esta definido para todo $t \in [0,1]$. Finalmente por el punto 2 del teorema 2.6.1.3,

$$\mathtt{d}(f,\Omega,\mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_1,\Omega,\mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_0,\Omega,\mathbf{0}) = \mathtt{d}(g,\Omega,\mathbf{0}). \blacksquare$$

También se puede dar una versión del teorema de Rouche para funciones holomorfas $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ con Ω un conjunto abierto y acotado [Lloyd, N. G. 1978, pag. 146-147.]

Teorema 4.5.0.7 *(Teorema de Rouche para funciones definidas en $\mathbb{C}^n$).*
Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que para $\boldsymbol{z} \in \partial\Omega$

$$|g(\boldsymbol{z})| < |f(\boldsymbol{z})|.$$

Entonces f tiene una cantidad finita de ceros y además f y $f+g$ tienen la misma cantidad de ceros contados con sus multiplicidades.

Demostración. Como $|g| < |f|$ sobre $\partial\Omega$ entonces ni f ni $f+g$ tienen ceros en el borde $\partial\Omega$ de manera que los grados $\mathtt{d}(f,\Omega,\mathbf{0})$ y $\mathtt{d}(f+g,\Omega,\mathbf{0})$ están bien definidos.

Ahora consideramos la homotopia $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definida $H(t,\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) + tg(\mathbf{z})$. Para ver que el grado de cada H_t está definido hay que verificar que para todo $t \in [0,1]$ se tiene $\mathbf{0} \notin H_t(\partial\Omega)$. Por la observación recién realizada basta verlo para $t \neq 0$.

Si $H(t, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ con $t \neq 0$ y $\mathbf{z} \in \partial\Omega$ entonces se obtiene la siguiente contradicción

$$|f(\mathbf{z})| = t \cdot |g(\mathbf{z})| < t \cdot |f(\mathbf{z})| \leq |f(\mathbf{z})| \,.$$

Luego para todo $t \in [0, 1]$ está definido el grado $\mathtt{d}(H_t, \Omega, \mathbf{0})$. Por invariancia del grado bajo homotopías, se tiene que $\mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(f + g, \Omega, \mathbf{0})$.

Ahora usaremos el siguiente resultado cuya demostración puede verse en Stein [Remmert and Stein 1953]: "todo conjunto compacto y analitico de $\mathbb{C}^n$ es finito". En nuestro caso se tiene que las funciones f y $f + g$ no se anulan en $\partial\Omega$ y por lo tanto los conjuntos $\Omega \cap f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ y $\Omega \cap (f + g)^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ son analíticos. Luego siendo además compactos se concluye que son finitos.

Supongamos que los distintos ceros de f en Ω son $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_r$. Entonces

$$\mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = \sum_{i=1}^{r} \mathtt{i}(f, \mathbf{z}_i, \mathbf{0})$$

es el número de ceros de f en Ω contados con su multiplicidad y teniendo en cuenta que $\mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(f + g, \Omega, \mathbf{0})$ se obtiene el resultado que se busca. ■

También exite una versión del teorema de Rouche para espacios de Banach de dimensión infinita [Rothe E. H 1984, pag. 78] que se prueba usando la extensión de la teoría del grado topológico de Brouwer dada por Leray y Schauder que veremos el próximo capítulo. La prueba que se da allí usa el teorema Poincaré-Böhl.

Finalizamos esta sección dando una demostración del teorema fundamental del álgebra utilizando teoría de grado. Existen muchas demostraciones de ese teorema; una de las demostraciones que se dan en el contexto del cálculo de variable compleja consiste esencialmente en lo siguiente: dado $g(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^{i-1}$, y $f(z) = a_n z^n$ con $g, f \in \mathbb{C}[X]$ se considera una bola $B = B(0, R)$ centrada en el origen y de radio R suficientemente grande, digamos

$$R > \text{máx}\{1; \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + ... + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right\} \}, \tag{4.5.0.5}$$

de forma tal que sobre el borde ∂B se tenga

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{R} \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + ... + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right\} < 1. \tag{4.5.0.6}$$

Ahora se observa que f tiene n ceros en B y por lo tanto también $h(z) = g(z) + f(z)$. De esta forma puede considerarse como como una consecuencia del teorema de Rouché. Recurriendo a la invariancia bajo homotopías se puede utilizar esta misma idea para probar el teorema fundamental del álbegra, más precisamente:

Proposición 4.5.0.8 *(Teorema fundamental del algebra)*
Si $h(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \in \mathbb{C}[X]$ *es un polinomio a coeficientes complejos de grado mayor o igual a 1 entonces* h *se anula en algún* $z_0 \in \mathbb{C}$.

Demostración. Podemos suponer que h es mónico. En primer lugar observamos que h es homotópico al polinomio z^n, mediante $H(t,z) = z^n + (1-t)[a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1}]$, $H(t,\infty) = \infty$. Luego se concluye que

$$\mathtt{d}(h, B, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_0, B, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_1, B, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(z^n, B, \mathbf{0}) = n \neq 0$$

y por el teorema 4.4.1.7, de existencia de solución, existe $z_0 \in B \subset \mathbb{C}$ tal que $h(z_0) = 0$. ■

4.6. Teoría de grado y existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias T-periódicas.

Los teoremas que garantizan la existencia de puntos fijos son muy empleados en el análisis para probar existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones. En esta sección veremos como se utiliza la teoría de grado para probar existencia de soluciones de ecuaciones dferenciales ordinarias T-periódicas.

El teorema central que nos proponemos demostrar en esta sección es el teorema de Krasnosel'skii el cual garantiza la existencia de una solución T-periódica bajo determinadas condiciones.

En primer lugar enunciaremos una serie de resutados básicos que utilizaremos posteriormente. El tratamiento detallado de estos y de otros resultados pueden consultarse en los clásicos textos de ecuaciones diferenciales ordinarias [Yosida K. 1960; Amann H. 1991, Pontyagrin L. S. 1962; Sotomayor J. 1979] y su lectura puede omitirse si se tienen presentes.

4.6.1. * Preliminares.

Comenzamos fijando alguna notación:

Definición 4.6.1.1 *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach de dimensión finita, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $M \subset \mathbb{E}$. Una función $f \in C(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E})$ se dice* **localmente Lipschitz continua respecto de $\boldsymbol{x} \in M$** *si para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ existen un entorno $I \times V$ del punto (t_0, x_0) y una constante $\lambda > 0$, llamada constante de Lipschitz, tal que todo $t \in I$ y $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in V$:*

$$\|f(t, \boldsymbol{x}) - f(t, \boldsymbol{x'})\| \leq \lambda \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}\| .$$

Usaremos las siguientes notaciones

$$\begin{gathered} C^{0,1-}(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E}) \doteq \{f \in C(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E}) : \ f \\ \textbf{\textit{es localmente Lipschitz continua respecto de }} \boldsymbol{x} \in M \end{gathered} \tag{4.6.1.1}$$

$$C^{1-}(M, \mathbb{E}) \doteq \{f \in C(M, \mathbb{E}) : \ f \ \textit{es Lipschitz continua} \ \} \tag{4.6.1.2}$$

y si M es abierto

$$C^{0,1}(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E}) \doteq \{f \in C(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E}) : \ D_2 f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}))\} \tag{4.6.1.3}$$

las funciones continuas con derivada parcial respecto de la segunda variable continua.

Observación 4.6.1.2 Con estas notaciones se tienen las siguientes inclusiones

1. De las definiciones se deduce que $C^{1-}(M, \mathbb{E}) \subset C(M, \mathbb{E})$ y $C^{0,1-}(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E}) \subset C(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E})$.

2. Además si M es abierto entonces se puede demostrar que $C^{0,1}(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E}) \subset C^{0,-1}(\mathbb{R} \times M, \mathbb{E})$ y en particular $C^1(M, \mathbb{E}) \subset C^{-1}(M, \mathbb{E})$.

3. Se deben tener presentes los teoremas de existencia y unicidad de soluciones; la construcción de la solución máxima y los teoremas de continuidad de la solución respecto de los datos iniciales y eventualmente respecto de otros parámetros.

Flujo asociado a un campo autónomo.

Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach finito dimensional, $M \subset \mathbb{E}$ un abierto y el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ con $f \in C^{-1}(M, \mathbb{E})$.

En ocasiones se puede interpretar a f como un campo definido sobre M

$$X : M \longrightarrow T(M) = M \times \mathbb{E}$$

definido $X(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$. En tal caso una solución del p.v.i $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ se puede interpretar como una curva tal que en el instante 0 pasa por el punto $\mathbf{x}_0$ y en cada punto de su trayectoria su vector tangente coincide con el vector $f(\mathbf{x})$.

Definición 4.6.1.3 *Consideramos la solución $u(t, 0, \boldsymbol{x}_0)$ definida en el intervalo maximal,*

$$0 \in I(0, \boldsymbol{x}_0) \doteq (t^-(0, \boldsymbol{x}_0), t^+(0, \boldsymbol{x}_0)) \subset \mathbb{R}$$

y M un espacio métrico. Definimos el flujo

$$\varphi : \Omega \longrightarrow M$$

asociado al campo f de la siguiente manera

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = u(t, 0, \boldsymbol{x})$$

donde

$$\Omega \doteq \Omega(f) \doteq \{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times M : t \in I(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x} \in M\}.$$

Para el dato inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ simplificaremos la notación escribiendo $I(\mathbf{x}_0)$ en vez de $I(0, \mathbf{x}_0)$ y $(t^-(\mathbf{x}_0), t^+(\mathbf{x}_0))$ en vez de $(t^-(0, \mathbf{x}_0), t^+(0, \mathbf{x}_0))$. Si no hay motivo de confusión también omitiremos la referencia al punto $\mathbf{x}_0$.

El flujo satisface las siguientes propiedades

1. El conjunto $\Omega = \bigcup_{\mathbf{x} \in M} I(\mathbf{x}) \times \{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R} \times M$ es abierto.

2. φ es continua.

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $f \in C^m(M, \mathbb{E})$, $m \geq 1$ entonces $\varphi \in C^m(\Omega, M)$.

4. Para todo $\mathbf{x} \in M$, $s \in I(\mathbf{x})$, $t \in I(\varphi(s, \mathbf{x}))$, entonces $s + t \in I(\mathbf{x})$ y además se tiene que

$$\varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x})) = \varphi(t + s, \mathbf{x}).$$

5. Consideremos el conjunto $\Omega_t \doteq \{\mathbf{x} \in M : (t, \mathbf{x}) \in \Omega\}$. Entonces el flujo tiene las propiedades de grupo; más precisamente, si definimos $\varphi^t : \Omega_t \longrightarrow M$ como $\varphi^t \doteq \varphi(\cdot, t)$ entonces:

   i $\varphi^0 = id_{\Omega_0} = id_M$.

   ii $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$.

iii $\varphi^t \circ \varphi^{-t} = id_{\Omega_{-t}}$.

En ocasiones notaremos el flujo $\varphi(t, \mathbf{x}) \doteq t \cdot \mathbf{x}$. También escribiremos $J \cdot A \doteq \{t \cdot \mathbf{x} :\ t \in J,\ \mathbf{x} \in A\}$

Para cada $\mathbf{x} \in M$ los valores $t^+(\mathbf{x})$ y $t^-(\mathbf{x})$ se llaman `tiempo positivo y negativo de escape`. Además las funciones $-t^-, t^+ : M \longrightarrow (0, \infty]$ son continuas inferiormente y se verifica que $I(t \cdot \mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) - t$

Definición 4.6.1.4 *Dado el* ***flujo a través de x****, e decir* $\varphi_{\boldsymbol{x}} = \varphi(\cdot; \boldsymbol{x}) : I(\boldsymbol{x}) \longrightarrow M$*, se define la* ***órbita de x*** *como*

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\boldsymbol{x}}(I(\boldsymbol{x})) = I(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}.$$

La ***semiórbita positiva***

$$\gamma^+(\boldsymbol{x}) \doteq [0, t^+) \cdot \boldsymbol{x}$$

y ***la semiórbita negativa***

$$\gamma^+(\boldsymbol{x}) \doteq (t^-, 0] \cdot \boldsymbol{x}.$$

Definición 4.6.1.5 *Se dice que el punto* $\boldsymbol{x}$ *es un* **punto crítico de** φ *sii para todo* $t \in I(\boldsymbol{x})$ *se tiene que*

$$t \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

En este caso $\gamma\{\mathbf{x}\} = \gamma^+\{\mathbf{x}\} = \gamma^-\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x}\}$. Es fácil ver que si el flujo esta inducido por el campo f entonces $\mathbf{x}$ es crítico sii $f(\mathbf{x}) = 0$. Esto se deduce fácilmente del hecho de que φ es el `generador infinitesimal` del campo, es decir

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\varphi^t(\mathbf{x}) - \varphi^0(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}}{t}.$$

Además si $\mathbf{x}$ es crítico entonces la solución es `global`, es decir $I(\mathbf{x}) = \mathbb{R}$. Diremos que el flujo a través de $\mathbf{x}$ es `completo` si $I(\mathbf{x}) = \mathbb{R}$.

Definición 4.6.1.6 *Se dice que el punto* $\boldsymbol{x}$ *es un* ***punto periódico*** *de* φ *sii existe* $T \neq 0$ *tal cada para todo* $t \in I(\boldsymbol{x})$ *se tiene*

$$(t + T) \cdot \boldsymbol{x} = t \cdot \boldsymbol{x}.$$

También es fácil ver que si existe $T \neq 0$ tal que $T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x}$ es periódico y además el flujo asociado es completo.

Si $\mathbf{x}$ es un punto `periódico no crítico` entonces existe un mínimo $T > 0$, llamado `periódo fundamental` del flujo tal que $T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. El conjunto de todos los periódos de la órbita asociada a $\mathbf{x}$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ infinito cíclico, más precisamente $T \cdot \mathbb{Z}^* = \{T \cdot m : m \in \mathbb{Z}/\{0\}.\}$.

Claramente $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma^+(\mathbf{x}) \cup \gamma^-(\mathbf{x})$. Las óbitas se clasifican en tres tipos:

i `Estacionarias`, para puntos críticos.

ii `Periódicas no estacionarias`, para puntos periódicos no críticos, e

iii `Inyectivas.`

Los flujos para los casos i y ii son completos, y las correspondientes trayectorias son un punto y una curva cerrada respectivamente. Para el tercero las curvas son abiertas, regulares y simples.

Ahora consideramos restricciones del dominio del flujo:

Definición 4.6.1.7 *Se definen los conjuntos*

$$\Omega_+ \doteq \{(t, \boldsymbol{x}) \in \Omega : t \in [0, t^+),\ \boldsymbol{x} \in M\},$$
$$I_-(\boldsymbol{x}) \doteq \{t \in \mathbb{R}^+ : -t \in I(\boldsymbol{x})\}$$

y

$$\Omega_- \doteq \{(t, \boldsymbol{x}) \in \Omega : t \in I_-(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in M\}.$$

y definimos las correspondientes restricciones del flujo:

Definición 4.6.1.8 *Se define el* ***`semiflujo postivo`*** $\varphi^+ : \Omega_+ \longrightarrow M$ *como la restricción de* φ *a* Ω_+. *Análogamente se define el* ***`semiflujo negativo`****,* $\varphi^- : \Omega_- \longrightarrow M$ *como la restricción del flujo sobre* Ω_-.

De acuerdo a la definición se tiene que $\varphi^-(t, \mathbf{x}) = \varphi(-t, \mathbf{x})$ para todo $(t, \mathbf{x}) \in \Omega_-$. El tiempo de escape positivo del semiflujo negativo es $|t^-| = -t^-$.

Definición 4.6.1.9 *Se dice que el conjunto* $M \subset \mathbb{E}$ *es* ***`positivamente invariante`*** *para el flujo* φ *si* $\varphi^+(M) \subset M$ *y* ***`negativamente invariante`*** *si* $\varphi^-(M) \subset M$.

Finalmente señalamos que si $K \subset M$ es compacto y el tiempo positivo de escape (respectivamente negativo de escape) es finito entonces existe un tiempo $t_K \in I(\mathbf{x})$ tal que para todo $t \geq t_K$ (respectivamente $t \leq t_K$) se tiene $t \cdot \mathbf{x} \notin K$. De esta forma si $\gamma(\{\mathbf{x}\})$ es relativamente compacto entonces $t = \infty$ (respectivamente $t = -\infty$.) También se puede probar que si M es compacto el flujo es completo.

Problemas T-periódicos.

Consideremos el p.v.i

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{4.6.1.4}$$

Definición 4.6.1.10 *Se dice que el p.v.i (4.6.1.4) es T-periódico si f es T-periódica en la variable t con $T > 0$, es decir, para todo $t \in \mathbb{R}$ si $\boldsymbol{x} \in M$ entonces*

$$f(t + T, \boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x}) \tag{4.6.1.5}$$

Definición 4.6.1.11 *Consodideremos la solución máxima $u(\cdot, 0, \boldsymbol{x}_0)$ del p.v.i (4.6.1.4) con dato inicial $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ y dominio $I(\boldsymbol{x}_0)$. Definimos el* ***`operador shift asociado a T`***

$$u_T : \mathcal{D}_T \subset M \longrightarrow M \tag{4.6.1.6}$$

definido

$$u_T(\boldsymbol{x}_0) = u(T, 0, \boldsymbol{x}_0)$$

donde

$$\mathcal{D}_T = \{\boldsymbol{x}_0 \in M : T \in I(\boldsymbol{x}_0)\}.$$

Observación 4.6.1.12 El conjunto

$$\mathcal{D}_f = \{(t, \tau, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ I(\mathbf{x}_0)\}$$

es abierto de manera que si p_3 denota la proyección a la tercer coordenada entonces

$$\mathcal{D}_T = p_3(\mathcal{D}_f \cap (T \times \{0\} \times M))$$

es un abierto de M y además $u_T \in C^{1-}(\mathcal{D}_T, M)$.

Ahora probaremos un resultado fundamental para nuestro posterior trabajo, debido esencialmente a Poincaré.

Teorema 4.6.1.13 *El p.v.i T-periódico (4.6.1.4) tiene una solución T-periódica sii el operador u_T tiene un punto fijo.*

Demostración. `Necesidad`. Sea $u(\cdot, \tau, \mathbf{x}_0)$ una solución T-periódica del p.v.i T-periódico (4.6.1.4); por periodicidad $I(\tau, \mathbf{x}_0) = \mathbb{R}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\tau \leq 0$ y definir $\mathbf{y}_0 \doteq u(0, \tau, \mathbf{x}_0)$ y observar que por unicidad

$$u(t, 0, \mathbf{y}_0) = u(t, \tau, \mathbf{x}_0). \tag{4.6.1.7}$$

Ahora usando que $u(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)$ es una solución T-periódica de (4.6.1.4)

$$u_T(\mathbf{y}_0) = u(T,0,\mathbf{y}_0) = u(T,\tau,\mathbf{x}_0) = u(0,\tau,\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 \qquad (4.6.1.8)$$

`Suficiencia.` Supongamos que u_T tiene un punto fijo $\mathbf{y}_0 \in M$ y definamos la función

$$x(t) \doteq u(t+T,0,\mathbf{y}_0)$$

para $t \in I(0,\mathbf{x}_0) - T$. Entonces x es solución del p.v.i

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t,\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \qquad (4.6.1.9)$$

Ahora, por unicidad se obtiene que

$$x(t) = u(t+T,0,\mathbf{y}_0) = u(t,0,\mathbf{y}_0)$$

para todo $t \in I(0,\mathbf{y}_0) - T$. Por esta via e inductivamente se concluye que $u(\cdot,0,\mathbf{y}_0)$ está definida sobre $\mathbb{R}$ y que es solución T-periódica de (4.6.1.4). ∎

Observación 4.6.1.14 La demostración del teorema 4.6.1.13 muestra que $\mathbf{y}_0$ es un punto fijo de u_T sii $u(\cdot,0,\mathbf{y}_0)$ es solución de (4.6.1.4).

* **Existencia de soluciones T-periódicas de ecuaciones diferenciales lineales.**

Consideremos el siguiente p.v.i

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + g(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \qquad (4.6.1.10)$$

donde la funciones $A \in C(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{E}))$, $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{E})$ son T-periódicas, con $T > 0$, y $t \in J \doteq I(t_0,\mathbf{x}_0)$. El problema tiene una única solución global para todo par $(t_0,\mathbf{x}_0)$.

Ahora sea $\mathbf{X}$ una matriz fundamental arbitraria que resuleve el problema $\dot{\mathbf{X}} = A(t)\mathbf{X}$ y definimos para todo $t,s \in J$ la función

$$U(t,s) \doteq \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s).$$

Se verifican fácilmente algunas propiedades de U. En primer lugar

$$\dot{U}(t,s) = \dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) = A(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) = A(t)U(t,s).$$

Asimismo se ve que

$$U(t,\tau)U(\tau,s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{X}(\tau)\mathbf{X}^{-1}(s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) = U(t,s).$$

Luego $U(s,t)U(t,s) = U(s,s) = \mathbf{X}(s)\mathbf{X}^{-1}(s) = I_{\mathbb{E}}$ y por lo tanto para todo $s,t \in J$,

$$U(t,s) = [U(s,t)]^{-1}.$$

Observamos que para cada t_0 la función $U(\cdot,t_0)$ es la única solución global del problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = I_{\mathbb{E}} \end{cases} \tag{4.6.1.11}$$

Si $\mathbf{X}_s$ denota en genral la única solución de ese problema pero con dato inicial $\mathbf{X}(s) = I_{\mathbb{E}}$ entonces para cada $t,s \in J$ se tiene $U(t,s) = \mathbf{X}_s(t)$ y en consecuencia $\mathbf{X}_s^{-1}(t) = [U(t,s)]^{-1} = U(s,t)$. En definitiva podemos escribir

$$U(t,s) = U(t,\tau)U(\tau,s) = \mathbf{X}_\tau(t)\mathbf{X}_\tau^{-1}(s).$$

Por el método de la `variación de los parámetros` la solución del problema 4.6.1.10 viene dada por

$$u(t,t_0,\mathbf{x}_0) = U(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)g(s)ds \tag{4.6.1.12}$$

para $t \in I(t_0,\mathbf{x}_0)$.

De acuerdo a la ecuación (4.6.1.12) y a la definición 4.6.1.11 del operador shift, con $t_0 = 0$, se escribe

$$u_T(\zeta) = U(T,0)\zeta + \int_0^T U(T,s)g(s)ds$$

para $\zeta \in \mathbb{E}$.

Se puede probar que el problema lineal T-periódico 4.6.1.10 tiene una solución T-periódica sii tiene una solución uniformemente acotada.

La existencia de soluciones T-periódicas de p.v.i T-periódicos no es tribial como lo muestra el siguiente ejemplo $\dot{x} = 1$. En efecto se trata de un p.vi T-periódico pero sin solución T-periódica.

Para avanzar en el estudio de la existencia de soluciones T-periódica necesitams precisar cierto lenguaje y contar con una serie de definiciones básicas.

Consideramos en primer lugar el flujo $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ definido $\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{tA} \cdot \mathbf{x}$ que para abreviar lo notaremos e^{tA}.

Definición 4.6.1.15 *Definimos el* ***espectro de la matriz*** *A,*

$$\sigma(A) = \{\lambda : Ker(\lambda - A) \neq 0\},$$

es decir, como el conjunto de sus autovalores.

Si $\Re(\lambda)$ denota la parte real del autovalor λ entonces se definen los siguientes conjuntos:

Definición 4.6.1.16 *El* ***espectro estable***

$$\sigma_s(A) \doteq \{\lambda \in \sigma(A) : \Re(\lambda) < 0\},$$

el ***espectro neutro***

$$\sigma_n(A) \doteq \{\lambda \in \sigma(A) : \Re(\lambda) = 0\}$$

y el ***espectro inestable***

$$\sigma_u(A) \doteq \{\lambda \in \sigma(A) : \Re(\lambda) > 0\}.$$

De esta forma se puede descomponer el espectro en un componente estable, otro neutral y otro inestable ,

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A).$$

Definición 4.6.1.17 *El flujo se llama* ***hiperbólico*** *si $\sigma_n(A) = \emptyset$.*

En tal caso el espacio total es suma directa de los espacios generados por las autofunciones de los autovalores estables e inestables respectivamente. Además a partir de esta descomposición se puede descomponer la transformación A, via la restricción al componente estable, $A_s \doteq A|_{\mathbb{E}_s}$ y la restricción al componente inestable $A_u \doteq A|_{\mathbb{E}_u}$. Asimismo se descompone el flujo e^{tA} en dos componentes uno estable e^{tA_s} y otro inestable e^{tA_u}. Estos resultados se registran en la siguiente:

Proposición 4.6.1.18 *Si el flujo es hiperbólico entonces*

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_s \oplus \mathbb{E}_u, \tag{4.6.1.13}$$

$$A = A_s \oplus A_u \tag{4.6.1.14}$$

y

$$e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}. \tag{4.6.1.15}$$

El flujo estable es una contracción y el inestable una dilatación. Además esta descomposición es única y $\dim(\mathbb{E}_s) = \sum_{\lambda\in\sigma_s(A)} m(\lambda)$ donde $m(\lambda)$ es la multiplicidad algebraica del autovalor λ. También recordamos que $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Se puede probar la siguiente proposición que caractedriza la solución T-periódica en el caso de que g sea continua y acotada, $g \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ y el flujo e^{tA} hiperbólico, más precisamente:

Proposición 4.6.1.19 *Consideremos el p.v.i (4.6.1.10) con* $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}))$, $g \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *son* T*-periódicas, con* $T > 0$, *y* $t \in J \doteq I(t_0, \boldsymbol{x}_0)$. *tiene una única solución* $u \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *sii* e^{tA} *es hiperbólica. En este caso la solución viene dada por*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{t-\tau} P_s g(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t} e^{t-\tau} P_u g(\tau) d\tau \tag{4.6.1.16}$$

donde $P_s : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}_s$ *y* $P_u : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}_u$ *son las proyecciones sobre los componentes estable y inestable de* $\mathbb{E}$ *respectivamente.*

Una consecuencia de las observaciones anteriores es que si e^{tA} es hiperbólico entonces la ecuación 4.6.1.10 tiene una única solución T-periódica.

Elementos de la teoría de Floquet.

El problema 4.6.1.10 puede transformarse en un problema T-periódico lineal con parte principal constante.

Para probar el terorema de transformación de Floquet necesitamos el siguiente resultado del álgebra lineal, cuya demostración puede darse usando la forma normal de Jordan.

Lema 4.6.1.20 *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *y* $C \in \mathcal{GL}(\mathbb{E})$ *entonces existe* $B \in \mathbb{E}$ *tal que* $C = e^B$.

La matriz B no es única y el resultado requiere que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teorema 4.6.1.21 *(Representación de Floquet).*
Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Existe una función T-periódica $Q \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{GL}(\mathbb{E}))$ y alguna $B \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tal que para $t \in \mathbb{R}$ el operador de evolución se representa

$$U(t,0) = Q(t)e^{tB}.$$

Demostración. Pongamos $U(t) \doteq U(t,0)$ y $V(t) \doteq U(t+T)U^{-1}(T)$. Como $U^{-1}(T) = U(T)$ entonces $V(t) = U(t+T)U(T)$. Luego para todo $t \in \mathbb{R}$ $\dot{V}(t) = \dot{U}(t+T)U^{-1}(T) = A(t+T)V(t) = A(t)V(t)$. Además $V(0) = I_{\mathbb{E}}$. Entonces V es solución del p.v.i

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(0) = I_{\mathbb{E}} \end{cases} \tag{4.6.1.17}$$

Luego $V(t) = U(t)$ y por lo tanto $U(t+T) = U(t)U(T)$.

Como $U(T) \in \mathcal{GL}(\mathbb{E})$ entonces por la observación anterior existe $B \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tal que $U(T) = e^{TB}$.

Ahora definimos $Q \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}))$ de la siguiente manera

$$Q(t) = U(t)e^{-tB}.$$

Luego para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Q(t+T) = U(t+T)e^{-(t+T)B} = U(t)U(T)e^{-tB}e^{-TB} = \\ = U(t)U(T)e^{-TB}e^{-tB} = U(t)e^{TB}e^{-TB}e^{-tB} = \\ = U(t)e^{-tB} = Q(t) \end{aligned} \tag{4.6.1.18}$$

y así Q es T-periódica. ■

Como corolario tenemos

Corolario 4.6.1.22 *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La transformación $\boldsymbol{x} = Q(t)\boldsymbol{y}$ convierte la ecuación T-periódica*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + g(t)$$

en la ecuación T-periódica con parte principal constante

$$\dot{\boldsymbol{y}} = B\boldsymbol{y} + \widehat{g}(t)$$

donde $\widehat{g} = Q^{-1}(t)g(t)$

Definición 4.6.1.23 *El operador $U(T) = U(T, 0) \in \mathcal{GL}(\mathbb{E})$, shift de la ecuación $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$, se llama en el contexto de la teoría de Floquet* ***operador de monodromía*** *(monodromy operator) y sus autovalores* ***valores característicos*** *(multipliers of Floquet). Si $\lambda \in \sigma(U(T))$ entonces cada $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = e^{T\beta}$ es llamado* ***exponente de Floquet.***

Es claro que los exponentes están determinados salvo un múltiplo entero de $\frac{2\pi i}{T}$.

Notemos también que el operador $U(T)$ es el único que satisface para todo $t \in \mathbb{R}$ la ecuación

$$U(t + T, 0) = U(t, 0) \cdot C$$

donde $C \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Que $U(T)$ satisface la ecuación se deduce de la propiedad $U(t + T, 0) = U(t, 0)U(T, 0)$ probada en el transcurso de la demostración del teorema 4.6.1.21. Por otro lado la unicidad sale de considerar que $C = U(t, 0)^{-1}U(t + T, 0) = U(T)$.

Sabemos que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces el operador $U(T)$ puede escribirse

$$U(T) = e^{TB}$$

para alguna transformación $B \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ de manera que los autovalores de B se pueden tomar como los exponentes de Floquet. También señalamos que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces el teorema de representación de Floquet tiene como consecuencia la caracteriozación de las soluciones de la ecuación T-periódica

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$$

como combinación lineal de funciones del tipo $p(t)e^{\beta t}$ donde β es un autovalor de B y $p(t)$ es un polinomio de grado menor o igual a la multiplicidad algebraica de β cuyos coeficientes son funciones T-periódicas. Si además B es diagonalizable los polonomios son de grado cero.

Posteriormente utilizaremos el siguiente:

Lema 4.6.1.24 *La ecuación homogénea T-periódica $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ tiene una solución T-periódica no trivial sii 1 es un valor característico de Floquet.*

Demostración. Por el teorema de Poincaré 4.6.1.13 y su posterior observación 4.6.1.14 sabemos que $\eta \in \mathbb{E}$ es un punto fijo del operador $U(T)$ si $U(\cdot, 0)\eta$ es una solución T-periódica de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Luego existe una solución T-periódica no trivial sii existe $\eta \in \mathbb{E}/\{0\}$ tal que $\eta - U(\cdot)\eta = 0$, es decir sii $Ker(1 - U(T)) \neq 0$. ■

Observación 4.6.1.25 Si bien en general es difícil el cálculo explícito de los valores caracterísitcos de Floquet, los resultados de la teoría de Floquet resultan ser útiles para el estudio de la estabilidad.

4.6.2. Existencia de soluciones T-periódicas de ecuaciones asintóticamente lineales.

Ahora estamos en condiciones de estudiar el caso en el que $g(t, \mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$ cuando $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow \infty$ uniformemente en la variable $t \in [0, T]$. En este caso el resultado fundamental es el siguiente: .

Teorema 4.6.2.1 *Sea $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}))$ y $g \in C^{0,1-}(\mathbb{R} \times \mathbb{E})$ T-periódica respecto de $t \in \mathbb{R}$ tal que $g(t, \boldsymbol{x}) = o(\|\boldsymbol{x}\|)$ cuando $\|\boldsymbol{x}\| \longrightarrow \infty$ uniformemente en la variable $t \in [0, T]$. Entonces la ecuación asintóticamente lineal T-periódica*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + g(t, \boldsymbol{x}) \tag{4.6.2.1}$$

tiene una solución T-periódica si 1 no es un valor característico de Floquet de la ecuación

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{4.6.2.2}$$

Demostración.

1. Dado que el término derecho de la ecuación (4.6.2.1) es linealmente acotado las soluciones son globales, es decir definidas en $\mathbb{R}$. Si u es una solución general de (4.6.2.2) entonces, via el método de variación de constantes (4.6.1.12) se tiene para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{E}$ y $t \in \mathbb{R}$ que

$$u(t, 0, \mathbf{x}_0) = U(t, \mathbf{0})\mathbf{x}_0 + \int_0^t U(t, \tau) g(\tau, u(\tau, 0, \mathbf{x}_0)) d\tau \tag{4.6.2.3}$$

donde U denota el operador de evolución de ecuación (4.6.2.2)

Sea $\alpha \doteq \max\{|U(t, \tau)| : 0 \leq t, \tau \geq T\}$ y $\epsilon > 0$ arbitrario. Teniendo en cuenta la condición sobre g existe $\beta_\epsilon > 0$ tal que $|g(t, \mathbf{x}_0)| \leq \beta_\epsilon + \epsilon\, |\mathbf{x}_0|$ para todo $t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{E}$. Acotando se obtiene

$$|u(t, \mathbf{0}, \mathbf{x}_0)| \leq \alpha\, |\mathbf{x}_0| + \alpha\beta_\epsilon T + \epsilon\alpha + \int_0^t |u(\tau, \mathbf{0}, \mathbf{x}_0)|\, d\tau$$

para $t \in [0, T]$.

Ahora usando la desigualdad de Gronwall $|u(t, \mathbf{0}, \mathbf{x}_0)| \leq \gamma\, |\mathbf{x}_0| + \delta(\epsilon)$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces resumiendo

$$|u(t, \mathbf{0}, \mathbf{x}_0) - U(t, 0, \mathbf{x}_0)| \leq \alpha(\beta_\epsilon) + \epsilon\delta(\epsilon) + \epsilon\gamma\, |\mathbf{x}_0|$$

y por lo tanto

$$\lim \sup_{|\mathbf{x}_0| \longrightarrow \infty} \frac{|u(t, \mathbf{0}, \mathbf{x}_0) - U(t, 0, \mathbf{x}_0)|}{|\mathbf{x}_0|} \leq \epsilon \alpha \gamma T$$

uniformemente en $t \in [0, T]$. Luego siendo $\epsilon \in (0, 1)$ arbitrario tenemos que

$$u(t, \mathbf{0}, \mathbf{x}_0) - U(t, 0, \mathbf{x}_0) = o(|\mathbf{x}_0|) \tag{4.6.2.4}$$

para $|\mathbf{x}_0| \longrightarrow \infty$ uniformemente en la variable $t \in [0, T]$

2. Ahora consideramos el operador $\Phi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ definido

$$\Phi(\mathbf{x}) \doteq [I - U(T)]^{-1}(u_T(\mathbf{x}) - U(T)\mathbf{x}).$$

Dado que 1 no es un autovalor de $U(T)$, esto es, 1 no es un valor característico de Floquet, el operador Φ está bien definido y es continuo. Por (4.6.2.4) se tiene que $\Phi(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|)$ cuando $|\mathbf{x}_0| \longrightarrow \infty$ y por lo tanto existe $\rho > 0$ tal que

$$|\Phi(\mathbf{x})| \leq \rho + \frac{|\mathbf{x}|}{2}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$. En consecuencia $\Phi(\overline{B}(\mathbf{0}, 2\rho)) \subset \overline{B}(\mathbf{0}, 2\rho)$ y por el teorema del punto fijo de Brouwer Φ tiene un punto fijo. Ahora $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ sii $u_T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y el resultado se sigue el teorema de Poincaré 4.6.1.13. ■

Corolario 4.6.2.2 *Supongamos que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tal que su espectro satisface*

$$\sigma(A) \cap \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z} = \emptyset$$

Si $g \in C^{0,1-}(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$ es T-periódica y satisface

$$g(t, \boldsymbol{x}) = o(|\boldsymbol{x}|)$$

cuando $|\boldsymbol{x}| \rightarrow \infty$ entonces la ecuación (4.6.2.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. La restricción $\sigma(A) \cap \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z} = \emptyset$ y el teorema del espectro implican que 1 no es un autovalor del operador $U(T) = e^{TA}$, es decir no es un valor característico de Floquet de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Luego el resultado se sigue del teorema 4.6.1.24. ■

4.6.3. El Método de "Guiding Function".

Para el tratamiento de este tema recordaremos brevemente algunos resultados clásicos referidos a las funciones de Liápunov y conjuntos invariantes.

Conjuntos invariantes para el flujo y funciones de Liápunov.

Definición 4.6.3.1 *Sea X un espacio métrico y $\varphi : \Omega \longrightarrow X$ $\varphi(t, \boldsymbol{x}) = t \cdot \boldsymbol{x}$ un semiflujo. Consideremos una función $V : M \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Para cada $\boldsymbol{x} \in M$ definimos la* **`derivada orbital de` V `en` $\boldsymbol{x}$**

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{V(t \cdot \boldsymbol{x}) - V(\boldsymbol{x})}{t}$$

con $\boldsymbol{x}$ un punto de acumulación del conjuto $M \cap [0, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon \in (0, t^+)$ y $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\infty$ en otro caso.

Definición 4.6.3.2 *Una función $V : M \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ se llama* ***`función de Liápunov.`***

Sea X un subconjunto abierto de un espacio de Banach $\mathbb{E}$ y φ el flujo inducido por $f \in C^{1,-}(X, \mathbb{R})$. Si $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable entonces la derivada orbital se relaciona con el gradiente de V de la siguiente manera:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) =< DV(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) >$$

para todo $\mathbf{x} \in X$, donde $<,>: E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $< \mathbf{y}, \mathbf{x} >$ denota el valor de la funcional $\mathbf{y}$ en el punto $\mathbf{x}$. Si $(\mathbb{E}; (\cdot|\cdot))$ denota un espacio de Hilbert y si el gradiente de V es definido $(\nabla V(\mathbf{x})|\mathbf{y}) =< DV(\mathbf{x}); \mathbf{y} >$ para todo $\mathbf{x} \in X$ entonces

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (\nabla V(\mathbf{x})|f(\mathbf{x})).$$

Algunas propiedades de las funciones de Liápunov.

Señalamos algunas propiedades necesarias para el trabajo posterior y sus demsotraciones se pueden consultar en los textos de referencia para esta sección.

La primer proposición caracteriza a las funciones de Liápunov.

Proposición 4.6.3.3 *Si V es una función de Liapunov para el flujo φ sobre M y para algún $T \in [0, t^+)$ se cumple que $t \cdot \boldsymbol{x} \subset M$ para todo $0 \leq t \leq T$ entonces la función $g(t) = V(t \cdot \boldsymbol{x})$ es decreciente sobre $[0, T]$ y además*

$$V(t \cdot \boldsymbol{x}) \leq V(\boldsymbol{x}) + \int_0^t \dot{V}(\tau \cdot \boldsymbol{x}) d\tau.$$

Y recíprocamente si M es positivamente invariante y si la función $V : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y decreciente a lo largo de las órbitas determinadas por cierto *flujo φ sobre M entonces V es una funcón de Liápunov para el flujo φ sobre M.*

A partir de esta caracterización se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 4.6.3.4 *Sea V una función de Liapunov para el flujo φ sobre M y $\alpha > 0$ tal que $V(\boldsymbol{y}) \leq \alpha V(\boldsymbol{y})$ para todo $\boldsymbol{y} \in M$. Entonces para todo $\boldsymbol{x} \in M$ y $T \in [0, t^+(\boldsymbol{x})]$ que satisface $t \cdot \boldsymbol{x} \in M$ se cumple*

$$V(t \cdot \boldsymbol{x}) \leq e^{-\alpha t} V(\boldsymbol{x})$$

para todo $t \in [0, T)$.

Una de las aplicaciones más útiles de las funciones de Liápunov es que permiten construir conjuntos positivamente invariantes para el flujo.

Proposición 4.6.3.5 *Sea $-\infty \leq \gamma < \beta < \infty$ y supongamos que $V \in C(X, \mathbb{R})$ es una función de Liápunov sobre el conjunto $V^{-1}(\gamma, \beta)$. Entonces el conjunto*

$$M_\alpha \doteq \{\boldsymbol{x} \in X : V(\boldsymbol{x}) \leq \alpha\} = V^{-1}[-\infty, \alpha]$$

es positivamente invariante para cada $\alpha \in [\gamma, \beta)$.

En particular se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.6.3.6 *Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ y $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que 0 es un valor regular de ϕ, es decir, $\nabla\phi(\boldsymbol{x}) \neq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \phi^{-1}(\{0\})$. Entonces*

$$M_0 = \phi^{-1}(-\infty, 0]$$

es positivamente invariante sii para todo $\boldsymbol{x} \in \partial M_0 = \phi^{-1}(\{0\})$ se tiene que

$$(\nabla\phi(\boldsymbol{x}) | f(\boldsymbol{x})) \leq 0.$$

Como corolario se tiene el siguiente:

Proposición 4.6.3.7 *Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ y $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que 0 es un valor regular de ϕ_j con $j = 1, 2, ..., k$. Sea*

$$M_0 = \bigcap_{j=1}^{k} \phi_j^{-1}(-\infty, 0].$$

Entonces si para todo $\boldsymbol{x} \in \phi_j^{-1}(\{0\})$*,* $j = 1, 2, ..., k$ *se tiene que*

$$(\nabla\phi_j(\boldsymbol{x})|f(\boldsymbol{x})) \leq 0.$$

entonces M_0 *es positivamente invariante. Además si* $(\nabla\phi_j(\boldsymbol{x})|f(\boldsymbol{x})) = 0$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \phi_j^{-1}(\{0\})$*,* $j = 1, 2, ..., k$ *entonces* M_0 *y todas las hipersuperficies* $\phi_j^{-1}(\{0\})$ *son positivamente invariantes.*

Hasta aquí hemos presentado algunos preliminares. Comenzaremos con un lema necesario para usar la invariancia bajo homotopía.

Lema 4.6.3.8 *Sea* $f \in C^{0,1-}(\mathbb{R} \times X, \mathbb{E})$ *y supongamos que* $K \subset Dom(u_T)$ *es compacto. Entonces la función* $H : [0, T] \times K \longrightarrow \mathbb{E}$ *definida*

$$H(t, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{u(t,0,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}}{t} & si \;\; t > 0 \\ f(0, \boldsymbol{x}) & si \;\; t = 0 \end{cases} \tag{4.6.3.1}$$

es continua.

Demostración. Para $t_0 > 0$ el lema se sigue del teorema de la continuidad de $u(\cdot, 0, \cdot)$. Luego basta probar el lema para $t_0 = 0$.

Consideremos $(0, \mathbf{x}_0) \in [0, T] \times K$ y $(t_n, \mathbf{x}_n) \longrightarrow (0, \mathbf{x}_0)$. Queremos ver $\lim_{n\to\infty} H(t_n, \mathbf{x}_n) = H(0, \mathbf{x}_0) = f(0, \mathbf{x}_0)$. Podemos suponer que $t_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y escribir

$$H(t_n, \mathbf{x}_n) - f(0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} [f(\tau, u(\tau,0, \mathbf{x}_n)) - f(0, \mathbf{x}_0)]d\tau.$$

Teniendo en cuenta la compacidad de $[0, T] \times K$, existe M compacto en $\mathbb{E}$ tal que $\mathbf{x}_0,\ u(\tau, 0, \mathbf{x}_n) \in M$ para todo $\tau \in [0, T]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Por la continuidad de f dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t \in [0, \delta]$ y $\mathbf{y} \in M \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)$ entonces $\|f(t, \mathbf{y}) - f(0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon$ y por la continuidad de $u(\cdot, 0, \cdot) : [0, T] \times K \longrightarrow \mathbb{E}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $\tau \in [0, t_n]$ entonces $\|u(\tau, 0, \mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_0\| = \|u(\tau, 0, \mathbf{x}_n) - u(0, 0, \mathbf{x}_0)\| < \delta$. Ahora acotando la integral se obtiene el resultado. ■

También necesitamos del concepto de punto T-irreversible.

Definición 4.6.3.9 *Un punto $\boldsymbol{x}$ es T*`-irreversible` *sii $u(t, 0, \boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ para todo $0 \leq t < T$.*

Intuitivamente un punto es T-irreversible si la trayectoria no vuelve a pasar por el punto antes del tiempo $T > 0$.

A continuación veremos una serie de lemas necesarios para probar el teorema central de esta sección debido a Krasnosel'skii.

Ahora podemos enunciar y probar el criterio general para la existencia de soluciones T-periódicas.

Proposición 4.6.3.10 *Sea $f \in C^{0,1-}(\mathbb{R} \times X, \mathbb{E})$ y supongamos que $\Omega \subset X$ es un conjunto abierto y acotado con $\overline{\Omega} \subset Dom(u_T)$ y que todo $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ es T-irreversible para la ecuación $\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x})$. Supongamos además que para todo $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ se tiene que $f(0, \boldsymbol{x}) \neq 0$ y $\mathtt{d}(f(0, \cdot), \Omega, \mathbf{0}) \neq 0$ Entonces la ecuación $\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x})$ tiene una solución T-periódica.*

Demostración. Por el teorema 4.6.1.13 la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ tiene una solución T-periódica sii $H_T(\mathbf{x}) = H(T, \mathbf{x}) = \frac{u_T(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{T}$ tiene un cero. Sabemos que $H : [0, T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{E}$ es una homotopía de acuerdo al lema 4.6.3.8. Ahora teniendo en cuenta $\mathtt{d}(f(0, \cdot), \Omega, \mathbf{0}) \neq 0$ y la invariancia bajo homotopías, teorema 2.6.1.3,

$$\mathtt{d}(H_T, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_0, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(f(0, \cdot), \Omega, \mathbf{0}) \neq 0$$

y por la propiedad de solución, teorema 4.4.1.7, H tiene un cero. ■

Para aplicar esta proposición es necesario contar con algún criterio que asegure que los puntos del borde son T-irreversibles:

Lema 4.6.3.11 ***(Criterio de T-irreversibilidad para el borde).***
Sea $V \in C^1(X, \mathbb{R})$ y supongamos que existe algún $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega \doteq V^{-1}(\infty, \alpha) \neq \emptyset$ y $\overline{\Omega} \doteq V^{-1}(\infty, \alpha]$ es compacto. Si $f \in C^{1-}(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R})$ satisface $< DV(\boldsymbol{x}); f(t, \boldsymbol{x})) >< 0$ para todo $t \in [0, T]$ y $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ entonces cada punto $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ es T-irreversible respecto de $\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x})$ con $\overline{\Omega} \subset Dom(u_T)$.

Demostración. Como $[0, T] \times \partial\Omega$ es compacto existen constantes $\beta < \alpha < \gamma$ tal que para todo $t \in [0, T]$ y $\mathbf{x} \in V^{-1}(\beta, \gamma) \cap U$

$$< DV(\mathbf{x}); f(t, \mathbf{x}) >< 0$$

siendo U un entorno abierto del compacto $\partial\Omega$.

Ahora consideramos el flujo, $\widehat{\varphi}$, inducido por el campo $\widehat{f} = (1, f)$ sobre $\widehat{X} = \mathbb{R} \times X$. Luego la función

$$\widehat{V} : \widehat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida $\widehat{V}(\widehat{\mathbf{x}}) = V(\mathbf{x})$ es de Liapunov sobre el conjunto

$$\widehat{M} \doteq \{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{X} : \beta < V(\mathbf{x}) < \gamma,\ \mathbf{x} \in U\}.$$

Luego el conjunto $\widehat{V}^{-1}(\infty, \alpha] = \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$ es positivamente invariante para $\widehat{\varphi}$. Entonces de acuerdo al corolario $\overline{\Omega} \subset Dom(u_T)$.

Para $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{M}$ se tiene

$$< D\widehat{V}(\widehat{\mathbf{x}}); \widehat{f}(\widehat{\mathbf{x}}) >_{\widehat{\mathbb{E}}} < 0$$

donde $\widehat{\mathbb{E}} = \mathbb{R} \times \mathbb{E}$.

Finalmente teniendo en cuenta la desigualdad

$$\widehat{V}(\varphi_t(\widehat{\mathbf{x}})) - \widehat{V}(\widehat{\mathbf{x}}) \leq \textstyle\int_0^t < D\widehat{V}(\varphi_\tau(\widehat{\mathbf{x}}); \widehat{f}(\varphi_t(\widehat{\mathbf{x}}))d\tau > \qquad (4.6.3.2)$$

se ve que cada punto del borde $\partial\Omega$ es T-irreversible. ■

El siguiente paso es mostrar que el grado del gradiente de un función de Liapunov que satisface la condión del lema anterior viene determinado por la dimensión del espacio.

Lema 4.6.3.12 *Sea $\Omega \subset \mathbb{E}$ abierto y acotado. Si $g, h \in C(\overline{\Omega})$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ se tiene que $(h(\boldsymbol{x})|g(\boldsymbol{x})) < 0$ entonces $\mathtt{d}(g, \Omega, \mathbf{0}) = (-1)^m \mathtt{d}(h, \Omega, \mathbf{0})$ donde $m = \dim \mathbb{E}$*

Demostración. Consideremos la homotopía

$$H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{E}$$

definida

$$H(t, \mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}) - (1 - t)g(\mathbf{x}).$$

Se verifica la siguiente desiguladad

$$(H(t, \mathbf{x})|h(\mathbf{x})) = t(g(\mathbf{x})|h(\mathbf{x})) - (1 - t)\,|h(\mathbf{x})|^2 < 0$$

para todo $(t, \mathbf{x}) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Luego por la invariancia bajo homotopías $\mathtt{d}(g, \Omega, 0) = \mathtt{d}(-h, \Omega, 0)$.

Si $\widehat{h} \in A^r_{\mathbf{p},1}$ con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ entonces por definición se verifica que

$$\mathtt{d}(-\widehat{h}, \Omega, 0) = (-1)^m \mathtt{d}(\widehat{h}, \Omega, 0).$$

Ahora si $h \in A_{\mathbf{p},0}$ con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, consideramos una aproximación $\widehat{h} \in A^r_{\mathbf{p},1}$ con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ que verifique la igualdad y el resultado se sigue de la definición del grado. ■

Otro lema, que necesitaremos es el siguiente:

Lema 4.6.3.13 *Sea $U \subset \mathbb{E}$ abierto, $g \in C(U, \mathbb{R})$ tal que para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $W \doteq g^{-1}(\infty, \alpha)$ es acotado y $\overline{W} \subset U$. Supongamos además que existen números $\beta < \alpha$, $r > 0$ y un punto $\boldsymbol{x}_0$ tal que $g^{-1}(\infty, \beta] \subset \overline{B}(\boldsymbol{x}_0, r) \subset W$ y $\nabla g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in g^{-1}[\beta, \alpha]$. Entonces $\mathtt{d}(\nabla g, W, \mathbf{0}) = 1$.*

Demostración. Consideremos

$$\rho = \min_{\mathbf{x} \in g^{-1}[\alpha, \beta]} \{|\nabla g(\mathbf{x})|\} > 0$$

y $h \in C^{1-}(U, \mathbb{E})$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$

$$|\nabla g(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| < \frac{\rho}{2}.$$

Ahora para todo $\mathbf{x} \in g^{-1}[\alpha, \beta]$ y $\lambda \in [0, 1]$

$$|(1-\lambda)\nabla g(\mathbf{x}) - \lambda h(\mathbf{x})| \geq |\nabla g(\mathbf{x})| - \lambda\, |\nabla g(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| \geq \frac{\rho}{2}.$$

Luego por la invariancia bajo homotopías

$$\mathtt{d}(\nabla g, W, 0) = \mathtt{d}(h, W, 0).$$

Sea φ el flujo inducido por $-h$. Veamos que g es una función de Liápunov para el flujo φ sobre $\mathbf{x} \in g^{-1}[\alpha, \beta]$. Esto se deduce de la siguiente estimación y de las observaciones realizadas en la subsección referida a funciones de Liápunov:

$$\begin{aligned} (\nabla g(\mathbf{x})|h(\mathbf{x})) = |\nabla g(\mathbf{x})|^2 - (\nabla g(\mathbf{x})|\nabla g(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})) \geq \\ |\nabla g(\mathbf{x})|^2 - |\nabla g(\mathbf{x})|\, |\tfrac{\rho}{2} \geq \\ \tfrac{|\nabla g(\mathbf{x})|^2}{2} \geq \tfrac{\rho^2}{2} \end{aligned} \tag{4.6.3.3}$$

para todo $\mathbf{x} \in g^{-1}[\alpha, \beta]$.

Por la proposición 4.6.3.5 se tiene que para todo γ con $\alpha < \gamma < \beta$ el conjunto

$$V \doteq g^{-1}(-\infty, \gamma]$$

es invariante positivo para el flujo φ. Como $V \subset \overline{W}$ entonces V es compacto y de acuerdo a las observaciones hechas anteriormente $t^+(\mathbf{x}) = \infty$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

Ahora si $[0, t] \cdot \mathbf{x} \subset g^{-1}[\alpha, \beta]$ entonces

$$\beta - \alpha \leq g(t \cdot \mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = \int_0^t \dot{g}(\tau \cdot \mathbf{x}) d\tau = \int_0^t (\nabla g(\tau \cdot \mathbf{x})| - h(\tau \cdot \mathbf{x})) d\tau.$$

Luego si $T = \frac{2(\beta - \alpha)}{\rho^2}$ entonces para todo $\mathbf{x} \in V$

$$T \cdot \mathbf{x} \in g^{-1}(-\infty, \alpha].$$

Además si $\mathbf{x} \in \partial V$ y $T < 0$ entonces se cumple que $t \cdot \mathbf{x} \in int(V)$. Luego por el lema de continuidad la función

$$H : [0, T] \times V \longrightarrow \mathbb{E}$$

definida

$$H(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} (\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{x}) t^{-1} & \text{si } t > 0 \\ h(\mathbf{x}) & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{4.6.3.4}$$

es una homotopía que satisface para todo $(t, \mathbf{x}) \in [0, T]\partial V$ se tiene $H(t, \mathbf{x}) \neq 0$. Luego por la propiedad de escisión se tiene

$$\mathtt{d}(h, W, 0) = \mathtt{d}(h, int(V), 0) = \mathtt{d}(H(T, \cdot), int(V), 0)$$

Finalmente consideramos la homotopía

$$K : [0, 1] \times V \longrightarrow \mathbb{E}$$

definida

$$K(s, \mathbf{x}) = (1 - s) H(T, \mathbf{x}) + s \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{T}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B(\mathbf{x}_0, r) \subset int(V)$. Dado que

$$K(s, \mathbf{x}) = (\mathbf{x} - [s\mathbf{x}_0 + (1 - s) T \cdot \mathbf{x}]) T^{-1}$$

y que $T \cdot \mathbf{x} \subset g^{-1}(-\infty, \alpha]$ se sigue que para todo $(s, \mathbf{x}) \in [0, 1] \times \partial V$ $K(s, \mathbf{x}) \neq 0$. Entonces

$$\mathtt{d}(H(T, \cdot), int(V), 0) = \mathtt{d}(T^{-1}(id - \mathbf{x}_0), int(V), 0) = 1. \blacksquare$$

Corolario 4.6.3.14 *Sea $g \in C^1(\mathbb{E},\mathbb{R})$ coerciva, esto es, $g(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \infty$ si $\|\boldsymbol{x}\| \longrightarrow \infty$. Si para algún $r_0 > 0$ se tiene $\nabla g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ para $\|\boldsymbol{x}\| \geq r_0$ entonces $\mathtt{d}(\nabla g, r \cdot B, \mathbf{0}) = 1$ para todo $r \geq r_0$.*

Demostración. Consideramos $B = B(0,1)$, $\alpha \doteq \max g(r_0\overline{B})$ y $r \doteq \{\|\mathbf{x}\| : g(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$. Ahora hay que obnservar que estamos en las condiciones del lema anterior para $\beta > \max g(r\overline{B})$ y $\mathbf{x}_0 = 0$ y el resultado se sigue aplicando la propiedad de escisión del grado. ■

Ahora podemos probar el resultado fundamental de esta subsección referido a la existencia de soluciones T-periódicas.

Teorema 4.6.3.15 *(Teorema de Krasnosel'skii).*
Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Hilbert finito dimensional, tal que $f \in C^{1-}(\mathbb{R}\times\mathbb{E},\mathbb{E})$ es T-periódica en la variable $t \in \mathbb{R}$. Si $V \in C^1(\mathbb{E},\mathbb{R})$ tal que para algún $r_0 > 0$

$$(\nabla V(\boldsymbol{x}) \mid f(t,\boldsymbol{x})) < 0,$$

para todo $\|\boldsymbol{x}\| \geq r_0$ y $0 \leq t \leq T$ entonces la ecuación T-periódica

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t,\boldsymbol{x})$$

tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Comenzamos con el caso $V(\mathbf{x}) \longrightarrow \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow \infty$.

Nuevamente consideramos $B = B(0,1)$, $\alpha \doteq \max g(r_0\overline{B})$ y $\Omega \doteq V^{-1}(-\infty,\alpha]$. Luego Ω es relativamente compacto y de acuerdo al criterio 4.6.3.11, cada punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ es T-irreversible y además $Dom(u_T) \subset \overline{\Omega}$.

Ahora de la hipótesis del teorema, $(\nabla V(\mathbf{x}) \mid f(t,\mathbf{x})) < 0$, por la proposición 4.6.3.10 y el corolario 4.6.3.14 se sigue que $\mathtt{d}(f(0,\cdot),\Omega,0) \neq 0$. Luego aplicando la propiedad de solución se sigue el resutlado.

Si $V(\mathbf{x}) \longrightarrow -\infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow \infty$. entonces por la periodicidad de $f(\cdot,\mathbf{x})$ se puede aplicar el caso anterior a la función $-V$ y la eccuación $\dot{\mathbf{z}} = -f(t,\mathbf{z})$. Luego la ecuación tiene una solución T-periódica $\mathbf{v}$. Si ponemos $\mathbf{u}(t) \doteq \mathbf{v}(-t)$ obtenemos para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\dot{\mathbf{v}}(-t) = -(-f(t,\mathbf{v}(-t))) = f(t,\mathbf{v}(-t)) = f(t,\mathbf{u}(t)).$$

Luego $\mathbf{u}$ es una solución T-periódica de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = f(t,\mathbf{x})$. ■

Observación 4.6.3.16 1. La prueba da una estimación a priori para las soluciones T-periódicas.

2. La función V que realiza la condición del producto interno se llama `guiding function` de la ecuación

* **Orbitas periodicas y puntos críticos de los flujos planos.**

Teorema 4.6.3.17 *Si Γ es una curva de Jordan de clase C^1 y $\phi \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^2/\{0\})$ un campo de vectores tangentes orientados positivamente a lo largo de Γ, es decir en cada punto $\boldsymbol{x}$ el vector $\phi(\boldsymbol{x})$ tiene la misma dirección que el vector tangente, entonces $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0}) = w(\phi, \Gamma) = 1$*

Demostración. Es consecuencia de la definción que hemos dado del número de vueltas y la coincidencia con la noción de grado. ■

Teorema 4.6.3.18 *Sea $f \in C^1(X, \mathbb{R}^2)$ un campo plano y γ una órbita periódica no-crítica de la ecuación diferencial $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ tal que su interior $\Omega \subset X$. Entonces $\mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = 1$.*

Demostración. Consideramos $\gamma = \partial\Omega$ con la orientación de borde inducida por Ω y el flujo asociado al campo $-f$. Luego $\mathtt{d}(-f, \Omega, \mathbf{0}) = (-1)^2\mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = 1$ y de ahí el resultado. ■

Corolario 4.6.3.19 *Con las mismas hipótesis que en el teorema anterior existe al menos un punto crítico.*

Demostración. Es consecuencia directa del hecho de que $\mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = 1 \neq 0$. ■

Esto puede ser usado para probar la `no existencia de órbitas periódicas, no-críticas.`

Proposición 4.6.3.20 *Sea X simplemente conexo y supongamos que f tiene exactamente un cero, en $\boldsymbol{x}_0$. Entonces si $\boldsymbol{x}_0$ es un* ***`punto de ensilladura`*** *entonces no existen órbitas periódicas no-críticas de la ecuación $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$.*

Demostración. Si γ fuera una órbita periódica no-crítica de la ecuación y Ω su interior entonces por ser X simplemente conexo tendríamos que $\Omega \subset X$. Luego por el teorema 4.6.3.18 se cumpliría $1 = \mathtt{d}(f, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{i}(f, \mathbf{x}_0)$. Pero por otro lado como se trata de un punto de ensilladura $\mathtt{i}(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = -1$ y se llega a una contradición. ■

Por último podemos dar un criterio de existencia de punto crítico

Proposición 4.6.3.21 *Sea $K \subset X$ compacto, simplemente conexo, no vacio y positivamente (o negativamente) invariante. Entonces existe al menos un punto crítico en K.*

Demostración. Supongamos que K es positivamente invariante y consideremnos un punto $\mathbf{x} \in K$. Si la órbita asociada al punto, $\omega(\mathbf{x})$, no contiene puntos críticos entonces es periódica. Como K es simplemente conexo el interior de $\omega(\mathbf{x})$, que denotamos como Ω, está completamente incluido en X de manera que en Ω hay un punto crítico de acuerdo al corolario 4.6.3.19. Si K fuera negativamente invariante se aplica el anterior argumento al campo $-f$. ■

Capítulo 5

Extensión del grado de Brouwer a espacios vectoriales normados de dimensión infinita: el grado de Leray-Schauder.

La teoría de grado puede formularse para espacios vectoriales localmente convexos y si bien se pierde algo de generalidad al hacerlo para espacios normados de dimensión infinita, se simplifica la exposición. En este capítulo encaramos esa tarea.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un R-espacio vectorial normado de cualquier dimensión (e-v-n). Consideremos $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado de X, y $\partial\Omega$ su frontera. Nos preguntamos cuál es la clase de funciones $\phi : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow X$ para las cuales podríamos definir una función, que seguiremos llamándola grado, con las siguientes propiedades:

1. `(Normalización.)` Si $\mathbf{p} \in \Omega$ entonces
$$\mathrm{d}(I, \Omega, \mathbf{p}) = 1 \tag{5.0.3.1}$$

2. `(Propiedad de existencia de` p`-puntos.)` Si $\phi : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow X$ entonces
$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) \neq 0 \ \Rightarrow \exists \mathbf{x} \in \Omega : \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \tag{5.0.3.2}$$

3. `(Invariancia bajo homotopías.)` si H es una homotopía tal que para todo $t \in [0,1]$ $\mathbf{p} \notin H_t(\partial\Omega)$ entonces para todo $t \in [0,1]$
$$\mathrm{d}(H_t, \Omega, \mathbf{p}) = \mathrm{d}(H_0, \Omega, \mathbf{p}) \tag{5.0.3.3}$$

Veremos que no podemos definir tal función con las propiedades deseadas sobre la clase de las funciones continuas. Para esto bastará dar un ejemplo en el cual la construcción falla. Este ejemplo fue dado originalmente por Leray [Leray L. 1934] y considerado por varios autores que han trabajo sobre el tema [Lloyd N. G., 1978 pp 53-54; Cronin J. 1964, pp 128-130].

Ejemplo 5.0.3.22 *(Leray).* Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ con la norma infinito. Sea $x_0 \in X$ la función constante, $x_0(s) = \frac{1}{2}$ para $s \in [0,1]$, y consideremos $\Omega = \{x \in X : \|x - x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\}$ abierto y acotado en X. Sea $z \in X$ tal que $z(0) = 0,\ z(1) = 1$ y $0 \leq z(s) \leq 1$ para todo $s \in [0,1]$ y $\phi : \Omega \longrightarrow X$ definida $\phi(x) = z \circ x$.

Consideremos ahora, la homotopía $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ definida $H(t,x) = t\phi(x) + (1-t)x$ donde $(t,x) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$.

Veamos que $H(t,\partial\Omega) \subset \partial\Omega$. Si $y \in \partial\Omega$ entonces $\|y - x_0\|_\infty = \frac{1}{2}$. Luego existe algún $s_0 \in [0,1]$ tal que $y(s_0) = 0$ o bien $y(s_0) = 1$ y por lo tanto $0 \leq y(s) \leq 1$ para todo $s \in [0,1]$.

Si $y(s_0) = 0$ entonces para todo $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} H(t,y)(s_0) &= t\phi(y)(s_0) + (1-t)y(s_0) = \\ &= t(z \circ y)(s_0) = t\ z(y(s_0)) = t\ z(0)) = 0, \end{aligned} \tag{5.0.3.4}$$

y análogamente si $y(s_0) = 1$ entonces para todo $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} H(t,y)(s_0) &= t\phi(y)(s_0) + (1-t)y(s_0) = \\ &= t(z \circ y)(s_0) + 1 - t = t\ z(y(s_0)) + 1 - t = \\ &= t\ z(1) + 1 - t = 1. \end{aligned} \tag{5.0.3.5}$$

Por otro lado

$$H(t,y)(s) = t\phi(y)(s) + (1-t)y(s) = t(z \circ y)(s) + (1-t)y(s)$$

y como $0 \leq z(y(s)) \leq 1$, $0 \leq y(s) \leq 1$ para todo $s \in [0,1]$ se tiene que $0 \leq H(t,y)(s) \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$. En definitiva $\|H(t,y) - x_0\|_\infty = \frac{1}{2}$ y así $H(t,y) \in \partial\Omega$ para todo $t \in [0,1]$.

Ahora supongamos que las tres propiedades se cumplen y consideremos una función $w \in \Omega$. Como $H(t,\partial\Omega) \subset \partial\Omega$ para todo $t \in [0,1]$ entonces el grado de H_t en w relativo a Ω esta definido para todo $t \in [0,1]$. Por invariancia bajo homotopía se tiene que

$$\mathrm{d}(\phi,\Omega,w) = \mathrm{d}(I,\Omega,w).$$

Por otra parte, por la propiedad de la identidad

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, w) = 1$$

y por la propiedad de solución, la ecuación

$$\phi(x) = w$$

tiene al menos una solución para algún $x \in \Omega$.

Veamos que esto es falso. Para ello elegimos $w(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}$ y

$$z(s) = \begin{cases} s & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 - s & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{5}{8} \\ \frac{5}{3}(s-1) + 1 & \frac{5}{8} \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{5.0.3.6}$$

Ahora se observa que si $x \in \Omega$ es una solución de la ecuación $\phi(x) = z \circ x = w$ debe ocurrir que $\phi(x)(0) = z(x(0)) = w(0) = \frac{1}{4}$ de manera que por la definición de z se tiene que $x(0) = \frac{1}{4}$; análogamente $\phi(x)(1) = z(x(1)) = w(1) = \frac{3}{4}$ de forma tal que $x(1) = \frac{17}{20}$. Además observemos que $z(\frac{3}{8}) = z(\frac{5}{8}) = \frac{3}{8}$. Luego siendo x continua, por el teorema de los valores intermedios, se tiene que $\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \in [\frac{1}{4}; \frac{17}{20}] \subset \Im(x)$ y por tanto existen dos puntos, $s_0, s_1 \in [0,1]$ con $s_0 \neq s_1$ tal que $x(s_0) = \frac{3}{8}$ y $x(s_1) = \frac{5}{8}$. Pero entonces se obtiene una contradicción pues en tal caso

$$w(s_0) = \phi(x)(s_0) = z(x(s_0)) = z(\frac{3}{8}) = z(\frac{5}{8}) = z(x(s_1)) = \phi(x)(s_1) = w(s_1)$$

con $s_0 \neq s_1$. Luego la ecuación $\phi(x) = w$ no tiene solución.

Esto demuestra que no podemos definir el grado en espacios normados de dimensión infinita para todas las funciones continuas. Necesitamos restringir esa clase de funciones.

5.1. Definición del grado de Leray-Schauder.

El primer paso consiste en delimitar el tipo de funciones para las cuales podremos definir el grado.

Definición 5.1.0.23 *Sean E y F, e-v-n y $M \subset E$. La transformación $T : M \longrightarrow F$ se dice* `compacta` *sii*

1. *T es continua.*

2. *Para todo conjunto acotado $A \subset M$ el conjunto $T(A)$ es* ***relativamente compacto****, es decir, $\overline{T(A)}$ es compacto.*

Una de las propiedades claves para la definición del grado en un e-v-n de dimensión infinita es que las transformaciones compactas con dominios acotados pueden aproximar por transformaciones cuyo rango es de dimensión finita. Estas funciones se llaman habitualmente de `rango finito`; más precisamente:

Definición 5.1.0.24 *Sean E y F, e-v-n y $M \subset E$. La transformación $T : M \longrightarrow F$ se dice* ***de rango finito*** *sii $T(M) = \Im_T \supset V$, con V un subespacio de F finito dimensional.*

Teorema 5.1.0.25 *(Teorema de aproximación).*

Sean E y F, e-v-n y $M \subset E$ acotado. Si $T : M \longrightarrow F$ es compacto entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una transformación continua $T_\varepsilon : M \longrightarrow F$ de rango finito tal que para todo $u \in M$

$$\|T(\boldsymbol{u}) - T_\varepsilon(\boldsymbol{u})\| < \varepsilon. \tag{5.1.0.7}$$

Demostración. Siendo $T(M)$ un conjunto relativamente compacto podemos recubrirlo mediante un conjunto finito de bolas $B(\mathbf{v}_i, \varepsilon),\ i = 1, 2, ..., n.$ en F de radio ε y centros $\mathbf{v}_i \in \overline{T(M)}$. Ahora para cada $i = 1, 2, ..., n$ y $\mathbf{u} \in M$ definimos las funciones continuas,

$$m_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) = \text{máx}\{0, \varepsilon - \|T(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_i\|\} \tag{5.1.0.8}$$

Observemos que cada función $m_{i,\varepsilon}$ es continua y no negativa $m_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) \geq 0$ y que $m_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) \neq 0$ sii $\mathbf{u} \in T^{-1}(B(\mathbf{v}_i, \varepsilon))$. Además dado $\mathbf{u} \in M$ existe un índice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tal que $m_i(\varepsilon, \mathbf{u}) \neq 0$, de manera que las siguientes funciones, estan bien definida y son continuas

$$\theta_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{m_{i,\varepsilon}(\mathbf{u})}{\sum_1^n m_i(\varepsilon, \mathbf{u})} \tag{5.1.0.9}$$

para $i = 1, 2, ..., n$.

Luego se tiene que

$$\mathtt{sop}\theta_{i,\varepsilon} = \overline{T^{-1}(B(\mathbf{v}_i, \varepsilon))}$$

y

$$\sum_{1}^{n} \theta_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) = 1$$

para todo $\mathbf{u} \in M$.

Ahora podemos definir la transformación buscada

$$T_\varepsilon(\mathbf{u}) = \sum_{1}^{n} \theta_{i,\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{v}_i.$$

En primer lugar es continua por ser combinación lineal de continuas y es de rango finito dado que la imagen de T está contenida en el sistema generado por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, o sea $\Im_{T_\varepsilon} \subset$ s.g $\{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$. Finalmente teniendo en cuenta que $\|T(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_i\| < \varepsilon$ y que $\sum_1^n \theta_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) = 1$ obtenemos que para todo $\mathbf{u} \in M$

$$\begin{aligned} \|T(\mathbf{u}) - T_\varepsilon(\mathbf{u})\| &= \left\| \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} \theta_{i,\varepsilon}(\mathbf{u})(T(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_i) \right\| \\ &\leq \textstyle\sum_1^n \theta_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) \|T(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_i\| \\ &< \textstyle\sum_1^n \theta_{i,\varepsilon}(\mathbf{u})\varepsilon = \varepsilon. \blacksquare \end{aligned} \tag{5.1.0.10}$$

Nosotros trabajaremos con funciones que resultan ser perturbaciones compactas de la identidad, es decir funciones ϕ de la forma $I - T$ con I la identidad sobre $\overline{\Omega}$ y $T : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow X$ compacta, con X e-v-n y Ω un conjunto abierto y acotado.

Por el teorema 5.1.0.25 podemos aproximar T a través de una transformación T_ε de rango finito, con ε tan pequeño como se necesite. Si $\mathbf{p} \in X$ definiremos $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p})$ mediante el grado de $I - T_\varepsilon$ relativo a un subespacio vectorial de dimensión finita convenientemente elegido; aquí se debe tener presente la extensión de la noción de grado a espacios de Banach de dimensión finita establecida en el segundo capítulo.

En lo que sigue, si $m \leq n$ identificaremos

$$\mathbb{R}^m \sim \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n = 0\}.$$

y escribiremos $\Omega^m \doteq \mathbb{R}^m \cap \Omega$, $\overline{\Omega}^m \doteq \mathbb{R}^m \cap \overline{\Omega}$.

El siguiente lema técnico será fundamental para esta tarea

Lema 5.1.0.26 *Sean $m \leq n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Supongamos que $\psi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \phi(\boldsymbol{x})$$

y $\chi \doteq \psi|_{\overline{\Omega}^m}$. Entonces si $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m / \psi(\partial\Omega)$ entonces

$$\mathtt{d}(\psi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \mathtt{d}(\chi, \Omega^m, \boldsymbol{p}) \tag{5.1.0.11}$$

Demostración. El resultado es cierto si $\Omega^m = \emptyset$ puesto que en tal caso $\mathbf{p} \notin \psi(\Omega)$ y por lo tanto $0 = \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\chi, \Omega^m, \mathbf{p})$.

Supongamos entonces que $\overline{\Omega}^m \neq \emptyset$. Observamos en primer lugar que $\chi(\overline{\Omega}^m) \subset \mathbb{R}^m$ y como $\partial(\Omega^m) \subset \mathbb{R}^m / \partial\Omega$ entonces $\mathbf{p} \notin \chi(\partial\Omega^m)$ y $\mathtt{d}(\chi, \Omega^m, \mathbf{p})$ está definido. Si $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{p} - \phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Luego $\psi^{-1}(\{\mathbf{p}\}) \subset \Omega^m$ y así $\psi^{-1}(\{\mathbf{p}\}) = \chi^{-1}(\{\mathbf{p}\})$.

Consideremos el caso $\phi \in A^r_{\mathbf{p},1}$. Observemos si

$$M = \begin{pmatrix} D\chi(\mathbf{x}) & \mathbf{0}_m \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

entonces para todo $\mathbf{x} \in \chi^{-1}(\{\mathbf{p}\}) = \psi^{-1}(\{\mathbf{p}\})$ se tiene

$$\mathtt{sig} J_\psi(\mathbf{x}) = \mathtt{sig} \det M = \mathtt{sig} J_\chi(\mathbf{x})$$

y por lo tanto, por definición

$$\begin{gathered} \mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \textstyle\sum_{\mathbf{x} \in \psi^{-1}} \mathtt{sig} J_\psi(\mathbf{x}) = \\ \textstyle\sum_{\mathbf{x} \in \psi^{-1}(\{\mathbf{p}\})} \mathtt{sig} \det M = \\ \textstyle\sum_{\mathbf{x} \in \chi^{-1}(\{\mathbf{p}\})} \mathtt{sig} J_\chi(\mathbf{x}). \end{gathered} \tag{5.1.0.12}$$

Luego en este caso vale la tesis $\mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\chi, \Omega^m, \mathbf{p})$.

Ahora vemos el caso general $\phi \in A_{\mathbf{p},0}$. Comenzamos eligiendo funciones $\widehat{\phi}_j \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, 3, ..., n$ con $\widehat{\phi}_j = 0$ para todo $j = m, m+1, ..., n$ tal que si $\widehat{\phi} = (\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2, ..., \widehat{\phi}_n)$ entonces para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ se tiene

$$\left\| \widehat{\phi}(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) \right\| < \rho(\mathbf{p}, \psi(\partial\Omega)).$$

Ponemos $\widehat{\psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \widehat{\phi}(\mathbf{x})$ y consideramos $\widehat{\chi} \doteq \widehat{\psi}|_{\overline{\Omega}^m}$, la restricción de $\widehat{\psi}$ al conjunto $\overline{\Omega}^m$.

Por otro lado como $\widehat{\psi}^{-1}(\{\mathbf{p}\}) \subset \Omega^m$ y el conjunto de puntos críticos de $\widehat{\chi}$, $C_{\widehat{\chi}}$, tiene m-medida cero podemos suponer que $\mathbf{p} \notin C_{\widehat{\chi}}$, trasladando la función $\widehat{\phi}$ un poco si fuera necesario. Luego

$$\mathtt{d}(\psi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\widehat{\psi}, \Omega^m, \mathbf{p})$$

y el resultado se sigue de la primera parte de esta demostración. ■

Una vez delimitada la clase de funciones sobre las que operaremos haremos uso del teorema 5.1.0.25 y del lema 5.1.0.26 para definir el grado de Leray-Schauder. Para organizar esa tarea destacamos cuatro pasos fundamentales.

Recordamos que X es un e-v-n, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado, $\mathbf{p} \in X$ y $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow X$, donde $\psi = I - T$ es una perturbación compacta de la identidad, Además seguimos suponiendo como siempre que $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$.

1. En primer lugar afirmamos que

$$r = \rho(\mathbf{p}, \phi(\partial\Omega)) = \inf_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}\{\|\mathbf{p} - \phi(\mathbf{x})\|\} > 0.$$

Supongamos que no, entonces existe una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial\Omega$ tal que $\phi(\mathbf{x}_n) \longrightarrow \mathbf{p}$. Siendo T compacto y $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada existe una subsucesión de $\{T(\mathbf{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que se trata de la misma sucesión. Luego existe $\mathbf{y} \in \overline{T(\overline{\Omega})}$ tal que $T(\mathbf{x}_n) \longrightarrow \mathbf{y}$. Entonces

$$\mathbf{x}_n = T(\mathbf{x}_n) + \phi(\mathbf{x}_n) \longrightarrow \mathbf{y} + \mathbf{p}.$$

Pero siendo que $\partial\Omega$ es cerrado entonces $\mathbf{y} + \mathbf{p} \in \partial\Omega$. Además por continuidad y unicidad del límite

$$\mathbf{y} = \lim_{n\longrightarrow\infty} T(\mathbf{x}_n) = T(\mathbf{y} + \mathbf{p})$$

y en consecuencia

$$\phi(\mathbf{y} + \mathbf{p}) = I(\mathbf{y} + \mathbf{p}) - T(\mathbf{y} + \mathbf{p}) = \mathbf{y} + \mathbf{p} - \mathbf{y} = \mathbf{p}.$$

Pero entonces se concluye que $\mathbf{p} \in \phi(\partial\Omega)$ y esto contradice lo que hemos supuesto.

2. En segunda instancia si $0 < \varepsilon < r$ entonces de acuerdo al teorema 5.1.0.25 existe una tansformación de rango finito que satisface $\|T(u) - T_\varepsilon(u)\| <$

ε. Sean $S_\varepsilon \doteq \mathtt{s.g}\{T_\varepsilon(\overline{\Omega}); \mathbf{p}\}$, $\Omega_\varepsilon \doteq S_\varepsilon \cap \Omega$ y para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ consideremos la función

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \doteq \mathbf{x} - T_\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Ahora Ω_ε es un conjunto abierto y acotado de S_ε, y $\partial\Omega_\varepsilon \subset \partial\Omega$. Entonces $\phi_\varepsilon(\partial\Omega_\varepsilon) \subset S_\varepsilon$ y para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ se tiene que

$$\|\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| \geq r - \varepsilon > 0$$

de manera que $\mathbf{p} \notin \phi_\varepsilon(\partial\Omega_\varepsilon)$ y $\mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, \mathbf{p})$ está definido. En el caso de que $\Omega_\varepsilon =$ definimos $d(\phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, \mathbf{p}) = 0$.

3. En tercer lugar observamos que $\mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, \mathbf{p})$ es independiente de ε si $0 < \varepsilon < r$. Para ver eso consideramos $\varepsilon, \eta \in (0, r)$ y $S_\mu \doteq$ s.g $\{S_\varepsilon; S_\eta\}$, Teniendo en cuenta el lema 5.1.0.26 se tiene que

$$\begin{array}{c} \mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega_\mu, \mathbf{p}) \\ \mathtt{d}(\phi_\eta, \Omega_\eta, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_\eta, \Omega_\mu, \mathbf{p}). \end{array} \tag{5.1.0.13}$$

Ahora consideramos la homotopía $H : [0, 1] \times \overline{\Omega}_\mu \longrightarrow \overline{\Omega}_\mu$ definida

$$H(t, \mathbf{x}) = t\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) + (1 - t)\phi_\eta(\mathbf{x}).$$

Entonces

$$\begin{array}{c} \|H_t - \phi(\mathbf{x})\| \leq \\ t\,\|\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})\| + (1 - t)\,\|\phi_\eta(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})\| \\ < t\varepsilon + (1 - t)\eta < r \end{array} \tag{5.1.0.14}$$

Asimismo si $\mathbf{x} \in \partial\Omega_\mu$ tenemos

$$\|H_t(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| \geq \|\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| - \|\phi(\mathbf{x}) - H_t(\mathbf{x})\| > 0.$$

Luego vale que

$$\mathtt{d}(\phi_\eta, \Omega_\mu, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega_\mu, \mathbf{p})$$

y aplicando la ecuación (5.1.0.13) se obtiene la independencia.

4. Finalmente elegimos $\mathbb{V} \supset S_\varepsilon$ un $\mathbb{R}$-e-v de dimensión finita, con $0 < \varepsilon < r$, y consideramos $\Omega_\mathbb{V} \doteq \Omega \cap \mathbb{V}$. Entonces aplicacndo el lema 5.1.0.26 se obtiene

$$\mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega_\mathbb{V}, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, \mathbf{p}).$$

Como síntesis podemos dar la siguiente:

Definición 5.1.0.27 `Definción del grado de Leray-Schauder` *Sean $\Omega \subset X$ abierto y acotado, $\phi = I - T$ con $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ compacto, $\boldsymbol{p} \in X/\phi(\partial\Omega)$ y $\widehat{\phi} = I - \widehat{T}$ donde $\widehat{T}$ es una transformación continua de rango finito definida sobre $\overline{\Omega}$ tal que*

$$\left\| T(\boldsymbol{x}) - \widehat{T}(\boldsymbol{x}) \right\| < \rho(\boldsymbol{p}, \phi(\partial\Omega)). \tag{5.1.0.15}$$

Elegimos $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-e-v de dimensión finita, tal que

$$\mathbb{V} \supset s.g\{\widehat{T}(\overline{\Omega}), \boldsymbol{p}\}$$

y consideramos el siguiente conjunto

$$\Omega_{\mathbb{V}} = \Omega \cap \mathbb{V}$$

que resulta ser abierto y acotado. Luego definimos

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) \doteq \boldsymbol{d}(\widehat{\phi}, \Omega_{\mathbb{V}}, \boldsymbol{p}) \tag{5.1.0.16}$$

Observación 5.1.0.28 Algunas observaciones referidas a la condición de acotación del dominio.

1. La denominación "transformación compacta"no se emplea de manera unívoca. Agunos autores consideran como compactas transformaciones $T : X \longrightarrow X$ con la propiedad de que $T(X)$ sea relativamente compacto. Otros denominan a tales transformaciones çompletamente continuas". En tales casos no se pide que Ω sea acotado.

2. La definición que hemos dado puede adaptarse fácilmente para un dominio $\overline{\Omega}$ finitamente acotado, esto significa que para cada $\mathbb{V}$, $\mathbb{R}$-e-v de dimensión finita, $\Omega \cap \mathbb{V}$ es acotado.

3. También podemos definir la noción de grado para $\phi = I - T$, donde T manda acotados en precompactos. En principio esta condición es más débil que T compacto, pero para espacios completos coinciden.

Observación 5.1.0.29 Cronin define el grado para transformaciones de Leray-Schauder generalizadas admisibles. es decir para funciones $\phi : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow X$, X e-v-n, $\overline{\Omega} \subset X$ abierto y acotado, del tipo

$$\phi(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - T(\mathbf{x})$$

con λ una función a valores reales tal

$$0 < m \leq \lambda(\mathbf{x}) \leq M$$

para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. La condición de admisibilidad sigue siendo la misma: $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$ [Cronin, J. 1964].

5.2. Algunas propiedades del grado de Leray-Schauder.

En el segundo capítulo hemos demostrado una serie de resultados de la teoría de grado. Esos resultados fueron establecidos en los teoremas: 2.2.0.10 (normalización), 4.4.1.7 (propiedad de solución), 2.6.1.3 (punto 1: $\mathtt{d}(\cdot, \Omega, \mathbf{p})$ es localmente constante en la primer variable y punto 2: invariancia bajo homotopias), 2.6.1.5 (la función $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p})$ es localmente constante), 2.6.1.6 (dependencia de los valores sobre el borde), 2.6.1.7 (Poincaré-Böhl), y 2.6.1.8 (traslación). En esta sección consideramos las propiedades análogas en el contexto de las transformaciones de Leray-Schauder. Las demostraciones siguen las estrategias utilizadas en la definición 5.1.0.27 y la teoría del grado de Brouwer.

Como en la sección anterior X es un e-v-n, $\Omega \subset X$ abierto y acotado, $\mathbf{p} \in X$, $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow X$, $\psi = I - T$ con T compacto y $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$.

Antes de comenzar precisamos cierta notación que simplifique la escritura. Denotamos al conjunto de todas las transformaciones compactas como

$$K(M) \doteq \{T : M \subset X \longrightarrow X : T \ \mathtt{es\ compacto}\} \tag{5.2.0.17}$$

y al conjunto de las perturbaciones compactas de la identidad, como

$$K_I(M) \doteq \{\phi = I - T : T \in K(M).\}. \tag{5.2.0.18}$$

Una `perturbación compacta de la identidad admisible` es una transformación $\phi \in K_I(\Omega)$ tal que $\mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega)$. Denotamos a dicho conjunto de la siguiente manera

$$K_{I,\mathbf{p}}(\Omega) \doteq \{\phi = I - T : T \in K(\Omega) \ \mathtt{y} \ \mathbf{p} \notin \phi(\partial\Omega).\}. \tag{5.2.0.19}$$

Una perturbación compacta de la identidad admisible, $\phi \in K_{I,\mathbf{p}}(\Omega)$ suele llamarse `transformación de Leray-Schauder` [Rothe E. H., 1984].

En primer lugar comprobaremos que con esta definición se cumplen las tres propiedades fundamentales.

Teorema 5.2.0.30 *(Normalización.)*
Si $\phi = I$ es la función identidad entonces

$$d(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \begin{cases} 1 \ si & \boldsymbol{p} \in \Omega \\ 0 \ si & \boldsymbol{p} \notin \overline{\Omega} \end{cases} \tag{5.2.0.20}$$

Demostración. En este caso $T = 0$ de manera que elegimos $\widehat{T} = 0$ y $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-e.v tal que $\mathbb{V} \supset$ s.g.$\{\mathbf{p}\}$. Luego se aplica el resultado análogo relativo a la teoría del grado de Brouwer. ■

Teorema 5.2.0.31 *(Propiedad de solución.)*
Sea $\phi \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ y $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) \neq 0$. Entonces existe $\boldsymbol{x} \in \Omega$ tal que $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}$.

Demostración. Consideramos una transformación de rango finito $\widehat{T} = T_\varepsilon$ que aproxima a T y $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-e.v como en la definición 5.1.0.27 tal que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi, \Omega_{\mathbb{V}}, \mathbf{p})$ donde como siempre $\Omega_{\mathbb{V}} = \Omega \cap \mathbb{V}$. La función $\widehat{\phi}$ está definida sobre $\overline{\Omega}$ y por elección para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ se tiene

$$\left\|\phi(\mathbf{x}) - \widehat{\phi}(\mathbf{x})\right\| = \left\|T(\mathbf{x}) - \widehat{T}(\mathbf{x})\right\| < \varepsilon.$$

Ahora teniendo en cuenta que $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) \neq 0$ entonces para todo n suficientemente grande, existe $\mathbf{x}_n \in \Omega$ tal que

$$\mathbf{x}_n - T_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{p}.$$

Luego se obtiene una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada y como $\{T(\mathbf{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto existe una subsucesión que converge. Nuevamente podemos suponer que se trata de la misma sucesión de forma que $\{T(\mathbf{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto ζ. Entonces

$$\|\mathbf{x}_n - T(\mathbf{x}_n) - \mathbf{p}\| = \left\|T_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x}_n) - T(\mathbf{x}_n)\right\| < \frac{1}{n}$$

y por lo tanto $\mathbf{x}_n \longrightarrow \zeta + \mathbf{p}$. Teniendo en cuenta que T es continua y el límite es único $T(\mathbf{x}_n) \longrightarrow T(\zeta + \mathbf{p})$ y por lo tanto $T(\zeta + \mathbf{p}) = \zeta$. Así

$$\phi(\zeta + \mathbf{p}) = \zeta + \mathbf{p} - T(\zeta + \mathbf{p}) = \zeta + \mathbf{p} - \zeta = \mathbf{p}. \blacksquare$$

Para comprobar la invariancia bajo homotopía necesitamos adecuar el concepto de homotopía a las transformaciones compactas.

Definición 5.2.0.32 *(Homotopía de transformaciones compactas.) Sean $M \subset X$ y $H : [0,1] \times M \longrightarrow M$ una función tal que para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $H_t \in K(M)$. Se dice que H es una* ***homotopía de transformaciones compactas sobre*** *M si dado $\varepsilon > 0$ y $L \subset M$ acotado entonces existe $\delta = \delta(\varepsilon, L)$ tal que si $\boldsymbol{x} \in L$ y $|t - s| < \delta$ entonces*

$$\|H_t(\boldsymbol{x}) - H_s(\boldsymbol{x})\| < \varepsilon \tag{5.2.0.21}$$

Teorema 5.2.0.33 *(Invariancia bajo homotopía compactas.)*

Sea $\Omega \subset X$ abierto y acotado y H una homotopía de compactos sobre $\overline{\Omega}$ tal que para todo $t \in [0,1]$ $\phi_t = (I - H_t) \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\Omega)$. Entonces para todo $t \in [0,1]$

$$\boldsymbol{d}(\phi_t, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi_0, \Omega, \boldsymbol{p}), \tag{5.2.0.22}$$

es decir el grado es independiente de t.

Esquema de la Demostración. En primer lugar se prueba que existe $r > 0$ tal que

$$\|\phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| \geq r$$

uniformemente para todo $t \in [0,1]$ y $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Si suponemos que no, entonces existirán sucesiones $\{t_n\} \subset [0,1]$ y $\{\mathbf{x}_n\} \subset \partial\Omega$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\|\eta_n\| \doteq \|\phi_{t_n}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{p}\| < \frac{1}{n}$. La sucesión $\{t_n\}$ tiene una sucsucesión convergente, digamos que converge a $\tau \in [0,1]$. Luego siendo H_τ compacta y $\{\mathbf{x}_n\}$ acotada entonces $H_\tau(\mathbf{x}_n)$ tiene una subsucesión convergente que la identificamos con la original, digamos que

$$H_\tau(\mathbf{x}_n) \longrightarrow \mathbf{y}.$$

Usando el hecho de que la homotopìa es de transformaciones compactas sobre $\overline{\Omega}$ se tiene

$$\|H_\tau(\mathbf{x}_n) - H_{t_n}(\mathbf{x}_n)\| \longrightarrow 0.$$

Luego

$$H_{t_n}(\mathbf{x}_n) \longrightarrow \mathbf{y}$$

y

$$\mathbf{x}_n = \eta_n + H_{t_n}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{y} + \mathbf{p}.$$

Como $\mathbf{x}_n \in \partial\Omega$ entonces $\mathbf{y} + \mathbf{p} \in \partial\Omega$. Pero entonces $\phi_\tau(\mathbf{y} + \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ y por lo tanto se contradice que $\mathbf{p} \notin \phi_t(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$.

A continuación se define la relación de equivalencia en $[0,1]$

$$s \sim t \ sii \ \mathtt{d}(\phi_s, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_t, \Omega, \mathbf{p})$$

cuyas clases resultan ser abiertas. Como consecuencia de que $[0,1]$ es conexo existe una sola clase; en particular $0 \sim 1$ y de ahí el resultado. ■

Hemos visto en los capítulos anteriores que el grado de Brouwer de una función sólo depende de los valores que ella asume en en el borde, teorema 2.6.1.6 y observacion 3.3.0.16. Esto mismo sucede con el grado de Leray-Schauder.

Teorema 5.2.0.34 *(Dependencia del grado respecto de los valores del campo sobre el borde.) San $\phi_1, \phi_2 \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ tal que $\phi_1 = \phi_2$ sobre $\partial\Omega$. Entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi_1, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi_2, \Omega, \boldsymbol{p}). \tag{5.2.0.23}$$

Demostración. Sea $\phi_1 = I - T_1$ y $\phi_2 = I - T_2$. Sea H la homotopía de transformaciones compactas sobre $\overline{\Omega}$, $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ definida

$$H(t, \mathbf{x}) = tT_1(\mathbf{x}) + (1-t)T_2(\mathbf{x})$$

y $\phi_t = I - H_t$.

Si $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ entonces como ϕ_1 y ϕ_2 coinciden sobre el borde se tiene que para todo $t \in [0,1]$, $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x})$ de manera que para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $\mathbf{x} \notin \phi_t(\partial\Omega)$. Luego concluimos que

$$\mathtt{d}(\phi_1, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_2, \Omega, \mathbf{p}). \blacksquare$$

El teorema de Poincaré-Böhl, sigue siendo válido en el contexto de la toería del grado de Leray-Schauder.

Teorema 5.2.0.35 *(Teorema de Bölh-Poincaré para el grado de Leray-Schauder.)* *Sean $\phi_0,\ \phi_1 \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\Omega)$ y para todo $t \in [0,1]$, $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$ y $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow X$ definida*

$$H(t, \boldsymbol{x}) = (1-t)\phi_0 + t\phi_1$$

tal que para todo $t \in [0,1]$ se tiene $\boldsymbol{p} \notin H_t(\partial\Omega))$. Entonces $\boldsymbol{d}(H_t, \Omega, \boldsymbol{p})$ es independiente del parámetro t.

Demostración. Bastará con ver que H es una homotopía de transformaciones compactas. Para ello observemos que siendo $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - F_0(\mathbf{x})$ y $\phi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - F_1(\mathbf{x})$ ambas perturbaciones compactas de la identidad, se tiene que

$$H(t, \mathbf{x}) = (1-t)[\mathbf{x} - F_0(\mathbf{x})] + t[\mathbf{x} - F_1(\mathbf{x})] = \mathbf{x} + [(1-t)F_0(\mathbf{x}) + tF_1(\mathbf{x})]$$

es una perturbación compacta de la identidad. Por otro lado la hipótesis garantiza que $H_t \in K_{I,\mathbf{p}}(\overline{\Omega})$ y por lo tanto el grado esta definido. Ahora se aplica el teorema 5.2.0.33. $\blacksquare$

Hemos visto, en el cuarto capítulo, dos versiones del teorema de Rouche 4.5.0.6 y 4.5.0.7. Para finalizar esta sección generalizamos el teorema de Rouche, en el contexto de los espacioes de Banach X de dimensión infinita. Esta generalización es una consecuencia del teorema de Poincaré-Böhl

Teorema 5.2.0.36 *(Generalización del Teorema de Rocuhe.)*
Sean $\phi_0, \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ *y* $\phi_1 : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *una perturbación compacta de la identidad tal que*

$$\|\phi_1(\boldsymbol{x}) - \phi_0(\boldsymbol{x})\| < \|\phi_0(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\|$$

para todo $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$*. Entonces* $\phi_1 \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ *y además*

$$\boldsymbol{d}(\phi_1, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi_0, \Omega, \boldsymbol{p}).$$

Demostración. Para todo $t \in [0, 1]$ y $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ definimos

$$H(t, \mathbf{x}) = (1 - t)\phi_0 + t\phi_1.$$

Entonces para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ se tiene

$$H_t(\mathbf{x}) - \mathbf{p} = \phi_0(\mathbf{x}) - \mathbf{p} + t[\phi_1(\mathbf{x}) - \phi_0(\mathbf{x})]$$

y por lo tanto

$$\|H_t(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| > \|\phi_0(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\| - \|\phi_1(\mathbf{x}) - \phi_0(\mathbf{x})\|.$$

De aquí se deduce que para todo $t \in [0, 1]$ vale que $\mathbf{p} \notin H_t(\partial\Omega))$ de manera que $H_t \in K_{I,\mathbf{p}}(\overline{\Omega})$. Ahora el resultado se obtiene aplicando el teorema 5.2.0.35. ■

Otra propiedad de importancia que se cumple es la invariancia bajo traslación

Teorema 5.2.0.37 *(invariancia bajo traslacion). Sea* $\phi \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$*,* $\boldsymbol{q} \in X$ *y* $\phi_1(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$*. Entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi_1, \Omega, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \tag{5.2.0.24}$$

Demostración. Sean $\phi = I - T$ y $\phi_1 = I - T_1$ con $T_1 = T + \mathbf{q}$ y $T, T_1 \in K_1(\overline{\Omega})$. Supongamos que $\widehat{T}$ es una transformación de rango finito que aproxima a T en el sentido de la definición del grado de Leray 5.1.0.27, entonces para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ vale que

$$\left\|\widehat{T}(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\right\| < r = \rho(\mathbf{p}; \phi(\partial\Omega)).$$

Luego si ponemos $\widehat{T}_1 = \widehat{T} + \mathbf{q}$ se tiene que $\widehat{T}_1$ aproxima a T_1 y para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ se cumple que

$$\left\| \widehat{T}_1(\mathbf{x}) - T_1(\mathbf{x}) \right\| < r = \rho(\mathbf{p}; \phi(\partial\Omega)).$$

Ahora elegimos un $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial que contenga $\widehat{T}_1(\Omega)$, $\widehat{T}_1(\Omega)$, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ y ponemos $\Omega_{\mathbb{V}} = \Omega \cap \mathbb{V}$. Entonces definiendo $\widehat{\phi} = I - \widehat{T}$ y $\widehat{\phi}_1 = I - \widehat{T}_1$ se tiene por definición 5.1.0.27 $\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\widehat{\phi}, \Omega_{\mathbb{V}}, \mathbf{p})$ y también $\mathtt{d}(\phi_1, \Omega, \mathbf{p} - \mathbf{q}) = \mathtt{d}(\widehat{\phi}_1, \Omega_{\mathbb{V}}, \mathbf{p} - \mathbf{q})$.

Ahora se aplica el teorema 2.6.1.3, referido a la invariancia bajo translación relativa a la teoría del grado de Brouwer a los dos miembros derechos y obtenemos el resultado deseado:

$$\mathtt{d}(\phi, \Omega, \mathbf{p}) = \mathtt{d}(\phi_1, \Omega, \mathbf{p} - \mathbf{q}). \blacksquare$$

Cerramos esta sección señalando otras propiedades válidas para el grado de Leray algunas de las cuales hemos probado para el grado de Brouwer; sus demostraciones o bien resultan de las propiedades ya demostradas o bien se basan en la misma estrategia utilizada anteriormente: se comienza por elegir una aproximación de rango finito de la transformación compacta y un subespacio de dimensión finita que contenga al sistema generado por el rango de la aproximación y el punto en cuestión; luego se aplica alguna de las propiedades ya probadas para el grado de Brouwer; estas demostraciones pueden encontrarse en el texto "Degree theory" de LLoyd [LLoyd N. G.,1978].

Teorema 5.2.0.38 *La función grado es localmente constante en la primer variable).*

Sean $\phi \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$,

$$\|\phi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{x})\| < r = \rho(\boldsymbol{p}, \phi(\partial\Omega)$$

Entonces,

$$\psi \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega}) \ \text{ y } \ \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\psi, \Omega, \boldsymbol{p}). \tag{5.2.0.25}$$

(Referencia análoga en la teoría de Brouwer: punto uno del teorema 2.6.1.3).

Teorema 5.2.0.39 *(La función $d(\phi, \Omega, p)$ es localmente constante.)*

Sea $\phi \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$. Entonces $\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p})$ es el mismo para todo $\boldsymbol{p}$ en el mismo componente conexo de $[\phi(\partial\Omega)]^c$

(Referencia análoga en la teoría de Brouwer: teorema 2.6.1.5).

Teorema 5.2.0.40 *Sea $\phi \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ Entonces*

1. *1.* `(Descomposición del dominio).` *Sean $\{\Omega_i\}_{1\leq i\leq n}$ abiertos que particionan a Ω entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \sum_{1\leq i\leq n} \boldsymbol{d}(\phi_i, \Omega_i, \boldsymbol{p}) \tag{5.2.0.26}$$

   donde $\phi_i = \phi|_{\Omega_i}$.

2. *2.* `(Escisión).` *Si $K \subset \overline{\Omega}$ es cerrado y $\boldsymbol{p} \notin \phi(K)$. entonces*

$$\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{d}(\phi, \Omega - K, \boldsymbol{p}) \tag{5.2.0.27}$$

(Referencia análoga en la teoría de Brouwer: teorema 2.6.2.1).

Teorema 5.2.0.41 `(Teorema de la Multiplicación.)`
Sea $\phi \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$, $M \supset \phi(\overline{\Omega})$ abierto y acotado; $\triangle = M - \phi(\partial\Omega)$ y $\triangle_i$, $i = 1,2...$ los componentes conexos de $\triangle$. Entonces si $\psi \in K_1(\overline{\Omega})$ y $\boldsymbol{p} \notin \psi(\phi(\partial\Omega)) \cup \psi(\partial M)$ entonces

$$\boldsymbol{d}(\psi \circ \phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \sum_j \boldsymbol{d}(\psi, \triangle_j, \boldsymbol{p})\, \boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \triangle_j) \tag{5.2.0.28}$$

(Referencia análoga en la teoría de Brouwer: teorema 2.7.0.10).

Teorema 5.2.0.42 `(Transformaciones impares).`
Sea X un espacio de Banach, $\Omega \subset X$ abierto, acotado, simétrico tal que $\mathbf{0} \in \Omega$. Si $\phi \in K_{I,\mathbf{0}}(\overline{\Omega})$ y para todo $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$

$$\frac{\phi(\boldsymbol{x})}{\|\phi(\boldsymbol{x})\|} \neq \frac{\phi(-\boldsymbol{x})}{\|\phi(-\boldsymbol{x})\|}$$

entonces $\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \mathbf{0})$ es un entero impar.

Una de las consecuencias de este resultado es un importante teorema de la aplicación abierta.

Teorema 5.2.0.43 `(Invariancia del dominio).`
Sea X un espacio de Banach, y $\Omega \subset X$ abierto y acotado. Si $\phi \in K_I(\overline{\Omega})$ es inyectiva entonces $\phi(\Omega)$ es abierto.

Teorema 5.2.0.44 *(Separación).*

Sean X un espacio de Banach, $\Omega_1, \Omega \subset X$ abiertos, acotados y homeomorfos via $h \in K_I(\overline{\Omega})$. Entonces $[\Omega_1]^c$ y $[\Omega]^c$ o bien tienen la misma cantidad finita de componentes conexas o bien ambos tienen una cantidad infinita numerable de componentes conexas.

Teorema 5.2.0.45 *(Grado de homeomorfismos).*

Sea X un espacio de Banach, $\Omega \subset X$ abierto, acotado, y $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \phi(\overline{\Omega})$ biyectiva y $\phi \in K_I(\overline{\Omega})$. Entonces, si $\boldsymbol{p} \in \phi(\Omega)$ entonces $\boldsymbol{d}(\phi, \Omega, \boldsymbol{p}) = \pm 1$.

Teorema 5.2.0.46 *(Invariancia bajo homotopias compactas generalizada).*

Sean $\widehat{\Omega} \subset [0,1] \times X$ abierto y acotado, $f : \widehat{\Omega} \longrightarrow X$ compacto, $\phi_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - f(t, \boldsymbol{x})$ y

$$\Omega_t \doteq \{\boldsymbol{x} \in X : \ (t, \boldsymbol{x}) \in \widehat{\Omega}\}.$$

Si para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $\phi_t \in K_{I,\boldsymbol{p}}(\overline{\Omega})$ entonces $\boldsymbol{d}(\phi_t, \Omega_t, \boldsymbol{p})$ es independiente de $t \in [0,1]$.

(Referencia análoga en la teoría de Brouwer: teorema 2.6.2.4).

Capítulo 6

Algunas consecuencias y aplicaciones de la teoría del grado de Leray-Schauder.

6.1. Teoremas del punto fijo para funciones compactas definidas en un espacio vectorial normado de dimensión infinita.

Teorema 6.1.0.47 *Sea $S \subset X$ cerrado, acotado, convexo tal que $\mathbf{0} \in S^{\circ}$. Si $\phi \in K(S)$ y $\phi(S) \subset S$ entonces ϕ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. La demostración es esencialmente la misma que se ha dado para el grado de Brouwer. Sea $\Omega = S^{\circ}$. Entonces Ω es abierto, no vacio, acotado, convexo, con $\partial\Omega = \partial S$. Se considera la misma homotopía $H(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - t\phi(\mathbf{x})$ para $t \in [0, 1]$ y $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Si algún punto del borde es fijo nada hay que probar, suponemos entonces que para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ se tiene $\phi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$. Esto implica de manera inmediata que $\mathbf{0} \notin H_1(\partial\Omega)$. Pero además es fácil ver que todo $0 \leq t < 1$ y todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ se tiene que $t \cdot \phi(\mathbf{x}) \in \Omega$. En definitiva $\mathbf{0} \notin H_t(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$. Luego el grado $\mathtt{d}(H_t, \Omega, \mathbf{0})$ está definido para todo $t \in [0, 1]$.

Por la invariancia bajo homotopía y el grado de la identidad se concluye que

$$\mathtt{d}(I - \phi, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(I, \Omega, \mathbf{0}) = 1.$$

La existencia de un punto fijo ahora se sigue del teorema de la existencia de solución de la ecuación $\mathbf{x} - \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. ■

Observación 6.1.0.48 En el próximo teorema relajamos un poco la hipótesis referida a S.

Teorema 6.1.0.49 *Sea $S \subset X$ cerrado, acotado, tal que $S^\circ = \Omega \neq \emptyset$. Sea $\phi \in K(S)$ y supongamos que existe $\boldsymbol{w} \in \Omega$ tal que para todo $\lambda > 1$ y todo $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ vale:*

$$\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w} \neq \lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}).$$

Entonces ϕ tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Omitimos la demostración que es completamente análoga a la dada en 4.4.1.7 para el grado de Brouwer. ■

Se puede levantar la restricción de que el conjunto S° sea no vacío a través del teorema de Dugundji, que utiliza el teorema de extensión de Tietze. En primer lugar definimos la capsula convexa de un conjunto.

Definición 6.1.0.50 *Definimos la* ***cápsula convexa de*** *S $co(S)$ como la intersección de todos los convexos que contienen a S y la* ***cápsula convexa cerrada de*** *S ,$\overline{co}(S)$, como la intersección de todos los convexos cerrados que contienen a S.*

Teorema 6.1.0.51 ***(Teorema de Dugundji.)***
Sea X métrico, $S \subset X$ cerrado y L un e-v-n. Entonces toda $f : S \longrightarrow L$ continua tiene una extensión continua $F : X \longrightarrow L$ tal que $F(X) \subset co(f(S))$.

Teorema 6.1.0.52 ***(Teorema de Schauder.)*** *Sea X un e-v-n y $S \subset X$ cerrado, acotado, convexo y no vacío. Si $\phi \in K(S)$ tal que $\phi(S) \subset S$, entonces ϕ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Sea $\overline{B}$ una bola cerrada que contiene a S centrada en el origen. Por el teorema 6.1.0.51 S es una retracción de $\overline{B}$, es decir, existe $\mathbf{r} : \overline{B} \longrightarrow S$ tal que $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in S$. Se define $\widehat{\phi} = \phi \circ \mathbf{r}$ que resulta ser compacta puesto que lo es ϕ. Ahora estamos en las condiciones del teorema 6.1.0.47 para cerrados convexos no vacios con el origen en su interior y aplicaciones compactas, luego existe un punto fijo ζ de $\widehat{\phi}$. Entonces $\zeta = \widehat{\phi}(\zeta) \in \widehat{\phi}(\overline{B}) \in S$ y $\zeta = \widehat{\phi}(\zeta) = \phi(\mathbf{r}(\zeta)) = \phi(\zeta)$. ■

Una consecuencia más o menos inmediata de este teorema es el siguiente:

Corolario 6.1.0.53 *Sea X un e-v-n y $S \subset X$ cerrado, acotado, convexo y no vacío. Sea S homeomorfo a $S_1 \subset X$ via h. Si $\phi \in K(S_1)$ tal que $\phi(S_1) \subset S_1$, entonces ϕ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Dado el homeomorfismo h se define $\psi : S \longrightarrow S$, $\psi \doteq h^{-1} \circ \phi \circ h$ que resulta ser compacta puesto que lo es ϕ. Luego por el teorema de Dugundji ψ tiene un punto fijo ζ y por lo tanto $h(\zeta)$ es un punto fijo de ϕ. $\blacksquare$.

Corolario 6.1.0.54 *Sea X un e-v-n y $S \subset X$ compacto y convexo. Entonces S-ppf.*

Demostración. Sea $\phi : S \longrightarrow S$ continua. Como S es compacto entonces ϕ es compacta y tiene un punto fijo de acuerdo al teorema 6.1.0.52 de Schauder. $\blacksquare$

Observación 6.1.0.55 Las observaciones que siguen muestran que no es posible generalizar el teorema del punto fijo de Brouwer para conjuntos cerrados, acotados y convexos. Más precisamente Dugundji demostró que $B(0,1) \subset X$-ppf sii $\dim X < \infty$ [Dugundji,1951].

Nosotros demostramos esa imposibilidad presentando el siguiente ejemplo debido a Kakutani [Brown R. F, 1993].

Ejemplo 6.1.0.56 `Kakutani.` "Existe un conjunto C cerrado, acotado y convexo de un X e-v-n y $\phi : C \longrightarrow C$ continua tal que ϕ no tiene punto fijo."

Consideramos $X \doteq l^2 = \{(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R} : \sum_{j\geq 1} x_j^2 < \infty\}$. Para cualquier $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ definimos $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j\geq 1} x_j^2}$. Luego $(X, \|.\|)$ es un e-v-n de dimensión infinita. Consideremos la bola unitaria $C = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ que resulta ser cerrada acotada y convexa. Ahora consideremos

$$\phi(\mathbf{x}) = (\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

definida sobre C. Entonces observando que $\|f(\mathbf{x})\| = \sqrt{(1 - \|\mathbf{x}\|^2) + \|\mathbf{x}\|^2} = 1$ se concluye que $\phi(C) \subset S$, donde S es la esfera de X de radio 1 y centro 0.

Luego se tiene $\phi : C \longrightarrow C$ definida continua por ser composición de continuas. Ahora veamos que ϕ no tiene ningún punto fijo. Si tuviera algún punto fijo digamos $\mathbf{x}$ entonces $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, de manera que $x_0 \in S$ pero entonces $f(\mathbf{x}) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ..)$ lo cual implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ absurdo.

El punto fundamental del ejemplo de Kakutani es que $\overline{f(S)}$ no es compacto. Para ello basta considerar la sucesión $\mathbf{x} = \{\mathbf{e}_j\}_{j\geq 1}$ donde para todo

$j = 1, 2, ...$ la sucesión $\mathbf{e}_j$ tiene un 1 en el lugar j y ceros en cualquier otro. Esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente puesto que para $i \neq j$ se tiene que $\|\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\| = \sqrt{2}$.

Finalizamos esta sección con una serie de variantes referidas a los teoremas de punto fijo. El lema siguiente es la clave del posterior teorema

Lema 6.1.0.57 *Sea X un espacio de Banach. Si $S \subset X$ es compacto entonces $\overline{co}(S)$ es compacto.*

Teorema 6.1.0.58 *Sea X un espacio de Banach. Si $S \subset X$ cerrado y convexo y $\phi : S \longrightarrow K$ es continua con $K \subset S$ compacto, entonces ϕ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Existe un compacto F tal que $S \supset F \supset \phi(S)$. Entonces de acuerdo al lema $F_0 \doteq co(F)$ es compacto y vale que $F_0 \subset S \subset \phi(F_0) \subset F_0$. Ahora F_0 es un conjunto compacto y convexo de un e-v-n y por lo tanto tiene la propiedad del punto fijo. ■

Teorema 6.1.0.59 *Sea X un e-v-n, y $S \subset X$ cerrado, acotado, convexo tal que $\mathbf{0} \in S^\circ$. Sea $H : [0,1] \times S \longrightarrow X$ una homotopía de transformaciones compactas tal que $H(0, \partial S) \subset S$ y $H(t, \boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ para todo $t \in [0,1)$ y $\boldsymbol{x} \in \partial S$. Entonces $\phi = H(1, \cdot)$ tiene al menos un punto fijo*

Demostración. El conjunto S es convexo y $\Omega = S^\circ \neq$, $\partial\Omega = \partial S$. Se define la homotopía

$$G(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - H(t, \mathbf{x})$$

para $t \in [0,1]$ y $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. De acuerdo a la hipótesis del teorema $\mathbf{0} \notin G(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1)$. Podemos suponer también que $\mathbf{0} \notin G(1, \partial\Omega) = [I - \phi](\partial\Omega)$ de lo contrario nada hay que probar. Luego por la invariancia bajo homotopía

$$d(G_0, \Omega, \mathbf{0}) = d(G_1, \Omega, \mathbf{0}).$$

Ahora $\mathtt{d}(G_0, \Omega, \mathbf{0}) = 1$ pues $\mathbf{0} \in \Omega$

Corolario 6.1.0.60 *(Teorema de Schaefer).*

Sea $\phi \in K(X)$ y supongamos que

$$S = \{\boldsymbol{u} : \ \boldsymbol{u} = \lambda \cdot \phi(\boldsymbol{u}) \ \ \textit{para algún } \lambda \in [0,1)\}$$

es acotado. Entonces ϕ tiene al menos un punto fijo.

6.2. Existencia de soluciones T periódicas para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

En esta sección utilizaremos el grado de Leray-Schauder para probar la existencia de soluciones periodicas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, bajo determinadas hipótesis.

Teorema 6.2.0.61 *Sean $f:\ [0,T]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, e $I=[r_1^-;r_1^+]\times ...\times[r_2^-;r_2^+]\times ...\times[r_n^-;r_n^+]$ donde para cada $i=1,2,...,n$, r_i^+ y r_i^- son escalares tales que $r_i^- < r_i^+$. Consideremos para cada $i=1,2,...,n$ las caras i-ésimas del paralelepípedo I denotadas $c(i,-)=\{\boldsymbol{x}\in I : x_i = r_i^-\}$, $c(i,+)=\{\boldsymbol{x}\in I : x_i = r_i^+\}$, anterior y posterior respectivamente. Entonces si para cada $i=1,2,...,n$*

$$f_i|_{[0,T]\times c(i,-)} < 0\ ,\quad f_i|_{[0,T]\times c(i,+)} > 0 \tag{6.2.0.1}$$

el problema T-períodico

$$\begin{cases} \ddot{u}_i = f_i(t,\boldsymbol{u}), \quad (t,\boldsymbol{u})\in(0,T)\times\mathbb{R}^n \\ \qquad\qquad u_i(0)=u_i(T) \\ \qquad\qquad \dot{u}_i(0)=\dot{u}_i(T) \end{cases} \tag{6.2.0.2}$$

tiene alguna solución $\boldsymbol{u}\in C^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $t\in[0,T]$ se tiene $\boldsymbol{u}(t)\in I$, es decir, para cada $i=1,2,...,n$ se cumple que

$$r_i^- \le u_i(t) \le r_i^+ \tag{6.2.0.3}$$

Observación 6.2.0.62 La demostración de la proposición se basa en una técnica muy utilizada en el contexto de las pruebas de existencia de sub y supersoluciones (ver teoremas 6.3.1.2 y 6.3.2.8).

El esquema de la estrategia es el siguiente. Para probar la existencia de una solución se consideran dos etapas.

I) Consiste en mostrar mediante el teorema de Schauder que cierto problema T-periódico, modificación del original, tiene solución; esto requiere:

1. Definir el problema auxiliar que es el original modificado.
2. Interpretar la existencia de solución como un problema de existencia de punto fijo de cierto operador, convenientemente definido.

3. Probar que el operador así definido está en las condiciones del teorema de Schauder (o bien de algún otro teorema de punto fijo). Con esto se asegura la existencia de alguna solución del problema modificado.

II) Consiste en mostrar que toda solución del problema modificado necesariamente satisface 6.2.0.3; el resultado será una consecuencia inmediata del hecho de que si la solución satisface 6.2.0.3 entonces en verdad el problema auxiliar 6.2.0.4 y el problema 6.2.0.2 coinciden.

1. Probar que cualquier solución del problema modificado tiene imagen en I.
2. Concluir que el problema original tiene alguna solución y además su imagen está en I.

Demostración. Organizamos la demostración con base en el comentario antrerior.

I. A partir del problema T-periódico 6.2.0.2 consideramos el sistema auxiliar T-periódico

$$\begin{cases} \ddot{u}_i - \lambda u_i = f_i(t, \mathbf{P}(\mathbf{u})) - \lambda P_i(\mathbf{u}), \quad (t, \mathbf{u}) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ \qquad\qquad u_i(0) = u_i(T) \\ \qquad\qquad \dot{u}_i(0) = \dot{u}_i(T) \end{cases} \tag{6.2.0.4}$$

donde $\mathbf{u} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ y $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, ..., P_n)$ está definida de la siguiente manera: para cada $i = 1, 2, ..., n$

$$P_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_i & \texttt{si } r_i^- \leq x_i \leq r_i^+ \\ r_i^- & \texttt{si } x_i < r_i^- \\ r_i^+ & \texttt{si } x_i > r_i^+ \end{cases} \tag{6.2.0.5}$$

Estudiaremos en primer lugar la existencia de solución del problema 6.2.0.4.

Observación 6.2.0.63 1. $\mathbf{P}(\mathbb{R}^n) \subset I$ y $\mathbf{P}|_I = id_I$, de manera que I es un retracto de $\mathbb{R}^n$. Luego para todo $i = 1, 2, ..., n$ y $\mathbf{x} \in I$ se tiene $f_i(t, \mathbf{P}(\mathbf{x})) = f_i(t, \mathbf{x})$.

2. Si para cada $i = 1, 2, ..., n$ consideramos los semiespacios $\pi_i^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i < r_i^-\}$, $\pi_i^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > r_i^+\}$ determinados por las caras anterior

y posterior respectivamente entonces es fácil observar que $\mathbf{P}(\pi_i^-) = c(i,-)$ y $\mathbf{P}(\pi_i^+) = c(i,+)$.

Luego teniendo en cuenta la condición 6.2.0.1 para todo $i = 1, 2, ..., n$ se cumple que:

$$\begin{cases} f_i|_{[0,T]\times\mathbf{P}(\pi_i^-)} = f_i|_{[0,T]\times c(i,-)} < 0 \\ f_i|_{[0,T]\times\mathbf{P}(\pi_i^+)} = f_i|_{[0,T]\times c(i,+)} > 0 \end{cases} \tag{6.2.0.6}$$

3. La función $\mathbf{P}$ actúa sobre la segunda variable de f. En principio esto provoca un truncamiento pero si las soluciones tienen imagen en I nada se trunca.

A los efectos de probar la existencia de solución del problema modificado 6.2.0.4 planteamos el siguiente problema T-periódico asociado:

$$\begin{cases} \ddot{u}_i - \lambda u_i = f_i(t, \mathbf{P}(\mathbf{w})) - \lambda P_i(\mathbf{w}) \\ u_i(0) = u_i(T) \\ \dot{u}_i(0) = \dot{u}_i(T). \end{cases} \tag{6.2.0.7}$$

donde $\mathbf{w} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ se considera fija y $\lambda > 0$.

Observemos, en primer lugar, que este sistema es lineal y que tiene solución única dado que $\lambda > 0$. Para simplificar la notación escribimos para $i = 1, 2, ..., n$ y $\mathbf{w} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$,

$$\phi_i(t) \doteq f_i(t, \mathbf{P}(\mathbf{w}(t))) - \lambda P_i(\mathbf{w}(t))$$

y ponemos

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}} - \lambda \mathbf{u} = \phi(t) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(T) \\ \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}(T). \end{cases} \tag{6.2.0.8}$$

Ahora sabemos que para cada $\mathbf{w}$ existe una única solución

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^T G(t,s)\phi(s)ds \tag{6.2.0.9}$$

donde G es la función de Green correspondiente.

Luego podemos definir el operador $K : C([0,T], \mathbb{R}^n) \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera: para cada $\mathbf{u} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$

$$K(\mathbf{u})(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s, \mathbf{P}(\mathbf{u}(s))) - \lambda \mathbf{P}(\mathbf{u}(s))]ds \tag{6.2.0.10}$$

Esto permite considerar al problema 6.2.0.4 como un problema de punto fijo.

Comprobaremos en primer lugar que el operador K es compacto.

Para ello debemos comprobar que si $A \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$ es un conjunto acotado entonces $K(A)$ es relativamente compacto.

Por Arzelá Azcoli, para probar que K es compacto es suficiente probar que si $A \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$ es acotado entonces $K(A) \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$ es acotado y equicontinuo.

1. $K(A) \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$ es acotado.
En primer lugar observamos que existen constantes $M_1, M_2 > 0$ positivas, independientes de $\mathbf{u}$, tal que:

i $\|f(s,\mathbf{P}(\mathbf{u}(s))) - \lambda\mathbf{P}(\mathbf{u}(s))\| \leq M_1$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

ii $\|G(t,s)\| \leq M_2$ para todo $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$.

Luego existe una constante $M > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{u} \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\|K(u)(t)\| \leq TM_1M_2 \doteq M.$$

Esto significa que $\Im_K \subset B_C(\mathbf{0}, M)$ y en particular que para cualquier $A \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$ acotado se tiene que $K(A)$ es acotado.

2. $K(A) \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$ es equicontinuo.
Como G es uniformemente continua en $[0,T] \times [0,T]$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|(t_1,s) - (t_2,s)\| < \delta$ entonces $\|G(t_1,s) - G(t_2,s)\| < \frac{\varepsilon}{TM_1}$. Luego si $u \in A$ entonces

$$\begin{gathered}\|K(u)(t_1) - K(u)(t_2)\| \leq \\ \leq \int_0^T \|G(t_1,s) - G(t_2,s)\| \, \|f(s,\mathbf{P}(\mathbf{u}(s))) - \lambda\mathbf{P}(\mathbf{u}(s))\| \, ds < T\frac{\varepsilon}{TM_1}M_1 = \varepsilon\end{gathered} \tag{6.2.0.11}$$

de manera que $K(A)$ es equicontinuo.

De los puntos 1 y 2 se deduce que K es compacto.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el teorema de punto de fijo de Schauder.

Consideramos $A = \overline{B}_C(\mathbf{0}, M))$. Entonces A es cerrado acotado y convexo y además es claro, por la cuenta realizada en el punto 1 que

$$K(\overline{B}_C(\mathbf{0}, M)) \subset \overline{B}_C(\mathbf{0}, M).$$

Luego el teorema de Schauder asegura que existe $\mathbf{u} \in \overline{B}_C(\mathbf{0}, M) \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$ tal que

$$K(\mathbf{u})(t) = \mathbf{u}(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s, \mathbf{P}(\mathbf{u})) - \lambda \mathbf{P}(\mathbf{u})]ds. \tag{6.2.0.12}$$

La conclusión es que el problema auxiliar 6.2.0.4 tiene al menos una solución.

II. Ahora veremos que cualquier solución del problema auxiliar 6.2.0.4 satisface 6.2.0.3, es decir para cada $i = 1, 2, ..., n$ y $t \in [0,T]$ se cumple que $r_i^- \leq u_i(t) \leq r_i^+$. Escribiremos esta condición omitiendo la variable t, es decir $r_i^- \leq u_i \leq r_i^+$.

Probaremos sólo una desigualdad, por ejemplo $u_i \leq r_i^+$, la otra es análoga.

Supongamos que no, esto es que, $u_i > r_i^+$ para algún t_0. Entonces podemos considerar el máximo de la función $u_i(t) - r_i^+$ definida en $[0,T]$ y suponer que existe $t_0 \in [0,T]$ tal que $\forall t \in [0,T]: \;\; u_i(t_0) - r_i^+ \geq u_i(t) - r_i^+$ con $u_i(t_0) - r_i^+ > 0$.

Distinguimos dos casos:

1. $t_0 \in (0,T)$
2. $t_0 = 0$ o bien $t_0 = T$.

Caso 1. Siendo $\mathbf{u}$ solución del problema tenderemos que

$$\ddot{u}_i(t_0) - \lambda u_i(t_0) = f_i(t_0, \mathbf{P}(\mathbf{u}(t_0))) - \lambda P_i(\mathbf{u}(t_0)). \tag{6.2.0.13}$$

Teniendo en cuenta que $P_i(\mathbf{u}(t_0)) = r_i^+$ se obtiene la siguiente igualdad:

$$\ddot{u}_i(t_0) = f_i(t_0, \mathbf{P}(\mathbf{u}(t_0))) + \lambda[u_i(t_0) - r_i^+]. \tag{6.2.0.14}$$

Por hipótesis $\lambda[u_i(t_0) - r_i^+] > 0$ y de acuerdo a (6.2.0.6) $f_i(t_0, \mathbf{P}(\mathbf{u}(t_0))) > 0$ entonces se concluye que

$$\ddot{u}_i(t_0) > 0$$

lo cual es absurdo puesto que supusimos que en t_0 la función u_i tiene un máximo.

Caso 2. En este caso $t_0 = 0$ o bien $t_0 = T$; ahora siendo la solución T-periódica en particular se tiene que $u_i(T) = u_i(0)$ de manera que es indistinto considerar un borde o el otro. Supondremos entonces que el máximo se alcanza en $t_0 = 0$ y que $u_i(0) > r_i^+$.

Teniendo en cuenta que

$$f_i(0, \mathbf{P}(\mathbf{u}(0))) + \lambda[u_i(0) - r_i^+] > 0 \tag{6.2.0.15}$$

por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in [0, \delta) \subset [0, T]$ entonces

$$(f_i(t, \mathbf{P}(\mathbf{u}(t))) + \lambda[u_i(t) - r_i^+]) > 0.$$

Por otro lado la ecuación 6.2.0.7 dice que

$$\ddot{u}_i(t) = f_i(t, \mathbf{P}(\mathbf{u}(t))) + \lambda[u_i(t) - r_i^+] \tag{6.2.0.16}$$

para $t \in (0, T)$. Luego deducimos de inmediato que si $t \in (0, \delta)$ entonces $\ddot{u}_i(t) > 0$.

Ahora bien, el miembro derecho es continuo y positivo en $[0, \delta)$, luego existe la derivada segunda lateral derecha de u_i en 0 y además $\ddot{u}_i(0^+) > 0$. Pero esto contradice el supuesto de que en $t_0 = 0$ la función u_i tiene un máximo, pues $\dot{u}(0) = 0$ por la condición de periodicidad.

Finalmente teniendo en cuenta la observación 6.2.0.63 y que los argumentos son válidos para cualquier índice $i = 1, 2, ..., n$ se concluye que cualquier solución $\mathbf{u}$ del problema 6.2.0.4, también es solución del problema 6.2.0.2 y además satisface 6.2.0.3. El teorema de Schauder garantiza que efectivamente existe al menos una solución en esas condiciones. ■

Ahora consideramos otra condición bajo la cual un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias T-periódicas de segundo orden tiene al menos una solución.

Teorema 6.2.0.64 *Consideremos el problema periódico de segundo orden*

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{u}}(t) = f(t, \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}(T) \\ \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \dot{\boldsymbol{u}}(T) \end{cases} \tag{6.2.0.17}$$

con $T > 0$ y $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|\boldsymbol{u}\| = R$ se cumple que para todo $t \in [0, T]$

$$f(t, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} > 0. \tag{6.2.0.18}$$

Entonces dicho problema periódico tiene al menos una solución en $B_C(\mathbf{0}, R) \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Demostración. Consideraremos una familia de problemas auxiliares asociada al problema original 6.2.0.17.

Para cada $\mathbf{u} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $\lambda \in [0,1]$ $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ fijos consideremos el problema Dirichlet siguiente

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{v}}(t) = \lambda f(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{A} \quad \mathbf{u}(T) = \mathbf{B} \end{cases} \tag{6.2.0.19}$$

Fijados λ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ este problema es lineal y tiene una única solución

$$\mathbf{v}(t) = t \cdot \frac{\mathbf{B} - \mathbf{A}}{T} + \mathbf{A} + \int_0^T G(t,s)[\lambda f(s, \mathbf{u}(s))]ds$$

donde el núcleo G es la función de Green asociada al problema de Dirichlet homogéneo.

Luego podemos definir para cada $\lambda \in [0,1]$ el operador

$$T_\lambda : \ C([0,T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R}^n)$$

definido

$$T_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{v}.$$

De manera análoga a como lo hemos hecho en la demostración del teorema 6.2.0.61 se prueba que el operador T es compacto.

Ahora se ve que la existencia de solución del problema periódico original 6.2.0.17 es equivalente a la existencia de una función $\mathbf{u} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ tal que $T_1(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{u}$ bajo las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}(T) \end{cases} \tag{6.2.0.20}$$

o equivalentemente un cero de la función

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{u} - T_1((\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B})), \mathbf{A} - \mathbf{B}, \frac{dT_1(\mathbf{u}(t), \mathbf{A}, \mathbf{B})}{dt}(T) - \frac{dT_1(\mathbf{u}(t), \mathbf{A}, \mathbf{B})}{dt}(0)). \tag{6.2.0.21}$$

Ahora podemos poner en juego la teoría de Leray-Schauder para probar la existencia de un cero de F.

Consideramos la homotopía continua

$$H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow C([0,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{2n}$$

definida

$$\begin{gathered} H(\lambda, (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B})) \doteq H_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \\ = \left(\mathbf{u} - T_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}), \mathbf{A} - \mathbf{B}, \lambda \left\{ \tfrac{dT_\lambda(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B})}{dt}(T) - \tfrac{dT_\lambda(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B})}{dt}(0) \right\} + (1-\lambda)(\mathbf{A} + \mathbf{B})\right) \\ = (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) - \left(T_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}), \mathbf{B}, -\lambda \left\{ \tfrac{dT_\lambda(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B})}{dt}(T) - \tfrac{dT_\lambda(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B})}{dt}(0) \right\} - (1-\lambda)\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}\right) \\ = I(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) - K_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \end{gathered} \tag{6.2.0.22}$$

para todo $\lambda \in [0,1]$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \overline{\Omega}$ donde

$$\overline{\Omega} \doteq \overline{B}_C(\mathbf{0}, R) \times \overline{Q}$$

con

$$\overline{Q} \doteq \overline{Q}(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^{2n}$$

el cubo cerrado de centro $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ y radio R.

Es claro que $H_1 = F$ y $H_0 = (\mathbf{u} - \varphi_{\mathbf{A},\mathbf{B}}, \mathbf{A} - \mathbf{B}, \mathbf{A} + \mathbf{B})$ donde $\varphi_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(t) = t \cdot \frac{\mathbf{B}-\mathbf{A}}{T} + \mathbf{A} = t \cdot \mathbf{D} + \mathbf{A}$ es la solución lineal del problema modificado con $\lambda = 0$.

Para que el grado esté definido debemos mostrar que para cada $\lambda \in [0,1]$ se tiene $H_\lambda \in K_{I,\mathbf{0}}(\Omega)$, es decir que H_λ es una perturbación compacta de la identidad admisible para todo $\lambda \in [0,1]$. Ya hemos visto que para todo $\lambda \in [0,1]$, $H_\lambda = I - K_\lambda$. Ahora, como T_λ es compacto para cada λ también lo es K_λ. Falta probar que $\mathbf{0} \notin H_\lambda(\partial\Omega)$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Luego aplicaremos la propiedad de invariancia bajo homotopías.

En primer lugar observemos que $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \partial\Omega$ sii

$$\|\mathbf{u}\|_C = R, \quad \text{o bien} \quad \text{máx}\{\|\mathbf{A}\|\,;\|\mathbf{B}\|\} = R.$$

Para $\lambda = 0$ es claro que $H_0 = (\mathbf{u} - \varphi_{\mathbf{A},\mathbf{B}}, \mathbf{A} - \mathbf{B}, \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{u} = 0$ y $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ de manera que $\mathbf{0} \notin H_0(\partial\Omega)$.

Además si $\lambda = 1$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \partial\Omega$ con $\mathbf{0} = H_1(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ entonces no hay nada que probar.

Podemos suponer entonces que si $\lambda = 0$ o bien $\lambda = 1$ entonces $\mathbf{0} \notin H_\lambda(\partial\Omega)$. Luego bastará probar que si $\lambda \in (0,1)$ entonces $\mathbf{0} \notin H_\lambda(\partial\Omega)$.

Supongamos que $\lambda \in (0,1)$, $(\mathbf{u},\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \partial\Omega$ y que $H_\lambda(\mathbf{u},\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{0}$. Ahora teniendo en cuenta la definición del operador T_λ y de la homotopía H_λ se sabe que $\mathbf{u}$ es solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \lambda f(t,\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{A} \quad \mathbf{u}(T) = \mathbf{B} \end{array} \right. \tag{6.2.0.23}$$

Teniendo en cuenta que $(\mathbf{u},\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \partial\Omega$ consideramos dos casos:

1. Existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $\|\mathbf{u}(t_0)\| = R$. Definimos $\psi(t) = \|\mathbf{u}(t)\|^2$, de forma tal que ψ tiene un máximo en t_0. Entonces derivando dos veces obtenemos

$$\begin{array}{c} \frac{d\psi}{dt} = 2\mathbf{u}(t)\cdot\dot{\mathbf{u}}(t) \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} = 2(\|\dot{\mathbf{u}}(t)\| + \mathbf{u}(t)\cdot\ddot{\mathbf{u}}(t)) = \\ 2(\|\dot{\mathbf{u}}(t)\| + \mathbf{u}(t)\cdot\lambda f(t,\mathbf{u}(t))). \end{array} \tag{6.2.0.24}$$

   Luego evaluando en t_0 obtenemos de acuerdo a la hipótesis 6.2.0.18 que

$$\psi''(t_0) = 2(\|\dot{\mathbf{u}}(t_0)\| + \mathbf{u}(t_0)\cdot\lambda f(t_0,\mathbf{u}(t_0))) \geq 2(\mathbf{u}(t_0)\cdot\lambda f(t_0,\mathbf{u}(t_0))) > 0 \tag{6.2.0.25}$$

   lo cual contradice que ψ tenga un máximo en t_0.

2. Supongamos que $\|\mathbf{u}\|_C < R$ en $(0;T)$. Si $H_\lambda(\mathbf{u},\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(T) = \mathbf{B}$ y $\lambda(\dot{\mathbf{u}}(T) - \dot{\mathbf{u}}(0)) + (1-\lambda)(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 0$. Además $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}\| = R$ y tomando producto interno de ambos miembros contra $\mathbf{A}$ se obtiene $\lambda(\dot{\mathbf{u}}(T)\cdot\mathbf{u}(T) - \dot{\mathbf{u}}(0)\cdot\mathbf{u}(0)) + 2(1-\lambda)R^2 = 0$. Por ser ψ convexa se tiene que $\psi'(T) \geq 0 \geq \psi'(0)$ es decir $\dot{\mathbf{u}}(T)\cdot\mathbf{u}(T) \geq 0 \geq \dot{\mathbf{u}}(0)\cdot\mathbf{u}(0)$. Luego como $\dot{\mathbf{u}}(T)\cdot\mathbf{u}(T) - \dot{\mathbf{u}}(0)\cdot\mathbf{u}(0) \geq 0$ y $R > 0$ para todo $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $\lambda(\dot{\mathbf{u}}(T)\cdot\mathbf{u}(T) - \dot{\mathbf{u}}(0)\cdot\mathbf{u}(0)) + 2(1-\lambda)R^2 \neq 0$.

En definitiva se probó que para todo $\lambda \in [0,1]$ se tiene que $\mathbf{0} \notin H_\lambda(\partial\Omega)$ de manera que el grado esta definido a lo largo de la deformación definida por H_λ.

Ahora para finalizar la demostración observamos que por la invariancia bajo homotopías compactas

$$\mathtt{d}(H_0,\Omega,\mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_1,\Omega,\mathbf{0})$$

o bien

$$d(G,\Omega,\mathbf{0}) = d(F,\Omega,\mathbf{0})$$

donde

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B}) &= H_0(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B}) = \\ &= (\mathbf{u}(t)-\varphi_{\mathbf{A},\mathbf{B}},\mathbf{A}-\mathbf{B},\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \\ &= (\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B})-(\varphi_{\mathbf{A},\mathbf{B}},\mathbf{B},-\mathbf{A}) = \\ &= I(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B})-\widehat{K}(\mathbf{u}(t),\mathbf{A},\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{6.2.0.26}$$

Ahora observamos que $\widehat{K}$ es de rango finito. Si identificamos $V = \{t\cdot \mathbf{D}+\mathbf{A} :\ \mathbf{D},\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{2n}\} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ entonces $G|_{V\times\mathbb{R}^{2n}} \simeq \mathbb{R}^{4n}$ de manera que se trata en verdad del grado de Brouwer. Luego siendo G inversible se tiene $\mathtt{d}(G,\Omega,\mathbf{0}) = \pm 1$ y por la propiedad de solución se concluye que existe un cero de F. ■

6.3. La teoría del grado topológico y su relación con las sub y supersoluciones.

En esta sección presentamos el método de super y subsoluciones para probar existencia de soluciones de un problema T-periódico de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado. El valor del período podemos fijarlo en $T = 2\pi$ que surge habitualmente en el contexo del movimiento armónico. En particular se destacan los teoremas 6.3.1.2, 6.3.2.8 y 6.3.2.9.

6.3.1. Teorema de existencia de soluciones 2π periódicas de clase C^2.

Consideremos, en primer lugar el siguiente problema 2π-periódico:

$$\begin{cases} \ddot{u}+f(t,u)=0 \\ u(0)=u(2\pi),\ \dot{u}(0)=\dot{u}(2\pi) \end{cases} \tag{6.3.1.1}$$

con f continua.

Para establecer el teorema de existencia necesitamos precisar las nociones básicas de sub y supersoluciones.

Definición 6.3.1.1 *Se dice que $\alpha\in C^2((0,2\pi))\cap C^1([0,2\pi])$ es una* ***subsolución*** *del problema periódico 6.3.1.1 si*

1. $\forall t\in(0,2\pi),\ \ddot{\alpha}(t)+f(t,2\pi)\geq 0$

2. $\alpha(0) = \alpha(2\pi),\ \dot{\alpha}(0) \geq \dot{\alpha}(2\pi)$.

*Se dice que $\beta \in C^2((0, 2\pi)) \cap C^1([0, 2\pi])$ es una **supersolución** del problema 6.3.1.1 si*

1. $\forall t \in (0, 2\pi),\ \ddot{\beta}(t) + f(t, 2\pi) \leq 0$.

2. $\beta(0) = \beta(2\pi),\ \dot{\beta}(0) \leq \dot{\beta}(2\pi)$.

El resultado fundamental que expondremos a continuación es una suerte de toerema del valor intermedio: si existe una subsolución del problema 6.3.1.1 menor que una supersolución entonces existe una solución del mismo problema acotada inferiormente por la subsolución y superiormente por la supersolución. Como lo hemos observado anteriormente la estrategia para la demostración es parecida a la implementada en la sección anterior.

Teorema 6.3.1.2 *Sean α y β una sub y supersolución de 6.3.1.1 respectivamente tal que $\alpha \leq \beta$. Sea*

$$E \doteq \{(t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} :\ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)\}$$

y f continua en E. Entonces el problema 6.3.1.1 tiene al menos una solución $u \in C^2[0, 2\pi]$ tal que $\forall t \in (0, 2\pi),\ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$.

Demostración. Consideramos el problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{u} - u + f(t, \gamma(t, u)) + \gamma(t, u) = 0 \\ u(0) = u(2\pi),\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{array} \right. \tag{6.3.1.2}$$

donde $\gamma :\ [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida como en (6.2.0.5) de la siguiente manera:

$$\gamma(t, u) \doteq \left\{ \begin{array}{c} \alpha(t)\ \texttt{ si }\ u \leq \alpha(t) \\ u\ \texttt{si}\ \alpha(t) \leq \beta \\ \beta(t)\ \texttt{ si }\ u \geq \beta(t) \end{array} \right. \tag{6.3.1.3}$$

Primero probaremos que toda solución u del problema 6.3.1.2 está acotada, más precisamente $\forall t \in (0, 2\pi),\ \ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$. En segunda instancia consideraremos la representación integral de una solución u del problema auxiliar y definiremos a partir de allí un operador compacto. Veremos que dicho operador está en las condiciones del teorema de Schauder y por lo tanto tiene un punto fijo que resulta ser la solución de nuestro problema.

1. $\forall t \in (0, 2\pi):\ \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)$.

Supongamos que existe algún $t_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $\min_{t\in[0,2\pi]}\{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0$.

Si $t_0 \in (0, 2\pi)$ entonces teniendo en cuenta la definición de γ, 6.3.1.3, que t_0 es un mínimo de $u(t) - \alpha(t)$ y que α es una subsolución obtenemos la siguiente contradicción:

$$\begin{aligned} 0 &\le \ddot{u}(t_0) - \ddot{\alpha}(t_0) \\ &= u(t_0) - f(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha(t_0) - \ddot{\alpha}(t_0) \\ &= u(t_0) - \alpha(t_0) - [f(t_0, \alpha(t_0)) + \ddot{\alpha}(t_0)] < 0. \end{aligned} \tag{6.3.1.4}$$

Si el mínimo se alcanza en los puntos del borde, teniendo en cuenta que $u(0) = u(2\pi)$ y $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ entonces obtenemos

$$\min_{t\in[0,2\pi]} u(t) - \alpha(t) = u(0) - \alpha(0) = u(2\pi) - \alpha(2\pi) < 0.$$

Luego debe ocurrir que

$$\dot{u}(0) - \dot{\alpha}(0) \ge 0 \ge \dot{u}(2\pi) - \dot{\alpha}(2\pi).$$

Por otro lado siendo α subsolución $\dot{u}(0) - \dot{\alpha}(0) \le \dot{u}(2\pi) - \dot{\alpha}(2\pi)$ de manera que en definitiva $\dot{u}(0) - \dot{\alpha}(0) = 0$. Ahora teniendo en cuenta que $[u(s) - \alpha(s) - f(s, \alpha(s)) - \ddot{\alpha}(s)] < 0$ para $0 < s < t$ con t próximo a 0 si integramos obtenemos

$$\begin{gathered} \dot{u}(t) - \dot{\alpha}(t) = \textstyle\int_0^t [\ddot{u}(s) - \ddot{\alpha}(s)]ds = \\ \textstyle\int_0^t [u(s) - \alpha(s) - f(s, \alpha(s)) - \ddot{\alpha}(s)]ds < 0 \end{gathered} \tag{6.3.1.5}$$

lo cual contradice que $\dot{u}(0) - \dot{\alpha}(0) = 0$.

Con esto probamos que $\forall t \in (0, 2\pi),\ \ \alpha(t) \le u(t)$. De manera análoga se prueba la otra desigualdad $\forall t \in (0, 2\pi),\ \beta(t) \ge u(t)$.

2. Existencia de una solución del problema 6.3.1.2

Ahora integrando la ecuación del problema auxiliar podemos escribir

$$u(t) = \int_0^{2\pi} G(t, s)[f(s, \gamma(s, u(s))) + \gamma(s, u(s))]ds \tag{6.3.1.6}$$

con G la función de Green correspondiente al problema

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{u} - u + f(t) = 0 \\ u(0) = u(2\pi), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{array} \right. \tag{6.3.1.7}$$

Consideramos el operador

$$T : C([0, 2\pi]) \longrightarrow C([0, 2\pi])$$

definido

$$(Tu)(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u(s))]ds. \qquad (6.3.1.8)$$

Sabemos que T es compacto y por el teorema de Schauder tiene un punto fijo que es solución del problema auxiliar 6.3.1.2 y por 1 solución de 6.3.1.1, $\blacksquare$.

Observación 6.3.1.3 El teorema 6.3.1.2 no sólo da información sobre existencia sino que permite tener cierta estimación. Para ilustrar esto consideremos el siguiente problema periódico:

Ejemplo 6.3.1.4

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \ddot{u} - u^3 + sen^3(t) = 0 \\ u(0) = u(2\pi),\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{cases} \qquad (6.3.1.9)$$

con $\varepsilon > 0$ un parámetro pequeño.

Se verifica que $\alpha(t) = sen(t) - 2\varepsilon$ y $\beta(t) = sen(t) + 2\varepsilon$ son sub y supersoluciones del problema respectivamente. Entonces según el teorema existe una solución u tal que

$$u(t) = sen(t) + O(\varepsilon). \ \blacksquare$$

Ejemplo 6.3.1.5

$$\begin{cases} \ddot{u} + sen(t) = h(t) \\ u(0) = u(2\pi),\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{cases} \qquad (6.3.1.10)$$

con $h \in C[0, 2\pi]$ tal que $\|h\|_\infty \leq 1$.

Consideramos la subsolución $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y la supersolución $\beta = \frac{3\pi}{2}$. Entonces, de acuerdo al teorema 6.3.1.2, existe una solución u tal que

$$\frac{\pi}{2} \leq u(t) \leq \frac{3\pi}{2}. \ \blacksquare$$

También señalamos que el teorema no vale si $\alpha > \beta$. Para esto consideramos el siguiente problema:

Ejemplo 6.3.1.6

$$\begin{cases} \ddot{u} + u = sen(t) \\ u(0) = u(2\pi), \ \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{cases} \tag{6.3.1.11}$$

Es fácil ver que este problema no tiene solución y sin embargo $\alpha = 1$ y $\beta(t) = -1$ son sub y supersoluciones respectivamente. ∎

El teorema anterior se puede demostrar a través de la teoría de grado, de manera análoga a como lo hemos hecho anteriormente. El esquema sigue los pasos de la demostración del teorema 6.2.0.61: Para $\alpha < \beta$ consideremos la homotopía

$$H : [0, 2\pi] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$$

definida

$$\begin{array}{c} H(\lambda, u) = \ddot{u} + \lambda \cdot f(t, u) - (1 - \lambda) \left\{ k^2 (u - \frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}) + \frac{\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}(t)}{2} \right\} \\ u(0) - u(2\pi) = 0; \ \dot{u}(0) - \dot{u}(2\pi) = 0 \end{array} \tag{6.3.1.12}$$

para k suficientemente grande con $\Omega \doteq \{u \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \alpha < u < \beta\}$.

Ahora se verifica que el grado está definido usanto las condiciones de que α y β son sub y supersoluciones con u en las condiciones que definen a Ω. Como $\mathtt{d}(H_1, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(H_0, \Omega, \mathbf{0}) \neq 0$ se concluye que $H_1(u)$ tiene un cero, de forma tal que el problema 6.3.1.1 tiene al menos una solución.

6.3.2. Teorema de existencia de soluciones 2π periódicas de clase $W^{2,1}$

Se puede plantear el mismo problema en un contexto más débil; para eso damos las siguientes definiciones previas:

Definición 6.3.2.1 *Una función $f : E \subset [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice de* ***`Caratheodory sobre`*** *E si*

1. *$f(t, \cdot)$ es continua para casi todo $t \in [a, b]$.*

2. *$f(\cdot, u)$ es medible para todo $u \in E$.*

y L^p ***`Caratheodory`****, con $p \geq 1$ si f es Caratheodory y además para todo $\varepsilon > 0$ existe $h_\varepsilon \in L^p(a, b)$ tal que $|f(t, u)| \leq h_\varepsilon(t)$ para todo $u \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ y casi todo $t \in [a, b]$.*

Como siempre $C^k(I) \doteq C^k(I,\mathbb{R})$; además en esta sección utilizamos las siguientes notaciones: $C_0^k(I,J) = \{u \in C^k(I,J)/I = [a,b]\ u(a) = u(b) = 0\}$ y $C_{2\pi} = \{u \in C(\mathbb{R})/u(t) = u(t+2\pi)\}$ es decir las funciones de clase C^k que se anulan en el borde y las continuas de período 2π respectivamente. Asimismo denotamos $W^{k,p}(I) = \{u \in C^{k-1}(I)/u^{(k)} \in L^p(I)\}$ y $H^k(I) = W^{k,2}(I)$. Finalmente se debe tener presente la definición de las cuatro derivadas de Dini $D_{-}\alpha(t_0),\ D^{+}\alpha(t_0),\ D_{-}\alpha(t_0),\ D^{+}\alpha(t_0)$.

Ahora consideremos el problema

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{u} + f(t,u) = 0 \\ u(0) = u(2\pi), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{array} \right. \tag{6.3.2.1}$$

con f una función de Caratheodory, de período 2π extendida por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. En este contexto definimos sub y supersoluciones débiles:

Definición 6.3.2.2 *Se dice que una función $\alpha \in C_{2\pi}$ es una $W^{2,1}$-subsolución del problema 6.3.2.1 si*

i *$D_{-}\alpha(t_0) < D^{+}\alpha(t_0)$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ o bien*

i' *Para cada t_0 existe un intervalo I_{t_0} con $t_0 \in I_{t_0}$ tal que $\alpha \in W^{2,1}(I_{t_0})$ y además para casi todo $t \in I_{t_0}$ se tiene que $\ddot{\alpha}(t) + f(t,\alpha(t)) \geq 0$*

Análogamente se define:

Definición 6.3.2.3 *Se dice que una función $\beta \in C_{2\pi}$ es una $W^{2,1}$-supersolución del problema 6.3.2.1 si*

i *$D_{-}\beta(t_0) > D^{+}\beta(t_0)$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ o bien*

i' *Para cada t_0 existe un intervalo I_{t_0} con $t_0 \in I_{t_0}$ tal que $\beta \in W^{2,1}(I_{t_0})$ y además para casi todo $t \in I_{t_0}$ se tiene que $\ddot{\beta}(t) + f(t,\alpha(t)) \leq 0$*

Se puede dar una versión más débil de la proposición de existencia de soluciones del problema 2π-periódico, 6.3.1.2, en el contexto de las $W^{2,1}$-sub y supersoluciones. La demostración es análoga salvo con respecto al hecho de que $u - \alpha$ alcanza su mínimo en $(0,2\pi)$ o en algún borde.

Teorema 6.3.2.4 *Sean α y β $W^{2,1}$-una sub y supersolución de 6.3.2.1 respectivamente tal que $\alpha \leq \beta$. Definimos*

$$E \doteq \{(t,u) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R} :\ \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)\}$$

y $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ L^1-Caratheodory. Entonces el problema 6.3.2.1 tiene al menos una solución $u \in W^{2,1}(0,2\pi)$ tal que $\forall t \in [0,2\pi]$, $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$.

Demostración. Procedemos de manera análoga demostrando que el problema modificado tiene al menos una solución.

Ahora veremos que dicha solución satisface $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$.

Nuevamente consideremos sólo una de las desigualdades. Supongamos lo contrario, esto es que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $min_t\{u(t)-\alpha(t)\} = u(t_0)-\alpha(t_0) < 0$. Entonces esto implica que $\dot{u}(t_0)-D_{-}\alpha(t_0) \leq \dot{u}(t_0)-D^{+}\alpha(t_0)$ de manera que $D_{-}\alpha(t_0) \geq D^{+}\alpha(t_0)$. Ahora por la definición de $W^{2,1}(0,2\pi)$ también vale que $D_{-}\alpha(t_0) \leq D^{+}\alpha(t_0)$ y de ahí que existe $\dot{u}(t_0)$ y por lo tanto $\dot{u}(t_0) - \dot{\alpha}(t_0) = 0$

Por otro, también por definición, existe un intervalo I_{t_0} tal que $t_0 \in I_{t_0}$ con $\alpha \in W^{2,1}(I_{t_0})$ tal que para casi todo $t \in I_{t_0}$ se tiene que $\ddot{\alpha}(t) + f(t,\alpha(t)) \geq 0$. Luego integrando sobre $t \geq t_0$ obtenemos

$$\begin{array}{c} \dot{u}(t) - \dot{\alpha}(t_0) = \int_{t_0}^{t}(\ddot{u}(s) - \ddot{\alpha}(s))ds \\ \leq \int_{t_0}^{t}(-f(s,\alpha(s)) + u(s) - \alpha(s) - \ddot{\alpha}(s))ds = \\ = \int_{t_0}^{t}(u(s) - \alpha(s) - [\ddot{\alpha}(s) + f(s,\alpha(s))])ds < 0 \end{array} \tag{6.3.2.2}$$

lo cual implica que $u-\alpha$ decrece a derecha de t_0; pero es absurdo puesto que en t_0 tiene un mínimo. ■

A los efectos de poder utilizar la teoría de grado necesitamos garantizar que las sub y supersoluciones no sean tangentes a las soluciones del problema original. Esto se consigue para el caso de soluciones C^2 a través de la siguiente proposición:

Proposición 6.3.2.5 *Sea f continua y $\alpha \in C^2[0,2\pi]$ tal que*

i *$\ddot{\alpha}(t) + f(t,\alpha(t)) > 0$ para todo $t \in [0,2\pi]$.*

ii *$\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ y $\dot{\alpha}(0) \geq \dot{\alpha}(2\pi)$.*

Si $u \in C^2([0,2\pi])$ es una solución del problema original con $u \geq \alpha$ sobre $[0,2\pi]$ entonces se cumple una condición más exigente: todo $t \in [0,2\pi]$ $u(t) > \alpha(t)$.

Demostración. Supongamos que no, esto es que existe t_0 tal que $min_t\{u(t)-\alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) = 0$. Luego se tiene que $\dot{u}(t_0) - \dot{\alpha}(t_0) = 0$ Ahora por ser un mínimo en cualquier caso se llega a un absurdo pues en tal caso $0 \leq \ddot{u}(t_0) - \ddot{\alpha}(t_0) = -f(t_0,\alpha(t_0)) - \ddot{\alpha}(t_0) < 0$ ■

Es claro que una propiedad análoga vale para β C^2- supersolución. Pero la propiedad puede no ser cierta si f es L^1-Caratheodory en vez de continua. Para garantizar la condición de no tangencia definimos las sub y supersoluciones estrictamente débiles.

Definición 6.3.2.6 *Se dice que una función $\alpha \in C_2\pi$ es una $W^{2,1}$*-***subsolución estricta*** *del problema débil 6.3.2.1 si no es una solcuión sobre $[0, 2\pi]$ y además*

i $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$ *o bien*

i' *Para cada t_0 existe un intervalo I_{t_0} con $t_0 \in I_{t_0}$ y ε_0 tal que $\alpha \in W^{2,1}(I_{t_0})$ y además para todo u tal que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \alpha(t) + \varepsilon_0$ $t \in I_{t_0}$ se tiene que $\ddot{\alpha}(t) + f(t, u(t)) \geq 0$*

También es claro como definir una supersolución estrictamente débil. Ahora probaremos que efectivamente con esta definición se tiene una propiedad completamente análoga a la dada antes para funciones f continua 6.3.2.5.

Proposición 6.3.2.7 *Sea f L^1-Caratheodory y $\alpha \in C_{2\pi}$ una $W^{2,1}$-subsolución estricta. Entonces si $u \in W^{2,1}((0, 2\pi))$ es una solución del problema débil 6.3.2.1 con $u \geq \alpha$ sobre $[0, 2\pi]$ entonces se cumple una condición más exigente: todo $t \in [0, 2\pi]$ $u(t) > \alpha(t)$.*

Demostración. Siendo que α no es solución entonces existe un punto t^* tal que $\alpha(t^*) \neq u(t^*)$. Ahora supongamos que no se cumple la tesis, entonces existe $t_0 = \inf\{t > t^*/u(t) = \alpha(t)\}$ y como en t_0 la función $u - \alpha$ tiene un mínimo entonces se tiene que $D_-\alpha(t_0) \geq D^+\alpha(t_0)$.

Entonces por la definición de subsolución $W^{2,1}$-estricta existe un entorno I_{t_0}, ε_0 y un punto $t_1 < t_0$ con $t_1 \in I_{t_0}$ y $(\dot{u}(t_1) - \dot{\alpha}(t_1)) < 0$ tal que para todo $t \in (t_1, t_0)$ se tiene que $u(t) \leq \alpha(t) + \varepsilon_0$ y además para casi todo $t \in (t_1, t_0)$ vale $\ddot{\alpha}(t) + f(t, u(t)) \geq 0$.

Ahora se concluye que

$$\begin{aligned} &0 < (\dot{u} - \dot{\alpha})(t_0) - (\dot{u} - \dot{\alpha})(t_1) = \\ &-\int_{t_0}^{t}(f(t, u(t)) + \ddot{\alpha}(t))ds \leq 0 \blacksquare \end{aligned} \tag{6.3.2.3}$$

Ahora podemos probar, a través de la teoría de grado, la versión del teorema 6.3.1.2 para el problema débil 6.3.2.1, observamndo que se obtiene una acotación más precisa.

Teorema 6.3.2.8 *Sean α y β $W^{2,1}$ estrictas sub y supersolución de 6.3.2.1 respectivamente tal que $\alpha < \beta$ en $[0, 2\pi]$ Definimos*

$$E \doteq \{(t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : \ \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)\}$$

y $f : \ E \longrightarrow \mathbb{R}$ L^1-Caratheodory. Entonces el problema 6.3.2.1 tiene al menos una solución $u \in W^{2,1}(0, 2\pi)$ tal que $\forall t \in [0, 2\pi], \ \alpha(t) < u(t) < \beta(t)$.

Demostración. Probaremos que

$$\mathtt{d}(I - T, \Omega, \Omega, \mathbf{0}) = 1$$

donde

$$\Omega = \{u \in C([0, 2], \mathbb{R}) : \ \alpha(t) < u(t) < \beta(t)\}$$

y $T : C([0, 2\pi]) \to C([0, 2\pi])$ es el operador integral definido

$$T(u)(t) \doteq \int_0^{2\pi} G(t, s)[f(s, u(s)) + u(s)]ds$$

con G el núcleo de Green del problema de referencia. Es claro que si probamos que $I - T$ tiene un cero en Ω, habremos probado que T tiene un punto fijo en Ω y con esto la tesis.

Para ello consideramos el operador integral $\widehat{T} : C([0, 2\pi]) \to C([0, 2\pi])$ definido

$$\widehat{T}(u)(t) \doteq \int_0^{2\pi} G(t, s)[f(s, \gamma(s, u(s))) + \gamma(s, u(s))]ds$$

con G el mismo núcleo de Green que define al operador T y γ la función truncamiento inducida por α y β.

Observamos que $\Im_{\widehat{T}} \subset B(\mathbf{0}, R)$ para $R > 0$ suficientemente grande y todo $\lambda \in [0, 1]$. Luego concluimos que

$$\begin{aligned} \mathtt{d}(I - \widehat{T}, B(\mathbf{0}, R), \mathbf{0}) = \mathtt{d}(I - \lambda\widehat{T}, B(\mathbf{0}, R), \mathbf{0}) = \\ \mathtt{d}(I, B(\mathbf{0}, R), \mathbf{0}) = 1 \end{aligned} \tag{6.3.2.4}$$

De los resultados anteriores se sigue que cada solución u del problema de referencia satisface $\alpha(t) < u(t) < \beta(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ lo que prueba que la solución está en Ω. Ahora como T y $\widehat{T}$ coinciden sobre $\overline{\Omega}$ entonces teniendo en cuenta la propiedad de escisión se concluye

$$\begin{gathered} \mathtt{d}(I-T,\Omega,\mathbf{0}) = \mathtt{d}(I-\widehat{T},\Omega,\mathbf{0}) \\ \mathtt{d}(I-\widehat{T},B(\mathbf{0},R),\mathbf{0}) = 1. \blacksquare \end{gathered} \tag{6.3.2.5}$$

Para finalizar probaremos un teorema de existencia referido a ecuaciones del tipo péndulo forzado considerado en 6.3.1.10; la técnica en la que se basa su demostración justifica el nombre que recibe esta clase de resultados "teorema de las tres soluciones."

Teorema 6.3.2.9 *Teorema de las tres soluciones*
Si $h \in C([0,2\pi])$ tal que $\|h\|_\infty < 1$ entonces el problema 2π-periódico

$$\begin{cases} \ddot{u} + sen(u) = h(t) \\ u(0) = u(2\pi),\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{cases} \tag{6.3.2.6}$$

tiene al menos dos soluciones, u y $\overline{u}$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}$ existe $t \in [0,2\pi]$ con $u(t) \neq \overline{u}(t) + 2k\pi$

Demostración. En primer lugar podemos observar que

$$\alpha_1(t) = \frac{\pi}{2} \ \text{ y } \alpha_2(t) = \frac{\pi}{2} + 2\pi \tag{6.3.2.7}$$

son subsoluciones $W^{2,1}$- estrictas y que

$$\beta_1(t) = \tfrac{3\pi}{2} \ \text{ y } \beta_2(t) = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi \tag{6.3.2.8}$$

son supersoluciones $W^{2,1}$- estrictas del problema.

Ahora intercalamos las sub y supersoluciones y consideramos los siguientes conjuntos:

$$\begin{gathered} \Omega_1 \doteq \{u \in C[0,2\pi] :\ \forall \in [0,2\pi],\ \alpha_1(t) < u(t) < \beta_1(t)\} \\ \Omega_2 \doteq \{u \in C[0,2\pi] :\ \forall \in [0,2\pi],\ \alpha_2(t) < u(t) < \beta_2(t)\} \\ \Omega \doteq \{u \in C[0,2\pi] :\ \forall \in [0,2\pi],\ \alpha_1(t) < u(t) < \beta_2(t)\} \text{ y} \\ \Omega_3 \doteq \Omega - \textstyle\bigcup_{i=1}^2 \overline{\Omega}_i \end{gathered} \tag{6.3.2.9}$$

De acuerdo a lo demostrado en el teorema 6.3.2.8 vemos que

$$\mathtt{d}(I-T,\Omega_1,\mathbf{0}) = \mathtt{d}(I-T,\Omega_2,\mathbf{0}) = 1$$

de manera que existen dos soluciones u_1 y u_2 tal que $u_1 \in \Omega_1$ y $u_2 \in \Omega_2$. Además teniendo en cuenta la aditividad del grado y que

$$\mathtt{d}(I - T, \Omega, \mathbf{0}) = 1$$

se tiene:

$$1 = \mathtt{d}(I - T, \Omega, \mathbf{0}) = \mathtt{d}(I - T, \Omega_1, \mathbf{0}) + \mathtt{d}(I - T, \Omega_2, \mathbf{0}) + \mathtt{d}(I - T, \Omega_3, \mathbf{0}) = 2 + \mathtt{d}(I - T, \Omega_3, \mathbf{0}). \tag{6.3.2.10}$$

En consecuencia $\mathtt{d}(I-T, \Omega_3, \mathbf{0}) = -1$ y por la propiedad de solución del grado se garantiza la existencia de una `tercera solución:` $u_3 \in \Omega_3$.

Finalmente observamos que la tercera solución no puede ser igual a u_1 módulo 2π y por lo tanto concluimos que existen dos soluciones, $u = u_1$ y $\overline{u} = u_3$, que satisfacen la propiedad de la tesis. ■

Capítulo 7

Bibliografía.

1. **Alhlfors, L. V.** Análisis de Variable Compleja. Ed. Aguilar (1966).

2. **Alexandroff, P. and H. Hopf.** Topologie. Springer-Verlang. New York. (1935).

3. **Amann, H.** Ordinary Differential Equations. An Introdution to Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter Berlin. New York (1990).

4. **Amann, H. and Weiss.** On the uniqueness of the topological degree. Math. Mech. 15 877-898. (1973).

5. **Andrzej, Grana.** Introduction to Topological of Functional Spaces. Springer. (1961).

6. **Boothby, W. M.** An Introduction to differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press. New York. (1975).

7. **Brouwer, L. E. J.** Beweis der Invarianz der Dimensionzahl. Math, Ann. 70, 151-165. (1911).

8. **Brown, R. F.** A Topological Introduction to Nonlinear Analysis. Birkhaüser. Boston - Basel - Berlin. (1993).

9. **Cartan, H.** Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables. Ed. Dover. New York. (1995).

10. **Cronin, J.** Fixed Point and Topological degree in Nonlinear Analysis. Mathematical Survey. Number 11 American Mathematical Society. 190. providence, Rhode Island. (1964).

11. **De Coster, C. and Habets, P.** Upper and Lower Solution in the Theory of ODE Boundary Value Problems: Classical and Recent Results.

12. **De Coster, C. and Habets, P.** An Overview of the Method of Lower Upper Solutions for ODE's.

13. **Deimling K.** Nonlinear functional analysis. Springer-Verlang. New York. 1980

14. **Fulton, W.** Algebraic Topology. Springer 1991. Chicago. (1997).

15. **Heinz, E.** An elementary analytic theory of degree of mapping in n-dimensional space. J. Math. and Mech. 8, 231-47. (1959).

16. **Kronecker, L.** Uber die Charakteristik von Funktionen Systemen. Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akadenie der Wissenschaften 145-152 (1878).

17. **Lang, S.** Complex Analysis. Ed. Springer. New York. (1993).

18. **Leray, L. and Schauder, J.** Topologie et equations fonctionnelles. Ann. Ècole Norm. 51 45-78 (1934).

19. **Lima E. L.** Introduçao à Topologia Diferencial. Brasil. Rio de Janeiro. Publicaçoes matemàticas. Impa (2005).

20. **Lloyd, N. G.** Degree Theory. Cambridge University. Press, Cambridge (1978).

21 **Milnor, J. W.** Topology From the Differentiable viewpoint. The University Press of Virginia Charlorresville. (1965).

22. **Nagumo, M.** A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis. Amer. J. Math. 73 485-496 (1951).

23. **Nagumo, M.** Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. 73 497-511 (1951).

24. **Pontyagrin, L. S.** Ordinary differential equation. Ed. Edison-Wesley (1962).

25. **Rothe, E. H.** Introduction to Various Aspects of Degree theory in Banach Spaces. American Mathematical Society. Number 23. providence, Rhode Island. (1984).

26. **Siegberg, H. W.** Brouwer degree; history and numerical computation. (Sympos, Fixes point algorithms and complementarity problem. Univ. of Shouthampton, North-Holland 389-411 (1980).

27. **Sotomayor, J.** Liçoes de equaçoes diferenciais ordinárias. Impa. Brasil (1979).

28. **(1) Spivak, M.** Cálculo en Variedades. Ed Reverté (1979).

29. **(2) Spivak, M.** A comprehensive Introduction to diferential Geometry. Vol 1. Publish or Perish Inc. Berkeley. (1979).

30. **Taylor, M. E.** Partial Differential Equation. Basic Theory. Springer New York (1996).

31. **Yosida Kôsaku.** Lectures on differential and integral equations. Interscience Publishers New York - London (1960).