Máximo Volumen y Mínima Área

Hugo Alvarez[*] y Agustín Alvarez[†]

enero de 2013

El motivo

Hemos observado que, en la medida en que nos alejamos de la más estricta ortodoxia matemática, refugiada en las facultades de Ciencias Exactas, nuestros alumnos y, a través de ellos, los mentores de sus carreras, más esperan y reclaman de la Matemática un conjunto de reglas calculatorias claras, precisas y excentas de razonamientos complicados. Es más fácil lograr de un estudiante de Ingeniería que resuelva un complejo problema de extremos a que dé una definición de máximo local. Serge Lang señala en su clásico libro de Cálculo [1] la similitud entre enseñar Matemática y enseñar una lengua extranjera. Todos tenemos en nuestra experiencia docente estudiantes certeros y veloces en hallar el resultado de un problema pero incapaces de explicar cómo lo hicieron. El padre de uno de los autores de este texto (luego abuelo del otro) contaba que, en sus primeros años de escuela primaria -que fueron todos- siendo el primero en resolver los problemas matemáticos que se presentaban, en el sentido de dar con el número buscado, nunca logró escribir una solución satisfactoria al sistema educativo. La mayoría de la gente tiene serias dificultades para adquirir el lenguaje matemático, que es la estructura del pensamiento matemático.

Nuestros clientes, los administradores de carreras científico-técnicas, jamás incluirán en sus pedidos un lenguaje matemático sin el cual creen que les ha ido muy bien en su profesión. Y hasta se quejarán si nosotros lo incluimos gratis en nuestra provisión. Sin embargo creemos que el lenguaje y la estructura de pensamiento que su tejido sostiene es el elemento más útil y valiososo que damos a nuestros estudiantes no matemáticos. Y pensamos que los docentes de Matemática debemos buscar todos los caminos para seguir enseñando lenguaje y pensamiento matemático. Un clásico problema de "extremos ligados" deja una oportunidad para plantear una interesante discusión que sometemos al lector como un ejemplo en esa dirección.

El problema

Una lata (de conservas, de gaseosa, de cerveza...) es un cilindro con dos tapas hecho de hojalata o de aluminio. El problema de maximizar su capacidad con el mínimo gasto posible de material tiene por solución no una lata sino una forma de lata. Sabiendo que se trata de un cilindro, decir una forma de lata es decir una relación entre las dos variables r (radio de las tapas) y h (altura de la pared lateral) que la definen. Para definir un

[*]Universidad Nacional de San Luis
[†]Universidad de BuenosAires

problema es necesario elegir uno de los dos objetivos: maximizar volumen o minimizar área. Sin embargo, parece claro que maximizar el volumen fijada el área conduce a la misma solución que minimizar el área fijado el volumen. Esto es,

> (A) Si el máximo del volumen $v(r,h)$ es V bajo la condición de que el área sea S, entonces el mínimo del área $s(r,h)$ será S bajo la condición de que el volumen esté fijado en el valor V.

Ante un grupo normal de estudiantes, casi de cualquier nivel, esta es una afirmación inquietante. A todos (o casi a todos) les sonará verdadera. Pero sólo una pequeña minoría comprende que puede y debe ser demostrada. Menos aún son aquellos capaces de demostrarla. Aunque se nos acuse de dar más importancia a las excepciones que a las reglas, ¿qué manera hay mejor que un contraejemplo para mostrar que la afirmación no es obvia? Entonces, la siguiente pregunta, antes de demostrar la afirmación, es

> ¿Lo dicho en (A) vale para todo par de funciones v y s, supuesto que ambos problemas de extremos ligados tienen solución?

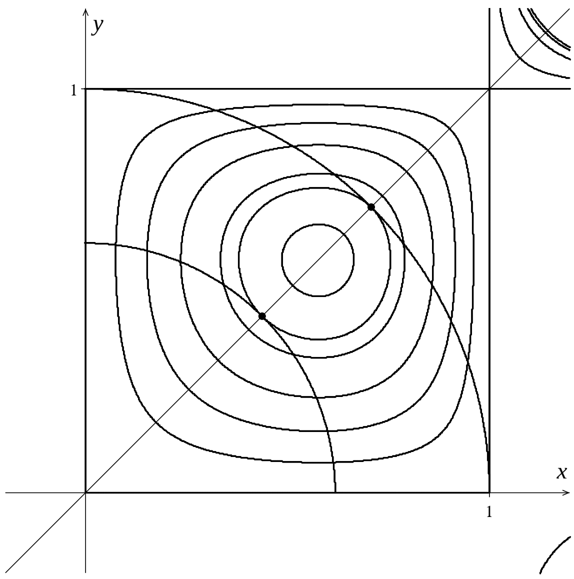
Veamos con un ejemplo que la respuesta es NO.

Sean

$$v(x,y) = xy\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)$$

$$s(x,y) = x^2 + y^2$$

en el primer cuadrante. Una gráfica de sus curvas de nivel se ve como sigue:



Bajo la condición $s(x,y) = 1$, el máximo valor de v se alcanza en el punto $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$ con valor $V = 1/8$. Pero para la restricción $v = 1/8$, el mínimo de s se alcanza en el punto $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-1\right)$ con un valor $S = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

Visto que (A) no es verdadera en general, si es que lo es para el volumen y la superficie de la lata esto debe ser probado. Y la prueba dependerá necesariamente de alguna propiedad de este par de funciones. La propiedad es que, si manteniendo la forma (esto es manteniendo la relación r/h), hacemos una dilatación del cilindro en que una de las funciones aumenta, la otra también aumentará. Observado esto, veamos una demostración de (A).

Si existiese una lata de volumen V con superficie $S_1 < S$, podríamos dilatarla hasta que su superficie sea S, pero entonces su volumen también crecería hasta un valor V', necesariamente mayor que V. Tendríamos entonces una lata de superficie S con volumen mayor que V. Contradicción.

Una generalización

Las funciones $v(r,h) = \pi r^2 h$ y $s(r,h) = 2\pi r(r+h)$ que describen el volumen y el área de la lata son conocidas desde la Geometría elemental. Su propiedad respecto de las dilataciones

$$v(\lambda r, \lambda h) = \lambda^3 v(r,h), \quad s(\lambda r, \lambda h) = \lambda^2 s(r,h),$$

Se llama *homogeneidad*. Es la llave para obtener un enunciado y una demostración más claros. Concretamente.

Vamos a llamar *cono* en $\mathbb{R}^n$ a cualquier conjunto Γ tal que $(\mathbf{x} \in \Gamma \ \& \ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda\mathbf{x} \in \Gamma)$. Una función f es *homogénea* de grado p si $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$. Con estas definiciones vale lo siguiente:

Teorema.

Sea Γ un cono en $\mathbb{R}^n$; $v, s : \Gamma \to \mathbb{R}$ funciones homogéneas de grados positivos p, q respectivamente. Si v tiene en $\mathbf{x}_0$ un máximo de valor V relativo a la condición $s = S$, entonces s tiene en ese punto un mínimo relativo a la condición $v = V$.

Demostración:

Si así no fuera, existiría un punto $\mathbf{x}_1 \in \Gamma$ tal que

$$v(\mathbf{x}_1) = V \qquad , \qquad s(\mathbf{x}_1) < s(\mathbf{x}_0) = S.$$

En este caso, el punto

$$\mathbf{p} = \left[\frac{S}{s(\mathbf{x}_1)}\right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{x}_1$$

cumple que

$$s(\mathbf{p}) = S \qquad , \qquad v(\mathbf{p}) = \left[\frac{S}{s(\mathbf{x}_1)}\right]^{\frac{p}{q}} V > V,$$

en contradicción con la maximalidad relativa de v en $\mathbf{x}_0$ $\blacksquare$

Otros ejemplos de sólidos a los que se aplica este teorema son conos y prismas rectos.

Una formulación más abstracta

La homogeneidad es una condición inherente a volúmenes y áreas pero no parece lo más natural para el problema de dos funciones que interactúan, una como condicionante de la otra, en un problema de extremos. Supongamos que hay dos funciones con valores reales no negativos, v y s, definidas en cualquier espacio E, y que sabemos que, para cada número positivo S, la función v alcanza su máximo relativo a la condición $s = S$. Supongamos asimismo que, para todo V, la función s alcanza su mínimo relativo a la condición $v = V$. ¿Bajo qué condiciones tendrá validez una afirmación similar a (A)?,digamos

(B) Si el máximo valor de v bajo la condición $s = S$ es V, entonces el mínimo valor de s bajo la condición $v = V$ es S.

La idea que permite aceder a este grado de generalización es centrarse en la dependencia entre las dos variables V y S, descripta a través de funciones que descubran los aspectos relevantes de esa dependencia.

Si volvemos al problema original de la lata para tener una idea intuitiva, vemos que las relaciones son como sigue:
Dada un área S, hay un máximo volumen V para latas de área S. $\phi : S \mapsto V = \phi(S)$.
De igual modo, dado un volumen V, habrá un área mínima S para latas de volmen V. $\psi : V \mapsto S = \psi(V)$. Y además estas funciones resultan crecientes. Porque es claro que a partir de un área más grande S' se podrá construir una lata de capacidad más grande $V' > V$. De igual manera, a partir de un volumen $V' > V$, hará falta más material para construir la lata más económica que lo contenga.

Volviendo al problema general, entonces, podemos definir dos nuevas funciones. Una, dependiente de S, el valor máximo de v relativo a la condición $s = S$:

$$\phi(S) = \max(v \mid s = S).$$

La otra, dependiente de V,

$$\psi(V) = \min(s \mid v = V).$$

Y estas dos funciones contienen todo lo necesario para plantear el poblema (B).,
cuya traducción sería:

(B') Si $\phi(S) = V$ entonces $\psi(V) = S$.

Por la simetría de los roles de v y s, es razonable plantearse el problema reemplazando el "entonces" en (B') por "si y sólo si"

(B'') $\phi(S) = V$ si y sólo si $\psi(V) = S$.

Y esto es exactamente decir que las funciones ϕ y ψ son cada una inversa de la otra. Veremos que para ello es suficiente que ambas sean estrictamente crecientes, hecho que vimos se verifica en el caso concreto del cual venimos.

Teorema:

Si v, s, ϕ y ψ son como se acaba de describir y además ϕ y ψ son estrictamente crecientes, entonces ϕ y ψ son una inversa de la otra.

Demostración:

Se deberá probar que $\psi \circ \phi(S) = S$ y que $\phi \circ \psi(V) = V$. Pero una sola de las dos igualdades basta, por la inyectividad de las funciones, derivada de su estricta monotonía (Cf. [2] pag. 161). Nótese ante todo que, a partir de la definición de ϕ, $\phi(S) = V$ implica la existencia de algún punto $\mathbf{p} \in E$ tal que $s(\mathbf{p}) = S$ y $v(\mathbf{p}) = V$, siendo éste el máximo valor que toma v mientras $s = S$.

Probaremos que $\psi \circ \phi(S) = S$. Es claro que $\psi[\phi(S)] \leq S$. En efecto, con la notación del párrafo anterior, por la definición de ψ, $\psi(V) \leq s(\mathbf{p}) = S$.

Ahora veremos que no podría ser $\psi[\phi(S)] < S$. Si fuera $\psi[\phi(S)] = S' < S$, existiría un punto $\mathbf{q}$ con $v(\mathbf{q}) = \phi(S)$ y $s(\mathbf{q}) = S' < S$. Pero entonces

$$\phi(S') = \max(v \mid s = S') \geq \phi(S)$$

en contra del carácter estrictamente creciente de ϕ ■

Refencias.

[1] S. Lang, *Cálculo*, Addison Wesley Iberoamericana, 1990

[2] H. Alvarez, *Notas de Cálculo 2ª ed.,* NEU, San Luis, 2010