Taller: Métodos de punto fijo: Una introducción a los Sistemas Dinámicos Distcretos. La Escuela va a Exactas.

Déboli Alberto.

Departamento de Matemática.
F.C.E. y N. Universidad de Buenos Aires.

Buenos Aires, 14 de julio de 2016. Argentina.

Esquema de la presentación.

Esquema de la presentación.

Esquema de la presentación.

Esquema de la presentación.

Algunos conceptos preliminares.

Punto fijo

- Decimos que p es un punto fijo de f si

$$f(p) = p$$

lo cual puede ser interpretado también como un cero de la función $h(x) = f(x) - x$. En este sentido observamos que f tiene un punto fijo en p si y sólo si el gráfico de f se corta con el gráfico de $y = x$ (la diagonal) en el punto $P = (p, p)$.

Puntos periódicos y órbitas

.

- La iteración de f a partir de un punto x_0 consiste en aplicarle a x_0 la función f en forma reiterada, más precisamente, definimos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, etc. Denotaremos con f^n la composición de f consigo misma n veces y con f^0 la identidad.
- Decimos que x es un **punto periódico de orden k** de f si $f^k(x) = x$ y k es el natural más chico con esa propiedad.
- El conjunto de todas las iteraciones de x se llama **órbita** de x

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

  Si el punto x es periódico entonces se dice que la **órbita** es **periódica** o que es un **ciclo**.

Ejemplos

- Para $f(x) = 4x(1-x)$, $x = 0$ es un punto fijo; observamos también que $f(1) = 0$ de manera que $x = 1$ no es fijo aunque después de una iteración se obtiene el punto fijo $x = 0$, por otro lado $f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f^2(\frac{1}{2}) = 0$, de manera que comenzando con $x = \frac{1}{2}$ después de dos iteraciones se otiene nuevamente el punto fijo $x = 0$. Una vez obtenido un punto fijo x las iteraciones posteriores son iguales al punto fijo x.

- Para $f(x) = -x^3$ el único punto fijo es $x = 0$

$$\mathcal{O}(0) = \{0\}$$

y Los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son periódicos de período 2

$$\mathcal{O}(1) = \{-1, 1\} = \mathcal{O}(-1).$$

La órbita del punto $x = 2$ es

$$\mathcal{O}(2) = \{2, -2^3, 2^9, -2^{27}, \cdots\}$$

- Para la función $f(x) = x$ todos los puntos son fijos y para la función $f(x) = -x$ todos los puntos salvo el cero son periódicos de período 2.

Clasificación del los puntos fijos.

Como lo observamos anteriormente toda solución de la ecuación $f(x) = x$ es un punto de intersección del gráfico de f con el gráfico de la identidad.

Para obtener un **diagrama de iteración** podemos graficar ambas curvas y comenzar ubicando el valor inicial (x_0, x_0) sobre la diagonal; luego sobre la recta $x = x_0$ encontramos el punto de la gráfica de f y sobre la recta $y = f(x_0)$ hallamos el punto sobre la diagonal en el cual la corta; ese punto es (x_1, x_1); luego se repite el procedimiento y de esta forma se obtiene **La sucesión de puntos** (x_n) generada por iteración.

Alternativas para el comportamiento de (x_n).

- **La sucesión de puntos (x_n) converge a un punto p.**
- **La sucesión no está acotada**, se va a $\pm\infty$
- Luego de una cantidad finita de pasos **se repiten indefinidamente una cantidad finita de valores.**

Alternativas para el comportamiento de (x_n).

- **La sucesión de puntos (x_n) converge a un punto p.**
- **La sucesión no está acotada**, se va a $\pm\infty$
- Luego de una cantidad finita de pasos **se repiten indefinidamente una cantidad finita de valores.**

Alternativas para el comportamiento de (x_n).

- **La sucesión de puntos** (x_n) **converge a un punto** p**.**
- **La sucesión no está acotada**, se va a $\pm\infty$
- Luego de una cantidad finita de pasos **se repiten indefinidamente una cantidad finita de valores.**

La noción de sistema dinámico discreto.

Un **sistema dinámico discreto** puede ser caracterizado como una sucesión de puntos que se obtiene a partir de cierto valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, via la composición reiterada (**iteración**) de cierta función f; el proceso puede ser escrito entonces así

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Recordando la notación empleada se tiene

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = \cdots = f^{n+1}(x_0).$$

Entre otras tópicos, es de interés estudiar el comportamiento de la suceción (x_n) cuando n tiende a infinito.

Resulados básicos

- Si (p_n) es una sucesión generada por iteración de g y existe el
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = p$$
entonces p es un punto fijo de g.
- Si $g : [a, b] \to [a, b]$ es continua entonces g tiene un punto fijo (Bolzano). (Ejejmplo $f(x) = 1 - x^2$ tiene un punto fijo en $[0, 1]$.)
- Si $g : [a, b] \to [a, b]$ tiene derivada en todo punto de $[a, b]$ y $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$ entonces g tiene un único punto fijo.

- Si $g : [a, b] \to [a, b]$ tiene derivada continua en $[a, b]$ tal que $|g'(x)| \leq K < 1$ para todo $x \in [a, b]$ entonces para todo $p_0 \in [a, b]$ $p_n = g(p_{n-1})$ converge a p, el único punto fijo de g (p **es un punto fijo atractor**). Además se prueba que

$$|p - p_n| \leq \frac{K^n |p_1 - p_0|}{1 - K}, \ n \geq 1.$$

- Por otro lado si $|g'(p)| > 1$ y $p_0 \neq p$ entonces (p_n) diverge (p **es un punto fijo repulsor.**)

- Si $g : [a,b] \to [a,b]$ tiene derivada continua en $[a,b]$ tal que $|g'(x)| \leq K < 1$ para todo $x \in [a,b]$ entonces para todo $p_0 \in [a,b]$ $p_n = g(p_{n-1})$ converge a p, el único punto fijo de g (p **es un punto fijo atractor**). Además se prueba que

$$|p - p_n| \leq \frac{K^n |p_1 - p_0|}{1-K}, \ n \geq 1.$$

- Por otro lado si $|g'(p)| > 1$ y $p_0 \neq p$ entonces (p_n) diverge (p **es un punto fijo repulsor.**)

Un ejemplo

Supongamos que una partícula se ubica inicialmente en la posición x_0 en la recta real $\mathbb{R}$ y que a cada hora es desplazada a la posición siguiente según la regla $f(x) = -x^3$ y así siguiendo ....

- Una vez desplazada de su posición inicial, retorna la partícula a su posición de origen en algún tiempo futuro?
- Obsevamos que $x_1 = f(x_0) = -x_0^3$, $x_2 = f(x_1) = -x_1^3 = x_0^9$ y es fácil comprobar (inducción) que $x_n = -(x_{n-1})^3 = \cdots = (-1)^n (x_0)^{3^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Un ejemplo

Supongamos que una partícula se ubica inicialmente en la posición x_0 en la recta real $\mathbb{R}$ y que a cada hora es desplazada a la posición siguiente según la regla $f(x) = -x^3$ y así siguiendo ....

- Una vez desplazada de su posición inicial, retorna la partícula a su posición de origen en algún tiempo futuro?
- Obsevamos que $x_1 = f(x_0) = -x_0^3$, $x_2 = f(x_1) = -x_1^3 = x_0^9$ y es fácil comprobar (inducción) que $x_n = -(x_{n-1})^3 = \cdots = (-1)^n (x_0)^{3^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Se ve que la respuesta dependerá de la posición inicial.
- Si $|x_0| > 1$ la partícula se aleja del cero tanto como se quiera y nunca regresa a su posición, $x_n \to \infty$
- Si $0 < |x_0| < 1$ entonces la partícula se acerca origen, $x_0 \to 0$, alternando sus posiciones a izquierda y derecha y nuevamiete nunca retorna a su posición.
- Finalmente si $|x_0| = 1$ las posiciones se alternan entre 1 y -1 o -1 y 1 dependiendo si $x = -1$ o $x = 1$.

- Se ve que la respuesta dependerá de la posición inicial.
- Si $|x_0| > 1$ la partícula se aleja del cero tanto como se quiera y nunca regresa a su posición, $x_n \to \infty$
- Si $0 < |x_0| < 1$ entonces la partícula se acerca origen, $x_0 \to 0$, alternando sus posiciones a izquierda y derecha y nuevamiete nunca retorna a su posición.
- Finalmente si $|x_0| = 1$ las posiciones se alternan entre 1 y -1 o -1 y 1 dependiendo si $x = -1$ o $x = 1$.

- Se ve que la respuesta dependerá de la posición inicial.
- Si $|x_0| > 1$ la partícula se aleja del cero tanto como se quiera y nunca regresa a su posición, $x_n \to \infty$
- Si $0 < |x_0| < 1$ entonces la partícula se acerca origen, $x_0 \to 0$, alternando sus posiciones a izquierda y derecha y nuevamiete nunca retorna a su posición.
- Finalmente si $|x_0| = 1$ las posiciones se alternan entre 1 y -1 o -1 y 1 dependiendo si $x = -1$ o $x = 1$.

Diagrama de fase para puntos fijos.

- Se trata de una **representación gráfica de la dinámica del sistema**; más precisamente, en función del valor inicial, se representan las trayectorias a través de flechas, indicando la orientación del movimiento.
- La idea es la siguiente: representamos en primer lugar los punto fijos sobre la recta real; luego a partir de cada valor inicial (típico) sacamos una flecha que apunte hacia el punto de convergencia.

Diagrama de fase para puntos fijos.

- Se trata de una **representación gráfica de la dinámica del sistema**; más precisamente, en función del valor inicial, se representan las trayectorias a través de flechas, indicando la orientación del movimiento.
- La idea es la siguiente: representamos en primer lugar los punto fijos sobre la recta real; luego a partir de cada valor inicial (típico) sacamos una flecha que apunte hacia el punto de convergencia.

Un ejemplo básico

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Señalamos una serie de hechos

1. Los puntos fijos de f son 0 y 1.
2. Si $0 < x < 1$ entonces $f^n(x) \to 0$
3. Si $x > 1$ o bien $x < -1$ entonces $f^n(x) \to +\infty$
4. Si $x = \pm 1$ entonces $f(\pm 1) = 1$ y por lo tanto $f^n(\pm 1) = 1$ para todo $n \geq 1$

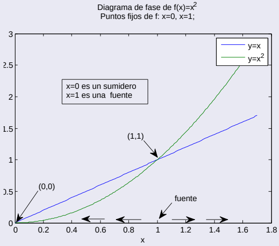
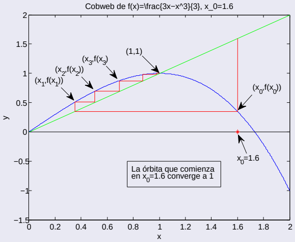


Diagrama de fase de f(x)=x2
Puntos fijos de f: x=0, x=1;
y=x
y=x2
x=0 es un sumidero
x=1 es una fuente
(1,1)
(0,0)
fuente
x

Dependencia de los valores iniciales

El siguiente ejemplo muestra que pequeños cambios en el valor inicial pueden producir grandes diferencias en la convergencia: $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$ tiene dos puntos fijos $x = 1$ y $x = -1$. Si el valor inicial es $x_0 = 1{,}6$ la órbita converge a 1 (ver gráfico) y si se comienza a iterar con $x_0 = 1{,}8$ la órbita converge a -1

Diagrama de iteración para $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$ $x_0 = 1{,}6$



El modelo exponencial discreto

- Los modelos de **crecimiento exponencial** suponen cierta tasa de crecimiento intrínseca constante r y que la población crece en cada período en esa proporción fija, es decir si x_0 es el valor inicial entonces

$$x_1 = rx_0,\ x_2 = rx_1 = r^2x_0,\ \cdots x_n = r^n x_0.$$

- Este modelo es poco realista en algunos casos; pues la escasez de recursos espacio-nutricionales, la competencia intra e interespecie, limitan el crecimiento.
- Por ejemplo si la población se incrementa en un 10 porciento cada año entonces $x_1 = x_0 + 0{,}1x_0 = (1{,}1)x_0$ la tasa es $r = 1{,}1$ y en el n-ésimo año habrá $x_n = (1{,}1)^n\ x_0$

El modelo logístico discreto

- Un modelo que permite superar esta limitación es el **modelo logístico** el cual supone que **el crecimiento es tanto proporcional a la cantidad pre-existente como a la cantidad que falta para alcanzar su máxima capacidad de carga**; proponemos en este caso

$$f(x) = rx(1 - x)$$

  suponiendo que la tasa de proporción es r y $k = 1$ es la **capacidad máxima de carga**.
- El factor $(1 - x)$ limita en este modelo el crecimiento y lo distingue del exponencial; cuando x se aproxima a la unidad el factor $(1 - x)$ se acerca a cero.

Supongamos que tenemos determinado que el máximo de carga para una cierta población es de 1000 (por ejejmplo para conejos en cierto espacio ambiente) y supongamos que $r = 1{,}112$ (una población de 100 acá representa $\frac{100}{1000}$ o sea 0,1, una población de 1000 viene representada por 1). El modelo será

$$f(x) = 1{,}112x(1-x).$$

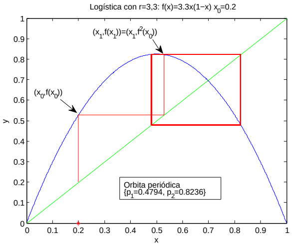
Cuando $f(1) = 0$ $f(0{,}9) \sim 0{,}1$. Si se comienza con $x_0 = 8$ conejos entonces

$x_1 = f^1(0{,}008)$	0.009
$x_2 = f^2(0{,}008)$	0.01
$x_3 = f^3(0{,}008)$	0.011
$x_4 = f^4(0{,}008)$	0.012
$x_{10} = f^{10}(0{,}008)$	0.02
$x_{20} = f^{20}(0{,}008)$	0.043
$x_{100} = f^{100}(0{,}008)$	0.101

La población crece aproximadamente al 10 porciento para tamaños pequeños de la población.

Orbita periódica de orden 2 para $f(x) = 3{,}3x(1-x)$

	f^n	f^n	f^n
0	0.2000	0.5000	0.9500
1	0.5280	0.8250	0.1568
2	0.8224	0.4764	0.4362
3	0.4820	0.8232	0.8116
4	0.8239	0.4804	0.5047
5	0.4787	0.8237	0.8249
6	0.8235	0.4792	0.4766
7	0.4796	0.8236	0.8232
8	0.8236	0.4795	0.4803
9	0.4794	0.8236	0.8237
10	0.8236	0.4794	0.4792
11	0.4794	0.8236	0.8236
12	0.8236	0.4794	0.4795
13	0.4794	0.8236	0.8236
14	0.8236	0.4794	0.479


Logística con r=3,3: f(x)=3.3x(1−x) x_0=0.2
(x_1,f(x_1))=(x_1,f^2(x_0))
(x_0,f(x_0))
Orbita periódica
{p_1=0.4794, p_2=0.8236}
y
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

La idea intuitiva del método de Newton-Raphson

- Supongamos que f' y f'' son continuas: supongamos que tenemos una aproximación inicial p_0 cerca de p raíz de f; el gráfico de f corta al eje x en el punto $(p, 0)$, luego el punto de la gráfica $(p_0, f(p_0))$ estará cerca del punto $(p, 0)$.

- Ahora consideremos la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(p_0, f(p_0))$ es decir

$$y(x) = f'(p_0)(x - p_0) + f(p_0)$$

y consideremos p_1 de forma tal que $y(p_1) = 0$ es decir

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Repitiendo este procedimiento definimos una sucesión por recurrencia, generada por iteración de $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, más precisamente

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \ n \in \mathbb{N}$$

Teorema de Newton-Raphoson

Supongamos que $f \in C^2([a,b])$ y que existe $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que la sucesión (p_n) definida por iteración de $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ converge a p cualquiera sea el dato inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$
Observar que como $f(p) = 0$ tenemos que $g(p) = p$

Iteración de Newton para el cálculo de una raíz cuadrada

Sea $a > 0$ y $p_0 > 0$ una primera aproximación de $\sqrt{a}$. Se define

$$p_k = \frac{1}{2}\left(p_{k-1} + \frac{a}{p_{k-1}}\right), \; k \geq 1$$

Entonces $p_k \to \sqrt{a}$.

Si se define $f(x) = x^2 - a$ los únicos ceros de f son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. El método de Newton conduce a

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Se observa que la sucesión es un esquema de iteración generada por g y se puede probar que converge a $\sqrt{a}$, punto fijo de g cualquiera sea la primera aproximación $p_0 > 0$

Aproximaciones de solcuiones para sistemas lineales: Jacobi

Supongamos que queremos resolver $Ax = b$ con $(det(A) \neq 0)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Podemos descomponer $A = U + L + D$ donde

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Luego el sistema puede escribirse

$$Dx = -(U+L)x + b$$

y en consecuencia podemos definir el esquema de iteración

$$x^{k+1} = -D^{-1}(U+L)x^k + D^{-1}b = M_J x^k + N$$

con $M_J = -D^{-1}(U+L)$ (matriz de iteración) y $N = D^{-1}b$.
- Bajo determinadas condiciones sobre M_J el método converge a la solución del sistema.

- Luego el sistema puede escribirse

$$Dx = -(U+L)x + b$$

y en consecuencia podemos definir el esquema de iteración

$$x^{k+1} = -D^{-1}(U+L)x^k + D^{-1}b = M_J x^k + N$$

con $M_J = -D^{-1}(U+L)$ (matriz de iteración) y $N = D^{-1}b$.

- Bajo determinadas condiciones sobre M_J el método converge a la solución del sistema.

Actividades

- Consideremos $g(x) = 1 + x - \frac{x^2}{4}$ y el esquema de iteración $p_{n+1} = g(p_n)$.
  1. Hallar los puntos fijos de g
  2. Hallar las primeras tres iteraciones para los valores iniciales $p_0 = -2{,}05$ y $p_0 = 1{,}6$
  3. Comprobar que en el primer caso (p_n) no converge y que converge a $p = 2$ en el segundo caso. Para justificar esto use el teorema de punto fijo.
- El teorema no dice nada si $|g'(p)| = 1$. Consdiere $g(x) = 2(x-1)^2$ con $x \geq 1$.
  1. Compruebe que g tiene un único punto fijo $p = 2$.
  2. Verifique que si el dato inicial es $p_0 = 1{,}5$ entonces p_4 está fuera del dominio de g de manera que p_5 no puede calcularse; si $p_0 = 2,5$ se puede probar que $\lim_{n+\infty} p_n = 2$.

Actividades

- Consideremos $g(x) = x^2 - x - 3$ y el esquema de iteración $p_{n+1} = g(p_n)$.
    1. Determine el esquema de iteración $g(p_n) = p_{n-1}$ correspondiente al método de Newton.
    2. Hallar las tres primeras iteraciones para el valor inicial $p_0 = 1{,}6$.
    3. Hallar las cuatro primeras iteraciones para el valor inicial $p_0 = 0$.

- Considere el sistema $Ax = b$ con $(det(A) \neq 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar la descomposición $A = U + L + D$ y escribir las coordenadas del esquema de iteración.
2. Hallar las dos primeras aproximaciones de la solución del sistema con el valor inicial $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solución del sistema es $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Bibliografía

1. J. H. Mathews, K D. Fink. Métodos Numéricos con MATLAB. Tercera Edición Prentice Hall.
2. R. A. Holmgren. A First Course in Discrete Dynamical Systems. Second Edition. Springer.
3. K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. Chaos. An Introduction to Dynamical Systems. Springer.

MUCHAS GRACIAS
POR LA ATENCIÓN y HASTA EL PRÓXIMO ENCUENTRO!