Taller: Introducción a las Relaciones de Recurrencia.

Déboli Alberto.

Departamento de Matemática.
F.C.E. y N. Universidad de Buenos Aires.

Semana de la Enseñanza de la Ciencia.
Buenos Aires 15 de julio de 2015. Argentina.

Esquema de la presentación.

1. Introducción.
2. Algunos ejemplos elementales.
3. Caso general.
4. Algunos ejemplos clásicos
   - La sucesión de Fibonacci.
   - La suma de los n primeros cuadrados, cubos, $\cdots$ de números naturales.
5. Actividades.
6. Bibliografía.

Esquema de la presentación.

1. Introducción.
2. Algunos ejemplos elementales.
3. Caso general.
4. Algunos ejemplos clásicos
   - La sucesión de Fibonacci.
   - La suma de los n primeros cuadrados, cubos, $\cdots$ de números naturales.
5. Actividades.
6. Bibliografía.

Esquema de la presentación.

1. Introducción.
2. Algunos ejemplos elementales.
3. Caso general.
4. Algunos ejemplos clásicos
   - La sucesión de Fibonacci.
   - La suma de los n primeros cuadrados, cubos, $\cdots$ de números naturales.
5. Actividades.
6. Bibliografía.

Esquema de la presentación.

1. Introducción.
2. Algunos ejemplos elementales.
3. Caso general.
4. Algunos ejemplos clásicos
   - La sucesión de Fibonacci.
   - La suma de los n primeros cuadrados, cubos, $\cdots$ de números naturales.
5. Actividades.
6. Bibliografía.

Esquema de la presentación.

1. Introducción.
2. Algunos ejemplos elementales.
3. Caso general.
4. Algunos ejemplos clásicos
   - La sucesión de Fibonacci.
   - La suma de los n primeros cuadrados, cubos, $\cdots$ de números naturales.
5. Actividades.
6. Bibliografía.

Esquema de la presentación.

1. Introducción.
2. Algunos ejemplos elementales.
3. Caso general.
4. Algunos ejemplos clásicos
   - La sucesión de Fibonacci.
   - La suma de los n primeros cuadrados, cubos, $\cdots$ de números naturales.
5. Actividades.
6. Bibliografía.

A grandes rasgos.

- Los procesos recursivos son frecuentes en el pensamiento humano; en la base de los mismos se encuentra el acto de la repetición.
- Usualmente observamos que si repetimos el mismo acto, bajo determinadas condiciones, obtenemos el mismo resultado pero éste no es el rasgo fundamental de la recursión en el contexto considerado aquí.
- El acto de repetir lo mismo genera una novedad, algo distinto.

A grandes rasgos.

- Los procesos recursivos son frecuentes en el pensamiento humano; en la base de los mismos se encuentra el acto de la repetición.
- Usualmente observamos que si repetimos el mismo acto, bajo determinadas condiciones, obtenemos el mismo resultado pero éste no es el rasgo fundamental de la recursión en el contexto considerado aquí.
- El acto de repetir lo mismo genera una novedad, algo distinto.

A grandes rasgos.

- Los procesos recursivos son frecuentes en el pensamiento humano; en la base de los mismos se encuentra el acto de la repetición.
- Usualmente observamos que si repetimos el mismo acto, bajo determinadas condiciones, obtenemos el mismo resultado pero éste no es el rasgo fundamental de la recursión en el contexto considerado aquí.
- El acto de repetir lo mismo genera una novedad, algo distinto.

- Muchos algoritmos se basan en un proceso recursivo; es conocido por ejemplo la definición recursiva del concepto de determinante de una matriz.
- Una sucesión (a_n) se dice que es recurrrente de orden k si existen k números $a_1, a_2, \cdots, a_k$ de forma tal que a partir del término $k+1$ todos los términos de la sucesión se pueden obtener a partir de los k anteriores mediante alguna relación.
- Como se ve, la palabra recurrencia indica que para obtener el siguiente término hay que recurrir a los anteriores a través de una relación determinada
- Comenzaremos intuitivamente dando algunos ejemplos en los que dada una sucesión (a_n) podemos expresarla recursivamente.

- Muchos algoritmos se basan en un proceso recursivo; es conocido por ejemplo la definición recursiva del concepto de determinante de una matriz.
- Una sucesión (a_n) se dice que es recurrrente de orden k si existen k números $a_1, a_2, \cdots, a_k$ de forma tal que a partir del término $k+1$ todos los términos de la sucesión se pueden obtener a partir de los k anteriores mediante alguna relación.
- Como se ve, la palabra recurrencia indica que para obtener el siguiente término hay que recurrir a los anteriores a través de una relación determinada
- Comenzaremos intuitivamente dando algunos ejemplos en los que dada una sucesión (a_n) podemos expresarla recursivamente.

- Muchos algoritmos se basan en un proceso recursivo; es conocido por ejemplo la definición recursiva del concepto de determinante de una matriz.
- Una sucesión (a_n) se dice que es recurrrente de orden k si existen k números $a_1, a_2, \cdots, a_k$ de forma tal que a partir del término $k+1$ todos los términos de la sucesión se pueden obtener a partir de los k anteriores mediante alguna relación.
- Como se ve, la palabra recurrencia indica que para obtener el siguiente término hay que recurrir a los anteriores a través de una relación determinada
- Comenzaremos intuitivamente dando algunos ejemplos en los que dada una sucesión (a_n) podemos expresarla recursivamente.

- Muchos algoritmos se basan en un proceso recursivo; es conocido por ejemplo la definición recursiva del concepto de determinante de una matriz.
- Una sucesión (a_n) se dice que es recurrrente de orden k si existen k números $a_1, a_2, \cdots, a_k$ de forma tal que a partir del término $k+1$ todos los términos de la sucesión se pueden obtener a partir de los k anteriores mediante alguna relación.
- Como se ve, la palabra recurrencia indica que para obtener el siguiente término hay que recurrir a los anteriores a través de una relación determinada
- Comenzaremos intuitivamente dando algunos ejemplos en los que dada una sucesión (a_n) podemos expresarla recursivamente.

La sucesión de números naturales.

- Consideremos la sucesión fundamental de los números naturales $a_n := n$ y observemos que $a_{n+1} = a_n + 1$
- Análogamente tenemos $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ de manera que restando miembro a miembro ambas ecuaciones

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n.$$

- Luego la sucesión de los números naturales satisface la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0 \rightsquigarrow \text{ley de recurrencia} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \rightsquigarrow \text{condición inicial} \end{cases} \tag{1}$$

La sucesión de números naturales.

- Consideremos la sucesión fundamental de los números naturales $a_n := n$ y observemos que $a_{n+1} = a_n + 1$
- Análogamente tenemos $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ de manera que restando miembro a miembro ambas ecuaciones

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n.$$

- Luego la sucesión de los números naturales satisface la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0 \rightsquigarrow \text{ley de recurrencia} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \rightsquigarrow \text{condición inicial} \end{cases} \tag{1}$$

La sucesión de números naturales.

- Consideremos la sucesión fundamental de los números naturales $a_n := n$ y observemos que $a_{n+1} = a_n + 1$
- Análogamente tenemos $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ de manera que restando miembro a miembro ambas ecuaciones

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n.$$

- Luego la sucesión de los números naturales satisface la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0 \rightsquigarrow \text{ley de recurrencia} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \rightsquigarrow \text{condición inicial} \end{cases} \tag{1}$$

La progresión aritmética.

- Consideremos la sucesión $a_n = d + nc,\ \ n \in \mathbb{N}$ con c y d constantes dadas.
- En este caso vemos que $a_1 = d + c$, $a_2 = d + 2c = a_1 + c$, $a_3 = d + 3c = a_2 + d\ \cdots$ de manera que

$$a_{n+1} = a_n + c, \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + c$$

- Luego restando obtenemos una relación de recurrencia lineal de segundo orden homogénea

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = d, a_1 = c + d \end{cases} \tag{2}$$

La progresión aritmética.

- Consideremos la sucesión $a_n = d + nc, \ n \in \mathbb{N}$ con c y d constantes dadas.
- En este caso vemos que $a_1 = d + c$, $a_2 = d + 2c = a_1 + c$, $a_3 = d + 3c = a_2 + d \ \cdots$ de manera que

$$a_{n+1} = a_n + c, \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + c$$

- Luego restando obtenemos una relación de recurrencia lineal de segundo orden homogénea

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = d, a_1 = c + d \end{cases} \tag{2}$$

La progresión aritmética.

- Consideremos la sucesión $a_n = d + nc, \ n \in \mathbb{N}$ con c y d constantes dadas.
- En este caso vemos que $a_1 = d + c$, $a_2 = d + 2c = a_1 + c$, $a_3 = d + 3c = a_2 + d \ \cdots$ de manera que

$$a_{n+1} = a_n + c, \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + c$$

- Luego restando obtenemos una relación de recurrencia lineal de segundo orden homogénea

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = d, a_1 = c + d \end{cases} \tag{2}$$

La progresión geométrica.

- Consideremos la sucesión dada por $a_n = cr^n$ con c y r constantes dadas (r es la razón geométrica).
- En este caso tenemos $a_1 = cr$, $a_2 = cr^2 = ra_1$, $a_3 = cr^3 = ra_2 \cdots$ de donde se deduce que

$$a_n = ra_{n-1}.$$

- Luego se tiene la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n \ n \geq 0 \\ a_0 = c \end{cases} \tag{3}$$

La progresión geométrica.

- Consideremos la sucesión dada por $a_n = cr^n$ con c y r constantes dadas (r es la razón geométrica).
- En este caso tenemos $a_1 = cr$, $a_2 = cr^2 = ra_1$, $a_3 = cr^3 = ra_2 \ \cdots$ de donde se deduce que

$$a_n = ra_{n-1}.$$

- Luego se tiene la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n \ n \geq 0 \\ a_0 = c \end{cases} \tag{3}$$

La progresión geométrica.

- Consideremos la sucesión dada por $a_n = cr^n$ con c y r constantes dadas (r es la razón geométrica).
- En este caso tenemos $a_1 = cr$, $a_2 = cr^2 = ra_1$, $a_3 = cr^3 = ra_2 \ \cdots$ de donde se deduce que

$$a_n = ra_{n-1}.$$

- Luego se tiene la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n \ \ n \geq 0 \\ a_0 = c \end{cases} \tag{3}$$

- Los ejemplos dados son casos particulares de relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes es decir

$$a_{n+k} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots c_k a_k, \;\; n \geq 1.$$

- Ahora veremos algunos ejemplos de otro tipo

- Los ejemplos dados son casos particulares de relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes es decir

$$a_{n+k} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots c_k a_k, \;\; n \geq 1.$$

- Ahora veremos algunos ejemplos de otro tipo

Un ejemplo de ecuación recurrente lineal de primer orden homogénea con coeficientes variables.

El factorial.

- Sabemos que

$$a_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

es el cantidad total de manera distintas de ordenar n objetos diferentes. Se conviene en definir $0! = 1$.

- En este caso es claro que $a_{n+1} = (n+1)a_n$ de manera que

$$\begin{cases} a_{n+1} - (n+1)a_n = 0, \ \ n \geq 0 \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Un ejemplo de ecuación recurrente lineal de primer orden homogénea con coeficientes variables.

El factorial.

- Sabemos que

$$a_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

es el cantidad total de manera distintas de ordenar n objetos diferentes. Se conviene en definir $0! = 1$.

- En este caso es claro que $a_{n+1} = (n+1)a_n$ de manera que

$$\begin{cases} a_{n+1} - (n+1)a_n = 0, \ \ n \geq 0 \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

No siempre es tan inmediato obtener el término general de una sucesión recursiva.

$$\begin{cases} a_{n+2} := a_{n+1} \cdot \ a_n, \quad n \geq 0 \\ a_0 = 1, \ a_1 = 2 \end{cases} \tag{5}$$

es decir $a_2 = a_1 \cdot a_0 = 2 \cdot 1 = 2$, $a_3 = a_2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2 = 4$, $a_4 = a_3 \cdot a_2 = 4 \cdot 2 = 8$, $a_5 = a_4 \cdot a_3 = 8 \cdot 4 = 32$, $a_6 = 256$, etc.

Es claro que cada término de la sucesión es una potencia de 2,

$$1 = 2^0 \ \ 2^1 \ 2^1 \ 2^2 \ \ 2^3 \ \ 2^5 \ \ 2^8 \ \ \cdots$$

y se ve que la sucesión de exponentes es a su vez recursiva: cada exponente es, a partir de a_2 la suma de los dos anteriores.

Otro ejemplo no lineal

.

$$\begin{cases} a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \; n \geq 1 \\ a_1 = \sqrt{2}. \end{cases} \tag{6}$$

Esta sucesión genera los siguiente valores

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \; a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \; \cdots$$

$$(a_n) \text{ es acotada} \quad 0 \leq a_n \leq 2 \text{ monótona creciente}$$

y

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$$

Un algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número $a > 0$

La sucesión recursiva

$$\begin{cases} a_n := \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{a}{a_{n-1}}\right) \\ a_0 > 0 \end{cases} \tag{7}$$

puede utilizarse como instrumento de aproximación a la raíz cuadrada de a:

$$(a_n) \text{ es acotada } \sqrt{a} \leq a_n \leq a_1 \text{ monótona decreciente}$$

y

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{a}.$$

Definición general.

Dada una función $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ y k valores a priori $a_1, a_2, \cdots a_k$ definimos una relación de recurrencia de orden $k \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$\begin{cases} a_{n+k} := F(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \cdots, a_n), & n \geq 1 \rightsquigarrow \text{ley de recurrencia} \\ a_1, a_2, \cdots a_k \rightsquigarrow \text{condiciones iniciales} \end{cases} \tag{8}$$

- Planteamos el problema siguiente: dada una sucesión definida recursivamente, hallar una expresión para el término general n-ésimo.
- Nosotros nos centramos en un caso muy particular de relaciones de recurrencia: lineales homogéneas y de coeficientes constantes:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_k) := c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_k x_k$$

donde $c_1, c_2. \cdots, c_k$ cosntantes y en particular, para fijar ideas, en el caso $k = 2$.

$$\begin{cases} a_{n+2} := c_1 a_{n+1} + c_0 a_n, \quad n \geq 1 \quad (*) \\ a_0, a_1 \end{cases} \tag{9}$$

- Planteamos el problema siguiente: dada una sucesión definida recursivamente, hallar una expresión para el término general n-ésimo.
- Nosotros nos centramos en un caso muy particular de relaciones de recurrencia: lineales homogéneas y de coeficientes constantes:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_k) := c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_k x_k$$

donde $c_1, c_2. \cdots, c_k$ cosntantes y en particular, para fijar ideas, en el caso $k = 2$.

$$\begin{cases} a_{n+2} := c_1 a_{n+1} + c_0 a_n, \quad n \geq 1 \quad (*) \\ a_0, a_1 \end{cases} \tag{9}$$

Algunos hechos básicos

1. La ecuación del problema (9) siempre tiene solución al menos la trivial: $a_n = 0, \ n \in \mathbb{N}$
2. El conjunto de todas las soluciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2.
   Si (u_n) y (v_n) son solucioens de (*) entonces
   - $z_n = u_n + v_n, \ n \in \mathbb{N}$ es solución.
   - $w_n = ku_n, \ n \in \mathbb{N}$ es solución para cualquier $k \in \mathbb{R}$. En particular esto dice que existen infinitas soluciones.
3. Si encontramos dos soluciones (u_n) y (v_n) linealmente independientes tendremos una base de soluciones; o sea que cualquier solución (z_n) de (*) será una combinación lineal de (u_n) y (v_n)
$$z_n = c_1 u_n + c_2 v_n, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Algunos hechos básicos

1. La ecuación del problema (9) siempre tiene solución al menos la trivial: $a_n = 0, \ n \in \mathbb{N}$
2. El conjunto de todas las soluciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2.
   Si (u_n) y (v_n) son solucioens de (*) entonces
   - $z_n = u_n + v_n, \ n \in \mathbb{N}$ es solución.
   - $w_n = ku_n, \ n \in \mathbb{N}$ es solución para cualquier $k \in \mathbb{R}$. En particular esto dice que existen infinitas soluciones.
3. Si encontramos dos soluciones (u_n) y (v_n) linealmente independientes tendremos una base de soluciones; o sea que cualquier solución (z_n) de (*) será una combinación lineal de (u_n) y (v_n)
   $$z_n = c_1 u_n + c_2 v_n, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caracterización de la solución general de la ecuación del problkema (9)

- Si una sucesión de la forma $a_n = cr^n \neq 0$ es solución de la ecuación (9) entonces

$$cr^{n+2} - c_1 cr^{n+1} - c_0 r^n = cr^n \left(r^2 - c_1 r - c_0\right) = 0$$

es decir

$$r^2 - c_1 r - c_0 = 0.$$

- Esta ecuación se llama **ecuación característica** de la relación de recurrencia.
- En función de las raices de esta ecuación tenderemos un sistema completo de soluciones.

Caracterización de la solución general de la ecuación del problkema (9)

- Si una sucesión de la forma $a_n = cr^n \neq 0$ es solución de la ecuación (9) entonces

$$cr^{n+2} - c_1 cr^{n+1} - c_0 r^n = cr^n \left(r^2 - c_1 r - c_0\right) = 0$$

es decir

$$r^2 - c_1 r - c_0 = 0.$$

- Esta ecuación se llama **ecuación característica** de la relación de recurrencia.
- En función de las raices de esta ecuación tenderemos un sistema completo de soluciones.

Caracterización de la solución general de la ecuación del problkema (9)

- Si una sucesión de la forma $a_n = cr^n \neq 0$ es solución de la ecuación (9) entonces

$$cr^{n+2} - c_1 cr^{n+1} - c_0 r^n = cr^n \left(r^2 - c_1 r - c_0\right) = 0$$

es decir

$$r^2 - c_1 r - c_0 = 0.$$

- Esta ecuación se llama **ecuación característica** de la relación de recurrencia.
- En función de las raices de esta ecuación tenderemos un sistema completo de soluciones.

- Caso 1. $\Delta = c_1^2 + 4c_0 > 0$. Tenemos dos raices reales distintas r_1 y r_2 y la solución general es de la forma

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

donde las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales.

- Caso 2. $\Delta = c_1^2 + 4c_0 = 0$. Una raíz real doble r y la solución general es de la forma

$$a_n = Ar^n + Bnr^n = r^n(A + Bn)$$

y de nuevo las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales.

- Caso 1. $\Delta = c_1^2 + 4c_0 > 0$. Tenemos dos raices reales distintas r_1 y r_2 y la solución general es de la forma

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

donde las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales.

- Caso 2. $\Delta = c_1^2 + 4c_0 = 0$. Una raíz real doble r y la solución general es de la forma

$$a_n = Ar^n + Bnr^n = r^n(A + Bn)$$

y de nuevo las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales.

- Caso 3. $\Delta = c_1^2 + 4c_0 < 0$. Las raices son complejas conjugadas $r_1 = a + ib$ y $r_2 = a - ib$ es decir

$$r_1 = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)),\ r_2 = \rho(cos(\theta) - isen(\theta))$$

donde $\rho := \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ y $\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- Usando el teorema de Moivre

$$z^n = \rho^n(cos(n\theta) + i\ sen(n\theta)) \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} a_n &= Ar_1^n + Br_2^n = A(a+ib)^n + B(a-ib)^n = \\ &A[\rho^n\ (cos(n\theta) + i\ sen(n\theta))] + B[\rho^n(cos(n\theta) - i\ sen(n\theta))] = \\ &\rho^n[(A+B)\ cos(n\theta) + (A-B)i\ sen(n\theta)] = \\ &\rho^n[K_1\ cos(n\theta) + K_2\ sen(n\theta)] \end{aligned} \tag{10}$$

donde $K_1 = A + B$ y $K_2 = (A - B)i$ son constantes

- Caso 3. $\Delta = c_1^2 + 4c_0 < 0$. Las raices son complejas conjugadas $r_1 = a + ib$ y $r_2 = a - ib$ es decir

$$r_1 = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)),\ r_2 = \rho(cos(\theta) - isen(\theta))$$

donde $\rho := \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ y $\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- Usando el teorema de Moivre

$$z^n = \rho^n(cos(n\theta) + i\ sen(n\theta)) \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} &a_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(a+ib)^n + B(a-ib)^n = \\ &A[\rho^n\ (cos(n\theta) + i\ sen(n\theta))] + B[\rho^n(cos(n\theta) - i\ sen(n\theta))] = \\ &\rho^n[(A+B)\ cos(n\theta) + (A-B)i\ sen(n\theta)] = \\ &\rho^n[K_1\ cos(n\theta) + K_2\ sen(n\theta)] \end{aligned} \tag{10}$$

donde $K_1 = A + B$ y $K_2 = (A - B)i$ son constantes

- Más precisamente, las constantes K_1 y K_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_0 := [K_1 \ cos(0 \ \theta) + K_2 \ sen(0 \ \theta)] = K_1 \in \mathbb{R} \\ a_1 = \rho[K_1 \ cos(\theta) + K_2 \ sen(\theta)] \end{cases} \tag{11}$$

de donde $k_2 = \frac{a_1 - \rho \ K_1 \ cos(\theta)}{\rho \ sen(\theta)}$

- Observamos que las constantes A y B son números complejos pero las constantes K_1 y K_2 son reales.

- Más precisamente, las constantes K_1 y K_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_0 := [K_1 \ cos(0 \ \theta) + K_2 \ sen(0 \ \theta)] = K_1 \in \mathbb{R} \\ a_1 = \rho[K_1 \ cos(\theta) + K_2 \ sen(\theta)] \end{cases} \tag{11}$$

de donde $k_2 = \frac{a_1 - \rho \ K_1 \ cos(\theta)}{\rho \ sen(\theta)}$

- Observamos que las constantes A y B son números complejos pero las constantes K_1 y K_2 son reales.

La sucesión de Fibonacci

- Un ejemplo importante de relación por recurrencia es la sucesión de Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

- Esta sucesión tienen su origen en un problema artificial (problema recreativo: virtual crecimeinto poblacional de conejos bajo determinadas condicones iniciales) y no obstante se vincula con otros problemas que han mantenido la atención durante mucho tiempo de matemáticos; por ejemplo, con el númro de oro.

La sucesión de Fibonacci

- Un ejemplo importante de relación por recurrencia es la sucesión de Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

- Esta sucesión tienen su origen en un problema artificial (problema recreativo: virtual crecimeinto poblacional de conejos bajo determinadas condicones iniciales) y no obstante se vincula con otros problemas que han mantenido la atención durante mucho tiempo de matemáticos; por ejemplo, con el númro de oro.

- La sucesión de Fibonacci se define por recursión así

$$\begin{cases} a_{n+2} := a_n + a_{n+1} \;\; n \geq 1 \rightsquigarrow \text{ckley de recurrencia} \\ a_0 = 1, \;\; a_1 = 1 \rightsquigarrow \text{condiciones iniciales} \end{cases} \tag{12}$$

y la soclución general es de la forma

$$a_n := A\ r_1^n + B\ r_2^n, \quad A, B \text{ constantes}$$

donde r_1, r_2 son las raices de la ecuación característica de (12)

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$a_n : A\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

- Las constantes A, B se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 1 = a_0 = A + B \\ 1 = a_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \tag{13}$$

- $$A = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = \frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

  Luego

- $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{14}$$

- Observemos que de acuerdo a la construcción realizada $a_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

- Las constantes A, B se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 1 = a_0 = A + B \\ 1 = a_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \tag{13}$$

- $$A = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = \frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

  Luego

- $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{14}$$

- Observemos que de acuerdo a la construcción realizada $a_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

- Las constantes A, B se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 1 = a_0 = A + B \\ 1 = a_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \tag{13}$$

- $$A = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = \frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

  Luego

- $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{14}$$

- Observemos que de acuerdo a la construcción realizada $a_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

- Las constantes A, B se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 1 = a_0 = A + B \\ 1 = a_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \tag{13}$$

- $$A = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = \frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

  Luego

- $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{14}$$

- Observemos que de acuerdo a la construcción realizada $a_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Una propiedad de la sucesión de Fibonacci: el número de oro

- La sucesión de los cocientes de dos términos sucesivos de Fibonacci converge al número de oro.
- Si ponemos en (14) $\alpha := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\beta := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{n} - \beta^{n}\right]} = \frac{\alpha^n\left[\alpha - \beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]}{\alpha^n\left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]} \to \alpha$$

si $n \to +\infty$ pues como $|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$ entonces $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \to 0$.

Una observación.

Observamos que los cocientes de términos consecutivos de (12)

$$x_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$$

definen una sucesión recursiva

$$\begin{cases} x_n := 1 + \frac{1}{x_{n-1}}, \ n \geq 2 \\ \\ x_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases} \tag{15}$$

La sucesión (x_n) alterna sus valores alrededor del número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988\cdots$, que se puede expresar como una fracción continua

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1{,}666666666666667\cdots$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 1{,}600000000000000\cdots$$

$$\cdots$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

Theorem

[Burden, pag. 62] Si $f : [a, b] \to [a, b]$ es derivable y existe alguna constante $0 < \alpha < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \alpha$ para todo $x \in (a, b)$ entonces para cualquier $x_1 \in (a, b)$ el esquema de iteración

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}), \ n \geq 2 \\ x_1 \end{cases} \tag{16}$$

converge a $p \in [a, b]$, único punto fijo de f en $[a, b]$.

El diagrama (ver figura (3)) ilustra el proceso de iteración para $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

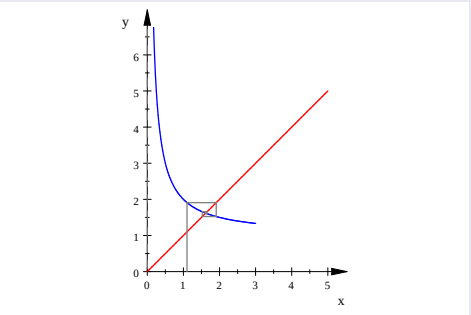

Figura: 3. Esquema del proceso de iteración.

Mediante el teorema 1 se prueba que (15) converge al único punto fijo positivo de $f = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ que efectivamente es ϕ.; para ello basta con elegir $[a, b] = [1{,}5, 2]$ y $\alpha = \frac{5}{9}$.

En efecto, $x = g(x) = f(x)$ si y sólo si $x = 1 + \frac{1}{x}$ o sea

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Luego (ver figura (2)) como $x_n > 0,\ n \in \mathbb{N}\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

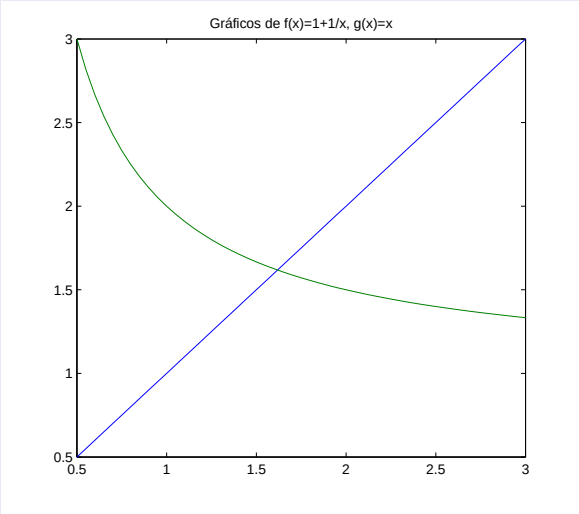

Figura: 2. Los gráficos se intersecan en $x = \phi$

Es bien conocida que la suma de los n primeros números naturales

$$s_n := 1 + 2 + \cdots + n.$$

Esto se deduce fácilmente, por ejemplo observamos que también

$$s_n := n + n - 1 + \cdots + 1$$

de manera que sumando miembro a miembro

$$2s_n = n(n+1)$$

de donde

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alternativamente obsevamos que

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - n^2 &= 2n+1 \\
n^2 - (n-1)^2 &= 2(n-1)+1 \\
(n-1)^2 - (n-2)^2 &= 2(n-2)+1 \\
&\cdots \\
3^2 - 2^2 &= 2\ 2+1 \\
&\cdots \\
2^2 - 1^2 &= 2\ 1+1
\end{aligned} \tag{17}$$

$$(n+1)^2 - 1 = 2(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) + n = 2s_n + n$$

o sea

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esta fórmula se puede obtener via un proceso de recursión; recordamos que $a_n = n$ satisface la recurrencia

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 \quad (**)$$

de orden 2. Ahora consideremos la sucesión de sumas parciales

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

y observamos

$$a_1 = s_1, \; a_2 = s_2 - s_1, \; a_3 = s_3 - s_2, \; \cdots a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Ahora reemplazemos en (**)

$$s_{n+2} - s_{n+1} - 2(s_{n+1} - s_n) + s_n - s_{n-1} = 0$$

es decir

$$s_{n+2} - 3s_{n+1} + 3s_n - s_{n-1} = 0$$

o bien

$$s_{n+3} - 3s_{n+2} + 3s_{n+1} - s_n = 0.$$

La ecuación característica en este caso es

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

que tiene una única raíz triple $r = 1$; luego la solución general tiene la forma

$$s_n = c_1 + nc_2 + n^2 c_3.$$

Finalmente determinamos las constantes a partir de los valores iniciales $s_1 = 1$ $s_2 = 3$ y $s_3 = 6$. Resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 3 \\ c_1 + 3c_2 + 9c_3 = 6 \end{cases} \tag{18}$$

obtenemos $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$ de donde

$$s_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- La torre de Hanoi (3). Este juego consiste en pasar cinco discos ordenados de mayor a menor diámetro ubicados sobre el mástil 1 al mástil 3 de manera que queden en el mismo orden, respetando las siguientes reglas: 1. se puede pasar de un mástil a otro un disco por vez y 2 ningún disco puede ubicarse por encima de otro de menor diámetro.

  El juego se generaliza para n discos y hay una estrategia óptima en cuanto al número de movimientos que se requieren para lograr el objetivo en función de la cantidad de discos.

  Suponga que la cantidad de movimientos que se requieren para n discos es a_n. Determine una relación de recurrencia que defina a_{n+1} en función de a_n y resuélvala definiendo $a_1 := 1$.

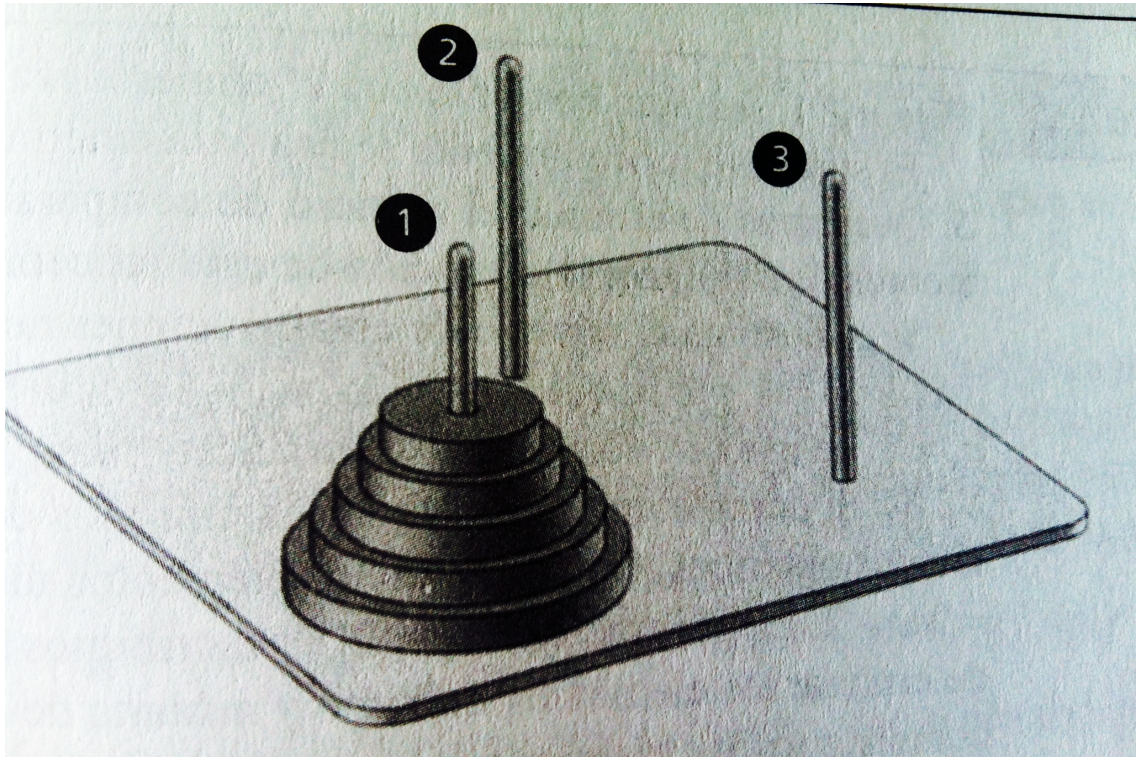

Figura: Torre de Hanoi.

- Dada la suma

$$s_n := 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

definimos los números triangulares

$$T_n = s_1 + s_2 + \cdots s_n.$$

Observemos que $T_{n+1} = T_n + s_{n+1}$ de manera que

$$\begin{cases} T_{n+1} - T_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ T_1 = 1 \end{cases} \tag{19}$$

a Denotando la solución general con T_n^H resuelva la ecuación homogénea asociada a (19)

$$T_{n+1} - T_n = 0.$$

b Determine las constantes c_1 c_2 y c_3 para que

$$T_n^P = c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$$

sea una solución particular de la ecuación dada en (19).

c Resuelva el problema (19) considerando

$$T_n = T_n^H + T_n^P.$$

- Demostrar que

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\star)$$

  a Usando un argumento similar al dado en (17).
  b Cómo sería la fórmula para la suma de los primeros n cubos ...
  c Obtenga la fórmula $(\star)$ usando una adecuada relación de recurrencia como se argumentó a continuación de (17).

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea a_n la cantidad total de sucesiones de ceros y unos de longitud n. Encuentre una relación de recurrencia de orden dos y resuélvala considerando que $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$.
  Sug. Observe que $a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}$ donde $a_n^{(0)}$ es la cantidad de sucesiones de longitud n que terminan en un cero y $a_n^{(1)}$ las que terminan en uno y observe también que $a_{n-2} = a_{n-2}^{(1)}$.

- Sea (a_n) la sucesión de números de Fibonacci
  a Probar que

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n} + a_1 - a_2$$

  y que

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - a_1.$$

  b Probar que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n = a_{n+2} - a_2.$$

c Probar que

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = a_{2n+1}$$

Sug. Usando (14) observar que

$$a_n^2 = \frac{1}{5}\left[(\alpha)^{2n} + (\beta)^{2n} - 2(-1)^n\right].$$

d Probar la siguiente identidad

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n.$$

Bibliografía

1. Burden R. L. y Faires J. D. Análisis Numérico. Cap. 2 y 7. Editorial CENGAGE. Learning. Novena Edición.
2. Grimaldi Ralph. P. Matemáticas Discreta y Combinatoria. Una Introducción con Aplicaciones. Parte 2. Cap. 10. Editorial Pearson. Prentice Hall. 1998.
3. Markushévich A.I. Lecciones populares de matemática. Sucesiones Recurrentes. Editorial MIR. Moscú 1974.

MUCHAS GRACIAS
POR LA ATENCIÓN!