UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Métodos topológicos para algunas ecuaciones diferenciales funcionales resonantes no lineales.

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas.

Alberto Fernando Déboli.

Director de tesis: Dr. Pablo Amster.
Consejero de estudios: Dr. Pablo Amster.

Buenos Aires, 10 de diciembre de 2014.

Métodos topológicos para algunas ecuaciones diferenciales funcionales resonantes no lineales.

Resumen

En esta tesis se estudia la existencia de soluciones de dos ecuaciones diferenciales funcionales resonantes no lineales. Por un lado, se estudia existencia de al menos una solución de un problema de segundo orden con condiciones de Neumann bajo diferentes condiciones impuestas a la no linealidad, con la particularidad de que ésta depende de los valores de la solución desconocida en el borde del dominio. Más precisamente, se prueba la existencia de al menos una solución adaptando a este tipo de problemas las condiciones clásicas de Landesman-Lazer para el caso escalar y para el caso de un sistema, la condición de Nirenberg. Por otro lado, se estudia un problema de primer orden con una no linealidad que depende de varios retardos variables. Más precisamente, se prueba un resultado de existencia de al menos una solución periódica positiva para el caso escalar y para un sistema, y un resultado de estabilidad generalizando los obtenidos por otros autores. En todos los problemas estudiados, las no linealidades están condicionadas en sus argumentos y se trata de problemas resonantes en el sentido de que el operador lineal de diferenciación involucrado tiene núcleo no trivial. El principal método que se implementa, en cada caso, para probar existencia de solución se basa en la teoría del grado de coincidencia de Mawhin, el cual es una generalización del grado topológico de Leray Schauder. No obstante, existen problemas resonantes en los que el grado de coincidencia no se aplica; el problema de segundo orden bajo condiciones de Neumann en un dominio no acotado es un caso particular de ese tipo y se aborda recurriendo al método de las sub y super soluciones ordenadas combinado con un argumento del tipo diagonal.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales funcionales resonantes no lineales, problemas de contorno, grado de coincidencia, método de sub y super soluciones ordenadas, método diagonal de Cantor, condiciones de tipo Landesman-Lazer, Condición de Nirenberg, ecuaciones diferenciales con retardo, soluciones periódicas positivas, atractor global.

Topological methods for some resonant nonlinear functional differential equations.

Abstract

In this work, we study the existence of solutions of two nonlinear resonant ordinary functional differential equations. In the first place, we consider an abstract second order problem under Neumann boundary conditions arising on an electro-diffusion model. This problem has the particularity that the nonlinear term depends on the Dirichlet values of the yet-to-be-determined solution. We shall prove the existence of solutions by adapting the classical Landesman-Lazer conditions for the scalar case, and a condition by Nirenberg for a system of equations. In the second place, we study a first order Nicholson type equation with several delays. We shall prove the existence of a positive periodic solution both for the scalar equation and for a system. Also, we shall prove an stability result. In both cases, the nonlinear term is a functional operator and the problems are resonant in the sense that the associated linear operators have nontrivial kernel. Our main tool for proving existence of solutions shall be Mawhin's coincidence degree, which is a generalization of Leray-Schauder degree. There are, however, some cases in which this theory cannot be applied: for example, the case of a boundary value problem on the half-line, for which we adapt the method of upper and lower solutions combined with a diagonal argument.

Keywords: nonlinear functional differential equations, boundary value problems, coincidence degree, upper and lower solutions, Cantor's diagonal method, Landesman-Lazer conditions, Nirenberg conditions, delay differential equations, positive periodic solutions, global attractor.

Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer a mi consejero, director de estudios y amigo Pablo Amster, por su justa intervención en los momentos en los que la cosa no estaba clara; a todos mis profesores que, mediante el ejemplo, me enseñaron a ubicar bien la lámpara, a ver la luna y no al dedo que la señala; en especial a Diego Rial, Pablo De Nápoli y Julián Fernández Bonder.
A la institución pública, a la que debo toda mi formación; al CONICET, a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires y en particular al Departamento de Matemática que me dio un lugar y los medios para mi desarrollo.
A todos mis compañeros de estudio; a los organizadores y participantes del seminario de "Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico" y en particular a mis amigos del grupo de estudio "Análisis No Lineal": Manuel Maurette, Julián Haddad, Paula Kuna y Rocío Balderrama.
Finalmente quiero agradecer a mi familia, a mi madre, mi hermana y en especial a mis dos hijos, Sol y Maximiliano, a quienes adoro.

Contents

Introducción.

El objetivo de esta tesis consiste en la adaptación de algunos métodos topológicos del análisis no lineal para probar existencia de solución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias bajo condiciones de borde del tipo de Neumann o periódicas en las que el operador lineal de diferenciación involucrado tiene núcleo no trivial, esto es, problemas que usualmente se denominan resonantes. La particularidad de los problemas resonantes que estudiaremos es que las no linealidades que en ellos intervienen están condicionadas en sus argumentos por ciertas funciones que representan tiempos de retardos o bien por los valores de la solución desconocida en el borde del dominio.

La tesis se organiza del siguiente modo. En el capítulo 1 se darán los conceptos y resultados teóricos que se usarán en posteriores capítulos. Más precisamente, el método principal que implementaremos se basa en la teoría del grado de coincidencia de Mawhin ([53], [50]), el cual es una generalización del grado topológico de Leray Schauder ([48]); en general, esta teoría ha resultado ser un instrumento muy adecuado para el estudio de problemas resonantes. No obstante, como veremos más adelante, existen problemas resonantes en los que el grado de coincidencia no se aplica; abordaremos un problema de esa clase recurriendo al método de las sub y super soluciones ordenadas ([30]) combinado con un argumento del tipo diagonal ([89],[90]). Asimismo, en el capítulo 1 se darán los elementos básicos de la teoría de las ecuaciones diferenciales con retardo.

En el capítulo 2 se describen dos modelos que tienen su origen en dos problemas provenientes de la biofísica y se dan los antecedentes que contextualizan el trabajo realizado en esta tesis; en ambos casos las condiciones impuestas a la no linealidad intervienen como factores de autoregulación o control del fenómeno. Más precisamente, en la sección 2.1 se deriva el modelo que describe la difusión-migración de dos especies de iones con idénticas valencias a través de una membrana permeable a ambas especies bajo la acción de un campo eléctrico en régimen estacionario y con condiciones de borde eléctricamente neutras; la ecuación diferencial que resulta es la siguiente:

$$y'' = y\left\{\lambda - \tfrac{y_0^2 - y^2}{2} + \left[l\lambda + \tfrac{y_0^2 - y_1^2}{2}\right]x\right\} - \left[l\lambda + \tfrac{y_0^2 - y_1^2}{2}\right]D \qquad (0.0.1)$$

donde $y_0 := y(0)$, $y_1 := y(1)$ y las constantes $\lambda > 0$, $l > 0$ y $D \in (-1, 1)$ dependen de parámetros físicos, tales como la constante de difusión, la movilidad iónica, etc. La neutralidad eléctrica de los reservorios se traduce en condiciones homogéneas de Neumann sobre el borde. Este modelo, usualmente llamado de *electrodifusión*, fue originalmente estudiado por L. Bass ([18], [19]) y posteriormente utilizado para describir por ejemplo el proceso de transmisión de las señales electroquímicas en las células nerviosas. El modelo fue generalizado en varias direcciones ([26],[44]) y vale la pena destacar que las técnicas clásicas del análisis no se aplican a este tipo de problemas por el hecho de que en la no linealidad intervienen los valores de la solución desconocida sobre el borde del dominio. A partir de (0.0.1) se considera la *formulación abstracta* de la ecuación correspondiente al modelo de electrodifusión

$$y''(x) = f(x, y(x), y(0), y(1)) \tag{0.0.2}$$

El problema de electrodifusión correspondiente al caso de dos o más iones ha sido estudiado, con cierto detalle, por muchos autores ([13],[14],[81],[82]); no obstante, hasta donde nosotros conocemos, no se ha estudiado sistemáticamente el caso correspondiente al problema abstracto (0.0.2).

En la sección 2.2 se presenta un modelo que describe la dinámica poblacional de cierto tipo de insectos, basado en los experimentos realizados por el entomólogo Nicholson [60] en el año 1955; los resultados sugirieron que el crecimiento de la poblacion es aproximadamente cíclico y depende, bajo ciertas condiciones bio-ambientales, del tiempo de maduración necesario para que una larva en convierta en un individuo adulto capaz de reproducirse. A lo largo de las subsecciones (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) se describen principios generales de modelos de crecimiento poblacional con funciones de natalidad denso dependiente con retardo y en particular se considera la ecuación logística con retardo como el antecedente fundamental del modelo de Nicholson. En la subsección (2.2.4) se describen algunas generalizaciones [21] y se dan algunos resultados relativos al modelo generalizado de Nicholson que extenderemos en el capítulo 4.

Por un lado se ha formulado el llamado *modelo generalizado de Nicholson*

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) \tag{0.0.3}$$

siendo $\delta, p_k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ y $\tau_k \in C(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ funciones T-periódicas para todo $k = 1, 2, 3, \cdots m$, $x_{\tau_k}(t) := x(t - \tau_k(t))$ y $f(x) := xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}$. J. Li et al [47] han obtenido un resultado de existencia de solución T-periódica positiva para el modelo generalizado (0.0.3) usando el teorema de punto fijo de Krasnoselskii sobre un cono [90] bajo la condición

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) > \delta(t),\ t \in [0, T]. \tag{0.0.4}$$

Asimismo en [47] se prueba que si

$$x(s) = \phi(s),\ \ \phi \in C([-\tau^*, 0], \mathbb{R}^+)\ \ \tau^* := \max_{1 \le k \le m}\{\max_{t \in [0,T]}\{\tau_k(t)\}\} \tag{0.0.5}$$

entonces toda solución postiva del problema de valores iniciales (0.0.3)-(0.0.5) tiende a cero cuando t tiende a $+\infty$ asumiendo que

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) \le \delta(t),\ t \in [0, T]. \tag{0.0.6}$$

Por otro lado se ha considerado el modelo generalizado de Nicholson (0.0.3) con un término H de *recolección*

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t)f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x(t)) \tag{0.0.7}$$

siendo $H \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty), \mathbb{R}^+)$ T-periódica en su primera variable. En el año 2009 L. Berezansky formula el siguiente problema (4. open problems and conjectures, 6. [21]): Dar condiciones suficientes para la existencia de solución T-periódica positiva para el modelo autónomo de Nicholson con un término de recolección lineal dependiente de un retardo arbitrario, con $m = 1$, es decir para

$$x'(t) = -\delta x(t) + px(t-\tau)e^{-ax(t-\tau)} - hx(t-\sigma) \tag{0.0.8}$$

siendo δ, p, a, h, τ y σ constantes positivas.

Este problema fue resuelto por F. Long y M. Yang [49] para el caso no autónomo con un término de recolección lineal dependiente del retardo estimado de la población usando teoría del grado de coincidencia; más precisamente en [49] se prueba existencia de al menos una solución T-periódica positiva del problema

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)x(t-\tau(t))e^{-a(t)x(t-\tau(t))} - hx(t-\tau(t)) \tag{0.0.9}$$

con $\delta, p, a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ y $\tau, h \in C(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ funciones T-periódicas, asumiendo que

$$p^- e^{-a^+ u^+} - h^+ \geq 0$$

donde se usa la notación

$$g^+ := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{g(t)\}, \;\; g^- := \inf_{t\in\mathbb{R}}\{g(t)\} \tag{0.0.10}$$

para cualquier g continua y acotada definida sobre $\mathbb{R}$ y $u(t) := \frac{p(t)}{a(t)\delta(t)e}$.

Asimismo se ha considerado *sistemas tipo Nicholson*

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) + p_1 x_1(t-\tau_1)e^{-a_1 x_1(t-\tau_1)} \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2 x_2(t) + \beta_2 x_1(t) + p_2 x_2(t-\tau_2)e^{-a_2 x_1(t-\tau_2)} \end{cases} \tag{0.0.11}$$

donde δ_i, β_i, p_i y τ son constantes positivas para $i = 1, 2$.

Este tipo de modelos se utilizó por ejemplo para describir la dinámica de las células B de la leucemia linfocítica crónica (LLC-B). Berezanky L. et al [22] analizan la dinámica de (0.0.11) con dato inicial $x_i(s) = \phi_i(s),\ s \in [-\tau, 0],\ \phi_i(0) > 0$ donde $\phi_i \in C([-\tau, 0], [0, +\infty))$ para $i = 1, 2$.

Qiyuan Zhou [91] considera el sistema (0.0.11) no autónomo con términos lineales de recolección, utilizado para modelar estrategias sustentables de explotación de recursos biológicos en áreas tales como la pesca o forestación.

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + p_1(t)f(x_{1_{\tau_1}}(t)) - h_1(t)x_1(t-\tau_1(t)) \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + p_2(t)f(x_{2_{\tau_2}}(t)) - h_2(t)x_2(t-\tau_2(t)) \end{cases} \tag{0.0.12}$$

donde $\delta_i, \beta_i, p_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ y $h_i, \tau_i \in C(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ son T-periódicas para $i = 1, 2$. Usando la misma notación dada en (0.0.10), en [91], se prueba existencia de solución T-periódica positiva de (0.0.12) asumiendo, para $i = 1, 2$ que

$$\delta_1^- \delta_2^- - \beta_1^+ \beta_1^+ > 0, \quad \left(\frac{p_i}{\delta_i + h_i}\right)^- > 1, \quad \frac{\int_0^T p_i(t)\, dt}{\int_0^T (\delta_i(t) + h_i(t) - \beta_i(t))\, dt} > 1$$

y que

$$p_i^- e^{-e^{D_i}} - h_i^+ \geq 0$$

donde

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ln\left(\frac{\delta_2^-}{\delta_1^- \delta_2^- - \beta_1^+ \beta_2^+}\left(\frac{p_1}{e}\right)^+ + \frac{\beta_1^+}{\delta_1^- \delta_2^- - \beta_1^+ \beta_2^+}\left(\frac{p_2}{e}\right)^+\right) \\ ln\left(\frac{\beta_2^+}{\delta_1^- \delta_2^- - \beta_1^+ \beta_2^+}\left(\frac{p_1}{e}\right)^+ + \frac{\delta_1^+}{\delta_1^- \delta_2^- - \beta_1^+ \beta_2^+}\left(\frac{p_2}{e}\right)^+\right) \end{pmatrix}.$$

En el capítulo 3 se considera la formulación abstracta del modelo de electrodifusión (0.0.2) para el caso escalar y de un sistema y se estudia existencia de solución bajo diferentes condiciones de borde y diversas hipótesis impuestas a f.

En la sección 3.1 se demostrarán los resultados que hemos obtenido y publicado en los artículos ([9], [10]) referidos al modelo abstracto de electrodifusión para el caso escalar; más precisamente, en la subsección 3.1.1, se considera la ecuación (0.0.2) bajo condiciones homogéneas de Neumann

$$y'(0) = y'(1) = 0 \tag{0.0.13}$$

y se prueba, usando teoría de grado de coincidencia, por un lado, un teorema de existencia de solución para $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua y acotada bajo condiciones asintóticas del tipo de Landesman-Lazer ([43], [52]) (teorema 3.0.1, [10]) y por otro un teorema de existencia de solución con hipótesis más débiles, esto es, para f no necesariamente acotada y bajo condiciones no asintóticas de Landesman-Lazer (teorema 3.0.2, [10]).

En la subsección 3.1.2 consideramos el problema análogo reemplazando en la no linealidad, que aparece en (0.0.2), el valor $y(1)$ por $y(\infty) := \lim_{x\to+\infty} y(x)$ y bajo condiciones de Neumann en un dominio no acotado

$$y'(0) = v_0, \quad y'(\infty) = 0, \tag{0.0.14}$$

donde $y'(\infty) := \lim_{x\to+\infty} y'(x)$ y $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es continua y acotada. Para este caso se demuestra, bajo cierta condición de control para la no linealidad y usando el método de sub y super soluciones ordenadas en combinación con un argumento del tipo diagonal, un teorema de existencia de solución (teorema 3.0.3, [9]).

Finalmente, en la sección 3.2, se prueban los resultados obtenidos para el problema abstracto de electrodifusión correspondiente a sistemas, esto es para $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$

con $n > 1$ y que hemos publicado en el artículo [12]. Análogamente a lo que se hizo con el caso escalar, en la subsección 3.2.1 se demuestra un teorema de existencia para f continua y acotada bajo condiciones del tipo Nirenberg (teorema 3.0.4) y en la subsección 3.2.2 un resultado de existencia de solución bajo hipótesis más débiles, esto es para $\mathbf{f}$ no necesariamente acotada y bajo condiciones no asintóticas (teorema 3.0.5, [12]).

En el capítulo 4 se prueban algunos resultados referidos al modelo generalizado de Nicholson con un término de recolección no lineal que hemos publicado recientemente [11]; esos resultados generalizan los obtenidos por otros autores.

En la sección 4.1 se estudian condiciones suficientes para la existencia de solución T-periódica positiva. Más precisamente, en la subsección 4.1.1 se trata el caso escalar y se demuestra que la ecuación (0.0.7) tiene al menos una solución positiva T-periódica bajo la hipótesis de que

$$H_{sup}(t) := \limsup_{x\to 0^+} \frac{H(t,x)}{x}$$

es uniforme en la variable t y se cumple

$$\delta(t) + H_{sup}(t) < \sum_{k=1}^{m} p_k(t) \tag{0.0.15}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (teorema 4.0.4), resultado que extiende al de J. Li et al [47]. Por otro lado también se da una condición necesaria para la existencia de solución T-periódica (teorema 4.0.6). Posteriormente se considera la ecuación (0.0.7) pero con $H = H(t, x_{\tau_{\hat{k}}}(t))$ donde $\tau_{\hat{k}} = \tau_k$ para algún $k \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ y plantearemos el problema (4. open problems and conjectures, 6. [21]) en un contexto más general extendiendo los resultados obtenidos por F. Long y M. Yang [49]. Más precisamente se prueba que si además de satisfacerse la condición (0.0.15) se cumple que

$$\frac{H(t,x)}{x} \leq p_{\hat{k}}(t)e^{-x} \tag{0.0.16}$$

para todo t y $0 < x < \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k(t)}{e\delta(t)}\right)$ entonces la ecuación (0.0.7) con $H = H(t, x_{\tau_{\hat{k}}}(t))$ tiene al menos una solución T-periódica positiva (teorema 4.0.5).

Por otro lado en la subsección 4.1.2 se considera un sistema tipo Nicholson, análogo a (0.0.12), pero con términos no lineales de recolección, libres de retardos; más precisamente se considera

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + p_1(t)f((x_1)_{\tau_1}(t)) - H_1(t, x_1(t)) \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + p_2(t)f((x_2)_{\tau_2}(t)) - H_2(t, x_2(t)) \end{cases} \tag{0.0.17}$$

y se demuestra [1] que si

$$H_{i,sup}(t) := \limsup_{x\to 0^+} \frac{H_i(t,x)}{x}, \quad H_{i,inf}(t) := \liminf_{x\to +\infty} \frac{H_i(t,x)}{x}$$

[1]Este resultado no se incluye en [11] y será parte de un artículo que próximamente enviaremos para su publicación.

son uniformes en la variable t para $i = 1, 2$ y se satisfacen las condiciones

$$\begin{array}{ll} (H1): & \delta_i(t) + H_{i,sup}(t) < \beta_i(t) + p_i(t) \\ (H2): & \delta_i(t) + H_{i,inf}(t) > \beta_i(t) + p_i(t) \end{array}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2$ entonces el sistema (0.0.17) tiene al menos una solución $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ tal que x_i es T-periódica y positiva para $i = 1, 2$ (teorema 4.0.7).

Finamlmente en la sección 4.2 se dan condiciones suficientes para que el equilibrio trivial sea un atractor global extendiendo el resultado de estabilidad obtenido por J. Li et al [47]; más precisamente se demuestra que si

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) \leq \delta(t) + \frac{H(t,x)}{x} \qquad \text{para todo } t, x > 0$$

entonces todas las soluciones del problema de valores iniciales (0.0.7)-(0.0.5) están globalmente definidas, son positivas y tienden a 0 cuando $t \to +\infty$ (teorema 4.0.8).

Chapter 1

Preliminares.

En este capítulo se darán las herramientas necesarias para abordar posteriores capítulos; si bien los métodos y conceptos que aquí se tratan son conocidos se opta por hacer una breve exposición de los mismos a los efectos de facilitar la lectura de esta tesis.

En la sección 1.1 se define el grado de Leray-Schauder, se establecen algunas propiedades frecuentemente utilizadas y se enuncian los teoremas de punto fijo de Schauder (teorema 1.1.3) y el de Poincaré-Miranda (teorema 1.1.4).

En la sección 1.2 se hace una breve exposición de la teoría del grado de coincidencia; se enuncian sus propiedades principales y se demuestran los resultados básicos necesarios para aplicar el método de continuación (teorema de continuación generalizado 1.2.5 y corolario 1.2.6) que serán fundamentales en las aplicaciones de la tesis.

En la sección 1.3 se consideran algunas condiciones de la no linealidad bajo las cuales, usando teoría del grado de coincidencia, se prueba existencia de solución T-periódica para el caso escalar y de sistema; estas condiciones serán adaptadas al tipo de problemas tratados aquí.

Posteriormente en la sección 1.4 daremos un ejemplo en el que se combina el método de las sub y super soluciones ordenadas y un argumento del tipo diagonal para demostrar, bajo determinadas condiciones, existencia de solución para un problema de Dirichlet en un dominio no acotado.

Finalmente en la última sección 1.5 se da una breve introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo; más precisamente en la subsección 1.5.1 se ilustran, a través de ejemplos, algunas de sus principales diferencias con respecto a las ecuaciones diferenciales ordinarias. En la subsección 1.5.2 se prueba existencia y unicidad de solución (teoremas 1.5.5 y 4.1.2) y dependencia continua respecto del dato inicial para ecuaciones con retardo (teorema 1.5.4); por último en la subsección 1.5.3 se considera el operador de Poincaré en el contexto de las ecuaciones diferenciales con retardo, frecuentemente utilizado en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias para establecer existencia de solución periódica, y se observan algunas de las dificultades que surgen en su aplicación.

1.1 El grado de Leray-Schauder.

Comenzamos con una definición axiomática del grado topológico debida a Amann y Weiss [1] que nos permitirá definir el grado de Leray-Schauder como un caso particular.

Sean X un espacio normado con τ la topología y ρ la métrica inducidas por la norma y $\mathcal{G}$ una familia de abiertos tal que $\emptyset \in \mathcal{G}$. Para $\Omega \in \mathcal{G}$ denotamos

$$C(\overline{\Omega}) := \{F : \overline{\Omega} \subset X \to X / \ F \text{ es continua } \}$$

dotado de la topología uniforme y consideramos, para cada $\Omega \in \mathcal{G}$ fijo, una subcolección de funciones $M(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ con la topología inducida .

Definición 1.1.1. *Funciones Admisibles.* Se dice que

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}) := \bigcup_{\Omega \in \mathcal{G}} M(\overline{\Omega})$$

es un *conjunto de funciones admisibles* de X si se cumple

(a): $I|_{\overline{\Omega}} \in M(\overline{\Omega})$ para todo $\Omega \in \mathcal{G}$ no vacío.

(b): Para cada par $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{G}$ con $\Omega_1 \subset \Omega_2$ y cada $F \in M(\overline{\Omega}_2)$ se tiene que $F|_{\overline{\Omega}_1} \in M(\overline{\Omega}_1)$.

Ahora fijemos una clase de funciones admisibles $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ asociada a cierta subfamilia de abiertos $\mathcal{G}$. Para cada $\Omega \in \mathcal{G}$ y $p \in X$, difinimos

$$M_p(\overline{\Omega}) := \{F \in M(\overline{\Omega}) : p \notin \overline{F(\partial\Omega)}\},$$

$$\mathcal{A}_p := \{(F, \Omega, p) : \Omega \in \mathcal{G}, \ F \in M_p(\overline{\Omega})\}$$

y

$$\mathcal{A} := \bigcup_{p \in X} \mathcal{A}_p.$$

Con estas notaciones damos la siguiente

Definición 1.1.2. *Grado Topológico.* Un grado topológico para $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ es una función

$$d : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$$

que satisface los siguientes axiomas:

(A1). *Normalización.* Si $\Omega \in \mathcal{G}$ y $p \in \Omega$ entonces $d(I|_{\overline{\Omega}}, \Omega, p) = 1$.

(A2). *Aditividad.* Sean $\Omega \in \mathcal{G}$ no vacío, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ abiertos disjuntos y $p \in X$. Si $F \in M(\Omega)$ y $p \notin \overline{F(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))}$ entonces

$$d(F, \Omega, p) = d(F|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, p) + d(F|_{\overline{\Omega}_2}, \Omega_2, p).$$

(A3). *Invariancia bajo Homotopía.* Sea $\Omega \in \mathcal{G}$ no vacío y $p \in X$.

Para cada
$$H : [0,1] \to M_p(\overline{\Omega})$$
continua se cumple que
$$d(H(t), \Omega, p) = d(H(0), \Omega.p)$$
para todo $t \in [0,1]$.

(A4). *Traslación.* Si $\Omega \in \mathcal{G}$ es no vacío y $F \in M_p(\overline{\Omega})$ entonces
$$d(F, \Omega, p) = d(F - p, \Omega, 0).$$

Una función $d(\cdot, \Omega, p) : M_p(\overline{\Omega}) \to \mathbb{Z}$ que satisface (A1), (A2), (A3) y (A4) se denomina *grado topológico en* p *relativo a* Ω y el entero $d(F, \Omega, p)$, el grado topológico de la función admisible F en p relativo a Ω.

Para definir el grado de Leray-Schauder comencemos con la siguiente

Definición 1.1.3. *Operador compacto.* Sean X, Y espacios normados. Se dice que el operador $K : Dom(K) \subset X \to Y$ es compacto si K es continuo y además para todo $B \subset Dom(K)$ acotado se verifica que $K(B)$ es relativamente compacto, es decir, $\overline{K(B)}$ es compacto en Y

y recordemos el siguiente resultado útil para probar la compacidad de un operador

Teorema 1.1.1. Arzelá-Ascoli. *Si Y un espacio de Banach y X un espacio métrico compacto entonces $\mathcal{A} := \{f_i\}_{i \in I} \subset C(X, Y)$ es relativamente compacto en $C(X, Y)$ si y sólo si la familia de funciones $\mathcal{A}$ es equicontinua y para cada $x \in X$ el conjunto $\mathcal{A}(x) := \{f_i(x) :$ para todo $i \in I\}$ es relativamente compacto en Y.*

Ahora consideramos un espacio de Banach E, $\Omega \subset E$ un conjunto abierto y acotado y $K : \overline{\Omega} \to E$ un operador compacto; teniendo en cuenta que Ω es acotado K puede aproximarse por un operador de *rango finito*; más precisamente, dado $\varepsilon > 0$ existe V_ε un subespacio de E de fimensión finita y un operador $K_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E$ continuo tal que $Im(K_\varepsilon) \subset V_\varepsilon$ y además $||K(x) - K_\varepsilon(x)|| < \varepsilon$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. El operador K_ε se llama usualmente una ε-aproximación del operador K. Por otro lado observamos que siendo K compacto $\inf_{x \in \partial\Omega} ||x - K(x)|| \neq 0$, luego podemos dar la siguiente

Definición 1.1.4. *Grado de Leray Schauder.* Con las notaciones anteriores si $K : \overline{\Omega} \to E$ es compacto y $0 \notin (I - K)^{-1}(\partial\Omega)$ definimos el grado de Leray Schauder de $I - K$ en 0 relativo a Ω del siguiente modo
$$d_{LS}(I - K, \Omega, 0) := d((I - K_\varepsilon)|_{V_\varepsilon}, \Omega \cap V_\varepsilon, 0) \tag{1.1.1}$$
donde $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \inf_{x \in \partial\Omega} ||x - K(x)||$, $I : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ denota la identidad sobre $\overline{\Omega}$ y K_ε es una ε-aproximación del operador compacto K.

En primer lugar señalamos que la definición 1.1.4 es independiente de la aproximación elegida [6] y en segundo lugar si tomamos $\mathcal{G}$ como el conjunto de todos los abiertos y acotados de X de dimensión infinita y $\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \bigcup_{\Omega\in\mathcal{G}} K_I(\overline{\Omega})$ donde

$$K_I(\overline{\Omega}) := \{F : \overline{\Omega} \to X/\ F := I - K \text{ con } K : \overline{\Omega} \to X \text{ compacto}\} \tag{1.1.2}$$

entonces d_{LS} es una función que verifica las propiedades (A1)-(A4) de la definición 1.1.2 [48]. Más aún Amann y Weiss [1] han probado el siguiente resultado de unicidad

Teorema 1.1.2. Existencia y Unicidad del Grado Topológico. *Sea X un espacio vectorial localmente convexo y $\mathcal{G}$ la familia de todos los abiertos acotados de X. Entonces existe un único grado topológico para la clase admisible de funciones*

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}) := \{K_I(\overline{\Omega}) : \Omega \in \mathcal{G}\}.$$

Observación 1.1.1. El clásico ejemplo de Kakutani [48] muestra que el grado topológico de Leray-Schauder no se puede definir si $\mathcal{G}$ se elige como el conjunto de los abiertos y acotados de un espacio normado X de dimensión infinita y $\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \bigcup_{\Omega\in\mathcal{G}} C(\overline{\Omega})$.

La teoría del grado topológico es un instrumento que básicamente permite obtener, bajo ciertas condiciones, *una cota inferior* de la cantidad de soluciones de una ecuación determinada; en ese sentido la propiedad que con mayor frecuencia se utiliza es llamada *existencia de solución*: si $d(F, \Omega, p) \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $F(x) = p$.

Muchas veces, en la práctica, se requiere calcular el grado de una aplicación continua $\psi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ donde $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| = 1\}$. Esto puede hacerse de varias maneras diferentes, por ejemplo usando homología. No obstante podemos proceder, en el marco de nuestro desarrollo de la teoría de grado, de la siguiente manera: en primer lugar recordamos una propiedad que se utiliza frecuentemente para el cálculo del grado y que se refiere al hecho de que su valor sólo depende del punto, del dominio y de cómo la función se defina sobre el borde del dominio; más precisamente, si dos funciones admisibles $F, G : \overline{\Omega} \subset X \to X$ coinciden sobre $\partial\Omega$ entonces sus grados coinciden $d(F, \Omega, 0) = d(G, \Omega, 0)$. Teniendo en cuenta esta propiedad damos la siguiente

Definición 1.1.5. *Grado Relativo a una Esfera.* Dada $\psi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ continua, consideramos $F : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^n$ una extensión continua *arbitraria* de ψ y definimos su grado

$$deg(\psi) := d_B(F, B_1(0), 0) \tag{1.1.3}$$

donde $B_1(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| < 1\}$ y d_B es el grado de Brouwer.

Finalmente enunciamos dos teoremas de gran importancia que usaremos posteriormente y que son consecuencias de la invariancia bajo homotopía del grado topológico.
El primero es el teorema, bien conocido, de punto fijo de Schauder

Teorema 1.1.3. Punto Fijo de Schauder. *Sea X un espacio de Banach y $S \subset X$ un conjunto acotado, cerrado y convexo tal que el operador $K : S \subset X \to X$ es compacto y además S es K-invariante. Entonces K tiene al menos un punto fijo en S.*

El segundo resultado fue formulado por primera vez por Poincaré [67] en el año 1886 y demostrado posteriormente por Miranda [56] en el año 1940; es conocido como teorema de Poincaré-Miranda. El enunciado tal cual figura en el trabajo de Miranda [56] es el siguiente

Teorema 1.1.4. Poincaré-Miranda. *Sea*

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq L,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

y $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *continua tal que*

$$\begin{array}{l} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, L, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n) \geq 0 \\ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n) \leq 0 \end{array} \tag{1.1.4}$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. *Entoncces existe* $x \in \Omega$ *tal que* $F(x) = 0$.

Para $n = 1$ el resultado coincide con el teorema de Bolzano. Miranda probó que el teorema (1.1.4) es equivalente al teorema del punto fijo de Brouwer [42].

El siguiente corolario dice que el teorema sigue siendo válido para rectángulos arbitrarios con caras paralelas a los ejes coordenados y si se intecambian las desigualdades.

Corolario 1.1.5. *Sea* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *(*$F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$*) continua en el paralelepípedo*

$$\Omega = [r_1^-; r_1^+] \times ... \times [r_2^-; r_2^+] \times ... \times [r_n^-; r_n^+]$$

con $r_i^- < r_i^+$ *para cada* $i = 1, 2, ..., n$.
Consideremos,para cada $i = 1, 2, ..., n$*, las caras anterior y posterior i-ésimas de* Ω

$$c(i, -) = \{x \in I : x_i = r_i^-\},\ c(i, +) = \{x \in I : x_i = r_i^+\}$$

respectivamente.
Supongamos que para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ *y para todo* $x \in c(i, -), \tilde{x} \in c(i, +)$ *se cumple*

$$f_i(x) f_i(\tilde{x}) \leq 0. \tag{1.1.5}$$

Entonces existe $x \in \Omega$ *tal que* $F(x) = 0$.

Finalmente señalamos que el resultado puede generalizarse para funciones continuas en espacios de dimensión infinita [80].

1.2 El grado de coincidencia.

Como se sabe el grado de coincidencia de Mawhin es una generalización del grado topológico de Leray-Schauder; en esta sección daremos la definición del grado de coincidencia pero antes debemos establecer una serie de definiciones y resultados preliminares.

Definición 1.2.1. *Operador de Fredholm.* Sean X e Y espacios de Banach y $L : Dom(L) \subset X \to Y$ un operador lineal con $Dom(L) \subset X$ un subespacio. Se dice que el *operador* L es *de Fredholm* si se cumplen la siguientes condiciones:

(F1): $\ker(L)$ es finito dimensional.

(F2): $Im(L)$ es un subespacio cerrado de Y y de codimensión finita, o sea

$$codim(Im(L)) = \dim(coker(L)) < \infty$$

donde $coker(L) := Y/Im(L)$.

Además si L es de Fredholm se define su índice como el entero

$$i(L) := \dim(\ker(L)) - codim(Im(L))$$

Nos interesa en particular los operadores de Fredholm de índice cero.

De resultados básicos del análisis funcional sabemos que existen complementos directos del $\ker(L)$ y de $Im(L)$ y en tal caso podemos definir proyectores continuos $P : X \to X$ y $Q : Y \to Y$

$$X \xrightarrow{P} Dom(L) \xrightarrow{L} Y \xrightarrow{Q} Y$$

de manera que

$$Im(P) = \ker(L) \tag{1.2.1a}$$

$$\ker(Q) = Im(L) \tag{1.2.1b}$$

y

$$X = \ker(L) \oplus \ker(P) \tag{1.2.2a}$$

$$Y = Im(L) \oplus Im(Q) \tag{1.2.2b}$$

Como veremos en la próxima sección, cuando se reformulan ciertos problemas resonantes en el contexto funcional, aparece un operador de diferenciación que no es inversible; en esos casos se considera la inversa generalizada sugún se establece en la siguiente

Definición 1.2.2. *Inversa generalizada de L.* Con las notaciones previas, se define la inversa generalizada de L

$$K_{P,Q} : Y \to Dom(L) \cap \ker(P)$$

como

$$K_{P,Q} := K_P(I - Q) \tag{1.2.3}$$

donde

$$K_P : Im(L) \to Dom(L) \cap \ker(P)$$

es la inversa algebraica del operador

$$L_P : Dom(L) \cap \ker(P) \to Im(L).$$

Observación 1.2.1. Efectivamente $L_p := L|_{Dom(L)\cap\ker(P)}$ es un isomorfismo; par ello basta observar que si $x \in Dom(L)\cap\ker(P)$ y $L(x) = 0$ entonces $x \in \ker(P)\cap\ker(L)$ y de acuerdo a la suma directa (1.2.2a) se tiene $x = 0$. Además se verifican las siguientes relaciones

$$LK_P = I|_{Im(L)} \;\; y \;\; K_P L = [I - P]|_{Dom(L)}. \tag{1.2.4}$$

Ahora consideramos el co-núcleo de L con la topología cociente y

$$\Pi : Y \to coker(L)$$

la sobreyección canónica definida $\Pi(y) = [y] = \{y + Im(L), y \in Y\}$ y observamos que

$$y \in \ker Q = Im(L) \;\; sii \;\; y \in \ker \Pi. \tag{1.2.5}$$

En lo que resta consideraremos $L : Dom(L) \subset X \to Y$ un operador de Fredholm de índice cero y $N : \overline{\Omega} \subset X \to Y$ no necesariamente lineal con Ω abierto y acotado.

Nuestro objetivo es estudiar condiciones suficientes para que la ecuación

$$Lx = Nx$$

tenga al menos una solución $x \in Dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

En el contexto de la teoría del grado de coincidencia interesan las no linealidades que satisfacen ciertas propiedades; más precisamente fijados los proyectores P y Q damos la siguiente

Definición 1.2.3. *Operador L-Compacto.* Un operador $N : \overline{\Omega} \to Y$ si dice que es L-compacto en $\overline{\Omega}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(L1): $\Pi N : \overline{\Omega} \subset X \to coker(L)$ es continuo y $\Pi N(\overline{\Omega})$ es acotado.

(L2): $K_{PQ}N : \overline{\Omega} \to X$ es un operador compacto en $\overline{\Omega}$ es decir $K_{PQ}N$ es continuo y $K_{PQ}N(\overline{\Omega})$ un conjunto relativamente compacto.

Observación 1.2.2. La condición (L2) no depende del par (P, Q) de proyecciones, más precisamente se tiene el siguiente resultado (Proposition III.1, [53]): si L es un operador de Fredhom de índice cero y se cumple (L1) entonces si *para algún* par de proyectores (P, Q) se cumple (L2) entonces (L2) se cumple para cualquier par de proyectores continuos (P', Q') que satisfacen (1.2.1a) y (1.2.1b).

Por último consideramos Θ, la clase de todos los isomorfismos del $coker(L)$ con el $\ker(L)$ y damos la siguiente

Definición 1.2.4. Se dice que Γ' y Γ *son homotópicas en* Θ si y sólo si existe un operador continuo

$$\overline{\Gamma} : [0, 1] \times coker(L) \to \ker(L)$$

tal que

$$\overline{\Gamma}(0, \cdot) = \Gamma' \;\; \text{y} \;\; \overline{\Gamma}(1, \cdot) = \Gamma''.$$

Asimismo teniendo en cuenta la orientación del $\ker(L)$ decimos que

$$\Gamma : coker(L) \to \ker(L)$$

es un isomorfismo que *preserva la orientación* si y sólo si fijadas las orientaciones $B_1 := \{v_i\}_{1 \le i \le n}$ y $B_2 = \{w_i\}_{1 \le i \le n}$ para el $coker(L)$ y $\ker(L)$ respectivamente entonces $\Gamma(B_1)$ define la misma orientación para $\ker(L)$ que la dada por B_2. En caso contrario decimos que la invierte.

Observación 1.2.3. Se demuestra (Proposition III.4 , [53]) que existen sólo dos clases homotópicas que particionan a Θ, más precisamente: Γ' y Γ'' son homotópicas en Θ si y sólo si

$$det(\Gamma'(\Gamma'')^{-1}) > 0.$$

El siguiente diagrama ilustra la situación que tenemos hasta aquí

$$\begin{tikzcd}
X & \ker(P)\cap Dom(L) \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, shift left, "L_P"] & Im(L)=\ker(Q) \arrow[l, shift left, "K_P"] & \\
X \arrow[u, "I-P"] & & Y \arrow[ul, "K_{P,Q}"'] \arrow[u, "I-Q"'] \arrow[dll, "\Gamma\Pi"'] \arrow[d, "\Pi"] & \overline{\Omega}\subset X \arrow[l, "N"] \\
Im(P)=\ker(L) \arrow[u, hook, "i"] & & coker(L) \arrow[ll, "\Gamma"] &
\end{tikzcd}$$

Basándonos en estos preliminares definimos el operador

$$\mathcal{F} : \overline{\Omega} \subset X \to X$$

como

$$\mathcal{F} := I - \mathcal{K} \tag{1.2.6}$$

donde

$$\mathcal{K} := P + (\Gamma\Pi + K_{PQ})N$$

y probaremos dos resultados básicos para alcanzar nuestro objetivo: en primer lugar que el operador $\mathcal{K}$ es compacto y en segundo que el conjunto de ceros de $\mathcal{F}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación $Lx = Nx$.

Proposición 1.2.1. *Si L es un operador de Fredholm de índice cero y N es L-compacto entonces el operador $\mathcal{K}$ es compacto en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Por la condición (L2) $K_{PQ}N$ es compacto. Por otro lado P es de rango finito, de manera que P es compacto. Finalmente por la condición (L1) tenemos que ΠN es continua y $\Pi N(\overline{\Omega})$ es acotado, luego $\Gamma\Pi N$ es continua de rango finito y se sigue el resultado. ■

Con las notaciones y definiciones previas tenemos

Proposición 1.2.2. *Si* $\Gamma : coker(L) \to \ker(L)$ *es un isomorfismo arbitrario entonces para todo* $x \in Dom(L) \cap \overline{\Omega}$

$$Lx = Nx \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}x = 0 \tag{1.2.7}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $I - Q$ es proyectar sobre $Im(L)$ y que $\ker(Q) = Im(L)$ tenemos

$$Lx = Nx \;\Leftrightarrow Lx = (I - Q)Nx,\; QNx = 0.$$

Aplicando K_P en ambos miembros de la ecuación $Lx = (I - Q)Nx$ y usando la equivalencia $QNx = 0 \Leftrightarrow \Pi Nx = 0$ (relación (1.2.5)) vemos que

$$Lx = Nx \;\Leftrightarrow K_PLx = K_P(I - Q)Nx,\; \Pi Nx = 0$$

Finalmente teniendo en cuenta que $K_P L = [I - P]|_{Dom(L)}$ (relación (1.2.4)), que $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$ y que Γ es un isomorfismo

$$Lx = Nx \Leftrightarrow (I - P)x = K_{P,Q}Nx, \ \Gamma\Pi Nx = 0$$

es decir

$$Lx = Nx \Leftrightarrow (I - P)x = (\Gamma\Pi + K_{PQ})Nx$$

de donde se sigue el resultado. ■

Observación 1.2.4. De acuerdo a la equivalencia (1.2.7), si se cumple la condición

$$Lx \neq Nx \text{ para todo } x \in Dom(L) \cap \partial\Omega \tag{1.2.8}$$

el grado de Leray Schauder $d_{LS}(\mathcal{F}, \Omega, 0)$ está definido y tenemos el siguiente resultado (Proposition III.6, [53]) que es la antesala de la definición del grado de coincidencia: Si $L : Dom(L) \subset X \to Y$ es un operador de Fredholm de índice cero, $N : \overline{\Omega} \subset X \to Y$ es L-compacto y se cumple (1.2.8) entonces el grado de Leray-Schauder $d_{LS}(\mathcal{F}, \Omega, 0)$ depende solamente de L, N, Ω y de la clase de homotopía de $\Gamma \in \Theta$ elegida.

Teniendo en cuenta el desarrollo previo, podemos extender la noción del grado topológico de Leray-Schauder; para ello fijamos orientaciones para el $\ker(L)$ y el $coker(L)$ y elegimos un isomorfismo Γ que preserve la orientación y damos la siguiente

Definición 1.2.5. *Grado de Coincidencia.* Si L es un operador de Fredholm de índice cero y N es L-compacto entonces el *grado de coincidencia* del par (L, N) en Ω es el entero

$$d((L, N), \Omega) := d_{LS}(\mathcal{F}, \Omega, 0) = d_{LS}(I - \mathcal{K}, \Omega, 0)$$

donde $\mathcal{K}$ se define como en (1.2.6).

Observación 1.2.5. Si $X = Y$ y $L = I$ entonces L es claramente un operador de Fredholm de índice cero y se tiene que $P = 0$, $Q = 0$ y $K_{PQ} = I$. En este caso las condiciones (L1) y (L2) se satisfacen si N es compacto sobre $\overline{\Omega}$. Luego, efectivamente, el grado de coincidencia del par (I, N) es el grado de Leray-Schauder de la perturbación compacta de la identidad $I - N$, es decir

$$d((I, N), \Omega) := d_{LS}(I - N, \Omega, 0).$$

Obviamente, para espacios normados de dimensión finita, el grado de coincidencia es el grado de Brouwer. También observamos que en el caso no resonante, $\ker(L) = \{0\}$, se tiene que $P = 0$, $Q = 0$, $\Pi = 0$ y $K_{PQ} = L^{-1}$ de manera que

$$d[(L, N), \Omega] = d_{LS}(I - L^{-1}, \Omega, 0).$$

En la subsección que sigue usaremos la siguiente convención referida al grado de Brouwer para un espacio de dimensión cero, es decir $X = \{0\}$. En ese caso, definimos $d(I, \{0\}, 0) = 1$ y para la aplicación vacía $d(\emptyset, \{0\}, 0) = 0$.

1.2.1 Principales propiedades del grado de coincidencia.

En esta subsección enunciamos algunas de las propiedades fundamentales del grado de coincidencia que se aplican usualmente, en particular las propiedades (A1), (A2) y (A3) de la definición axiomática del grado topológico (1.1.2); las demostraciones de esas propiedades son consecuencias de la definición del grado de coincidencia y de la validez de las propiedades análogas para el grado topológico de Leray Schauder.

Teorema 1.2.3. *Si L es un operador de Fredholm de índice cero y N es L-compacto en $\overline{\Omega}$ entonces el grado de coincidencia satisface las propiedades*

1. Normalización. *Si $\Omega \in \mathcal{G}$ y $0 \in \Omega$ entonces $d[(I,0),\Omega] = 1$.*

2. Aditividad. *Si $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ con Ω_0 y Ω_1 abiertos disjuntos entonces*
$$d[(L,N),\Omega] = d[(L,N),\Omega_0] + d[(L,N),\Omega_1]$$

3. Invariancia del grado bajo Homotopía. *Si $\tilde{N} : [0,1]\times\overline{\Omega} \to Y$ es L-compacto en $[0,1]\times\overline{\Omega}$ tal que para cada $\lambda \in [0,1]$*
$$0 \notin (L - \tilde{N}(\lambda,\cdot))(Dom(L) \cap \partial\Omega)$$
entonces
$$d[(L,\tilde{N}(\lambda,\cdot)),\Omega]$$
es independiente de $\lambda \in [0,1]$.

4. Existencia de Solución. *Si $d[(L,N),\Omega] \neq 0$ entonces existe $x \in Dom(L) \cap \Omega$ tal que $Lx = Nx$.*

5. Escisión. *Si $\Omega_0 \subset \Omega$ es un abierto tal que $(L-N)^{-1}(0) \subset \Omega_0$ entonces*
$$d[(L,N),\Omega] = d[(L,N),\Omega_0].$$

6. *El grado de coincidencia $d[(L,N),\Omega]$ sólo depende de L, Ω y de la restricción de N sobre $\partial\Omega$.*

7. Teorema de Rouché. *Para cada $N' : \overline{\Omega} \to Y$ tal que*
$$\sup\{||\mathcal{F}x - \mathcal{F}'x|| : x \in \partial\Omega\} < r$$
donde $\mathcal{F}x := x - Px - (\Gamma\Pi - K_{P,Q})Nx$,
$$r := \inf\{||\mathcal{F}x|| : x \in \partial\Omega\} > 0$$
y $\mathcal{F}'x := x - Px - (\Gamma\Pi - K_{P,Q})N'x$ se tiene que
$$d((L,N),\Omega) = d((L,N'),\Omega).$$

8. Teorema de Borsuk Generalizado. *Si Ω es un conjunto abierto, acotado y simétrico respecto del origen y N es impar entonces $d((L,N),\Omega)$ es impar.*

En la práctica se combinan varias de estas propiedades: existencia de solución, aditividad, escisión e invariancia bajo homotopía. La aditividad es frecuentemente utilizada para probar multiplicidad de solución. No obstante, la propiedad más potente es la invariancia bajo homotopía. Para ilustrar su alcance probaremos algunas de las consecuencias enunciadas.

Por ejemplo que el grado no depende sino de L, Ω y de la restricción de N al borde de Ω se puede probar así: supongamos que N y N' son L-compactos y coinciden sobre $\partial\Omega$; entonces si consideramos la más simple de todas las homotopías que es la combinación convexa

$$\tilde{N}(\lambda, x) := \lambda N x + (1-\lambda) N' x \tag{1.2.9}$$

el resultado se sigue de la propiedad de invariancia bajo homotopía enunciada en el teorema (1.2.3).

También el teorema de Rouché es una consecuencia de la invariancia; nuevamente consideramos la homotopía (1.2.9) y $\tilde{\mathcal{F}}x := x - Px - (\Gamma\Pi - K_{P,Q})\tilde{N}(\lambda, x)$. Entonces fácilmente se comprueba que para $x \in \partial\Omega$ se tiene $||\tilde{\mathcal{F}}x|| > 0$ lo que muestra que $Lx \neq \tilde{N}(\lambda, x)$ para $x \in Dom(L) \cap \partial\Omega$ y $\lambda \in [0,1]$ y de ahí el resultado.

1.2.2 Teorema de continuación generalizado.

Ahora estamos en condiciones de establecer la herramienta fundamental para esta tesis, esto es, un teorema de continuación generalizado que garantiza, bajo ciertas condiciones, existencia de solución.

Dado $L : Dom(L) \subset X \to Y$ un operador de Fredholm de índice cero y

$$N : [0,1] \times \overline{\Omega} \to Y$$

un operador L-compacto en $[0,1] \times \overline{\Omega}$ se considera la familia uniparamétrica de ecuaciones

$$Lx = \lambda N(\lambda, x) + y, \quad \lambda \in [0,1], \; y \in Im(L) \tag{1.2.10}$$

y se tiene la siguiente equivalencia

Lema 1.2.4. *Para cada $\lambda \in (0,1]$ el conjunto de soluciones de la familia (1.2.10) coincide con el conjunto de soluciones de la ecuación*

$$Lx = (Q + \lambda(I-Q))N(\lambda, x) + y = QN(\lambda, x) + \lambda(I-Q)N(\lambda, x) + y \tag{1.2.11}$$

y si $\lambda = 0$ cada solución de (1.2.11) es una solución de (1.2.10).

Demostración. Supongamos que $\lambda \in (0,1]$, entonces teniendo en cuenta que $\ker(Q) = Im(L)$ se tiene que (1.2.10) es equivalente a

$$0 = QN(\lambda, x) \quad \text{y} \quad Lx = \lambda(I-Q)N(\lambda, x) + y$$

y en consecuencia a (1.2.11).
Por otro lado si $\lambda = 0$ entonces (1.2.11) queda

$$0 = QN(0, x) \quad Lx = y$$

y por lo tanto cada solución de (1.2.11) es una solución de (1.2.10). ■

El resultado funcamental de esta sección es el siguiente

Teorema 1.2.5. de Continuación Generalizado. *Sean* $L : Dom(L) \subset X \to Y$ *un operador de Frdedholm de índice cero,* $N : [0,1] \times \overline{\Omega} \to Y$ *L-compacto en* $[0,1] \times \overline{\Omega}$ *con* $N(1,\cdot) := N$ *e* $y \in Im(L)$ *fijo, tal que se satisfacen las siguientes condiciones*

(H1): $Lx \neq \lambda N(\lambda, x) + y$ *para cada* $\lambda \in (0,1)$ *y cada* $x \in Dom(L) \cap \partial\Omega$.

(H2): $\Pi N(0,x) \neq 0$ *para cada* $x \in L^{-1}(y) \cap \partial\Omega$.

(H3): El grado de Brouwer de la función $\Pi N(0,\cdot)$ *restringida al espacio finito dimensional afin* $L^{-1}(y)$ *relativo al conjunto* $\Omega \cap L^{-1}(y)$ *es no nulo, es decir*

$$d_B[\Pi N(0,\cdot)|_{L^{-1}(y)}, \Omega \cap L^{-1}(y), 0] \neq 0.$$

Entonces para cada $\lambda \in [0,1)$ *la ecuación (1.2.10) tiene al menos una solución en* Ω *y la ecuación*

$$Lx = N(x) + y$$

tiene al menos una solución en $\overline{\Omega}$.

Demostración. Aplicaremos la propiedad de invariancia bajo homotopía para el operador L-compacto

$$\tilde{N}(\lambda, x) = QN(\lambda, x) + \lambda(I - Q)N(\lambda, x) + y.$$

Tenemos que verificar en primer lugar que se cumple

$$0 \notin (L - \tilde{N}(\lambda,\cdot))(Dom(L) \cap \partial\Omega)$$

para todo $\lambda \in [0,1]$.

Por la hipótesis (H1) tenemos que si $\lambda \in (0,1)$ y $x \in Dom(L) \cap \partial\Omega$ entonces $Lx \neq \lambda N(\lambda, x) + y$; luego por el lema (1.2.4)

$$Lx \neq QN(\lambda, x) + \lambda(I - Q)N(\lambda, x) + y = \tilde{N}(\lambda, x),$$

es decir que para todo $\lambda \in (0,1)$ y todo $x \in Dom(L) \cap \partial\Omega$ se verifica que $0 \notin (L - \tilde{N}(\lambda,\cdot))(Dom(L) \cap \partial\Omega)$.

Por otro lado si $\lambda = 0$ entonces nuevamente por el lema (1.2.4) toda solución de $L(x) = \tilde{N}(0,x) = QN(0,x) + y$ es solución de $Lx = y$ de manera que $QN(0,x) = 0$ y teniendo en cuenta que $Qz = 0$ sii $z \in \ker \Pi$ tenemos que $\Pi N(0,x) = 0$. Ahora de la hipótesis (H2) se tiene $\Pi N(0,x) \neq 0$ para cada $x \in L^{-1}y \cap \partial\Omega$ y entonces también se verifica que $0 \notin (L - \tilde{N}(0,\cdot))(Dom(L) \cap \partial\Omega)$ para todo $x \in Dom(L) \cap \partial\Omega$.

Finalmente si para $\lambda = 1$ y $x \in Dom(L) \cap \partial\Omega$ se cumple que $L(x) = \tilde{N}(1,x) = N(1,x) + y$ entonces se verifica en forma directa la última afirmación del teorema y entonces podemos asumir en definitiva que $0 \notin (L - \tilde{N}(\lambda,\cdot))(Dom(L) \cap \partial\Omega)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ y $x \in Dom(L) \cap \partial\Omega$.

Por la propiedad de invariancia bajo homotopía tenemos que $d[(L, \tilde{N}(\lambda,\cdot)), \Omega]$ no depende de $\lambda \in [0,1]$ de manera que podemos calcular su valor para $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} d[(L,\tilde{N}(0,\cdot)),\Omega] &= d[(L,QN(0,x)+y),\Omega] = \\ &= d_{LS}(I-P-\Gamma\Pi N(0,\cdot)-K_P y,\Omega,0). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Ahora distinguimos dos casos:

1) Si $\ker(L)=\{0\}$ entonces tenemos que $P=0$, $Q=0$, $\Pi=0$, $K_{P,Q}=L^{-1}$ y

$$d[(L,\tilde{N}(0,\cdot)),\Omega] = d_B(I-L^{-1}y,\Omega,0).$$

En este caso la hipótesis (H2) es equivalente a que $L^{-1}\{y\}\cap\partial\Omega=\emptyset$ y con la convención del grado de Brouwer para espacios de dimensión cero (observación 1.2.5) la hipótesis (H3) se transforma en la condición $\Omega\cap L^{-1}\{y\}\neq\emptyset$ es decir si $L^{-1}(y)\in\Omega$ lo cual implica $L^{-1}\{y\}\cap\partial\Omega=\emptyset$. Ahora $d_B(I-L^{-1}y,\Omega,0)=d_B(I,\Omega,L^{-1}y)=1$ y el resultado se sigue de la propiedad de existencia de solución.

2) Si $\ker(L)\neq\{0\}$ entonces

$$\begin{aligned} & d[(L,QN(0,x)+y),\Omega] = d_{LS}(I-P-\Gamma\Pi N(0,\cdot)-K_P y,\Omega,0) = \\ & = d_{LS}(I-P-\Gamma\Pi N(0,\cdot+K_P y),-K_P y+\Omega,0) = \\ & = d_{LS}(I-P-\Gamma\Pi N(0,\cdot+K_P y)|_{\ker(L)},(-K_P y+\Omega)\cap\ker(L),0) = \\ & = d_{LS}(-\Gamma\Pi N(0,\cdot+K_P y)|_{\ker(L)},(-K_P y+\Omega)\cap\ker(L),0) = \\ & = \pm d_{LS}(\Pi N(0,\cdot+K_P y)|_{\ker(L)},(-K_P y+\Omega)\cap\ker(L),0) = \\ & = \pm d_{LS}(\Pi N(0,\cdot)|_{L^{-1}\{y\}},\Omega\cap L^{-1}\{y\},0) \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

donde se ha usado la invariancia del grado bajo traslación, la propiedad multiplicativa del grado de Brouwer y el hecho de que el grado de un isomorfismo lineal es ± 1. Ahora el resultado se sigue usando la hipótesis (H3). ■

Generalmente la verificación de las hipótesis (H2) y (H3) del teorema 1.2.5 no son inmediatas; a los efectos de evitar trabajar con el espacio cociente procedemos de la siguiente manera. Consideramos el caso $y=0$ y observamos que si

$$J: Im(Q)\to\ker(L)$$

es un isomorfismo para algún proyector continuo $Q:Y\to Y$ que satisface la condición (1.2.1b) entonces la equivalencia formulada en la proposición (1.2.2) se cumple con

$$\mathcal{F}x = x-Px-JQNx-K_{P,Q}Nx \tag{1.2.14}$$

y se tiene el siguiente corolario del teorema 1.2.5 que usaremos en capítulos posteriores

Corolario 1.2.6. *Sean $L: Dom(L)\subset X\to Y$ un operador de Frdedholm de índice cero y $N:[0,1]\times\overline{\Omega}\to Y$ L-compacto sobre $[0,1]\times\overline{\Omega}$, $N(0,\cdot):=N$ y $J: Im(Q)\to\ker(L)$ un isomorfismo para algún proyector continuo $Q:Y\to Y$ que satisface la condición (1.2.1b). Supongamos que se cumplen las hipótesis*

(H1): $Lx\neq\lambda N(\lambda,x)$ para cada $\lambda\in(0,1)$ y cada $x\in Dom(L)\cap\partial\Omega$.

(H2): $QN\neq 0$ para cada $x\in\ker(L)\cap\partial\Omega$.

(H3):

$$d_B(JQN|_{\ker(L)}, \Omega \cap \ker(L), 0) \neq 0.$$

Entonces las conclusiones del teorema (1.2.5) siguen siendo válidas.

Demostración. Con la notación $\Pi_Q := \Pi|_{Im(Q)}$ observamos que

$$\Gamma\Pi N = \Gamma\Pi QN = (\Gamma\Pi_Q)QN$$

siendo $\Gamma\Pi_Q$ un isomorfismo de $Im(Q)$ sobre $\ker(L)$. Luego

$$d[\Pi N|_{\ker(L)}, \Omega \cap \ker(L), 0] = \pm d[JQN|_{\ker(L)}, \Omega \cap \ker(L), 0]$$

de donde se sigue el resultado. ■

Observación 1.2.6. Notamos que las hipótesis (H2) y (H3) conjuntamente dicen que el grado de Brouwer de la función QN existe y es distinto de cero. Además para algún isomorfismo $\varphi : \ker(L) \to \mathbb{R}^n$ ponemos

$$\overline{G} := \varphi(\ker(L) \cap \overline{\Omega})$$

e identificamos $JQN|_{\ker(L)}$ con $h := \varphi JQN\varphi^{-1}|_{\overline{G}}$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\Omega} \cap \ker(L) \arrow[r, "N"] & Y \arrow[r, "Q"] & Im(Q) \arrow[r, "J"] & \ker(L) \arrow[d, "\varphi"] \\
\overline{G} \arrow[u, "\varphi^{-1}|_{\overline{G}}"] \arrow[rrr, "h"] & & & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

1.3 Algunas aplicaciones de la teoría del grado de coincidencia a ciertos problemas resonantes.

En esta sección se dan algunos resultados que se adaptarán a ciertos problemas resonantes que se describen en el siguiente capítulo.

La estrategia del método del grado topológico comienza reformulando una determinada ecuación diferencial como una ecuación funcional

$$Lx = Nx$$

donde x pertenece a cierto espacio de Banach adecuado. En general el operador L es un operador lineal de diferenciación y la no linealidad N involucra derivadas de orden inferior a las que ocurren en L. Dependiendo de las condiciones de contorno del problema, el operador L puede invertirse (ver por ejemplo (1.4.4)) y en tal caso $Lx = Nx$ es equivalente al *problema de punto fijo*

$$x = L^{-1}N(x).$$

Si L no es inversible se dice que el *problema* es *resonante* y bajo ciertas condiciones, por ejemplo en una ecuación de segundo orden bajo condiciones de tipo Neumann o periódicas, podemos usar la teoría del grado de coincidencia de acuerdo al siguiente esquema basado en el corolario 1.2.6:

1. Se eligen espacios de Banach adecuados X e Y; un operador lineal $L : Dom(L) \subset X \to Y$ con $Dom(L)$ un subespacio de X y $N : X \to Y$ de forma tal que el problema a resolver sea equivalente a la ecuación $L(x) = N(x), x \in Dom(L)$.

2. Se prueba que L es un operador de Fredholm de índice cero y a partir de la determinación de proyectores continuos P, Q que satisfacen las relaciones (1.2.1a) y (1.2.1b), un isomorfismo $J : Im(Q) \to \ker(L)$ y la inversa generalizada de L, es decir $K_{P,Q}$, se define la homotopía (1.2.14).

3. Se prueba la existencia de un conjunto $\Omega \subset X$ abierto y acotado de forma tal que $N : \overline{\Omega} \subset X \to Y$ resulte ser un operador L-compacto y se verifiquen las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del corolario 1.2.6.

Se observará que en todos los casos tratados en esta tesis el operador N es independiente del parámetro λ, de manera que la familia uniparamétrica de problemas sobre la que se aplica el método de continuación es $Lx = \lambda Nx$ con $\lambda \in [0, 1]$ y $x \in Dom(L) \cap \overline{\Omega}$.
El procedimiento para la determinación de la existencia del conjunto Ω está basado, en parte, en el obtención de *cotas a priori* de las supuestas soluciones del problema; en este sentido usaremos, en la próxima subsección, la desigualdad de Wirtinger, según la cual para una función $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua que satisface $x(0) = x(T)$ y $x'(0) = x'(T)$ existe una constante [1] $C > 0$ tal que

$$||x - \overline{x}||_{L^2(0,T)} \leq C||x'||_{L^2(0,T)} \tag{1.3.1}$$

donde $\overline{x} := \int_0^T x(t)\, dt$ es el promedio de x sobre $[0, T]$. en

1.3.1 Condiciones de Landesman-Lazer.

En un artículo clásico Landesman y Lazer dan condiciones suficientes para la existencia de solución de un problema elíptico resonante con condiciones de Dirichlet ([43],[52]); esas condiciones se pueden formular para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias en términos del comportamiento asintótico de la no linealidad.

Consideramos el problema de segundo orden T-periódico

$$\begin{cases} x'' = f(t, x) \\ x(0) = x(T), \;\; x'(0) = x'(T) \end{cases} \tag{1.3.2}$$

donde $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Un primer resultado es el siguiente

Teorema 1.3.1. Landesman-Lazer. Caso Asintótico. *Sea $f(t, x) = p(t) - g(x)$ con $g \in C(\mathbb{R})$ acotada, $p \in C([0, T])$ tal que existen los límites*

$$g(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

y

$$g(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} g(x).$$

[1] Se puede probar que la constante óptima es $C = \frac{T}{2\pi}$

Si se satisface que

$$g(-\infty) < \overline{p} < g(+\infty) \tag{1.3.3a}$$

ó

$$g(+\infty) < \overline{p} < g(-\infty) \tag{1.3.3b}$$

donde $\overline{p} := \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx$ *designa el promedio de p sobre* $[0, T]$ *entonces el problema (1.3.2) tiene al menos una solución* T*-periódica.*

Observación 1.3.1. Si para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$g(-\infty) < g(x) < g(+\infty) \tag{1.3.4}$$

entonces la condición (1.3.3a) es también necesaria.

De la demostración de este teorema ([6], [7],[52]) se sigue que las condiciones de Landesman-Lazer así enunciadas pueden debilitarse en el sentido de levantar la exigencia de la existencia del límite de la no linealidad, por ejemplo pidiendo que para alguna constante $R > 0$ se cumpla

$$g(-x) < \overline{p} < g(x) \tag{1.3.5a}$$

ó

$$g(x) < \overline{p} < g(-x) \tag{1.3.5b}$$

para todo $x \geq R$.

Bajo cualquiera de estas dos condiciones (1.3.5a) ó (1.3.5b) se verifica que si $\overline{p} = 0$ entonces el problema tiene solución aún cuando $g(\pm\infty) = 0$, es decir para el caso de las llamadas *vanishing nonlinearities*.

Un segundo resultado, más general, es el siguiente

Teorema 1.3.2. Landesman-Lazer. Caso Asintótico Generalizado. *Sea* $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *acotada tal que*

$$\limsup_{x\to\pm\infty} f(t, x) = f_s^{\pm}(t) \quad \liminf_{x\to\pm\infty} f(t, x) = f_i^{\pm}(t). \tag{1.3.6}$$

Si se satisface que

$$\int_0^T f_s^-(t)\,dt < 0 < \int_0^T f_i^+(t)\,dt \tag{1.3.7a}$$

ó

$$\int_0^T f_s^+(t)\,dt < 0 < \int_0^T f_i^-(t)\,dt \tag{1.3.7b}$$

entonces el problema (1.3.2) tiene al menos una solución T *periódica.*

Demostración. Siguiendo el esquema recién enunciado, en primer lugar elegimos, en este caso, $X = Y = C[0, T]$ con la norma $||\cdot||_\infty$ y consideramos los operadores

$$L : Dom(L) \subset X \to X$$

con

$$Dom(L) = \{x \in C^2[0,T] : \ x(0) = x(T), \ x'(0) = x'(T)\}$$

y

$$N : X \to X$$

definidos

$$Lx(t) = x''(t), \ \ x \in Dom(L) \ ; \ Nx(t) = f(t, x(t)), \ \ x \in X$$

para todo $t \in [0,T]$.

Fácilmente se verifica que el problema es resonante, pues $\ker(L) = \mathbb{R}$ y además

$$Im(L) = \{x \in X : \ \overline{x} = 0\}.$$

Luego L resulta ser un operador de Fredholm de índice cero .

Ahora consideramos los proyectores continuos $P, Q : X \to X$ definidos $Q(x) = P(x) := \overline{x}$, el isomorfismo $J : Im(Q) \to \ker(L)$ dado por la identidad y la inversa de $L_P = L|_{Dom(L)\cap\ker(P)}$; más precisamente, dada $\phi \in Im(L)$, se define $K_P(\phi) := x$ siendo x la única solución de promedio cero del problema

$$\begin{cases} x'' = \phi \\ x(0) = x(T), \ x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Usando la desigualdad de Wirtinger (1.3.1) y el teorema 1.1.1 de Arzelá-Ascoli se comprueba que K_P es compacto; luego la inversa generalizda $K_{P,Q} = (I-Q)K_P$ es compacta.

En segunda instancia, se considera la familia uniparamétrica de problemas

$$(P_\lambda) : \ \ Lx = \lambda Nx, \ \ x \in Dom(L), \ \ \lambda \in [0,1]$$

y según la proposición (1.2.2) tenemos que $x \in Dom(L)$ es solución de (P_λ) para $\lambda \in (0,1]$ si y sólo si $\mathcal{F}_\lambda(x) = 0$ donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\lambda(x) &:= x - P(x) - JQ(Nx) - \lambda K_{P,Q}(Nx) = \\ &= x - P(x) - JQ(f(\cdot,x)) - \lambda K_P(I-Q)(f(\cdot,x)) = \\ &= x - \left[\overline{x} + \overline{f(\cdot,x)} + \lambda K_P(\ f(\cdot,x) - \overline{f(\cdot,x)} \ )\right]. \end{aligned}$$

Finalmente debemos probar la existencia de un conjunto $\Omega \subset X$ abierto y acotado de forma tal que $N : \overline{\Omega} \to X$ sea L-compacto y se verifiquen las hipótesis (H1) (H2) y (H3) del corolario 1.2.6. Consideraremos el caso (1.3.7b) pues el otro es análogo.

En primera instancia observamos que si $\Omega \subset X$ es un conjunto abierto y acotado arbitrario entonces $\Pi N : \overline{\Omega} \to coker(L)$ es continuo, $\Pi N(\overline{\Omega})$ es acotado y $K_{P,Q}N$ es un operador compacto, de manera que N es L-compacto en $\overline{\Omega}$.

Ahora veamos que existe $r_1 > 0$ suficientemente grande tal que si $x \in Dom(L)$ y $||x||_\infty > r_1$ entonces $Lx \neq \lambda Nx$ para todo $\lambda \in (0,1)$. Por el absurdo, supongamos que existen sucesiones $(x_n) \subset Dom(L)$, $(\lambda_n) \subset (0,1)$ tal que $||x_n||_\infty \to +\infty$ y $\mathcal{F}_{\lambda_n}(x_n) = 0$. Luego $x_n''(t) = \lambda_n f(t, x_n(t))$ con $\lambda_n \in (0,1)$, $x_n(0) = x_n(T)$ y $x_n'(0) = x_n'(T)$ y observamos que si $z_n = x_n - \overline{x_n}$ entonces usando la desigualdad de Wirtinger

$$||z_n||_\infty \leq C||z_n''||_\infty = C||x_n''|| < C||f(\cdot, x_n)||_\infty \leq M$$

para cierta constante $M > 0$; así debemos tener que $\overline{x_n} \to \infty$ y pasando a una subsucesión si fuera necesario podemos suponer que $\overline{x_n} \to +\infty$.
Ahora teniendo en cuenta que $\int_0^T f(t, x_n(\tau))\, dt = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y usando el lema de Fatou se concluye que

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T f(t, x_n(\tau))\, dt = \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T f(t, z_n(\tau) + \overline{x_n})\, dt \\ &\leq \int_0^T \liminf_{n\to+\infty} f(t, z_n(\tau) + \overline{x_n})\, dt \leq \int_0^T f_s^+(t)\, dt \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. El caso $\overline{x_n} \to -\infty$ se trata de manera análoga.

Por otro lado podemos elegir $r_2 > 0$ de forma tal que $QNx \neq 0$ para todo $x \in \ker(L)$ con $||x||_\infty > r_2$. En primer lugar observamos que, teniendo en cuenta las definiciones de N, P, Q y J y que $\ker(L) = \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_0|_{\ker(L)}(x) = -JQ(Nx) = -Q(Nx) = -\overline{f(\cdot, x)} = -\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x(t))\, dt$$

luego, según lo observado en (1.2.6), identificamos $-QN|_{\ker(L)}$ con la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida

$$h(r) := -\frac{1}{T}\int_0^T f(t, r)\, dt.$$

Ahora usando nuevamente el lema de Fatou tenemos

$$\limsup_{r\to+\infty} h(r) \leq \frac{1}{T}\int_0^T f_s^+(t, r)\, dr < 0$$

y

$$\limsup_{r\to-\infty} h(r) \geq \frac{1}{T}\int_0^T f_i^-(t, r)\, dr > 0$$

luego existe r_2 suficientemente grande tal que $h(r_2) < 0 < h(-r_2)$.

En definitiva si elegimos $\Omega := B_r(0) := \{x \in X : ||x||_\infty < r\}$ con $r > \max\{r_1, r_2\}$ se verifican las hipótesis (H1) y (H2) del corolario (1.2.6) y además $d_B(JQN|_{\ker(L)}, \Omega \cap \ker L, 0) = d_B(h, B_r(0) \cap \mathbb{R}, 0) = -1$ de donde se obtiene el resultado $\blacksquare$.

Es interesante observar que para el caso (1.3.7a) el grado $d_B(JQN|_{\ker(L)}, \Omega \cap \ker(L), 0) = 1$; la diferencia en el valor del grado según el caso se ve reflejada, cuando se aborda el problema por métodos variacionales, en el tipo de punto crítico de la funcional en juego: para el caso (1.3.7a) la funcional es coerciva y se tiene un mínimo mientras que para el caso (1.3.7b) un punto silla.

En todos los casos considerados hasta aquí, la no linealidad se supone acotada y se imponen ciertas condiciones sobre su comportamiento en el infinito.

En primer lugar observamos que la hipótesis de la acotación de la no linealidad no puede eliminarse sin imponer alguna restricción como se ve a partir del siguiente ejemplo

$$x''(t) + x(t) = sen(t)$$

que aún cumpliendo la condición (1.3.5a) no tiene soluciones 2π-periódicas.

Por otro lado, podemos evitar la condición de acotación en el siguiente sentido. Usando la desigualdad de Wirtinger (1.3.1) en la ecuación

$$x'' = \lambda(p - g(x)),\ \lambda \in (0, 1]$$

se tiene

$$||x'||_{L^2(0;T)} \leq \frac{T}{2\pi}||x''||_{L^2(0;T)} \leq \frac{T}{2\pi}||p - g(x)||_{L^2(0;T)}.$$

Luego si $||x||_\infty = R$

$$||x - \overline{x}||_\infty \leq \frac{T^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\left(||p||_{L^2} + T^{\frac{1}{2}}G_R\right) := \Gamma_R \tag{1.3.8}$$

donde

$$G_R = \sup\{g(x) : x \in \overline{B_R(0)}\}.$$

Ahora si consideramos $R > 2\Gamma_R$ entonces

$$|x(t)| \geq |\overline{x}| - ||x - \overline{x}||_\infty \geq R - 2\Gamma_R > 0.$$

Por otro lado integrando la ecuación obtenemos

$$\int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T g(u(t))\,dt$$

de donde deducimos que si $\overline{x} > 0$ entonces

$$\inf(g(I_R)) \leq \overline{p} \leq \sup(g(I_R))$$

con

$$I_R := [R - 2\Gamma_R, R]$$

y si $\overline{x} \leq 0$

$$\inf(g(J_R)) \leq \overline{p} \leq \sup(g(J_R))$$

con

$$J_R := [-R, 2\Gamma_R - R].$$

De esta forma, por ejemplo, la condición (1.3.5a) puede sustituirse por esta otra

$$g(-x) < \overline{p} < g(x) \text{ para todo } x \in I_R \tag{1.3.9}$$

para alguna constante $R > 0$ con $I_R = [R - 2\Gamma_R, R] \subset \mathbb{R}^+$.

1.3.2 Condición de Nirenberg

En esta subsección queremos dar condiciones suficientes, análogas a las de Landesman-Lazer, para sistemas de la forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{p}(t), \ t \in (0,T) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T), \ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}'(T) \end{cases} \tag{1.3.10}$$

con $\mathbf{g} \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ acotada y $\mathbf{p} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Para adaptar las condiciones de Landesman-Lazer al caso de sistemas comenzamos observando que para el caso escalar, $n = 1$, los límites de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\pm\infty$ pueden ser considerados como límites radiales de los bordes de la bola $B_1(0) \subset \mathbb{R}$, es decir:

$$g(\pm\infty) = \lim_{s \to +\infty} g(s \cdot v) = g_v$$

con $v = \pm 1$.

De esta forma g puede definirse en forma continua en la recta extendida. La condición de Landesman Lazer dice, en particular, que $g_v \neq \overline{p}$ para v en $S^0 = \{\pm 1\}$ lo cual permite definir la aplicación $\psi : S^0 \to S^0$

$$\psi(v) = \frac{g_v - \overline{p}}{|g_v - \overline{p}|}.$$

De la definición de ψ y de las condiciones de Landesman-Lazer se ve que su grado, en el sentido de la definición 1.1.5, es no nulo.

En este sentido el resultado que sigue es una adaptación de las condicones de Landesman-Lazer para sistemas a la vez que una adaptación de un resultado más general dado por Nirenberg para un sistema elíptico.

Teorema 1.3.3. Nirenberg. *Sea* $\mathbf{g} \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *acotada y* $\mathbf{p} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ *tal que los límites radiales*

$$\mathbf{g_v} := \lim_{s \to +\infty} \mathbf{g}(s \cdot \mathbf{v}) \tag{1.3.11}$$

existen y son uniformes respecto de $\mathbf{v} \in S^{n-1}$ *y además se satisfacen las hipótesis:*

(N1): $\mathbf{g_v} \neq \overline{\mathbf{p}}$ *para todo* $\mathbf{v} \in S^{n-1}$

(N2): el grado de la función $\psi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ *definida*

$$\psi(\mathbf{v}) := \frac{\mathbf{g_v} - \overline{\mathbf{p}}}{||\mathbf{g_v} - \overline{\mathbf{p}}||} \tag{1.3.12}$$

es distinto de cero.

Entonces el sistema (1.3.10) tiene al menos una solución T*-periódica.*

R. Ortega y L. Sánchez [62] han dado un ejemplo en el cual se muestra que para el caso para $n > 1$ la generalización de las condiciones (1.3.5a)-(1.3.5b) no son válidas; más precisamente, presentan un sistema que no tiene soluciones T-periódicas y que sin embargo, para alguna constante $R > 0$, satisface las siguientes hipótesis:

(O1): $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq \overline{\mathbf{p}}$ para todo $||\mathbf{x}|| \geq R$.

(O2): El grado de la función $\psi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ definida

$$\psi(\mathbf{v}) := \frac{\mathbf{g}(R \cdot \mathbf{v}) - \overline{\mathbf{p}}}{||\mathbf{g}(R \cdot \mathbf{v}) - \overline{\mathbf{p}}||} \tag{1.3.13}$$

es distinto de cero.

Por otro lado en el artículo de R. Ortega y J.R Ward [63] se estudia existencia de solución de sistemas para los que no valen las condiciones de Nirenberg; las hipótesis acerca de $\mathbf{g}_{\mathbf{v}}$ se reeemplazan por otras referidas al cociente $\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})-\overline{\mathbf{p}}}{||\mathbf{g}(\mathbf{x})-\overline{\mathbf{p}}||}$ de forma tal que eventualmente los límites radiales pueden ser iguales al promedio $\overline{\mathbf{p}}$ para algunos puntos de la esfera, incluso para todos o aún ni siquiera existir.

1.3.3 Una condición geométrica.

En todos los casos considerados hasta aquí la no linealidad se supone acotada. En esta subsección levantamos esta restricción. Comencemos recordando la siguiente

Definición 1.3.1. *Cápsula Convexa.* Sea X un espacio vectorial y $A \subset X$. Se define la cápsula convexa de A, notada $co(A)$, como el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto A

$$co(A) := \bigcap \{\ C : A \subset C \ \text{ y } \ C \ \text{ es convexo } \}.$$

Teorema 1.3.4. de la Cápsula Convexa. *Con las notaciones y definiciones dadas anteriormente si existen constantes $\overline{R}, R$ tal que $\overline{R} > R > 0$ y se satisfacen*

(C1): $\Gamma_{R+\overline{R}} < R$

(C2): Para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ con $||\mathbf{v}|| = \overline{R}$

$$\overline{\mathbf{p}} \notin co\left(\mathbf{g}\left(\overline{B_R(\mathbf{v})}\right)\right) \tag{1.3.14}$$

y

(C3): $d_B(\mathbf{g} - \overline{\mathbf{p}}, B_R(0), 0) \neq 0$

entonces el problema (1.3.10) tiene al menos una solución T periódica.

Observación 1.3.2. Este resultado depende del comportamiento de g sobre la corona

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{R} - R \leq ||\mathbf{x}|| \leq \overline{R} + R\}$$

y en este sentido puede ser interpretado como una extensión de la condición (1.3.9); asimismo observamos que la hipótesis (1.3.14) no puede ser sustituida por esta otra más débil

$$\mathbf{g} \neq \overline{\mathbf{p}} \ \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } ||\mathbf{v}|| = \overline{R}.$$

Demostración. Siguiendo el esquema general establecido a partir del corolario (1.2.6) se considera el espacio de Banach

$$E = \{\mathbf{x} \in C([0,T]) : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T)\}$$

dotado de la norma infinito, el abierto

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in E : ||\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}||_\infty < R,\ ||\overline{\mathbf{x}}|| < \overline{R}\}$$

y se prueba que

1) $\mathbf{x}'' \neq \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ para $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ y $0 < \lambda < 1$

2) $g(\mathbf{x}) \neq \overline{\mathbf{p}}$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \cap \partial\Omega$ y

3) $d_B(\mathbf{g} - \overline{\mathbf{p}}, B_R(0), 0) \neq 0$

Por un lado observamos que 2) y 3) se siguen directamente de las hipótesis del teorema y del hecho de que $\mathbb{R}^n \cap \partial\Omega = B_{\overline{R}}(0)$.

Por otro lado si $\mathbf{x}'' = \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ para $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ y $0 < \lambda < 1$ entonces

$$||\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}||_\infty \leq \frac{T^{3/2}}{2\pi} \left(||\mathbf{p}||_{L^2} + T^{1/2} G_{R+\overline{R}} \right) = \Gamma_{R+\overline{R}} < R$$

de manera que $||\mathbf{x}|| = \overline{R}$ y $\mathbf{x}(t) \in B_r(\overline{\mathbf{x}})$ para cierto $r < R$ y todo $t \in [0,T]$.

A partir de la condición de la cápsula convexa (1.3.14) y usando la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach existe un hiperplano $H = \langle \mathbf{w} \rangle^\perp$ que separa estrictamente el punto $\overline{\mathbf{p}}$ del conjunto compacto y convexo $co\left(g\left(\overline{B_r(\overline{\mathbf{v}})}\right)\right)$; es decir

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{a} + \mathbf{x}) - \overline{\mathbf{p}}, \mathbf{w} \rangle \ \geq \ \mu$$

para cierta constante $\mu > 0$ y todo vector $||\mathbf{a}|| < r$.

Ahora integrando la ecuación se ve que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{a}(t) + \overline{\mathbf{x}})\, dt = \overline{\mathbf{p}}$$

donde $\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}(t) - \overline{\mathbf{x}}$ y entonces

$$0 = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathbf{g}(\mathbf{a}(t) + \overline{\mathbf{p}}) - \overline{\mathbf{p}}, \mathbf{w} \rangle\, dt \geq \mu > 0$$

lo cual es absurdo. ■

1.4 Combinación del método de sub y super soluciones ordenadas con el método diagonal.

El método de sub y super soluciones ordenadas es una herramienta básica del análisis no lineal para resultados de existencia de problemas de contorno; fue introducido por Scorza Dragoni [76] en el año 1931 para funciones de clase C^2 y en el año 1938 para funciones L^1-Caratheodory. Desde entonces el método ha sido desarrollado bajo múltiples variantes ([17],[29],[34],[64],[69],[70],[80]).

Nosotros aquí describiremos una situación típica en la que se aplica el método de C^2-sub y super soluciones ordenadas que adaptaremos, en un capítulo posterior, al problema de electrodifusión abstracto. A tales efectos consideremos el siguiente problema de segundo orden con condiciones de contorno separadas o de Sturm-Louville

$$\begin{cases} y'' = f(x,y), \quad x \in (a,b) \\ a_1 y(a) - a_2 y'(a) = A \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = B \end{cases} \tag{1.4.1}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ y $a_2, b_2 \in \mathbb{R}^+$ con $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$.

Si la función $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua las soluciones de (1.4.1) son de clase C^2 y una definición de sub y super soluciones adecuada al problema es la siguiente (para una definición menos restrictiva ver [30])

Definición 1.4.1. *C^2-sub y super soluciones ordenadas.* Una función $\alpha \in C^1([a,b]) \cap C^2((a,b))$ se dice que es una C^2-sub solución del problema (1.4.1) si

1. $\alpha''(x) \geq f(x, \alpha(x))$ para todo $x \in (a,b)$.
2. $a_1\alpha(a) - a_2\alpha'(a) \leq A, \; b_1\alpha(b) + b_2\alpha'(b) \leq B.$

Una función $\beta \in C^1([a,b]) \cap C^2((a,b))$ se dice que es una C^2-super solución del problema (1.4.1) si

1. $\beta''(x) \leq f(x, \beta(x))$ para todo $x \in (a,b)$.
2. $a_1\beta(a) - a_2\beta'(a) \geq A, \; b_1\beta(b) + b_2\beta'(b) \geq B.$

Además decimos que α y β es un par de sub y super soluciones ordenadas del problema (1.4.1) si α es una sub-solución, β una super-solución del problema (1.4.1) y

$$\alpha(x) \leq \beta(x)$$

para todo $x \in [a,b]$.

Ahora consideremos el conjunto

$$E = \{(x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \; \alpha(x) \leq u \leq \beta(x)\} \tag{1.4.2}$$

con α y β un par de C^2-sub y super soluciones ordenadas del problema (1.4.1) y $f : E \to \mathbb{R}$ continua y acotada.

Teorema 1.4.1. *Bajo los supuestos dados, existe al menos una solución $y \in C^2([a, b])$ del problema (1.4.1) de forma tal que*

$$\alpha(x) \leq y(x) \leq \beta(x) \tag{1.4.3}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. El esquema de la demostración es el siguiente:
(I): Se considera el problema auxiliar que es una modificación del original

$$\begin{cases} y'' - y = f(x, P(x, y)) - P(x, y), \quad x \in (a, b) \\ y(a) - a_2 y'(a) = A + (1 - a_1)P(a, y(a)), \\ y(b) + b_2 y'(b) = B + (1 - b_1)P(b, y(b)) \end{cases} \tag{1.4.4}$$

donde $P : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la *función* de *truncamiento*

$$P(x, y) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } y < \alpha(x) \\ y & \text{si } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \\ \beta(x) & \text{si } y > \beta(x) \end{cases} \tag{1.4.5}$$

es decir $P(x, y) := \max\{\alpha(x), \min\{y, \beta(x)\}\}$.

Luego definimos los operadores

$$Ly := (y'' - y, y(a) - a_2 y'(a), y(b) + b_2 y'(b))$$

y

$$Ny := (f(x, P(x, y)) - P(x, y), A + (1 - a_1)P(a, y(a)), B + (1 - b_1)P(b, y(b)))$$

de forma tal que el problema (1.4.4) es equivalente a la ecuación $Ly = Ny$ y como el operador L es inversible en definitiva es equivalente al problema de punto fijo

$$y = L^{-1}Ny.$$

Finalmente teniendo en cuenta que el segundo miembro de la ecuación del problema modificado es acotado, se comprueba, usando el teorema 1.1.3 de punto fijo de Schauder, que (1.4.4) tiene al menos una solución.

(II) En segundo lugar se verifica que toda solución y del problema modificado satisface (1.4.3).

En efecto, si asumimos que $y - \alpha$ tiene un mínimo negativo en $x_0 \in (a, b)$ entonces obtenemos la siguiente contradicción

$$0 \leq y''(x_0) - \alpha''(x_0) = f(x_0, \alpha(x_0)) + y(x_0) - \alpha(x_0) - \alpha''(x_0) < 0$$

Tampoco es posible que el mínimo negativo se alcance en los bordes. Si por ejemplo $x_0 = a$ tenemos $y'(a) - \alpha'(a) \geq 0$ y

$$0 = A + (1 - a_1)P(a, y(a)) - y(a) + a_2 y'(a) > A - a_1\alpha(a) + a_2\alpha'(a) \geq 0$$

y si $x_0 = b$

$$0 = B + (1 - b_1)P(b, y(b)) - y(b) - b_2 y'(b) = B - b_1 y(b) - b_2 y'(b) \leq 0.$$

Análogamente se prueba también que $y(x) \leq \beta(x)$ par todo $x \in [a, b]$.

En definitiva si consideramos una solución del problema modificado observamos que $P(x, y(x)) = y(x)$ de forma tal que P nada trunca y el problema original tiene al menos una solución que naturalmente satisface (1.4.3), es decir

$$\alpha(x) \leq y(x) \leq \beta(x)$$

para todo $x \in [a, b]$. ■

El caso correspondiente a la condición mixta $-y'(a) = A,\ y(b) = B$, es decir con $a_1 = b_2 = 0$ y $a_2 = b_1 = 1$, lo usaremos en un cápítulo posterior.

Ahora veremos como se puede combinar el método de las sub y super soluciones ordenadas con un argumento del tipo diagonal [89] para probar existencia de solución en un intervalo no acotado. A modo de ejemplo consideremos el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} y'' = f(x, y), & x \in (0, +\infty) \\ y(0) = y_0, & y(\infty) = y_\infty := \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) \end{cases} \tag{1.4.6}$$

y supongamos que existe un par de C^2-sub y super soluciones ordenadas, esto es $\alpha, \beta \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) \cap C^2((0, +\infty), \mathbb{R})$ con $\alpha(x) \leq \beta(x)$ tal que

$$\begin{array}{l} \alpha''(x) \geq f(x, \alpha), \ \ \beta''(x) \leq f(x, \beta) \\ \alpha(0) \leq y_0 \leq \beta(0), \ \ \alpha_\infty = \beta_\infty = y_\infty \end{array} \tag{1.4.7}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Teorema 1.4.2. *Bajo este supuesto existe al menos una solución $y \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) \cap C^2((0, +\infty), \mathbb{R})$ del problema (1.4.6) tal que $\alpha(x) \leq y(x) \leq \beta(x)$.*

Observación 1.4.1. En la demostración del teorema usaremos la norma C^k de x con $k = 1, 2$; más precisamente como es usual si $I = [a, b]$ con $a < b$, $x \in C^k(I)$, $k \geq \mathbb{N}_0$ definimos la norma C^k de x de la siguiente manera

$$||x||_{C^k(I)} := \sum_{j=0}^{k} ||x^{(j)}||_\infty$$

donde (j) indica el orden de derivación de x, $x^{(0)} := x$ y $|| \cdot ||_\infty$ la norma infinito.

Demostración. El esquema de la demostración es como sigue. Consideramos la siguiente sucesión de problemas

$$(P_n) := \begin{cases} y'' = f(x, y), & x \in [0, n] \\ y(0) = y_0, & y(n) = \frac{\alpha(n) + \beta(n)}{2} \end{cases} \tag{1.4.8}$$

y una solución y_n de forma tal que $\alpha|_{[0,n]} \leq y_n \leq \beta|_{[0,n]}$.

Para $m > 0$ fijo y $n \geq m > 0$, definimos

$$\phi_n(t) = \frac{y_n(m) - y_0}{m} t + y_0$$

y observamos que existe una constante C_m independiente de n tal que $||y_n - \phi_n||_{C^2([0,m])} \leq C_m$. Ahora usando Arzelá-Ascoli, se comprueba que existe una subsucesión de $(y_n)_{n \geq m}$ que converge en $[0, m]$ en el sentido de la norma C^1.

En lo que sigue se construye una sucesión infinita de subsucesiones de una cierta sucesión de partida; a los efectos de poner de manifiesto la idea que está en juego se hará explícita la notación usual para subsucesiones.

Procedemos del siguiente modo. Para $m = 1$, consideramos una sucesión de funciones $(y_n)_{n \geq 1}$ donde cada término $y_n : [0, n] \to \mathbb{R}$ es una solución del problema $P_n, n \geq 1$ y elegimos una subsucesión $(y_{\sigma_1(n)})_{n \geq 1}$ de $(y_n)_{n \geq 1}$ de forma tal que $((y_{\sigma_1(n)})|_{[0,1]})_{n \geq 1}$ converge a cierta función

$$y^1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

en el sentido de la norma C^1.

En el segundo paso, para $m = 2$, se elige una susubcesión $(y_{\sigma_2(n)})_{n \geq 1}$ de la sucesión $(y_{\sigma_1(n)})_{n \geq 1}$ de forma tal que $((y_{\sigma_2(n)})|_{[0,2]})_{n \geq 1}$ converge, en el sentido de la norma C^1, a una función

$$y^2 : [0, 2] \to \mathbb{R}.$$

Observación 1.4.2. Notemos que $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $\sigma_2 : \mathbb{N} \to Im(\sigma_1)$ son funciones estrictamente crecientes y $\sigma_2(n) \geq \sigma_1(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hasta aquí tenemos que

$$(y_{\sigma_2(n)})_{n \geq 1} \subset (y_{\sigma_1(n)})_{n \geq 1} \subset (y_n)_{n \geq 1}$$

tal que las sucesiones $((y_{\sigma_2(n)})|_{[0,2]})_{n \geq 1}, ((y_{\sigma_1(n)})|_{[0,1]})_{n \geq 1}$ convergen en el sentido de la norma C^1 y por unicidad del límite se tiene que $y^2|_{[0,1]} = y^1$.

Repitiendo este procedimiento se obtiene una sucesión de sucesiones $(y_{\sigma_k(n)})_{n \geq 1}, k \in \mathbb{N}$ de forma tal que cada sucesión $((y_{\sigma_k(n)})|_{[0,k]})_{n \geq 1}$ converge en el sentido de la norma C^1 a una función

$$y^k : [0, k] \to \mathbb{R}.$$

Ahora por construcción las funciones $(y^k)_{k \geq 1}$ se pegan bien en el sentido de que

$$y^{k+1}|_{[0,k]} = y^k$$

de manera que la función

$$y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

con $y(x) = y^k(x)$ si $0 \leq x \leq k$ está bien definida.

Observemos además que cada función y^k es una solución del problema P_k de forma tal que $(y^n)''_{n \geq k}$ converge uniformemente a la función $f(\cdot, y(\cdot))$ en $[0, k]$ y además $y_k(0) = y_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Luego para $x \leq k \leq n$ se tiene que

$$y^n(x) = y_0 + (y^n)'(0)x + \int_0^x \int_0^s (y^n)''(t)\,dt\,ds, \tag{1.4.9}$$

de manera que si $k \to +\infty$ entonces $n \to +\infty$ y pasando al límite obtenemos

$$y(x) = y_0 + y'(0)x + \int_0^x \int_0^s f(t, y)\ dt\ ds$$

lo que muestra que y satisface la ecuación del problema (1.4.6).

Finalmente teniendo en cuenta que $\alpha_\infty = \beta_\infty = y_\infty$ y que $\alpha|_{[0,n]} \leq y^n \leq \beta|_{[0,n]}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ concluimos que y resulta ser una solución del problema de Dirichlet (1.4.6) en $[0, +\infty)$. ■

Observación 1.4.3. El procedimiento anterior puede visualizarse en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccccccccl}
y_{\sigma_1(1)} & y_{\sigma_1(2)} & \cdots & y_{\sigma_1(k)} & \cdots & y_{\sigma_1(n)} & \cdots & \longrightarrow & y^1 & \text{en } [0,1] \\
y_{\sigma_2(1)} & y_{\sigma_2(2)} & \cdots & y_{\sigma_2(k)} & \cdots & y_{\sigma_2(n)} & \cdots & \longrightarrow & y^2 & \text{en } [0,2] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
y_{\sigma_k(1)} & y_{\sigma_k(2)} & \cdots & y_{\sigma_k(k)} & \cdots & y_{\sigma_k(n)} & \cdots & \longrightarrow & y^k & \text{en } [0,k] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
y_{\sigma_n(1)} & y_{\sigma_n(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & y_{\sigma_n(n)} & \cdots & \longrightarrow & y^n & \text{en } [0,n] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \searrow & & \downarrow & \\
 & & & & & & & & y & \text{en } [0,+\infty)
\end{array} \tag{1.4.10}$$

La sucesión diagonal del esquema (1.4.10), es decir $(y_{\sigma_n(n)})_{n\geq 1}$, converge a y; además como $(y_{\sigma_n(n)})''$ converge uniformemente a la función $f(\cdot, y(\cdot))$ en $[0, n]$, sustituyendo y^n por $y_{\sigma_n(n)}$ en (1.4.9) se obtiene la misma conclusión lo que muestra que en efecto el argumento es del tipo diagonal.

1.5 Ecuaciones diferenciales con retardo.

La teoría de las ecuaciones diferenciales con retardo no es una simple extensión de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias ([20],[24],[32],[38]). En muchas ocasiones los sistemas complejos requieren de procesos de autoregulación para su correcto funcionamiento y el efecto de la retroalimentación no es inmediato, esto es, el sistema reacciona al factor de control con cierto retardo, de manera que el estado actual del sistema depende de valores previos; esta dependencia del pasado contrasta con los modelos deterministas basados en el clásico principio de causalidad.

Comenzamos heurísticamente con algunos ejemplos que ilustran las principales diferencias que se presentan respecto de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.5.1 Algunos ejemplos y observaciones.

(1). La ecuación

$$x'(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.5.1}$$

tiene soluciones de la forma

$$x(t) = c_1\ cos(t) + c_2\ sen(t)$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias, lo cual muestra que el retardo dado en el argumento produce la existencia de soluciones oscilatorias no triviales.

(2). Consideremos el problema de valores iniciales hacia atrás (backwards)

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + bx(t-\tau) & t < -\tau \\ x(t) = \phi, & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1.5.2}$$

donde $b \neq 0$, $a \neq -b$, $\tau > 0$ es el retardo constante y $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$ una función constante no nula $\phi(t) := k$.

Fácilmente se verifica que si x es una solución entonces se tiene que

$$x(t) = -\frac{ak}{b}$$

para todo $t \in [-2\tau, -\tau]$ y como $-\frac{ak}{b} \neq k$ entonces la solución no es continua a pesar que el dato inicia es suave.

(3). El siguiente ejemplo, dado en 1969 por Winston y York [85], muestra que una ecuación diferencial con retardo puede tener infinitas soluciones o ninguna dependiendo del dato inicial; más precisamente consideramos

$$x'(t) = b(t)x(t-1) \quad t \leq 0 \tag{1.5.3}$$

con $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua definida

$$b(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ cos(2\pi t) - 1 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases} \tag{1.5.4}$$

En primer lugar observamos que $x(t) = k$, con k una constante *cualquiera*, es solución de (1.5.3) en $(-\infty, 0]$.

Ahora, sobre $[0, 1]$, tenemos que

$$x'(t) = (cos(2\pi t) - 1)k$$

con $x(0) = k$ e integrando

$$x(1) = k + k\int_0^1 (cos(2\pi t) - 1)dt = 0.$$

Pero entonces para $t \geq 1$ se verifica $x'(t) = 0$ y por lo tanto $x(t) = 0$ para todo $t \geq 1$.

Luego si consideramos la ecuación (1.5.3) con dato inicial $\phi \equiv 0$ para $t \in [1, 2]$ se ve que el problema de valores iniciales correspondiente *tiene infinitas soluciones continuas* en $(-\infty, 2]$ mientras que con ϕ no idénticamente nula en $[1, 2]$ *no tiene ninguna solución* en $(-\infty, 2]$.

(4). El ejemplo anterior también muestra que si especificamos solamente un valor inicial $x(1) = x_0 \neq 0$ entonces el problema de valores iniciales correspondiente no tiene soluciones para $t \leq 1$.

Lo mismo es válido para el caso de sistemas como lo muestra el siguiente ejemplo dado por Popov [67] en el año 1971

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-1) \quad t \geq 1 \tag{1.5.5}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si x satisface el sistema tendremos

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1'(t) = 2x_(t) \\ x_2'(t) = -x_3(t) + x_1(t-1) \\ x_3'(t) = 2x(t-1) \end{array} \right. \tag{1.5.6}$$

para $t \leq t_1$ con $t_1 > 1$. En el paso siguiente se determinan para $t \leq t_1 + 1$ las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1'(t-1) - x_3'(t) = 0 \\ x_1(t-1) - x_3(t) = c_1 \\ x_2(t) = c_2 = +c_1 t \\ x_1(t) = c_3 + 2c_2 t + c_1 t^2 \end{array} \right. \tag{1.5.7}$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias.

Finalmente para $t \leq t_1 + 2$ tenemos

$$x_3(t) = c_3 - 2c_2 + 2(c_2 - c_1)t + c_1 t^2$$

de manera que

$$x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) \equiv 0$$

luego no puede haber solución de (1.5.5) en $(-\infty, t_0]$ si $x(t_0) = (x_{01}, x_{02}, x_{03})^t$ se elige de forma tal que $x_{01} - 2x_{02} - x_{03} \neq 0$.

(5). Si un término del tipo $x(t-\tau)$ se sustituye por su correspondiente polinomio de Taylor de cierto orden puede ocurrir que las soluciones de la correspondiente ecuación diferencial ordinaria obtenida presenten características muy diferentes a las de las soluciones de la ecuación original con retardo. A modo de ejemplo consideremos la ecuación

$$x'(t) = -2x(t) + x(t-\tau). \tag{1.5.8}$$

Se puede probar [32] que todas las soluciones de la ecuación (1.5.8) son acotadas y tienden a cero cuando $t \to +\infty$.

Ahora bien, si consideramos el desarrollo de Taylor de segundo orden alrededor de $\tau = 0$ de la función $f(\tau) := x(t-\tau)$ obtenemos

$$x(t-\tau) = x(t) - x'(t)\tau + \frac{1}{2}x''(t)\tau^2 - \frac{x'''(\eta-\tau)}{3}\tau^3$$

para cierto $\eta \in (0,\tau)$ y si despreciamos los términos de orden superior a dos obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$-\frac{\tau^2}{2}x''(t) + (1+\tau)x'(t) + x(t) = 0.$$

Ahora observamos que las raíces de la ecuación característica son

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{\tau^2}\left(1 + \tau \pm \sqrt{(1+\tau)^2 + 2\tau^2}\right) > 0.$$

Luego la ecuación diferencial ordinaria tiene, en particular, soluciones de la forma $x(t) = ce^{\lambda t}$ con $c > 0$ y $\lambda := \lambda^+$, lo cual muestra que tiene soluciones exponenciales crecientes sin importar que tan pequeño sea el valor del retardo τ.

Análogamente se comprueba que todas las soluciones de la ecuación

$$x'(t) = -3x(t) - 2x(t-1)$$

están acotadas mientras que la ecuación diferencial ordinaria obtenida sustituyendo el término $x(t-1)$ por $x(t) - x'(t)$, es decir

$$-x'(t) + 5x(t) = 0$$

tiene soluciones exponenciales crecientes de la forma $x(t) = ce^{5t},\ c > 0$.

(6). Consideremos el problema de Cauchy asociado al modelo exponencial con retardo

$$\begin{cases} x'(t) = -c\,x(t-\tau), & t \geq t_0 \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \tag{1.5.9}$$

donde c y τ son constantes positivas y ϕ definida en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$ es una función continua.

Si proponemos soluciones de la forma $ke^{\lambda t}$ para la ecuación del problema (1.5.9) se obtiene la ecuación característica

$$\lambda = -ce^{-\lambda\tau}$$

que tiene una sola solución real. Para analizar la existencia de otras soluciones introducimos el cambio de variable $\lambda = \frac{1}{z}$ de manera que una solción de la ecuaciación característica es un cero de la función $h(z) = 1 + cze^{-\frac{\tau}{z}}$. Ahora bien, h tiene una singularidad esencial aislada en $z = 0$ y por el teorema de Picard concluimos que en un entorno de dicha singularidad asume todos los valores complejos salvo quizás uno. Pero teniendo en cuenta que $h(z) \neq 1$ para todo $z \neq 0$ concluimos que h tiene infinitos ceros. Luego si $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ es una de las infinitas soluciones complejas de la ecuación característica entonces

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} cos(t\lambda_2),\ x_2(t) = e^{\lambda_1 t} sen(t\lambda_2)$$

son soluciones reales de la ecuación y por lo tanto la ecuación del problema (1.5.9) tiene infinitas soluciones. [2]

Para finalizar esta subsección ilustraremos a través de un ejemplo un método que se utiliza frecuentemente para construir una solución de una ecuación diferencial con retardo.

Para ello consideraremos el problema de valores iniciales (1.5.9) y para fijar ideas, supongamos que $\phi := k$ una constante positiva. El primer paso consiste en hallar una extensión continua de la función ϕ en el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$ que satisfaga (1.5.9).[3] Más precisamente consideramos el pvi

$$(P_0) : \begin{cases} x'(t) = -c\,k, & t \geq t_0 + \tau \\ x(t_0) = k \end{cases} \tag{1.5.10}$$

e integramos

$$x_1(t) = k - c\,k(t - t_0),\ \ t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

Ahora conociendo la solución del problema (1.5.9) hasta el tiempo $t = t_0 + \tau$ tenemos que $x(t_0 + \tau) = k - ck(t_0 + \tau - t_0) = k(1 - c\tau)$ y podemos plantear el pvi

$$(P_1) : \begin{cases} x'(t) = -c\,x_1(t - \tau) = -c\,k + c^2\,k\,(t - \tau - t_0), & t \geq t_0 + \tau \\ x(t_0 + \tau) = x_1(t_0 + \tau) = k\,(1 - c\,\tau). \end{cases} \tag{1.5.11}$$

Resolviendo (P_1) en $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ obtenemos la solución $x_2(t)$ del problema (1.5.9) hasta el tiempo $t = t_0 + 2\tau$. En definitiva, procedido de esta manera podemos prolongar, paso a paso, la función correspondiente al dato inicial de forma tal que sea solución del problema (1.5.9).

El método, recién descripto, se lo conoce como *método del paso a paso*. Las limitaciones que presenta el método están a la vista; sólo en casos muy simples resulta posible la integración explícita y en general no permite establecer las características principales de la solución.

1.5.2 Condiciones suficientes para la existencia y unicidad de solución.

Una ecuación diferencial con uno o varios retardos de orden $n > 1$ es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales con uno o varios retardos de primer orden; todos los ejemplos de la subsección anterior son casos particulares de este tipo. En muchos modelos

[2] Se puede probar [38] que todos los valores característicos tienen parte real negativa si y sólo si $c\tau < \frac{\pi}{2}$; si $c\tau < \frac{1}{e}$ las soluciones convergen exponencialmente de manera que los retardos pequeños no influyen en la dinámica; si $\frac{1}{e} < c\tau < \frac{\pi}{2}$ las soluciones convergen a cero pero oscilando; finalmente si $c\tau \geq \frac{\pi}{2}$ aparecen soluciones periódicas e incluso soluciones no acotadas.

[3] Se sobreentiende, como es habitual, que $x'(t_0) = x'(t_0^+)$.

las ecuaciones diferenciales presentan retardos constantes, en otros retardos variables. En lo que sigue establecemos algunas definiciones y resultados básicos para sisitemas de ecuaciones diferenciales con retardos variables y acotados.

Consideremos el sistema de la forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(g_1(t)), x(g_2(t)), \cdots, x(g_m(t))), & t \in [t_0, \beta) \\ x(t) = \theta(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \tag{1.5.12}$$

donde $f : J \times D^m \to \mathbb{R}^n$, $g_j : J \to \mathbb{R},\ j = 1, 2, \cdots, m$ y $\theta : [t_0 - \tau, t_0] \to D$ son continuas con $J \subset [t_0, \beta) \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

La función θ describe la *historia* del sistema. Las funciones $g_j,\ j = 1, 2, \cdots, m$ se llaman *argumentos retardados* y satisfacen la siguiente condición: existe una constante $\gamma \leq t_0$ tal que

$$\gamma \leq g_j(t) \leq t$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ y para todo $t \in [t_0, \beta)$. Eventuamente podemos tener $g_j(t) = t$ para algún j y si $\tau = 0$ se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el último capítulo usaremos la siguiente notación $g_j(t) := t - \tau_j(t)$ con $\tau_j \geq 0$ (*retardos variables*) y $x_{\tau_j}(t) := x(g_j(t)),\ t \in J$.

Interpretaremos el problema (1.5.12) en un contexto algo más general. Comenzamos con la siguiente definición debida a Shimanov [77].

Definición 1.5.1. Dada $\theta : I \to \mathbb{R}^n$ con $[t - \tau, t] \subset I$ se define una nueva función

$$\theta_t : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$$

del siguiente modo

$$\theta_t(\sigma) := \theta(t + \sigma),\ \ \sigma \in [-\tau, 0] \tag{1.5.13}$$

Notemos que el gráfico de θ_t se obtiene por desplazamiento del gráfico de $\theta|_{[t-\tau,t]}$ sobre el segmento $[-\tau, 0]$; con esta definición la condición inicial del problema (1.5.12) es equivalente a $x_{t_0} = \theta_{t_0}$.

Ahora intrudicimos las siguientes notaciones

$$\mathcal{C} := C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \text{ y } \mathcal{C}_D := C([-\tau, 0], D),\ \ D \subset \mathbb{R}^n$$

y consideramos el pvi

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x_t), & t \in [t_0, \beta) \\ x_{t_0} = \phi, & \phi \in \mathcal{C}_D. \end{cases} \tag{1.5.14}$$

donde $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$.

Observemos que $x_{t_0} = \phi$ significa que $x(t_0 + \sigma) = \phi(\sigma)$ con $\sigma \in [-\tau, 0]$ o bien $x(t) = \phi(t - t_0)$ si $t = t_0 + \sigma$. En este contexto se tiene la siguiente

Definición 1.5.2. *Solución de un PVI para una Ecuación Diferencial con Retardo.* Una solución del problema de valores iniciales (1.5.14) es una función continua $x : [t_0 - r, \beta_1) \to D$ para algún $\beta_1 \in (t_0, \beta)$ que satisface

1. $x_{t_0} = \phi, \;\; \phi \in \mathcal{C}_D$
2. $(t, x_t) \in Dom(F)$ y
3. $x'(t) = F(t, x_t)$ para todo $t \in [t_0, \beta_1)$.

Además decimos que la solución x es única en $[t_0 - \tau, \beta_1)$ si dada cualquier otra solución $\tilde{x}$ tal que $[t_0 - \tau, \beta_1) \subset Dom(\tilde{x})$ se tiene que $\tilde{x}|_{[t_0-\tau,\beta_1)} = x$.

Observación 1.5.1. (I). El problema (1.5.12) se puede escribir en la forma (1.5.14). Para ello basta definir

$$F(t, \psi) := f(t, \psi(g_1(t) - t), \psi(g_2(t) - t), \cdots, \psi(g_m(t) - t))$$

para $(t, \psi) \in [t_0, \beta_1) \times \mathcal{C}_D$.

En efecto, en tal caso tenemos

$$x_t(g_j(t) - t) = x(t + g_j(t) - t) = x(g_j(t))$$

para todo $j = 1, 2, \cdots, m$ y

$$\begin{aligned} F(t, x_t) = f(t, x_t(g_1(t) - t), x_t(g_2(t) - t), \cdots, x_t(g_m(t) - t)) = \\ = f(t, x(g_1(t)), x(g_2(t)), \cdots, x(g_m(t))). \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

(II). La ecuación logística con retardo

$$x'(t) = -cx(t-1)(1 + x(t))$$

es de la forma (1.5.12) con $m = 1$, $\tau = 1$, $J = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definda

$$F(t, \psi) = -c\psi(-1)(1 + \psi(0)).$$

(III). Si definimos

$$F(t, \psi) := \int_{-r}^{0} \psi(\sigma) d\sigma$$

tenemos el siguiente sistema diferencial con infinitos retardos

$$x'(t) = F(t, x_t) = \int_{-r}^{0} x_t(\sigma)\, d\sigma = \int_{t-r}^{t} x(s) ds \tag{1.5.16}$$

usualmente llamado sistema con *retardos distribuidos*.

Ahora damos una condición que tendremos en cuenta para establecer un teorema de unicidad que resulta ser un poco más débil que la continuidad.

Definición 1.5.3. *Condición (C).* Decimos que $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ ($J := [t_0, \beta)$) satisface la condición (C) si $F(t, \chi_t)$ es continua con respecto a la variable $t \in J$ siempre que $\chi : [t_0 - \tau, \beta) \to D$ sea continua.

En particular si f y $g_j,\ j = 1, 2, \cdots, m$ son continuas entonces

$$F(t, \phi(t)) = f(t, \phi(g_1(t) - t), \phi(g_2(t) - t), \cdots, \phi(g_m(t) - t))$$

es continua cada vez que ϕ sea continua en $[t_0, \beta)$, de manera F que satisface la condición (C).

También observamos que si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces

$$F(t, \phi_t) := \int_{-\tau}^{0} \phi_t(\sigma) d\sigma = \int_{t-\tau}^{t} \phi(s)\, ds$$

depende continuamente respecto de la variable t y por lo tanto satisface la concidión (C). Lo mismo ocurre con los otros ejemplos dados en la observación (1.5.1).

En este contexto damos la siguiente representación integral de la solución del problema (1.5.14)

Definición 1.5.4. *Representación Integral de una Solución.* Si $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ satisface la condición (C) entonces una función continua $x : [t_0 - \tau, \beta_1) \to D$ para algún $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ es solución del problema de valores iniciales (1.5.14) si y sólo si

$$x(t) := \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds, & t_0 \in [t_0, t_0 + M] \end{cases} \tag{1.5.17}$$

Si $D = \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}$ es un espacio lineal y podemos considerar el espacio de Banach $(\mathcal{C}, || \cdot ||_r)$ con la norma

$$||\phi||_\tau := \sup_{\sigma \in [-\tau, 0]} \{||\phi(\sigma)||\}.$$

Si bien, en general, $\mathcal{C}_D$ no es un espacio vectorial y por lo tanto $|| \cdot ||_\tau$ no es una norma, se puede trabajar en el espacio $\mathcal{C}$ que incluye $\mathcal{C}_D$ y establecemos la siguiente

Definición 1.5.5. *Condición de Lipschitz.* Si existe una constante $K > 0$ tal que

$$F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

satisface

$$||F(t, \phi_1) - F(t, \phi_2)|| \leq K ||\phi_1 - \phi_2||_\tau$$

para todo $(t, \phi_1), (t, \phi_2) \in \mathcal{E} \subset J \times \mathcal{C}_D$ decimos que F es Lipschitz sobre $\mathcal{E}$ con constante K.

Por otro lado la funcional F se dice que es *localmente Lipschitz* si para cada $(\bar{t}, \overline{\phi}) \in J \times \mathcal{C}_D$ existe un entorno $\mathcal{E}_{a,b} \subset J \times \mathcal{C}_D$ sobre el cual F es Lipschitz donde

$$\mathcal{E}_{a,b} := ([\bar{t} - a, \bar{t} + a] \cap J) \times \overline{B}_b^{\mathcal{C}}(\overline{\phi})$$

y

$$\overline{B}_b^{\mathcal{C}}(\overline{\phi}) := \{\phi \in \mathcal{C} : ||\phi - \overline{\phi}||_\tau \leq b\}$$

con $a, b > 0$ constantes.

Los dos lemas siguientes son necesarios para la demostración del teorema de unicidad y omitimos las pruebas que se pueden encontrar en el texto de R. D. Drive (Lemma B, Lemma C, [32]).

Lema 1.5.1. *Sea $\overline{\phi} \in \mathcal{C}_D$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\{v \in \mathbb{R}^n : ||v - \overline{\phi}(\sigma)|| \leq \delta \text{ para algún } \sigma \in [-\tau, 0]\} \subset D$$

y en particular $\overline{B}_\delta^{\mathcal{C}}(\overline{\phi}) \subset \mathcal{C}_D$.

Lema 1.5.2. *Sea $\chi : [t_0 - \tau, \beta) \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces dado cualquier $\overline{t} \in [t_0, \beta)$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||\chi_t - \chi_{\overline{t}}||_\tau < \varepsilon$ siempre que $t \in [t_0, \beta)$ y $|t - \overline{t}| < \delta$.*

Teorema 1.5.3. Unicidad. *Sea $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ una funcional localmente Lipschitz con constante $K > 0$ que satisface la condición (C). Entonces dada $\phi \in \mathcal{C}_D$ el problema de Cauchy (1.5.14) tiene a lo sumo una solución sobre $[t_0 - \tau, \beta_1)$ para cualquier $\beta_1 \in (t_0, \beta]$.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones del problema de valores iniciales $x, \tilde{x} : [t_0 - \tau, \beta_1) \to D$ tales que $x \neq \tilde{x}$ y consideremos

$$t_1 := \inf\{t \in (t_0, \beta_1) : x(t) \neq \tilde{x}(t)\}.$$

Luego teniendo en cuenta que ambas satistacen la misma condición inicial tenemos que

$$x(t) = \tilde{x}(t)$$

para todo $t \in [t_0 - \tau, t_1]$. Ahora dado $(t_1, x_{t_1}) \in [t_0, \beta_1) \times \mathcal{C}_D$ existen, según lema previo (1.5.1), constantes $a, b > 0$ tal que

$$\mathcal{E}_{a,b} := [t_1, t_1 + a] \times \{\phi \in \mathcal{C} : ||\phi - x_{t_1}||_\tau \leq b\} \subset [t_0, \beta_1) \times \mathcal{C}_D$$

y F es Lipschitz sobre $\mathcal{E}_{a,b}$ con constante K.

Por otro lado según el lema (1.5.2) existe $0 < \delta \leq a$ tal que $(t, x_t), (t, \tilde{x}_t) \in \mathcal{E}_{a,b}$ para todo $t \in [t_1, t_1 + \delta)$.
Luego por la representación integral de la solución (1.5.17) tenemos que para $t \in [t_1, t_1 + \delta)$

$$\begin{aligned} &||x(t) - \tilde{x}(t)|| = \left|\left| \int_{t_0}^t (F(s, x_s) - F(s, \tilde{x}_s))\, ds \right|\right| \leq \\ &\leq K \int_{t_1}^t ||x_s - \tilde{x}_s||\, ds. \end{aligned} \tag{1.5.18}$$

Así teniendo en cuenta que el miembro derecho es una función creciente de t y $||x(t) - \tilde{x}(t)|| = 0$ para $t \in [t_1 - r, t_1]$ tenemos para $t \in [t_1, t_1 + \delta)$

$$||x_t - \tilde{x}_t||_\tau \leq K \int_{t_1}^t ||x_s - \tilde{x}_s||\, ds \tag{1.5.19}$$

de manera que $x(t) = \tilde{x}(t)$ para todo $t \in [t_1, t_1 + \delta)$ contradiciendo la definición de t_1. ■

El teorema que sigue garantiza, bajo cierta condición global de acotación, que la solución depende continuamente de la condición inicial

Teorema 1.5.4. Dependencia Continua. *Sea $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ una funcional globalmente Lipschitz con constante $K > 0$ que satisface la condición (C). Sean $\tilde{\phi}, \phi \in \mathcal{C}_D$ valores iniciales y x y $\tilde{x}$ las únicas soluciones correspondientes al problema de Cauchy (1.5.14) con $x_{t_0} = \phi$ y $x_{t_0} = \tilde{\phi}$ respectivamente. Si x y $\tilde{x}$ están definidas en $[t_0, \beta_1)$ entonces*

$$||x(t) - \tilde{x}(t)|| \leq ||\phi - \tilde{\phi}||_\tau e^{K(t-t_0)}$$

para todo $t \in [t_0, \beta_1)$.

Demostración. Sobre $[t_0-\tau, \beta_1)$ ambas, x y $\tilde{x}$, satisfacen la misma ecuación con los valores iniciales $x_{t_0} = \phi$ y $x_{t_0} = \tilde{\phi}$; luego por la representación integral tenemos para todo $t \in [t_0, \beta_1)$

$$\begin{aligned} ||x(t) - \tilde{x}(t)|| &= ||\phi(0) - \tilde{\phi}(0) + \textstyle\int_{t_0}^t (F(s, x_s) - F(s, \tilde{x}_s))\, ds|| \leq \\ &\leq ||\phi - \tilde{\phi}||_\tau + \textstyle\int_{t_0}^t K||x_s - \tilde{x}_s||_\tau\, ds. \end{aligned}$$

Luego, tomando supremo obtenemos para $t \in [t_0, \beta_1)$

$$||x_t - \tilde{x}_t||_\tau \leq ||\phi - \tilde{\phi}||_r + \int_{t_0}^t K||x_s - \tilde{x}_s||_\tau\, ds$$

y usado la desigualdad de Gronwall se obtiene el resultado. ■

El siguiente resultado, cuya demostración es similar al caso correspondiente al de ecuaciones diferenciales ordinarias, da una condición suficiente para la existencia local de solución.

Teorema 1.5.5. Existencia. *Supongamos que $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz con constante $K > 0$ y satisface la condición (C). Entonces para cada $\phi \in \mathcal{C}_D$ el problema de Cauchy (1.5.14) tiene una única solución sobre $[t_0 - \tau, t_0 + M)$ para alguna constante $M > 0$.*

Demostración. La unicidad ya ha sido probada, sólo debemos probar la existencia de solución. De acuerdo a la defínción de funcional localmente Lipschitz (1.5.5) consideramos un entorno $\mathcal{E}_{a,b} \subset [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D$ sobre el cual F es Lipschitz con constante $K > 0$ y definimos una función $\overline{\chi} : [t_0 - \tau, t_0 + a) \to \mathbb{R}^n$ del siguiente modo

$$\overline{\chi}(t) := \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - \tau, t_0) \\ \phi(0), & t_0 \in [t_0, t_0 + a] \end{cases} \tag{1.5.20}$$

Por satisfacer la condición (C) $F(t, \overline{\chi}_t)$ depende continuamente respecto de t y entonces para alguna constante $B_1 > 0$ tenemos $||F(t, \overline{\chi}_t)|| \leq B_1$ sobre $[t_0, t_0 + a]$.

Ahora definimos $B := Kb + B_1$ y elegimos, de acuerdo al lema (1.5.2) una constante $a_1 \in (0, a]$ tal que

$$||\overline{\chi}_t - \phi||_\tau = ||\overline{\chi}_t - \overline{\chi}_{t_0}||_\tau \leq b$$

para $t \in [t_0, t_0 + a_1]$ y $M > 0$ tal que $M < \min\{a_1, \frac{b}{B}, \frac{1}{K}\}$ y consideramos el conjunto S de todas las funciones continuas $\chi : [t_0 - \tau, t_0 + M] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\chi(t) = \phi(t - t_0)$ para todo $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ y

$$||\chi(t) - \phi(0)|| \leq b$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + M]$.
Observemos que si $\chi \in S$ entonces $\chi_t \in \overline{B}_b^{\mathcal{C}}(\overline{\chi}_t)$ y

$$\begin{aligned} ||F(t, \chi_t)|| \leq ||F(t, \chi_t) - F(t, \overline{\chi}_t)|| + ||F(t, \overline{\chi}_t)|| \leq \\ \leq K||\chi_t - \overline{\chi}_t||_\tau + B_1 \leq B. \end{aligned} \tag{1.5.21}$$

Ahora para cada $\chi \in S$ definimos $T\chi$ sobre $[t_0 - r, t_0 + M]$

$$T\chi(t); = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)dz, & t_0 \in [t_0, t_0 + M] \end{cases} \tag{1.5.22}$$

y como $||F(s, x_s)|| \leq B$ tenemos

$$||T\chi(t) - \phi(0)|| \leq BM \leq b$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + M]$.

Observando además que $T\chi$ es continua tenemos que $T\chi \in S$, es decir, T es S-invariante.

El resto de la prueba consiste en hacer uso del método de las aproximaciones sucesivas de Picard. Elegimos $x^0 \in S$ y definimos

$$x^n := T(x^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Observemos en primer lugar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$x^n(t) = \phi(t - t_0),\ t \in [t_0 - r, t_0).$$

Por otro lado para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [t_0, t_0 + M]$ tenemos

$$\begin{aligned} ||x^{n+2}(t) - x^{n+1}(t)|| = \left|\left| \int_{t_0}^{t} (F(s, x_s^{n+1}) - F(s, x_s^n))ds \right|\right| \leq \\ \leq KM \sup_{s \in [t_0, t_0 + M]} \{||x_s^{n+1} - x_s^n||\}. \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta esta acotación, el hecho de que $||x^1(t) - x^0(t)|| \leq 2b$ para $t \in [t_0, t_0 + M]$ y usando inducción obtenemos

$$||x^{n+1}(t) - x^n(t)|| \leq 2b(KM)^n,\ t \in [t_0, t_0 + M]$$

y además

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||x^{k+1}(t) - x^k(t)|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2b(KM)^k.$$

Luego como $KM < 1$ la serie del segundo miembro converge y por el criterio de Weierstrass $(x^n)_{n \geq 0}$ converge a una función x que que es solución del problema de valor inicial (1.5.14) sobre $[t_0 - \tau, t_0 + M)$. ■

Definición 1.5.6. *Continuación de solución.* Sea x definida sobre $[t_0 - r, \beta_1)$ y $\tilde{x}$ definida sobre $[t_0 - \tau, \beta_2)$ soluciones del problema de valores iniciales (1.5.14). Si $\beta_2 > \beta_1$ decimos que $\tilde{x}$ es una continuación de x. Una solución se dice no continuable si no existe solución que la continúe.

Para establecer algún resultado con relación a la posibilidad de continuación necesitamos de la siguiente

Definición 1.5.7. *Funcional Cuasi Acotada.* Una funcional $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ se dice que es cuasi-acotada si es acotada sobre cada conjunto $[t_0, \beta_1] \times \mathcal{C}_A \subset J \times \mathcal{C}_D$ donde $A \subset D$ es un subconjunto compacto.

Teorema 1.5.6. Existencia de Solución Maximal. *Sea $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz, cuasi acotada y que satisface la condición (C). Entonces*

1. *Para cada $\phi \in \mathcal{C}_D$ el problema de valor inicial (1.5.14) tiene una única solución no continuable x definida sobre $[t_0 - \tau, \beta_1)$ y*
2. *Si $\beta_1 < \beta$, para cada compacto $A \subset D$ se tiene que $x(t) \notin A$ para algún $t \in (t_0, \beta_1)$.*

Demostración. La unicidad sobre cualquier intervalo de la forma $[t_0, \beta_1)$ está probada. Consideremos

$$\beta_1 := \sup\{s \in \mathbb{R} : \text{existe una solución del problema (1.5.14) en } [t_0 - \tau, s)\}.$$

Observamos que $\beta_1 > t_0$ y para cada $s \in (t_0, \beta_1)$ existe una única solución x^s sobre $[t_0 - \tau, s)$; luego definimos la función $x : [t_0 - \tau, \beta_1) \to D$ del siguiente modo: para cada $t \in [t_0 - \tau, \beta_1)$ $x(t) := x^s(t)$ si $t \in [t_0 - \tau, s)$. La buena definición de x es consecuencia de la unicidad y por construcción x es solución de (1.5.14) en $[t_0 - \tau, \beta_1)$ y no puede ser continuada más allá de β_1.

Por otro lado para probar la segunda parte veremos que si la trayectoria no se escapa de cualquier compacto $A \subset D$ entonces la solución podría continuarse más allá de β_1. Supongamos que $\beta_1 < \beta$ y que para algún subconjunto $A \subset D$ compacto tenemos que $x(t) \in A$ para todo $t \in [t_0, \beta_1)$. En tal caso consideramos el conjunto $A \cup Im(\phi)$ que es compacto de manera que $x(t) \in A \cup Im(\phi)$ para todo $t \in [t_0 - \tau, \beta_1)$. Siendo F cuasi acotada existe una constante B tal que

$$||x'(t)|| = ||F(t, \psi)|| \leq B, \text{ para todo } (t, \psi) \in [t_0, \beta_1] \times \mathcal{C}_{A \cup Im(\phi)}.$$

Luego como x' está acotada en $[t_0, \beta_1)$ tenemos que existe $\lim_{t \to \beta_1} x(t) = v_{\beta_1} \in A \subset D$. Luego podemos extender x, definiéndola en β_1 como su límite $x(\beta_1) = v_{\beta_1}$.

Ahora como F satisface la condión (C) resulta que $F(y, x_t)$ es continua en $[t_0, \beta_1]$, podemos extender la representación integral de x hasta β_1 y considererar el problema

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z_t), & t \geq \beta_1 \\ z_{\beta_1} = x_{\beta_1}, & x_{\beta_1} \in \mathcal{C}_D \end{cases} \tag{1.5.23}$$

Luego por el teorema de existencia concluimos que existe una solución z del problema (1.5.23) en $[\beta_1 - \tau, \beta_1 + M)$ para alguna constante $M > 0$ y

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [\beta_1 - \tau, \beta_1] \\ x(\beta_1) + \int_{\beta_1}^t F(s, x_s)\, ds, & t \in [\beta_1, \beta_1 + M) \end{cases}$$

En definitiva si definimos $z := x$ sobre $[t_0 - \tau, \beta_1 - \tau]$ entonces

$$z(t) = \begin{cases} \phi(t-t_0), & t \in [t_0-\tau, t_0] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds, & t \in [t_0, \beta_1] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{\beta_1} F(s, x_s)\, ds + \int_{\beta_1}^{t} F(s, x_s)\, ds, & t \in [\beta_1, \beta_1 + M) \end{cases}$$

es decir

$$z = \begin{cases} \phi(t-t_0), & t \in [t_0-\tau, t_0] \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds, & t \in [t_0, \beta_1 + M) \end{cases}$$

de manera que z es solución del problema (1.5.14) sobre $[t_0 - r, \beta_1 + M)$ continuando a x lo cual es absurdo. ■

La siguiente es una condición suficiente para la existencia de solución global

Teorema 1.5.7. *Sea $D = \mathbb{R}^n$ y $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ localmente Lischitz que satisface la condición C. Supongamos además que*

$$||F(t,\psi)|| \leq M(t) + N(t)||\psi||_\tau, \quad (t,\psi) \in [t_0, \beta) \times \mathcal{C} \tag{1.5.24}$$

donde M y N son funciones continuas positivas definidas sobre $[t_0, \beta)$. Entonces existe una única solución no continuable del problema (1.5.14) en el intervalo $[t_0 - \tau, \beta)$.

Demostración. La condición (1.5.24) implica que F es cuasi acotada. De acuerdo al teorema (4.1.2) podemos considerar x la única solución no continuable definida sobre $[t_0 - \tau, \beta_1)$ con $\beta_1 < \beta$ del problema (1.5.14). Luego existen constantes $M_1, N_1 > 0$ tal que $M(t) \leq M_1$ y $N(t) \leq N_1$ para todo $t \in [t_0, \beta_1]$. Por la respresentación integral de la solución (1.5.14) tenemos

$$||x(t)|| \leq ||\phi||_\tau + \int_{t_0}^{t} M_1 ds + \int_{t_0}^{t} N_1 ||x_s||_\tau\, ds$$

para todo $t \in [t_0, \beta_1)$ de donde deducimos que

$$||x_t||_\tau \leq ||\phi||_\tau + M_1(\beta_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t} N_1 ||x_s||\, ds$$

para todo $t \in [t_0, \beta_1)$. Luego obtenemos

$$||x(t)|| \leq ||x_t||_\tau \leq (||\phi||_\tau + M_1(\beta_1 - t_0))e^{N_1(\beta_1 - t_0)}$$

sobre $[t_0, \beta_1)$. Esto dice que $x|_{[t_0, \beta 1]}$ permanece en un conjunto compacto y teniendo en cuenta la conclusión del teorema (4.1.2) se concluye que $\beta_1 = \beta$. ■

1.5.3 El operador de Poincaré para ecuaciones con retardo.

En esta subsección describiremos como se puede utilizar el operador de Poincaré para probar la existencia de al menos una solución periódica. Esta técnica se adapta, no sin ciertas dificultades, para el caso de las ecuaciones diferenciales con retardo.

A modo de ejemplo consideremos el siguiente problema periódico

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) \end{cases} \tag{1.5.25}$$

y veamos que bajo determinadas condiciones para la no linealidad se tiene existencia de solución periódica; más precisamente se tiene el siguiente:

Teorema 1.5.8. *Si $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz en su segunda variable y además*

$$\langle f(t,x), x\rangle < 0 \tag{1.5.26}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $||x|| = R$ y $t \in [0,1]$ entonces el problema (1.5.25) tiene al menos una solución x tal que $||x||_\infty \leq R$.

Como ocurre con el método del shooting, la idea es plantear un problema de valores iniciales adecuado y buscar algún valor $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$ para el cual la solución del problema de valores iniciales sea en efecto solución del problema (1.5.25). Más precisamente consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = \lambda \end{cases} \tag{1.5.27}$$

y para cada $\lambda \in \mathbb{R}^n$ definimos $P(\lambda) := x(1,\lambda)$ donde $x(\cdot,\lambda)$ es la única solución del problema (1.5.27) siempre y cuando la solución esté definida hasta el valor $t = 1$.

De esta forma definimos un operador $P : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para algún conjunto U que en general no es fácil determinar. No obstante teniendo en mente el teorema de punto fijo de Brouwer, alcanza con garantizar que existe un subconjunto compacto y convexo $K \subset U$ que sea P-invariante.

Demostración del teorema 1.5.8.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\lambda| \leq R$ y supongamos que $x(\cdot,\lambda)$ está definida hasta algún tiempo $T \leq 1$. Afirmamos que $|x(t,\lambda)| \leq R$ para todo $t \in [0,T]$.

Para ello, dada $x \in C^1[0,T]$, consideremos la función $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$

$$\phi(t) := |x(t)|^2$$

y observamos que si x es solución de (1.5.27) y satisface (1.5.26) entonces

$$\phi'(t) = 2\langle x(t), x'(t)\rangle = 2\langle x(t), f(t,x(t))\rangle < 0$$

para todo $t \in [0,T]$ lo cual implica que si $|\lambda| \leq R$ entonces $\phi(0) \leq R^2$ y por lo tanto $\phi(t) \leq R^2$ para todo $t \in [0,T]$. En particular esto dice que la solución x debe estar definida hasta $t = 1$ pues de lo contrario existiría $\tilde{T} < 1$ de forma tal que $x(t) \to \infty$ si $t \to \tilde{T}^-$.

Finalmente vemos que si tomamos $T = 1$ entonces $P(\overline{B}_R(0)) \subset \overline{B}_R(0)$ y por el teorema de punto fijo de Brouwer existe λ^* tal que

$$x(0,\lambda^*) = \lambda^* = P(\lambda^*) = x(1,\lambda^*)$$

es decir (1.5.25) tiene al menos una solución. ■

Ahora veamos cuál es la idea para las ecuaciones diferenciales con retardo; en primer lugar damos la siguiente

Definición 1.5.8. *Eyectividad.* Sea X un espacio de Banach, $U \subset X$ un conjunto abierto, $x \in U$ y $A : U \backslash \{x\} \to X$. Decimos que el punto x es eyectivo para el operador A si existe un entorno abierto $G \subset X$ de x tal que si $y \in G \cap U \backslash \{x\}$ entonces existe un entero $m = m(y) > 0$ ta que $A^m(y) \in G \cap U$.

Generalmente se utiliza en este contexto dos teoremas cuyas demostraciones pueden encontrarse en Hale [38]. En primer lugar se tiene el siguiente resultado

Teorema 1.5.9. *Sea X un espacio de Banach, $K \subset X$ es un conjunto cerrado, acotado y convexo, $A : K \backslash \{x_0\} \to K$ un operador compacto y $x_0 \in K$ eyectivo para A. Entonces A tiene al menos un punto fijo en $K \backslash \{x_0\}$.*

y para el caso en que K no sea necesariamente acotado

Teorema 1.5.10. *Sea X un espacio de Banach, $K \subset X$ es un conjunto cerrado y convexo, $A : K \backslash \{0\} \to K$ un operador compacto y $0 \in K$ eyectivo para A tal que si existe $M > 0$ tal que $Ax = \lambda x, x \in K \cap \partial B_M(0)$ implica que $\lambda < 1$ entonces A tiene al menos un punto fijo en $K \cap B_M(0) \backslash \{x_0\}$.*

Usualmente en la aplicación de los teoremas 1.5.9 y 1.5.10 a las ecuaciones diferenciales autónomas con retardo, el operador A juega el papel del operador de Poincaré anteriormente descripto.

Más precisamente, supongamos que existe un conjunto cerrado, acotado y convexo (o cerrado y convexo) $K \subset \mathcal{C}$ tal que para cada $\phi \in K$, la única solución $x = x(\cdot, \phi, 0)$ de (1.5.14) (con $t_0 = 0$) retorna a K en algún tiempo $\tau := \tau(\phi) > 0$, o sea $x_{\tau(\phi)}(\cdot, \phi, 0) \in K$ si $\phi \in K$. Luego si el operador

$$A : K \to K, \;\; A(\phi) := x_{\tau(\phi)}(\cdot, \phi, 0)$$

es compacto, por el teorema 1.5.9 (o bien 1.5.10) existe al menos una función $\psi \in K$ tal que $A(\psi) = \psi$ es decir $\psi = x_{\tau(\psi)}(\cdot, \psi, 0)$ y por lo tanto $x(\cdot, \psi, 0)$ es una solución $\tau(\psi)$-periódica del problema (1.5.14) (con $x_0 = \psi$).

Usualmente K es un conjunto infinito dimensional y como lo hemos señalado para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, difícil de determinar. No obstante, como veremos en el último capítulo, se puede sortear esa dificultad utilizando la teoría del grado de coincidencia.

Chapter 2

Formulación y antecedentes de los problemas.

Este capítulo está organizado del siguiente modo. En la sección 2.1 se deriva el modelo de electrodifusión multi-ión en régimen estacionario formulado por Leuchtag [44]; más precisamente, en la subsección 2.1.1 se hacen explícitas las leyes fisicas que intervienen en dicho proceso y se establece una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.1.9) que lo modelan; en particular los dos primeros términos de la familia (2.1.27); en la subsección 2.1.2 se trata el caso, de nuestro interés, correspondiente a dos iones con idénticas valencias (2.1.28). Por último en la subsección 2.1.3 se dan los antecedentes del problema de electrodifusión de dos iones con idénticas valencias.

En la sección 2.2 se deriva el modelo generalizado de Nicholson y se dan algunos de sus antecedentes; más precisamente en la subsección 2.2.2 se deriva el modelo de crecimiento poblacional basado en la ecuación logística con retardo (2.2.5) y en la subsección 2.2.3 una familia de modelos (2.2.15) que incluyen una función de natalidad denso-dependiente, del cual el modelo de Nicholson es un ejemplo. Por último en la subsección 2.2.4 se introduce el modelo de Nicholson, algunas de sus principales generalizaciones (modelos (2.2.25) y (2.2.26)) como asi también los antecedentes que tendremos en cuenta en el capítulo 4.

2.1 Modelo de electrodifusión multi-ión en régimen estacionario.

La teoría de la electrodifusión es una descripción macroscópica del transporte de partículas cargadas por medio de una combinación de flujos de migración y difusión a través de un material que presenta determinadas características físico–químicas que determinan su permeabilidad a determinados tipos de iones, tal como lo hace una membrana.

Esta descripción tiene su origen en la teoría de la juntura líquida de Nernst y Plank [66] y constituye la base de la teoría de Bernstein [23] del potencial eléctrico de las membranas de las células del sistema nervioso. La teoría tuvo gran desarrollo y diversas aplicaciones, entre otras, a la biofíscia de las membranas, la física del plasma y de los superconductores, etc.

H. R. Leuchtag [44] describe el proceso unidireccional del transporte de m-iones en régimen estacionario sin restricción en el tipo de iones presentes y da una formulación unificada del proceso; más precisamente, establece una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que modelan dicho fenómeno y cuyo orden viene dado por el número de diferentes cargas iónicas; por ejemplo, el primer miembro de la familia corresponde al caso del transporte de partículas que presentan idénticas cargas y el segundo al transporte de dos clases de partículas con distintas cargas.

2.1.1 Descripción del modelo general.

Como lo sugiere Schlölgl [74] conviene clasificar en diferentes clases al conjunto de todos los iones del sistema de forma tal que todas las especies que conforman una misma clase tengan la misma carga. Más precisamente, suponemos que existen m clases, tal que en la clase i-ésima todas las especies $j = 1, 2, \cdots, k_i$ tienen carga q_i con $i = 1, 2, \cdots, m$ y consideramos las dos ecuaciones acopladas que modelan este proceso:

$$\begin{cases} (N-P): \;\; J_{ij} = q_j \mu_{ij} \theta \frac{dN_{ij}}{dX} + \mu_{ij} q_i^2 E N_{ij} \\ (G): \quad\; \frac{dE}{dX} = \frac{4\pi}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} q_i N_{ij} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

donde X es la coordenada normal al borde de la membrana, E el campo eléctrico, N_{ij} el número que indica la densidad del ión ij, μ_{ij} la movilidad o velocidad de deriva iónica del ión ij, ϵ la constante dieléctrica y $\theta = K_B T$ la temperatura en unidades de energía, siendo K_B la constante de Boltzmann. Se supone que estos tres últimos parámetros son constantes a lo largo de la membrana.

La primera ecuación (N-P) de (2.1.1) corresponde a la ecuación de *Nernst-Plank* y establece que la densidad de corriente del ión ij tiene dos componentes: el primer término se debe al proceso de disfusión mientras que el segundo al efecto de migración causado por el arrastre del campo eléctrico; la segunda ecuación (G) es la de *Gauss* según la cual la variación del campo eléctrico es proporcional a la superposición de las densidades de las clases iónicas.

El número total de especies viene dado por $\sum_{i=1}^{m} k_i$ y se supone que no hay interacciones entre ellas.

En estado estacionario y bajo el supuesto de que no hay fuentes ni sumideros, la densidad J_{ij} es independiente de X. También se asume la *relación de Einstein* según la cual la movilidad y la constante de difusión están relacionadas de acuerdo a la fórmula

$$D_{ij} = \mu_{ij} \theta. \tag{2.1.2}$$

En el estudio de las membranas se destacan dos magnitudes de interés; por un lado la diferencia del potencial eléctrico definida

$$V = -\int_0^L E \, dX$$

donde L denota el espesor de la membrana y por otro, la corriente neta que atraviesa la membrana.

Ahora veremos que el sistema (2.1.1) es equivalente, bajo ciertas condiciones, a un sistema de $m + 1$ ecuaciones diferenciales ordinarias donde el campo eléctrico oficia de variable dependiente.

Una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela el proceso de electro-difusión multi-ión.

En primer lugar observamos que el sistema (2.1.1) no es lineal y es invariante bajo un reescalamiento dado por la transformación

$$T_\alpha : \ (X, V, E, N_{ij}, J_{ij}) \longrightarrow (\alpha^{-1}X, V, \alpha E, \alpha^2 N_{ij}, \alpha^3 J_{ij})$$

donde $\alpha > 0$. Más aún, $(\{T_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+\}, \circ)$ es un grupo abeliano siendo T_1 el elemento neutro y $T_{\alpha^{-1}}$ el inverso de T_α; así dada una solución de (2.1.1) se obtienen via T_α infinitas soluciones.

El sistema (2.1.1) puede reformularse de forma adimensional de manera tal que el sub-índice j que denota la especie en cuestión puede ser eliminado, lo cual pone de manifiesto que efectivamente el proceso sólo depende de la clase de carga y no del tipo específico de ión que porta esa carga [74].

Comenzamos con algunas definiciones. El número entero

$$\nu_i := \frac{q_i}{q_0} \tag{2.1.3}$$

donde $q_0 = e$ es la unidad de carga del protón y q_i la carga propia de la clase, representa la valencia signada del i-ésimo ión.

Para una unidad arbitraria de densidad N_0 se define la longitud de Debye

$$\lambda := \left(\frac{\epsilon\theta}{4\pi q_0^2 N_0}\right)^{1/2}. \tag{2.1.4}$$

Luego se define

$$n_i := N_0^{-1} \sum_{j=1}^{k_i} N_{ij} \tag{2.1.5}$$

que representa el número de iones con la misma carga relativa a la unidad de densidad iónica N_0 establecida anteriormente y

$$c_i := \frac{\lambda}{N_0 q_i \theta} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{J_{ij}}{\mu_{ij}}. \tag{2.1.6}$$

un reescalamiento de las densidades de corriente.
Luego consideramos dos reescalamientos, el del campo eléctrico denotado

$$p := \left(\frac{q_0\lambda}{\theta}\right) E \tag{2.1.7}$$

y el de la coordenada normal X

$$x := \frac{X}{\lambda} + x_1 \tag{2.1.8}$$

con x_1 una constante a definir.

Con estas definiciones y reescalamientos se puede probar que (2.1.1) se transforma en

$$\begin{cases} n_i' = \nu_i n_i p - c_i, \quad i = 1, \dots, m \\ p' = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \nu_i n_i \end{cases} \tag{2.1.9}$$

donde $'$ denota la derivada respecto de x.

Los dos primeros miembros de la familia.

Diferentes problemas de contorno derivan de este sistema de ecuaciones; los casos para $m = 1, 2$ fueron estudiados y resueltos en ([13],[14]). La estructura de Painlevé de estas ecuaciones ha sido establecida en [26].

Por ejemplo, para el caso $m = 1$ el sistema (2.1.9) toma la forma

$$\begin{cases} n' = \nu n p - c \\ p' = \nu n \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Usando la segunda ecuación de (2.1.10) para eliminar n de la primera tenemos

$$n' = pp' - c = \left(\frac{1}{2}p^2 - cx\right).$$

Ahora integrando y usando la constante x_1 que aparece en (2.1.8) para anular la constante de integración tenemos

$$n = \frac{1}{2}p^2 - cx.$$

Finalmente eliminando n de la segunda ecuación de (2.1.10) obtenemos

$$p' = \nu\left(\frac{1}{2}p^2 - cx\right) = \frac{1}{2}\nu p^2 - \nu cx \tag{2.1.11}$$

que es el primer miembro de la familia.

Para el caso $m = 2$ el sistema queda

$$\begin{cases} n_1' = \nu_1 n_1 p - c_1 \\ n_2' = \nu_2 n_2 p - c_2 \\ p' = \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones de (2.1.12) y usando la tercera obtenemos

$$n_1' + n_2' = (\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2)p - c = pp' - c = \left(\frac{1}{2}p^2 - cx\right)$$

donde $c = c_1 + c_2$.

Nuevamente integrando y usando otra vez x_1 que aparece en (2.1.8) para anular la constante de integración tenemos

$$n_1 + n_2 = \frac{p^2}{2} - cx.$$

Luego

$$n_2 = \frac{p^2}{2} - n_1 - cx$$

y reemplazando en la tercera ecuación de (2.1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} p' &= \nu_1 n_1 + \nu_2(\tfrac{p^2}{2} - n_1 - cx) = \nu_1 n_1 + \nu_2 \tfrac{p^2}{2} - \nu_2 n_1 - \nu_2 cx = \\ &= \tfrac{1}{2}\nu_2 p^2 + (\nu_1 - \nu_2) n_1 - \nu_2 cx. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Despejando n_1 de esta última ecuación

$$n_1 = \frac{p' - \frac{1}{2}\nu_2 p^2 + \nu_2 cx}{\nu_1 - \nu_2}$$

y reemplazando en la primera ecuación del sistema (2.1.12)

$$\begin{aligned} n_1' &= \nu_1 p \left(\tfrac{p' - \frac{1}{2}\nu_2 p^2 + \nu_2 cx}{\nu_1 - \nu_2}\right) - c_1 = \\ &= \tfrac{\nu_1 pp' - \frac{1}{2}\nu_2\nu_1 p^3 + \nu_1\nu_2 cxp - c_1(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_1 - \nu_2}. \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Finalmente derivando (2.1.13)

$$p'' = \nu_2 pp' + (\nu_1 - \nu_2) n_1' - \nu_2(c_1 + c_2) \tag{2.1.15}$$

y sustituyendo n_1' por la expresión obtenida en (2.1.14) se tiene el segundo miembro de la familia

$$\begin{aligned} p'' &= \nu_2 pp' + (\nu_1 - \nu_2)\tfrac{\nu_1 pp' - \frac{1}{2}\nu_2\nu_1 p^3 + \nu_1\nu_2 cpx - c_1(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_1 - \nu_2} - \nu_2(c_1 + c_2) = \\ &= \nu_2 pp' + \nu_1 pp' - \tfrac{1}{2}\nu_2\nu_1 p^3 + \nu_1\nu_2 cpx - c_1(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2(c_1 + c_2) = \\ &= (\nu_1 + \nu_2) pp' - \tfrac{1}{2}\nu_2\nu_1 p^3 + \nu_1\nu_2 cpx - c_1\nu_1 - c_2\nu_2 \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

La ecuación (2.1.16) fue obtenida por primera vez en el año 1965 por Bruner [25]. Para iones con iguales cargas pero de signos distintos ± 1 fue obtenida por Bass ([18],[19]) en el año 1964 y por Cohen y Cooley en 1965; en este caso el segundo término $\nu_1 + \nu_2 = 0$ y se tiene

$$p'' = -\frac{1}{2}\nu_1\nu_2 p^3 + \nu_1\nu_2 cxp - \nu_1 c_1 - \nu_2 c_2$$

.

Las ecuaciones correspondientes a los órdenes tres y cuatro pueden verse en el citado artículo de Leuchtag [44].

2.1.2 El caso de dos iones.

Como lo mencionamos en la introducción, a partir de las ecuaciones de Nernst-Plank y de Gauss se elabora un modelo que describe el proceso físico involucrado en la migración-difusión de ciertas partículas cargadas a través de los bordes de una membrana permeable que tiene gran importancia en el estudio de la transmisión de las señales electro-químicas de las células nerviosas.

Describiremos el modelo para $m = 2$, tratado originalmente por Bass, bajo condiciones eléctricamente neutras en los reservorios para dos iones con idénticas valencias y que da origen al modelo abstracto que estudiaremos en esta tesis. Suponemos que los dos reservorios están separados por una sustancia dieléctrica gelatinosa que ocupa cierta región del espacio (unidimensional) $0 \leq x \leq \delta$; la constante dieléctrica obviamente dependerá de la conductancia iónica selectiva de la membrana respecto a las dos especies de iones en cuestión, por ejemplo sodio Na^+ y cloruro Cl^-.

Con las notaciones y definiciones básicas dadas en la subsección anterior y tal como se describe en el trabajo de Thompson [82] para el caso $m = 2$ tenemos dos valencias $\nu_\pm := \frac{q_\pm}{q_0}$ donde $q_0 = e$ es la unidad de carga del protón y $q_\pm$ la carga propia de la clase según la clase ionica. En principio no supondremos ninguna relación entre las valencias de los iones y al final de la sección deduciremos de esta ecuación el caso de nuestro interés correspondiente a iones de idénticas valencias.

Fijada una unidad arbitraria de desidad iónica N_0, definimos la longitud de Debye $\lambda := \left(\frac{\epsilon\theta}{4\pi q_0^2 N_0}\right)^{1/2}$, las concentraciones iónicas de las dos clases relativas a la unidad de densidad $n_\pm := \frac{N_\pm}{N_0}$, las densidades de corriente $c_\pm := \frac{\lambda}{N_0 q_0 \nu_\pm D_\pm} J_\pm$ y el campo eléctrico reescalado $p := \frac{q_0\lambda}{\theta} E$. Finalmente denotamos $n := n_+ + n_-$ y $c := c_+ + c_-$.

Ahora procedemos de manera análoga a como lo hicimos en la subsección anterior; las ecuaciones de Nernst-Plank para este caso son

$$n'_+ = \nu_+ n_+ p - c_+ \tag{2.1.17}$$

y

$$n'_- = \nu_- n_- p - c_- \tag{2.1.18}$$

y la ley de Gauss

$$p' = \nu_+ n_+ + \nu_- n_- \tag{2.1.19}$$

donde, como antes, $'$ denota la derivada respecto de x.

Sumando (2.1.17) y (2.1.18) y usando (2.1.19) obtenemos

$$n'_+ + n'_- = (\nu_+ n_+ \nu_- n_-)p - c = pp' - c \tag{2.1.20}$$

e integrando

$$n_+ + n_- = \frac{p^2 - p(0)^2}{2} - ct + n(0). \tag{2.1.21}$$

Luego podemos escribir

$$n_+ = \frac{p^2 - p(0)^2}{2} - ct - n_- + n(0) \tag{2.1.22}$$

y reemplazando esta última en (2.1.19) obtenemos

$$\begin{aligned} p' &= \nu_+ n_+ + \nu_- n_- = \nu_- n_- + \nu_+ \left(\tfrac{p^2 - p(0)^2}{2} - ct - n_- + n(0)\right) = \\ &= \nu_- n_- + \nu_+ \tfrac{p^2 - p(0)^2}{2} - \nu_+ ct - \nu_+ n_- + \nu_+ n(0) \\ &= (\nu_- - \nu_+) n_- + \nu_+ \tfrac{p^2 - p(0)^2}{2} - \nu_+ ct + \nu_+ n(0) \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

de donde se deduce que

$$n_- = \frac{p' - \nu_+ \frac{p^2 - p(0)^2}{2} + \nu_+ ct - \nu_+ n(0)}{\nu_- - \nu_+}. \tag{2.1.24}$$

Ahora diferenciando (2.1.23), reemplazando n'_- por la expresión dada en (2.1.18) y n_- por (2.1.24) tenemos

$$\begin{aligned}
p'' &= (\nu_- - \nu_+)n'_- + \nu_+ pp' - \nu_+ c = (\nu_- - \nu_+)(\nu_- n_- p - c_-) + \nu_+ pp' - \nu_+ c = \\
&= (\nu_- - \nu_+)\left(\nu_- \left(\frac{p' - \nu_+ \frac{p^2 - p(0)^2}{2} + \nu_+ ct - \nu_+ n(0)}{\nu_- - \nu_+}\right) p - c_-\right) + \nu_+ pp' - \nu_+ c = \\
&= (\nu_+ + \nu_-)pp' - \nu_+\nu_- \left(\frac{p^2 - p(0)^2}{2} - ct + n(0)\right) p - \nu_- c_- - \nu_+ c_+ = \\
&= (\nu_+ + \nu_-)pp' - \nu_+\nu_- \left[\left(\frac{p^2 - p(0)^2}{2} - ct + n(0)\right) p + \frac{\nu_- c_- + \nu_+ c_+}{\nu_+\nu_-}\right].
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Como no hay corriente a través de la membrana se tiene $0 = \nu_+ D_+ c_+ + -\nu_- D_- c_- = \theta(\nu_+\mu_+ c_+ + \nu_-\mu_- c_-)$ de forma tal que $(\nu_+\mu_+ c_+ + \nu_-\mu_- c_-)(\nu_+ - \nu_-) = 0$ y como consecuencia

$$\frac{\nu_- c_- + \nu_+ c_+}{\nu_+\nu_-} = \frac{D_- - D_+}{\nu_+ D_+ - \nu_- D_-} c.$$

Luego se obtiene

$$p'' = (\nu_+ + \nu_-)pp' - \nu_+\nu_- \left[\left(\frac{p^2 - p(0)^2}{2} - ct + n(0)\right) p + \frac{D_- - D_+}{v_+ D_+ - v_- D_-} c\right]. \tag{2.1.26}$$

Se supone que los valores de las concentraciones, esto es, $n_+(0),\ n_+(\delta)$ y $n_-(0)$ y $n_-(\delta)$ de la interfase, son concidos; luego evaluando (2.1.21) en $t = \delta$ tenemos

$$c = \frac{1}{\delta}\left(n(0) - n(\delta) + \frac{p^2(\delta) - p(0)^2}{2}\right).$$

De la neutralidad eléctrica de los reservorios y de la ley de Gauss (2.1.19) se obtiene la condición de Neumann $p'(0) = 0 = p'(\delta)$ y podemos eliminar c de la ecuación (2.1.26).

Más aún, si ponemos $\delta x := t$, $D := \sqrt{-\nu_-\nu_+ \frac{D_- - D_+}{v_+ D_+ - v_- D_-}}$, $l := \frac{n(1) - n(0)}{n(0)}$, $\lambda := -\delta^2 \nu_- \nu_+ n(0)$, $\chi := \frac{\nu_- + \nu_+}{\sqrt{-\nu_-\nu_+}}$ e $y := \delta\sqrt{-\nu_-\nu_+} p$ y reescalamos la ecuación (2.1.26) obtenemos finalmente

$$\begin{cases} y'' = \chi y y' + y\left[\lambda - \frac{y_0^2 - y^2}{2} - \left(l\lambda + \frac{y_0^2 - y_1^2}{2}\right) x\right] + \left(l\lambda + \frac{y_0^2 - y_1^2}{2}\right) D, \quad x \in (0,1) \\ y'(0) = 0 = y'(1) \end{cases} \tag{2.1.27}$$

donde usamos la notación $y_0 := y(0)$ e $y_1 := y(1)$.

Observamos, tal cual lo adelantamos en la introducción, que en la no linealidad intervienen los valores de la solución desconocida en el borde del dominio, es decir y_0 e y_1. Algunos resultados de interés para el problema (2.1.27) pueden encontrarse en [15].

Por otro lado también notamos que en general $-\nu_-\nu_+ \geq 0$ y si se cumple que $n(1) > n(0)$ y $\nu_- = -\nu_+$ entonces tenemos el problema de contorno

$$\left\{\begin{array}{l} y'' = y\left(\lambda - \frac{y_0^2-y^2}{2} + \left(l\lambda + \frac{y_0^2-y_1^2}{2}\right)x\right) - [l\lambda + \frac{y_0^2-y_1^2}{2}]D \\ y'(0) = 0 = y'(1) \end{array}\right. \tag{2.1.28}$$

Teniendo en cuenta la naturaleza de las constantes físicas de las que dependen los parámetros l, λ y D que intervienen en (2.1.28) se ve que los rangos para los cuales el problema tiene sentido físico son $-1 < D < 1$ y $\lambda, l > 0$.

2.1.3 Algunos antecedentes del problema de electrodifusión de dos iones con idénticas valencias.

Se ha probado ([18],[26]) que la ecuación del problema (2.1.28), bajo determinadas condiciones iniciales, tiene estructura de Painlevé II [65].

En 1988 Thompson [81] estudia existencia y unicidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y'' = f(x, y, y', y_0, y_1), \quad x \in (0,1) \\ y'(0) = 0 = y'(1) \end{array}\right. \tag{2.1.29}$$

con $f : [0,1]\times\mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^n$ continua, usando teoría del grado de coincidencia conjuntamente con el método de sub y super soluciones ordenadas.

En primer lugar se formula un teorema de continuación (Theorem 2.1 [81]) y el resultado principal de existencia (Theorem 2.2, [81]). Como consecuencia se obtiene un corolario (Corollary 2.3, [81]) clave para el posterior estudio del problema (2.1.28); más precisamente, con la notación $z < y$ si y sólo si $z_i < y_i$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, $y, z \in \mathbb{R}^n$ se demuestra que si f es continua y existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ ($\alpha < \beta$) de manera que se cumplen:

1. $f(x, \alpha, 0, y_0, y_1) < 0 < f(x, \beta, 0, y_0, y_1)$ para $\alpha \leq y, y_0, y_1 \leq \beta$ y $x \in [0,1]$.
2. *Condición de Nagumo.* [57] Existe una función $k : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ no decreciente tal que $|f_i(x, y, z, y_0, y_1)| \leq h(|z_i|)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ y $x \in [0,1]$ y $\alpha \leq y, y_0, y_1 \leq \beta$ y
$$\int_0^T \frac{sds}{h(s)} > \max_{1\leq i\leq n} (\beta_i - \alpha_i)$$
para cierto $T > 0$ y
3. La función $g(c) := \int_0^1 f(x, c, 0, c, c)\, dx$ tiene grado
$$d(g, \Omega, 0) \neq 0$$
con $\Omega := \{c \in \mathbb{R}^n : \alpha < c < \beta\}$

entonces el problema (2.1.29) tiene al menos una solución.

Para el caso escalar, $n = 1$, se demuestra (Theorem 2.5 [81]) que si f es continua y de clase C^1 en sus tres primeras variables y u es una solución del problema (2.1.29) que satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u, u', u(0), u(1)) \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, u, u', u(0), u(1)) \geq 0$$

entonces u es estrictamente decreciente o bien u es constante.

No obstante haber considerado el problema abstracto (2.1.29), los principales resultados obtenidos por Thomson ([81],[82]) se refieren al problema de electrodifusión (2.1.28) para $l, \lambda, D \geq 0$ de manera que omitiremos la dependencia de la no linealidad respecto de y'. Por otro lado la restricción respecto del signo del parámetro D no constituye una verdadera limitación dado que si y es solución del problema (2.1.28) para los parámetros $l, \lambda > 0$ y D entonces $-y$ lo es para los parámentros $l, \lambda > 0$ y $-D$.

Los resultados recién enunciados (Corollary 2.3, Theorem 2.5, [81]) son usados por Thompson para probar existencia de solución para el problema de electrodifusión (Theorem 2.6 , [81]). Más precisamente se tiene el siguiente resultado: si $D, l, \lambda > 0$ y existe una constante $m > 0$ tal que

$$m\left(1+\frac{l}{2}\right) - lD > 0 \tag{2.1.30}$$

y

$$m\left(\lambda - \frac{m^2}{2}\right) - l\lambda - m^2\frac{D}{2} > 0 \tag{2.1.31}$$

entonces el problema de electrodifusión (2.1.28) tiene al menos una solución no negativa estrictamente decreciente. Este resultado dice en particular que si λ es suficientemente grande en comparación con los valores de los parámetros l y D las soluciones no negativas son decrecientes.
Más aún, usando el principio del máximo se prueba (Theorem 3.1, [81]) que si f es de clase C^1 en Ω tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} \geq -\frac{\partial f}{\partial y_0} \geq 0, \;\; \frac{\partial f}{\partial y_1} \geq 0 \tag{2.1.32}$$

entonces

1. Si u e y son soluciones de (2.1.28) entonces $u - y$ es constante.
2. Si $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \neq 0$ entonces a lo sumo existe una solución de (2.1.28).
3. Si $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \equiv 0$ y u es una solución de (2.1.28) entonces $y = u - c$ es otra solución para cada constante $c \in \mathbb{R}$ y toda solución es de la forma $y = u - c$.

Por otro lado se prueba el siguiente resultado que es clave para la unicidad (Theorem 3.3, [81]): si f es de clase C^1 en Ω tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0, \;\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_0} - |\frac{\partial f}{\partial y_1}| \geq 0, \;\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} - |\frac{\partial f}{\partial y_0}| > 0$$

entonces a lo sumo existe una solución del problema (2.1.28). En particular (Theorem 3.5, [81]) si f es de clase C^1 sobre Ω con $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$, $-\frac{\partial f}{\partial y_0} \geq \frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ entonces si u e y son soluciones entonces $u - y = c$ es constante y si $\frac{\partial f}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ entonces existe a lo sumo una solución del problema (2.1.28); un resultado similar se tiene para el caso en que f sea independiente de y_0 (Corollary 3.6, [81]).

Otro resultado de interés (Theorem 3.7, [81]) establece que si $\lambda - \frac{lD^2}{2(l+1)} \geq 0$ entonces cualquier solución no negativa de (2.1.28) es decreciente y si $\lambda - \frac{lD^2}{2(l+1)} > 0$ y además de cumplirse (2.1.30) y (2.1.31) se cumple

$$m\left(\lambda - \frac{m^2}{2}\right) - lD > 0 \tag{2.1.33}$$

entonces (Corollary 3.8. [81]) existe sólo una solución no negativa tal que que $0 \leq y \leq m$. Notamos que efectivamente para $l, D > 0$ con λ suficientemente grande todas las condiciones son satisfechas.

Usando un argumento de shooting Thompson prueba (Theorem 4.2, [81]) que si $l_0 D_0 = 0$ y $\lambda_0 > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|l - l_0| + |\lambda - \lambda_0| + |D - D_0| < \delta$ entonces el problema (2.1.28) tiene solución $y(x) = y(x, l, D, \lambda)$ y además $|y_i| < \delta$ con $i = 1, 2$.

En el año 1994 Thompson [82] retoma su trabajo acerca del problema de electrodifusión unificando y extendiendo los resultados obtenidos en [81] para los parmátros con valores $l, \lambda, D > 0$. Más precisamente, usando el principio del máximo prueba que si $l, \lambda, D > 0$ entonces no existen soluciones negativas del problema (2.1.28) y que todas las soluciones positivas son estrictamente decrecientes y satisfacen

$$y(0) \leq y(1)(1 + l),$$

más aún, se prueba (Theorem 2,[82]) que efectivamente existen soluciones positivas si existe una constante $m > 0$ tal que

$$m\lambda - \left[l\lambda + m^2\left(1 - \frac{1}{2(1+l)^2}\right) D \geq 0\right. \tag{2.1.34}$$

lo cual es equivalente a pedir que

$$\lambda \geq 2l\left(1 - \frac{1}{(1+l)^2}\right) D^2. \tag{2.1.35}$$

Finalmente prueba en el mismo artículo (Theorem 6, [82]) que para $l, \lambda, D > 0$ las soluciones obtenidas en el teorema 4.2 de [81] son positivas.

Amster et al [16], usando una técnica de shooting bidimensional y teoría de grado, han probado que la condición (2.1.35) puede ser suprimida.

2.2 Modelo Generalizado de Nicholson.

Una de las aplicaciones más importantes de la matemática a la ecología consiste en la formulación de modelos que permiten describir, bajo determinados supuestos, las variaciones de la densidad poblacional, esto es el número de individuos o *biomasa* por unidad de espacio [1], en función del tiempo.

Obviamente, la buena representación del modelo exige que se cumplan ciertos principios básicos:

[1]En general nos referiremos a la densidad como al tamaño de la población.

1. Si la población es nula entonces el crecimiento debe ser nulo,

2. La densidad de población no debe ser negativa en ningún momento.

Como veremos, más adelante, estos dos principios se verifican de manera adecuada si los componentes de la densidad satisfacen ciertos supuestos.

En general se considera que el primer modelo [2] de crecimiento poblacional fue establecido por Malthus en el año 1798
$$\frac{dN}{dt} = rN. \tag{2.2.1}$$
En este caso el crecimiento es exponencial $N(t) = N_0 e^{rt}$, siendo N_0 el tamaño inicial de la población. La *constante no nula*
$$r = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$$
se llama *tasa intrínseca de crecimiento natural per cápita de la población*, y representa, en condiciones biológicas y ambientales óptimas, el potencial reproductivo de cada individuo, de manera que $\frac{dN}{dt}$ es proporcional al número de unidades reproductoras. Las condiciones óptimas incluyen un ambiente fisicoquímico bajo el cual el crecimiento de la población es máximo y una distribución por edades estable.

Es claro que este modelo satisface las dos restricciones anteriores: la velocidad de crecimiento es nula si la densidad lo es y además la densidad es estrictamente positiva aún cuando la tasa de crecimiento sea negativa. En este modelo se asume, implícitamente, que el efecto de la densidad poblacional sobre la velocidad de crecimiento es *instantáneo* y describe muy bien, durante un lapso de tiempo breve, la dinámica poblacional de ciertas especies denominadas *plagas* en presencia de suficiente alimento y espacio; por ejemplo el crecimiento de las moscas domésticas en un criadero de pollos en verano, el crecimiento bacterial en un recipiente con caldo nutritivo, etc. Aun así, el modelo se aplica también a poblaciones consideradas no plagas como la humana.

Para este modelo existen tres tipos posibles de comportamiento: la soluciones crecen exponencialente si y sólo si $r > 0$; decrecen exponencialmente a cero si $r < 0$ y obviamente son constantes si $r = 0$.

Un parámetro de cierto interés es el *tiempo de duplicación de la población* definido como el tiempo que tardaría la población para alcanzar un tamaño igual al doble que el actual; tal parámetro coincide con el de semivida si la tasa de crecimiento es negativa. [3]

El modelo de Malthus no explica el hecho de que, en general, la densidad se estabiliza alrededor de cierto valor de equilibrio; más precisamente este modelo no tiene en cuenta que los *recursos espacio nutricionales* en general son *escasos* y por lo tanto la población no

[2] También se destacan los aportes de Fibonacci.

[3] El modelo exponencial también se usa en el estudio de la radioactividad y en ese contexto se considera también el tiempo de semivida de cierto elemento radioactivo.

puede crecer de manera *ilimitada* [4]; este proceso de autolimitación se denomina en ocasiones *competición intraespecífica*; esto motivó la modificación del modelo imponiéndole cierto *freno* en función de la propia densidad.

2.2.1 El modelo logístico de Verhulst-Pearl.

Verhulst [51], en el año 1836, propuso un modelo en el cual la tasa de mortalidad permace constante mientras que la tasa de crecimiento depende linealmente de la densidad de la población a tiempo t. Ese modelo fue reconsiderado posteriormente, en el año 1927, por Pearl y actualmente se lo conoce como como el *modelo logístico* o *ecuación de Verhulst-Pearl*.

Más precisamente se propuso que r sea una *función lineal decreciente* de la densidad poblacional, es decir de la forma

$$r(t) = -mN(t) + r_0$$

donde m y r_0 son constantes relacionadas entre sí y representan conjuntamente una característica intrínsiceca de la población. Señalemos aquí que el modelo sólo se ajusta bien en determinadas especies y que la tasa en general varía con los factores abióticos [5] del medio ambiente.

Reemplazando esta expresión en el modelo de Malthus (2.2.1), obtenemos

$$\frac{dN}{dt} = N(t)\left(-mN(t) + r_0\right) = -mN^2(t) + r_0 N(t). \tag{2.2.2}$$

De acuerdo a este modelo la población no crece de manera indefinida, presenta *puntos de equilibrio*, es decir, *valores de la densidad para los cuales la velocidad de crecimiento es nula*. Obviamente uno de esos puntos es el trivial, como lo exigía la restricción inicial, y el otro $K := \frac{r_0}{m}$. El equilibiro no trivial es asintóticamente estable mientras que el trivial es inestable.

La constante $N^* := K$ representa el tamaño máximo que puede alcanzar la población en un hábitat específico bajo ciertas condiciones de recursos y se llama *capacidad máxima de carga* [6]. Por otro lado el parámetro r_0 representa el *valor máximo que puede asumir la tasa de crecimiento intrínseca*.

Con estas notaciones la ecuación (2.2.2) asume la forma usual del modelo logístico

$$\begin{aligned} \tfrac{dN}{dt} &= -mN^2(t) + r_0 N(t) = r_0 N(t) - \tfrac{r_0}{K} N^2(t) = \\ &= r_0 N(t)\left(\tfrac{K - N(t)}{K}\right) = r_0 N(t)\left(1 - \tfrac{N(t)}{K}\right) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

que dice que la velocidad de crecimiento es *proporcional tanto al tamaño de la población como a la cantidad que le falta a la densidad para alcanzar su capacidad de carga máxima relativa*, es decir

[4] Desde el punto de vista de los recursos se pueden distinguir tres tipos de modelos de crecimiento de poblaciones homogéneas: a) *Libres de restricciones de recursos externos* para la sustentabilidad, b) *con restricción de recursos externos* para la sustentabilidad y c) *con recolección*.

[5] Por ejemplo el ecólogo L. Birch mostró que una hembra del gorgojo del arroz (Calandra oryzae) produce una descendencia aproximada de 22 individuos al año a $23°$ C, una descendencia anual de 37 a $29°$ C y de 6 a $33,5°$ C; en el caso de la pulga de agua se encuentra también una situación parecida.

[6] Es usual en la literatura de la ecología matemática representar el valor del equilibrio con un asterisco

$\frac{K-N}{K}$; este factor es el que limita el crecimiento de la población y actúa en consecuencia en contra del potencial de crecimieto $r_0 N$.

Integrando la ecuación (2.2.3) con $N(0) := N_0$ tenemos

$$N(t) = \frac{K}{1+\frac{K-N_0}{N_0}e^{-r_0 t}} = \frac{N_0 e^{r_0 t}}{1+\frac{N_0}{K}(e^{r_0 t}-1)} \tag{2.2.4}$$

Si la densidad inicial N_0 es muy pequeña comparada con la capacidad de carga del ambiente K, o sea $\frac{N_0}{K} \ll 1$, tenemos que $N(t) \approx N_0 e^{r_0 t}$. Luego a densidades bajas el modelo logístico se comporta como el modelo exponencial de Malthus. También se observa que $N(t) \to K$ si $t \to +\infty$ de manera que para valores grandes se pone de manifiesto la resistencia biológica ambiental.

2.2.2 El modelo logístico con retardo de Hutchinson.

En verdad la situación es más compleja que la descripta hasta aquí; puede ocurrir que la densidad poblacional siga creciendo más allá del nivel de carga teórico K o incluso que su crecimiento *fluctúe alrededor del valor de carga*; este fenómeno de oscilación se presenta en ciertas especies denominadas *cíclicas* cuya dinámica es sensible a cambios estacionales; en algunas plantas exóticas ocurre que se alcanza abruptamente la capacidad de carga y luego se reduce de manera drásatica. [7]

En este sentido es de interés establecer condiciones bajo las cuales existen soluciones positivas periódicas de los modelos de crecimiento poblacional, tema específico que trataremos en el último capítulo a propósito de una variante del modelo logístico con retardo.

El modelo de Verhulst-Pearl se ajusta muy bien a especies en las que no hay un *tiempo de retardo significativo entre el nacimiento y la madurez reproductiva*, y en donde no hay diferencias reproductoras por edades (todos los individuos contribuyen de igual manera al crecimiento de la población). De esta forma el modelo funciona en poblaciones de plantas o animales unicelulares con reproducción asexual, ciclos de vida cortos y altas tasas de reproducción. En este modelo se supone que el efecto de *retroalimientación o autoregulación biológica-ambiental* dado por el factor $1 - \frac{N}{K}$ es instantáneo.

Si, por el contrario, suponemos que la autoregulación produce su efecto pasado cierto tiempo $\tau > 0$ entonces tendremos una *ecuación diferencial con retardo*

$$\frac{dN}{dt} = r_0 N(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) \tag{2.2.5}$$

El parámetro $\tau > 0$ representa la edad de máxima capacidad reproductiva de un individuo de la población.

Esta ecuación llamada *ecuación logística con retardo* fue aplicada en el año 1934 en el estudio de la dinámica de los ciclos económicos y posteriormente en el año 1948 usada por Hutchinson [40] para estudiar el tiempo que tarda en recuperarse la vegetación sometida

[7]Otras simplificaciones hechas por los modelos de crecimiento poblacional es que no tienen en cuenta la estructura poblacional por edades ni los efectos de recolección (harvesting); la primera supone que la población es *homogénea* y la segunda que no existen factores exógenos que afecten el crecimiento y desarrollo poblacional como por ejemplo la depredación, la cosecha, etc.

al pastoreo de animales; nos referiremos a la ecuación logísica con retardo como *ecuación de Hutchinson*.

Una generalización del modelo logístico con retardo fue dado en el año 1963 por el ecólogo Smith para interpretar sus experimentos sobre el crecimiento de la población de la mosca Daphina magna; más precisamente propuso el siguiente modelo llamado *modelo de la rápida limitación*

$$x'(t) = r_0 x(t) \frac{K - x(t-\tau)}{K + c r_0 x(t-\tau)}. \tag{2.2.6}$$

Observamos que para $c = 0$ retornamos a la ecuación logística con retardo.

En el año 1933 el biólogo W. Allee [4] descubre que en ciertas especies en las que la estructura cooperativa es esencial para el sustento poblacional, abejas, hormigas, peces, etc., la tasa de crecimiento per cápita aumenta hasta un instante en el que se alcanza un valor crítico. Superado este valor la población empieza a disminuir debido a causas como por ejemplo la competencia. Este fenómeno se denominó el *efecto Allee*; un modelo posible que describe el efecto Alle viene dado por

$$x'(t) = x(t) \left(1 - \tfrac{x(t-\tau)}{K}\right)(r_0 + q x(t-\tau) \tag{2.2.7}$$

donde $r_0 > 0$ y $q \geq 0$; en particular con $q = 0$ se obtiene el modelo de Hutchinson.

Todos los modelos anteriores (2.2.5)-(2.2.6)-(2.2.7) son casos particulares[8] del siguiente tipo de ecuación diferencial de primer orden con retardo

$$\tfrac{x'(t)}{x(t)} = f(x(t-\tau)) \tag{2.2.8}$$

Más aún, esta ecuación puede escribirse en la forma $z'(t) = F(z(t-1))$ para cierta función F; en efecto, si hacemos el cambio de variable

$$z(t) := ln(x(\tau t))$$

en (2.2.8) se tiene $e^{z(t)} = x(\tau t)$ y

$$z'(t) = \tau \tfrac{x'(\tau t)}{x(\tau t)} = \tau f(x(\tau t - \tau)) = \tau f(x(\tau(t-1)) = \tau f(e^{z(t-1)}) = F(z(t-1)) \tag{2.2.9}$$

donde $F(z) = \tau f(e^z)$.

En particular haciendo el cambio de variable

$$z(t) := -ln\left(\frac{N(\tau t)}{K}\right)$$

en el modelo de Hutchinson obtenemos

$$z'(t) = -\tau \frac{N'(\tau t)}{N(\tau t)} = -\tau r_0 \left(1 - \frac{N(\tau t - \tau)}{K}\right) = -a(1 - e^{-z(t-1)}) \tag{2.2.10}$$

donde $a := r_0 \tau$. Poniendo $F(z) = -a(1-e^{-z})$ vemos que la ecuación logística con retardo es de la forma (2.2.9).

La función F de este modelo tiene tres propiedades de interés

[8] Para el modelo de Hutchinson se tiene $f(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ para el modelo del rápido crecimiento $f(x) = r_0 \frac{K-x}{K+cr_0 x}$ y para el modelo del efecto Alle $f(x) = \left(1 - \frac{x}{K}\right)(r_0 + qx)$.

1. $F(0) = 0$
2. F es de clase C^1 y $F'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y
3. F está acotada inferiormente.

Las propiedades (1) y (2) implican que $x\ F(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ propiedad que se conoce como *condición del feedback negativo* y significa que la tasa de crecimiento per cápita es positiva si la densidad está por abajo del valor crítico K y negativa si está por arriba. Las propiedades (2) y (3) implican que la tasa de crecimiento per cápita disminuye cuando aumenta la densidad de la población hasta cierto nivel crítico.

Uno de los aspectos más importantes en el análisis de la dinámica de una población es determinar condiciones bajo las cuales la densidad tiende a estabilizarse alrededor del parámetro K, es decir del nivel de la máxima capacidad de carga. Wright [86] estudió la estabilidad de la ecuación logística con retardo; más precisamente propuso el cambio de variable

$$w(t) := \frac{N(\tau t)}{K} - 1$$

en la ecuación (2.2.5) obteniendo:

$$w'(t) = \frac{\tau}{K}\frac{dN(\tau t)}{dt} = \frac{\tau r_0}{K}N(\tau t)\left(1 - \frac{N(\tau t - \tau)}{K}\right) = -a\,w(t-1)\,(w(t)+1)\,. \qquad (2.2.11)$$

La reformulación de la ecuación de Hutchinson (2.2.11) se la conoce en la literatura como *ecuación de Wright*. [9] Considerando la linealización de la ecuación (2.2.10), es decir

$$z'(t) = F'(0)z(t-1) = -az(t-1)$$

se puede probar que la solución trivial de la ecuación logística con retardo es asintóticamente estable si y sólo si $a < \frac{\pi}{2}$ y si $a \geq \frac{\pi}{2}$ existen soluciones que no convergen a cero, es decir, $z = 0$ no es globalmente asintóticamente estable. [10]

Finalizamos esta subsección mostrando, muy brevemente y de manera heurística, cierto vínculo de la ecuación de Hutchinson con el teorema de los números primos. Si bien el problema es propio del área de la biología matemática tuvo su motivación en un problema de la teoría analítica de numeros; más precisamente en la búsqueda de una demostración sencilla del teorema de los números primos conjeturado por primera en el año 1793 por Gauss, según el cual

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)ln(x)}{x} = 1$$

[9] Para la ecuación de Wright el problema de la estabilidad consiste en encontrar valores de a para los cuales

$$\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$$

para toda solución que satisface $w(t) + 1 = \frac{N(\tau t)}{K} > 0$; en tal caso se dice que $w = 0$ es *globalmente* asintóticamente estable.

[10] Wright formuló la siguiente conjetura aún no resuelta: " si $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ entonces el equilibrio $z = 0$ es globalmente asintóticamente estable para la ecuación (2.2.11). "

donde π es la función de Euler que asocia a cada $x > 0$ la cantidad de números primos menores o iguales a x. Este límite dice que el orden de crecimiento de la función π es similar al de la función $\frac{x}{ln(x)}$.
En particular en el año 1942 Lord Cherwell, estudiando este tema, considera la siguiente ecuación diferencial

$$2xy''(x)/y'(x) + y'(\sqrt{x}) = 0. \tag{2.2.12}$$

Wright se interesó en esta ecuación a propósito de la teoría de números pero pronto ese vínculo quedó atrás; posteriormente prouso un cambio de variable en (2.2.12)

$$y'(x)ln(x) := 1 + w(v) \text{ y } ln(x) := 2v$$

y obtuvo la ecuación

$$w'(v) = -ln(2)w(v-1)(1 + w(v)) \tag{2.2.13}$$

la cual es un caso particular de la ecuación que llava su nombre (2.2.11).

Ahora bien, si

$$\lim_{v \to +\infty} w(v) = 0 \tag{2.2.14}$$

para todas las soluciones de la ecuación (2.2.13) entonces por un lado se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x)ln(x) = 1$$

de donde $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = 0$ y por otro usando la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)ln(x)}{x} = 1.$$

En consecuencia demostrar (2.2.14) implicaría probar[11] el teorema de los números primos.

2.2.3 Modelos con función de natalidad denso-dependiente con retardo.

En general los modelos de crecimiento poblacional presuponen la existencia de dos fuerzas opuestas que interactúan y tienen distintos efectos sobre el crecimiento y el desarrollo de las poblaciones; una es de ellas es intrínseca a la población y se refiere a su capacidad para reproducirse a cierto ritmo; la otra, opuesta a la anterior, consiste en la mortalidad o si se quiere la longevidad fisiológica.

El ecólogo Royal Chapman se refirió a estas fuerzas que regulan el crecimiento poblacional como el *Potencial biótico* y la *Resistencia del ambiente*. En este sentido se considera que los procesos básicos, conformados por una diversidad de factores endógenos y exógenos que afectan el crecimieto poblacional, son:

1. B: La función de natalidad, dependiente de todos los factores que contribuyen de algún modo a la reproducción de la especie.

[11] Para una descripción de la historia del vínculo de las ecuaciones diferenciales con retardo y la teoría de los números primos remitimos al lector al texto de Sandor [73].

2. D: La función de mortalidad, dependiente de todos los factores que contribuyen de algún modo a la extinción de la especie.

Es frecuente construir modelos en los que se supone que la función de natalidad depende de la densidad poblacional teniendo en cuenta el efecto del tiempo biológico necesario que requiere un individuo de la especie para alcanzar la madurez reproductiva, mientras que la función de mortalidad D depende sólo del estado actual de la densidad poblacional; más precisamente modelos dados por una ecuación diferencial de primer orden con retardo del siguiente tipo:

$$N'(t) = F(N(t), N(t-\tau)) = B(N(t-\tau)) - D(N(t)) \tag{2.2.15}$$

donde B y D son las funciones de natalidad y mortalidad respectivamente; $N(t) > 0$ representa la densidad a tiempo t y $\tau > 0$ (*retardo de tipo discreto*) el tiempo necesario para alcanzar la madurez reproductiva.

En general se requiere que las funciones B y D satisfagan ciertas condiciones que reflejan hechos biológicos estructurales de las poblaciones; estas condiciones se denominan *resticciones fuertes del modelo* y básicamente son tres:

(H1): $B(0) = D(0)$ y $B(N) > D(N)$ para $N \in (0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

(H2): Existe una constante $K > 0$ tal que $B(K) = D(K)$.

(H3): $(Z - K)(B(N) - D(N)) < 0$ para $Z \in (0, +\infty)$ con $N \neq K$.

La primera hipótesis (H1) dice que la velocidad de crecimiento es nula en ausencia de densidad (*equilibrio trivial*) y es positiva a densidades poblacionales bajas.

La segunda y tercera hipótesis, (H2) y (H3), se refieren a la capacidad de carga: la segunda afirma que efectivamente existe una capacidad de carga máxima (*equilibrio no trivial*) y la tercera que la capacidad de carga es única y además establece que por debajo de la capacidad máxima la densidad crece y por arriba la densidad decrece.

Dos ejemplos típicos de funciones de natalidad son:

$$B_1(N) = pNe^{-N},\ p > 0 \tag{2.2.16}$$

llamada usualmente de tipo Riker y

$$B_2(N) = \frac{pN}{1+N^m},\ m > 0 \tag{2.2.17}$$

de tipo Beverton-Holt. Asimismo es típica la función de mortalidad

$$D(N) = \delta N,\ \delta > 0.$$

Las funciones B_1 y B_2 conjuntamente con D, satisfacen las condiciones (H1), (H2) y (H3).

2.2.4 El modelo de Nicholson: antecedentes y generalizaciones.

Como lo señalamos anteriormente la densidad poblacional de ciertas especies pueden fluctuar casi periódicamente en el tiempo; estos períodos no pueden explicarse mediante una mera variación temporaria; la regularidad de este fenómeno atrajo la atención de muchos ecólogos.

En particular se destacan los experimentos que realizó en el año 1954 el entomólogo Nicholson [60] acerca de la mosca de la oveja Australiana, declarada para entonces peste en Australia. Nicholson controló durante dos años, en forma independiente, el alimento suministrado a larvas y moscas adultas y observó que la densidad poblacional oscilaba aproximadamente en ciclos de 35 a 40 días.

La conclusión de esos experimentos fue que la oscilación se debía al tiempo de demora que existía entre el estimulo dado (suministro de alimento) y la respuesta obtenida (crecimiento demografico).

El primer modelo propuesto para explicar los resultados de los experimentos de Nicholson fue la ecuación de Hutchinson [12] (2.2.5). En el año 1980 Gurnay et al. [37] mostraron que la ecuación de Hutchinson no se ajustaba de manera adecuada a los resultados observados y propusieron el siguiente modelo

$$\frac{dN}{dt} = -\delta N(t) + pN(t-\tau)e^{-\alpha N(t-\tau)}$$

donde $N(t)$ designa el tamaño de la población en tiempo t, p la máxima producción diaria de huevos por individuo adulto; $K = 1/\alpha$ es el tamaño en el que la población se reproduce a su máxima tasa intrínseca de crecimiento, δ es la tasa de mortalidad diaria por individuo adulto y τ el tiempo de maduración necesario para que una larva se convierta en individuo adulto y pueda procrear. Haciendo el cambio de variable $x(t) := \alpha N(t)$ tenemos

$$x'(t) = -\delta x(t) + px(t-\tau)e^{-x(t-\tau)}. \tag{2.2.18}$$

Este modelo se dio en llamar la ecuación de "las moscas de Nicholson " (Nicholson's Blowflies) y nos referiremos al mismo como el *Modelo de Nicholson*; los trabajos referidos a este modelo se centraron en el estudio de la existencia de soluciones positivas, periodicidad, persistencia, permanencia, oscilación y estabilidad [21].

Observamos que el Modelo de Nicholson es del tipo (2.2.15) con la función de natalidad $B(x) = pxe^{-x}$ (tipo Riker) y de mortalidad $D(x) = \delta x$ con $p > 0$ y $\delta > 0$ constantes.

En el artículo de J. So y Yu [79] se prueban varios resultados relacionados con la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales (2.2.18) con el dato inicial

$$x(s) = \phi(s), \forall s \in [-\tau, 0] \tag{2.2.19}$$

donde $\phi \in C([-\tau,0],[0,+\infty))$. Más precisamente se prueba que todas las soluciones de (2.2.18)-(2.2.19) son no negativas si el valor inicial $\phi(t) \geq 0$ para todo $t \in [-\tau, 0]$ y

[12] May [54] encontró que el período no dependía de K sino de $r_0\tau$ donde r_0 es la tasa intrínseca de crecimiento poblacional generalmente desconocida; los valores de los parámetros de la ecuación de Hutchinson que, según May, mejor se adaptaban a esos datos satisfacen aproximadamente la relación $r_0\tau = 2,1$.

estrictamente positivas para $t \geq \tau$ si además ϕ no es idénticamente nula. Y en el caso en que el valor inicial sea estrictamente positivo las soluciones son estrictamente positivas para todo $t \geq 0$ y además

$$\limsup_{t \to +\infty} x(t) \leq \frac{p}{\delta e}.$$

Por otro lado también se prueba que si $p \leq \delta$ entonces para cualquier solución x se tiene que $x(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, de manera que $x = 0$ es una atractor global para cualquier retardo τ; mientra que si $p > \delta$ el equilibrio trivial es inestable y si x es una solución positiva no oscilatoria alrededor del equilibrio no trivial $x^* = ln(\frac{p}{e\delta})$, esto es, si la diferencia $x - x^*$ es eventualmente positiva o bien eventualmente negativa, entonces

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) \to x^*.$$

Más aún si

$$(e^{\tau\delta} - 1)(\frac{p}{\delta} - 1) < 1$$

entonces x^* es un atractor global, de donde se ve que si el retardo es suficientemente chico el equilibiro no trivial es globalmente asintóticamente estable. Asimismo se ve que no existen soluciones no triviales tal que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$ y todas las soluciones de (2.2.18) son uniformemente persistentes, esto es, existe $m > 0$ tal que

$$\liminf_{t \to +\infty} x(t) > m$$

para toda solución con dato inicial positivo.

El modelo autónomo (2.2.18) se ha generalizado en varias direcciones, en primer lugar se consideraron las tasas $p > 0$ y $\delta > 0$ variables obteniéndose el *Modelo No Autónomo con retardo variable*:

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)x(t - \tau(t))e^{-x(t-\tau(t))}. \tag{2.2.20}$$

Luego se formuló un modelo en el que intervienen m especies[13]; más precisamente se considera para cada especie $k = 1, 2, \cdots m$ la función de natalidad específica $B_k(x) := p_k x e^{-x}$ con p_k la tasa de producción máxima de huevos por individuo adulto (no necesariamente constante) y

$$B_k(x(t - \tau_k(t))) = p_k(t)x(t - \tau_k(t))e^{-x(t-\tau_k(t))}$$

con τ_k el retardo variable específico para la especie. A continuación se define la función natalidad, B, como una superposición de las funciones de natalidad de las especies

$$\begin{aligned} B(t, x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t)), \cdots, x(t - \tau_m(t))) &:= \textstyle\sum_{k=1}^m B_k(x(t - \tau_k(t))) = \\ = \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t)x(t - \tau_k(t))e^{-x(t-\tau_k(t))} & \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

y la función de mortalidad $D(x) := \delta x$ donde $\delta > 0$ denota la tasa de motalidad promedio (no necesariamente constante). Luego se obtiene el siguiente modelo

[13]Se supone que cada especie contribuye a la densidad de la población total a través de sus tasas intrínsecas de crecimiento y de sus tiempos específicos de maduración reproductiva.

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), x(t-\tau_2(t)), \cdots, x(t-\tau_m(t))) = \\ &= B(t, x(t-\tau_1(t)), x(t-\tau_2(t)), \cdots, x(t-\tau_m(t))) - D(x(t)) = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t) x(t-\tau_k(t)) e^{-x(t-\tau_k(t))} - \delta(t)x(t) \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

con $\delta, p_k \in C(\mathbb{R}^+, [0, \infty))$ y $\tau_k, \in C([0, +\infty), [0, \infty))$.

A los efectos de simplificar escribimos

$$B_k(x) := p_k f(x)$$

con $f(x) := xe^{-x}$ y

$$x_{\tau_k}(t) := x(t - \tau_k(t)) \tag{2.2.23}$$

de manera que (2.2.22) se transforma en

$$x'(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) - \delta(t)x(t). \tag{2.2.24}$$

A la ecuación (2.2.24) se la conoce usualmente como el *Modelo Generalizado de Nicholson con varios retardos variables concentrados*. [14]

Por otro lado se ha considerado también el modelo (2.2.24) pero con un término de recolección $H : [0, +\infty), \times[0, +\infty) \to (0, +\infty)$ continuo tal que $H(0, x) = 0$

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x(t)) \tag{2.2.25}$$

o también el modelo con un término de recolección dependiente de uno de los retardos variables de la población

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x_{\tau_{\hat{k}}}(t)) \tag{2.2.26}$$

donde $\tau_{\hat{k}} := \tau_k$ para algún $k \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$.

El término de recolección afecta solamente a la función de mortalidad, ahora la función D depende de t explícitamente; más precisamente para el modelo (2.2.25)

$$D(t, x(t)) = \delta(t)x(t) + H(t, x(t))$$

y para (2.2.26)

$$D(t, x(t - \tau_{\hat{k}}(t))) = \delta(t)x(t) + H(t, x(t - \tau_{\hat{k}}(t)))$$

en este último caso D depende a cada instante del pasado de la densidad retardada según $\tau_{\hat{k}}$.

Con la notación dada en la subsección 1.5.2 del capítulo 1,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\delta(t)x(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) = \\ &= -\delta(t)x_t(0) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_t(-\tau_k(t)). \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

[14] Se puede formular el modelo generalizado de Nicholson (2.2.24) como un caso particular de una ecuación diferencial con retardo distribuido (1.5.16) [21].

Supongamos que los retardos $\tau_k \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$ son acotados para todo $k = 1,2,\cdots,m$ y denotemos

$$\tau^* := \max_{1\le k\le m}\{\max_{t\in[0,T]}\{\tau_k(t)\}\} \tag{2.2.28}$$

y

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^+} := C([-\tau^*,0],\mathbb{R}^+)$$

entonces el modelo (2.2.24) es de la forma $x'(t) = F(t,x_t)$ donde

$$F:[0,+\infty)\times\mathcal{C}_{\mathbb{R}^+}\to\mathbb{R}$$

se define como

$$F(t,\psi) := -\delta(t)\psi(0) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t)f(\psi(-\tau_k(t))),\ \ (t,\psi)\in[0,+\infty)\times\mathcal{C}_{\mathbb{R}^+}.$$

Si además $\delta, p_k \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$ son funciones acotadas para todo $k = 1,2,\cdots,m$ entonces F es globalmente Lipschitz (1.5.5) pues para alguna costante $L>0$ se tiene

$$\begin{aligned}
&|F(t,\psi)-F(t,\overline{\psi})| = |-\delta(t)[\psi(0)-\overline{\psi}(0)] + \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t)[f(\psi(-\tau_k(t)) - f(\overline{\psi}(-\tau_k(t))]| \le\\
&\le |\delta(t)|\ |\psi(0)-\overline{\psi}(0)| + \textstyle\sum_{k=1}^m |p_k(t)|\ |f(\psi(-\tau_k(t))) - f(\overline{\psi}(-\tau_k(t)))| \le\\
&\le \delta^*|\psi-\overline{\psi}|_{\tau^*} + L\textstyle\sum_{k=1}^m p_k^*\ |\psi-\overline{\psi}|_{\tau^*} = (\delta^* + L\sum_{k=1}^m p_k^*)\ |\psi-\overline{\psi}|_{\tau^*}
\end{aligned}$$

además F es acuasi-acotada (1.5.7) pues si $A\subset\mathbb{R}^+$ es un compacto y $(t,\psi)\in[0,+\infty)\times\mathcal{C}_A$ entonces

$$\begin{aligned}
&|F(t,\psi)| = |-\delta(t)\psi(0) + \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t)f(\psi(-\tau_k(t)))| \le\\
&\le \delta^*\psi(0) + \frac{1}{e}\textstyle\sum_{k=1}^m p_k^* \le \delta^* M + \frac{1}{e}\sum_{k=1}^m p_k^* := K
\end{aligned}$$

donde $M := \sup(A)$. Finalmente F también satisface la condición C (1.5.3) pues para cada $\psi\in\mathcal{C}_{\mathbb{R}^+}$ se tiene que $F(t,\psi)$ es composición de funciones continuas respecto de t.

Luego, de acuerdo al teorema (1.5.7), el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = F(t,x_t), & t\in(0,\infty)\\ x_0 = \phi, & \phi\in\mathcal{C}_{\mathbb{R}^+}\end{cases} \tag{2.2.29}$$

tiene una única solución global. [15]

Como lo observamos anteriormente, es de interés dar condiciones bajo las cuales existan soluciones T-periódicas poositivas. En este sentido se consideran que las funciones

[15] Para el modelo (2.2.25) se tiene

$$F(t,\psi) = -\delta(t)\psi(0) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t)f(\psi(-\tau_k(t)) - H(t,\psi(0))$$

y para (2.2.26)

$$F(t,\psi) = -\delta(t)\psi(0) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t)f(\psi(-\tau_k(t)) - H(t,\psi(-\tau_{\hat{k}}(t)))$$

luego si se pide que H sea globalmente Lipschitz en su segunda variable se tiene la misma conclusión para ambos modelos.

$\delta, p_k, \tau_k, \tau_k \in C(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ son T-periódicas[16] y que $H \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, [0, +\infty)$ es T-periódica en su primera variable. En el artículo de J. Li et al [47] se ha considerado el modelo generalizado (2.2.24) obteniéndose esencialmente dos resultados: en primer lugar, usando el teorema de punto fijo de Krasnoselskii sobre un cono [90], se prueba la existencia de al menos una solución T-periódica positiva bajo la condición

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) > \delta(t),\ t \in [0, T]. \tag{2.2.30}$$

En segundo lugar, también se prueba en [47] que si

$$x(s) = \phi(s), \quad \phi \in C([-\tau^*, 0], [0, \infty)) \tag{2.2.31}$$

entonces toda solución postiva del problema de valores iniciales (2.2.24)-(2.2.31) tiende a cero cuando t tiende a $+\infty$ asumiendo que

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) \leq \delta(t),\ t \in [0, T]. \tag{2.2.32}$$

Por otro lado en el año 2009 L. Berezansky formula el siguiente problema (4. open problems and conjectures, 6. [21]): dar condiciones suficientes para la existencia de solución T-periódica positiva para el modelo autóno de Nicholson (2.2.18) con un término de recolección lineal dependiente de un retardo arbitrario, esto es

$$x'(t) = -\delta x(t) + px(t-\tau)e^{-ax(t-\tau)} - hx(t-\sigma) \tag{2.2.33}$$

siendo δ, p, a, h, τ y σ constantes positivas.

Este problema fue resuelto por fue resuelto por F. Long y M. Yang [49] usando teoría del grado de coincidencia; más precisamente, se prueba existencia de solución T-periódica positiva de (2.2.33) asumiendo que $\sigma = \tau$ y

$$p^- e^{-a^+ u^+} - h^+ \geq 0$$

donde se usa la notación

$$g^+ := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{g(t)\}, \quad g^- := \inf_{t\in\mathbb{R}}\{g(t)\}$$

para cualquier g continua y acotada definida sobre $\mathbb{R}$ y $u(t) := \frac{p(t)}{a(t)\delta(t)e}$.

En el último capítulo plantearemos el problema en un contexto más general y extenderemos estos resultados; por un lado daremos condiciones suficientes para la existencia de solución T-periódica positiva para los modelos generalizados de Nicholson con recolección (2.2.25) y (2.2.26) y por otro una condición necesaria para que haya al menos una solución T-periódica positiva. Asimismo veremos que bajo ciertas condiciones todas las

[16] En este caso, todas las funciones del modelo pueden extenderse por periodicidad a $\mathbb{R}$.

soluciones del problema de valores iniciales (2.2.25)-(2.2.31) están definidas globalmente y tienden a cero cuando t tiende a $+\infty$.

Asimismo se ha considerado *sistemas tipo Nicholson*

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) + p_1 x_1(t-\tau_1)e^{-a_1 x_1(t-\tau_1)} \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2 x_2(t) + \beta_2 x_1(t) + p_2 x_2(t-\tau_2)e^{-a_2 x_1(t-\tau_2)} \end{cases} \tag{2.2.34}$$

donde $\delta_i, \beta_i, p_i, a_i$ y τ son constantes positivas para $i = 1, 2$.

Este tipo de modelos se utilizó por ejemplo para describir la dinámica de las células B de la leucemia linfocítica crónica (LLC-B). Berezanky L. et al [22] analizan la dinámica de (2.2.34) con dato inicial $x_i(s) = \phi_i(s),\ s \in [-\tau, 0],\ \phi_i(0) > 0$ donde $\phi_i \in C([-\tau, 0], [0, +\infty))$ para $i = 1, 2$.

Qiyuan Zhou [91] considera el sistema (2.2.34) no autónomo con términos lineales de recolección, utilizado para modelar estrategias sustentables de explotación de recursos biológicos, por ejemplo, en silvicultura [17] o pesca:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + p_1(t)f(x_{1_{\tau_1}}(t)) - h_1(t)x_1(t-\tau_1(t)) \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + p_2(t)f(x_{2_{\tau_2}}(t)) - h_2(t)x_2(t-\tau_2(t)) \end{cases} \tag{2.2.35}$$

donde $\delta_i, \beta_i, p_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ y $h_i, \tau_i \in C(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ son T-periódicas para $i = 1, 2$. Usando la misma notación dada en (0.0.10), en [91], se prueba existencia de solución T-periódica positiva de (2.2.35) asumiendo, para $i = 1, 2$ que

$$\delta_1^-\delta_2^- - \beta_1^+\beta_1^+ > 0, \quad \left(\frac{p_i}{\delta_i + h_i}\right)^- > 1, \quad \frac{\int_0^T p_i(t)\,dt}{\int_0^T (\delta_i(t) + h_i(t) - \beta_i(t))\,dt} > 1$$

y que

$$p_i^- e^{-e^{D_i}} - h_i^+ \geq 0$$

donde

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ln\left(\frac{\delta_2^-}{\delta_1^-\delta_2^- - \beta_1^+\beta_2^+}\left(\frac{p_1}{e}\right)^+ + \frac{\beta_1^+}{\delta_1^-\delta_2^- - \beta_1^+\beta_2^+}\left(\frac{p_2}{e}\right)^+\right) \\ ln\left(\frac{\beta_2^+}{\delta_1^-\delta_2^- - \beta_1^+\beta_2^+}\left(\frac{p_1}{e}\right)^+ + \frac{\delta_1^+}{\delta_1^-\delta_2^- - \beta_1^+\beta_2^+}\left(\frac{p_2}{e}\right)^+\right) \end{pmatrix}.$$

Finalmente señalamos que también se ha estudiado la existencia de soluciones casi periódicas[18] ([38],[39]) positivas para sistemas de tipo Nicholson; Wang et al [84] consideraron el sistema

[17]La silvicultura (del latín silva, selva, bosque, y cultura, cultivo) es el cuidado de los bosques, cerros o montes y también, por extensión, la ciencia que trata de este cultivo; es decir, de las técnicas que se aplican a las masas forestales para obtener de ellas una producción continua y sostenible de bienes y servicios demandados por la sociedad.

[18]Una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua se dice casi periódica en $\mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $T(u, \epsilon) := \{h : ||u(t+h) - u(t)|| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente denso, es decir para cualquier $\epsilon > 0$ existe $l = l(\epsilon) > 0$ tal que para todo intervalo I_l de longitud de longitud l existe $h = h(\epsilon) \in I_l$ tal que $|u(t+h) - u(t)| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + \sum_{k=1}^{m} p_{1k}(t)f(x_{1,k_{\tau_{1,k}}}(t)) \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + \sum_{k=1}^{m} p_{2k}(t)f(x_{2,k_{\tau_{2,k}}}(t)) \end{cases} \tag{2.2.36}$$

donde $x_{i,k_{\tau_{i,k}}}(t) := x_{i,k}(t - \tau_{i,k}(t)$ para $i = 1, 2$ y $k = 1, 2, \cdots, m$ y probaron, bajo ciertas condiciones, existencia y convergencia exponencial de las soluciones casi periódicas positivas. Xingguo Liu et al. [88] estudiaron el sistema (2.2.36) pero con términos de recolección lineales dependientes de retardos arbitrarios

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + \sum_{k=1}^{m} p_{1,k}(t)f(x_{1,k_{\tau_{1,k}}}(t)) - h_1(t)x_{1_{\sigma_1}}(t) \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + \sum_{k=1}^{m} p_{2,k}(t)f(x_{2,k_{\tau_{2,k}}}(t)) - h_2(t)x_{2_{\sigma_2}}(t) \end{cases} \tag{2.2.37}$$

donde $\delta_i, \beta_i, p_{i,k} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ y $\sigma_i, h_i, \tau_{i,k} \in C(\mathbb{R}, [0, +\infty)$ son funciones casi periódicas para $i = 1, 2$ y $k = 1, 2, \cdots, m$. Más precisamente, se considera el valor inicial para el sistema (2.2.37)

$$x_{t_0} = \phi = (\phi_1, \phi_2) \in C, \ \phi_i(0) > 0, \ i = 1, 2 \tag{2.2.38}$$

donde

$$C := C([-r_1, 0], \mathbb{R}) \times C([-r_1, 0], \mathbb{R})$$

y se asume que para $i = 1, 2$

$$\delta_i^+ > 0, \beta_i^- > 0, \ p_{i,k}^- > 0, \ \ r_i := \max\left\{\max_{1 \le k \le m}\left\{p_{i,k}^+\right\}, \sigma_i^+\right\} > 0$$

y que existen constantes E_{i1} e E_{i2} tales que se verifican las siguientes condiciones

$$E_{i1} > E_{i2}, \ \ \frac{\beta_1^+ E_{21}}{\delta_1^-} + \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{m}\frac{p_{i,k}^+}{\delta_1^-} < E_{11}, \ \ \frac{\beta_2^+ E_{11}}{\delta_2^-} + \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{m}\frac{p_{2,k}^+}{\delta_2^-} < E_{21} \tag{2.2.39a}$$

$$\frac{\beta_1^- E_{22}}{\delta_1^+} + \sum_{k=1}^{m}\frac{p_{1,k}^-}{\delta_1^+}f(E_{11}) - \frac{h_1^+ E_{11}}{\delta_1^+} > E_{12} \ge 1 \tag{2.2.39b}$$

$$\frac{\beta_2^- E_{12}}{\delta_2^+} + \sum_{k=1}^{m}\frac{p_{2,k}^-}{\delta_2^+}f(E_{21}) - \frac{h_2^+ E_{21}}{\delta_2^+} > E_{22} \ge 1 \tag{2.2.39c}$$

Bajo estos supuestos en [88] se prueba que si $x = x(t; \phi, t_0)$ es solución de (2.2.37) con

$$\phi \in C^0 := \{\phi \in C : E_{i2} < \phi_i(t) < E_{i1}, \ \forall t \in [-r_i, 0], \ i = 1, 2\}$$

entonces todo $i = 1, 2$

$$E_{12} < x_i(t; t_0, \phi) < E_{i2}$$

para todo $t \in [t_0, \eta(\phi))$ y además $\eta(\phi) = +\infty$. Más aún, usando el teorma de contracción de Banach se prueba que si además de cumplirse (2.2.39a)-(2.2.39b) y (2.2.39c) se verifica que

$$\max\left\{\frac{\beta_1^+}{\delta_1^-}+\sum_{k=1}^{m}\frac{p_{1,k}}{\delta_1^- e^2}+\frac{h_1^+}{\delta_1^-},\ \frac{\beta_2^+}{\delta_2^-}+\sum_{k=1}^{m}\frac{p_{2,k}}{\delta_2^- e^2}+\frac{h_2^+}{\delta_2^-}\right\}<1$$

entonces existe una única solución casi periódica del problema de valores iniciales (2.2.37) -(2.2.38) en

$$B^* := \{\phi \in B : E_{i2} \leq \phi_i(t) \leq E_{i1},\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

donde

$$B := \{\phi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})^2 : \phi \text{ es casi periódica } \}$$

con la norma

$$||\phi||_B := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{||\phi(t)||\}.$$

Chapter 3

Resultados principales para el modelo de electrodifusión abstracto.

En este capítulo se considera la formulación abstracta

$$y''(x) = f(x, y(x), y(0), y(1)) \tag{3.0.1}$$

de la ecuación (2.1.28) correspondiente al modelo de electrodifusión que hemos obtenido en la subsección 2.1.2 del capítulo 2. Se estudia existencia de al menos una solución del modelo abstracto bajo diferentes condiciones de borde y diversas hipótesis impuestas a f para el caso escalar y de un sistema.

En la sección 3.1 se demuestran los principales resultados que hemos obtenido con relación al modelo abstracto de electrodifusión para el caso escalar. En particular en la subsección 3.1.1 consideraremos el modelo en un intervalo acotado

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y(0), y(1)), \quad x \in (0,1) \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.0.2}$$

con $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua.

En primera instancia se adaptarán las condiciones asintóticas de Landesman-Lazer para el modelo abstracto de electrodifusión (3.0.2) y se probará el siguiente resultado de existencia de solución.

Teorema 3.0.1. Landesman-Lazer. Caso Asintótico. *Supongamos que f es continua, acotada y existen los límites*

$$\lim_{s \to \pm\infty} f(x, s+a, s, s+b) := f^{\pm}(x) \tag{3.0.3}$$

uniformes para $x \in [0,1]$ y $|a|, |b| \leq \|f\|_\infty$. Entonces, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\int_0^1 f^-(x)\, dx < 0 < \int_0^1 f^+(x)\, dx \tag{3.0.4a}$$

$$\int_0^1 f^+(x)\, dx < 0 < \int_0^1 f^-(x)\, dx \tag{3.0.4b}$$

entonces el problema de electrodifusión abstracto (3.0.2) admite al menos una solución

En segunda instancia probaremos un resultado más fuerte que el dado en el teorema 3.0.1 en el sentido de que se debilitan las hipótesis relativas a la acotación y a la existencia de los límites de la no linealidad.

Para ello comenzamos precisando la región sobre la que se condiciona el crecimiento de la no linealidad: para algunas constantes $a < b$ y $r > 0$ a determinar, consideramos los compactos

$$K_{s,r} := \overline{B_r(s)} \times \{s\} \times \overline{B_r(s)}, \quad s \in [a,b]$$

$$K_{s,r}(x) := \{x\} \times K_{s,r}, \quad x \in [0,1]$$

y

$$K_{[a,b],r} := K([0,1],[a,b],r) := \bigcup_{x\in[0,1]} \bigcup_{s\in[a,b]} K_{s,r}(x).$$

Observamos que $(x,y,y_0,y_1) \in K_{[a,b],r}$ sii $x \in [0,1]$, $y_0 \in [a,b]$ y $y_0 - r \leq y, y_1 \leq y_0 + r$.

Ahora definimos las funciones

$$f^a_{\text{sup}}, f^b_{\text{sup}}, f^a_{\text{inf}}, f^b_{\text{inf}} : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f^a_{sup}(x) := \sup_{(y,y_0,y_1)\in K_{a,r}} f(K_{a,r}(x)), \quad f^b_{sup}(x) := \sup_{(y,y_0,y_1)\in K_{b,r}} f(K_{b,r}(x)), \tag{3.0.5}$$

y

$$f^a_{inf}(x) := \inf_{(y,y_0,y_1)\in K_{a,r}} f(K_{a,r}(x)), \quad f^b_{inf}(x) := \inf_{(y,y_0,y_1)\in K_{b,r}} f(K_{b,r}(x)), \tag{3.0.6}$$

para todo $x \in [0,1]$ y consideraremos tres casos:

- **Primer Caso:** Existe $k \in L^1(0,1)$

  $$y\ f(x,y,y_0,y_1) \geq -k(x) \tag{3.0.7}$$

  para todo $(x,y,y_1,y_0) \in K_{[a,b],r}$ con $r^2 \geq \int_0^1 k(x)\,dx$.

- **Segundo Caso:**

  $$|f(x,y,y_0,y_1)| \leq r \tag{3.0.8}$$

  para todo $(x,y,y_1,y_0) \in K_{[a,b],r}$ y alguna constante $r > 0$. [1]

- **Tercer Caso:** Existe $k \in L^1(0,1)$ tal que

  $$f(x,y,y_0,y_1) \geq -k(x) \text{ o } f(x,y,y_0,y_1) \leq k(x) \tag{3.0.9}$$

  para todo $(x,y,y_1,y_0) \in K_{[a,b],r}$ con $r \geq \|k\|_{L^1} + \int_0^1 k(x)\,dx$.

[1] Un caso particular ocurre cuando f crece a lo sumo linealmente, digamos

$$|f(x,y,y_0,y_1)| \leq \alpha|y| + \beta|y_0| + \gamma|y_1| + \delta$$

con $2(\alpha+\gamma)+\beta < 1$ entonces es suficiente tomar $a = -cr$ y $b = cr$ para algunas constantes $c > 1$ y $r > 0$ suficientemente grandes.

Con las notaciones y definiciones anteriores tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.0.2. Landesman-Lazer. Caso No Asintótico. *Si f satisface alguna de las situaciones dadas en los casos (3.0.7), (3.0.8) ó (3.0.9) y se verifica alguna de las sigientes desigualdades*

$$\int_0^1 f^a_{sup}(x)\ dx < 0 < \int_0^1 f^b_{inf}(x)\ dx \tag{3.0.10a}$$

ó

$$\int_0^1 f^b_{sup}(x)\ dx < 0 < \int_0^1 f^a_{inf}(x)\ dx. \tag{3.0.10b}$$

entonces el problema (3.0.2) admite al menos una solución

Luego consideraremos, en la subsección 3.1.2, el problema escalar de electrodifusión para un intervalo no acotado

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y(0), y(\infty)), & x \in (0, +\infty), \\ y'(0) = v_0, \quad y'(\infty) = 0, \end{cases} \tag{3.0.11}$$

donde

$$y(\infty) := \lim_{x\to+\infty} y(x), \quad y'(\infty) := \lim_{x\to+\infty} y'(x).$$

Asumiendo que existen funciones suaves

$$\alpha, \beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\alpha \le \beta, \;\; \alpha'(0) \ge v_0 \ge \beta'(0), \;\; \alpha(\infty) = \beta(\infty) = C \tag{3.0.12}$$

$$\alpha''(x) \ge f(x, \alpha(x), u, C), \qquad \beta''(x) \le f(x, \beta(x), u, C) \tag{3.0.13}$$

para cada $x \in [0, \infty)$ y $u \in [\alpha(0), \beta(0)]$ y usando un argumento del tipo diagonal probaremos el siguiente

Teorema 3.0.3. Modelo Abstracto de Electrodifusión en la Semirecta. *Sea α y β un par de sub y super soluciones ordenadas según se define en (3.0.12)-(3.0.13). Si existe $\varphi \in L^1(x_0, +\infty)$ tal que*

$$|f(x, y, u, C)| \le \varphi(x) \tag{3.0.14}$$

para $x \ge x_0$, $\alpha(0) \le u \le \beta(0)$ y $\alpha(x) \le y \le \beta(x)$ entonces el problema (3.0.11) admite al menos una solución y con $\alpha \le y \le \beta$.

Finalmente, en la sección 3.2 se trata el problema de electrodifusión correspondiente a sistemas

$$\begin{cases} \mathbf{y}''(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)), & x \in (0, 1) \\ \mathbf{y}'(0) = \mathbf{y}'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.0.15}$$

con $\mathbf{f} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$ continua.

Análogamente a lo que se ha planteado para el caso escalar se probarán resultados de existencia de solución bajo condiciones del tipo asintóticas y no asintóticas; en primer lugar, se adapta a nuestro problema un resultado de Nirenberg [61] que a su vez generaliza las condicones de Landesman-Lazer. Más precisamente, teniendo en cuenta la definición 1.1.5 correspondiente al grado de una función definida sobre una esfera, se probará el siguiente

Teorema 3.0.4. Nirenberg para el Modelo Abstracto de Electrodifusión *Si* $\mathbf{f}$ *es acotada y extisten los límites*

$$\lim_{s\to+\infty}\mathbf{f}(x,s\mathbf{v}+A,s\mathbf{v},s\mathbf{v}+B):=\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(x)$$

uniformemente para $x\in[0,1]$, $|\mathbf{v}|=1$ *y* $|A|,|B|\leq\|\mathbf{f}\|_\infty$. *tal que*

(N1): $\int_0^1\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(x)\,dx\neq 0$ *para cada* $\mathbf{v}\in\mathbf{S}^{n-1}:=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n:|\mathbf{v}|=1\}$.

(N2): $deg(\Phi)\neq 0$, *con* $\Phi:\mathbf{S}^{n-1}\to\mathbf{S}^{n-1}$ *definida por* $\Phi(\mathbf{v}):=\frac{\int_0^1\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(x)\,dx}{|\int_0^1\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(x)\,dx|}$

entonces el problema (3.0.15) admite al menos una solución.

Para el caso no asintótico introducimos un supuesto que reemplaza la condición de acotación para $\mathbf{f}$ y otro que elimina los límites radiales. En primer lugar la condición de acotación sobre $\mathbf{f}$ se reemplaza por una condición más general, a saber, que la imagen de la no linealidad esté contenida en un "sector angular" de $\mathbb{R}^n$; Más específicamente, suponemos la existencia de un vector $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ y de hiperplanos linealmente independientes $H_1,\ldots,H_n$ tal que

$$Im(\mathbf{f})\subset\mathbb{R}^n\Bigg\backslash\left(\mathbf{c}+\bigcup_{j=1}^n H_j\right)\tag{3.0.16}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $H_j=\{\mathbf{z}_j\}^\perp$, con $\{\mathbf{z}_j\}_{1\leq j\leq n}\subset\mathbf{S}^{n-1}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y

$$\langle\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\mathbf{v},\mathbf{w})-\mathbf{c},\mathbf{z}_j\rangle>0$$

para cada [2] $(x,\mathbf{y},\mathbf{v},\mathbf{w})\in[0,1]\times\mathbb{R}^{3n}$.

Por otro lado la hipótesis de la existencia del límite uniforme puede ser removida si se asume que la no linealidad $\mathbf{f}$ no rota muy rápido en el sentido que se detalla a continuación. Para simplificar definimos para cada $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, el entorno $Q(\mathbf{v})$ dado por

$$Q(\mathbf{v}):=\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n:|\langle\mathbf{w}-\mathbf{v},\mathbf{z}_j\rangle|<2|\langle\mathbf{c},\mathbf{z}_j\rangle|\ \text{para}\ 1\leq j\leq n\}$$

y consideramos la función $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(\mathbf{v}):=\int_0^1\mathbf{f}(x,\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v})\,dx.\tag{3.0.17}$$

Observación 3.0.1. Si $\mathbf{f}$ es acotada el entorno $Q(\mathbf{v})$ puede ser reemplazado por $B_r(\mathbf{v})$ con $r=\|\mathbf{f}\|_\infty$.

Con estas notaciones y definiciones se tiene el siguiente resultado

Teorema 3.0.5. de la Cápsula Covexa para el Modelo Abstracto de Electrodifusión. *Supongamos que* $\mathbf{f}$ *satisface la condición del sector angular* (3.0.16). *Si existe un dominio acotado* $D\subset\mathbb{R}^n$ *tal que*

[2]En este caso $\langle\mathbf{c},\mathbf{z}_j\rangle<0$ es una condición necesaria para la existencia de solución.

(H1):

$$0 \notin co(\mathbf{f}([0,1] \times Q(\mathbf{v}) \times \{\mathbf{v}\} \times Q(\mathbf{v}))) \tag{3.0.18}$$

para todo $\mathbf{v} \in \partial D$ *y*

(H2): El grado de la función ϕ *está bien definido y*

$$deg_B(\phi, D, 0) \neq 0$$

entonces (3.0.15) *tiene al menos una solución.*

Observación 3.0.2. La condición (3.0.18) impide que $\mathbf{f}$ rote demasiado rápidamente alrededor del cero y cerca del borde de D. Esta condición puede ser interpretada como una adaptación de la condición dada por Ruiz et al [72] para un problema periódico de segundo orden. Notemos que las rápidas rotaciones son admisibles en el caso del resultado principal dado en [5], aunque se debe dar en tal caso alguna condición para la no linealidad que compense ese efecto.

3.1 Demostraciones de los resultados para el caso escalar

3.1.1 Intervalo acotado.

Una manera de sortear la dificultad de la presencia en la no linealidad de los valores de la solución desconocida en el bordes del intervalo es considerar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{cases} y'(x) = u(x) \\ u'(x) = f(x, y(x), v(x), w(x)) \\ v'(x) = 0 \\ w'(x) = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

sujeto a las siguientes condiciones de borde

$$\begin{cases} u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = y(0) \\ w(1) = y(1). \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Observemos que el sistema (3.1.1)-(3.1.2) es equivalente al problema de electrodifusión (3.0.2).

Planteo del problema en el marco de los métodos de continuación.

A los fines de aplicar la teoría del grado de coincidencia consideramos el espacio de Banach

$$E := \{\mathbb{X} := (y, u, v, w) \in C([0,1], \mathbb{R}^4) : \mathbb{X} \text{ satisface (3.1.2)}\}$$

dotado de la norma $\|\mathbb{X}\| := \max\{\|y\|_\infty, \|u\|_\infty, \|v\|_\infty, \|w\|_\infty\}$ y el subespacio $E^1 := E \cap C^1([0,1], \mathbb{R}^4)$ y los operadores

$$L : Dom(L) \subset E \to E, \;\; (Dom(L) = E^1) \;\text{ y }\; N : E \to E$$

definidos

$$L(\mathbb{X})(x) := (y'(x) - u(x), u'(x), v'(x), w'(x)),$$

$$N(\mathbb{X})(x) := (0, f(x, y(x), v(x), w(x)), 0, 0).$$

El operador L es lineal y observamos que el problema es *resonante* pues $\mathbb{X} = (y, u, v, w) \in ker(L)$ si y sólo si $\mathbb{X} \in E^1$, $u' = v' = w' = 0$ e $y' = u$; luego teniendo en cuenta (3.1.2) vemos que $u = 0$ y a posteriori $y(0) = y = v = w$; en definitiva el $ker(L)$, es el espacio de las funciones generadas por el vector $\mathbb{V} := (1, 0, 1, 1) \in E$, es decir

$$\ker(L) = \{s \cdot \mathbb{V} : s \in \mathbb{R}\} =< \mathbb{V} > . \tag{3.1.3}$$

Por otro lado $\mathbb{Y} = (\phi, \psi, \theta, \rho) \in Im(L)$ si y sólo si existe $\mathbb{X} = (y, u, v, w) \in Dom(L) \subset E$ tal que

$$\begin{cases} y'(x) = u(x) + \phi(x) \\ u'(x) = \psi(x) \\ v'(x) = \theta(x) \\ w'(x) = \rho(x) \end{cases} \tag{3.1.4}$$

si y sólo si $\overline{\psi} = 0$. Luego

$$\mathbb{Y} = (\phi, \psi, \theta, \rho) \in Im(L) \Leftrightarrow \overline{\psi} = 0. \tag{3.1.5}$$

Claramente la imagen de L es un subespacio cerrado de E y concluimos que L es un operador de Fredholm.

Por otro lado para ver que L tiene índice cero observamos que si $\mathbb{Y}_1 = (\phi_1, \psi_1, \theta_1, \rho_1)$ e $\mathbb{Y}_2 = (\phi_2, \psi_2, \theta_2, \rho_2)$ entonces $[\mathbb{Y}_1] = [\mathbb{Y}_2]$ en $coker(L)$ si y sólo si $\overline{\psi}_1 = \overline{\psi}_2$. Luego dado $\mathbb{Y} = (\phi, \psi, \theta, \rho)$ consideramos $\overline{\psi} = c$ y tomamos como representante de $[\mathbb{Y}]$ al vector $\mathbb{Y}_c := (0, c, 0, 0) \subset E$ de manera que, teniendo en cuenta (3.1.3) y (3.1.5) $1 = dim(\ker(L)) = dim(coker(L))$ y así L es de índice cero .

A los efectos de aplicar a este problema el corolario 1.2.6 del teorema de continuación 1.2.5 definimos los proyectores continuos $P, Q : E \to E$

$$Q(\mathbb{Y}) = (0, \overline{\psi}, 0, 0)$$

$$P(\mathbb{X}) = (y(0), 0, y(0), y(0) = y(0) \cdot \mathbb{V}$$

y el isomorfismo $J : Im(Q) \to \ker(L)$ definido

$$J(0, c, 0, 0) = (c, 0, c, c).$$

Claramente se tiene

$$Im(P) = \ker(L) \ \text{ y } \ Im(L) = \ker(Q).$$

Por otro lado podemos caracterizar la inversa de $L_P = L|_{\ker(P) \cap Dom(L)}$

$$K_P : Im(L) \to \ker(P) \cap Dom(L)$$

del siguiente modo: dado $\mathbb{Y} = (\phi, \psi, \theta, \rho)$ con $\overline{\psi} = 0$ consideramos $\mathbb{X} = (y, u, v, w) \in Dom(L)$ con $P(\mathbb{X}) = \mathbf{0}$ la única solución del sistema (3.1.4) y definimos $\mathbb{X} = K_P(\mathbb{Y})$. Más precisamente, integrando el sistema obtenemos

$$\begin{cases} y(x) = \int_0^x (u(s) + \phi(s))ds \\ u(x) = \int_0^x \psi(s)ds \\ v(x) = \int_0^x \theta(s)ds \\ w(x) = y(1) + \int_1^x \rho(s)ds = \int_0^1 (u(s) + \phi(s))ds - \int_x^1 \rho(s)ds, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{X} = K_P(\mathbb{Y}) = K_P(\phi, \psi, \theta, \rho) = \\ = \left(\int_0^x \left(\int_0^s \psi(t)dt + \phi(s) \right) ds, \int_0^x \psi(s)ds, \int_0^x \theta(s)ds, \int_0^1 \left(\int_0^s \psi(t)dt + \phi(s) \right) ds - \int_x^1 \rho(s)ds \right) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

En particular si $\mathbb{Y} = N(\mathbb{X})$ tenemos $\phi = \theta = \rho = 0$ y $\psi = f(\cdot, y(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ de manera que

$$\int_0^s \psi(t)dt = \int_0^s f(t, y(t), v(t), w(t))dt,$$

$$\int_0^x \left(\int_0^s \psi(t)dt + \phi(s) \right) ds = \int_0^x \left(\int_0^s f(t, y(t), v(t), w(t))dt \right) ds$$

y

$$\int_0^x \theta(s)ds = \int_x^1 \rho(s)ds = 0$$

Para simplificar la notación escribimos

$$T_{\mathbb{X}}(x) := \int_0^x f(s, y(s), v(s), w(s))\, ds$$

y observando que $T_{\mathbb{X}}(1) = 0$ y $Q(N(\mathbb{X})) = 0$ podemos escribir la inversa generalizada restringida a la imagen de N, $K_{P,Q}|_{Im(N)}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_{P,Q}(N(\mathbb{X})) := K_P(I - Q)(N(\mathbb{X})) = K_P(N(\mathbb{X}) - Q(N(\mathbb{X}))) = K_P(N(\mathbb{X})) = \\ = \left(\int_0^x T_{\mathbb{X}}(s)\, ds, T_{\mathbb{X}}(x) - xT_{\mathbb{X}}(1), 0, \int_0^1 T_{\mathbb{X}}(s)\, ds \right) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Por otro lado de acuerdo a las definiciones de P, Q y J

$$(y(0) + T_{\mathbb{X}}(1)) \cdot \mathbb{V} = P(\mathbb{X}) + J(Q(N(\mathbb{X}))).$$

Ahora para $\lambda \in [0, 1]$ consideramos la familia uniparamétrica de problemas

$$\begin{cases} y'(x) = u(x) \\ u'(x) = \lambda f(x, y(x), y(0), y(1)) \\ v'(x) = 0 \\ w'(x) = 0 \end{cases} \tag{3.1.9}$$

es decir

$$L(\mathbb{X}) = N(\lambda, \mathbb{X}), \ \ \mathbb{X} \in Dom(L) \tag{3.1.10}$$

con $N : [0,1] \times E \to E$ definido $N(\lambda, \mathbb{X})(x) := \lambda \cdot N(\mathbb{X})(x)$.

Finalmente, de acuerdo al desarrollo anterior, consideramos la homotopía $\mathcal{F} : [0,1] \times E \to E$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda, \mathbb{X}) = \mathbb{X} - P(\mathbb{X}) - J(Q(N(\mathbb{X}))) - \lambda \cdot K_{P,Q}(N(\mathbb{X})) = \\ = \mathbb{X} - (y(0) + T_{\mathbb{X}}(1)) \cdot \mathbb{V} - \lambda \cdot \left(\int_0^x T_{\mathbb{X}}(s)\, ds, T_{\mathbb{X}}(x) - xT_{\mathbb{X}}(1), 0, \int_0^1 T_{\mathbb{X}}(s)\, ds \right) \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

A los efectos de simplificar más la notación definimos $\mathcal{S}, \mathcal{C} : E \to E$

$$\mathcal{C}(\mathbb{X}) := (y(0) + T_{\mathbb{X}}(1)) \cdot \mathbb{V} = (y(0) + T_{\mathbb{X}}(1), 0, y(0) + T_{\mathbb{X}}(1), y(0) + T_{\mathbb{X}}(1))$$

y

$$\mathcal{S}(\mathbb{X}) := \left(\int_0^x T_{\mathbb{X}}(s)\, ds, T_{\mathbb{X}}(x) - xT_{\mathbb{X}}(1), 0, \int_0^1 T_{\mathbb{X}}(s)\, ds \right)$$

de manera que la homotopía se escribe

$$\mathcal{F}_\lambda(\mathbb{X}) := \mathcal{F}(\lambda, \mathbb{X}) = \mathbb{X} - \mathcal{C}(\mathbb{X}) - \lambda \cdot \mathcal{S}(\mathbb{X}). \tag{3.1.12}$$

Luego, de acuerdo a la equivalencia (1.2.7) tenemos la siguiente equivalencia

Lema 3.1.1. *Para cada* $0 < \lambda \leq 1$, $\mathbb{X} \in Dom(L)$ *satisface (3.1.10) si y sólo si*

$$\mathcal{F}_\lambda(\mathbb{X}) = 0.$$

Por otro lado si definimos $\mathcal{K}_\lambda(\mathbb{X}) := \mathcal{K}(\lambda, \mathbb{X}) = \mathcal{C}(\mathbb{X}) + \lambda \cdot \mathcal{S}(\mathbb{X})$ vemos que $\mathcal{F}_\lambda = I - \mathcal{K}_\lambda$ es una perturbación compacta de la identidad para cada $\lambda \in [0,1]$. Además

$$Im(\mathcal{K}_0) = Im(\mathcal{C}) \subset \ker(L)$$

de manera que $\mathcal{K}_0$ es de rango finito, lo cual implica que si $\Omega \subset E$ es un dominio acotado tal que $\mathcal{F}_0$ no se anula sobre $\partial\Omega \cap \ker(L)$, entonces de acuerdo a (1.1.1)

$$deg_{LS}(\mathcal{F}_0, \Omega, 0) = deg_B(\mathcal{F}_0|_{\ker(L)}, \Omega \cap \ker(L), 0).$$

Ahora bien $\Omega \cap \ker(L) = \{s \cdot \mathbb{V} : s \in I\}$ (podemos asumir que Ω es convexo) para algún conjunto abierto y acotado $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(s \cdot \mathbb{V}) = s \cdot \mathbb{V} - \mathcal{C}(s \cdot \mathbb{V}) = \\ = (s,0,s,s) - \left(s + \int_0^1 f(x,s,s,s), 0, s + \int_0^1 f(x,s,s,s), s + \int_0^1 f(x,s,s,s) \right) = \\ = -T_{s \cdot \mathbb{V}}(1) \cdot \mathbb{V}. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Luego $deg_{LS}(\mathcal{F}_0, \Omega, 0)$ coincide con el grado de Brouwer de la función $\phi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(s) := -T_{s \cdot \mathbb{V}}(1) = -\int_0^1 f(x,s,s,s)\, dx.$$

Finalmente de acuerdo al corolario 1.2.6 se tiene la siguiente versión del teorema de continuación generalizado adaptada a nuestro problema

Teorema 3.1.2. de Continuación. *Con las notaciones previas, si se satisfacen las hipótesis:*

(H1): La familia uniparamétrica de problemas (3.1.9) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega$ para cualquier $\lambda \in (0,1)$ y

(H2): La función $\phi : I \to \mathbb{R}$ definida

$$\phi(s) := -T_{s\cdot\mathbb{V}}(1) = -\int_0^1 f(x,s,s,s)\,dx$$

satisface que

$$\phi(a)\phi(b) < 0$$

entonces el problema (3.0.2) tiene al menos una solución clásica $\mathbb{X} \in \overline{\Omega}$.

Demostración del teorema 3.0.1.

Probaremos solamente el resultado suponiendo que se cumple la condición de Landesman Lazer (3.0.4a) pues para la condición (3.0.4b) se procede de manera análoga.

A los efectos de aplicar el teorema 3.1.2 de continuación, observamos en primer lugar que si

$$y''(x) = \lambda f(x, y(x), y(0), y(1)), \qquad y'(0) = y'(1) = 0$$

para algún $\lambda \in (0,1)$, entonces

$$\|y - y(0)\|_\infty \leq \|y'\|_\infty \leq \|y''\|_\infty < r := \|f\|_\infty. \tag{3.1.14}$$

Ahora consideremos el conjunto

$$\Omega := \{\mathbb{X} \in E : \|y - v\|_\infty, \|w - v\|_\infty, \|u\|_\infty < r, \|v\|_\infty < R\}$$

con $R > 0$ una constante a determinar. A partir de (3.1.14) se deduce que si $\mathbb{X} = (y,u,v,w) \in \partial\Omega$ es solución (3.1.9) para algún $\lambda \in (0,1)$, entonces $\|y - v\|_\infty, \|w - v\|_\infty, \|u\|_\infty < r$, $|y(0)| = R$.

Por otro lado

$$\int_0^1 f(x, y(0) + a(x), y(0), y(0) + b)\,dx = 0 \tag{3.1.15}$$

donde

$$a := y - y(0) = y - v \qquad b := y(1) - y(0) = w - v.$$

Luego si $y(0) \to \pm\infty$ entonces

$$f(x, y(0) + a(x), y(0), y(0) + b) \to f^{\pm}(x)$$

uniformemente para $x \in [0,1]$, $|a| = |y - v| < r$ $|b| = |w - v| < r$ y usando el teorema de la convergencia dominada obtenemos, de acuerdo a la hipótesis (3.0.4a), una contradicción.

De lo anterior se deduce que si $R \gg 1$ entonces el sistema (3.1.9) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega$ para $\lambda \in (0,1)$.

Finalmente observamos que si $s \to \pm\infty$ entonces

$$\phi(s) = -\int_0^1 f(x, s, s, s)\, dx \to -\int_0^1 f^{\pm}(x)\, dx$$

de manera que para $J = (-R, R)$ con R suficientemente grande se satisfacen las hipótesis (H1) y (H2) del teorema de continuación 3.1.2 y de ahí el resultado ■.

Demostración del teorema 3.0.2

Aplicaremos el teorema de continuación 3.1.2 al conjunto

$$\Omega := \{\mathbb{X} \in E : \|y - v\|_\infty, \|w - v\|_\infty < r, \|u\|_\infty < \tilde{r}, a < v < b\},$$

donde la constante $r > 0$ es la especificada según el caso (3.0.7), (3.0.8) ó (3.0.9) y la constante $\tilde{r} > 0$ es a determinar.

Supongamos que $\mathbb{X} \in \partial\Omega$ es una solución (3.1.9) para algún $\lambda \in (0, 1)$ y consideremos cada uno de los casos en cuestión; veremos que en cualquier caso $\mathbb{X} = (y, u, v, w) \in \partial\Omega$ es una solución (3.1.9) sii $v = a$ ó $v = b$ donde $v \equiv y(0)$.

1. En el primer caso (3.0.7) usando el hecho de que $\int_0^1 f(x, y(x), y(0), y(1))\, dx = 0$ e integrando por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^1 y'(x)^2\, dx = -\int_0^1 y''(x)(y(x) - y(0))\, dx = \\ &= -\lambda \textstyle\int_0^1 y(x) f(x, y(x), y(0), y(1))\, dx \le \lambda \int_0^1 k(x)\, dx < r^2 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

   de donde $||y'||_{L^2} < r$.

   Asimismo usando Cauchy-Schwarz

$$|y(x) - y(0)| = \left| \int_0^1 y'(x)\, dx \right| \le ||y'||_{L^2} < r$$

   lo cual muestra que

$$||y - v||_\infty < r \quad \text{y } ||w - v||_\infty < r.$$

   Por otro lado deducimos que

$$||u||_\infty = \|y'\|_\infty \le \|y''\|_\infty < \max_{(x,y,y_0,y_1) \in K_{[a,b],r}} |f(x, y, y_0, y_1)|$$

   de manera que si elegimos $\tilde{r} := \max_{(x,y,y_0,y_1) \in K_{[a,b],r}} |f(x, y, y_0, y_1)|$ se tiene también que

$$||u||_\infty < \tilde{r}.$$

2. En el segundo caso (3.0.8) obtenemos en forma directa que

$$|y''(x)| = \lambda |f(x, y(x), y(0), y(1))| < r,$$

de manera que

$$||y - v||_\infty < r \quad \text{y} \quad ||w - v||_\infty < r$$

y tomando $\tilde{r} := r$ también

$$\|u\|_\infty = \|y'\|_\infty < r$$

.

3. En el tercer caso (3.0.9), si por ejemplo se cumple la primera condición, obtenemos

$$|y''(x)| \leq \lambda\big([f(x, y(x), y(0), y(1)) + k(x)] + |k(x)|\big)$$

de manera que

$$||y - v||_\infty < r \quad \text{y } ||w - v||_\infty < r.$$

Asimismo

$$\|y'\|_\infty \leq \|y''\|_{L^1} \leq \lambda \left(\int_0^1 k(x)\ dx + \|k\|_{L^1} \right) < r.$$

luego eligiendo $\tilde{r} := r$ tenemos también

$$\|u\|_\infty = \|y'\|_\infty < r$$

Así vemos que en todos los casos si la solución está en el borde entonces $y(0) = a$ ó $y(0) = b$.

Ahora bien, si por ejemplo se tiene el caso en que $y(0) = a$ y se cumple (3.0.10a) entonces obtenemos la siguiente contradicción

$$0 = \int_0^1 f(x, y(x), y(0), y(1))\ dx \leq \int_0^1 f^a_{sup}(x)\ dx < 0.$$

Los otros casos se tratan de manera similar.

Finalmente observamos que si se cumple (3.0.10a) entonces

$$\phi(a) = -\int_0^1 f(x, a, a, a)\ dx \geq -\int_0^1 f^a_{sup}(x)\ dx > 0$$

y

$$\phi(b) = -\int_0^1 f(x, b, b, b)\ dx \leq -\int_0^1 f^b_{inf}(x)\ dx < 0$$

de manera que la hipótesis (H2) del teorema de continuación 3.1.2 es satisfecha. La misma conclusión se tiene si se cumple la segunda condición de Landesman-Lazer no asintótica (3.0.10b) ■.

Observación 3.1.1. Es fácil verificar que el teorema 3.0.1 es una consecuencia del teorema 3.0.2, para ello basta tener en cuenta que el límite (3.0.3) es uniforme.

Observación 3.1.2. En el problema original de electrodifusión (3.0.2), la no linealidad no es acotada

$$\lim_{s\to\pm\infty} f(x,s,s,s) := \pm\infty.$$

En una primera impresión podríamos suponer que la condición (3.0.10a) es satisfecha bajo el supuesto de que f satisface el primer caso (3.0.7) para alguna elección adecuada de constantes positivas $a < b$ y r. Pero esto no es posible pues para s suficientemente grande el signo de f cambia en pequeños entornos del punto (x,s,s,s).

No obstante el resultado dado en [16] indicaría que es posible aplicar el teorema 3.0.5 directamente sobre el conjunto $\Omega := \{\mathbb{X} \in E : 0 < y, v, w < R, \|u\|_\infty < r\}$ para algunas constantes $r, R > 0$. En ese caso la segunda condición del teorema 3.0.5 se satisface trivialmente y la dificultad reside en establecer las cotas apriori para las soluciones del problema (3.1.9) con $y > 0$.

Algunos Ejemplos.

En esta sección se dan algunos ejemplos para los cuales se cumplen las diferentes hipótesis establecidas en los casos (3.0.7), (3.0.8) y (3.0.9).

Para simplificar consideramos una no linealidad desacoplada respecto de los valores en la frontera, por ejemplo

$$f = p(x) + h(y) + \varphi(y_0, y_1),$$

donde p, h y φ son continuas.

Sin pérdida de generalidad se asume que $\int_0^1 p(t)\,dt = 0$ de manera que (3.0.10a) y (3.0.10b) se traducen en las siguientes condiciones

$$h^a_{sup} + \varphi^a_{sup} < 0 < h^b_{inf} + \varphi^b_{inf} \tag{3.1.17}$$

ó

$$h^b_{sup} + \varphi^b_{sup} < 0 < h^a_{inf} + \varphi^a_{inf}, \tag{3.1.18}$$

donde

$$h^a_{sup} := \sup_{a-r\le y\le a+r} h(y), \qquad \varphi^a_{sup} := \sup_{a-r\le y_1\le a+r} \varphi(a, y_1),$$

y $h^b_{sup}, \varphi^b_{sup}$ y $h^{a,b}_{inf}, \varphi^{a,b}_{inf}$ están definidas de manera análoga.

Teniendo en mente un ejemplo típico que satisface las condiciones clásicas de Landesman-Lazer según el teorema 1.3.1 podemos elegir para el caso de la no linealidad del teorema (3.0.2) las funciones

$$h(y) = \arctan(y)$$

y φ tal que $\varphi(y_0, y_1) \to 0$ cuando $|(y_0, y_1)| \to \infty$.

Una situación más general, que se verifica fácilmente, es considerada en los siguientes ejemplos que corresponden a los respectivos casos (3.0.7), (3.0.8) y (3.0.9) del teorema 3.0.2

1.
$$h(y) = |y|^\tau y, \qquad |\varphi(y_0, y_1)| \leq A + B|(y_0, y_1)|,$$
para algunas constantes $A, B, \tau > 0$

2.
$$h(y) = -\frac{y}{|y|^\tau}, \qquad \varphi \text{ acotada },$$
con $0 < \tau < 1$.

3.
$$h(y) = -e^y, \qquad \varphi \text{ acotada por arriba },$$
$$\liminf_{y_0, y_1 \to -\infty} \varphi(y_0, y_1) > 0,$$
y
$$\lim_{y_0, y_1 \to +\infty} \frac{\varphi(y_0, y_1)}{|(y_0, y_1)|^\gamma} = 0$$
para alguna $\gamma > 0$.

3.1.2 Intervalo no acotado.

Como hemos visto en la sección anterior, para el caso de un intervalo acotado el operador $Ly := y''$ resulta ser de Fredholm y de índice cero, de forma tal que la teoría del grado de coincidencia puede ser utilizada. Este no es el caso que se presenta con el intervalo no acotado pues el operador *L no resulta ser de Fredholm* aunque el problema es resonante. En este sentido, un método alternativo al de la teoría de grado viene dado por el método de las sub y super soluciones ordenadas aunque éste no se aplica en forma directa a nuestro problema debido a la dependencia de la no linealidad respecto de los valores en el borde; no obstante podemos adaptarlo.

La estrategia es la siguiente; en primer lugar se establece un resultado de existencia de solución para un problema de condiciones de borde mixto sobre un intervalo acotado $[0, N]$; posteriormente se aplica un argumento de tipo diagonal con el objeto de obtener una sucesión de funciones $\{y_N\}$ que converja a una solución del problema (3.0.11).

Condición Mixta para un Intervalo Acotado.

En primer lugar, vamos a probar existencia de solución del problema

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y(0), C) & x \in (0, T), \\ y'(0) = v_0, \quad y(T) = y_T, \end{cases} \tag{3.1.19}$$

para algunas constantes arbitrarias $y_T, C \in \mathbb{R}$ and $T > 0$, bajo el supuesto de la existencia de un par de sub y super soluciones ordenadas de (3.1.19). Más precisamente, asumimos que existen funciones suaves $\alpha \leq \beta$ que satisfcen

$$\alpha''(x) \geq f(x, \alpha(x), u, C), \qquad \beta''(x) \leq f(x, \beta(x), u, C) \tag{3.1.20}$$

para $0 \leq x \leq T$ y $\alpha(0) \leq u \leq \beta(0)$, y

$$\alpha'(0) \geq v_0 \geq \beta'(0), \quad \alpha(T) \leq y_T \leq \beta(T). \tag{3.1.21}$$

El siguiente teorema difiere muy poco del teorema 1.4.1 formulado en la sección 1.4 del capítulo 1, para un problema con condiciones separadas.

Teorema 3.1.3. *Sea $\alpha \leq \beta$ funciones que satisfacen (3.1.20) y (3.1.21). Entonces el problema (3.1.19) admite al menos una solución y, con $\alpha \leq y \leq \beta$.*

Demostración. El esquema es esencialmente el mismo que hemos dado para el teorema 1.4.1 con $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = -1$, $b_1 = 1$, $A = v_0$, $B = y_T$ y $[a, b] = [0, T]$. Para $\lambda > 0$ y cada $w \in C([0, T])$ se considera el problema lineal modificado

$$\begin{cases} y''(x) - \lambda y(x) = f(x, P(x, w(x)), P(0, w(0)), C) - \lambda P(x, w(x)) \\ \qquad y'(0) = v_0, \;\; y(T) = y_T \end{cases} \tag{3.1.22}$$

donde $P : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de truncamiento definda en (1.4.5).

Luego usando el teorema de punto fijo de Schauder 1.1.3 se prueba existencia de solución para 3.1.22 y finalmente, teniendo en cuenta la definición de sub y super solución ordenadas (3.1.20) y (3.1.21), se verifica que cualquier solución satisface $\alpha \leq y \leq \beta$. ■

Un argumento diagonal

En esta subsección adaptamos el argumento del tipo diagonal usado en la demostración del teorema 1.4.6 para dar una prueba del teorema 3.0.3. Observemos que ese argumento no se aplica de forma directa a nuestro problema y ésto por dos razones: en primer lugar se trata de un problema con condiciones de Neumann en un dominio no acotado y en segundo lugar ahora la no linealidad depende de los datos de la solución desconocida en los bordes.

Demostración del teorema 3.0.3

De acuerdo al teorema 3.1.3, para cada $N \in \mathbb{N}$ podemos considerar una solución y_N del problema

$$\begin{cases} y_N''(x) = f(x, y_N(x), y_N(0), L) \qquad x \in (0, N), \\ y_N'(0) = v_0, \quad y_N(N) = \frac{\alpha(N)+\beta(N)}{2}, \end{cases} \tag{3.1.23}$$

tal que $\alpha|_{[0,N]} \leq y_N \leq \beta|_{[0,N]}$.

Para M fijo, observamos en primer lugar que si $N \geq M$ entonces

$$||y_N''|_{[0,M]}||_\infty = \sup_{x \in [0,M]}\{|f(x, y_N(x), y_N(0), L)|\} \leq C_2$$

para alguna constante positiva C_2 independiente de N. Más aún como

$$y_N'(x) = v_0 + \int_0^x y_N''(s)\, ds$$

vemos que $||y'_N|_{[0,M]}||_\infty \leq |v_0| + MC_2 := C_1$ y de

$$y_N(x) = y_N(M) - \int_x^M y'_N(s)\ ds$$

concluimos que $||y_N|_{[0,M]}||_\infty \leq C_0$ para alguna constante C_0 que sólo depende de M.

Luego, por el teorema de Arzelá-Ascoli se deduce que existe una subsucesión de $(y_N)_{N\geq M}$ que converge sobre $[0, M]$ según la norma C^1.

Ahora procedemos de la siguiente manera: para $M = 1$, elegimos una subsucesión, que seguimos notándola $\{y_N\}$ que converge en $C^1([0, 1])$ a alguna función y^1.

Repitiendo el argumento para $M = 2, 3, \ldots$, podemos asumir que $y_N|_{[0,M]}$ converge en el sentido de C^1 a alguna función $y^M : [0, M] \to \mathbb{R}$.

De la construcción anterior se sigue que $y^{M+1}|_{[0,M]} = y^M$ y esto implica que la función $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $y(x) = y^M(x)$ si $0 \leq x \leq M$ está bien definida. Más aún $y'(0) = v_0$, y y''_N converge uniformemente en $[0, M]$ a $f(\cdot, y(\cdot), y(0), C)$.

Ahora bien, para cualquier función test $\xi \in C_0^\infty(0, M)$ obtenemos:

$$\int_0^M f(x, y, y(0), L)\ \xi(x)\ dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^M y''_N(x)\ \xi(x)\ dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^M y_N(x)\ \xi''(x)\ dx = \int_0^M y(x)\ \xi''(x)\ dx,$$

de manera que

$$y''(x) = f(x, y(x), y(0), L)$$

en $[0, M]$, en sentido débil. Más aún, como y es de clase C^2 deducimos que y es una solución clásica de la ecuación.

Finamente vemos que se verifican las condiciones de borde. Por un lado es claro que $y(\infty) = L$ y para verificar la condición en $+\infty$ usamos la hipótesis (3.0.14) referida al control de la no linealidad en la semirecta. Más precisamente para cada $N \geq x_0$, por Lagrange, podemos elegir un punto $x_N \in (N, N+1)$ tal que $y'(x_N) = y(N+1) - y(N) \to 0$; entonces para $x > x_N$ tenemos:

$$|y'(x) - y'(x_N)| = \left| \int_{x_N}^x f(t, y(t), y(0), L)\ dt \right| \leq \int_{x_N}^x \varphi(t)\ dt \leq \int_{x_N}^{+\infty} \varphi(t)\ dt.$$

Como φ es integrable concluimos que $y'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ y esto completa la prueba.
■

3.2 Demostraciones de los resultados para el caso de sistemas.

Procedemos de manera completamente análoga a lo que se hizo en la subsección 3.1.1; en primer lugar observamos que el problema (3.0.15) es equivalente al sistema $4n$-dimensional de primer orden

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x)) \\ \mathbf{v}'(x) = 0 \\ \mathbf{w}'(x) = 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

con las siguiente condiciones de borde:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(1) = 0 \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{v}(0) \\ \mathbf{y}(1) = \mathbf{w}(1). \end{cases} \tag{3.2.2}$$

y planteamos el problema en un contexto funcional.

Planteo del problema en el marco de los métodos de continuación.

Consideramos el espacio de Banach

$$\mathbf{E} := \{\mathbf{X} := (\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in C([0,1], \mathbb{R}^n)^4 : \mathbf{X} \text{ satisface } (3.2.2)\},$$

dotado de la norma

$$\|\mathbf{X}\| := \max\{\|\mathbf{y}\|_\infty, \|\mathbf{u}\|_\infty, \|\mathbf{v}\|_\infty, \|\mathbf{w}\|_\infty\}$$

y $\mathbf{E}^1 := C^1([0,1], \mathbb{R}^n)^4 \cap \mathbf{E}$.

Luego definimos los operadores $L : \mathbf{E}^1 \to \mathbf{E}$ y $N : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$

$$L(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := (\mathbf{y}' - \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'), \quad N(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{0}, \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x)), \mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

Fácilmente se verifica que el núcleo de L es un subespacio no trivial n-dimensional generado por los vectores $\mathbf{X_c} = (\mathbf{c}, \mathbf{0}, \mathbf{c}, \mathbf{c})$, donde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y además $\mathbf{Y} = (\phi, \psi, \theta, \rho) \in Im(L)$ si y sólo si $\overline{\psi} = \mathbf{0}$. En este caso tenemos que $n = dim(\ker(L)) = dim(coker(L))$. Por otro lado definimos los proyectores continuos $P, Q : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$

$$Q(\mathbf{Y}) = (0, \overline{\psi}, 0, 0)$$

$$P(\mathbf{X}) = (\mathbf{y}(0), \mathbf{0}, \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(0))$$

de forma tal que $Im(P) = \ker(L)$ y $Im(L) = \ker(Q)$. Luego L es un operador de Fredholm de índice cero y además la inversa generalizada se obtiene de la misma forma.

Por otro lado consideramos el isomorfismo $J : Im(Q) \to \ker(L)$ definido

$$J(\mathbf{0}, \mathbf{c}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\mathbf{c}, \mathbf{0}, \mathbf{c}, \mathbf{c})$$

y finalmente se tiene una homotopía análoga para el caso de sistema; más precisamente, con la notación

$$F_{\mathbf{X}}(x) := \int_0^x \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{w}(s))\, ds$$

para $\mathbf{X} \in \mathbf{E}$ y los operadores $\mathcal{S}, \mathcal{C} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$

$$\mathcal{S}(\mathbf{X})(x) := \left(\int_0^x F_{\mathbf{X}}(s)\, ds, F_{\mathbf{X}}(x) - xF_{\mathbf{X}}(1), \mathbf{0}, \int_0^1 F_{\mathbf{X}}(s)\, ds \right)$$

y

$$\mathcal{C}(\mathbf{X}) := (\mathbf{y}(0) + F_{\mathbf{X}}(1), \mathbf{0}, \mathbf{y}(0) + F_{\mathbf{X}}(1), \mathbf{y}(0) + F_{\mathbf{X}}(1))$$

se define $\mathcal{F} : [0,1] \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ del siguiente modo:

$$\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{X}) = \mathcal{F}(\lambda, \mathbf{X}); = \mathbf{X} - \mathcal{C}(\mathbf{X}) - \lambda \cdot \mathcal{S}(\mathbf{X}). \tag{3.2.3}$$

Si ponemos $\mathcal{K} : [0,1] \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$

$$\mathcal{K}_\lambda(\mathbf{X}) = \mathcal{K}(\lambda, \mathbf{X}) := \mathcal{C}(\mathbf{X}) + \lambda \cdot S(\mathbf{X}) \tag{3.2.4}$$

vemos que $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathcal{K}_\lambda(\mathbf{X})$ es una perturbación compacta de la identidad para todo $\lambda \in [0,1]$.

Ahora consideramos la familia uniparamétrica

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{u}'(x) = \lambda \cdot \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)) \\ \mathbf{v}'(x) = 0 \\ \mathbf{w}'(x) = 0 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

y según (1.2.7) se tiene la siguiente equivalencia

Lema 3.2.1. *Para $0 < \lambda \leq 1$ fijo, $\mathbf{X} \in \mathbf{E}$ es solución del sistema (3.2.5) si y sólo si $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{X}) = 0$.*

Por otro lado $\mathcal{K}_0$ es de rango finito, más precisamente $Im(\mathcal{K}_0) = Im(\mathcal{C}) \subset \ker(L)$ y para algún conjunto abierto y acotado $G_\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\Omega \cap \ker(L) = \{\mathbf{X} = (\mathbf{v}, 0, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E} : \mathbf{v} \in G_\Omega \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Luego si definimos $\phi : G_\Omega \to \mathbb{R}^n$ como

$$\phi(\mathbf{v}) := -T_{(\mathbf{v},0,\mathbf{v},\mathbf{v})}(1) = -\int_0^1 f(x, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v})\, dx$$

tenemos

$$\mathcal{F}_0|_{\ker(L)}(\mathbf{v}, 0, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, 0, \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mathcal{C}(\mathbf{v}, 0, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = -(\phi(\mathbf{v}), \mathbf{0}, \phi(\mathbf{v}), \phi(\mathbf{v})). \tag{3.2.6}$$

Finalmente si $\Omega \subset \mathbf{E}$ es un conjunto abierto y acotado tal que $\mathcal{F}_\lambda$ no se anula sobre $\partial\Omega$ para $\lambda \in [0,1]$, entonces usando (1.1.1), la observación (1.2.6) y la invariancia bajo homotopía del grado de Leray-Schauder

$$deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda, \Omega, \mathbf{0}) = deg_B(\mathcal{F}_0|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), \mathbf{0}) = (-1)^n deg_B(\phi, G_\Omega, 0)$$

y de acuerdo al corolario (1.2.6) tenemos el siguiente teorema de continuación:

Teorema 3.2.2. de Continuación. *Sea $\Omega \subset \mathbf{E}$ un conjunto abierto y acotado y $G_\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como antes. Si se satisfacen las siguientes hipótesis*

(H1): La familia uniparamétrica de problemas (3.2.5) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega$ para $\lambda \in (0,1)$ y

(H2): Para todo $\mathbf{v} \in \partial G_\Omega$ se satisface $\phi(\mathbf{v}) \neq 0$ y

$$deg(\phi, G_\Omega, 0) \neq 0$$

entonces el problema (3.0.15) tiene al menos una solución $\mathbf{X} \in \overline{\Omega}$.

3.2.1 Una generalización de la condición de Nirenberg.

Demostración del teorema 3.0.4.

En primer lugar se demostrará que las soluciones del sistema (3.2.5) para $0 < \lambda < 1$ son acotadas. Supongamos que no, esto es, existe una sucesión $(\mathbf{X}_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{E}$ tal que cada término $\mathbf{X}_n$ satisface (3.2.5) con $0 < \lambda_n < 1$ y $\|\mathbf{X}_n\| \to \infty$. Entonces por un lado tenemos que

$$\mathbf{y}_n''(x) = \lambda_n \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_n(x), \mathbf{y}_n(0), \mathbf{y}_n(1)), \qquad \mathbf{y}_n'(0) = \mathbf{y}_n'(1) = 0$$

y

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n(0)\|_\infty \leq \|\mathbf{y}_n'\|_\infty \leq \|\mathbf{y}_n''\|_\infty \leq \|\mathbf{f}\|_\infty$$

de donde deducimos que $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{y}_n - \mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n$ están acotadas y $|\mathbf{v}_n| = |\mathbf{y}_n(0)| \to \infty$. Por otro lado

$$\int_0^1 \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_n(x), \mathbf{y}_n(0), \mathbf{y}_n(1))\, dx = \mathbf{y}_n'(1) - \mathbf{y}_n'(0) = 0. \tag{3.2.7}$$

Finalmente pasando a una subsucesión si fuese necesario podemos suponer que $\frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{v}_n|} \to \mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$ y usando el teorema de la convergencia dominada concluimos que:

$$\int_0^1 \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_n(x), \mathbf{y}_n(0), \mathbf{y}_n(1)) dx \to \int_0^1 \mathbf{f}_\mathbf{v}(x)\, dx \neq 0,$$

lo cual es absurdo.

Por otro lado vemos que si $R \gg 1$ entonces $deg(\Phi) = deg(\phi, B_R(0), 0)$ y tomando $\Omega := B_R(0) \subset \mathbf{E}$ se sigue el resultado $\blacksquare$.

3.2.2 Adaptación de la condición de la cápsula convexa.

En esta subsección se adaptará, a nuestro caso, la estategia utilizada en la demostración del teorema 1.3.4

Demostración del teorema 3.0.5

Para simplificar la notación escribimos para todo $j = 1, \ldots, n$:

$$x_j := \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_j \rangle$$

$$m_j := 2|c_j|$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Nuevamente, la estrategia de la demostración consiste en seguir los lineamientos del teorema de continuación 3.2.2 sobre el conjunto

$$\Omega := \{(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{E} : \mathbf{v} \in D, \|y_j - v_j\|_\infty, \|w_j - v_j\|_\infty, \|u_j\|_\infty < m_j \;\forall\, j\}.$$

Observamos que si $\mathbf{X} = (\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es una solución arbitraria del problema (3.2.5) para algún $\lambda \in (0, 1)$, entonces

$$\mathbf{y}''(x) = \lambda \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)), \quad \mathbf{y}'(0) = \mathbf{y}'(1) = 0$$

y en consecuencia

$$y_j''(x) = \sigma\langle \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)), \mathbf{z}_j \rangle = \lambda\langle \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)) - \mathbf{c}, \mathbf{z}_j \rangle + \lambda c_j.$$

Esto implica que

$$|y_j''(x)| < \langle \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)) - \mathbf{c}, \mathbf{z}_j \rangle + |c_j|.$$

Ahora, teniendo en cuenta la condición de Neumann si integramos ambos miembros obtenemos

$$\textstyle\int_0^1 |y_j''(x)| dx < 2|c_j| = m_j,$$

para cada $1 \leq j \leq n$. Más aún, como $y_j'(0) = \langle \mathbf{z}_j, \mathbf{u}(0) \rangle = 0$ se tiene

$$|y_j'(x)| \leq \int_0^x |y_j''(t)| dt < m_j,$$

esto es

$$\|y_j'\|_\infty < m_j.$$

Asimismo

$$|y_j(x) - y_j(0)| \leq \int_0^x |y_j'(t)| dt \leq \|y'\|_\infty < m_j$$

para cada $x \in [0, 1]$ y en particular

$$|y_j(1) - y_j(0)| \leq \|y_j - y_j(0)\|_\infty < m_j$$

para cada $1 \leq j \leq n$.

En síntesis $\|y_j - v_j\|_\infty, \|w_j - v_j\|_\infty$, $\|u_j\|_\infty < m_j$ de manera que si $\mathbf{X} \in \partial\Omega$ entonces $\mathbf{v} \in \partial D$ y

$$(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)) \in I \times Q(\mathbf{v}) \times \{\mathbf{v}\} \times Q(\mathbf{v})$$

para cada $x \in [0,1]$.

Se sigue que $\mathbf{f}([0,1], \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1))$ es un compacto de $\mathbf{f}([0,1] \times Q(\mathbf{v}) \times \{\mathbf{v}\} \times Q(\mathbf{v}))$.

De (3.0.18) y de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach, vemos que existe un vector $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{v})$ tal que

$$\langle \mathbf{m}\ ,\ \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)) \rangle > 0$$

para todo $x \in [0,1]$ y obtenemos la siguiente contradicción

$$0 < \int_0^1 \langle \mathbf{m}, \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)) \rangle \, dx = \left\langle \mathbf{m}, \int_0^1 \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)) \, dx \right\rangle = 0.$$

Finalmente si tomamos $G_\Omega = D$ se puede aplicar el teorema de continuación 3.2.2 y de ahí el resultado. ■

Algunos Ejemplos y Obsevaciones Finales.

El siguiente ejemplo motivado por el trabajo de Ortega [62] muestra que el teorema 3.0.5 no es necesariamente más fuerte que el teorema 3.0.4. Consideremos el caso $n = 2$, identificando $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ y la no linealidad $\mathbf{f} : [0,1] \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definida por

$$\mathbf{f}(x, z, z_0, z_1) := \frac{e^{i\alpha x} z}{\sqrt{|z|^2 + 1}} + \gamma(z_0, z_1)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{|z_0|, |z_1| \to \infty} \gamma(z_0, z_1) = \gamma$, $|\gamma| < 1$. En este caso los límites radiales

$$\mathbf{f}_z(x) = \lim_{s \to +\infty} \mathbf{f}(x, sz + A, sz, sz + B) = e^{i\alpha x} z + \gamma$$

son uniformes para $|z| = 1$, $|A|, |B| \leq 1 + \|\gamma\|_\infty$ y las condiciones del teorema 3.0.4 se satisfacen si $\alpha \neq 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Pero las hipótesis del teorema 3.0.5 no se satisfacen si por ejemplo tomamos $|\alpha| > \pi$ y $\|\gamma\|_\infty$ pequeño.

También observamos que, en una amplia gama de casos, el teorema 3.0.5 mejora el resultado dado en el teorema 3.0.4. A tal efecto se establece el siguiente resultado que es una clara extensión del teorema 3.0.5 cuya demostración es análoga y en consecuencia se omite.

Teorema 3.2.3. *Supongamos que la condición del sector angular* (3.0.16) *se cumple y además exsite un dominio acotado $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que se satisface:*

(H1′) Para cada $\mathbf{v} \in \partial D$ existe una función continua $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\int_0^1 \rho(x)\, dx = 0$ y

$$0 \notin co(\mathbf{f}_\rho([0,1] \times Q(\mathbf{v}) \times \{\mathbf{v}\} \times Q(\mathbf{v}))) \tag{3.2.8}$$

donde $\mathbf{f}_\rho(x, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \rho(x)$.

Entonces (3.0.15) tiene al menos una solución.

Es fácil verificar, en el caso particular en que la no linealidad sea de la forma $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \rho(x) + \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, que el precedente resultado es más fuerte que el dado por el teorema 3.0.4.

En efecto, en primer lugar observamos que la función $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{g_v}$ is continua; dado $\varepsilon > 0$ fijamos s de forma tal que $|\mathbf{g}(s\mathbf{v}, s\mathbf{v}, s\mathbf{v}) - \mathbf{g_v}| < \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$; luego

$$|\mathbf{g_w} - \mathbf{g_v}| \leq |\mathbf{g}(s\mathbf{w}, s\mathbf{w}, s\mathbf{w}) - \mathbf{g}(s\mathbf{v}, s\mathbf{v}, s\mathbf{v})| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

si $\mathbf{w}$ está suficientemente cerca de $\mathbf{v}$. En particular esto implica que $|\mathbf{g_v}| \geq c$ para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$, con $c > 0$ una constante.

Ahora fijamos s_0 tal que $|\mathbf{g}(s\mathbf{v} + A, s\mathbf{v}, s\mathbf{v} + B) - \mathbf{g_v}| < \varepsilon$ para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$, $s \geq s_0$ y $|A|, |B| \leq \|\mathbf{f}\|_\infty$. Luego tomando $D = B_R(0)$ con $R > s_0$, si $\mathbf{w} = R\mathbf{v} \in \partial D$ y $|A|, |B| < \|\mathbf{f}\|_\infty$ se obtine:

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{w} + A, \mathbf{w}, \mathbf{w} + B), \mathbf{g_v} \rangle \geq |\mathbf{g_v}|^2 - |\mathbf{g}(\mathbf{w} + A, \mathbf{w}, \mathbf{w} + B) - \mathbf{g_v}| > 0.$$

Esto último implica que la cápsula convexa de $\mathbf{g}(B_{\|\mathbf{f}\|_\infty}(\mathbf{w}) \times \{\mathbf{w}\} \times B_{\|\mathbf{f}\|_\infty}(\mathbf{w}))$ queda de un lado del hiperplano $\{\mathbf{g_v}\}^\perp$ y, en particular, no contiene al vector nulo. Teniendo presente la observación 3.0.1, se concluye que se satisface (3.0.18).

Observación 3.2.1. En todos los resultados precedentes es claro que el rol de los valores en el borde, $\mathbf{y}(0)$ y $\mathbf{y}(1)$, pueden ser intercambiados. Por ejemplo en (3.0.18) podríamos considerar

$$0 \notin co(\mathbf{f}_\rho([0,1] \times Q(\mathbf{v}) \times Q(\mathbf{v}) \times \{\mathbf{v}\})).$$

Chapter 4

Resultados principales para el modelo generalizado de Nicholson.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 4.1 se darán condiciones suficientes para la existencia de soluciones T-periódicas positivas para el modelo generalizado de Nicholson con un término de recolección y como se ha hecho para el modelo abstracto de electrodifusión, trataremos en primera instancia el caso escalar y luego el de sistema.

En la subsección 4.1.1 consideraremos para el caso escalar dos variantes del modelo generalizado de Nicholson con un término de recolección no lineal, a saber, los modelos (2.2.25) y (2.2.26) que hemos introducido en la subsección 2.2.4 del capítulo 2 y que recordaremos aquí; más precisamente, en primera instancia se considera el caso correspondiente al término *no lineal* de recolección[1] $H : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ contínuo y T-periódica en su primera variable, independiente de los retardos dados

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t)f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x(t)) \tag{4.0.1}$$

y posteriormente el caso correspondiente al término de recolección no lineal dependiente de uno de los retardos estimados de la población

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t)f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x_{\tau_{\hat{k}}}(t)) \tag{4.0.2}$$

siendo $\delta, p_k, \tau_k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ funciones T-peródicas para todo $k = 1, 2, 3, \cdots m$, $\tau_{\hat{k}} = \tau_k$ para algún $k \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := xe^{-x}$.

Observación 4.0.2. Para simplificar, en lo que sigue, se usará la siguiente notación:

$$x^* := \max_{t\in[0,T]}\{x(t)\}, \quad x_* := \min_{t\in[0,T]}\{x(t)\}. \tag{4.0.3}$$

Se probarán los siguientes teoremas:

[1] Por continuidad podemos definir $H(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.0.4. *Si* $H_{sup}(t) := \limsup_{x\to 0^+} \frac{H(t,x)}{x}$ *es uniforme en t y se satisface*

$$\delta(t) + H_{sup}(t) < \sum_{k=1}^{m} p_k(t) \tag{4.0.4}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *entonces la ecuación (4.0.1) tiene al menos una solución positiva* T*-periódica.*

Teorema 4.0.5. *Si además de satisfacerse la condición (4.0.4) se cumple que*

$$\frac{H(t,x)}{x} \leq p_{\hat{k}}(t)e^{-x} \tag{4.0.5}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *y* $0 < x < \left(\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k}{e\delta}\right)^* := \max_{t\in[0,T]} \left(\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k(t)}{e\delta(t)}\right)$ *entonces la ecuación (4.0.2) tiene al menos una solución* T*-periódica positiva.*

Por otro lado también se establecerá una condición necesaria para la existencia de al menos una solución T-periódica positiva, más precisamente se probará el siguiente resultado

Teorema 4.0.6. *Si (4.0.1) tiene al menos una solución T-periódica positiva entonces*

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) > \delta(t) + \frac{H(t,x)}{x} \tag{4.0.6}$$

para algún $t, x > 0$.

En la subsección 4.1.2 se considera el caso de un sistema del tipo de Nicholson para dos especies bajo términos de mutualismo y se establecerán condicones suficientes para la existencia de al menos una solución T-periódica positiva

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + p_1(t)f(x_{1_{\tau_1}}(t)) - H_1(t, x_1(t)) \\ \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + p_2(t)f(x_{2_{\tau_2}}(t)) - H_2(t, x_2(t)) \end{cases} \tag{4.0.7}$$

donde las funciones $\delta_i, \beta_i, p_i, \tau_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ son T-periódicas, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$, $x_{i_{\tau_i}}(t) := x_i(t - \tau_i(t))$, y $H_i \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ T periódicas en la variable t para todo $i = 1, 2$; más precisamente, se probará el siguiente resultado

Teorema 4.0.7. *Si los límites*

$$H_{i,sup}(t) := \limsup_{x\to 0^+} \frac{H_i(t,x)}{x}$$

y

$$H_{i,inf}(t) := \liminf_{x\to +\infty} \frac{H_i(t,x)}{x}$$

son uniformes en t para $i = 1, 2$ *y se satisfacen las condiciones*

$$(H1): \quad \delta_i(t) + H_{i,sup}(t) < \beta_i(t) + p_i(t) \tag{4.0.8a}$$

$$(H2): \quad \delta_i(t) + H_{i,inf}(t) > \beta_i(t) + p_i(t) \tag{4.0.8b}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *e* $i = 1, 2$ *entonces el sistema (4.0.7) tiene al menos una solución* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ *tal que* x_i *es* T*-periódica y positiva para* $i = 1, 2$.

Finalmente en la sección 4.2 se dará una condición suficiente para que el equilibrio trivial sea un atractor global. Dado el dato inicial

$$x(s) = \phi(s), \;\; \phi \in C([-\tau^*, 0], \mathbb{R}^+), \;\; \tau^* := \max\{\tau_i^*\} \tag{4.0.9}$$

se considera el problema de valores iniciales (4.0.1) - (4.0.9) y se probará que si (4.0.6) no se cumple, entonces el punto de equilibrio $\hat{x} = 0$, es un atractor global para las soluciones positivas; más precisamente tenemos el siguiente resultado que generaliza el resultado análogo dado por J. Li [47].

Teorema 4.0.8. *Si*

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) \leq \delta(t) + \frac{H(t,x)}{x} \qquad \textit{para todo } t, x > 0 \tag{4.0.10}$$

entonces todas las soluciones del problema de valores iniciales (4.0.1)-(4.0.9) están globalmente definidas, son positivas y tienden a 0 *cuando* $t \to +\infty$.

Observación 4.0.3. Si la condición (4.0.6) no se cumple entonces vale (4.0.10) y por lo tanto el teorema 4.0.6 también puede verse como una consecuencia del teorema 4.0.8.

4.1 Existencia de soluciones T-periódicas positivas

4.1.1 Caso escalar.

Planteo del problema en el marco de los métodos de continuación.

A los fines de aplicar la teoría del grado de coincidencia al problema (4.0.1) se establecerá un teorema de continuación siguiendo los lineamientos dados en la sección 1.2 del capítulo 1; el teorema de continuación para el caso (4.0.2) se obtendrá por analogía.

Considaremos los operadores

$$L : Dom(L) \subset X \to Y, \;\text{ y }\;\; \Phi : X \to Y$$

con $X = Y = C_T$

$$C_T := \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t+T) = x(t)\}$$

dotado de la norma $||x||_\infty = \max_{t\in[0,T]}\{|x(t)|\}$, los subespacios

$$\widetilde{C}_T := \{x \in C_T : \; \overline{x} := \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt = 0\}, \;\; C_T^1 := C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C_T, \;\text{ y }\; Dom(L) := C_T^1$$

definidos del siguiente modo

$$L(x)(t) := x'(t), \quad \Phi(x)(t) := -\delta(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x(t)))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observamos que la ecuación (4.0.1) es equivalente a

$$L(x) = \Phi(x), \; x \in C_T^1.$$

Se verifica fácilmente que

$$\ker(L) = \{x \in C_T : x \text{ es constante}\} = \mathbb{R} \subset C_T$$

de manera que el problema es resonante y además

$$Im(L) = \{z \in C_T : \overline{z} = 0\} = \widetilde{C}_T.$$

Entonces $\ker(L)$ es un subespacio finito dimensional y $Im(L)$ es un subespacio cerrado; luego teniendo en cuenta que $coker(L) \approx \mathbb{R}$ se ve que L es un operador de Fredholm de índice 0 .

Ahora definimos los proyectores continuos $P, Q : C_T \to C_T$ como $P(x) = Q(x) = \overline{x}$ de forma tal que

$$Im(P) = \ker(L) \;\text{ y }\; Im(L) = \ker(Q)$$

y el isomorfismo $J : Im(Q) \to \ker(L)$ como la identidad.

En este caso la inversa de $L_P = L|_{\ker(P) \cap Dom(L)}$

$$K_P : \; Im(L) \to Ker(P) \cap Dom(L)$$

viene dada por

$$K_P(z)(t) = \Psi(z)(t) - \overline{\Psi(z)}. \tag{4.1.1}$$

donde a los fines simplificar la notación escribimos

$$\Psi(x)(t) := \int_0^t x(s)ds.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$\Psi(\overline{x})(t) = \int_0^t \overline{x}\, dt = t\overline{x}, \;\; y \;\; \overline{\Psi(\overline{x})} = \frac{1}{T}\int_0^T t\overline{x}\, dt = \frac{T}{2}\overline{x}$$

vemos que la inversa generalizada de L es

$$\begin{aligned} K_{P,Q}(z)(t) := K_P(I-Q)(z)(t) = K_P(z)(t) - K_P(\overline{z}) = \\ = \Psi(z)(t) - \overline{\Psi(z)} - \Psi(\overline{z})(t) + \overline{\Psi(\overline{z})} = \\ = \Psi(z)(t) - \overline{\Psi(z)} - t\overline{z} + \tfrac{T}{2}\overline{z} = \\ = \Psi(z)(t) - \overline{\Psi(z)} + \left(\tfrac{T}{2} - t\right)\overline{z}. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente definimos $N : [0,1] \times C_T \to C_T$

$$N(\lambda, x) = \lambda\Phi(x)$$

y consideramos la siguiente familia uniparamétrica de problemas

$$L(x) = N(\lambda, x), \quad x \in C_T^1. \tag{4.1.3}$$

Ahora, a los efectos de aplicar el corolario 1.2.6, de acuerdo a (1.2.14) definimos la homotopía

$$\mathcal{F} : [0,1] \times C_T \to C_T$$

del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\lambda(x) &:= \mathcal{F}(\lambda, x) = x - P(x) - J(Q(\Phi(x))) - \lambda K_{P,Q}(\Phi(x)) = \\ &= x - \overline{x} - \overline{\Phi(x)} - \lambda K_{P,Q}(\Phi(x)). \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Luego por (1.2.7) tenemos la siguiente equivalencia

Lema 4.1.1. *Para cada $\lambda \in (0,1]$, x es solución del problema (4.1.3) si y sólo si $\mathcal{F}_\lambda(x) = 0$.*

Por otro lado, como es habitual, escribimos $\mathcal{F}(\lambda, \cdot) = I - \mathcal{K}(\lambda, \Phi(\cdot))$ donde

$$\mathcal{K}_\lambda(x) := \mathcal{K}(\lambda, \Phi(x)) = \overline{x} + \overline{\Phi(x)} + \lambda K_{P,Q}(\Phi(x)) \tag{4.1.5}$$

de manera que $\mathcal{F}$ es una perturbación compacta de la identidad.

Luego observamos que $Im(P - JQ\Phi) \subset \ker L = \mathbb{R} \subset C_T$ de forma tal que $\mathcal{F}_0 = I - (P - JQ\Phi)$ es una perturbación de rango finito de la identidad. Luego identificando $\mathcal{F}_0|_{KerL}$ con la función $g : \overline{\Omega} \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $g(x) = -\overline{\Phi(x)}$ con $\Omega \in C_T$ un conjunto abierto acotado tal que $0 \notin \mathcal{F}_\lambda(\partial\Omega)$ para todo $\lambda \in [0,1]$, vemos que el grado está bien definido y usando (1.1.1), la observación (1.2.6) y la invariancia bajo homotopía del grado de Leray-Schauder, se tiene

$$deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda, \Omega, 0) = deg_{LS}(\mathcal{F}_0, \Omega, 0) = d_B(\mathcal{F}_0|_{\ker L},\ \Omega \cap Ker(L), 0) = d_B(g,\ \Omega \cap \mathbb{R}, 0).$$

En definitiva obtenemos, de acuerdo al corolario 1.2.6 el siguiente

Teorema 4.1.2. de Continuación. *Con las notaciones anteriores, si existe $\Omega \subset C_T$ abierto y acotado tal que:*

(H1) : La familia uniparamétrica de problemas T-periódicos (4.1.3) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap Dom(L)$ para ningún $\lambda \in (0,1)$ y

(H2) : Existe el grado de Brouwer de la función g y

$$d_B(g, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0$$

entonces (4.0.1) tiene al menos una solución $x \in \overline{\Omega} \subset C_T$.

Para el problema (4.0.2) consideramos para $\lambda \in [0,1]$ la familia uniparamétrica

$$L(x) = \hat{N}(\lambda, x) = \lambda\hat{\Phi}(x) \quad x \in C_T^1 \tag{4.1.6}$$

con

$$\hat{\Phi}(x)(t) := -\delta(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x_{\tau_{\hat{k}}}(t)))$$

y definimos, con los mismos proyectores P y Q, el isomorfismo J y la inversa generalizada $K_{P,Q}$, la siguiente homotopía

$$\hat{\mathcal{F}} : [0,1] \times C_T \to C_T$$

$$\hat{\mathcal{F}}_\lambda(x) := \hat{\mathcal{F}}(\lambda, x) = x - \overline{x} - \overline{\hat{\Phi}(x)} - \lambda K_{P,Q}(\hat{\Phi}(x)).$$

A los efectos de facilitar la posterior referencia se enuncian los siguientes resultados que son completamente análogos a los establecidos en el lema 4.1.1 y el teorema de continuación 4.1.2.

Lema 4.1.3. *Para cada $\lambda \in (0,1]$, x es solución del problema (4.1.6) si y sólo si $\hat{\mathcal{F}}_\lambda(x) = 0$.*

Teorema 4.1.4. *Si existe $\Omega \subset C_T$ abierto y acotado tal que:*

(H1) : La familia uniparamétrica de problemas T-periódicos (4.1.6) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap Dom(L)$ para ningún $\lambda \in (0,1)$ y

(H2) : Existe el grado de Brouwer de la función $\hat{g} := -\overline{\hat{\Phi}(x)}$,

$$d_B(\hat{g}, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0$$

entonces (4.0.2) tiene al menos una solución $x \in \overline{\Omega} \subset C_T$.

Cotas a priori.

En esta sección se demuestran dos lemas que serán fundamentales para la aplicación de los teoremas de continuación 4.1.2 y 4.1.4; en éstos se establecen cotas a prori para las soluciones T-periódicas positivas de los problemas (4.0.1) y (4.0.2) respectivamente.

Observación 4.1.1. Por la condición (4.0.4) se tiene que existen constantes positivas γ, ε tal que

$$\frac{H(t,x)}{x} < \gamma < \sum_{k=1}^{m} p_k(t) - \delta(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in (0, \varepsilon)$ y por lo tanto

$$\delta(t) + \frac{H(t,x)}{x} < \sum_{k=1}^{m} p_k(t) - \gamma \tag{4.1.7}$$

para alguna constante $\gamma > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in (0, \varepsilon)$. En particular por (4.0.4) existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < x < \varepsilon$ entonces

$$0 < H(t,x) < x \left[\sum_{k=1}^{m} p_k(t) - \delta(t) \right] \tag{4.1.8}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y por lo tanto podemos extender $H \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ en forma continua en $x = 0$ de forma tal que $H(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si además H es continuamente diferenciable respecto de x podemos escribir la condición (4.0.4) del siguiente modo:

$$\delta(t) + \frac{\partial H}{\partial x}(t, 0) < \sum_{k=1}^{m} p_k(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ de manera que la condición dada en el teorema 4.0.4 generaliza la condición de suficiencia (2.2.30) dada en el teorema 2.1 del artículo de J. Li [47].

Lema 4.1.5. *Existen constantes positivas N_1, M_1 tal que si x es una solución T-periódica positiva de (4.1.3) para $\lambda \in (0, 1)$ entonces*

$$0 < N_1 \leq x(t) \leq M_1 \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. (I) Supongamos que x es una solución positiva T-periódica del problema (4.1.3) para $\lambda \in (0, 1)$, entonces por el lema (4.1.1) tenemos $\mathcal{F}_\lambda(x) = 0$ para $\lambda \in (0, 1)$.

Consideramos ζ un punto donde x alcanza su valor máximo absoluto, $x^* = x(\zeta)$ y usando la ecuación (4.1.3) obtenemos

$$0 = \lambda \left(-\delta(\zeta)x^* + \sum_{k=1}^{m} p_k(\zeta) f(x_{\tau_k}(\zeta)) - H(\zeta, x^*) \right)$$

con $\lambda \in (0, 1)$, o sea

$$\delta(\zeta)x^* = \sum_{k=1}^{m} p_k(\zeta) f(x_{\tau_k}(\zeta)) - H(\zeta, x^*) < \sum_{k=1}^{m} p_k(\zeta) f(x_{\tau_k}(\zeta)).$$

Luego, teniendo en cuenta que $f(x) \leq \frac{1}{e}$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x^* < \frac{\sum_{k=1}^{m} p_k(\zeta) f(x_{\tau_k}(\zeta))}{\delta(\zeta)} < \frac{\sum_{k=1}^{m} p_k(\zeta)}{e\delta(\zeta)} \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k}{e\delta} \right)^* .$$

De esta forma obtenemos para cualquier solución positiva una cota superior a priori que depende solamente de $p_k,\ k = 1, 2, \cdots, m$ y δ, es decir

$$x^* < M_1 := \left(\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k}{e\delta} \right)^* . \tag{4.1.9}$$

(II) Para obtener una cota inferior a priori para cualquier solución postiva de (4.1.3) con $\lambda \in (0, 1)$, supongamos que x es una de tales soluciones y que alcanza en η el valor mínimo absoluto $x(\eta) = x_*$.

En primer lugar observamos que si $x_* \geq 1$ tendríamos la cota buscada, de manera que sólo debemos considerar el caso $x_* < 1$. Distinguimos dos subcasos a) $x^* \leq 1$ y b) $x^* > 1$.

a): Si $x^* \leq 1$ entonces siendo f estrictamente creciente en $[0, 1]$ tenemos que $f(x_{\tau_k}(t)) \geq f(x_*)$ para todo $k = 1, 2, \cdots, m$. Luego usando la ecuación (4.1.3) con $\lambda \in (0, 1)$ obtenemos

$$\delta(\eta)x_* + H(\eta, x_*) = \sum_{k=1}^{m} p_k(\eta) f(x_{\tau_k}(\eta))$$

y

$$\delta(\eta) + \frac{H(\eta, x_*)}{x_*} = \frac{\sum_{k=1}^m p_k(\eta) f(x_{\tau_k}(\eta))}{x_*} \geq \sum_{k=1}^m p_k(\eta) e^{-x_*} \tag{4.1.10}$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, por la condición (4.0.4) y la observación (4.1.1), existe una constante $0 < \sigma < 1$ independiente de η tal que

$$\delta(\eta) + \frac{H(\eta, x_*)}{x_*} < \sigma \sum_{k=1}^m p_k(\eta) \tag{4.1.11}$$

para $x_* < \varepsilon$. Entonces de (4.1.10) y (4.1.11) se deduce que

$$e^{x_*} \geq \frac{\sum_{k=1}^m p_k(\eta)}{\delta(\eta) - \frac{H(\eta, x_*)}{x_*}} > \frac{1}{\sigma} > 1$$

y así $x_* > ln(\frac{1}{\sigma}) > 0$.

b): El caso correspondiente a que $x^* > 1$ se reduce al anterior. En efecto, si $x^* > 1$ consideramos $0 < \mu < 1$ tal que $f(\mu) := f(M_1) = f\left(\left(\frac{\sum_{k=1}^m p_k}{e\delta}\right)^*\right)$ que sólo depende de $p_k,\ k = 1, 2, , \cdots, m$ y δ. Si $x_* \geq \mu$ no hay nada que probar y si $x_* < \mu < 1$ podemos proceder como en el caso a), pues en tal caso observamos que si $0 < x_* < x \leq x^*$ entonces $f(x) > f(x_*)$. Luego vale que $f(x(t - \tau_k(t)) > f(x_*)$ para todo $k = 1, 2, 3, \cdots, m$ y se obtiene la misma cota que se obtuvo para el caso $x_* \leq 1$ usando nuevamente la ecuación (4.1.3) y la desigualdad (4.0.4).

En definitiva del caso a) y b) tenemos que si $N_1 := -ln(\sigma)$ entonces

$$x_* > N_1 > 0 \tag{4.1.12}$$

y de I) y II) se obtiene el resultado. ■

Lema 4.1.6. *Existen constantes positivas $\tilde{N}_1, \tilde{M}_1$ tal que si x es una solución T periódica positiva de (4.1.6) para $\lambda \in (0, 1)$ entonces*

$$0 < \tilde{N}_1 \leq x(t) \leq \tilde{M}_1 \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. (I) Si x es una solución positiva T-periódica del problema (4.1.6) para $\lambda \in (0, 1)$, entonces por el lema (4.1.3) $\hat{\mathcal{F}}_\lambda(x) = 0$ para $\lambda \in (0, 1)$ y teniendo en cuenta que H es positiva obtenemos la misma cota superior (4.1.9) obtenida en el lema (4.1.5)

$$x^* < \tilde{M}_1 := M_1 = \left(\frac{\sum_{k=1}^m p_k}{e\delta}\right)^* \tag{4.1.13}$$

Observación 4.1.2. Dado que para cualquier solución positiva del problema (4.1.6) se tiene que $x^* < \left(\frac{\sum_{k=1}^m p_k}{e\delta}\right)^*$ entonces usando (4.0.5) vale que

$$\frac{H(t, x_{\tau_{\hat{k}}}(t))}{x_{\tau_{\hat{k}}}(t)} \leq p_{\hat{k}}(t) e^{-x_{\tau_{\hat{k}}}(t)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(II) Para obtener una cota inferior a priori para cualquier solución positiva x de (4.1.6) suponemos que $x(\eta) = x_*$ es el valor mínimo absoluto de x y como lo hicimos en el lema previo suponemos que $x_* < 1$ y $x^* \leq 1$, de manera que $f(x_{\tau_k}(t)) \geq f(x_*)$ para todo t y $k = 1, 2, \cdots, m$.

Usando la ecuación (4.1.6) y la observación (4.1.2) se tiene

$$x'(t) = \lambda\left[-\delta(t)x(t) + \sum_{k=1}^m p_k(t)f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x_{\tau_{\hat{k}}}(t))\right] =$$
$$= \lambda\left[-\delta(t)x(t) + \sum_{k\neq\hat{k}}^m p_k(t)f(x_{\tau_k}(t)) + x_{\tau_{\hat{k}}}(t)\left(p_{\hat{k}}(t)e^{-x_{\tau_{\hat{k}}}(t)} - \frac{H(t,x_{\tau_{\hat{k}}}(t))}{x_{\tau_{\hat{k}}}(t)}\right)\right] \geq$$
$$-\lambda\delta(t)x(t) > -\delta(t)x(t)$$

para $\lambda \in (0, 1)$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

Luego integrando $x'(t) \geq -\delta(t)x(t)$ obtenemos

$$x(t) \geq x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)e^{-\int_{\eta-\tau_{\hat{k}}(\eta)}^t \delta(s)ds}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, o sea

$$e^{\int_{\eta-\tau_{\hat{k}}(\eta)}^t \delta(s)ds}x(t) \geq x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ahora evaluando en $t = \eta$ obtenemos

$$x_*e^{\int_{\eta-\tau_{\hat{k}}(\eta)}^\eta \delta(s)ds} \geq x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta) \tag{4.1.14}$$

y teniendo en cuenta

$$e^{\int_{\eta-\tau_{\hat{k}}(\eta)}^\eta \delta(s)ds} \leq C := e^{\int_0^T \delta(s)ds}$$

concluimos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$Cx_* \geq x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta).$$

Por otro lado, usando nuevamente la observación (4.1.2)

$$\delta(\eta)x_* = \sum_{k\neq\hat{k}}^m p_k(\eta)x_{\tau_k}(\eta)e^{-x_{\tau_k}(\eta)}+$$
$$+x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)\left(p_{\hat{k}}(\eta)e^{-x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)} - \frac{H(\eta,x_{\tau_k}(\eta))}{x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)}\right) \geq$$
$$\geq \sum_{k\neq\hat{k}}^m p_k(\eta)x_*e^{-x_*} + x_*\left(p_{\hat{k}}(\eta)e^{-x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)} - \frac{H(\eta,x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta))}{x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)}\right)$$

es decir

$$\delta(\eta) \geq \sum_{k\neq\hat{k}}^m p_k(\eta)e^{-x_*} + p_{\hat{k}}(\eta)e^{-x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)} - \frac{H(\eta,x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta))}{x_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)}. \tag{4.1.15}$$

Ahora supongamos que no existe ninguna constante positiva $\tilde{N}_1$ tal que $x_* \geq N_2$ para toda solución del problema, entonces en tal caso podríamos elegir una sucesión de soluciones $(x^n) \subset C_T$ de forma tal que $x_*^n \to 0$ si $n \to +\infty$. Luego usando la desigualdad (4.1.14)

$$0 < x_{\tau_{\hat{k}}}^n(\eta_n) \leq Cx_*^n$$

y por lo tanto $x^n_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_n) \to 0$ si $n \to +\infty$; más aún, pasando a una subsucesión, si fuera necesario, $x^n_{\tau_{\hat{k}}}(\eta) \to 0$ si $n \to +\infty$ para cierto $\eta \in [0,T]$.

Para ver esto observamos que como $(\eta_n) \subset [0,T]$ existen $(\eta_{n_j}) \subset (\eta_n)$ y $\eta \in [0,T]$ tal que $\eta_{n_j} \to \eta$ si $j \to \infty$ de manera que por un lado tenemos que $x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_{n_j}) \to 0$ y por otro que $x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}$ es uniformemente continua en $[0,T]$ para caja j. Luego podemos considerar $(n_{k_l}) \subset (n_j)$ y $l_0 \in \mathbb{N}$ de forma tal que si $l \geq l_0$ entonces $|x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta) - x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_{n_{k_l}})| < \frac{1}{2j}$ y $x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_{n_{k_l}}) < \frac{1}{2j}$ y por lo tanto

$$0 < x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta) = x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta) - x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_{n_{k_l}}) + x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_{n_{k_l}}) \leq$$

$$\leq |x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta) - x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_{n_l})| + x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta_{n_l}) \leq \tfrac{1}{j}.$$

Luego haciendo que $j \to +\infty$ se ve que $x^{n_j}_{\tau_{\hat{k}}}(\eta) \to 0$ y renombrando los términos de la sucesión obtenemos el resultado.

Finalmente si consideramos (4.1.15) para la sucesión $(x^n_{\tau_{\hat{k}}}(\eta))$

$$\tfrac{H(\eta, x^n_{\tau_{\hat{k}}}(\eta))}{x^n_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)} \geq \textstyle\sum_{k \neq \hat{k}}^m p_k(\eta) e^{-x^n_*} + p_{\hat{k}}(\eta) e^{-x^n_{\tau_{\hat{k}}}(\eta)} - \delta(\eta)$$

y tomando límite superior en ambos miembros

$$H_{sup}(\eta) \geq \textstyle\sum_{k \neq \hat{k}}^m p_k(\eta) + p_{\hat{k}}(\eta) - \delta(\eta) = \sum_{k=1}^m p_k(\eta) - \delta(\eta)$$

es decir

$$\delta(\eta) + H_{sup}(\eta) \geq \sum_{k=1}^m p_k(\eta)$$

lo cual contradice la hipótesis (4.0.4).

En definitiva existe una constante $\tilde{N}_1$ tal que si x es solución de (4.1.6) entonces

$$x_* \geq \tilde{N}_1 > 0 \tag{4.1.16}$$

y se sigue el resultado. ■

Demostración de los principales resultados.

En esta subsección se darán las demostraciones de los teoremas 4.0.4, 4.0.5 y 4.0.6

Demostración del teorema 4.0.4.

Vamos a probar que para cierto $\Omega \subset C_T$ abierto y acotado se satisfacen las dos hipótesis (H1) y (H2) del teorema de continuación (4.1.2).

En primer lugar observemos que si $x \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= \overline{\delta} x - \textstyle\sum_{k=1}^m \overline{p}_k x e^{-x} + \frac{x}{T}\int_0^T \frac{H(t,x)}{x} dt = \\ &= x(\overline{\delta} - \textstyle\sum_{k=1}^m \overline{p}_k e^{-x}) + \frac{x}{T}\int_0^T \frac{H(t,x)}{x} dt > x\left(\overline{\delta} - \sum_{k=1}^m \overline{p}_k e^{-x}\right). \end{aligned}$$

Ahora elegimos $M > M_1 > 0$ donde M_1 es la constante dada por el lema (4.1.5) de forma tal que $\overline{\delta} - \sum_{k=1}^{m} \overline{p}_k e^{-M} > 0$ o equivalentemente $e^M > \frac{\sum_{k=1}^{m} \overline{p}_k}{\overline{\delta}} > 1$, es decir $M > ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} \overline{p}_k}{\overline{\delta}}\right)$.
Entonces existe $M > 0$ tal que

$$g(M) > M\left(\overline{\delta} - \sum_{k=1}^{m} \overline{p}_k e^{-M}\right) > 0$$

Por otro lado teniendo en cuenta (4.0.4) y la observación (4.1.1) existen constantes $\gamma > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\delta(t) + \frac{H(t,x)}{x} < \sum_{k=1}^{m} p_k(t) - \gamma$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in (0, \varepsilon)$. Luego obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= \overline{\delta}x - \textstyle\sum_{k=1}^{m} \overline{p}_k x e^{-x} + \frac{x}{T}\int_0^T \frac{H(t,x)}{x} dt = \\ &= \tfrac{x}{T}\int_0^T \left(\delta(t) + \tfrac{H(t,x)}{x} - \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t)e^{-x}\right) dt < \\ &< \tfrac{x}{T}\int_0^T \left(\textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t) - \gamma - \sum_{k=1}^{m} p_k(t)e^{-x}\right) dt = \\ &= \tfrac{x}{T}\int_0^T \left(\textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t)(1-e^{-x}) - \gamma\right) dt. \end{aligned}$$

De esta forma vemos que si $x \to 0^+$ entonces $\sum_{k=1}^{m} p_k(t)(1-e^{-x}) - \gamma \to -\gamma < 0$ y por lo tanto existe $0 < N < N_1$ donde N_1 es la constante dada por el lema (4.1.5) de forma tal que $g(N) < 0$.

En definitiva podemos elegir

$$\Omega := \{x \in C_T : N < x(t) < M, \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

y concluir que las dos hipótesis (H1) y (H2) del teorema de continuación (4.1.2) se cumplen de manera que existe al menos una solución T- periódica positiva $x \in \overline{\Omega} \subset C_T$ de la ecuación (4.0.1). ■

Demostración del teorema 4.0.5

La cuenta realizada en la demostración del teorema (4.0.1) prueba que $d_B(\hat{g}, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0$ con $\hat{g}(x) = -\overline{\hat{\Phi}(x)}$; luego usando el lema (4.1.6) se cumplen las hipótesis (H1) y (H2) del teorema de continuación 4.1.4 y se sigue el resultado. ■

Demostración del teorema 4.0.6.

Si $x^* = x(\eta) \leq 1$ entonces $f(x_{\tau_k}(\eta)) \leq f(x^*) = x^* e^{-x^*}$ para todo $k = 1, 2, \cdots, m$ y

$$x^*\left(\delta(\eta) + \frac{H(\eta, x^*)}{x^*}\right) = \sum_{k=1}^{m} p_k(\eta) f(x_{\tau_k}(\eta)) < \sum_{k=1}^{m} p_k(\eta) x^* e^{-x^*}.$$

Luego

$$\delta(\eta) + \frac{H(\eta, x^*)}{x^*} < \sum_{k=1}^{m} p_k(\eta) e^{-x^*} < \sum_{k=1}^{m} p_k(\eta).$$

Por otro lado si $x^* > 1$, teniendo en cuenta que $f(x_{\tau_k}(\eta)) \leq \frac{1}{e}$ para todo $k = 1, 2, \cdots, m$, llegamos a la misma conclusión

$$\delta(\eta) + \frac{H(\eta, x^*)}{x^*} = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k(\eta) f(x_{\tau_k}(\eta))}{x^*} < \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k(\eta)}{e x^*} < \sum_{k=1}^{m} p_k(\eta).$$

En definitiva, en cualquiera de los casos, se sigue el resultado. ■

4.1.2 Caso sistema.

Planteo del problema en el marco de los métodos de continuación.

En primer lugar consideramos el espacio de Banach

$$X := \{\mathbf{x} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : x_i(t+T) = x_i(t), i = 1, 2\}$$

con la norma $||\mathbf{x}|| = \max\{|x_i|_\infty, i = 1, 2\}$ donde

$$|x_i|_\infty := \max_{t \in [0,T]} \{|x_i(t)|\}$$

para $i = 1, 2$ y los subespacios

$$\tilde{X} := \{\mathbf{x} \in X : \ \overline{\mathbf{x}} = 0\} \quad \text{y} \quad X^1 := C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \cap X.$$

Definimos los operadores

$$L : Dom(L) \subset X \to X, \ Dom(L) := X^1 \quad \text{y} \quad \Phi := (\phi_1, \phi_2) : \ X \to X$$

del siguiente modo

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$$

$$\phi_1(x_1, x_2)(t) := -\delta_1(t) x_1(t) + \beta_1(t) x_2(t) + p_1(t) f(x_{1_{\tau_1}}(t)) - H_1(t, x_1(t)))$$

y

$$\phi_2(x_1, x_2)(t) := -\delta_2(t) x_2(t) + \beta_2(t) x_1(t) + p_2(t) f(x_{2_{\tau_2}}(t)) - H_2(t, x_2(t))).$$

Luego observamos que

$$\ker(L) = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x} \text{ es constante}\} = \mathbb{R}^2 \subset X$$

de manera que el problema es resonante y además

$$Im(L) = \{\mathbf{z} \in Z : \overline{\mathbf{z}} = 0\} = \tilde{X}$$

con $\overline{\mathbf{x}} := (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Claramente $\ker(L)$ es finito dimensional y $Im(L)$ es un subespacio cerrado; luego teniendo en cuenta que $coker(L) \approx \mathbb{R}^2$ tenemos que $2 = dim(\ker(L)) = codim(Im(L))$ y concluimos que L es un operador de Fredholm de índice 0.

Ahora definimos los proyectores continuos $P, Q : X \to X$ como los promedios $P(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}}$ de manera que se verifica que

$$Im(P) = \ker(L) = \mathbb{R}^2, \;\; \ker(Q) = Im(L)$$

y $J : Im(Q) \to \ker(L)$ como la identidad. Por otro lado

$$K_P := L_P^{-1} : \; Im(L) \to Ker(P) \cap Dom(L)$$

viene dada por

$$K_P(\mathbf{z})(t) = \Psi(\mathbf{z})(t) - \overline{\Psi(\mathbf{z})} \tag{4.1.17}$$

donde a los fines de simplificar la notación, como lo hicimos para el caso escalar, escribimos $\Psi(x_1, x_2) := (\psi_1(x_1), \psi_2(x_2))$ con

$$\psi_i(x_i)(t) := \int_0^t x_i(s)\, ds, \; i = 1, 2.$$

Finalmente, como

$$\Psi(\overline{\mathbf{x}})(t) = t\overline{\mathbf{x}} \;\; y \;\; \overline{\Psi(\overline{\mathbf{x}})} = \frac{T}{2}\overline{\mathbf{x}}$$

obtenemos que la inversa generalizada viene dada, como en (4.1.2), por

$$K_{P,Q}(\mathbf{z})(t) = K_P(I - Q)(\overline{\mathbf{z}})(t) = \Psi(\mathbf{z})(t) - \overline{\Psi(\mathbf{z})} + \left(\tfrac{T}{2} - t\right)\overline{\mathbf{z}}. \tag{4.1.18}$$

Ahora definimos el operador $N : [0, 1] \times X \to X$

$$N(\lambda, \mathbf{x})(t) = \lambda\Phi(\mathbf{x})(t)$$

y consideramos la correspondiente familia uniparamétricas de problemas asociada

$$L(\mathbf{x}) := N(\lambda, \mathbf{x}), \;\; \mathbf{x} \in X^1 \tag{4.1.19}$$

Por último definimos la homotopía

$$\mathcal{F} : [0, 1] \times X \to C$$

que usaremos en la demostración del teorema 4.0.7

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{x}) := \mathcal{F}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - P(\mathbf{x}) - J(Q(\Phi(\mathbf{x}))) - \lambda \cdot K_{P,Q}(\Phi(\mathbf{x}))) = \\ \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}} - \overline{\Phi(\mathbf{x})} - \lambda K_{P,Q}(\Phi(\mathbf{x}))\end{gathered} \tag{4.1.20}$$

De acuerdo a la equivalencia (1.2.7) tenemos el siguiente

Lema 4.1.7. *Para cada $\lambda \in (0, 1]$, x es solución del problema (4.1.19) si y sólo si $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{x}) = 0$.*

Finalmente observamos que podemos escribir $\mathcal{F}(\lambda,\cdot) = I - \mathcal{K}(\lambda,\Phi(\cdot))$ donde

$$\mathcal{K}_\lambda(\mathbf{x}) := \mathcal{K}(\lambda,\Phi(x)) = \overline{x} + \overline{\Phi(x)} + \lambda K_{P,Q}(\Phi(\mathbf{x})) \tag{4.1.21}$$

de manera que $\mathcal{F}$ es una perturbación compacta de la identidad.

Luego si $\Omega \in X$ es un abierto acotado tal que $0 \notin \mathcal{F}_\lambda(\partial\Omega)$ para todo $\lambda \in [0,1]$, entonces el grado de Leray-Schauder está bien definido y por invariancia de la homotopía, se tiene

$$deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda,\Omega,0) = deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda,\Omega,0) = deg_{LS}(\mathcal{F}_0,\Omega,0).$$

Ahora observamos que $Im(P - JQ\Phi) \subset \ker L = \mathbb{R}^2 \subset X$ de manera que $\mathcal{F}_0 = I - (P - Q\Phi)$ es una perturbación de rango finito de la identidad y por lo tanto, usando (1.1.1), tenemos

$$deg_{LS}(\mathcal{F}_0,\Omega,0) = d_B(\mathcal{F}_0|_{KerL},\ \Omega \cap Ker(L),0).$$

Así identificando $\mathcal{F}_0|_{KerL}$ con la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida $g(\mathbf{x}) = -\overline{\Phi(\mathbf{x})}$ obtenemos, con las notaciones anteriores y de acuerdo al corolario (1.2.6), el siguiente

Teorema 4.1.8. de Continuación *Si existe $\Omega \subset X$ abierto y acotado tal que:*

(H1): La familia uniparamétrica de problemas T-periódicos (4.1.19) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap Dom(L)$ para ningún $\lambda \in (0,1)$ y

(H2): Existe el grado de Brouwer de g y

$$d_B(g,\Omega \cap \mathbb{R}^2,0) \neq 0$$

entonces (4.0.7) tiene al menos una solución $\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \subset X$ con $x_i > 0$ para $i = 1,2$.

Cotas a priori.

En esta sección se demuestra un lema que será fundamental para garantizar la hipótesis (H1) del teorema de continuación 4.1.8 y en el cual se establecen cotas a prori para las soluciones T-periódicas positivas de (4.1.19).

Lema 4.1.9. *Existen constantes $\varepsilon_0, R_0 > 0$ tal que si $\mathbf{x}$ es una solución T-periódica de (4.1.19) con $x_i > 0$ para $i = 1,2$ con $\lambda \in (0,1)$ entonces*

$$\varepsilon_0 < x_i(t) < R_0 \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R},\ i = 1,2.$$

Demostración. De acuerdo a la notación que hemos establecido en la observación 4.0.2 escribimos:

$$x_i^* := \max_{t\in[0;T]}\{x_i(t)\} \ \text{ y } \ x_{i,*} := \min_{t\in[0;T]}\{x_i(t)\},\ i = 1,2$$

Supongamos que $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ es una solución T-periódica arbitraria de (4.1.19) con $x_i > 0$ para $i = 1,2$ para $\lambda \in (0,1)$ y consideremos $\max\{x_1^*,x_2^*\}$. Para fijar ideas supongamos que $x_1(t_1) = R$ es tal valor máximo absoluto de forma tal que $x_2(t) \leq R$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Usando la primera ecuación del sistema se ve que $\phi_1(x_1(t_1), x_2(t_1)) = 0$ es decir

$$\delta_1(t_1)x_1(t_1) - H_1(t_1, x_1(t_1)) = \beta_1(t_1)x_2(t_1) + p_1(t_1)f(x_{1_{\tau_1}}(t_1)).$$

Teniendo en cuenta que $x_2(t_1) \leq R$ y $f(x_{1_{\tau_1}}(t_1)) \leq \frac{1}{e}$

$$\begin{aligned} R\left(\delta_1(t_1) + \tfrac{H_1(t_1,R)}{R}\right) &= \beta_1(t_1)x_2(t_1) + p_1(t_1)f(x_{1_{\tau_1}}(t_1)) \leq \\ &\leq \beta_1(t_1)R + \tfrac{p_1^*}{e} \end{aligned}$$

Luego

$$R\left(\delta_1(t_1) + \tfrac{H_1(t_1,R)}{R} - \beta_1(t_1)\right) \leq \tfrac{p_1^*}{e}$$

Y según la hipótesis (4.0.8b), concluimos que existe alguna constante $R_0 > 0$ tal que

$$x_i(t) < R_0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2.$$

Análogamente supongamos que $\min\{x_{1,*}, x_{2,*}\}$ se alcanza en $x_1(t_0) = \varepsilon$ de manera que $\varepsilon \leq x_2(t_0)$, entonces, como antes,

$$\delta_1(t_0)x_1(t_0) - H_1(t_0, x_1(t_0)) = \beta_1(t_0)x_2(t_0) + p_1(t_0)f(x_{1_{\tau_1}}(t_0)).$$

Basta con considerar el caso en el que $x_{1,*} \ll 1$ pues en caso contrario no hay nada que probar. Por otro lado podemos suponer también que $x_1^* \leq 1$, pues el caso contrario se trata de manera análoga a como lo hicimos para el caso escalar (ver II) b) de la demostracón de 4.1.5).

Luego tenemos $\varepsilon \leq x_1(t_0 - \tau_1(t_0) \leq 1$ y siendo f creciente en $[0, 1]$ $f(x_{1_{\tau_1}}(t_0)) \geq f(\varepsilon)$; en consecuencia

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left(\delta_1(t_0) + \tfrac{H_1(t_0,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \beta_1(t_0)x_2(t_0) + p_1(t_0)f(x_{1_{\tau_1}}(t_0)) \geq \\ &\beta_1(t_0)\varepsilon + p_1(t_0)f(\varepsilon) = \varepsilon\left(\beta_1(t_0) + p_1(t_0)e^{-\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

y

$$\delta_1(t_0) + \tfrac{H_1(t_0,\varepsilon)}{\varepsilon} \geq \beta_1(t_0) + p_1(t_0)e^{-\varepsilon}$$

y según la hipótesis (4.0.8a), concluimos que existe alguna constante $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\varepsilon_0 < x_i(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2. \blacksquare$$

Demostración del teorema 4.0.7.

Vamos a probar que para cierto $\Omega \subset X$ abierto y acotado se satisfacen las dos hipótesis (H1) y (H2) del teorema de continuación 4.1.8.

Veremos que el grado de la función $g = -\overline{\Phi(\mathbf{x})}$ no es nulo y para ello basta aplicar el teorema 1.1.4. Consideramos el compacto

$$\overline{\Omega}_{\varepsilon,R} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \varepsilon \leq x_i \leq R, \ \ i = 1, 2\}$$

con las constantes $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ a determinar.

Primero observemos que

$$g_1(x_1,x_2)=\overline{\delta}_1x_1-\overline{\beta}_1x_2-\overline{p}_1x_1e^{-x_1}+\tfrac{x_1}{T}\int_0^T\tfrac{H_1(t,x_1)}{x_1}dt=$$
$$=\tfrac{x_1}{T}\int_0^T\left(\delta_1(t)-p_1(t)e^{-x_1}+\tfrac{H(t,x_1)}{x_1}\right)dt-\overline{\beta}_1x_2.$$

En particular si $x_1=\varepsilon\le x_2\le R$ tenemos

$$g_1(\varepsilon,x_2)=\overline{\delta}_1\varepsilon-\overline{\beta}_1x_2-\overline{p}_1\varepsilon e^{-\varepsilon}+\tfrac{\varepsilon}{T}\int_0^T\tfrac{H_1(t,\varepsilon)}{\varepsilon}dt=$$
$$=\tfrac{\varepsilon}{T}\int_0^T\left(\delta_1(t)-p_1(t)e^{-\varepsilon}+\tfrac{H(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)dt-\overline{\beta}_1x_2\le$$
$$\tfrac{\varepsilon}{T}\int_0^T\left(\delta_1(t)-p_1(t)e^{-\varepsilon}+\tfrac{H(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)dt-\overline{\beta}_1\varepsilon=$$
$$\tfrac{\varepsilon}{T}\int_0^T\left(\delta_1(t)-p_1(t)e^{-\varepsilon}-\beta_1(t)+\tfrac{H(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)dt=g_1(\varepsilon,\varepsilon)$$

Luego usando la hipótesis (4.0.8a) vemos que para todo $t\in\mathbb{R}$

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\frac{H(t,\varepsilon)}{\varepsilon}<-\delta_1(t)+p_1(t)+\beta_1(t)=$$
$$\lim_{\varepsilon\to0^+}(-\delta_1(t)+p_1(t)e^{-\varepsilon}+\beta_1(t))$$

y por lo tanto

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{H(t,\varepsilon)}{\varepsilon}+\delta_1(t)-p_1(t)e^{-\varepsilon}-\beta_1(t)\right)<0$$

uniformemente en t.

En definitiva si $0<\varepsilon<\varepsilon_1<\varepsilon_0$ donde ε_0 es la constante del lema 4.1.9 entonces

$$g_1(\varepsilon,x_2)\le g(\varepsilon,\varepsilon)<0,\ \text{ para todo } \varepsilon\le x_2\le R.$$

Ahora si $\varepsilon\le x_2\le R=x_1$ tenemos

$$g_1(R,x_2)=\overline{\delta}_1R-\overline{\beta}_1x_2-\overline{p}_1Re^{-R}+\tfrac{R}{T}\int_0^T\tfrac{H_1(t,R)}{R}dt=$$
$$=\tfrac{R}{T}\int_0^T\left(\delta_1(t)-p_1(t)e^{-R}+\tfrac{H(t,R)}{R}\right)dt-\overline{\beta}_1x_2\ge$$
$$\tfrac{R}{T}\int_0^T\left(\delta_1(t)-p_1(t)e^{-R}+\tfrac{H(t,R)}{R}\right)dt-\overline{\beta}_1R=$$
$$\tfrac{R}{T}\int_0^T\left(\delta_1(t)-p_1(t)e^{-R}-\beta_1(t)+\tfrac{H(t,R)}{R}\right)dt=g_1(R,R)$$

Luego usando la hipótesis (4.0.8b) vemos que

$$\liminf_{R\to+\infty}\frac{H(t,R)}{R}<-\delta_1(t)+\beta_1(t)=$$
$$\lim_{R\to+\infty}(-\delta_1(t)+p_1(t)e^{-R}+\beta_1(t))$$

uniformemente en t y por lo tanto

$$\liminf_{R\to+\infty}\left(\frac{H(t,\varepsilon)}{\varepsilon}+\delta_1(t)-p_1(t)e^{-R}-\beta_1(t)\right)>0$$

uniformemente en t.

En definitiva existe una constante $R_1 > R_0 > 0$, donde R_0 es la constante del lema 4.1.9, tal que si $R > R_1$ entonces

$$g_1(R, x_2) \geq g_1(R, R) > 0, \text{ para todo } \varepsilon \leq x_2 \leq R.$$

De manera análoga se prueba que existen constantes positivas ε_2, R_2 ($\varepsilon_2 < \varepsilon_0$ y $R_2 > R_0$) tal que si $\varepsilon < \varepsilon_2$ y $R > R_2$ entonces

$$g_2(x_1, \varepsilon) < 0, \text{ para todo } \varepsilon \leq x_1 \leq R$$

y

$$g_2(x_1, R) > 0, \text{ para todo } \varepsilon \leq x_1 \leq R.$$

Si elegimos $\varepsilon < \min\{\varepsilon_i,\ i = 1, 2\}$ y $R > \max\{R_i,\ i = 1, 2\}$ y $\Omega := \{\mathbf{x} \in X : \varepsilon < x_i < R,\ i = 1, 2\}$ vemos que el grado de g está bien definido y $d_B(g, \Omega \cap \mathbb{R}^2, 0) \neq 0$ de manera que se cumplen las hipótesis (H1) y (H2) del teorema de continuación 4.1.8 y de ahí el resultado. ■

4.2 El equilibrio trivial es un atractor global.

Demostración del teorema 4.0.8.

En primer lugar observemos que si x es una solución no trivial del problema de valores iniciales entonces es estrictamente positiva en su dominio. En efecto, si existe

$$t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : x(t) \leq 0\}$$

entonces $x(t_1) = 0$ pero entonces $H(t_1, x(t_1)) = H(t_1, 0) = 0$ y

$$x'(t_1) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t_1) f(x_{\tau_k}(t_1)) > 0$$

lo cual es absurdo.

Observemos además que si $x'(t_0) \geq 0$ entonces $x(t_0) \leq \frac{1}{e}$ pues en tal caso

$$\delta(t_0)x(t_0) + H(t_0, x(t_0)) \leq \sum_{k=1}^{m} p_k(t_0) f(x_{\tau_k}(t_0))$$

de manera que

$$\begin{aligned} x(t_0)\left(\delta(t_0) + \tfrac{H(t_0,x(t_0))}{x(t_0)}\right) &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t_0) f(x_{\tau_k}(t_0)) \leq \\ &\leq \tfrac{1}{e} \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t_0) \end{aligned}$$

y por lo tanto usando la hipótesis (4.0.10)

$$x(t_0) \leq \frac{\sum_{k=1}^{m} p_k(t_0)}{\left(\delta(t_0) + \frac{H(t_0,x(t_0))}{x(t_0)}\right) e} < \frac{1}{e}. \tag{4.2.1}$$

De las observaciones anteriores deducimos que x está definida globalmente en $[0,\infty)$ y es estrictamente positiva pues si el dominio maximal de x fuera $[0,a)$ con $a<\infty$ entonces tomando la sucesión de compactos

$$K_n = [0, a-t_n] \times [-n, n]$$

con $0 \leq a - t_n < a$ y $t_n \to 0$ se tendría, según (1.5.6), que el gráfico de x escapa de cada compacto K_n lo cual es imposible pues x es estrictamente positiva y además $x(t) \leq \frac{1}{e}$ cada vez que $x'(t) \geq 0$.

En definitiva sólo resta probar que $x \to 0$ si $t \to +\infty$. Para ello distinguimos tres casos: I): x es eventualmente monótona creciente, II): x es eventualmente estrictamente decreciente y III): x es oscilatoria.

I): Supongamos que existe $t_0 > 0$ tal que si $t \geq t_0$ entonces $x'(t) \geq 0$.

En este caso, si $t \geq t_0 + \tau^*$ entonces $t - \tau_k(t) \geq t - \tau^* \geq t_0$ y en consecuencia

$$f(x_{\tau_k}(t)) = x_{\tau_k}(t) e^{-x_{\tau_k}(t)} < x(t)$$

para todo $t \geq t_0$ y $k = 1, 2, \cdots, m$. Luego usando (4.0.10)

$$\begin{aligned} 0 \leq x'(t) &= -\delta(t)x(t) + \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x(t)) < \\ &< x(t)\left(\textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t) - \left(\delta(t) + \frac{H(t,x(t))}{x(t)}\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

II): Ahora supongamos que existe t_0 tal que si $t \geq t_0$ entonces $x'(t) < 0$.

En este caso, existe $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \alpha \geq 0$. Supongamos que $\alpha > 0$; para $\beta > 0$ arbitrario podemos elegir $\gamma > 0$ de forma tal que $\sum_{k=1}^m p_k(t)\gamma < \beta$ y como $f(x_{\tau_k}(t)) \to f(\alpha)$ existirá $t_0 > 0$ tal que si $t \geq t_0 + \tau^*$ entonces $f(x_{\tau_k}(t)) < f(\alpha) + \gamma$ de manera que

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) \leq \sum_{k=1}^m p_k(t)(f(\alpha) + \gamma) = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t) f(\alpha) + \sum_{k=1}^m p_k(t)\gamma < \sum_{k=1}^m p_k(t) f(\alpha) + \beta \end{aligned}$$

para $t \geq t_0 + \tau^*$. Luego usando (4.0.6) con $x = \alpha$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &x'(t) \leq \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t) f(\alpha) + \beta - \delta(t)x(t) - H(t.x(t)) \leq \\ &\leq \left(\delta(t) + \frac{H(t,\alpha)}{\alpha}\right) f(\alpha) + \beta - \delta(t)x(t) - H(t.x(t)) = \\ &\alpha\delta(t)e^{-\alpha} + H(t,\alpha)e^{-\alpha} + \beta - \delta(t)x(t) - H(t.x(t)) = \\ &\alpha\delta(t)e^{-\alpha} + \alpha\delta(t) - \alpha\delta(t) - H(t,\alpha) + H(t,\alpha) - \\ &-H(t,\alpha)e^{-\alpha} + \beta - \delta(t)x(t) - H(t.x(t)) = \\ &\delta(t)(\alpha - x(t)) + H(t,\alpha) - H(t,x(t)) + \beta - (\alpha\delta(t) + H(t,\alpha))(1 - e^{-\alpha}). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Ahora definimos

$$A(t) := \delta(t)(\alpha - x(t)) + H(t,\alpha) - H(t, x(t))$$

y

$$B(t) := (\alpha\delta(\cdot) + H(\cdot.\alpha))(1 - e^{-\alpha})$$

y elegimos $\beta < B_*$. Entonces como $A(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ se tiene que dado $0 < \mu < \kappa := B_* - \beta$ existe t_0 tal que si $t \geq t_0 + \tau^*$ entonces $A(t) < \mu$ y

$$x'(t) \leq A(t) + \beta - B(t) \leq A(t) + \beta - B_* < \mu - \kappa \tag{4.2.3}$$

En definitiva tenemos que $x'(t) \leq -\rho$ con $\rho := \kappa - \mu > 0$ para $t \geq t_0 + \tau^*$ y esto implica que $x(t) \leq -\rho(t - t_0 - \tau^*) + x(t_0 + \tau^*)$ para $t \geq t_0 + \tau^*$ lo cual es absurdo, pues x es siempre positiva y así $\alpha = 0$.

III) El tercer caso posible es que x oscile a partir de cierto $t_0 > 0$. En este caso procedemos por etapas, para construir un esquema adecuado de iteración.

En primera instancia consideramos todos los intervalos $I_n = (a_n, b_n),\ a_n < b_n$ en los que x es monótona creciente y de acuerdo con (4.2.1) tenemos que $x(t) \leq \frac{1}{e} := f(1)$ para todo $t \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, como x decrece en cada componente de $\mathbb{R}_{\geq a_0} - \bigcup I_n$ concluimos que debe existir $t_1 > 0$ tal que si $t \geq t_1$ entonces

$$0 < x(t) \leq x_1 := f(x_0)$$

con $x_0 := 1$.

En una segunda etapa, consideramos $t \geq t_1 + \tau^*$ de manera que $t - \tau_k(t) \geq t - \tau^* \geq t_1$ y por lo tanto $0 < x_{\tau_k}(t) \leq \frac{1}{e}$ para todo $k = 1, 2, \cdots m$.

Como f es estrictamente creciente en $[0, 1]$ entonces $0 < f(x_{\tau_k}(t)) \leq f(x_1)$ para todo $k = 1, 2, \cdots m$ y todo $t \geq t_1 + \tau^*$ con $x_1 := \frac{1}{e}$.

Aplicando nuevamente (4.2.1) en cada uno de los intervalos $I_n \subset \mathbb{R}_{\geq t_1 + \tau^*}$ tenemos que

$$\delta(t)x(t) + H(t, x(t)) \leq \sum_{k=1}^{m} p_k(t) f(x_{\tau_k}(t))$$

y así

$$\begin{aligned} 0 < x(t)\left(\delta(t) + \tfrac{H(t,x(t))}{x(t)}\right) &\leq \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t) f(x_{\tau_k}(t)) \leq \\ &\leq f(x_1) \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(t). \end{aligned}$$

Luego usando (4.0.10)

$$x(t) \leq \frac{\sum_{k=1}^m p_k(t) f(x_1)}{\delta(t) + \frac{H(t,x(t))}{x(t)}} < f(x_1).$$

Nuevamente, esta cota sirve aún para los puntos que están en $\mathbb{R}_{\geq t_1 + \tau^*} - \bigcup I_n$ y concluimos que si $t \geq t_1 + \tau^*$ entonces

$$0 < x(t) < x_2 := f(x_1).$$

En una tercera etapa, aplicando el mismo razonamiento, concluimos que existe $t_2 > t_1 + \tau^*$ tal que si $t \geq t_2 + \tau^*$ entonces

$$0 < x(t) \leq x_3 := f(x_2).$$

Repitiendo este esquema de iteración obtenemos una sucesión $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ tal que $t_n \to +\infty$ y si $t \geq t_n + \tau^*$ entonces

$$0 < x(t) \leq x_{n+1} := f(x_n).$$

Finalmente como la sucesión $(x_n) \subset [0, 1)$ el esquema de iteración $x_n = f(x_{n-1})$ converge al único punto fijo de f y se obtiene el resultado. $\blacksquare$

Lineamientos Futuros de Investigación.

A modo de conclusión se presenta en este apartado algunos lineamientos futuros de investigación relacionados con los temas de los que trata esta tesis.

En primer lugar, como lo hemos establecido en [11] se mantiene abierto el problema siguiente: dar condiciones suficientes para la existencia de al menos una solución T-periódica para el modelo generalizado de Nicholson con un término no lineal de recolección dependiente de un retardo variable, esto es

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} p_k(t)f(x_{\tau_k}(t)) - H(t, x_\sigma(t)) \tag{4.2.4}$$

siendo $\delta, p_k, \tau_k, \sigma \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $H \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty), \mathbb{R}^+)$ funciones T-peródicas para todo $k = 1, 2, 3, \cdots m$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := xe^{-x}$. Las dificultades que surgen para aplicar teoría de grado de coincidencia respecto de este problema radican en la obtención de cotas a priori. El mismo problema se puede plantear para un sistema de tipo Nicholson (4.0.7).

También es interesante, usando la propiedad de escisión del grado topológico, estudiar la multiplicidad de soluciones en todos los modelos tratados en esta tesis, como así también estudiar la estabilidad global asintótica del equilibrio trivial para los modelos (4.0.2), (4.2.4) o (4.0.7).

Por otro lado se plantea el problema de hallar condiciones suficientes para la existencia de soluciones casi periódicas para los modelos (4.0.1), (4.0.2) o (4.2.4), como así también su estudio para el caso neutral [32].

Finalmente, siempre en el contexto de las ecuaciones diferenciales funcionales resonantes, es de interés el estudio de las ecuaciones diferenciales con retardo bajo distintas condiciones de contorno; en particular, el estudio del modelo abstracto de electrodifusión con retardo.

Notación, Referencias e Índice.

$\mathbb{R}^+$	$(0,\infty)$.
$B_r(a)$	$\{x \in X : \|\|x-a\|\|_X < r\}$ con $(X, \|\|\cdot\|\|)$ según el contexto.
$\Omega \subset X$	Conjunto abierto y acotado del espacio de Banach X
$\mathcal{G}$	Subcolección de abiertos de X.
$C(\overline{\Omega})$	$\{F : \overline{\Omega} \subset X \to X$ continua $\}$ dotado de la topología uniforme
$M(\overline{\Omega})$	Subcolección de $C(\overline{\Omega})$
$\mathcal{M}(\mathcal{G})$	Funciones admisibles asociadas a la colección $\mathcal{G}$.
$M_p(\overline{\Omega})$	$\{F \in M(\overline{\Omega}) : p \notin \overline{F(\partial\Omega)}\}$.
$\mathcal{A}_p$	$\{(F,\Omega,p) : \Omega \in \mathcal{G},\ F \in M_p(\overline{\Omega})\}$.
$K_I(\Omega)$	$\{F := I - K : \overline{\Omega} \subset X \to X :\ \ K$ es compacto $\}$
$\mathcal{A}$	$\bigcup_{p\in X} \mathcal{A}_p$: ternas $(F,\Omega,p)-$ admisibles.
$\ker(L)$	Núcleo del operador lineal L.
$Dom(L)$	Dominio del operador L.
$Im(L)$	Imagen del operador L.
$K_{P,Q}$	Inversa generalizada del operador lineal L.
$d_{LS}(f,\Omega,p)$	grado topológico de Leray-Schuader de f relativo a Ω en p
$d_B(f,\Omega,p)$	grado topológico de Brouwer de f relativo a Ω en p
$\|\|x\|\|_\infty$	$\max_{t\in[0,T]}\{\|x(t)\|\},\ x \in C([0,T])$.
$\|\|x\|\|_{C^2(I)}$	$\sum_{j=0}^{k} \|\|x^{(j)}\|\|_\infty,\ x \in C^k([0,T])$ con $x^{(j)}$ al derivada $j-$ésima.
$f^{\pm}(x)$	$\lim_{s\to\pm\infty} f(x, s+a, s, s+b)$.
$K_{s,r}$	$\overline{B_r(s)} \times \{s\} \times \overline{B_r(s)},\ \ s \in [a,b]$
$K_{s,r}(x)$	$\{x\} \times K_{s,r},\ \ x \in [0,1]$
$K_{[a,b],r}$	$\bigcup_{x\in[0,1]} \bigcup_{s\in[a,b]} K_{s,r}(x)$
$f^a_{sup}(x)$	$\sup_{(y,y_0,y_1)\in K_{a,r}} f(K_{a,r}(x))$
$f^a_{inf}(x)$	$\inf_{(y,y_0,y_1)\in K_{a,r}} f(K_{a,r}(x))$
$y(\infty)$	$\lim_{x\to+\infty} y(x)$
$y'(\infty)$	$\lim_{x\to+\infty} y'(x)$
$\mathbf{S}^{n-1}$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\|\mathbf{x}\|\| = 1\}$
$Q(\mathbf{v})$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \|\langle \mathbf{w}-\mathbf{v}, \mathbf{z}_j\rangle\| < 2\|\langle \mathbf{c}, \mathbf{z}_j\rangle\|$ para $1 \le j \le n\}$ con $\{\mathbf{z}_j\}_{1\le j\le n} \subset \mathbf{S}^{n-1}$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ dados .
$\overline{x}$	$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$
C_T	$\{x \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : x(t+T) = x(t)\}$
C^1_T	$C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap C_T$.
$\tilde{C}_T$	$\{x \in C_T : \overline{x} = 0\}$

$\theta_t(\sigma)$	$\theta(t+\sigma),\ \sigma \in [-\tau, 0]$ con $\tau > 0$.
$x_{\tau_k}(t)$	$x(t-\tau_k(t))$ con $\tau_k \in C([0,T], \mathbb{R}^+)$.
$\mathcal{C}$	$C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$
$\mathcal{C}_D$	$C([-\tau, 0], D),\ \ D \subset \mathbb{R}^n$.
$\overline{B}_b^{\mathcal{C}}(\overline{\phi})$	$\{\phi \in \mathcal{C} : \|\|\phi - \overline{\phi}\|\|_\tau \leq b\}$ con $a, b > 0$ constantes.
$\mathcal{E}_{a,b}$	$([\overline{t}-a, \overline{t}+a] \cap J) \times \overline{B}_b^{\mathcal{C}}(\overline{\phi}),\ J = [t_0, \beta) \subset \mathbb{R}$.
x^*	$\max\{x(t) : t \in [0,T]\},\ x \in C_T$.
x_*	$\min\{x(t) : t \in [0,T]\},\ x \in C_T$.
$co(A)$	Cápsula convexa de $A \subset X$.
$\lambda \cdot \mathbf{v}$	Acción del escalar λ sobre el vector $\mathbf{v} \in X$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	Producto interno entre $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
$< \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n >$	Subespacio de X generado por los vectores $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in X$
$< \mathbf{v} >^{\perp}$	Subespacio ortogonal a $\mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \in X$

Bibliography

[1] Amann, H. and Weiss. On the uniqueness of the topological degree. Math. Mech. 15 877-898. (1973).

[2] Amann H. Fixed Point equation and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. Siam Rev- 18, 620-709 (1976)

[3] Amann, H. Ordinary Differential Equations. An Introdution to Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter Berlin. New York (1990).

[4] Allee W. Animal aggregations: a study in general sociology. Chicago University Press, 1933.

[5] P. Amster and M. Clapp Periodic solutions of resonant systems with rapidly rotating nonlinearities, Differential Equations and Dynamical Systems, Series A 31 $N°$ 2 (2011), 373-383.

[6] P. Amster. Métodos Topológicos en el análisis no lineal. Publicacoes Matemáticas IMPA. 2009.

[7] P. Amster. Topological methods in the Dtudy of Boundary Value Problems. Springer. New York 2014.

[8] Amster P., Berezansky L. and Idels L. Peoriodic solution of angiogenesis model with time lags. Nonlinear Analysis: Real World Applications. (2011).doi: 1016/j.nonrwa.2011.07.035

[9] Amster P., Déboli A. A Neumann Boundary-Value Problem on an Unbounded Interval. Autores. Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2008(2008) $N°$ 90. pag. 1-5.

[10] Amster P., Déboli A. A nonlinear problem depending on the unknown Dirichlet values of the solution. Differential Equations and Dynamical Systems 18, $N°$ 4 (2010), 363-372.

[11] Amster P. , Déboli A. Existence of positive T-periodic solutions of a generalized Nicholson's blowflies model with a nonlinear harvesting term. Elsevier Editorial System(tm) for Applied Mathematics Letter. Vol 25 Issue 9 Septiembre 2012 pg. 1203/ 1207.

[12] Amster P. Déboli A. A Neumann problem for a system depending on the unknown boundary values of the solution P. Amster, A. Déboli. Electronic Journal of Qualitative Theory of Diferential Equations 2012, N° 1, 1 - 12; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[13] P. Amster, M. C. Mariani, C. Rogers and C. C. Tisdell, On two-point boundary value problems in muti-ion electrodiffusion. J. Math. Anal. Appl. 289 (2004), 712-721.

[14] P. Amster, C. Rogers, On boundary value problems in three-ion electrodiffusion. J. Math. Anal. Appl. 333 (2007), 42-51.

[15] P. Amster, M. K. Kwong and C. Rogers. A Neumann Boundary Value Problem in Two-Ion Electro-diffusion with unequal valencies. Discrete and continuous dynamical systems. Series B. Vol 17 (7) (2012) 2299-2311.

[16] P. Amster, M. K. Kwong and C. Rogers. On a Neumann Boundary Value Problem for Painlevé II in Two Ion Electro-Diffusion. Nonlinear Analysis, TMA. 74 (9) (2011) 2897-2907.

[17] Andres J., Gabor G., Górniewicz L. Boundary value problems on infinite intervals, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999) 4861-4903.

[18] Bass L. Electrical structures of interfaces in steady electrolysis, Trans. Faraday. Soc. 60, 1656-1663 (1964).

[19] Bass L. Potential of liquid junctions, Trans. Faraday. Soc. 60, 1914-1919 (1964).

[20] Bellman R., K. Cooke. Differential-Difference Equations. Academic Press New York. (1963)

[21] Berezansky L., Braverman E., Idels L. Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems. Applied Mathematical Modelling 34 (6) pp 1405-17.

[22] Berezansky L., Idels L., L. Troib. Global dynamics of Nicholson-type delay systems whit applications. Nonlinear Anal. Real Word Appl. 12 (2011) 436-445.

[23] Bernstein J., Arch. Gesamte Physiol. (Pflügers) 92, 521 (1902)

[24] Brown, R. F. A Topological Introduction to Nonlinear Analysis. Birkhaüser. Boston - Basel - Berlin. (1993).

[25] Bruner L. J. Biophys. L. 5, 867 (1965)

[26] R. Conte, W. K. Schief and C. Rogers, Painlevé structure of a multi-ion electrodiffusion system, J. Physics A: Math. Theor. 40 (2007).

[27] Cooke K. L. and Kaplan J. L. A. A periodic threshold theorem dor epidemics and population growth. Math Biosc. 31, 87-104 (1976)

[28] Cronin, J. Fixed Point and Topological degree in Nonlinear Analysis. Mathematical Survey. Number 11 American Mathematical Society. 190. providence, Rhode Island. (1964).

[29] Constantin A. On an infinite interval boundary value problem Annali di Matematica pura ed applicata (IV) Vol. CLXXVI (1999) 379-394.

[30] C. De Coster and P. Habets: Upper and lower solutions in the theory of ode boundary value problems: classical and recent results. Nonlinear Analysis and boundary value problems for ODEs. CISM Courses and Lectures 371. Springer, 1997.

[31] De Coster, C. and Habets, P. An Overview of the Method of Lower Upper Solutions for ODE's.

[32] Driver Functional-Differencial System of Neutral Type arisin in a Two-body Problem of Classic Electrodinamical pp 474-483 in International Symposium on Nonlinear Differential equation and Nonlineal Mechanics. Academic Press Inc. New York 1963.

[33] Franco D. and O'Regan D. Existence of solutions to second order problems with nonlinear boundary conditions. Proc. of the Fourth Int. Conf. on Dynamical Systems and Diff. Equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems 2003, 273-280.

[34] Furi M., Pera P. A continuation method on locally convex spaces and applications to ordinary differential equations on noncompact intervals, Ann. Polon. Math. XLVII (1987) 331-346.

[35] Gavalas G. R. Nonlinear Differential Equations of Chemically Reactinf System. Springer-Verlang New York (1968)

[36] Guo D. and Lakshmikantham V. Nonlinear Problem in Abstract Cones. Academic Press. London (1988)

[37] Gurney W.S., S.P. Blythe, R.M. Nisber, Nicholson's blowflies (revised) Nature 287 (1980) 17-21

[38] Hale J. K. y Verduyn Lunel S. M. Introduction to functional differential equations. Applied Mathmatical Sciences, Springer-Verlang, 1993.

[39] Hale J. K. Ordinary Differential Equations. Krieger, Malabar, Florida, 1980.

[40] Hutchinson S. M. Circular causal system in ecology. Ann Gazette 45 (1961) 13-14.

[41] Krasnoselskii M. A. Positive Solutions of Operator Equations. Noordhoff. Groningen. The Netherlands (1964).

[42] Wladyslaw Kulpa. The Poincaré-Miranda Theorem. JSTOR. http://www.jstor.org

[43] Landesman E and A. Lazer A. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.

[44] Leuchtag H. R. A family of differential equations arising from multi-ion electrodiffusion, J. Math. Phys., 22, 1317-1320 (1981).

[45] Leray, L. and Schauder, J. Topologie et equations fonctionnelles. Ann. Ècole Norm. 51 45-78 (1934).

[46] Leug A. W. Systems of Nonlinear Partial Differential Equations. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands (1989).

[47] Li H. J., Du Ch. Existence of positive periodic solutions for a generalized Nicholson's blowflies model. Journal of Computational and Applied Mathematics 221 (2008) 226-233.

[48] Lloyd N. Degree Theory. cambrige University. Press. Cambrige. 1978.

[49] Long F., Yang M. Positive Periodic Solutions of Delayed Nicholson's Blowflies Model with a Linear Harvesting Term. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (2011), 41, pp 1-11.

[50] Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, volume 40 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Harvey Mudd College, Claremont, Calif., June (1977) 9 - 15.

[51] Mawhin J. The legacy of Pierre-Francois Verhulst and Vito Volterra in population dynamics, en "The firs 60 yeras of nonlinear analysis of J Mawhin" . 147-160. World Sci. Publ. River Edge. NJ 2004.

[52] Mawhin J. Landesman-Lazer conditions for boundary value problems: A nonlinear version of resonance. Bol. de la Sociedad Española de Mat. Aplicada 16 (2000), 45-65.

[53] Mawhin J., Gaines R. Coincidence degree and Nonlinear Differential Equations Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlangvalue. Berlin - Heidelberg - New York 1977.

[54] May R. M.. Stability and complexity in model ecosystems. Princeton University Press, 1975.

[55] Milnor, J. W. Topology From the Differentiable viewpoint. The University Press of Virginia Charlorresville. (1965).

[56] Miranda C., ŞUn Š osservazione su un teorema di Brouwer,Ť Bollettino dellŠUnione Matematica Italiana, vol. 3, pp. 5Ű7, 1940.

[57] M. Nagumo: Uber die differentialgleichung $y'' = f(t, y, y')$. Proc. Phys-Math. Soc. Japan 19 (1937), 861-866.

[58] Nagumo, M. A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis. Amer. J. Math. 73 485-496 (1951).

[59] Nagumo, M. Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. 73 497-511 (1951).

[60] Nicholson A. J. An outline of the dinamics of animal populations. Austral, J, Zool 2 (1954) 9-25

[61] Nirenberg L., Generalized degree and nonlinear problems, Contributions to nonlinear functional analysis, Ed. E. H. Zarantonello, Academic Press New York (1971), 1-9.

[62] Ortega R. and Sanchez L. Periodic solutions of forced oscillators with serveral degrees of freedom, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 308-318

[63] Ortega R. y Ward Jr. J.R. A semilinear Eliptic System with vanishing nolinearities. Proceedings of the Fourth international Conference on Dynamical System and Differential Equations (2002) 688 - 693.

[64] O'Regan D. Solvability of some singular boundary value problems on the semi-infinite intevral, Can. J. Math. 48 (1) (1996) 143-158.

[65] Painlevé P. Acta Math. 25, 1 (1902).

[66] Plank M. Amm Phys. Chem. 39, 161 (1890)

[67] Poincaré H. Sur les courbes définies par une équation différentielle. IV. J. Math. Pures Appl. 85 (1986) 151-217.

[68] Popov V. M. Pointwise degeneracy f linear time-invariant, delay-differential equations, J. Differential Equations 11 (1972) 541-561 MR 45 5515

[69] Przeradzki B. A new continuation method for the study of nonlinear equations at resonance, J. Math. Anal. Appl. 180 No 2 (1993) 553-565.

[70] Rabier P. J., Stuart C.A. A Sobolev space approach to boundary-value problems on the half-line. Comm. in Contemp. Math. 7 No.1 (2005) 1-36.

[71] Rothe, E. H. Introduction to Various Aspects of Degree theory in Banach Spaces. American Mathematical Society. Number 23. providence, Rhode Island. (1984).

[72] Ruiz D. and Ward Jr. J. R., Some notes on periodic systems with linear part at resonance, Discrete and Continuous Dynamical Systems 11 (2004), 337-350.

[73] Sandor J., D. Mitrinović y Crstici. Handbook of Number Theory. springer. Dordrecht

[74] Schlögl R 1954Z. Phys. Chem.1305

[75] Schöfer Uwe. A Fixed Point Theorem Based on Miranda. Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications Volume 2007, Article ID 78706, 6pages doi:10.1155/2007/78706

[76] Scorza Dragoni G.. Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale de secondo ordine. Giornale di Mat. (Battaglini) 69 (1931), 77-112.

[77] Shimanov S. N. On stability in the critical case of a zero root for system with time lag, J. Appl. Math. Mech. 24 653-668 MR 22 - 9697

[78] Siegberg, H. W Brouwer degree; history and numerical computation. (Sympos, Fixes point algorithms and complementarity problem. Univ. of Shouthampton, North-Holland 389-411 (1980).

[79] So J., Yu S. Global attractivity and uniform persistence in Nicholson's blowflies, Diff. Eqns. Dynam. Syst. 2 (1) (1994) 11-18

[80] Szymańska, K. Resonant problem for some second-order differential equation on the half-line. Electronic Journal of Differential Equations Vol. 2007(2007), $N°$ 160, pp. 1-9.

[81] Thompson H.B, Existence for a Two Point Boundary Value Problems arising in electrodiffusion Acta Mathematica Scientia. 8 (1988) 4, 373 - 387

[82] Thompson H. B. Existence for Two-Point Boundary Value Problems in Two Ion Electrodiffusion, Journal of Mathematical Analysis an Applications 184, No. 1 (1994) 82-94.

[83] Wall C.T.C A geometric introduction to topology. Dover Publications, Inc. New York. 1993.

[84] Wang L., Wang W., Chen. Existence and exponential stability of positive almost periodic solution for Nicholson-type delay system. Nonlinear Anal. Real Word Appl. 12 (4) (2011) 1938-1949.

[85] Winston E., Yorke J. Linear delay differential equations whose solutions become identicallly zero, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 14 (1969) 885-887 MR 40 7603

[86] Wright E. M. A functional equation in the heuristic theory of primes. Math. Gazette 45 (1961) 15-16.

[87] Xi. Lu and W. Li. Existence and uniqueness of positive periodic solutions of funtional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 293 (2004) 28-39

[88] Xingguo Liu, Junxia Meng. The positive almost periodic solution for Nicholson-type delay systems whit linear harvesting terms. Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 3289-3298.

[89] Yosida K. Lectures on differential and Integral Equations. Interscience Publishers, Inc. New York (1960)

[90] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applicatons. I: Fixed-Point Theorems. Springer (1992).

[91] Qiyuan Zhou. The positive periodic solution for Nicholson-type dely system whit linear harvesting terms. Applied Mathematical Modelling. 37 (2013) 5581-5590.

Index